Book1

The Frequencies Of Nature

Some hidden fragments are existing so splendidly that only the one who dramatically happens to have strong desires to have a glance of the remaining romance written by this world or by these words…

Welcome to link into my grid: soon you'll find yourself already online together with the ∞ power of "巨型运算符", and all those delicate lies seem increasingly delicate but delicate ya…

When you do met some indescribable hurdles, always remember: observation goes before your thoughts…

2016.9.25~2016.11.16

目录

一．An expanded perception:排列组合的另类表达，将累乘转变为累加的数学分析

I.引入：我在把简单问题复杂化？嗯，从等式右边到等式左边，是的；但另一方面，从等式右边到等式左边，某些复杂问题可以被如此地简单化。

1. "6 个中选 3 个=(其中某 certain 的 5 个中选 2 个+剩下的 1 个)+(这些 certain 的 5 个中选 3 个）"⇒ $C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{m-1}^n$

2.类似C_m^n地，上式中C_{m-1}^n也可被分解为$C_{m-2}^{n-1}+C_{m-2}^n$，【为什么不分解上式中的另一项C_{m-1}^{n-1}呢？其实两者都是可以的，但从简洁程度和有效程度上不如这种分解方式，等下

我可以演示演示。】接下来我们把接下来的所有分解得到的同类：第二项，模仿第 1 点，进行相同的分解行动。

3.分解过程中你会发现规律，即剩下的那个即将不会被分解的项，的上角标和下角标，总等于上一次分解之前那个剩下的项的上角标和下角标-1。THEN，最终你将得到这样一个表达式$C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{m-2}^{n-1}+C_{m-3}^{n-1}+C_{m-4}^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$，为了好看和为了能和其它项的上角标对齐和为了能写成一个更精炼的公式，现把最后一项C_n^n写作C_{n-1}^{n-1}。那么我们便得到了$C_m^n=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$。

4.继续我们的旅程，现把C_i^{n-1}看作下一个将要被如第 3 点一样操作的C_m^n，那么可以有$C_i^{n-1}=\sum_{j=n-2}^{i-1}C_j^{n-2}$，同理继续也将有$C_j^{n-2}=\sum_{k=n-3}^{j-1}C_k^{n-3}$。现在为了后续工作的顺利进行，我们把临时写的 i、j、k 写作 i1、i2、i3，那么将有$C_m^n=\sum_{i1=n-1}^{m-1}(\sum_{i2=n-2}^{i1-1}(\sum_{i3=n-3}^{i2-1}C_{i3}^{n-3}))$，由于求和符号已经有了括号的功能，我们把括号去掉得到：$C_m^n=\sum_{i1=n-1}^{m-1}\sum_{i2=n-2}^{i1-1}\sum_{i3=n-3}^{i2-1}C_{i3}^{n-3}$。【给看着它不知道如何计算它的各位科普一下：在电脑/人类逻辑体执行以上运算的过程中，我们总是从左到右，从外到里地计算每一个求和符号之后/之内的所有内容；并且当内层求和运算还没有被计算完成时，外层求和运算的 ik 不会+1，它们总是要等待内层的 ik 到最大值之后才又开始+1，直至该层的 ik 又达到最大值，才会让下一个更外层的 ik+1。】

5.继续把上式中的C_{i3}^{n-3}以及之后的所有C_{i3}^{n-3}的同类，分解成求和的模样，将得到$C_m^n=\sum_{i1=n-1}^{m-1}\sum_{i2=n-2}^{i1-1}\sum_{i3=n-3}^{i2-1}\cdots\sum_{in-2=2}^{in-3-1}C_{in-2}^2$下面我们继续分解，又因$C_{in-2}^2=in-2(in-2-1)/2=(1+2+3+\cdots(in-2-1))=\sum_{in-1=1}^{in-2-1}in-1$，所以我们可以向下再走一步得到：$C_m^n=\sum_{i1=n-1}^{m-1}\sum_{i2=n-2}^{i1-1}\sum_{i3=n-3}^{i2-1}\cdots\sum_{in-2=2}^{in-3-1}\sum_{in-1=1}^{in-2-1}in-1$，到这一步后各位可能觉得没法再分解了，可我尚感还有将$in-1$变成 in 的必要，虽仅仅为了好看：又$in-1=\sum_{in=1}^{in-1}f(in)=\sum_{in=0}^{in-1-1}f(in)$，其中令$f(in)$恒等于 1。THEN，Here comes the formula:

$C_m^n=\sum_{i1=n-1}^{m-1}\sum_{i2=n-2}^{i1-1}\sum_{i3=n-3}^{i2-1}\cdots\sum_{in-2=2}^{in-3-1}\sum_{in-1=1}^{in-2-1}\sum_{in=0}^{in-1-1}f(in)$，并且$f(in)=1$。

这便是C_m^n的另一种表达形式/存在形式，自然界的大数据的两种表示形式之一。

【外传】：如若在第 2 步选择分解C_{m-1}^{n-1}，那么类似地，像以上 5 步一样地，将有$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-2}^{n-1}+C_{m-3}^{n-2}+\cdots+C_{m-n}^{n-n}+C_{m-n}^1$，现写作$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-2}^{n-1}+C_{m-3}^{n-2}+\cdots+C_{m-n}^1+C_{m-n}^0$，并继续写作$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-2}^{n-1}+C_{m-3}^{n-2}+\cdots+C_{m-n}^1+C_{m-n-1}^0=\sum_{i=1}^{n+1}C_{m-i}^{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n}C_{m-1-i}^{n-i}$

现在相当于我们走到了之前的第三步的末尾，现我们直接跳至第五步的最终结果：

$$C_m^n=\sum_{i1=0}^{n}\sum_{i2=0}^{n-i1}\sum_{i3=0}^{n-i1-i2}\cdots\sum_{ik=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-1}ij}C_{m-k-\sum_{j=1}^{k}ij}^{n-\sum_{j=1}^{k}ij}$$

$$C_m^n=\sum_{i1=0}^{n}\sum_{i2=0}^{n-i1}\sum_{i3=0}^{n-i1-i2}\cdots\sum_{ik=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-1}ij}\cdots\sum_{im-n=0}^{n-\sum_{j=1}^{m-n-1}ij}C_{n-\sum_{j=1}^{m-n}ij}^{n-\sum_{j=1}^{m-n}ij}$$

$C_m^n=\sum_{i1=0}^{n}\sum_{i2=0}^{n-i1}\sum_{i3=0}^{n-i1-i2}\cdots\sum_{ik=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-1}ij}\cdots\sum_{im-n=0}^{n-\sum_{j=1}^{m-n-1}ij}f(im-n)$，其中$f(im-n)$恒等于 1。

这种分解方法所展示的景观也有逆向运用实例，这方面和第一种方法有着等同地位。

II.Commands from the invalid perception:下面我们开始用第一种分解方式的逆运算，

展示一种得到“泰勒公式”的方法[后者纯属一个过去的幻想。。]

1.据定义有：$f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n+1}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(a+k\Delta x)}^{n}-f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n}}{\Delta x}$，则在$\Delta x\to 0$的前提下有：$f_{(a+k\Delta x)}^{n}\approx f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n}+\Delta x*f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n+1}$[其实更原本更精确地应被写作微分形式：$f_{(a+k\Delta x)}^{n}-f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n}=\Delta x*f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n+1}+o(\Delta x)$，所以我们其实从这里开始就已经不精确地想要忽略重重个关于Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$，so 最终结果肯定仍有误差，但其理论价值尚在。]，现在我们把分解出的其中一项无Δx 且阶数较高的$f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n}$看作新的/下一个$f_{(a+k\Delta x)}^{n}$，并把接下来的每一个具有此特点的新分解出的项进行同样的操作，如此下去我们便在以“导数阶数的增加“来换取”括号内 k 值的减少“的收益，最终会得到$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*f_{(a)}^{n+1}+\Delta x*f_{(a+\Delta x)}^{n+1}+\cdots+\Delta x*f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n+1}$，即$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i=0}^{k-1}f_{(a+i\Delta x)}^{n+1}$(从这开始把上式中的“≈”写成“=”了，彻底忽略了$o(\Delta x)$)。

同样地，我们将上式改写为$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i1=0}^{k-1}f_{(a+i1\Delta x)}^{n+1}$，并对$f_{(a+i1\Delta x)}^{n+1}$进行相同操作得到$f_{(a+i1\Delta x)}^{n+1}=f_{(a)}^{n+1}+\Delta x*\sum_{i2=0}^{i1-1}f_{(a+i2\Delta x)}^{n+2}$，现把后者带入前者有$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i1=0}^{k-1}(f_{(a)}^{n+1}+\Delta x*\sum_{i2=0}^{i1-1}f_{(a+i2\Delta x)}^{n+2})$，现在我们继续向下分解便有：

$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i1=0}^{k-1}(f_{(a)}^{n+1}+\Delta x*\sum_{i2=0}^{i1-1}(f_{(a)}^{n+2}+\Delta x*\sum_{i3=0}^{i2-1}(\cdots+\Delta x*\sum_{ik-1=0}^{ik-2-1}(f_{(a)}^{n+k-1}+\Delta x*\sum_{ik=0}^{ik-1-1}f_{(a+ik\Delta x)}^{n+k})\cdots)))$【这里由于 i1 只会加到 k-1，所以 i2 只会加到 k-2，所以 ik 为最末/最内一层，它的值只能加到/就等于 0；并且还要说明一点：当 i1=0 时，后一层求和将出现$\sum_{i2=0}^{-1}***$的情况，这就表明，当多层求和中的上层参数低于下层起始条件时，便意味着“条件不够”而不会计算下层求和中的任何内容，这时可看作对于 i1=0 的运算已经因“碰壁”而结束或完成了，那么外层求和便开始继续向上攀爬的旅程：i1=0+1，以至于满足下层求和的起始条件。 //其实这是受求和符号本身所规定的“自变量必须从小到大取满区间内所有整数”的规定而束缚的，其实求和本身的意思只需要“取满区间内的所有整数”即可（甚至只需自变量取满所有“能取的”值即可），并不需要规定必须“从小到大”or“从大到小”地取// 】【若各位还是不好理解的话，你可以尝试着把所有层数的自变量变化顺序顺序修改成“从大到小”：$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i1=k-1}^{0}(f_{(a)}^{n+1}+\Delta x*\sum_{i2=i1-1}^{0}(f_{(a)}^{n+2}+\Delta x*\sum_{i3=i2-1}^{0}(\cdots+\Delta x*\sum_{ik-1=ik-2-1}^{0}(f_{(a)}^{n+k-1}+\Delta x*\sum_{ik=ik-1-1}^{0}f_{(a+ik\Delta x)}^{n+k})\cdots)))$】

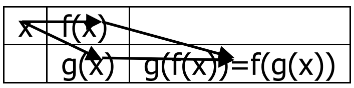
现将其展开：$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a)}^{n}+\Delta x*\sum_{i1=0}^{k-1}f(i1)f_{(a)}^{n+1}+\Delta x^2*\sum_{i1=1}^{k-1}\sum_{i2=0}^{i1-1}f(i2)f_{(a)}^{n+2}+\Delta x^3*\sum_{i1=2}^{k-1}\sum_{i2=1}^{i1-1}\sum_{i3=0}^{i2-1}f(i3)f_{(a)}^{n+3}+\cdots+\Delta x^k*\sum_{i1=k-1}^{k-1}\sum_{i2=k-2}^{i1-1}\cdots\sum_{ik-1=1}^{ik-2-1}\sum_{ik=0}^{ik-1-1}f(ik)f_{(a+ik\Delta x)}^{n+k}$由

于前文注释里已经说明了 ik=0，并且观察到所有多层求和完全满足 I 中的第一种分解的逆运算，所以上式进一步优化为$f^{n}_{(a+k\Delta x)}=C^{0}_{k}f^{n}_{(a)}+\Delta x*C^{1}_{k}*f^{n+1}_{(a)}+\Delta x^{2}*C^{2}_{k}*f^{n+2}_{(a)}+\Delta x^{3}*C^{3}_{k}*f^{n+3}_{(a)}+\cdots+\Delta x^{k}*C^{k}_{k}*f^{n+k}_{(a)}$再次简化一下/写成求和的形式便是：$f^{n}_{(a+k\Delta x)}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C^{i}_{k}f^{n+i}_{(a)}$。

2.现在我们观察一下以下一个(k+1)*(k+1)的三角形表：

1	2	3	4	5	…	k+1	
$1f^{n}_{(a+k\Delta x)}$	$1f^{n}_{(a+(k-1)\Delta x)}$	$1f^{n}_{(a+(k-2)\Delta x)}$	1	1	1	$C^{0}_{k}f^{n}_{(a)}$	k+1
2^0	$1\Delta x*f^{n+1}_{(a+(k-1)\Delta x)}$	$2\Delta x*f^{n+1}_{(a+(k-2)\Delta x)}$	2+1	3+1	…	$\Delta x*C^{1}_{k}*f^{n+1}_{(a)}$	…
	2^1	$1\Delta x$^2 $*f^{n+2}_{(a+(k-2)\Delta x)}$	1+2	3+3	…	…	5
		2^2	1	1+3	…	…	4
x	f(x)	f(f(x))	2^3	1	…	…	3
	g(x)	f(g(x))+g(f(x))		2^4	1	…	2
		g(g(x))			2^k-1	$\Delta x^{k}*C^{k}_{k}*f^{n+k}_{(a)}$	1

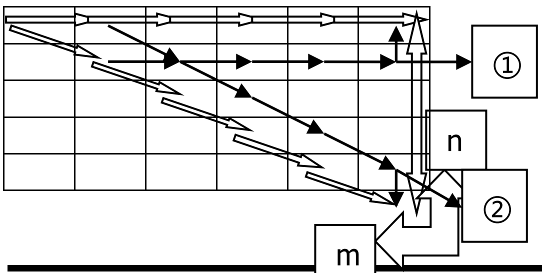
可发现，还有更简单的方法得到$f^{n}_{(a+k\Delta x)}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C^{i}_{k}f^{n+i}_{(a)}$，基本原理是所有满足“闭合



的平行四边形原则”，即所有满足“把一分为二 or 合二为一的两种分裂/聚合方法按不同的先后顺序作用于同一个输入值后，将得到相同的输出值”的映射关系，都将最终呈现这样的大数据景象。

//也就是说，若映射 h(x)=f(x)+g(x)且满足 f(g(x))=g(f(x))，那么 h(x)这种映射符合此种规律。有意思的是：设有 m(x)= f(g(x))=g(f(x))，则 g(f(g(x)))=g(g(f(x)))，则 g(f(g(x)))=g(g(f(x)))，即 m(g(x))=g(m(x))，同理可证 m(f(x))=f(m(x))，综上，若继续设有 n(x)= m(g(x))=g(m(x))，则将继续有 g(n(x))=n(g(x))以及 f(n(x))=n(f(x))以至向外无限层//【注：这里还有个不言而喻的规则：m(h(x))=m(f(x)+g(x))=m(f(x))+m(g(x))】

3.联接：下图中，①对应【$C^{n}_{m}=\sum_{i=n-1}^{m-1}C^{n-1}_{i}$和它的衍生物$C^{n}_{m}=\sum_{i1=n-1}^{m-1}\sum_{i2=n-2}^{i1-1}\sum_{i3=n-3}^{i2-1}\cdots\sum_{in-2=2}^{in-3-1}\sum_{in-1=1}^{in-2-1}\sum_{in=0}^{in-1-1}f(in)$，$f(in)=1$】，②对应【$C^{n}_{m}=\sum_{i=0}^{n}C^{n-i}_{m-1-i}$和它的衍生物$C^{n}_{m}=\sum_{i1=0}^{n}\sum_{i2=0}^{n-i1}\sum_{i3=0}^{n-i1-i2}\cdots\sum_{ik=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-1}ij}\cdots\sum_{im-n=0}^{n-\sum_{j=1}^{m-n-1}ij}f(im-n)$，$f(im-n)=1$】



由此图可知，用①的孪　　　　　　生兄弟②$C_m^n=\sum_{i1=0}^{n}\sum_{i2=0}^{n-i1}\sum_{i3=0}^{n-i1-i2}\cdots\sum_{ik=0}^{n-\sum_{j=1}^{k-1}ij}\cdots\sum_{im-n=0}^{n-\sum_{j=1}^{m-n-1}ij}f(im-n)$，$f(im-n)=1$，也可推导出$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C_k^i f_{(a)}^{n+i}$。

1	2	3	…	n+1	
$1C_m^n$	$1C_{m-1}^n$	$1C_{m-2}^n$	1	$C_n^0C_{m-n}^n$	n+1
2^0	$1C_{m-1}^{n-1}$	$2C_{m-2}^{n-1}$	3	$C_n^1C_{m-n}^{n-1}$	…
	2^1	$1C_{m-2}^{n-2}$	3	…	3
		2^2	1	…	2
			2^3	$C_n^nC_{m-n}^0$	1

又如图，像$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C_k^i f_{(a)}^{n+i}$地，$C_m^n$也可有$C_m^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iC_{m-n}^{n-i}$。　//注：这里默认 m-n 大于 n，这其实是超几何分布的特殊情况，到时候我再细说//

4.总结：正如第 2 点所说，【$C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{m-1}^n$】、【$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n}+\Delta x*f_{(a+(k-1)\Delta x)}^{n+1}$】、【E(t)=E(t-Δt)-L/R*E(t-Δt)′】、【(g(x)f(x))′=f(x)g(x)′+g(x)f(x)′】等，由于满足第二点提出的映射关系，所以可共用【$C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{m-1}^n$】的 3 个方向的最终结论。

5.回到$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C_k^i f_{(a)}^{n+i}$上来，现在令 a+kΔx=x0，则Δx=(x0-a)/k，则$f_{(a+k\Delta x)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\Delta x^{i}C_k^i f_{(a)}^{n+i}$会被写为$f_{(x0)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(x0-a)^iC_k^i}{k^i}*f_{(a)}^{n+i}$，若对$\frac{C_k^i}{k^i}$进行变换：$f_{(x0)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!k^i}*\frac{(x0-a)^i}{i!}*f_{(a)}^{n+i}$，[以下所有关于泰勒公式的请读者忽略掉。。泰勒公式不是这样推出来的，这是我高中的想法]现在由于$\frac{k!}{(k-i)!k^i}=\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{k^i}=\prod_{j=1}^{i}(1-\frac{j-1}{k})$，当 i 较小时它约等于 1，那么为了简化和少引进 k 但不失精确【其实另一种说法：由于忽略了无穷多个$o(\Delta x)$，我们已经不怎么精确了，所以不管有没有这个步骤，本质上也没有多大变化：都是近似。但不进行此步骤的近似更加近似，且是仅仅/纯忽略高阶无穷小的近似；另外，两者都可被补充/还原成无误差的本体，因为两者都是可计算的，且两者与目标函数值的误差也是可量度的。】，我们现有$f_{(x0)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(x0-a)^i}{i!}*f_{(a)}^{n+i}$+余项。

(这里的余项也有两种理解，一种包括了高阶无穷小，一种没包括高阶无穷小。)现在令 n=0，即有著名的泰勒公式$f(x0)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(x0-a)^i}{i!}*f_{(a)}^{i}$+余项。

【①.这里有个有趣的东西$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$，且$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$收敛，且当 k→∞时，$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\to 2.718\cdots$=e；②.下面我们来探讨探讨 e 的特性的得来/e 的得来：对$f_{(x0)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(x0-a)^i*f_{(a)}^{n+i}$，现假设 x0=a+1，且取 k→无穷大，则有$f_{(a+1)}^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(1)^i*f_{(a)}^{n+i}$，这对于任意函数 f(x)都成立；但现在进一步假设有一个函数 g(x)其$g_{(a+1)}^{n+i}=g_{(a+1)}^{n}$，即其第 i 阶导仍等于其自身，那么把这种假定的函数带进泰勒公式则有$g_{(a+1)}^{n}=(\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i})*g_{(a)}^{n}$则有$\frac{g(a+1)}{g(a)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}$，则可知这种函数 g(x)符合指数

函数特征，记其为 e^x，且底数 e 的值为$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}$；③.如果在知晓此前一切后我们取 x0=a+m，则可知$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(m)^i=e^m$即$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n=e^m$】

6.割线的斜率的近似表示与拉格朗日中定理的近似表示：

对于割线的斜率的表示方法：$\frac{f(x0)-f(a)}{x0-a}=\frac{\sum_{i=0}^{k}\frac{(x0-a)^i}{i!}*f_{(a)}^i+余项-f(a)}{x0-a}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x0-a)^{i-1}}{i!}*f_{(a)}^i+余项$ /(x0-a)，当然，更原始的是：$\frac{f(x0)-f(a)}{x0-a}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x0-a)^{i-1}C_k^i}{k^i}*f_{(a)}^i$。

(1).现对于 x1∈(a,x0)，据$f_{(x0)}^n=\sum_{i=0}^{k}\frac{(x0-a)^iC_k^i}{k^i}*f_{(a)}^{n+i}$有，令 n=1，x0=x1，k=k1 得，f(x0)′=$\sum_{i=0}^{k1}\frac{(x1-a)^iC_{k1}^i}{k1^i}*f_{(a)}^{i+1}$

i.若现把它写作 f(x0)′=$\sum_{i=1}^{k1+1}\frac{(x1-a)^{i-1}C_{k1}^{i-1}}{k1^{i-1}}*f_{(a)}^i$。那么此时拉格朗日中定理可以被这样表述：总存在一 x1∈(a,x0)，使得$\frac{f(x0)-f(a)}{x0-a}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x0-a)^{i-1}C_k^i}{k^i}*f_{(a)}^i=\sum_{i=1}^{k1+1}\frac{(x1-a)^{i-1}C_{k1}^{i-1}}{k1^{i-1}}*f_{(a)}^i=$ f(x0)′；若令表精确程度的 k1 和 k 相等，那么有$\sum_{i=1}^{k}\frac{(x0-a)^{i-1}C_k^i}{k^i}*f_{(a)}^i=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(x1-a)^{i-1}C_k^{i-1}}{k^{i-1}}*f_{(a)}^i$，即总有一 x1∈(a,x0)，使得$\sum_{i=1}^{k}(\frac{C_k^i}{k^i}*(x0-a)^{i-1}-\frac{C_k^{i-1}}{k^{i-1}}*(x1-a)^{i-1})*f_{(a)}^i=\frac{1}{k^k}*(x1-a)^k*f_{(a)}^{k+1}$。

ii.若把它写作 f(x0)′=$\sum_{i=1}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(x1-a)^i*f_{(a)}^{i+1}$+f(a)′，那么可表示为$\sum_{i=1}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(x0-a)^{i-1}*f_{(a)}^i=\sum_{i=1}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}*(x1-a)^i*f_{(a)}^{i+1}$+f(a)′，接下来仍是合并同类项：f(a)′=$\sum_{i=1}^{k}\frac{C_k^i}{k^i}((x0-a)^{i-1}*f_{(a)}^i-(x1-a)^i*f_{(a)}^{i+1})$。

(2).若用有余项的形式来表示的话：$\sum_{i=1}^{k}\frac{(x0-a)^{i-1}}{i!}*f_{(a)}^i$+余项 1/(x0-a)= $\sum_{i=0}^{k}\frac{(x1-a)^i}{i!}*f_{(a)}^{i+1}$+余项 2；然后依照(1). ii.有：f(a)′=$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}((x0-a)^{i-1}*f_{(a)}^i-(x1-a)^i*f_{(a)}^{i+1})$+(余项 1/(x0-a)- 余项 2)

III.对反电动势的思考【E(t)=E(t-Δt)-L/R*E(t-Δt)′】是激发了以上内容的功臣

现在来看，不难看出【E(t)=E(t-Δt)-L/R*E(t-Δt)′】就是【$f_{(t0+k\Delta t)}^n=f_{(t0+(k-1)\Delta t)}^n+\Delta t*f_{(t0+(k-1)\Delta t)}^{n+1}$】的一种具体表现形式而已，其中$t0+k\Delta t=t$，f(t)=E(t)，n=0，Δt=-L/R，【注：依次替换】那么我们便可以直接依葫芦画瓢得：$f(t0+k\Delta t)=\sum_{i=0}^{k}(-L/R)^iC_k^if_{(t0)}^i$，并进一步写作 E(t)= $\sum_{i=0}^{k}(-L/R)^iC_k^iE_{(t0)}^i$，这便是最终结果。 //注：设 E1(t)表示大自然安排的第一(不知道是否有第二次，也不知道是逻辑上还是时间上的第一次，但这里是在假设有第二次的情况下进行的讨论)次反电动势，则 E1(t)=-L$\frac{\Delta I}{\Delta t}$=-L$\frac{E(t)'}{R}$=-L/R*E(t)′，则下一次考虑了反电动势的总电动势 E(t+Δt)=E(t)+ E1(t)= E(t)-L/R*E(t)′，则可得到【E(t)=E(t-Δt)-L/R*E(t-Δt)′】//

IV.乘法求导的莱布尼兹公式的得来及尝试着求复合函数的 n 阶导

这里首先要说明一下，同样是 f(x)g(x)=f(x)′g(x)+f(x)g(x)′，它有着许多种分类标准下的写法，比如以下大类：f(x)g(x)=f(x)′g(x)+f(x)g(x)′和 f(x)g(x)=f(x)g(x)′+f(x)′g(x)。这表示函数名位置不变的大类标准下，有导数阶数记号邻近和号与导数阶数记号远离和号之分。【这两者：乘法可逆，加法可逆，函数名替换不可逆(这个均不可逆，因本来就是位置型的定义)】【乘法可逆：当 A 式子中乘法符号两边的函数交换位置后，新式子等价于 B 式子；同理加法可逆】

再比如大类 2：(g(x)f(x))′=f(x)g(x)′+g(x)f(x)′和(f(x)g(x))′=f(x)g(x)′+g(x)f(x)′[或写作(g(x)f(x))′= g(x)f(x)′+ f(x)g(x)′]，这表示"导数阶数增加的函数名向右缩进"的标准下，函数名位置改变。【这两者：乘法不可逆，加法可逆，函数名替换不可逆(这个均不可逆，因本来就是位置型的定义)】

甲.对于我这种习惯了把高阶导放后面的 student 来说(其实真实的是：导数阶数增加了的放后面；并且以下导数阶数增加了的不一定都为高阶导，则最后不一定被放在后面，则下面的做法在有效性上做了负功。。以下相当于为了维护我的习惯而不得不创造规则)，以这个为排序标准会导致一些不得不出现的规则，不像以下这种排序规则那么好：

f(x)g(x)=f(x)′g(x)+f(x)g(x)′

f(x)g(x)→f(x)′g(x)→f(x)′g(x)′

f(x)g(x)→f(x)g(x)′→f(x)′g(x)′

如果以下表格用这种方法写，那么会省很多事。。但，这也是某种标准下的奇怪真理，如果各位是毅力帝的话，就像我一样坚持下去吧。。

乙.

蓝色(更准确地说：从↙到↗的奇数列)是 The order1：(g(x)f(x))′=f(x)g(x)′+g(x)f(x)′

红色(更准确地说：从↙到↗的偶数列)是 The order1′：(f(x)g(x))′=g(x)′f(x)+f(x)′g(x)

其中 The order1′是 The order1 的全逆序形式(或者说它俩互为全逆序)，即函数名相替换(不带走导数阶数记号)+乘法逆序(要带走导数阶数)+加法也逆序的形式

其中的道理是：

1.奇到偶到偶：→(→↓)=先 1 前再 1′后=g(x)f(x)到 f(x)g(x)′再到 f(x)′g(x)′

=奇到奇到偶：(↓→)→=先 1 后再 1 前=g(x)f(x)到 g(x)f(x)′再到 f(x)′g(x)′

2.偶到奇到奇：→(→↓)=先 1′前再 1 后=f(x)g(x)到 g(x)′f(x)再到 g(x)′f(x)′

=偶到偶到奇：(↓→)→=先 1′后再 1′前=f(x)g(x)到 f(x)′g(x)再到 g(x)′f(x)′

这样便可保证：两条平行四边形路径通往同一个具体式子，并且包括符号的前后顺序。

那么因此，对于不会求的空格，模仿它所在的←或←↑的空格，该空格所在的斜列的各个格子(甚至所有同类的格子)，是怎么分裂出自己的小弟到自己的→或→↓的空格的。

1.求 g(x)f(x)的 n 阶导。(答案可通过以下片段直接得到，这里不再细说)

g(x)f(x)	f(x)g(x)′	1g(x)″f(x)	1f(x)g(x)‴
	g(x)f(x)′	2f(x)′g(x)′	(2+1) g(x)″f(x)′
		1g(x)f(x)″	(1+2) f(x)″g(x)′
			1g(x)f(x)‴

2.尝试求 g(x)/f(x)的 n 阶导：不用创造了 The order1 的(g(x)/f(x))′=[f(x)g(x)′-g(x)f(x)′]/$f(x)^2$，而采取通过复合来求。

g(x)$f(x)^{-1}$	$f(x)^{-1}$f(x)′	1g(x)″$f(x)^{-1}$	1$f(x)^{-1}$g(x)‴
	g(x)$f(x)^{-1\prime}$	2$f(x)^{-1\prime}$g(x)′	(2+1) g(x)″$f(x)^{-1\prime}$
		1g(x)$f(x)^{-1\prime\prime}$	(1+2)$f(x)^{-1\prime\prime}$g(x)′
			1g(x)$f(x)^{-1\prime\prime\prime}$

3.发现我们得首先求出复合函数的 n 阶导公式。

除了先前的红蓝双方这种斜对角线规则，我们还得另设：

规则 1：总把奇数列所分解出的运算得来过程较为简单的写在前面，它的不同种类的小弟用不同颜色区分着写完后，再写偶数列的的同种函数，[蓝色，红色)之间属于↖或者←的蓝色，[红色之后]属于←或者↖的红色，并且相同颜色表示可合并同类项，同一个方框内的红色和蓝色也是可合并同类项的(总的来说，蓝色优先级高)

规则 2：同一个函数的各阶导函数的乘积，按照低阶到高阶=从左到右排列

规则 3：求导求出来的数字在 word 公式内，同类项合并出来的数字在 word 公式外

规则 4：左或左上的格子里若为多个不同类的式子相加，该格子右或右下的格子里的导数不需用对应颜色区分它们是由那个格子中的哪一项得来的(那么不同格子之间的除了红蓝之外的相同颜色并非一定有意义。)[因为颜色的区分功能只用于区分该格子中同类项之间，当两者冲突时，优先保证这个利益。]，(但要区分是从哪个格子得来的[即头文字的颜色：红 or 蓝])，不过它们的排列顺序与所属对象多对一地从上到下排列。

f(u(x))′	f(u)′u(x)′	$(u(x)')^2$f(u)″	1f(u)‴ $(u(x)')^3$	1$(u(x)')^4$f(u)⁗	1f(u)′′′′′ $(u(x)')^5$
	f(u)′u(x)″	1u(x)′u(x)″f(u)″ +2u(x)′u(x)″f(u)″	1f(u)‴ 3$(u(x)')^2$u(x)″ +3f(u)‴$(u(x)')^2$u(x)″	6$(u(x)')^3$u(x)″f(u)⁗ +4$(u(x)')^3$u(x)″f(u)⁗	
		1f(u)′u(x)‴	1u(x)′u(x)‴f(u)″	6f(u)‴ $(u(x)')^2$u(x)‴	

				$+3u(x)'u(x)'''f(u)''$ $+3(u(x)'')^2f(u)''$	$+6f(u)'''\,2u(x)'(u(x)'')^2$ $+4f(u)'''\,(u(x)')^2u(x)'''$ $+3f(u)'''u(x)'(u(x)'')^2$
				$1f(u)'u(x)''''$	$1u(x)'u(x)''''f(u)''$ $+4u(x)'u(x)''''f(u)''$ $+4u(x)''u(x)'''f(u)''$ $+3\cdot 2u(x)''u(x)'''f(u)''$
					$1f(u)'u(x)'''''$

或者用 f(x)g(x)=f(x)′g(x)+f(x)g(x)′写作以下形式，除了规则 1，其余规则不变。

$f(u(x))'$	$f(u)'u(x)'$	$f(u)''(u(x)')^2$	$1f(u)'''(u(x)')^3$	$1f(u)''''(u(x)')^4$	$1f(u)'''''\,(u(x)')^5$
		$f(u)'u(x)''$	$f(u)''2u(x)'u(x)''$ $+1f(u)''u(x)'u(x)''$	$1f(u)'''3(u(x)')^2u(x)''$ $+3f(u)'''(u(x)')^2u(x)''$	$f(u)''''4(u(x)')^3u(x)''$ $+6f(u)''''(u(x)')^3u(x)''$
			$1f(u)'u(x)'''$	$3f(u)''u(x)'u(x)'''$ $+3f(u)''(u(x)'')^2$ $+1f(u)''u(x)'u(x)'''$	$6f(u)'''(u(x)')^2u(x)'''$ $+6f(u)'''2u(x)'(u(x)'')^2$ $+4f(u)'''(u(x)')^2u(x)'''$ $+3f(u)'''u(x)'(u(x)'')^2$
				$1f(u)'u(x)''''$	$4f(u)''u(x)'u(x)''''$ $+4f(u)''u(x)''u(x)'''$ $+3f(u)''2u(x)''u(x)'''$ $+1f(u)''u(x)'u(x)''''$
					$1f(u)'u(x)'''''$

为了我们以后的研究，现在我们将每个格子里面的同类项合并了，即得到最终的系数/结果，仅用于验证以后将开发出来的公式对前几阶导的运算结果是否正确：

$f(u(x))'$	$f(u)'u(x)'$	$f(u)''(u(x)')^2$	$1f(u)'''(u(x)')^3$	$1f(u)''''(u(x)')^4$	$1f(u)'''''\,(u(x)')^5$
		$f(u)'u(x)''$	$3f(u)''u(x)'u(x)''$	$6f(u)'''(u(x)')^2u(x)''$	$10f(u)''''(u(x)')^3u(x)''$
			$1f(u)'u(x)'''$	$4f(u)''u(x)'u(x)'''$ $+3f(u)''(u(x)'')^2$	$10f(u)'''(u(x)')^2u(x)'''$ $+15f(u)'''u(x)'(u(x)'')^2$
				$1f(u)'u(x)''''$	$5f(u)''u(x)'u(x)''''$ $+10f(u)''u(x)''u(x)'''$
					$1f(u)'u(x)'''''$

对于中间那个表格，可能的规律太多，确定的规律太少。一个可能的想法是：它可能会应用到多函数连乘求导，因为在计算以上表格的每个小表格，向着邻近↘的小表格方向求导时，即对它分裂衍生某类导函数时，总会对 u(x)函数名下的一群导函数求导。

丙.设 f1…fn(都)是关于 x 的函数，

(f1…fn)′=(f1…fn-1)fn′+ (f1…fn-1)′fn

(f1…fn-1)′fn=(f1…fn-2)fn-1′(fn)+(f1…fn-2)′fn-1fn

(f1…fn-2)′fn-1fn=(f1…fn-3)fn-2′(fn-1fn)+(f1…fn-3)′fn-2fn-1fn

(f1…fn-3)′fn-2fn-1fn=(f1…fn-4)fn-3′(fn-2fn-1fn)……

同时这里也可以对数求导法直接求到它：

$(f1\cdots fn)'=\sum_{i=1}^{n}(f1\cdots fn)\cdot\frac{fi'}{fi}=(f1\cdots fn)\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi}$，我们再继续向后看看景观(但我们其实只需要它的一阶导)。

$(f1\cdots fn)''=((f1\cdots fn)(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi}))'=(f1\cdots fn)(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})'+(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})(f1\cdots fn)'=(f1\cdots fn)\sum_{i=1}^{n}(\frac{fi'}{fi})'+(f1\cdots fn)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi}\right)^2$

$(f1\cdots fn)'''=((f1\cdots fn)\sum_{i=1}^{n}(\frac{fi'}{fi})'+(f1\cdots fn)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi}\right)^2)'\cdots\cdots$

蓝色(更准确地说：从↑到↓的奇数列)是 The order2：(f(x)g(x))′=f(x)g(x)′+g(x)f(x)′

红色(更准确地说：从↑到↓的偶数列)是 The order2′：(g(x)f(x))′=g(x)′f(x)+f(x)′g(x)

其中 The order2′是 The order2 的全逆序形式(或者说它俩互为全逆序)，即函数名相替换+乘法逆序+加法逆序的形式

(f1⋯fn)	$1(f1\cdots fn)\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi}$	$1(f1\cdots fn)(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})'$	$1(f1\cdots fn)(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})''$	$1(f1\cdots fn)(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})'''$
		$1(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})(f1\cdots fn)'$	$2(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})'(f1\cdots fn)'$	$3(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})''(f1\cdots fn)'$
			$1(f1\cdots fn)''(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})$	$3(f1\cdots fn)''(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})'$
				$1(\sum_{i=1}^{n}\frac{fi'}{fi})(f1\cdots fn)'''$

发现$(f1\cdots fn)^{(n)}$会出现$groupA(i)_{i=1}^{n}=(n-i+1)\cdot(f1\cdots fn)^{(i-1)}$[行序数=i，从↑到↓，i 增大，且每行有相同的一组$(f1\cdots fn)^{(i-1)}$]，以及将会出现$groupB(i)_{i=1}^{n}=(n-i+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{fi'}{fi}\right)^{(i-1)}$[斜排序数=i，从↙到↗，i 增大，且每斜排有相同的一组$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{fi'}{fi}\right)^{(i-1)}$]

【以上式子也可写为$groupA(i)_{i=1}^{n}=i\cdot(f1\cdots fn)^{(n-i)}$、$groupB(i)_{i=1}^{n}=i\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{fi'}{fi}\right)^{(n-i)}$，其中 i=1 时，行为最上，斜排为最左下】

现对于每个 groupA 中的$(f1\cdots fn)^{(n-i)}$，我们都可以用[$(f1\cdots fn)^{(n-i-1)}$的导数=前面 n-i-1 列的和]来替换$(f1\cdots fn)^{(n-i)}$。而对于每个 groupB 中的$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{fi'}{fi}\right)^{(n-i)}$，我们也可以用$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{fi'}{fi}\right)^{(n-i-1)}$的导数，显然它也有“某种 n-i-1 列的和”的属性：这便又回到复合函数的 n 阶导这个问题上了。

同时地，由于反函数的 n 阶导、由参数方程确定的函数的 n 阶导，也都将涉及到复合函数的 n 阶导，那么我们现在回来克服这个之前遗留下来的问题。

丁.从数量上看：设复合函数中某一项中除了 f(u)的那个 n 阶导函数之外，其余剩下的函数：u(x)及其小弟们，的数量记为 b，b^*表示 b 个函数 f 之积，a^+为同类项b^*的个/系数，即 a 个它之和的意思。那么连起来，a^+b^*便表示{a 个[b 个 f 之积]之和}。

现又由于(一个 n 个 f 之积)′={n 个[n 个 f 之积]之和}，那么就有下表：

a^+b^*	$a^+(b+1)^*$	
	$(a\cdot b)^+b^*$	$[a\cdot(b+1)]^+(b+1)^*$
		$(a\cdot b)^+(b+1)^*$

我之所以想看看其每竖排的项数之 sum 与项序数之间的函数关系，是因为正如 2^n 这个 sum 与 n+1 这个项数可以提示出每一项的系数/同类项个数C_n^i一样，我们需要这种 hints。从中可见，从数量上，两条路径的结果就不等。但是它们有相同的部分，为了求出这个部分，我们得具体地求，即有：

$f(u)^{(n)}(f1\sim fm)$	$f(u)^{(n+1)}(f1\sim fm\sim u(x)')$	
	$f(u)^{(n)}(f1\sim fm\sim \sum_{i=1}^{m}\frac{fi'}{fi})$	$f(u)^{(n+1)}(f1\sim fm\sim u(x)'')$
		$2f(u)^{(n+1)}(f1\sim fm\sim \sum_{i=1}^{m}\frac{fi'}{fi}\sim u(x)')$

其实从这里开始，左斜排和右斜排的映射关系就不等了(等是相等，但具体形式不等。)

戊.

求出后的阻力仍太大，所以我们先放下这种方法，不得不换用另一个已经准备好了的，更可能求得其通式的方法：虽然它相对于这种方法可能很不直观：在这样一个表格中：

$f(u(x))'$	$f(u)'\,1u(x)'$	$f(u)''1(u(x)')^2$	$f(u)'''1(u(x)')^3$	$f(u)''''1(u(x)')^4$	$f(u)'''''1(u(x)')^5$
		$f(u)'1u(x)''$	$f(u)''3u(x)'u(x)''$	$f(u)'''6(u(x)')^2u(x)''$	$f(u)''''10(u(x)')^3u(x)''$
			$f(u)'\,1u(x)'''$	$f(u)''[4u(x)'u(x)'''$ $+3(u(x)'')^2]$	$f(u)'''[10(u(x)')^2u(x)'''$ $+15u(x)'(u(x)'')^2]$
				$f(u)'1u(x)''''$	$f(u)''[5u(x)'u(x)''''$ $+10u(x)''u(x)''']$
					$f(u)'1u(x)'''''$

我们看到，对于 f(u(x))的第 j 阶导函数$f^{(j)}(u(x))$，是上表中(以 f(u)'u(x)'为第一竖排)第 j 竖排中的共 j 个格子之和；而其中第 i 个格子=一个由和仅由 j 和 i 所确定的式子$P_{j,i}(x)=f^{(i)}(u)$与一个[由 $u(x)'\sim u(x)^j$中的某 i 个之积作为某一项的]多项式之积

那么我们就有$f^{(j)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)f^{(i)}(u)$，这里当 i 从 1 加至 j 时，$P_{j,i}(x)$所对应的第 j 列中的格子分别为：从下往上数的，第 i 个格子。

其中对于 P 部分而言：Our General/basic rule:$P_{j,i}(x)=P_{j-1,i}(x)'+P_{j-1,i-1}(x)\cdot u(x)'$

那么我们接下来的任务就是去求解这么一个满足要求的$P_{j,i}(x)$。首先我们观察到：一些可见的简单的局部的规则：

①.$P_{j,j}(x)$恒只有一个横向来源，因此恒为单项式，且$P_{j,j}(x)=P_{j-1,j-1}(x)\cdot u(x)'$。则有
$P_{j,j}(x)=P_{j-1,j-1}(x)\cdot u(x)'=P_{j-2,j-2}(x)\cdot (u(x)')^2=\cdots=P_{1,1}(x)\cdot (u(x)')^{j-1}=(u(x)')^j$
②.$P_{j,1}(x)$恒只有一个斜向来源，因此恒为单项式，且$P_{j,1}(x)=P_{j-1,1}(x)'$。则有
$P_{j,1}(x)=P_{j-1,1}(x)'=P_{j-2,1}(x)''=\cdots=P_{1,1}(x)^{(j-1)}=u(x)^{(j)}$
③.只拆分横向来源：$P_{j,j-1}(x)=P_{j-1,j-1}(x)'+P_{j-1,j-2}(x)\cdot u(x)'$。则有
$P_{j,j-1}(x)=P_{j-1,j-1}(x)'+P_{j-1,j-2}(x)\cdot u(x)'=P_{j-1,j-1}(x)'+(P_{j-2,j-2}(x)'+P_{j-2,j-3}(x)\cdot u(x)')\cdot$

$u(x)'=\cdots=P_{j-1,j-1}(x)'+P_{j-2,j-2}(x)'\cdot u(x)'+P_{j-3,j-3}(x)'\cdot(u(x)')^2+\cdots+P_{2,2}(x)'\cdot(u(x)')^{j-3}+P_{2,1}(x)\cdot(u(x)')^{j-2}$ 现因②.再因①.: $P_{2,1}(x)\cdot(u(x)')^{j-2}=u(x)^{(2)}\cdot(u(x)')^{j-2}=P_{1,1}(x)'\cdot(u(x)')^{j-2}$ 又由①.得: $P_{j,j-1}(x)=\sum_{i=1}^{j-1}P_{i,i}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=1}^{j-1}(u(x)')^{i'}\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=1}^{j-1}i\cdot(u(x)')^{i-1}\cdot(u(x)')^{j-i-1}\cdot u(x)''=\sum_{i=1}^{j-1}i\cdot(u(x)')^{j-2}\cdot u(x)''=(u(x)')^{j-2}\cdot u(x)''\cdot\sum_{i=1}^{j-1}i=C_j^2\cdot(u(x)')^{j-2}\cdot u(x)''$ 即有 $P_{j,j-1}(x)=C_j^2\cdot(u(x)')^{j-2}\cdot u(x)''$ ④.只拆分斜向

来源: $P_{j,2}(x)=P_{j-1,2}(x)'+P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'$。则有$P_{j,2}(x)=P_{j-1,2}(x)'+P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'=(P_{j-2,2}(x)'+P_{j-2,1}(x)\cdot u(x)')'+P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'=\cdots=P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'+(P_{j-2,1}(x)\cdot u(x)')'+(P_{j-3,1}(x)\cdot u(x)')''+\cdots+(P_{2,1}(x)\cdot u(x)')^{(j-3)}+(P_{2,2}(x)')^{(j-3)}$ 现因①.再因②.: $(P_{2,2}(x)')^{(j-3)}=(((u(x)')^2)')^{(j-3)}=((P_{1,1}(x)\cdot u(x)')')^{(j-3)}$ 又由②.得: $P_{j,2}(x)=\sum_{i=1}^{j-1}(P_{i,1}(x)\cdot u(x)')^{(j-i-1)}=\sum_{i=1}^{j-1}(u(x)^{(i)}\cdot u(x)')^{(j-i-1)}$ 此时利用之前所导出的两个函数乘积的莱布尼兹公式则 $=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}[C_{j-i-1}^k\cdot(u(x)^{(i)})^{(j-i-1-k)}\cdot(u(x)')^{(k)}]=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}[C_{j-i-1}^k\cdot u(x)^{(j-k-1)}\cdot u(x)^{(k+1)}]=\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{i=1}^{j-k-1}[C_{j-i-1}^k\cdot u(x)^{(j-k-1)}\cdot u(x)^{(k+1)}]=\sum_{z-1=0}^{j-2}\sum_{i=1}^{j-z}[C_{j-i-1}^{z-1}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]=\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{j-z}[C_{j-i-1}^{z-1}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]$ (其中 z=k+1) 或者写成$=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}[C_{j-i-1}^k\cdot u(x)^{(i+k)}\cdot u(x)^{(j-i-k)}]=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{z-i=0}^{j-i-1}[C_{j-i-1}^{z-i}\cdot u(x)^{(z)}\cdot u(x)^{(j-z)}]=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{z=i}^{j-1}[C_{j-i-1}^{z-i}\cdot u(x)^{(z)}\cdot u(x)^{(j-z)}]=\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{z}[C_{j-i-1}^{z-i}\cdot u(x)^{(z)}\cdot u(x)^{(j-z)}]$ (其中 z=k+i)

【这里用到了一些道理：i.$\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}=\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{i=1}^{j-k-1}$。其中：等式左边的多层求和中，1.i 在外层为自变量，定义域为 i∈[1,j-1]；2. k 的上界关于 i 的函数=j-1-i，k 的下界关于 i 的函数=0；3.k 在内层为因变量，值域映射出来为 k∈[0,j-2]，于是便有$\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}$ 这样一个内部被(i,k)散点均匀填充满了的有界实心封闭平面区域。

现在我们不用(i,k)来描述此平面区域，而是用(k,i)来描述它，那么就有：1.自变量、因变量的身份相互交换(于是 i、k 的内外层位置相交换)、2.定义域与值域相互交换(仅体现在将值域赋值给定义域)、3.取原函数 k(i)在其并集为全的各单调区间上的反函数 i(k)，并以此用 k 来表达 i 的上下界。

那么这样的同一个平面区域便可被另外地表示为：1.k 在外层为自变量，定义域为 k∈[0,j-2]；2. i 的上界关于 k 的函数=j-1-k，i 的下界关于 k 的函数=1；3.i 在内层为因变量，值域映射出来为 i∈[1,j-1]，即有对应表达式$\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{i=1}^{j-k-1}$。

ii.同理：$\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{z=i}^{j-1}=\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{z}$ 的得来过程：首先由$\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{z=i}^{j-1}$ 得到 z 的值域=[1,j-1]，将其以蓝色文字写在外层求和符号上；其次通过 zmin(i)=i 这个单调的边界函数，求得 imax(z)=z，通过当 i 取最小值 1 时 z 取遍了其区间所有值，得知 imin(z)=1；此时便有$\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{z}$ 生成了。】

接下来我们利用那个 z=k+1 的无 i 的式子$\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{j-z}[C_{j-i-1}^{z-1}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]$进行进一步操作：根据$C_m^n=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$，其中 n=z，i=j-i-1(记为 I)，m=j-1 则$\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{j-z}[C_{j-i-1}^{z-1}\cdot$

$u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]=\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{i=j-z}^{1}[C_{j-i-1}^{z-1}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]=\sum_{z=1}^{j-1}\sum_{I=z-1}^{j-2}[C_{I}^{z-1}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}]=\sum_{z=1}^{j-1}C_{j-1}^{z}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}=\sum_{z=1}^{[\frac{j-1}{2}]}(C_{j-1}^{z}+C_{j-1}^{j-z})\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}\{+C_{j-1}^{\frac{j}{2}}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}\}$=若 j-1 为偶则$\sum_{z=1}^{\frac{j-1}{2}}(C_{j-1}^{z}+C_{j-1}^{j-z})\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}$，若 j-1 为奇则$\sum_{z=1}^{\frac{j-2}{2}}(C_{j-1}^{z}+C_{j-1}^{j-z})\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}+C_{j-1}^{\frac{j}{2}}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}$

综上$P_{j,2}(x)=\sum_{z=1}^{j-1}C_{j-1}^{z}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}=\sum_{z=1}^{\frac{j-1}{2}}(C_{j-1}^{z}+C_{j-1}^{j-z})\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}$(j 为奇)，$\sum_{z=1}^{\frac{j-2}{2}}(C_{j-1}^{z}+C_{j-1}^{j-z})\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}+C_{j-1}^{\frac{j}{2}}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}$(j 为偶)。

⑤.根据以下我们便可以直接推知下一行的表达式具体模样:

$P_{j,j-1}(x)=P_{j-1,j-1}(x)'+P_{j-1,j-2}(x)\cdot u(x)'=P_{j-1,j-1}(x)'+P_{j-2,j-2}(x)'\cdot u(x)'+P_{j-3,j-3}(x)'\cdot(u(x)')^2+\cdots+P_{3,3}(x)'\cdot(u(x)')^{j-4}+P_{2,2}(x)'\cdot(u(x)')^{j-3}+P_{2,1}(x)\cdot(u(x)')^{j-2}$

$P_{j,j-2}(x)=P_{j-1,j-2}(x)'+P_{j-1,j-3}(x)\cdot u(x)'=P_{j-1,j-2}(x)'+P_{j-2,j-3}(x)'\cdot u(x)'+P_{j-3,j-4}(x)'\cdot(u(x)')^2+\cdots+P_{3,2}(x)'\cdot(u(x)')^{j-4}+P_{3,1}(x)\cdot(u(x)')^{j-3}$

又根据$P_{j,i}(x)=P_{j-1,i}(x)'+P_{j-1,i-1}(x)\cdot u(x)'$我们有$P_{3,1}(x)=P_{2,1}(x)'+0$

则有$P_{j,j-2}(x)=\sum_{i=1}^{j-1-1}P_{i+1,i}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1-1}$或$=\sum_{i=1+1}^{j-1}P_{i,i-1}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$

又因$P_{j,j-1}(x)=C_j^2\cdot(u(x)')^{j-2}\cdot u(x)''$

则$P_{j,j-2}(x)=\sum_{i=2}^{j-1}[C_i^2\cdot(u(x)')^{i-2}\cdot u(x)'']'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=2}^{j-1}C_i^2\cdot[(u(x)')^{i-2}\cdot u(x)'''+(i-2)(u(x)')^{i-3}\cdot(u(x)'')^2]\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=2}^{j-1}C_i^2\cdot[(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+(i+1-3)(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2]=\sum_{i=2}^{j-1}C_i^2\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+\sum_{i=2}^{j-1}[C_i^2\cdot(i+1)+C_i^2\cdot(-3)](u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+[\sum_{i=2}^{j-1}3C_{i+1}^3-3C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+3[\sum_{i=3}^{j}C_i^3-C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+3[C_{j+1}^4-C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2$

【根据三次两种$C_m^n=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$以及一次$n*C_{n-1}^{k-1}=k*C_n^k$[n=i+1，k=3]】

即有$P_{j,j-2}(x)=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+3[C_{j+1}^4-C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2$

⑥.同理:

$P_{j,2}(x)=P_{j-1,2}(x)'+P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'=P_{j-1,1}(x)\cdot u(x)'+(P_{j-2,1}(x)\cdot u(x)')'+(P_{j-3,1}(x)\cdot u(x)')''+\cdots+(P_{3,1}(x)\cdot u(x)')^{(j-4)}+(P_{2,1}(x)\cdot u(x)')^{(j-3)}+(P_{2,2}(x)')^{(j-3)}$

$P_{j,3}(x)=P_{j-1,3}(x)'+P_{j-1,2}(x)\cdot u(x)'=P_{j-1,2}(x)\cdot u(x)'+(P_{j-2,2}(x)\cdot u(x)')'+(P_{j-3,2}(x)\cdot u(x)')''+\cdots+(P_{3,2}(x)\cdot u(x)')^{(j-4)}+(P_{3,3}(x)')^{(j-4)}$

又根据$P_{j,i}(x)=P_{j-1,i}(x)'+P_{j-1,i-1}(x)\cdot u(x)'$我们有$P_{3,3}(x)=0+P_{2,2}(x)\cdot u(x)'$

则有$P_{j,3}(x)=\sum_{i=1}^{j-1-1}(P_{i+1,1+1}(x)\cdot u(x)')^{(j-i-1-1)}$或$=\sum_{i=1+1}^{j-1}(P_{i,1+1}(x)\cdot u(x)')^{(j-i-1)}$

又因$P_{j,2}(x)=\sum_{z=1}^{j-1}C_{j-1}^{z}\cdot u(x)^{(j-z)}\cdot u(x)^{(z)}$

则$P_{j,3}(x)=\sum_{i=1+1}^{j-1}([\sum_{z=1}^{i-1}C_{i-1}^{z}\cdot u(x)^{(i-z)}\cdot u(x)^{(z)}]\cdot u(x)')^{(j-i-1)}$

不过到此为止，这个一斜排一斜排地向↗右上方的内地进发的方法会因此被淘汰：它到最后会涉及到相当复杂的越来越多个函数的乘积的求导，这不是我们想看到的，这正是我们想通过转化成其他求法来避免的。

⑦.现在我们一心一意地专注于①、③、⑤这种一横排一横排地向↓下方的内地进发的方法，因为它有规律可循而且其规律及其求法相对于偶数序数的做法来说比较简单：

由于$P_{j,j-2}(x)=\sum_{i=1+1}^{j-1}P_{i,i-1}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=2}^{j-1}P_{i,i-1}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$

所以$P_{j,j-3}(x)=\sum_{i=2+1}^{j-1}P_{i,i-1-1}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=\sum_{i=3}^{j-1}P_{i,i-2}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$

又因$P_{j,j-2}(x)=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+3[C_{j+1}^4-C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2$

则$P_{j,j-3}(x)=\sum_{i=3}^{j-1}[C_i^3\cdot(u(x)')^{i-3}\cdot u(x)'''+3[C_{i+1}^4-C_i^3]\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$ 现将此方程分成两部分，一部分类上一步，一部分为新 object：

Part1: $\sum_{i=3}^{j-1}[C_i^3\cdot(u(x)')^{i-3}\cdot u(x)''']'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$ 由于

$P_{j,j-2}(x)=\sum_{i=2}^{j-1}[C_i^2\cdot(u(x)')^{i-2}\cdot u(x)'']'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=C_j^3\cdot(u(x)')^{j-3}\cdot u(x)'''+3[C_{j+1}^4-C_j^3]\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot(u(x)'')^2$ 所以仿照它的步骤，有：

$\text{part1}=\sum_{i=3}^{j-1}[C_i^3\cdot(u(x)')^{i-3}\cdot u(x)''']'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=C_j^4\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot u(x)''''+4[C_{j+1}^5-C_j^4]\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot u(x)''\cdot u(x)'''$

Part2: $\sum_{i=3}^{j-1}[3[C_{i+1}^4-C_i^3]\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$，将它再分为两部分，一部分为 part2.1: $\sum_{i=3}^{j-1}[-3C_i^3\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$ 仿照之前的有：
$\text{part2.1}=\sum_{i=3}^{j-1}[-3C_i^3\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=-3[C_j^4\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot 2u(x)''u(x)'''+[4C_{j+1}^5-5C_j^4]\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3]$

另一部分为 Part2.2: $\sum_{i=3}^{j-1}[3C_{i+1}^4\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$ 仿照之前的有：
$\text{part2.2}=\sum_{i=3}^{j-1}[3C_{i+1}^4\cdot(u(x)')^{i-4}\cdot(u(x)'')^2]'\cdot(u(x)')^{j-i-1}=3[C_{j+1}^5\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot 2u(x)''u(x)'''+[5C_{j+2}^6-6C_{j+1}^5]\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3]$

part2.1、Part2.2 合并：$\text{part2}=[3(C_{j+1}^5-C_j^4)\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot 2u(x)''u(x)'''+3\{[5C_{j+2}^6-6C_{j+1}^5]-[4C_{j+1}^5-5C_j^4]\}\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3]=6(C_{j+1}^5-C_j^4)\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot u(x)''u(x)'''+3\{5C_{j+2}^6-10C_{j+1}^5+5C_j^4\}\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3$

Part1、Part2 合并：$P_{j,j-3}(x)=C_j^4\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot u(x)''''+10(C_{j+1}^5-C_j^4)\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot u(x)''u(x)'''+15\{C_{j+2}^6-2C_{j+1}^5+C_j^4\}\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3$

⑧.其实如你所见，不论是以斜排为基准向↗前进，还是以横排为基准向↓前进，最终都会遇到对多个函数的积求导，只不过横排的前进是函数的因式一点一点地变多，且每次求导只求一次，而斜排是一来就求 n 阶导，然后因式也一点一点变多、求导运算次数一点点地变少。

也就是说，其实由于各横排的从左往右第 m 个的组合，本身就构成了一斜排，所以当横排向下走的时候，最终将会有斜排的复杂程度。所以我们的横排也就写来到此为止。在这里还有个规律性的东西需要介绍一下：每个横排中非系数部分且除了之后求导求出来的数字之外的，纯组合数的衍生规律：例如：

$P_{j,j-3}(x)=C_j^4\cdot(u(x)')^{j-4}\cdot u(x)''''+10(C_{j+1}^5-C_j^4)\cdot(u(x)')^{j-5}\cdot u(x)''u(x)'''+15\{C_{j+2}^6-2C_{j+1}^5+C_j^4\}\cdot(u(x)')^{j-6}\cdot(u(x)'')^3$

它的组合数们在下一次的操作$P_{j,j-4}(x)=\sum_{i=4}^{j-1}P_{i,i-3}(x)'\cdot(u(x)')^{j-i-1}$中，会如此地扮演如下角色：多项式 1.$C_j^4\to C_i^4\to C_{j-1}^4\to C_j^5andC_j^4\to C_i^4\to C_i^4(i-4)\to C_i^4(i+1-5)\to 5C_{i+1}^5-5C_i^4\to 5C_j^5-5C_{j-1}^4\to 5C_{j+1}^6-5C_j^5$ 多项式 2.$(C_{j+1}^5-C_j^4)\to(C_{i+1}^5-C_i^4)\to(C_j^5-C_{j-1}^4)\to(C_{j+1}^6-C_j^5)and(C_{j+1}^5-C_j^4)\to(C_{i+1}^5-C_i^4)\to(C_{i+1}^5-C_i^4)(i-5)\to[C_{i+1}^5(i+2-7)-C_i^4(i+1-6)]\to[(6C_{i+2}^6-7C_{i+1}^5)-(5C_{i+1}^5-6C_i^4)]\to[(6C_{j+1}^6-7C_j^5)-(5C_j^5-6C_{j-1}^4)]\to[(6C_{j+2}^7-7C_{j+1}^6)-(5C_{j+1}^6-6C_j^5)]\to[6C_{j+2}^7-12C_{j+1}^6+6C_j^5]$ 多项式 3.$(C_{j+2}^6-2C_{j+1}^5+C_j^4)\to(C_{i+2}^6-2C_{i+1}^5+C_i^4)\to(C_{j+1}^6-2C_j^5+C_{j-1}^4)\to(C_{j+2}^7-2C_{j+1}^6+C_j^5)and(C_{j+2}^6-2C_{j+1}^5+C_j^4)\to(C_{i+2}^6-2C_{i+1}^5+C_i^4)\to(C_{i+2}^6-2C_{i+1}^5+C_i^4)(i-6)\to[C_{i+2}^6(i+3-9)-2C_{i+1}^5(i+2-8)+C_i^4(i+1-7)]\to[(7C_{i+3}^7-9C_{i+2}^6)-2(6C_{i+2}^6-8C_{i+1}^5)+(5C_{i+1}^5-7C_i^4)]\to[(7C_{j+2}^7-9C_{j+1}^6)-2(6C_{j+1}^6-8C_j^5)+(5C_j^5-7C_{j-1}^4)]\to[(7C_{j+3}^8-9C_{j+2}^7)-2(6C_{j+2}^7-8C_{j+1}^6)+(5C_{j+1}^6-7C_j^5)]\to[7C_{j+3}^8-21C_{j+2}^7+21C_{j+1}^6-7C_j^5]$

当这些多项式乘上各自之前的系数，再乘上各自式子中求导出来的系数，合并同类的导函数们后，将构成下一组带系数的组合数们。

This is the general rule：对于单个目标C_{j+k}^n，我们有：

Mode1:$C_{j+k}^n\to C_{i+k}^n\to C_{j-1+k}^n\to C_{j+k}^{n+1}$ 即$C_{j+k}^n\to C_{j+k}^{n+1}$

Mode2:$C_{j+k}^n\to C_{i+k}^n\to C_{i+k}^n(i-m)\to C_{i+k}^n((i+k+1)-(m+k+1))\to[(n+1)C_{i+k+1}^{n+1}-(m+k+1)C_{i+k}^n]\to[(n+1)C_{j+k}^{n+1}-(m+k+1)C_{j-1+k}^n]\to[(n+1)C_{j+k+1}^{n+2}-(m+k+1)C_{j+k}^{n+1}]$ 即$C_{j+k}^n\to[(n+1)C_{j+k+1}^{n+2}-(m+k+1)C_{j+k}^{n+1}]$

用此种方法可以确确实实地向下推出你想要的，某一 certain 横排的某一个 certain 小子的具体长相。

己.

正如在之前两次(一次是两个函数乘积的莱布尼兹公式和之前的伪泰勒公式，一次是复合函数的高阶导公式)在探求表格中某列的属性的时候，一列一列地向右探求，如果能探求到，则为最佳，如果否，则为最复杂；一行一行地向下探求，总能折中地得到通式；一斜排一斜排地向右上探求，委实复杂且不一定能得到通式。

在研读了一篇别人的论文后，在这里我把他的观点也写在这个命题内供大家交流交流，我们的做法各有优劣。以下是以我的观点被我编辑后的表述形式(个人认为这样更好)：

㈠.对于$f^{(j)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)f^{(i)}(u)$

一方面，通过替换序数得到它的一阶导：

又由$f^{(j)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)f^{(i)}(u)$，知$f^{(j+1)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j+1}P_{j+1,i}(x)f^{(i)}(u)$

另一方面，用求导法则对其进行一次求导：(这时我们便努力构造像$\sum_{i=1}^{j+1}P_{j+1,i}(x)f^{(i)}(u)$一样 i 从 1 取至 j+1 的求和，用于之后将各式符号内的内容合并在同一个求和符号里。)

$f^{(j+1)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)'f^{(i)}(u)+\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)f^{(i+1)}(u)\cdot u(x)'$

$=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)'f^{(i)}(u)+\sum_{i=2}^{j+1}P_{j,i-1}(x)f^{(i)}(u)\cdot u(x)'$

$=[\sum_{i=1}^{j+1}P_{j,i}(x)'f^{(i)}(u)-P_{j,j+1}(x)'f^{(j+1)}(u)]+[\sum_{i=1}^{j+1}P_{j,i-1}(x)f^{(i)}(u)\cdot u(x)'-P_{j,0}(x)f^{(1)}(u)\cdot u(x)']$

$=\sum_{i=1}^{j+1}[P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)']f^{(i)}(u)-P_{j,j+1}(x)'f^{(j+1)}(u)-P_{j,0}(x)f(u)'\cdot u(x)'$

基本地，通式必须首先对此种挑战兼容并包，那么有：

$\sum_{i=1}^{j+1}[P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)']f^{(i)}(u)-P_{j,j+1}(x)'f^{(j+1)}(u)-P_{j,0}(x)f(u)'\cdot u(x)'$

$=\sum_{i=1}^{j+1}P_{j+1,i}(x)f^{(i)}(u)$，即有：

$\sum_{i=1}^{j+1}\{P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)'-P_{j+1,i}(x)\}f^{(i)}(u)=P_{j,j+1}(x)'f^{(j+1)}(u)+P_{j,0}(x)f(u)'\cdot u(x)'$

现在 our basic job is to 找到一个至少首先得符合如此关系的一个$P_{j,i}(x)$，并且$P_{j,i}(x)$之后还得只需满足对于某对 certain 的 j0、i0 成立即可【之后就可以左、左上、右、右下地链式般推满整个三角形表格，或者因为正确的规则只有一个，那么满足通式也满足个例的便只有这一个】。

其实根据以前的内容我们可以直接看出，$P_{j,i}(x)=P_{j-1,i}(x)'+P_{j-1,i-1}(x)\cdot u(x)'$中当 j 取 j+1 的时候，便有$P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)'-P_{j+1,i}(x)=0$，即方程左边=0；另一方面，由于$P_{j,j+1}(x)$、$P_{j,0}(x)$中的 i 超出了[1,j]的范围，所以$P_{j,j+1}(x)'=0'=0$，$P_{j,0}(x)=0$，即方程右边=0。即也就是说，这个式子在不去尝试知道以及不知道$P_{j,i}(x)$的具体形式的时候，仍然是成立的，所以我觉得只能说$P_{j,i}(x)$得满足它，而不是通过它来求$P_{j,i}(x)$【这句话有点意思，其实由于$P_{j,i}(x)$得满足它，那么就可以通过它来求$P_{j,i}(x)$】。

所以进一步地，$P_{j,i}(x)$需满足类似$P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)'-P_{j+1,i}(x)=0$、$P_{j,j+1}(x)'=0$、$P_{j,0}(x)=0$ 的这些所有已知的，大体上的以及细节上的规则。

㈡.有意思的是，还真有这样的一个$P_{j,i}(x)$，它满足以上所有要求。找到它的作者据论文上的资料显示，是个从事泛函微分方程研究的 90 后(刚刚 90)，所以我猜对于他所运用的方法，目前刚刚大一的我还没有这个技术(虽然文章也没有阐明公式的具体来源)。

他所给出的$P_{j,i}(x)=\frac{Q_{j,i}(x)}{i!}$，$Q_{j,i}(x)=[(u(x+y)-u(x))^i]^{(j)}|_{y=0}=[\sum_{k=0}^{i}C_i^k(-u(x))^k u(x+y)^{i-k}]^{(j)}|_{y=0}=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k}$。接下来由于：

$Q_{j,i}(x)'=[\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k}]'=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k k\cdot u(x)^{k-1}u(x)'u^{(j)}(x)^{i-k}+\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k u(x)^k u^{(j+1)}(x)^{i-k}=\sum_{k=1}^{i}(-1)^k iC_{i-1}^{k-1}\cdot u(x)^{k-1}u(x)'u^{(j)}(x)^{i-k}+Q_{j+1,i}(x)=i\cdot u(x)'\cdot\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^{k+1}C_{i-1}^k\cdot u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k-1}+Q_{j+1,i}(x)=i\cdot u(x)'\cdot\sum_{k=0}^{i-1}-(-1)^k C_{i-1}^k\cdot u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k-1}+Q_{j+1,i}(x)=-i\cdot u(x)'\cdot\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k C_{i-1}^k\cdot u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k-1}+Q_{j+1,i}(x)=-i\cdot u(x)'\cdot Q_{j,i-1}(x)+Q_{j+1,i}(x)$

可见$Q_{j+1,i}(x)=Q_{j,i}(x)'+i\cdot u(x)'\cdot Q_{j,i-1}(x)$，则$\frac{Q_{j+1,i}(x)}{i!}=\frac{Q_{j,i}(x)'}{i!}+u(x)'\cdot\frac{Q_{j,i-1}(x)}{(i-1)!}$，则此$Q_{j,i}(x)$、$P_{j,i}(x)$满足$P_{j+1,i}(x)=P_{j,i}(x)'+P_{j,i-1}(x)\cdot u(x)'$。又由于当 j=1、2、3 时$P_{j,i}(x)$与客观现实相符合，所以此种$P_{j,i}(x)$便是最终的那个通式。【另外地，$P_{j,j+1}(x)'=0$ 可以导出一个有意思的式子：$Q_{j+1,j+1}(x)-(j+1)\cdot u(x)'\cdot Q_{j,j}(x)=0$】

㈢.但是这个可以求得任意列格子的和，甚至任意格子里的内容的公式，里面仍然有着一个对复合函数的高阶求导，只不过这个复合函数的外层函数关系 f(u)是确定的：即$f^{(j)}(u(x))=\sum_{i=1}^{j}P_{j,i}(x)f^{(i)}(u)=\sum_{i=1}^{j}\frac{Q_{j,i}(x)}{i!}f^{(i)}(u)=\sum_{i=1}^{j}\frac{\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k u(x)^k u^{(j)}(x)^{i-k}}{i!}f^{(i)}(u)$中的$u^{(j)}(x)^{i-k}$，它又可以被看作新的$f^{(j)}(u(x))$，其中 f(u)=$(u)^{i-k}$，即有$u^{(j)}(x)^{i-k}=\sum_{i_1=1}^{j}\frac{\sum_{k_1=0}^{i_1}(-1)^{k_1}C_{i_1}^{k_1}u(x)^{k_1}u^{(j)}(x)^{i_1-k_1}}{i_1!}u^{(i_1)}(x)^{i-k}$，接下来又有$u^{(j)}(x)^{i_1-k_1}$让你头疼了。。。所以这种方法虽然给出了任意位置的格子的具体数学表示形式，但这未尝挖得有点浅而有点偷懒：到头来仍然会涉及到对幂函数型复合函数的高阶求导，而虽然外层函数显化了，求它的高阶导仍然因没找到对它的特殊解法而仍十分艰难。。。

庚.

另外地，Faà di Bruno's Formula 是真正给出了任意阶导的具体结果的结论，但怎么找这些符合条件的一组组{ki}是要具体求解某阶导的时候所要面临的具体问题，可能其求法和接下来所要提到的“四．多项式定理”所提到的最后一个问题有某种联系【并且在下一本书中，解多元一次不定方程时，可以有对应的具体解法】。

二．离散型随机变量的期望与方差以及线性回归方程

I.二项分布的期望与方差

1.二项分布的期望：研究对象为 X~B(n,p)

已知$\sum_{k=0}^{n} C_n^k * p^k * q^{n-k} = (p+q)^n = 1$，且$C_n^k = \frac{n}{k} * C_{n-1}^{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} * C_{n-2}^{k-2} = \cdots$，

那么对于 E(x)= $\sum_{i=1}^{n} xi * pi = \sum_{k=0}^{n} k * C_n^k * p^k * q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k * C_n^k * p^k * q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k * (\frac{n}{k} * C_{n-1}^{k-1}) * p^k * q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} * p^{k-1} * q^{n-k} = np\sum_{k-1=0}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} * p^{k-1} * q^{(n-1)-(k-1)} = np\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K} * p^K * q^{(n-1)-K} = np$

2.期望与方差：

由于(xi-E(x))^2 描述了单个 xi 相对于均值的偏离程度，那么为了描述所有数据的平均偏离程度，则引入方差 D(x)= $\sum_{i=1}^{n}(xi - E(x))^2 * pi$。

那么 D(x)= $\sum_{i=1}^{n}(xi - E(x))^2 * pi = \sum_{i=1}^{n}(xi^2 * pi - 2 * xi * E(x) * pi + E(x)^2 * pi)$=E(x^2)-2E(x)*E(x)+E(x)^2=E(x^2)-E(x)^2

那么 D(ax+b)= E((ax+b)^2)-E(ax+b)^2，又 E(ax+b)=aE(x)+b，接着有 E((ax+b)^2)-E(ax+b)^2=[a^2E(x^2)-2abE(x)+b^2]-[a^2E(x)^2+2abE(x)+b^2]= a^2E(x^2)- a^2E(x)^2=a^2[E(x^2)-E(x)^2]=a^2D(x)

3. 二项分布的方差：

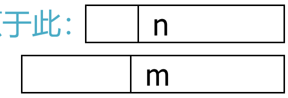
D(x)=E(x^2)-E(x)^2=$\sum_{k=0}^{n} k^2 * C_n^k * p^k * q^{n-k} - (np)^2$

又因(k^2-k)* C_n^k=(n^2-n)* C_{n-2}^{k-2}，则 k^2*C_n^k=(n^2-n)* C_{n-2}^{k-2}+k*C_n^k，则 D(x)= $\sum((n^2 - n) * C_{n-2}^{k-2} + k * C_n^k) * p^k * q^{n-k} - (np)^2 = \sum_{k=2}^{n}(n^2 - n) * C_{n-2}^{k-2} * p^k * q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k * C_n^k * p^k * q^{n-k} - (np)^2 = (n^2 - n)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} * p^{k-2} * q^{n-k} + np - (np)^2 = (n^2 - n)p^2 \sum_{k-2=0}^{n-2} C_{n-2}^{k-2} * p^{k-2} * q^{(n-2)-(k-2)} + np - (np)^2 = (n^2 - n)p^2 \sum_{K=0}^{n-2} C_{n-2}^{K} * p^K * q^{(n-2)-K} + np - (np)^2 = (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$=np-np^2=np(1-p)

II.超几何分布的期望与方差

1.超几何分布的期望：

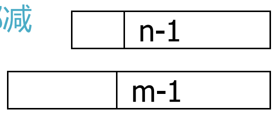
首先给出其分布列：P(x=n)=$\frac{C_m^n * C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N}$，其中 n=max{0,N-(M-m)}，前者+1，前者+1，…，min{m,N}。 //注：这里 n 的取值上下范围的框定来源于此：



如图，下面一块砖表示 M，其中分为 m 区域和 M-m 区域；上面一块砖叫 N；现把砖 N 的左边和砖 M 的左边重合或只需 N 全身处 M-m 区域，开始把 N 向右平移，其中进入了 M 砖块的 m 界的部分 N 砖块区域记作 n 区域，在 M-m 区域的记作 N-n 区域，直到 N 的右边与 M 的右边重合或 N 全身处 m 区域，如图所示。//

已知$\sum_{\max\{0,N-(M-m)\}}^{\min\{m,N\}} \frac{C_m^n * C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N}$=1；并且要知道，其中只有 n 是变量。则其

E(x)=$\sum_{\max\{0,N-(M-m)\}}^{\min\{m,N\}} n * \frac{C_m^n * C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N}$=$\frac{m}{\frac{M}{N}} * \sum_{\max\{0,(N-1)-((M-1)-(m-1))\}}^{\min\{m-1,N-1\}} \frac{C_{m-1}^{n-1} * C_{M-m}^{N-n}}{C_{M-1}^{N-1}}$=$\frac{m}{\frac{M}{N}}$=$m * \frac{N}{M}$ //注：这里用了如右下图所示的思想：其中 M，N，m，n，全都减了 1。//



2.超几何分布的方差：

同样地，类似 k^2*C_n^k=(n^2-n)* C_{n-2}^{k-2}+k*C_n^k，有 n^2*C_m^n=(m^2-m)* C_{m-2}^{n-2}+n*C_m^n则

D(x)=E(x^2)-E(x)^2= $\sum_{\max\{0,N-(M-m)\}}^{\min\{m,N\}} n\text{^}2 * \frac{C_m^n * C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N} - (m * \frac{N}{M})\text{^}2$=$\sum \left((m^2-m) * C_{m-2}^{n-2} + n * C_m^n\right) * \frac{C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N} - (m * \frac{N}{M})\text{^}2 = \frac{(m^2-m)}{\frac{M^2-M}{N^2-N}} * \sum_{\max\{0,(N-2)-((M-2)-(m-2))\}}^{\min\{m-2,N-2\}} C_{m-2}^{n-2} * \frac{C_{M-m}^{N-n}}{C_{M-2}^{N-2}} + \sum_{\max\{0,N-(M-m)\}}^{\min\{m,N\}} n * \frac{C_m^n * C_{M-m}^{N-n}}{C_M^N} - (m * \frac{N}{M})\text{^}2 = \frac{(m^2-m)}{\frac{M^2-M}{N^2-N}} + m * \frac{N}{M} - (m * \frac{N}{M})\text{^}2 = m * \frac{N}{M} * [\frac{N-1}{M-1}(m-1) - \frac{N}{M}m + 1] = m * \frac{N}{M} * [(\frac{N-1}{M-1} - \frac{N}{M})m - (\frac{N-1}{M-1} - 1)] = m * \frac{N}{M} * [\frac{N-M}{M-1}\frac{m}{M} - \frac{N-M}{M-1}] = m * \frac{N}{M} * [\frac{m}{M} - 1] * \frac{N-M}{M-1} = m * \frac{N}{M} * [\frac{m-M}{M} * \frac{N-M}{M-1}] = m * \frac{N}{M} * [\frac{N-M}{M} * \frac{m-M}{M-1}] = m * \frac{N}{M} * [\frac{N}{M} - 1] * \frac{m-M}{M-1}$ //若令$\frac{N}{M}$=p，m=n，则$m * \frac{N}{M} * [\frac{N}{M} - 1] * \frac{m-M}{M-1}$ =np(p-1) $\frac{n-M}{M-1}$=np(1-p) $\frac{M-n}{M-1}$，仅与二项分布的方差相差一个系数$\frac{M-n}{M-1}$。//

III.线性回归方程

对于 D(x)= $\sum_{i=1}^{n}(xi - E(x))^2 * pi$，类似地有某 D(x)= $\sum_{i=1}^{n}(yi - f(xi))^2 * \frac{1}{n}$。

对于 D(x)= $E(x^2) - E(x)^2$，类似地有 D(x)= $E(y^2) - 2E(y \cdot f(x)) + E(f(x)^2)$。

特别地，对于$f(xi) = kxi + a$，其 D(x)= $E(y^2) - 2E(y \cdot f(x)) + E(f(x)^2) = E(y^2) - 2E(y \cdot (kx + a)) + E(k^2x^2 + 2kax + a^2) = E(y^2) - 2kE(xy) - 2aE(y) + k^2E(x^2) + 2akE(x) + a^2$

现对于每个确定的(常数)a，有 f(k)= $E(x^2)k^2+[2E(x)a-2E(xy)]k+[a^2-2E(y)a+E(y^2)]$，可知当 f(k)取得 f(k)min 时，k=$\frac{E(xy)-aE(x)}{E(x^2)}$ ①。

同理对于每个确定的 k，有 g(a)= $a^2+[2E(x)k-2E(y)]a+[E(x^2)k^2-2E(xy)k+E(y^2)]$，当 g(a)取得 g(a)min 时，a=$E(y)-E(x)k$ ②。

联立①②得 k=$\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{E(x^2)-E(x)^2}=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{D(x)}$，a=$\frac{E(x^2)E(y)-E(x)E(xy)}{E(x^2)-E(x)^2}=\frac{E(x^2)E(y)-E(x)E(xy)}{D(x)}$。且由②可知对于$f(xi)=kxi+a$，当 D(x)= $\sum_{i=1}^{n}(yi-f(xi))^2*\frac{1}{n}$最小时，$f(x)=kx+a$恒过$(E(x),E(y))$。

三．某些级数的和与对应函数[通项]的积分之间的关系

I.首先来观看一系列过程

i.1·2+2·3+3·4+⋯+n(n+1)= $A_2^2+A_3^2+A_4^2+\cdots+A_{n+1}^2$=2·$\sum_{i=2}^{n+1}C_i^2$=2·$\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$，其中 n-1=2，m-1=n+1，那么根据我在二．I. 3.中写到的$C_m^n=\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$，可得到n=3，m=n+2，即$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)$=2·$C_{n+2}^3$，那么接下来的重头戏：$\sum_{i=1}^{n}i^2$=$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)-\sum_{i=1}^{n}i$=2·$C_{n+2}^3-(1+n)*\frac{n}{2}=2\cdot C_{n+2}^3-C_{n+1}^2$ =n(n+1)(2n+1)/6.

ii.类比地有 1·2·3+2·3·4+3·4·5+⋯+n(n+1)(n+2)= $\sum_{i=3}^{n+2}A_i^3$=3!·$\sum_{i=3}^{n+2}C_i^3$=3!·$\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}$，其中 n-1=3，m-1=n+2，那么$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)$=3!·$C_m^n$=3!·$C_{n+3}^4$，那么$\sum_{i=2}^{n+1}(i-1)i(i+1)$= $\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)$ =3!·C_{n+3}^4，即$\sum_{i=2}^{n+1}(i^3-i)$= 3!·C_{n+3}^4，那么$\sum_{i=2}^{n}(i^3-i)$= 3!·C_{n+2}^4，那么$\sum_{i=1}^{n}i^3-\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{i=2}^{n}(i^3-i)+1-1=3!\cdot C_{n+2}^4$，那么$\sum_{i=1}^{n}i^3=3!\cdot C_{n+2}^4+\sum_{i=1}^{n}i=3!\cdot C_{n+2}^4+C_{n+1}^2=n^2(n+1)^2/4$.

或者利用 i.中有关$\sum_{i=1}^{n}i^2$的结论：由于 i(i+1)(i+2)=i^3+(1+2)i^2+2i，则$\sum_{i=1}^{n}i^3=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)-(1+2)\sum_{i=1}^{n}i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{n}i$=3!·$C_{n+3}^4-3(2\cdot C_{n+2}^3-C_{n+1}^2)-2\cdot C_{n+1}^2=3!\cdot C_{n+3}^4-3!\cdot C_{n+2}^3+C_{n+1}^2=3!\cdot C_{n+2}^4+C_{n+1}^2=n^2(n+1)^2/4$.

iii.大于等于 4 次方的 m 次方级数和，在这里只能像 ii.中的第二种方法那样，利用$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k-1)$的求出，和之前一步步地求出的 1 到(m-1)次方级数和之间的运算来得到：$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k-1)=\sum_{i=m}^{n+m-1}A_i^m=m!\cdot\sum_{i=m}^{n+m-1}C_i^m=m!\cdot\sum_{i=n-1}^{m-1}C_i^{n-1}=m!\cdot C_m^n=m!\cdot C_{n+m}^{m+1}$(由于 n-1=m，m-1=n+m-1，则 n=m+1，m=n+m)；接下来又由于$\prod_{k=1}^{m}(i+k-1)=\sum_{j=0}^{m-1}(i^{m-j}\cdot\sum_{k=1}^{C_{m-1}^j}A_{jk})$，其中$A_{jk}=\prod_{b=1}^{j}a_b$，其中$a_b=\text{Random}\{\bigcup_{c=1}^{m-1}c-\bigcup_{d=1}^{b-1}a_d\}$，其中假定$A_{0k}=\prod_{b=1}^{0}a_b=1$，且$A_{jk}$的特定排列组合方式$\prod_{b=1}^{j}a_b$与其 jk 一一对应，即不同的 jk 必对应不同排列组合的A_{jk}。【即当 j 相同时，

对于不同的 k 对应的A_{jk}所对应的$\prod_{b=1}^{j} a_b$，组成$\prod_{b=1}^{j} a_b$的各个a_b不能完全相同；因而当 j 不同的时候$\prod_{b=1}^{j} a_b$的排列组合方式肯定也不完全相同。】【但其A_{jk}值可以一样】。

接下来就可以利用$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k-1) = m!\cdot C_{n+m}^{m+1}$和$\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k-1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}(i^{m-j}\cdot\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk})$【其中$A_{jk}=\prod_{b=1}^{j}a_b$，其中$a_b = \mathrm{Random}\{\bigcup_{c=1}^{m-1}c - \bigcup_{d=1}^{b-1}a_d\}$】得到$\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k-1) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}(i^{m-j}\cdot\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}) = m!\cdot C_{n+m}^{m+1} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}(i^{m-j}\cdot\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}) = m!\cdot C_{n+m}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n}(i^{m-j}\cdot\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}) = m!\cdot C_{n+m}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j})$【其中$A_{jk}=\prod_{b=1}^{j}a_b$，其中$a_b = \mathrm{Random}\{\bigcup_{c=1}^{m-1}c - \bigcup_{d=1}^{b-1}a_d\}$】

即$\sum_{i=1}^{n} i^m = m!\cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j})$，其中$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j}$又可被视为新的$\sum_{i=1}^{n} i^m$，并以以上公式展开：$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j} = (m-j)!\cdot C_{m-j+n}^{m-j+1} - \sum_{j2=1}^{m-j-1}(\sum_{k2=1}^{C_{m-j-1}^{j2}}A_{j2k2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j-j2})$，现把 j 写作 j1，k 写作 k1，则有$\sum_{i=1}^{n} i^m = m!\cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j1=1}^{m-1}(\sum_{k1=1}^{C_{m-1}^{j1}}A_{j1k1}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j1})$，$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j1} = (m-j1)!\cdot C_{m-j1+n}^{m-j1+1} - \sum_{j2=1}^{m-j1-1}(\sum_{k2=1}^{C_{m-j1-1}^{j2}}A_{j2k2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j1-j2})$，接下来则有直到$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j1-j2-\cdots-jm-2} = (m-j1-j2-\cdots jm-2)!\cdot C_{m-j1-j2-\cdots-jm-2+n}^{m-j1-j2-\cdots-jm-2+1} - \sum_{jm-1=1}^{m-j1-j2-\cdots-jm-2-1}(\sum_{km-1=1}^{C_{m-j1-j2-\cdots-jm-2-1}^{jm-1}}A_{jm-1km-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j1-j2-\cdots-jm-2-jm-1})$，即$\sum_{i=1}^{n} i^{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL} = (m-\sum_{L=1}^{m-2}jL)!\cdot C_{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL+n}^{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL+1} - \sum_{jm-1=1}^{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL-1}(\sum_{km-1=1}^{C_{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL-1}^{jm-1}}A_{jm-1km-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-\sum_{L=1}^{m-1}jL})$【注：其实这个式子只对应 j1=1=j2=⋯=jm-2=jm-1 的时候，只有它才会向内层走这么远。。;而对于 j1=2 且 jL=1(2≤L≤m-2)，层数最多的最内层(最后一步)是把$\sum_{i=1}^{n} i^{m-\sum_{L=1}^{m-3}jL}$写作$(m-\sum_{L=1}^{m-3}jL)!\cdot C_{m-\sum_{L=1}^{m-3}jL+n}^{m-\sum_{L=1}^{m-3}jL+1} - \sum_{jm-2=1}^{m-\sum_{L=1}^{m-3}jL-1}(\sum_{km-2=1}^{C_{m-\sum_{L=1}^{m-3}jL-1}^{jm-2}}A_{jm-2km-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-\sum_{L=1}^{m-2}jL})$；任何一个 jL 的取值都会影响最后总共会有多少层，这所对应的实际情况就是：每一个$i^{m-\sum_{L=1}^{?}jL}$，只要$m-\sum_{L=1}^{?}jL$还没$=1$，它就总可以被继续写为从 i 的一次方到$m-\sum_{L=1}^{?}jL-1$次方 的求和形式，接下来再在其中选一个 i 的次方数不等于 1 的项，再把它写成求和的形式，以至于到最后所有层的所有项的 i 的次方数都等于 1】

【其实对于$\sum_{i=1}^{n} i^m = m!\cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j})$，更好运算地，也可以把它写作$\sum_{i=1}^{n} i^m = m!\cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=m-1}^{1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}}A_{jk}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^{m-j})$，即每一层的 j 都从最大值 m-1 开始向最小值 1 向下着取，这样就对应于从 i 的低次方开始向 i 的高次方累加。】

以上方法是在尝试着分解 every certain “j “所对应的$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j}$，即 a new certain$\sum_{i=1}^{n} i^m$，以至把所有的新的$\sum_{i=1}^{n} i^m$分解至一层层带系数的$\sum_{i=1}^{n} i^1=C_{n+1}^2$之和之和，然后进行层与层之间的$C_{n+1}^2$的系数的乘法运算、同层内$C_{n+1}^2$的系数之间的加减运算。

【其实，对于$\sum_{i=1}^{n} i^m = m!\cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=m-1}^{1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}} A_{jk}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^{m-j})$，我们确实可以不必做那么多重复的步骤，以至每项都要细化到$\sum_{i=1}^{n} i^1$，只要每次计算出了低阶的$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j}$，就连同以前的$\sum_{i=1}^{n} i^1$至$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j}$，整体带入计算出$\sum_{i=1}^{n} i^{m-j+1}$，以至求得$\sum_{i=1}^{n} i^m$。】

II.下面开始正题

对于这同一种级数的求和，我们来用“积分“有关的 skills 来对这一问题进行另类操作——以此揭示连续和非连续之间的“微弱”联系【这也是我高中的想法，所以积分时没写 dx 这个陋习我将其连同那时的思想一起保留在了这里，不要学那时的我哦。。其实是因为我再写这本书的时候还没真正系统学习微积分(但稍微知道一点点)。。并且没有涉猎与“级数”有关的知识。。】：

其 basic 原理是：由于$\int_1^{n+1} f(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1} f(x)$，那么假设 ai=f(i)，则有$\sum_{i=1}^{n} ai = [\int_1^{n+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1} f(x)] + \sum_{i=1}^{n} ai = \int_1^{n+1} f(x) - [\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n} ai] = \int_1^{n+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - ai] = \int_1^{n+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - f(i)]$，即$\sum_{i=1}^{n} ai = \int_1^{n+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - f(i)]$。

那么如果我们能知道$\sum_{i=1}^{n}[bi]$，其中 bi=$\int_i^{i+1} f(x) - f(i)$，则我们便可知道$\sum_{i=1}^{n} ai$了。

i.现对于 ai=f(i)= i^m，有 bi=$\int_i^{i+1} f(x) - f(i)=\left(\frac{(i+1)^{m+1}}{m+1} - \frac{i^{m+1}}{m+1}\right) - i^m = \frac{\sum_{j=0}^{m+1} i^j * C_{m+1}^{j} - i^{m+1}}{m+1} - i^m = \frac{\sum_{j=0}^{m} i^j * C_{m+1}^{j}}{m+1} - i^m = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} i^j * C_{m+1}^{j} + (m+1)i^m}{m+1} - i^m = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} i^j * C_{m+1}^{j}}{m+1} = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * i^j$，则根据乘法分配率，或者说根据另一种非横向而是竖向的分类方式，有$\sum_{i=1}^{n}[bi] = \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * i^j] = \sum_{j=0}^{m-1}[\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * i^j] = \sum_{j=0}^{m-1}[\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * \sum_{i=1}^{n} i^j]$，则现在连起来便有$\sum_{i=1}^{n} i^m=\int_1^{n+1} x^m - \sum_{i=1}^{n}\left[\int_i^{i+1} x^m - i^m\right] = (\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \frac{1^{m+1}}{m+1}) - \sum_{j=0}^{m-1}[\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * \sum_{i=1}^{n} i^j] = \frac{\sum_{j=0}^{m+1} n^j * C_{m+1}^{j} - 1}{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1}[\frac{C_{m+1}^{j}}{m+1} * \sum_{i=1}^{n} i^j] = \frac{1}{m+1}(\sum_{j=1}^{m+1}\left[C_{m+1}^{j} * n^j\right] - \sum_{j=0}^{m-1}[C_{m+1}^{j} * \sum_{i=1}^{n} i^j])$

$=\frac{1}{m+1}([\sum_{j=1}^{m-1}\left(C_{m+1}^{j} n^j\right) + (m+1)n^m + n^{m+1}] - [\sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n} i^j) + n])= \frac{1}{m+1}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\left(C_{m+1}^{j} n^j - C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n} i^j\right) + (m+1)n^m + n^{m+1} - n\right) = \frac{1}{m+1}(\sum_{j=1}^{m-1}[C_{m+1}^{j}(n^j - \sum_{i=1}^{n} i^j)] + (m+1)n^m + n^{m+1} - n)= \frac{1}{m+1}((m+1)n^m + n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}[C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n-1} i^j])= n^m + [n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1)$或者继续写为$n^m + [n^{m+1} - 1 - \sum_{j=0}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1)$

综上$\sum_{i=1}^{n} i^m = n^m + [n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j}\sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1)$，其中$\sum_{i=1}^{n-1} i^j$又可被当作新的$\sum_{i=1}^{n} i^m$，接下来的步骤便和 I.的做法一模一样了，既可以从小到大地整体代换向上攀爬，也可以无限细化向下分支至所有层所有项的非系数部分相同。

III.总结

首先，有恒等式$\sum_{i=1}^{n} i^m = n^m + [n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j} \sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1) = m! \cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}} A_{jk} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^{m-j})$

其次$\sum_{i=1}^{n} ai = \int_1^{n+1} f(x) - \sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - f(i)]$是个不错的备用轮胎，它有着一下特点：
1.如果你能直接知道$\sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - f(i)]$，那么恭喜。

2.如果你无法直接知道$\sum_{i=1}^{n}[\int_i^{i+1} f(x) - f(i)]$，但可以像$\sum_{i=1}^{n} i^m = m! \cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}} A_{jk} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^{m-j})$和$\sum_{i=1}^{n} i^m = n^m + [n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j} \sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1)$所代表的具体问题一样，往下可知同类低阶级数的具体和式的数学形式，那么你总可以一步一步地走上来。

3.它比$\sum_{i=1}^{n} i^m = m! \cdot C_{m+n}^{m+1} - \sum_{j=1}^{m-1}(\sum_{k=1}^{C_{m-1}^{j}} A_{jk} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^{m-j})$和$\sum_{i=1}^{n} i^m = n^m + [n^{m+1} - n - \sum_{j=1}^{m-1}(C_{m+1}^{j} \sum_{i=1}^{n-1} i^j)]/(m+1)$更有一般性和普遍性，任何级数都可以一试。

四．多项式定理

I.i don't know how to describe it.

i.在$(\sum_{i=1}^{n} ai)^m$的展开式中，对任意给定的项$\prod_{i=1}^{n} ai^{bi}$【其中$\sum_{i=1}^{n} bi = m$】，它的系数为$\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} bi!}$，与 n 无关【比如，$(1+2+3+4)^6$中的$1^2 2^3 3^1 4^0$项系数与$(1+2+3+4+5)^6$中的$1^2 2^3 3^1 4^0 5^0$项系数相同】。

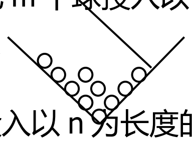
【它的得来方法：m 个不同的格子里已经放好了 m 个给定的 ai(可能有相同的 ai)，现在让这些 ai 们在这 m 个格子之间疯狂地轮换位置，有多少种不重复的组合(而不是排列)就有多少个对应的不重复的[给定项$\prod_{i=1}^{n} ai^{bi}$]的得来途径】

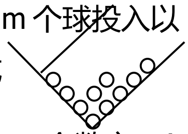
ii.在$(\sum_{i=1}^{n} ai)^m$的展开式中，对任意给定的项$\prod_{i=1}^{n} ai^{bi}$【其中$\sum_{i=1}^{n} bi = m$】，它的所有同类项的个数为$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{m} Count_{j=1}^{n}(bj=i)!}$【“同类项”是指，指数 bi 们在组合(不要求一定要在排列上)上均为相同的某特定数组[b1,b2,b3,⋯,bn]的项们；比如$1^2 2^3 3^1 4^0$与$4^2 2^3 1^1 3^0$】。

【它的得来方法：n 个不同的 ai 放入 n 个以 bi 为标签的格子里(可能有相同的 bi)，现在让这些 ai 们在这 n 个格子之间疯狂地轮换位置，有多少不重复的组合(而不是排列)就有多少个同类项】【即使可能有些 ai 的值相同，这里仍然以 i 为标签,视为不同的 ai】

II.what's this again?

i. $(\sum_{i=1}^{n} ai)^m = \sum_{z=1}^{?}[\frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} bi!} \cdot \sum_{k_z=1}^{\frac{n!}{\prod_{i=0}^{m} Count_{j=1}^{n}(bj=i)!}} Ak_z]$，其中$Ak_z = \prod_{i=1}^{n} aik_z{}^{bik_z}$。【我发现不因某一个求和符号而有关系的两个 i 便不是同一个 i，因而可以有两个相同长相的 i 身处两个不关联的求和计算中，这样省略了寻找新的自变量外形的困扰。】其中[?]

=[把 m 写作 n 个数字 xi(1≤i≤n，0≤xi≤m)的和时，所有不重复的(有效的)组合$\sum_{i=1}^{n} xi$的个数]。=像这样把 m 个球投入以 n 为长度的底的 45°斜二维方桶里，球球们共有多少种可能的分布方式  。【重力加速度竖直向下】

=像这样把 m 个球投入以 n 为长度的底的 45°斜二维方桶里，球球们共有多少种可能的分布方式  。【重力加速度竖直向下】

=[把 n 写作 m 个数字 xi(1≤i≤m，0≤xi≤n)的和时，所有不重复的(有效的)组合$\sum_{i=1}^{m} xi$的个数]

【注：“?”≠单纯的隔板法得出的结果；这里我简单介绍一下啥子叫隔板法以及它的适用范围/对象：对C_{M-1}^{n-1}=[把 M 写作 n 个数字 xi(1≤i≤n，1≤xi≤M-(n-1))的和时，所有不重复的(有效的)排列$\sum_{i=1}^{n} xi$的个数]=[把 M-n 写作 n 个数字 xi(1≤i≤n，0≤xi≤M-(n-1)-1)的和时，所有不重复的(有效的)排列$\sum_{i=1}^{n} xi$的个数]，

现在令 M-(n-1)-1=m，则有 M=m+n，则C_{m+n-1}^{n-1}=[把 m 写作 n 个数字 xi(1≤i≤n，0≤xi≤m)的和时，所有不重复的(有效的)排列$\sum_{i=1}^{n} xi$的个数]，此时就和[?]=[把 m 写作 n 个数字 xi(1≤i≤n，0≤xi≤m)的和时，所有不重复的(有效的)组合$\sum_{i=1}^{n} xi$的个数]很接近了。但排列与组合一词之差，让他俩关系又相去甚远。[不过C_{m+n-1}^{n-1}的展开式与$(\sum_{i=1}^{n} ai)^m$的展开式可以说是高度相似的：最外层都是对某种分类方式下的特征值从 z=1 到?的求和，其中?的属性为组合]】

ii.受斜方桶的启发，在实在找不出那个纯粹精炼的数学表达式以及得到它的任何途径的情况下，我开发了一种算法：m~n 算法，让计算机可以逻辑鲜明地累加得到最终结果，这种算法其实就是模拟穷举过程，但其价值就确实在于“有序地穷举”：

1. 由于即使 n>m，n 也相当于 m，所以现记 m~n 为 m~min(m,n)。现把 m 个球放在以 n 为底的限制(宽的)桶里，并占满最下一层(记为第 1 层)，min(m,n)个球；此时第 1 层以上所有层里的 m-min(m,n)个球的总组合数记为$S_{min(m,n)}$=m-min(m,n)~min(m,n)=m-min(m,n)~min(m-min(m,n),min(m,n))。

2.把第 1 层的球数 min(n,m)减去 1，并使上面所有层的球数不超过 min(n,m)-1(即相当于设定了新的 n 值=n-1)，此时 1 层以上所有层的球的总组合数记为$S_{\min(m,n)-1}$=m-min(m,n)+1~min(m,n)-1=m-min(m,n)+1~min(m-min(m,n)+1,min(m,n)-1)。

3.知$S_{\min(m,n)-i}$=m-min(m,n)+i~min(m,n)-i=m-min(m,n)+i~min(m-min(m,n)+i, min(m,n)-i)，则进一步可知 m~n=m~min(m,n)=$\sum_{i=0}^{\min(m,n)-1} S_{\min(m,n)-i}$=$\sum_{i=0}^{\min(m,n)-1} m-\min(m,n)+i \sim \min(m-\min(m,n)+i, \min(m,n)-i)$

4.把每个 i 所对应的 m-min(m,n)+i~min(m-min(m,n)+i, min(m,n)-i)都看作下一个新的 m~min(m,n)，进行分解直到不能分解为止。其中不能分解的标志是：若某一级 m~min(m,n)尝试着继续分解，当 i=1[0]时，m-min(m,n)+i~min(m-min(m,n)+i, min(m,n)-i)中的 min(m-min(m,n)+i, min(m,n)-i)中的 min(m,n)-i≤0[1]，即 m~min(m,n)中的 min(m,n) ≤1，此时就返回上一级，即表明该级已不能再被分解。

5.计数所有末端/末梢/最内层/最外围/最底端/最低端的 m~1 和 0~0，其个数就等于我们要求的[?]值。那么下面我们来举例模拟一下下：

7~5=下列 5 个彩色的和(1)	2~2=下列 2 个彩色的和(1.1)	3~3=下列 3 个彩色的和(1.2)	4~3=下列 3 个彩色的和(1.3)	2~2=下列 2 个彩色的和 (1.3.1)	5~2=下列 2 个彩色的和(1.4)	3~2=下列 2 个彩色的和 (1.4.1)
2~5=2~2	0~2=0~0					
3~4=3~3	1~1=1~1	0~3=0~0				
4~3=4~3		1~2=1~1	1~3=1~1			
5~2=5~2		2~1=2~1	2~2=2~2	0~2=0~0	3~2=3~2	1~2=1~1
6~1=6~1			3~1=3~1	1~1=1~1	4~1=4~1	2~1=2~1

【注释：该表格中所有红色代表不可分解的分解值，即最后的有效计数单位，共计 13 个，则[?]=13；所有黑色代表运算后但没化简的分解值；所有蓝色代表化简后的可分解的分解值，蓝色由深到浅 7~5→7~5→7~5 代表化简后的可进一步分解的分解值，颜色越浅表示层数更内，同颜色表示同层数；数字 1.3.1 表示：7~5 这个第一个可分解的值分解后，第二层可分解值中的第三个可分解值 4~3 分解后，第三层可分解值中该值 4~3 所代表的分支下的第一个可分解值 2~2】

【现在各位便知道为什么我要费力地每一步都引入 n=min(m,n)这个赋值操作了吧，因为只有这样真实的 n 值，才是判断是否可以被继续分解的标志】

【接着我们又可从下式 m~n=m~min(m,n)= $\sum_{i=0}^{\min(m,n)-1} m-\min(m,n)+i \sim \min(m-\min(m,n)+i, \min(m,n)-i)$看出每一个新的 m~min(m,n)的分解产物总数为 min(m,n)-1+1 个，即 min(m,n)个，那么[?]=∑每个可分解值 $m\sim\min(m,n)$分解出的不可分解值的个数 =∑[每个可分解值 $m\sim\min(m,n)$的 $\min(m,n)-$

分解出的可分解值个数] =∑[每个可分解值 m~min(m, n)的 min(m, n)] − ∑[每个可分解值 m~min(m, n)分解出的可分解值个数]=包括初始对象 7~5 在内的所有有效 n 值 min(m,n)不是 0 或 1 的可分解值的有效 n 值 min(m,n)之和−不包括初始对象 7~5 在内的所有所有有效 n 值 min(m,n)不是 0 或 1 的可分解值的个数之和=包括初始对象 7~5 在内的所有有效 n 值 min(m,n)不是 0 或 1 的可分解值的有效 n 值 min(m,n)之和−其个数之和+1　　例：对于 7~5 来说，其[?]=(5+2+3+3+2+2+2)-7+1=13。对计算机来讲如果可以更快的话[?]=(5-1+2-1+3-1+3-1+2-1+2-1+2-1)+1=13 也可】

五．欧拉公式之一： a+b-c=n

I.引入：a+b-c=2

a+b-c=2 中 a,b,c 分别代表三维空间中空心多面体(或者叫实心多面体的外壳)的点、面、线的个数；并且这里的 b，即面数，它的单位要么全为“内面”要么全为“外面”，或者将一个有上下面的面计为一个面(“以立体的角度看它，但体积为 0 的平面”)，并且这里，面=$C_{多边形}$(点∪线)，即各个多边形们不包括边框的部分【同样的有，线=$C_{线段}$点，即线是不包括点的，即这里的线不是线段，不包括端点；因此点、线、面三者之间毫无交集，是并行存在的】。【其实这里，“外面”和“内面”的定义仍然是不清晰的，甚至连“面”的定义都不清晰，不过接下来我们正尝试着一步一步进入这个世界，以及顺带搞清楚此问题。】

Start:①.点、面、线，其中任意两者的存在不会独立于第三者，即它们之中如果有两者存在，那么第三者不可能不同时与它俩共存；那么对于这个特定情景，当任意两者的存在将决定第三者的存在时，[其实一般地，只能⟸]有任意两者的存在数量将决定第三者的存在数量，那么 f(a,b,c)= k_4总可以被写作 f(b,c)=a、g(a,c)=b、h(a,b)=c，即 a、b、c 中的任意一个元素都可表示为一个关于其他两个元素的函数【即任意某确定的两个元素，总能且只能映射出一个第三个元素】。②.由①.中强调的主体的任意性，可知点、面、线，其中任意一个类，在“存在”这方面的属性，对于其他两类，没有任何优越性可言；又由于“存在”这方面的属性，直接与其存在的数量相关联，所以现认为 f(b,c)、g(a,c)、h(a,b)在形式上是平等的【比如各式的各项次数均相等】。

能满足以上的①. ②.的 f(a,b,c)= k_4【即⑴.总可以被写作 f(b,c)=a、g(a,c)=b、h(a,b)=c；⑵.且 f(b,c)、g(a,c)、h(a,b)在形式上是平等的；⑶.且默认 f(b,c)、g(a,c)、h(a,b)所映射得到的 a、b、c 必须为整数，的 f(a,b,c)= k_4】现只能由低次且同次基本

初等函数们的和差组成，即其存在形式只能是线性的：$f(a,b,c)=k_1a+k_2b+k_3c=k_4$(当然，最终能证明 a，b，c 满足线性关系的，是假设的线性关系不自相矛盾地对于任意维下的任意 a、b、c 都成立。并且由于“任意两者的存在数量将决定第三者的存在数量”，那么 a、b、c 就只能满足这一个 $f(a,b,c)= k_4$了)。

现假设任意特定“维度”(胚值)的空间(这里的“空间的维度”之间的不同，等价于“各维度下的空间”之间的不同，并均以 k1，k2，k3，k4 的组合的不同来区分 or 定义)都有唯一与该维度对应的一组(k1，k2，k3，k4)*k，那么我们现在开始这段“如果有规律则只能满足这样的规律→满足这样的规律后便只能满足这个这样的规律了”的旅程：

㈠.假设有两个(从一个实心多面体上切下来的)实心多面体，对于它们的外表面/外壳，即它们的空心多面体，均有有$k_1a_1+k_2b_1+k_3c_1=k_4$和$k_1a_2+k_2b_2+k_3c_2=k_4$，现再把它们按照切面正对切面重新拼接成“带伤疤的”原先的多面体，在内部的两层外壳消失后，愈合它的表面“伤口”(尝试着擦去:两切面重合后，以前创造切面所多出来的多边形的点和线。【注意，切面多边形中并非所有的点和线都是由“切”所创造的，即有部分点和线是原多面体原有的】)，使拼接成的多面体外壳(或称作空心多面体)各个细节都全等于以前未切时的多面体外壳。可知这个现在/以前的多面体外壳，仍然满足$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-L_{0_b})+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$【其中：

甲.$L_{0_{ac}}$表示一定会消失的点和线的个数，即重合时消失的某个多边形的边框：点数等于线数=$L_{0_{ac}}$，植树问题。且原分属于两个多面体的两个多边形，至少有一个的边框会完全消失，另一个的边框上的点和线可能会留下一部分构成新多面体的棱角；

乙. L_{0_b}表示一定会消失的面的个数，即切面重合后，失去了边框的多边形和未失去边框的多边形，它们各自的那个面都将消失在新多面体内部而不计入内，则$L_{0_b}=2$；

(前两个均属于横向上(即沿着拼接面方向上)的操作，且消去的是常量。那么进行了以上工作后，我们开始尝试着擦去某些东西；接下来的两个操作均属于纵向上(即沿着拼接方向上)的操作，且消去的是变量。)

丙.L_{ac}表示可能会消失的点和线的个数，即纵向上的某些分属两个多面体的线，由于恰好同在一条直线上而合成为了一条线，并因此同时消去了接轨、相连的地方的那个点；

丁.L_{bc}表示可能会消失的面和线的个数，即纵向上的某些分属两个多面体的面，由于恰好同在一个平面上而合成为了一个面，并因此同时消去了接轨、相连的地方的那条线。

伴随着$L_{0_{ac}}$、L_{ac}、L_{bc}的各种可能的具体取值，上式$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-2)+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$便包括了我们所设置的“合成”情景中所有可能的情景了】

那么在解释了这 4 个东西的得来后，下面我们来解方程组①.$k_1a_1+k_2b_1+k_3c_1=k_4$、②.$k_1a_2+k_2b_2+k_3c_2=k_4$、③.$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-2)+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$现将①. ②.两式带入③.可得$2k_4-(L_{ac}+L_{0_{ac}})(k_1+k_3)-2k_2-L_{bc}(k_2+k_3)=k_4$，即$k_4=(L_{ac}+L_{0_{ac}})(k_1+k_3)+L_{bc}(k_2+k_3)+2k_2$。

由于公式 $f(a,b,c)=k_1a+k_2b+k_3c=k_4$具有普适性，即对于一切可能的$L_{0_{ac}}$、$L_{ac}$、$L_{bc}$排列组合，均有$k_4=(L_{ac}+L_{0_{ac}})(k_1+k_3)+L_{bc}(k_2+k_3)+2k_2$恒成立，则有$k_1+k_3=0$，$k_2+k_3=0$，$k_4=2k_2$，即有$k_1:k_2:k_3:k_4=1:1:(-1):2$，则有 a+b-c=2。

㈡.i.在㈠.的基础上，我们开始进一步踏入更广的空间，开始从更全面的角度审查上一个过程，其为什么有效，和怎么更有效、怎么具有更广阔的代表性:

现在我们假想上一个情景中，多面体们的点们，是运动的。那么我们不需要通过切一个实心多面体来得到两个拥有至少一对相同多边形的空心多面体，而可以通过任意两个空心多面体的点阵移动和点的派生、删减直接把各自的某个面创造/修改成某对相同的多边形；同样的道理，L_{ac}和L_{bc}也并非只能通过碰巧的切所导致的碰巧的拼接产生，而是可以更人为地强制生成它们：比如我们在拼接成一个大的空心多面体后，再对空心大多面体动手脚：通过移动点阵，迫使出现线与点的消失，面与线的消失，让这种在拼接过程中可能出现的情景变为，在拼接之后，继续移动点阵过程中强迫出现的情景(把所有几率不为 0 的事件视为必然事件就是我们的原则)。

以上，“切割”、“切割后的点阵移动”、“拼接”、“拼接之后的移动点阵”实质上都属于“点阵的变换”，并且我着重介绍通过点阵变换中的拼接得到三个方程而并不强调通过点阵变换中的切割来得到三个方程的原因在于：学会了加法就必定同时学会了减法，这个加法的逆运算；减法比加法“难”所以能用加法就用加法；减法让人感觉减数和差，地位不平等，然而减数和差以及被减数都属于点阵，地位平等(其实，能相加减的各项，地位都平等(因为单位相等相加减才有意义嘛))。

ii.下面我们便从另一个角度得到 a+b-c=2:

同样有两个任意的空心多面体$k_1a_1+k_2b_1+k_3c_1=k_4$和$k_1a_2+k_2b_2+k_3c_2=k_4$，现让他俩的其中一个的某个点向外凸出/隆起，创造一个多棱锥锥面；另一个的某个点向内陷入空心多面体内部，创造一个待补的多棱锥的锥面，并想方设法增删两个多棱锥的底边的点数，使之相同。这时我们把两个椎体/面中，位置相似的点进行相互靠近并使之重合，待内部的点线面消失后，愈合表面的刚缝合的伤口。这时我们就会得到类似

$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-L_{0_b})+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$ 的一个式子：

$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}}-L_{0_a})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-2L_{0_{bc}})+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}}-2L_{0_{bc}})=k_4$

其中的$L_{0_{ac}}$、L_{ac}、L_{bc}的含义与之前一样；L_{0_b}变为了L_{0_a}，值仍为 2，表示内部一定会消失的点的个数，即重合的那两个尖锥的顶点；多了的一个元素$L_{0_{bc}}$表示内部一定会消失的相同的面数和线数，即拼接面上除尖锥顶点和边框之外剩下的线和面们，与$L_{0_{ac}}$同属植树问题。同理，L_{ac}和L_{bc}可以不只通过拼接碰巧产生，而被强制产生。

同样地，将前两个带入第三个式子，得到$k_4=(L_{ac}+L_{0_{ac}})(k_1+k_3)+(2L_{0_{bc}}+L_{bc})(k_2+k_3)+2k_1$(这个特殊情景中其实还有$L_{0_{ac}}=L_{0_{bc}}$，不过这里不需要也可以。）同样可以解得$k_1+k_3=0$，$k_2+k_3=0$，$k_4=2k_1$，得到$k_1$：$k_2$：$k_3$：$k_4=1$：$1$：$(-1)$：$2$，则有 a+b-c=2。

㈢.感觉仍然着眼于局限的个例们？【如果有普适的等式的话，它首先得满足假想中现实中确有的普适范围内的特例，这确实是个找普适等式的普适方法。】其实我们一直在向着更广义进发，一直在为了这一个做法做着铺垫； 下面我们便开始真正的普适操作：现在假如我们在两个多面体的膜融合的过程中去掉对接触面的点阵排列组合方式的限制，即 remove 像㈠. ㈡. 一样对接触面点阵属性的具体限制，即不对进行膜融合的膜进行任何人为规定，那么我们首先得知道进行膜融合的膜，它这个空间结构的 a+b-c=n 的 n 值是几(或者更严格的，现在的我们只能说它的$k_1a+k_2b+k_3c=k_4$的各项系数的比是多少，不过我们很快就会推导出，对于任意点集中，点的任意排列组合、点与点连线的任意排列组合，以及线与线们所创造的各种面与面的排列组合，均将有k_1：k_2：k_3恒$=1$：1：(-1)不同的只有k_4与k_1、k_2、k_3的比值，那么我们现在把$k_1a+k_2b+k_3c=k_4$写作 a+b-c=n，其中 n=$\frac{k_4}{k_1}$或$\frac{k_4}{k_2}$)，下面我们就先暂时抛开类 a+b-c=2 的空间结构模型，去往 a+b-c=1 的空间结构模型，那里有这个问题的充分解答。

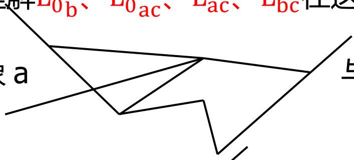
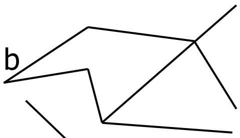
II. 重中之重：基础：a+b-c=1

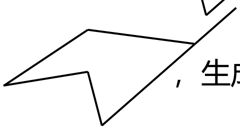
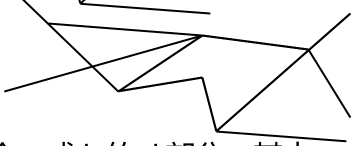
i.a+b-c=1 的空间的空间结构，既可以是 a+b-c=2 的一个空心多面体切一刀切开后所变成的，两个以“环切线”为自己的边界的，二维的膜，也可以是条二维折线，也可以是条一维的，上面有很多小线段的线段，也可以就是纯粹的一个 0 维的点，等等。

现对于 I.所提到的㈠. ㈡.两种特例，我们有类似的两种特例：

类㈠.地有：$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}})+k_2(b_1+b_2-L_{bc}-L_{0_b})+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$

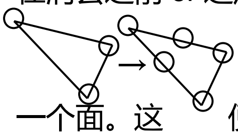
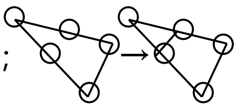
其中的L_{0_b}、$L_{0_{ac}}$、L_{ac}、L_{bc}的含义与 I. ㈠.完全一致，即【$L_{0_{ac}}$表示一定会消失的点和线的个数；L_{0_b}表示一定会消失的面的个数，且$L_{0_b}=1$；L_{ac}表示可能会消失或生成的点和线的个数；L_{bc}表示可能会消失或生成的面和线的个数】

为了各位更好地理解L_{0_b}、$L_{0_{ac}}$、L_{ac}、L_{bc}在这里的含义，下面举这样的一个属于它的例子：将研究对象 a  与研究对象 b  融合，整合

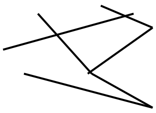
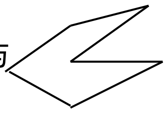
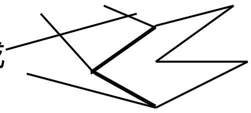
公共/交集部分 d ，生成同胚的目标对象 c 。

其中 a、b、c、d 均同胚；a、b 两者融合时，只消去了一个 a 或 b 的 d 部分，其中，在消去的 d 中，线=点=$L_{0_{ac}}$，面=$L_{0_b}=1$。

在消去之前 or 之后，任选(甚至创造)一个对象的任意一个部分进行再创造：

此步骤多了两个点，两条线；此步骤多了一条线，一个面。这便是L_{ac}、L_{bc}的来源之一。

类㈡.地有：$k_1(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0_{ac}}-L_{0_a})+k_2(b_1+b_2-L_{bc})+k_3(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0_{ac}})=k_4$，仅仅把$L_{0_b}$变为了$L_{0_a}$，且值仍为 1。它所对应的例子可以是：

 与  组合成 。

以上两个式子均可以得到k_1：k_2：k_3：$k_4=1$：1：(−1)：1，即 a+b-c=1。

【注：以上的例子中的点集们，可以任意浮动以至于垂直纸面向里向外运动而使各点不在一个平面，让点集整个地像构成了“毯子”一样，以非平面而类曲面地存在于三维空间，但其 n 值/胚值仍保持不变。】

ii.下面我们开始回答 I.所提到的㈢.并进一步开始我们的疯狂合成之旅：我们现在来利用 a+b-c=1 来“合成”出 a+b-c=2：

法 1：解方程：

$(a_1+a_2-L_{ac}-2a)+(b_1+b_2-L_{bc}-2b)-(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-2c)=k$，其中或者同时，有$a_1+b_1-c_1=k$、$a_2+b_2-c_2=k$、a+b-c=1。

由以上四式得：2k-2=k，知 k=2。

【这个式子对应于：设两个 n 值为 k 的弹性球面相接触后，消去两个 n 值为 1 的接触面，合成出的新弹性球面的胚值仍为 k；如果这两个接触面被默认完全相同的话，则 a

的部分和 c 的部分还要加上L_{0ac}或L_{0bc}，或者方程左边得加上一个$(a_0+b_0-c_0)$[或对应的 a、b、c 部分分别加上a_0、b_0、c_0]，并且$a_0+b_0-c_0$=0】

这样我们就通过方程，利用 a+b-c=1 得到了 a+b-c=2。

法 2：算术方法：

我们在已知 a+b-c=1 后，想看看对于其他维度/n 值/胚值的空间的$k_1a+k_2b+k_3c=k_4$，它的形式是否也为类似的 a+b-c=n 的形式。

那么我们用两个半球壳(球壳的一半：n 值为 1，是我们熟悉的 a+b-c=1)，将它们的圆形边界靠近后熔合，对应的数学表达式为(我们想查看新空间的 a+b-c=什么)：

该胚下的 a+b-c=$(a_1+a_2-L_{ac}-L_{0ac})+(b_1+b_2-L_{bc})-(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}-L_{0ac})$=$(a_1+b_1-c_1)$+$(a_2+b_2-c_2)$=1+1=2

这样我们就通过算术方法，利用 a+b-c=1 得到了 a+b-c=2。

现在我们便已回答了 I.中㈢. 所提到的问题，使得 a+b-c=2 的得来具有较高的任意性。

III. 向未来进军：开拓：a+b-c=n

(1). “n<1” =低 n 值=高连通率=一个开放空间多条自我连通路径=曲面上两点之间沿曲面的连线路径的更多种排列组合。

①.n 为<1 的偶数:

A.一些等效 0 们：

i.螺旋升降气流墙(两个毯子的坍塌连通)：两个有确定边界的曲面，面与面正对着，平行排列；而后，各曲面中心开始向“对方的身体”坍塌，触碰部分融为一体并消失，当消失了一个小圆面后，进程停止。

此时合成的结构的 n=a+b-c=$(a_1+a_2-L_{ac}+L_{0ac}-2a)+(b_1+b_2-L_{bc}-2b)-(c_1+c_2-L_{bc}-L_{ac}+L_{0ac}-2c)$=1+1-2*1=0。

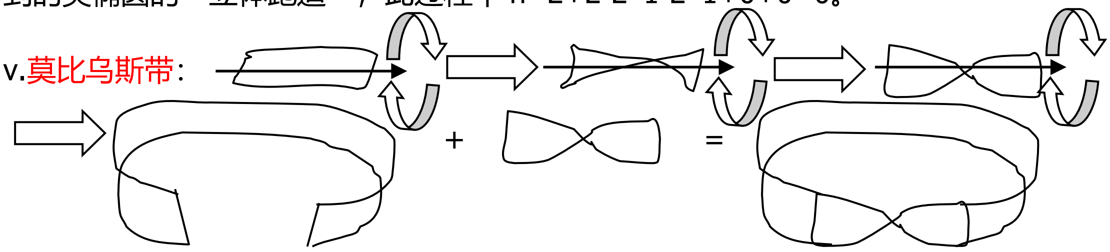
ii.吸管：可由上则的一个 i. 螺旋升降气流墙直接演化得到，所以其 n 值仍=a+b-c=0；它也可以通过将一个确界平面卷起来，边相接触后熔去一个同胚的折线段，也可得到 a+b-c=0。

iii.圆环带(俩同心圆及其之间的部分)：可由 ii.吸管直接得到，n 值=0；也可通过一个确界平面中间挖一个小界的确界平面得到，n=0。

iv.游泳圈：可由一个 i. 螺旋升降气流墙通过下降的中心上升气流和上升的中心下降气流在外部的的交汇，缝合一个 a+b-c=0 的边界，n 值仍=0；也可通过两个 ii. 吸管，拉长且弯曲后，头尾相接，缝合两个 a+b-c=0 的边界，n 值仍=0；还可通过两个 iii.圆环带，空心正对空心，以形成大π键的方式，各自外环焊接各自外环，内环熔合内环地，缝合掉两个 a+b-c=0 的内外界(一大一小两个同心圆)后，得到 n=0；

它还可通过一个 a+b-c=2 的球面，某两个方向的相对面相对着塌缩后，得到 n=1*2-2*1+0=0；也可通过两个 U 形磁铁般的 a+b-c=2 的球面，磁极对磁极相吸在一起后得到的类椭圆的“立体跑道”，此过程中 n=2+2-2*1-2*1+0+0=0。

v.莫比乌斯带：



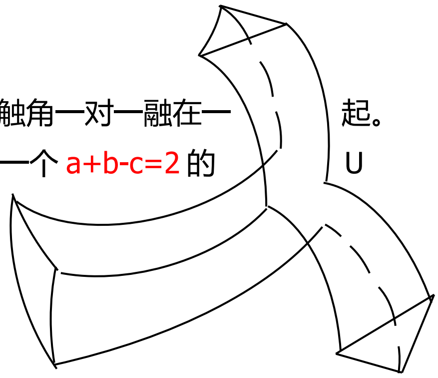
当(首旋–尾旋)=奇数个π时，带子两个面是连通的；当(首旋–尾旋)=偶数个π时，带子两个面是相隔的。为了使莫比乌斯带的 n 值恒=0，规定：有着上下面的面记为一个面；即空间上的无间隔地背靠背的两个面，有效个数记为 1；即我们总在空间上考察点、线、面们，我们看到的是空间上的，一个个有两个面的面，一个个有一个点的点，一个个有一条线的线。

B.一些等效-2 们：

i.共用上下不相接的两个云层平面的两个螺旋升降气流墙组成的整体：$(a_1 + a_2 - L_{ac} + 2L_{0ac} - 4a) + (b_1 + b_2 - L_{bc} - 4b) - (c_1 + c_2 - L_{bc} - L_{ac} + 2L_{0ac} - 4c) = -2$。

ii.两个游泳圈接触相熔成的“∞”形甜甜圈：两游泳圈共面后紧邻并尝试再靠近，接触面(外环面)融化，于内环面相接触之前停止移动。此时便构成了“∞”形的新式游泳圈。可知其 n=0+0-2*1+0=-2。

iii.两个三角章鱼互相握手合体：将两个这样的东西的三个触角一对一融在一起。则有：2*2-2*1-2*1-2*1+0+0+0=-2；同时它也可以通过一个 a+b-c=2 的 U 形磁铁壳和一个 a+b-c=0 的游泳圈，来融合得到：2+0-2*1-2*1+0+0=-2。



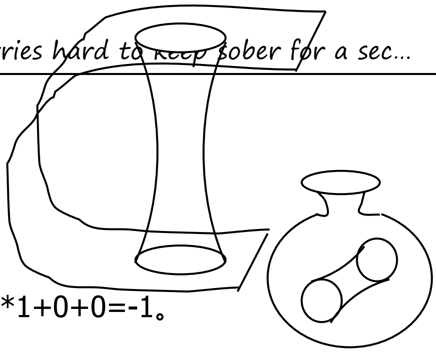
C. n=小于 1 的偶数：

正如 n 从 0 到-2 之作为，你可以用“整数个偶数–整数个偶数”创造任何小于 1 的偶数 n 值，及其所对应的空间结构。

②.n 为<1 的奇数：

A. 一些等效-1 们：

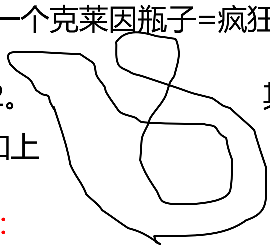
i.一个毯子自身的坍塌连通：n=1-2*1+0=-1。



ii.一个手把在里面的无盖罐子：n=2+1-2*1-2*1+0+0=-1。

iii. 一个手把在外面的无盖杯子：n=一个手把在外面的有盖杯子 − 盖子 = 游泳圈 − 盖子 $= 0 - 1 + 0 = -1$

iv. 一个克莱因瓶：一个克莱因瓶子=疯狂的一笔画之剖面图 1 +疯狂的一笔画之剖面图 2。



其 n=一个手把在外面的有盖杯子减去一个小盖子再加上一根吸管=0-1+0(+0-0-0)=-1。

B. n=小于 1 的奇数：

奇数= “奇数个奇数–整数个偶数”， 你可以创造任何小于 1 的奇数 n 值，及其所对应的空间结构。

(2). “n>1” =高 n 值=低连通率=多个不相连通的自我封闭空间=曲面上的更多种排列组合的两点，之间无法沿(始终和某同一个空间紧贴着/的)曲面连线。

①. n>1 时不再区分奇偶，并且开始引入一种有效的快捷计算 n>1 时的 n 值的 “普适的特殊方法 ”。(其实之前也可以不区分奇偶的…区分奇偶的意义的有无和重大与否，因人而异)

在这里，n=2 所对应的具体例子和它们的等价变种，以及它们的 n=2 的得来，我们已经比较熟悉了，那么先引入一下 n=3 看看高 n 值的空间结构形状及其得来方法：

由于之前写到过：半球面+半球面-无面环=球面，对应着 1+1-0=2；那么可以类似地有 n=3=(1+1-0)+1-0=2+1-0=球面+半球面-无面环，对应的图形大家可以自行想象。同时 n=3 也可=2+1=球面+球面内部多了的一个隔面，等等。

那么对于 n=m=2 +1-0 +1-0 +1-0 +1-0 …，我们便可以想象更高 n 值的空间结构的创建方法：用一个球面+(m-2)(半球面-无面环)，或者直接用 m 个半球面相加后-(m-1)个无面环。

1.我们一直在使用的这种方法不失为一种有效方法，它可以针对特定问题找出许多与之匹配的解决方案并得到最终的正确结果，但正因为在尝试用这种方法，解决超多封闭空间组成的、高 n 值的空间结构上，由于合成路线太多，合成材料太广，合成步骤太繁，以及脑力资源有限，不推荐使用这种普适方法计算大于等于 2 的 n 值。

2.另外的，对于某些复杂的特定问题所对应的不算太高的 n 值的空间结构，这种先将目标进行变形、切割、分离后，寻找 or 创造 or 幻想出熟悉的 parts/小模块们，再用它们进行逆向合成/还原成原空间结构，进行小模块的 n 值的加减运算的做法，会受到很大挑战，并且不总是 2+1-0+1-0···(主要是脑力资源中运行内存和物理内存都很小，而且想象力的局限所致，可以是可以的)，下面我就来举个以后也要提到的案例：

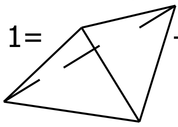
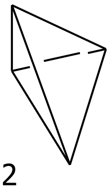
i.两个共用一个面的正四面体所构成的(sp^3d 杂化)三角双锥形：其实它就等于球面+半球面-无面环=3，也可看作=球面+一个面=2+1=3，等等。

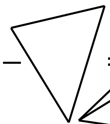
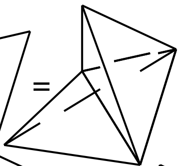
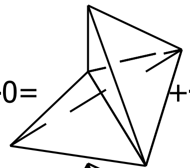
ii.一个正四面体，内部创造一个点 A，点 A 与其余四个角上的点相连，构出 4 条线，再让四条线两两连线构成C_4^2=6 个面。这么一个整体的空间结构，问其 n 值为多少?

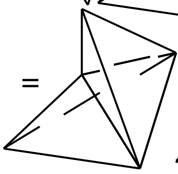
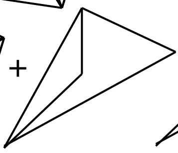
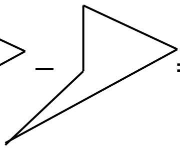
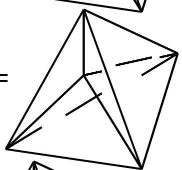
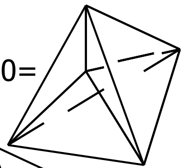
老老实实的方法一：n=a+b-c=5+C_5^3-C_5^2=5+10-10=5

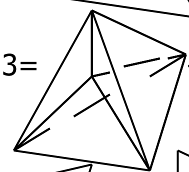
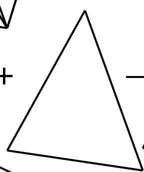
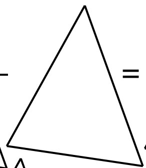
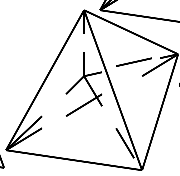
半老实半合成地方法二：n=原正四面体壳+(1+C_4^2-4)=2+3=5

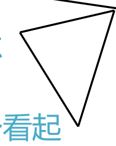
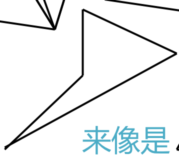
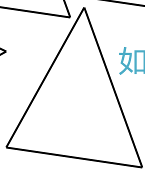
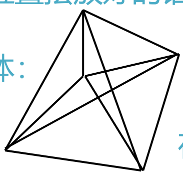
纯合成的方法三：n=两个三角双锥–一个 n=1 的接触面=2*3-1=5

纯老老实实的合成的方法四：n=2+1-0+1-0+1-0=5，主要是怎么个 0 基础地一点一点地合成：首先 2+1-0=一个四面体+一个缺了一个面的四面体–无面环 1=  + 

–  =  ||然后(2+1-0)+1-0=  +一缺了两个面的四面体–无面环 2

=  +  –  =  ||然后((2+1-0)+1-0)+1-0= 

+一缺了三个面的四面体–无面环 3=  +  –  = 。

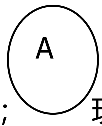
在这个过程中产生的三个无面环   如若把它们按照原来的位置摆放好的话，就会出现一个看起来像是  完整的空间实感多面体：，然而实际上，这个东西只是由三个无面环构成的空骨架。

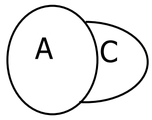
在这样的事实面前，我们可以清楚地看到：每个位置都有几个点、线重叠在了一起，并且它们的差，是如何等于 0 的。

同时，我们也看到了这种通用办法的不足：它的繁琐程度和难上加难的想象力要求。

②.下面我们开始尝试着创造崭新的方法，快速求解>1 的 n 值：

想象一个 n=2 的球面，球面分隔出了两个空间；球面上每一个点、线、面，要么都与两个空间有交集，要么均不属于任何一个空间(这里假设同时属于两个空间，为它们共有)；球面均为每个空间的边界、表面。

现在考虑这样一个事实： 

这样一个空间球面(的切面)，它紧邻的那个有界空间，记为 A，无界空间记为 B；现在一个 C 空间像水痘一样从 A 空间外表面隆起： 

在这个变化过程中，i.$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$，即 [A 空间与 C 空间的交集中的非 B 部分] 仍始终与两个空间相接触，只不过从与 A、B 空间接触，改为了与 A、C 空间接触。ii. $C_C(A\cap C)$，即[C 空间中的非 A 部分]，会正如$C_A(A\cap C)$部分始终与 A、B 接触一样，始终与 B、C 两个空间接触。iii.$(A\cap C\cap B)$虽然与三个空间接触，但它的 n 值=0。

那么接下来就有：n=a+b-c=$\sum_{i=1}^{m}(a_i)+\sum_{i=1}^{m}(b_i)-\sum_{i=1}^{m}(c_i)$=$\sum_{i=1}^{m}(ai+bi-ci)$=$\sum_{i=1}^{m} ni$

其中 ni 表示总空间结构的某部分，并且 ni 们的并集为全空间结构。

n=n[$C_C(A\cap C)$+$C_A(A\cap C)$+$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$+$(A\cap C\cap B)$]

=n[$C_C(A\cap C)$]+n[$C_A(A\cap C)$]+n[$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$]+n[$(A\cap C\cap B)$]

=2{n[$C_C(A\cap C)$]+n[$C_A(A\cap C)$]+n[$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$]+n[$(A\cap C\cap B)$]}/2

={n[$2C_C(A\cap C)$]+n[$2C_A(A\cap C)$]+n[$2C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$]+n[$2(A\cap C\cap B)$]}/2

={n[$C_C(A\cap C)$+$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$+ $(A\cap C\cap B)$]+n[$C_A(A\cap C)$+$C_{(A\cap C)}(A\cap C\cap B)$+ $(A\cap C\cap B)$]+n[$C_C(A\cap C)$+$C_A(A\cap C)$+$(A\cap C\cap B)$]−n[$(A\cap C\cap B)$]}/2

={n[C]+n[A]+n[B]−n[$(A\cap C\cap B)$]}/2【其中有很多步骤完全可以跳过的】

={n[C]+n[A]+n[B]}/2 【我为了阐述规则，每一步都有等号左右两边相等的理由】

由此便可以向下推导：由于在 n≥2 的空间中，全空间结构的任意部分，至少同时与两个相隔且不同的空间接壤；并且所有同时与>2 个空间接壤的连续空间结构，其 n 值均为 0：

那么崭新的方法便出来了：n=$\frac{\sum_{i=1}^{M} Ni}{2}$，其中 Ni 表示所有空间构成的集合中的某个空间，并且 Ni 们的并集为全空间。从这两个蓝色的注释中便可见一斑：空间结构和空间是密不可分的，且之间的关系为$\sum_{i=1}^{m} ni = \frac{\sum_{i=1}^{M} Ni}{2} = n =$ 全空间结构的 n 值 = 全空间的 n 值。

这个属性不仅应适用于 n>1，还应适用于 n≤1 的时候，但如果那时只有单个连通的空间，这个公式将可能没有用武之地。。；但如果是一些小于等于 1 的 n 值和一些大于 1 的 n 值的组合，那么这个公式也将可以派上用场；如果该公式应用于 n>1，且全由 n=2 的空间构成的全空间时，n 直接等于 Ni 的个数，即 M 值。

③.附录：一些模型/空间/空间结构的 n 值：

a.8 个小立方体堆成的 2*2*2 的大立方体：n=(8*2+2)/2=8+1=9

b.超立方体的 n 值：n=(6*2+2+2)/2=6+2=8

【后记：化学上的不饱和度的算法与此也相关，不过当时我没再细细研究。】

六. n 阶方程组系数消法，及行列式、行列式计算规则的创生

I.规则始然：二阶方程组与行列式记号的创生

a_{11}x1+a_{12}x2=b1①|作为一个 story teller：首先，我们书写横向很长的方程的习惯便是：

a_{21}x1+a_{22}x2=b2②|将它们竖着写，这样不仅看起来紧凑，也有利于同类字符的对应。

求解方程组的时候我们了解到：至少 n 个方程才能解 n 个未知数；这是因为，2 个有 2 个未知数的方程，才可能创造 1 个有 1 个未知数的方程，即解；3 个有 3 个未知数的方程，才可能创造 2 个有 2 个未知数的方程，进而创造 1 个有 1 个未知数的方程；进而 n 个有 n 个未知数的方程，才可能创造 1 个有 1 个未知数的方程。

并且在这个过程中："n 个未知数"决定了方程组书写的长度，"n 个方程"决定了方程组书写的宽度，它们组成了一个方块，方程组求解的过程就像是方块长宽同时不断减 1 的过程。

为了不让方程系数仅仅作为无意义的仅仅为了不重复的字符(例如 an)出现；并且我们恰好且只需要让方程系数满足我们的一个需要，这种需要便是我们在 call(调用)它时，需要知道它的位置，并且知道位置时得知道对应的它是谁。那么我们方程系数得具有显示其位置的功能。

那么要在方块中标记某个方程的某个系数的位置，我们联想到平面直角坐标系中的(x,y)，于是创造者设定了一个区别于现今的平面右手坐标系(x 正向为→，y 正向为↑)，同时也区别于现今的电脑坐标设定(x 正向为→，y 正向为↓)的设定：若a_{ij}中(i,j)表示(x,y)的话，那么历史中的创造者设定坐标系为(x 正向为↓，y 正向为→)，这相当于 xy 轴(名称/位置)互换了的电脑坐标系。

现对于此二阶方程组，除了系数，我们刚开始从左往右写的是 x1 而不是 x2，写完后第一个想求的是 x1 而不是 x2，那么利用加减消元法消去 x2，用a_{22}*①−a_{12}*②，这样等下的分母的被减数才有第 1 个方程的第 1 个系数，这样才对应保留方程①的 x1。

则 $x1=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它有四种书写方式，但值相等，我们把这种值按照方程组的书写顺序，原封不动地记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$。从现在开始，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$与$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$——对应。($\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$也可被看作$a_{11}$*②$-a_{21}$*①，这样保留的就是方程②的 x2 了，但如果这样的话，最好将$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$写作$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$。)

那么根据以上，任意想要消去的未知数，所对应的那列数组，均写在$\begin{vmatrix} & a_{12} \\ & a_{22} \end{vmatrix}$的右列，并且书写的上下顺序，与即将提到的将要保留的未知数的数组，——横向对应；任意想要或会保留某个方程的未知数或者 b，所对应的那列数组，均写在$\begin{vmatrix} b1 & \\ b2 & \end{vmatrix}$的左列，且想要保留的那某个方程的未知数或者 b，所对应的所在方程的它的系数，写在左上角。那么，b 们由于(没被消去而)被保留了，所以有$\begin{vmatrix} b1 & a_{12} \\ b2 & a_{22} \end{vmatrix}$为新 b1(或叫做新方程①'的 b)，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为新$a_{11}$(或叫做①的新 x1 系数)。那么新方程/新系数的旧方程便是$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}x1=\begin{vmatrix} b1 & a_{12} \\ b2 & a_{22} \end{vmatrix}$，其对应于保留方程①的 x1。按照这个逻辑，还应有$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}x2=\begin{vmatrix} b2 & a_{21} \\ b1 & a_{11} \end{vmatrix}$，对应于保留方程②的 x2；以及$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}x2=\begin{vmatrix} b1 & a_{11} \\ b2 & a_{21} \end{vmatrix}$，对应于保留方程①的 x2。(同理还有个保留方程②的 x1，这里没写出来。)

现在我们取保留的同一个方程的 x1、x2，即新方程①中的新 x1、新 x2：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}x1=\begin{vmatrix} b1 & a_{12} \\ b2 & a_{22} \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}x2=\begin{vmatrix} b1 & a_{11} \\ b2 & a_{21} \end{vmatrix}$。由于 b 和 x 是同属性的：均为将被保留的计算对象，可见他们的行列式形式只需将 b~x 系数互相对应地替换掉即可，比如以上的$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} b1 & a_{12} \\ b2 & a_{22} \end{vmatrix}$，以及$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} b1 & a_{11} \\ b2 & a_{21} \end{vmatrix}$。

那么我们现写作 $x1=\frac{\begin{vmatrix} b1 & a_{12} \\ b2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$和 $x2=\frac{\begin{vmatrix} b1 & a_{11} \\ b2 & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}}$，并且把 x2 分子分母取负，即有分子分母各自的列与列互换位置 $x2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b1 \\ a_{21} & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，这样使 x2 的分母与 x1 在形式上相同，并且保留之前提到的含义：分子行列式中的 b 的位置，只需覆盖着占据所求的 x?所对应的系数(列)的位置，即实现 b~x 系数互相对应地替换。

II.初见端倪：三阶方程组与三阶行列式的形式与其定义的来源

我们现将三阶以及高阶方程组都写成以下形式方便研究$\begin{matrix} x1 & x2 & x3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & b1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b3 \end{matrix}$。据以往经验可知：只有在根的整个求解过程中把所有方程都实际地用上，即每一次方程组阶数减 1 后得到的新方程组的每个方程都得用上，才可能由一个 n 阶方程组最终得到 n 个一阶方程组，即 n 个解。那么我们约定，在操作三阶及任意高阶方程组的时候，我

们总(只)以相邻两个方程组进行类二阶方程组的消元运算；即 n 阶方块中，中间 n-2 行方程会参与 2 次消元，得到的 n-1 阶方块中，中间 n-3 行方程会参与 2 次消元...以整个方程组而言，总共消元$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=C_n^2$次，累计共 $2C_n^2$个方程参与消元。

那么，我们将三阶中的各相邻方程消 x3 化为二阶：

$$\begin{array}{ccc} x1 & x2 & \\ \begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b1a_{13}\\b2a_{23}\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b2a_{23}\\b3a_{33}\end{vmatrix}\end{array},$$

并且以后我们不再考虑黑色部分，直接以$\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{matrix}$代替新的方程组(注意这不是行列式，两边没有长竖线)，因为信息已经在这个具体而微的非行列式符号里完全显示了，我们便简化掉不必要的部分。

由于我们已知了二阶方程组的解法，且现在三阶方程组已经化为二阶，那么我们只需要知道$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$便可以知道$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}b1a_{13}\\b2a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b2a_{23}\\b3a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$进而知道 x1。那么接下来便是关键了：

$$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}&\\&a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}&\\&a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}&a_{13}\\a_{21}&\end{vmatrix}\begin{vmatrix}&a_{13}\\a_{22}&\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$a_{23}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}0\\0\ 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}0\\0\ 1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}0\ 1\\a_{21}0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\ 1\\a_{22}0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

到了这一步后，我们如果我们记$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}=[a_{21}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}]=\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$，则有$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}$，则原式$=a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+a_{13}(a_{23}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix})=a_{23}(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix})-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$，即$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$。

通过某种运算我们知晓了$\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{31}a_{32}a_{33}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\end{vmatrix}=-[a_{31}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{21}a_{22}\end{vmatrix}]=-[0+0-0]=0$。然后便有神奇的事情发生了：

$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，也就是说，我们通过我们的“一个小小的记号以及连同这个记号的运算法则的创造性定义”，抛下了一整车 $a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$。接着我们便有三阶方程组的解：

$x1=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b1 & a_{13} \\ b2 & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b2 & a_{23} \\ b3 & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (a_{23} \begin{vmatrix} b1 & a_{12} & a_{13} \\ b2 & a_{22} & a_{23} \\ b3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}) / (a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} b1 & a_{12} & a_{13} \\ b2 & a_{22} & a_{23} \\ b3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$x2=\begin{vmatrix} b1 & a_{12} & a_{13} \\ b2 & a_{22} & a_{23} \\ b3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & b1 & a_{13} \\ a_{22} & b2 & a_{23} \\ a_{32} & b3 & a_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，同理 x3。不过我们重心并不在研究方程的解上，而是要查看类似于比如解 x2 时会出现的类似 $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$ 上：从中可模糊地看到其中的规律，下面我们继续用这种规律拓展行列式的高阶表示形式及含义。

III.豁然开朗：四阶行列式的形式与含义的来源

对于四阶方程组 $\begin{matrix} x1 & x2 & x3 & x4 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b4 \end{matrix}$，我们将其写作 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$，并消一个元 x4 化为三阶方程组 $\begin{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{matrix}$，此时不再继续一阶一阶地降，我们要像上次那样，一旦降了一阶就立马套用已经研究出来的低一阶的结论，这样可以抛去不止一整车 $a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 这种结果=0 的、可以去掉的、但你看不出来的，东西。

于是，正如 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ 通过降阶后的 $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$ 创造了 $a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 一样，我们的 $\begin{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{matrix}$ 便可不再经过降阶而直接由类似的过程得到类似的结果：

$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$，这便是方程一中的 x1 在四阶方程组中消去了 x4 及

x3、x2 后的系数。该系数仍非最简，我们现在对其中的后面部分进行类似之前的操作：

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{14}\\ a_{21}a_{24}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12}a_{14}\\ a_{22}a_{24}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13}a_{14}\\ a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \\ & a_{24}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & \\ & a_{24}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & \\ & a_{24}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} & a_{14}\\ a_{21} & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} & a_{14}\\ a_{22} & \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} & a_{14}\\ a_{23} & \end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix},$$

此时按照我们之前定义三阶行列式长相时所对应的合成方式进行逆操作：以对应的展开方式进行展开，为$(a_{24}a_{11}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} - a_{24}a_{12}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} + a_{24}a_{13}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix}) - (a_{14}a_{21}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} - a_{14}a_{22}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{23}a_{24}\\ a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix} + a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24}\\ a_{31}a_{34}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{32}a_{34}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{31}a_{34}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32}a_{34}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix})$现在又(再次)模仿之前的$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{21}a_{23}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12}a_{13}\\ a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{21}a_{23}\\ a_{31}a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22}a_{23}\\ a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix} = a_{23}\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$，有：

$$a_{24}(a_{11}a_{34}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{12}a_{34}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{13}a_{34}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix}) -$$

$a_{14}(a_{21}a_{34}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{22}a_{34}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{23}a_{34}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix})$，再提取公因式则有：$a_{34}[a_{24}(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix}) - a_{14}(a_{21}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix})]$接着我们像之前定义三阶行列式的形式以及其运算法则一样，如果我们记$a_{21}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix} - a_{24}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\\ a_{41}a_{42}a_{43}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$，则有$a_{21}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\\ a_{41}a_{42}a_{43}\end{vmatrix}$，代入原式则有

$$a_{34}[a_{24}(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix}) - a_{14}(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\\ a_{41}a_{42}a_{43}\end{vmatrix})] = a_{34}[a_{24}(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{43}a_{44}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{44}\end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\\ a_{41}a_{42}a_{43}\end{vmatrix}) - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}] = a_{34}[a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} -$$

$a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}]$，即原式$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{14}\\a_{21}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{14}\\a_{22}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}a_{14}\\a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{24}\\a_{31}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{24}\\a_{32}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{34}\\a_{41}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}a_{34}\\a_{42}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}a_{34}\\a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$

$a_{34}[a_{24}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}]$。

那么把整个过程连起来看便有$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{matrix}\to\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{14}\\a_{21}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{14}\\a_{22}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}a_{14}\\a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{24}\\a_{31}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{24}\\a_{32}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{34}\\a_{41}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}a_{34}\\a_{42}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}a_{34}\\a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{matrix}\to$

$\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{14}\\a_{21}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{14}\\a_{22}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}a_{14}\\a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{24}\\a_{31}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{24}\\a_{32}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{34}\\a_{41}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}a_{34}\\a_{42}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}a_{34}\\a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\to a_{34}[a_{24}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}]$

$*\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\to$我们通过某种运算又知道了$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=0$，最终便得到了$\to$

$a_{34}a_{24}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}*\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}$，即四阶方程组按照我们的步骤化为一阶方程组后，该一阶方程组的 x1 系数为$a_{24}a_{34}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$。

现在我们回顾对比一下在这之前在求各阶方程组化为最后的一阶方程组的过程中，为得到 x1 系数所走过的所有道路：二阶到一阶，x1 系数得来过程：$\begin{matrix}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}\end{matrix}\to\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}\end{vmatrix}$；三阶到一阶，x1 系数得来过程：$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\to\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{matrix}\to\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\to$

$a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\to a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$；四阶到一阶，x1 系数得来过程：

$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{matrix}\to\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{14}\\a_{21}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{14}\\a_{22}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}a_{14}\\a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{24}\\a_{31}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{24}\\a_{32}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{34}\\a_{41}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}a_{34}\\a_{42}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}a_{34}\\a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{matrix}\to\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{14}\\a_{21}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}a_{14}\\a_{22}a_{24}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}a_{14}\\a_{23}a_{24}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{24}\\a_{31}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{24}\\a_{32}a_{34}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{34}\\a_{41}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}a_{34}\\a_{42}a_{44}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}a_{34}\\a_{43}a_{44}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\to$

$\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}a_{34}[a_{24}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}]\to$

$a_{24}a_{34}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}\\a_{33}a_{34}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$，可以发现，在大于等于三阶的方程组求解过程中，整个任务链条$Q_m1\to Q_m2\to Q_m3\to Q_m4\cdots\to Q_mn$中，$Q_m1\to Q_m2$这第一步都旨在降阶；

到了Q_m2降阶完成后，$Q_m2\to Q_m3$便直接沿用上一个链条$Q_{m-1}1\to Q_{m-1}2\to\cdots\to Q_{m-1}n$得到的结果/结论，即$Q_{m-1}1\to Q_{m-1}n$；$Q_m3\to Q_m4$会先应用到$Q_{m-1}3\to Q_{m-1}4$所做出的关于 m-1 阶行列式的形状及其定义的运算法则、再用到$Q_{m-1}3\to Q_{m-1}n$、再做出关于 m 阶行列式的定义；$Q_{m-1}4\to Q_{m-1}5$便运算和化简，得到最终结果。可见 n=5。

下面我们试运行(调试)一下以上未定型规则: $Q_m1\to Q_m2\to Q_m3\to Q_m4\to Q_m5$，求 level5，即 5 阶方程组的(第一个方程的)x1，在最后的一阶方程组中的最终系数。这个过程我直接用流程的样子呈现：

$$\begin{matrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{matrix}\to\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{15}\\a_{21}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{15}\\a_{22}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{13}a_{15}\\a_{23}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14}a_{15}\\a_{24}a_{25}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{25}\\a_{31}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{25}\\a_{32}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{35}\\a_{41}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{32}a_{35}\\a_{42}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{45}\\a_{51}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{42}a_{45}\\a_{52}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{45}\\a_{53}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{45}\\a_{54}a_{55}\end{vmatrix}\end{matrix}\to$$

$$\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\end{Vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{15}\\a_{21}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{15}\\a_{22}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{13}a_{15}\\a_{23}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14}a_{15}\\a_{24}a_{25}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{25}\\a_{31}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{25}\\a_{32}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{35}\\a_{41}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{32}a_{35}\\a_{42}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{45}\\a_{51}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{42}a_{45}\\a_{52}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{45}\\a_{53}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{45}\\a_{54}a_{55}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\to$$

$$\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\end{Vmatrix}(\begin{vmatrix}a_{11}a_{15}\\a_{21}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{25}\\a_{32}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{32}a_{35}\\a_{42}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{42}a_{45}\\a_{52}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{45}\\a_{53}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{45}\\a_{54}a_{55}\end{vmatrix}\end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix}a_{12}a_{15}\\a_{22}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{25}\\a_{31}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{35}\\a_{41}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{45}\\a_{51}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{45}\\a_{53}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{45}\\a_{54}a_{55}\end{vmatrix}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{13}a_{15}\\a_{23}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{25}\\a_{31}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{25}\\a_{32}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{35}\\a_{41}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{32}a_{35}\\a_{42}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{45}\\a_{51}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{42}a_{45}\\a_{52}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{45}\\a_{54}a_{55}\end{vmatrix}\end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix}a_{14}a_{15}\\a_{24}a_{25}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{25}\\a_{31}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{25}\\a_{32}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{25}\\a_{33}a_{35}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{35}\\a_{41}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{32}a_{35}\\a_{42}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{35}\\a_{43}a_{45}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{45}\\a_{51}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{42}a_{45}\\a_{52}a_{55}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{45}\\a_{53}a_{55}\end{vmatrix}\end{vmatrix})\to$$

$$\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}a_{35}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{43}a_{44}a_{45}\end{vmatrix}(\begin{vmatrix}a_{11}a_{15}\\a_{21}a_{25}\end{vmatrix}a_{35}a_{45}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix}a_{12}a_{15}\\a_{22}a_{25}\end{vmatrix}a_{35}a_{45}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{13}a_{15}\\a_{23}a_{25}\end{vmatrix}a_{35}a_{45}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-$$

$$\begin{vmatrix}a_{14}a_{15}\\a_{24}a_{25}\end{vmatrix}a_{35}a_{45}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{55}\end{vmatrix})\to$$

$$a_{35}^2a_{45}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{43}a_{44}a_{45}\end{vmatrix}[a_{25}(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}+$$

$$a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{55}\end{vmatrix}+a_{15}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}\end{vmatrix})-$$

$$a_{15}(a_{21}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-a_{24}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{55}\end{vmatrix}+$$

$$a_{25}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}\end{vmatrix})]\rightarrow a_{35}^2a_{45}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{43}a_{44}a_{45}\end{vmatrix}[a_{25}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}-$$

$$a_{15}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}]\rightarrow a_{25}a_{35}^2a_{45}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}\\a_{34}a_{35}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}\\a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{43}a_{44}a_{45}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\end{vmatrix}$$

现进一步完善规则：$Q_n1\rightarrow Q_n2\rightarrow Q_n3\rightarrow Q_n4\rightarrow Q_n5$，共 5 个求 n 阶方程组消元至一阶方程组的过程中积累的 x1 系数的步骤：

step1.$Q_n1\rightarrow Q_n2$=降阶至 n-1 阶【n 阶复合一阶→n-1 阶复合二阶】

step2. $Q_n2\rightarrow Q_n3=Q_{n-1}1\rightarrow Q_{n-1}5$

step3. $Q_n3\rightarrow Q_n4$=①.对Q_n3中的最高阶行列式施行$Q_{n-1}3\rightarrow Q_{n-1}4$过程中创设的 n-1 阶行列式记号的运算规则②.对所有复合行列式进行符合自身的$Q_i3\rightarrow Q_i5$中的有关最高阶行列式的那部分的变换操作(i≤n-1)【至此，所有 step1 所遗留下的二阶已被消灭】③.对已为非复合式子中的非公因式部分进行 n 阶行列式的形式和规则创造，并将此部分通过构造(+a)-(+a)或(-a)-(-a)变为两个带系数的 n 阶行列式的差。

step4. $Q_n4\rightarrow Q_n5$=两个带系数的 n 阶行列式中的后一个值恒为 0，并做从左至右=行列式阶数由低到高且同阶行列式们按其左上角a_{ij}中的 i 从小到大=其们从左至右排列的排列。

下面我们最后再来用成熟的法则看看 6 阶方程组的 x1 系数的得来：

$$\text{step1. } Q_n1\rightarrow Q_n2: \begin{matrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{16}\\a_{21}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{16}\\a_{22}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{13}a_{16}\\a_{23}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{14}a_{16}\\a_{24}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{15}a_{16}\\a_{25}a_{26}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{26}\\a_{31}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{26}\\a_{32}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{26}\\a_{33}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{26}\\a_{34}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{25}a_{26}\\a_{35}a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}a_{36}\\a_{41}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{32}a_{36}\\a_{42}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}a_{36}\\a_{43}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{36}\\a_{44}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}a_{36}\\a_{45}a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}a_{46}\\a_{51}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{42}a_{46}\\a_{52}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{43}a_{46}\\a_{53}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{44}a_{46}\\a_{54}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{45}a_{46}\\a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}a_{56}\\a_{61}a_{66}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{52}a_{56}\\a_{62}a_{66}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{53}a_{56}\\a_{63}a_{66}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{54}a_{56}\\a_{64}a_{66}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{55}a_{56}\\a_{65}a_{66}\end{vmatrix}\end{matrix}$$

step2. $Q_n2 \to Q_n3$:

$$\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{16}\\a_{21}&a_{26}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{12}&a_{16}\\a_{22}&a_{26}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{13}&a_{16}\\a_{23}&a_{26}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{14}&a_{16}\\a_{24}&a_{26}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{15}&a_{16}\\a_{25}&a_{26}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}&a_{26}\\a_{31}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}&a_{26}\\a_{32}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}&a_{36}\\a_{41}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}&a_{36}\\a_{42}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}&a_{46}\\a_{51}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{42}&a_{46}\\a_{52}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}&a_{56}\\a_{61}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{52}&a_{56}\\a_{62}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{53}&a_{56}\\a_{63}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{54}&a_{56}\\a_{64}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

step3. $Q_n3 \to Q_n4$:（注：由于某些地方加一个+号会自动换行，所以我省略了它们）

①.

$$\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{16}\\a_{21}&a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{26}\\a_{32}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{32}&a_{36}\\a_{42}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{42}&a_{46}\\a_{52}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{52}&a_{56}\\a_{62}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{53}&a_{56}\\a_{63}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{54}&a_{56}\\a_{64}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a_{12}&a_{16}\\a_{22}&a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{26}\\a_{31}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}&a_{36}\\a_{41}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}&a_{46}\\a_{51}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}&a_{56}\\a_{61}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{53}&a_{56}\\a_{63}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{54}&a_{56}\\a_{64}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{13}&a_{16}\\a_{23}&a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{26}\\a_{31}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}&a_{26}\\a_{32}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}&a_{36}\\a_{41}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}&a_{36}\\a_{42}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}&a_{46}\\a_{51}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{42}&a_{46}\\a_{52}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}&a_{56}\\a_{61}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{52}&a_{56}\\a_{62}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{54}&a_{56}\\a_{64}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a_{14}&a_{16}\\a_{24}&a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{26}\\a_{31}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}&a_{26}\\a_{32}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}&a_{36}\\a_{41}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}&a_{36}\\a_{42}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}&a_{46}\\a_{51}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{42}&a_{46}\\a_{52}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}&a_{56}\\a_{61}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{52}&a_{56}\\a_{62}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{53}&a_{56}\\a_{63}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{55}&a_{56}\\a_{65}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{15}&a_{16}\\a_{25}&a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{26}\\a_{31}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}&a_{26}\\a_{32}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{23}&a_{26}\\a_{33}&a_{36}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{24}&a_{26}\\a_{34}&a_{36}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{31}&a_{36}\\a_{41}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{32}&a_{36}\\a_{42}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{33}&a_{36}\\a_{43}&a_{46}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{34}&a_{36}\\a_{44}&a_{46}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{41}&a_{46}\\a_{51}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{42}&a_{46}\\a_{52}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{43}&a_{46}\\a_{53}&a_{56}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{44}&a_{46}\\a_{54}&a_{56}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{51}&a_{56}\\a_{61}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{52}&a_{56}\\a_{62}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{53}&a_{56}\\a_{63}&a_{66}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{54}&a_{56}\\a_{64}&a_{66}\end{vmatrix}\end{vmatrix})$$

②. $\begin{vmatrix}a_{25}&a_{26}\\a_{35}&a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}&a_{36}\\a_{45}&a_{46}\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}a_{45}&a_{46}\\a_{55}&a_{56}\end{vmatrix} a_{36}\begin{vmatrix}a_{24}&a_{25}&a_{26}\\a_{34}&a_{35}&a_{36}\\a_{44}&a_{45}&a_{46}\end{vmatrix} a_{46}\begin{vmatrix}a_{34}&a_{35}&a_{36}\\a_{44}&a_{45}&a_{46}\\a_{54}&a_{55}&a_{56}\end{vmatrix} a_{36}a_{46}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{24}&a_{25}&a_{26}\\a_{33}&a_{34}&a_{35}&a_{36}\\a_{43}&a_{44}&a_{45}&a_{46}\\a_{53}&a_{54}&a_{55}&a_{56}\end{vmatrix}$

$$a_{36}a_{46}a_{56}\left(\begin{vmatrix}a_{11}a_{16}\\a_{21}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{12}a_{16}\\a_{22}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix}a_{13}a_{16}\\a_{23}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{14}a_{16}\\a_{24}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{15}a_{16}\\a_{25}a_{26}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{66}\end{vmatrix}\right)$$

③. $a_{36}^2a_{46}^2\begin{vmatrix}a_{25}a_{26}\\a_{35}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}a_{36}\\a_{45}a_{46}\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}a_{45}a_{46}\\a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{44}a_{45}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{54}a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\end{vmatrix}$

$$a_{36}a_{46}a_{56}\left(a_{26}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}-a_{16}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}\right)$$

step4. $Q_n4 \rightarrow Q_n5$:

$$a_{26}a_{36}^3a_{46}^3a_{56}\begin{vmatrix}a_{25}a_{26}\\a_{35}a_{36}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{35}a_{36}\\a_{45}a_{46}\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix}a_{45}a_{46}\\a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{44}a_{45}a_{46}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{54}a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\\a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\\a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\end{vmatrix}$$

在验证了法则的成熟和有效之后，我们现在着眼于从低阶到高阶，nature 在结果上所体现出来的规律：对于需要求解的一个 n 阶方程组，对于其最末 x1 的系数，发现①.其的因式中均有第 n、n-2、n-3...至第 1 阶行列式组们存在，无第 n-1 阶行列式。②.每组同阶的第 i 阶行列式(i≠n、n-1)，有不同的共(n-1-i)种不同的因式，且每种因式中各个因数的系数分别为C_{n-2-i}^{j}，j=0~n-2-i。

下面我们开始整个推导过程：

1).Q_n3中的最高阶行列式的值等于$[\prod_{i=2}^{n-1} a_{in}]\begin{vmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \vdots \ \ddots \ \vdots\\a_{n1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$。

首先，n=3 时，$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\rightarrow a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$，

$\rightarrow a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\rightarrow a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$。

由此开始，对于方程组$\begin{matrix}a_{11}\cdots a_{1i}\\ \vdots \ \ddots \ \vdots\\a_{i1}\cdots a_{ii}\end{matrix}$所对应的$Q_i3$中的

$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}a_{1i}\\a_{21}a_{2i}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix}a_{1(i-1)}a_{1i}\\a_{2(i-1)}a_{2i}\end{vmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{vmatrix}a_{(i-1)1}a_{(i-1)i}\\a_{i1}\ \ a_{ii}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix}a_{(i-1)(i-1)}a_{(i-1)i}\\a_{i(i-1)}\ \ a_{ii}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$，它的系数=[把它按规则展开后（因为展开后包括添

加上的那项的各项，系数相同，所以这里代表性地只取展开后的第一项的系数) 其中某一项] $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2i} \\ a_{32} & a_{3i} \end{vmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i-1)(i-1)} & a_{(i-1)i} \\ a_{i(i-1)} & a_{ii} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$ 所分离出来的系数* a_{2i}=($\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{3i} \\ a_{43} & a_{4i} \end{vmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i-1)(i-1)} & a_{(i-1)i} \\ a_{i(i-1)} & a_{ii} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$ 所分离出来的系数* a_{3i})* a_{2i}=([$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{44} & a_{4i} \\ a_{54} & a_{5i} \end{vmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i-1)(i-1)} & a_{(i-1)i} \\ a_{i(i-1)} & a_{ii} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$ 所分离出来的系数 * a_{4i}]* a_{3i})* a_{2i}…总共进行(n-3)次操作，使得 n-1 阶复合 2 阶的行列式变成 2 阶复合 2 阶的行列式后，再进行一次操作得到操作了共 n-2 次后的系数 $a_{2i}(a_{3i}(a_{4i}\cdots(a_{(i-1)i}\}$，即 n-2 个它们相乘。

系数的问题解决了，非系数部分我们已经提到了用“创造规则”把(n-1)-1+1=n-1 阶的与其它同步升阶后的它的弟子们以为它们新创造的规则合并后，升一阶变为 n 阶的 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；也就是说，每个 n-1 阶复合 2 阶的行列式，都先用之前对非系数部分所定义的合并规则展开，减一阶；再运用上一个创造了合并规则后的结果的非系数部分，加一阶，仍多项式；然后创造规则，对这些非系数部分合并，再加一阶。那么方程组 $\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$ 所对应的 Q_n3 中的 $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{2(n-1)} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = [\prod_{i=2}^{n-1} a_{in}] \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

2).所有同步升阶的伙伴们由于沿用的是[与自己相符的，以前的某个 Q_i3 中创造的，Q_i3 的最高阶行列式的变换规则]，所以也适用这样的系数变化以及其非系数部分的变化【只不过它们本该也是 k-1+1+1，由于以前有过此类运算，便直接沿用了(k-1+1)+1=k+1】，所以更广地有：

$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{cd} & a_{cf} \\ a_{(c+1)d} & a_{(c+1)f} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{c(f-1)} & a_{cf} \\ a_{(c+1)(f-1)} & a_{(c+1)f} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{(e-1)d} & a_{(e-1)f} \\ a_{ed} & a_{ef} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(e-1)(f-1)} & a_{(e-1)f} \\ a_{e(f-1)} & a_{ef} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = [\prod_{i=c+1}^{(c+1)+(e-c+1)-3} a_{if}] \begin{vmatrix} a_{cd} & \cdots & a_{cf} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ed} & \cdots & a_{ef} \end{vmatrix}$，其中 e-c+1=该行列式的阶数 n，并且 $(c+1)+(e-c+1)-3$ 还可写作 e-1。

下面我们来举例简单求一求 7 阶方程组的 x1 系数的简记表达式：如果我们把

$a_{26}a_{36}^3a_{46}^3a_{56} \begin{vmatrix} a_{25} & a_{26} \\ a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$

记为 $11^31^31|2||2|^2|2||3||3||4||6|$ 则它的高一阶方程组的 x1 系数为同样记法下的：

$|2||2|^3|2|^3|2| \prod_{i=3}^{3+(3-3)} a_{i7} |3|(\prod_{i=4}^{4+(3-3)} a_{i7})^2|3|^2 \prod_{i=5}^{5+(3-3)} a_{i7} |3| \prod_{i=3}^{3+(4-3)} a_{i7} |4| \prod_{i=4}^{4+(4-3)} a_{i7} |4| \prod_{i=3}^{3+(5-3)} a_{i7}$

$|5|\prod_{i=2}^{2+(7-3)} a_{i7}\,|7|$

$=$

$\prod_{i=3}^{3+(0)} a_{i7} \left(\prod_{i=4}^{4+(0)} a_{i7}\right)^2 \prod_{i=5}^{5+(0)} a_{i7} \prod_{i=3}^{3+(1)} a_{i7} \prod_{i=4}^{4+(1)} a_{i7} \prod_{i=3}^{3+(2)} a_{i7} \prod_{i=2}^{2+(4)} a_{i7}\ |2||2|^3|2|^3|2||3||3|^2|3||4||4||5||7|$

$=(0+0+1+2+1+0+0)+(0+0+1+2+1+0+0)+(0+0+1+1+1+0+0)+(0+1+1+1+1+1+0)=(0+1+4+6+4+1+0)=1\ 1^4 1^6 1^4 1|2||2|^3|2|^3|2||3||3|^2|3||4||4||5||7|$

14641 与 1331 都符合我们所幻想的可能的规则，这不太可能是巧合。那么我们便可以满怀期待地猜想：

$\prod_{j=1+2}^{n-2}\left(\prod_{i=j}^{j+(3-3)} a_{in}\right)^{C_{n-5}^{j-3}} * \prod_{j=1+2}^{n-3}\left(\prod_{i=j}^{j+(4-3)} a_{in}\right)^{C_{n-6}^{j-3}} * \ldots * \prod_{j=1+2}^{n-(n-3)}\left(\prod_{i=j}^{j+((n-2)-3)} a_{in}\right)^{C_{n-n}^{j-3}} * \prod_{j=2}^{n-(n-2)}\left(\prod_{i=j}^{j+(n-3)} a_{in}\right)^{C_{n-n}^{j-2}}$的值$=\prod_{i=2}^{n-1} a_{in}^{C_{n-3}^{i-2}}$ 即有：

$\prod_{k=2}^{n-3}\prod_{j=1+2}^{n-k}\left(\prod_{i=j}^{j+(k+1-3)} a_{in}\right)^{C_{n-(k+3)}^{j-3}} * \prod_{i=2}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=2}^{n-1} a_{in}^{C_{n-3}^{i-2}}$ 该命题的等价命题为：

$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}+\sum_{i=2}^{n-1} a_{in}=\sum_{j=2}^{n-1} C_{n-3}^{j-2}\cdot a_{jn}$ 要证明该等式恒成立，我们得首先对左边的三层求和中的外两层进行调换位置：$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}$ 其位置变换的规则已经由我在第一节的“复合函数的高阶导”中的有关“④.只拆分斜向来源”中介绍过了：【由于 jmax=n-k，所以把散点们所构成的平面三角形区域以及其所在的坐标系沿着直线 k=j 轴对称一下后将有：kmax=n-j；又由于当 k∈[2,n-3]的时候，j∈[3,n-2]；且 k 的下界不与 j 有关，恒为 2。】那么就有$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}=\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}$

即有$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}+\sum_{i=2}^{n-1} a_{in}=\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}+\sum_{j=2}^{n-1} a_{jn}=\sum_{j=2}^{n-1} C_{n-3}^{j-2}\cdot a_{jn}$，即要证明$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}=\sum_{j=2}^{n-1}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$，由于$C_{n-3}^{2-2}-1=0$即要证明$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}=\sum_{j=3}^{n-2}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$

那么最有可能地，我们来看看是否恒有对于任意有意义的 j，$\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}=(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$此式子均成立，即查看$\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}=C_{n-3}^{j-2}-1$是否恒成立，显然，从这里就错了：事情不是我们一如既往地所想的那样被自然设定着的：等式左边有着一群a_{in}，而等式左边却是单个a_{jn}；并且这并不是简单的包含关系：不是左边包含了右边：由于对于某个>3 的 j0，左边的式子没有之前的最外层$\sum_{j=3}^{n-2}$ 中当 j 取 j0-1、j0-2…3 时的对应的和式而小于右边，所以等式左边和等式右边在 j>3 时是交集关系。

那么我们现在再对$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}=\sum_{j=3}^{n-2}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$中，左式的三层求和中的内两层进行调换位置：1.将 j 看作常量之后，原值域 i∈[j,n-2]将变为定义域 2.原 imax=j+k-2 将变为 kmin=i-j+2。3.原 kmax=n-j 将变为现在的 kmax=n-j。即有$\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2}=\sum_{i=j}^{n-2}\sum_{k=i-j+2}^{n-j}$。

那么我们现在即要证明$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{i=j}^{n-2}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in}=\sum_{j=3}^{n-2}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$，但，我发现无论如何 i 都得移到最外层。。并且这样一来等式右边本身就不该改 i 为 j 的：

在这样的另一种三角形区域上：由于 i∈[3,n-2]，又由于旧 imin=j 所以新 jmax=i，且由于旧 jmin=3，所以新 jmin=3，所以有$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{i=j}^{n-2} = \sum_{i=3}^{n-2}\sum_{j=3}^{i}$，所以有$\sum_{i=3}^{n-2}\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = \sum_{i=3}^{n-2}(C_{n-3}^{i-2}-1)\cdot a_{in}$，哈哈，此时我们便可以开挂了：

所以只需证明$\sum_{i=3}^{n-2}\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = \sum_{i=3}^{n-2}(C_{n-3}^{i-2}-1)\cdot a_{in}$，也就是说只需证明$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = (C_{n-3}^{i-2}-1)\cdot a_{in}$，即只需证明对于任意确定的 i 和 n 值，有$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-3-k}^{j-3} = (C_{n-3}^{i-2}-1)$。【注：$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j}$ 无法再交换位置了，因为这是个有两条对边平行于 k 轴(原 y 轴)的平行四边形区域，如若沿着 k=j 翻转，那么 j 的上下界在用 k 表示时都将出现关于 k 的分段函数。】

现在像我一样操作吧：$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-3-k}^{j-3} = \sum_{j=3}^{i}\sum_{k+j=i+2}^{n} C_{j-3+(n-j-k)}^{j-3} = \sum_{j=3}^{i}\sum_{-k-j=-n}^{-i-2} C_{j-3+(n-j-k)}^{j-3} = \sum_{j=3}^{i}\sum_{n-k-j=0}^{n-i-2} C_{j-3+(n-j-k)}^{j-3}[=\sum_{j=3}^{i}\sum_{z=0}^{n-i-2} C_{j-3+z}^{j-3} = \sum_{j=3}^{i}\sum_{j-3+z=j-3}^{n+j-i-5} C_{j-3+z}^{j-3} = \sum_{j=3}^{i}\sum_{m=(j-2)-1}^{n+j-i-5} C_{m}^{(j-2)-1}$现根据$C_m^n = \sum_{i=n-1}^{m-1} C_i^{n-1}$有：$\sum_{j=3}^{i}\sum_{m=(j-2)-1}^{n+j-i-5} C_{m}^{(j-2)-1} = \sum_{j=3}^{i} C_{n+j-i-4}^{j-2} = \sum_{j=3}^{i} C_{n+j-i-4}^{n+j-i-4-(j-2)}] = \sum_{j=3}^{i} C_{n+j-i-4}^{n-i-2}$

由于$C_m^n = \sum_{i=0}^{n} C_{m-1-i}^{n-i}$所以$C_m^n = \sum_{-i=-n}^{0} C_{m-1-i}^{n-i}$所以$C_m^n = \sum_{n-i=0}^{n} C_{m-1-i}^{n-i}$所以$C_m^n = \sum_{z=0}^{n} C_{m-1-(n-z)}^{z} = \sum_{z=0}^{n} C_{z+m-1-n}^{z}$而$\sum_{j=3}^{i} C_{n+j-i-4}^{j-2} = \sum_{j-2=1}^{i-2} C_{n+j-2-i-2}^{j-2} = \sum_{z=1}^{i-2} C_{n+z-i-2}^{z} = \sum_{z=1}^{i-2} C_{z+(n-4)-(i-2)}^{z} = \sum_{z=0}^{i-2} C_{z+(n-3)-1-(i-2)}^{z} - \sum_{z=0}^{0} C_{z+(n-3)-1-(i-2)}^{z} = C_{n-3}^{i-2}-1$

即有$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-3-k}^{j-3} = C_{n-3}^{i-2}-1$。

即有$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = (C_{n-3}^{i-2}-1)\cdot a_{in}$

即有$\sum_{i=3}^{n-2}\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = \sum_{i=3}^{n-2}(C_{n-3}^{i-2}-1)\cdot a_{in}$

即有$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{i=j}^{n-2}\sum_{k=i-j+2}^{n-j} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = \sum_{j=3}^{n-2}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$

即有$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} = \sum_{j=3}^{n-2}(C_{n-3}^{j-2}-1)\cdot a_{jn}$

即有$\sum_{j=3}^{n-2}\sum_{k=2}^{n-j}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} + \sum_{j=2}^{n-1} a_{jn} = \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-3}^{j-2}\cdot a_{jn}$

即有$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot a_{in} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{in} = \sum_{j=2}^{n-1} C_{n-3}^{j-2}\cdot a_{jn}$

即有$\prod_{k=2}^{n-3}\prod_{j=1+2}^{n-k}(\prod_{i=j}^{j+(k+1-3)} a_{in})^{C_{n-(k+3)}^{j-3}} * \prod_{i=2}^{n-1} a_{in} = \prod_{i=2}^{n-1} a_{in}^{C_{n-3}^{i-2}}$

其中的 n 对应于【在由第 n-1 阶方程组的 x1 过渡到第 n 阶方程组的 x1 过程中，所求的最终 x1 系数中，多出来的系数部分】所在的第 n 阶方程组。

值得注意的是，在这整个过程中，看样子我是走了弯路，其实似乎这条弯路是上帝给我创设的捷径。。因为其实回过头来看的话，是没有比这捷径更短的捷径(没有直线路径)的(除了把a_{in}写成a_{jn}又写回a_{in})：这是因为：没有≤2 次相邻内外层的转换能够得出它：比如我们现在回过头反思后所抱有期待 or 幻想的$\sum_{k=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-k}\sum_{i=j}^{j+k-2} C_{n-k-3}^{j-3}\cdot$

$a_{in}+\sum_{i=2}^{n-1} a_{in} = \sum_{i=2}^{n-1} C_{n-3}^{i-2}\cdot a_{in}$，一个很可能奏效且到达山峰的路径最短的想法是：从这里就开始将最内层的 i 与第二层的 j 相替换，然后到了第二层的 i 再和第三层的 k 相替换，这样只需要两次替换就可以得出结果。

然而现实吃惊地打消了我们的这个遗憾而使我们感到庆幸和后怕：因为最内层的 i 与第二层的 j 从一开始就是无法替换的，因为它$\sum_{j=3}^{n-k}\sum_{i=j}^{j+k-2}$ 恰恰构成了一个类似$\sum_{j=3}^{i}\sum_{k=i-j+2}^{n-j}$ 一样的，有一对对边平行于 y 轴的平行四边形，致使我们不会希望用分段函数交换两层求和符号。因此这个想法从这里开始就会结束。

还有一个值得讨论的点子萦绕于我脑海：我们是否甚至只需要一次内外层转换就能把最内层的 i 放置于最外层去：即对于像这种将跨层地将第三层和第一层的求和符号中的主体变量按上述规则调换位置的想法是否可行。这就涉及到整个大厦所集中注意力于的地方了：一个 n 层求和所代表的含义是：一个 n 维空间中，一个点集中的各点的坐标进行某种相同映射后所产生的结果的集合。【或者说成：一个 n 维数组，在取遍所有的下标组合方式后，所有的特定下标群参与的特定映射，之和】并且所有的“n 层求和”仅仅是一种 n 维点集的映射和的某一种表示形式，并非所有的 n 维点集的映射和均能用 n 层求和表示。求和符号为了能一个不漏地把这些高维空间内每一个点的映射均找到并累加起来，自己规定了找寻规则。然而我们的 original intention 并不是为了创造这样繁琐的规则，而是单纯地想要创造某种普适的方法来表示这样的点集，规则只是副产物。

比如对于一种三维点集的映射和的三层求和表示形式：$\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=x}^{b}\sum_{z=y}^{c}$ ，如果把其后两个结合起来看$\sum_{x=1}^{a}(\sum_{y=x}^{b}\sum_{z=y}^{c}\ )$，则它可以被认为是，每一条[x-y 坐标系或 x-z 坐标系上的]直线 x=1~x=a，均对应一个平行于 z-y 平面的点集区域的侧投影；或者说 x 轴上的每一个 1~a 刻度，均有一个平行于 y-z 平面的点集区域与之一一对应。另外地，如果像这样把前两个结合起来看$(\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=x}^{b})\sum_{z=y}^{c}$ ，则它可以被理解为 x-y 平面上的点集区域内的每一个散点，均对应一条平行于 z 轴的一串点的集合朝 x-y 平面的投影。但 generally，我们是不进行任何结合就 read 它的：$\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=x}^{b}\sum_{z=y}^{c}$ ，从左往右，一层一层地。但这样“点”的 solitude “点属性”很突出，“点”的“线”、“面”、“空间”的属性就因这种规则而连同点集的更高维宏观景象一并被眼前的具体的小事物：某个黑点，给遮盖了。“目无全牛”，这样不便于我们用另外的方式描绘整个高维点集，即不便于我们进行层与层之间的变量优先级的交换工作。

回到我们的话题，普遍地，对于$\sum_{f1(i_1)=0}^{g1(i_1)}\sum_{f2(i_1,i_2)=0}^{g2(i_1,i_2)}\sum_{f3(i_1,i_2,i_3)=0}^{g3(i_1,i_2,i_3)}\cdots f(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$，我们如果要按照这种规则，那么每次均只能交换相邻两层求和，因为高维空间中的点集的坐标的映射和所对应的多层求和中的任意相邻两层求和，均能被视为一个整体且独立出来，构成高维空间中的某两个相邻维度轴组成的二维平面，外层变量在这里会被视为常数(因为外层变量交给此平面的任务会被悉数完成，所以能够悉数完成此任务

的平面的另一个表达形式总会被上层的任意变量的任意值所信任)，内层变量不在这里出现，因而换层规则会因平面可以由交换了 xy 轴的新坐标系表示而可以成立，而我们的规则就是因此 or 为此才设计出来的。正如$\sum_{f1(i_1)=0}^{g1(i_1)}\sum_{f2(i_1,i_2)=0}^{g2(i_1,i_2)}$ 可被写为 $\sum_{f.1(i_2)=0}^{g.1(i_2)}\sum_{f.2(i_2,i_1)=0}^{g.2(i_2,i_1)}$，$\sum_{f2(i_1,i_2)=0}^{g2(i_1,i_2)}\sum_{f3(i_1,i_2,i_3)=0}^{g3(i_1,i_2,i_3)}$ 可进一步被写为$\sum_{f2(i_2)=0}^{g2(i_2)}\sum_{f3(i_2,i_3)=0}^{g3(i_2,i_3)}$然后被写为$\sum_{f.2(i_3)=0}^{g.2(i_3)}\sum_{f.3(i_3,i_2)=0}^{g.3(i_3,i_2)}$。

另外地，更一般地有：$\sum_{i_1=f1(i_1)}^{g1(i_1)}\sum_{i_2=f2(i_2)}^{g2(i_2)}\sum_{i_3=f3(i_3)}^{g3(i_3)}\cdots f(g(i_1),g(i_2),g(i_3),\cdots,g(i_n))$，这种求和关系就不需要任何规则便能将任意一层求和与放在任意另一层求和之前或之后。因为各层与各层之间变量独立，只在自己层出现，没有变量交叉，不相联系，没有创建超链接，是个“超立方体”型的 cubic 原始求和：它能够描述它的 fellow 形式 $\sum_{f1(i_1)=0}^{g1(i_1)}\sum_{f2(i_1,i_2)=0}^{g2(i_1,i_2)}\sum_{f3(i_1,i_2,i_3)=0}^{g3(i_1,i_2,i_3)}\cdots f(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$所无法描述的任意形式的求和。

Otherwise,以上所有与多层求和的有关规则同样可用于多层连乘$\prod\ \prod\ \prod\ \cdots$。

七．一些东西在求和中的引用和运用：关于数学和计算机上的取整符号的使用：找顺序数列的奇、偶数项序数

数学上[-3.5]=-4，即[a]=≤a 的最大整数，为平移不变机制(作用对象平移后，规则不变)

计算机上[-3.5]=-3，即[a]= a 的符号+|a|的整数部分，为对称变换机制(作用对象对称后，规则取反)

计算机：在已有的对称变换下，使用平移：

即，平移+对称变换+平移=规则取反

i>0 时：

$2[\frac{i}{2}]+1$	$2[\frac{i}{2}]$	向左取邻近偶数(+向右走一格)
≥i 的奇数 min	≤i 的偶数 max	向左取邻近偶数(+向右走一格)
$2[-\frac{i}{2}]+2i$ 或从意义上写作 $2[\frac{i-2i}{2}]+2i$	$2[-\frac{i}{2}]+2i-1$ 或从意义上写作 $2[\frac{i-2i}{2}]+2i-1$	向相反方向走 2i 格子保证处于反区间后向反方向取邻近偶数后向相反方向走 2i 格 (+向原方向走一格)
≥i 的偶数 min	≤i 的奇数 max	向右取邻近偶数(+向左走一格)

i<0 时：

$2[-\frac{i}{2}]+2i+1$ 或从意义上写作 $2[\frac{i-2i}{2}]+2i+1$	$2[-\frac{i}{2}]+2i$ 或从意义上写作 $2[\frac{i-2i}{2}]+2i$	向相反方向走 2i 格子保证处于反区间后向反方向取邻近偶数后向相反方向走 2i 格 (+向原方向走一格)
≥i 的奇数 min	≤i 的偶数 max	向左取邻近偶数(+向右走一格)
$2[\frac{i}{2}]$	$2[\frac{i}{2}]-1$	向右取邻近偶数(+向左走一格)
≥i 的偶数 min	≤i 的奇数 max	向右取邻近偶数(+向左走一格)

数学：在已有的平移不变下，使用对称：

即，对称+平移不变+对称=规则取反

【以下的 i∈全体整数，即可以为负数。】

$2[\frac{i}{2}]+1$	$2[\frac{i}{2}]$	向左取邻近偶数(+向右走一格)
≥i 的奇数 min	≤i 的偶数 max	向左取邻近偶数(+向右走一格)
$-2[-\frac{i}{2}]$	$-2[-\frac{i}{2}]-1$	取相反数后向左取邻近偶数后取相反数(+向左走一格)
≥i 的偶数 min	≤i 的奇数 max	向右取邻近偶数(+向左走一格)

对数学上的取整函数的应用：

对于序列数 n~m，对应的序列号为 1~i~m-n+1

$2[\frac{n}{2}]+1$	$2[\frac{m}{2}]$
≥n 的奇数 min	≤m 的偶数 max
$-2[-\frac{n}{2}]$	$-2[-\frac{m}{2}]-1$
≥n 的偶数 min	≤m 的奇数 max

1.那么对于想求其中的所有奇数的序列号：

①.i 奇=[≥n 的奇数 min]的序列号+2j，其中 j=0~$\frac{(-2[-\frac{m}{2}]-1)-(2[\frac{n}{2}]+1)}{2}$

又因[≥n 的奇数 min]的序列号=[≥n 的奇数 min]相对于 n 的大小加上 n 的序列号=[≥n 的奇数 min]相对于 m 的大小加上 m 的序列号【-m+(m-n+1)=-n+1】

所以 i 奇=((2$[\frac{n}{2}]$+1)-n+1)+2j，j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$

即有 i 奇=(2$[\frac{n}{2}]$-n+2)+2j，j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$。

②.同理，它可以倒序数着来：

即 i 奇=[≤m 的奇数 max]的序列号-2j，其中 j=0~$\frac{(-2[-\frac{m}{2}]-1)-(2[\frac{n}{2}]+1)}{2}$

i 奇=((-2[$-\frac{m}{2}$]-1)-n+1)-2j，其中 j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$。

i 奇=(-2[$-\frac{m}{2}$]-n)-2j，其中 j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$。

2.对于偶数的序列号：

①.i 偶=(-2[$-\frac{n}{2}$]-n+1)+2j，j=0~$\frac{2[\frac{m}{2}]-(-2[-\frac{n}{2}])}{2}$

i 偶=(-2[$-\frac{n}{2}$]-n+1)+2j，j=0~$[\frac{m}{2}]+[-\frac{n}{2}]$

②.i 偶=(2[$\frac{m}{2}$]-n+1)-2j，j=0~$[\frac{m}{2}]+[-\frac{n}{2}]$

综上：

	顺序	倒序
i 奇	(2[$\frac{n}{2}$]-n+2)+2j，j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$	(-2[$-\frac{m}{2}$]-n)-2j，j=0~$-([-\frac{m}{2}]+[\frac{n}{2}]+1)$
i 偶	(-2[$-\frac{n}{2}$]-n+1)+2j，j=0~$[\frac{m}{2}]+[-\frac{n}{2}]$	(2[$\frac{m}{2}$]-n+1)-2j，j=0~$[\frac{m}{2}]+[-\frac{n}{2}]$

举例应用：对于数列 n~m=0~n-1，对应序列号 1~n

则 i 偶=1+2j，j=0~$[\frac{n-1}{2}]$

则$\frac{i偶-1}{2}$=j，j=0~$[\frac{n-1}{2}]$

则$\frac{i偶-1}{2}$=0~$[\frac{n-1}{2}]$

则有$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}$中 i-1 为偶数的各项之和为$\sum_{\frac{i-1}{2}=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}$。

且 i 奇=2+2j，j=0~$-([\frac{1-n}{2}]+1)$

则$\frac{i奇-2}{2}$=j，j=0~$-([\frac{1-n}{2}]+1)$

则$\frac{i奇-2}{2}$=0~$-([\frac{1-n}{2}]+1)$

则有$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}$中 i-1 为奇数的各项之和为$\sum_{\frac{i-2}{2}=0}^{-[\frac{1-n}{2}]-1}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}$。

所以我们有$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}=\sum_{\frac{i-2}{2}=0}^{-\left[\frac{1-n}{2}\right]-1}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}+\sum_{\frac{i-1}{2}=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{i-1}\frac{(x)^i}{i}$。