Book3

Geometry of Shadows

2017.03.19~2017.09.22

目录

一."球面三角学" ____ 4

I.引入 ____ 5

1.球面上的圆的极(polar) ____ 5

2.原三角形与极三角形 ____ 6

3.定理一 ____ 7

4.定理二 ____ 9

II.The gentle truth that finally arrives ____ 9

1."边的余弦定理"——"cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC" ____ 9

2."角的余弦定理"——"cosC=-cosA·cosB+sinA·sinB·cosc" ____ 10

3."边和角的五元素公式" ____ 10

4."正弦定理" ____ 11

5."四元素公式/余切定理" ____ 11

6."聂比尔定则"及其推论 ____ 12

7."聂比尔定则"的一个超级应用(慎入) ____ 14

8."球面三角形面积及其对应锥形空间的体积" ____ 18

二."球面三角"与"矢量代数" ____ 19

I.点积 ____ 19

II.叉积 ____ 20

1.大小 ____ 20

①.Way 01 ____ 20

②.Way 02 ____ 21

2.方向 ____ 23

III.三重矢积 ____ 25

1.模长 ____ 25

2.方向(罗辑的力量) ____ 26

IV.混合积、多重矢积、拉格朗日恒等式 ____ 27

三."狭义相对论"：认知的禁域。——The final frontiers. 28

I.协议：关于合法语句的合法性的公认 28

1.事件与参考系 28

2.时间与空间 28

3.同一事件的衡量标准 29

II.第二假设：光速绝对；以及时间、空间的相对性，速度的绝对性，及其变换 31

1.一些你所需要适应的铺垫 31

①.Introduction01 31

②.Introduction02 31

③.Introduction03 32

④.Introduction04 33

⑤.Introduction05 34

⑥.Introduction06 34

2.开始脚踏基石体验逻辑的螺旋上升 35

①.我的洛仑兹因子的雏形：$\triangle \mathbf{t} = \mathbf{k} \cdot \triangle \mathbf{t0}$，$\triangle \mathbf{x} = \mathbf{1k} \cdot \triangle \mathbf{x0}$ 35

②.爱因斯坦和洛伦兹的洛仑兹因子：$\triangle \mathbf{t}' = \mathbf{1k} \cdot \triangle \mathbf{t0}'$、$\triangle \mathbf{x}' = \mathbf{k} \cdot \triangle \mathbf{x0}'$ 36

(1).Way01 37

(2).Way02 37

(3).Way03 37

③.Space and Time, Einstein and me——以及我们之间的异同 37

3.光速不变与 k=**kc**=0；共线与不共线、以至不共面的三个速度矢量 38

①.三速度矢量共线的物理情景 39

②.三速度矢量不共线/不共面的物理情景 40

(1).Stage01：坐标空间层面 40

(2).Stage02：速度空间层面 40

(3).Stage03：相对速度空间层面 41

③.我的洛仑兹因子关于 v 的具体函数的得来 42

(1).{V 相|B 下，C 于 A}={V 相|C 下，C 于 A} 42

(2).{V 相|B 下，A 于 C}={V 相|A 下，A 于 C} 43

(3).联立以上所得的两个橙色方程 43

III.公式推导：时空(间隔)变换、广义速度变换、狭义速度变换、相对论余弦定理(角度变换式)、坐标间隔变换、w 的正交分解、相对论正弦定理、相对论正切定理 44

1.时空(间隔)变换 44

2.广义速度变换 45

3.狭义速度变换 46

4.相对论余弦定理(角度变换式) 46

5.坐标间隔变换 47

㈠.单一事件之第一大类：衡量标准=A 下|A 时间流逝△ **t#** 47

①.(△ xC,△ yC,△ zC,衡量标准)=(kwku ·△ xB,kw ·△ yB,△ zB,A 下|A 时间流逝△ tC) 47

②.(△ xC,△ yC,△ zC,衡量标准)=(kwku · kv ·△ xB,kwkv ·△ yB,△ zB,A 下|A 时间流逝△ tB) 50
㈡.单一事件之第二大类：衡量标准=A 下|C 时间流逝△ **tC** 52
①.(△ xC,△ yC,△ zC,衡量标准)=(1ku ·△ xB,△ yB,△ zB,A 下|C 时间流逝△ tC) 52
㈢.事件群的坐标间隔变换：衡量标准=A 下|A 时间流逝△ **tB** 53
①.(△ xCi,△ yCi,△ zCi,衡量标准)=(kwiku · kvi ·△ xBi,kwikvi ·△ yBi,△ zBi,A 下|A 时间流逝△ tB) 53
6.w 的正交分解 54
①.u 方向上：w·cosα=**u − v · cosθ1 − uvcosθc2**，因坐标系不同，也可写为 w·cos(π-α)=**v · cosθ − u1 − vucosθc2** 54
②.⊥ u 方向上：w·sinα=**v · sinθkvkw**、w·sin(π-α)=**v · sinθkvkw** 56
7.相对论正弦定理 57
①. **wkwvkv=sinθsinα或wkwsinθ=vkvsinα或wkw · sinα=vkv · sinθ** 57
8.相对论正切定理 57
①.**tanα=ku · tanα0**、tan(π-α)=**ku**·tan(π-**α0**) 57
IV.闵科夫斯基时空 58
1.我的现有体系下的闵科夫斯基时空 58
2.部分元素的解释 59
V.开始把我的工作纳入主流认知体系：salute to the pioneers. 61
1.坐标变换 61
①.伽利略变换 61
(1).引入 61
(2).旧时空观 62
②.洛伦兹变换 62
(1).我的洛伦兹因子γ的得来 63
(2).洛伦兹变换的具体形式及其逆变换 64
2.洛仑兹变换与之前理论的相通之处 65
①.时空变换 65
(1).时间变换 65
(2).空间变换 67
②.从洛仑兹变换到 III.5.㈡.①.(1).中的坐标间隔变换的衡量标准之一：A 下|C 时间流逝△ **tC**，以及该标准下的变换式 68
③.爱因斯坦的速度相加定理与我的 w 的正交分解不谋而合 69
④.闵科夫斯基时空 72
VI.时空图 73
1.坐标轴的选取，及其旋转角度与刻度密度 73
2.对应轴对应刻度的相对位置的特殊计算方法及以 A 系为标准系的时空图 76
①.对应轴对应刻度的相对位置 77

②.以 A 系为标准系的时空图 78
③.相对论方程们各自在时空图中的体现 79
i.时间变换在时空图中的体现 79
ii.空间变换在时空图中的体现 80
iii.时空变换在时空图中的 4 种表达方式 81
iv.速度相加定理在 x 方向上的表达式wx=vx − u1 − vx · uc2or 狭义速度变换式wAC = v − u1 − vuc2在时空图中的体现 82
v.闵可夫斯基时空距离量关系方程在时空图中的体现 84
VII.质速关系与质能关系 85
1.质速关系 85
①.合理假设质量 M 的显式函数关系式：M(**m0**,v)=**m0**·f(v) 85
②.质量守恒、动量守恒、以及质量与动量跨系守恒 86
③.相对论动量的两种表达式及质速关系的另一种简便并且有说服力的由来 88
2.质能关系 89
①.一些积分关系引理 89
②.质能关系式 90
③.能量动量关系 90
④.能量守恒方程与能量跨系守恒方程组 90

一. "球面三角学"

An amazing thunderstorm in the development of my mind.

"高中时期，在我瞥见了球面三角学中有个公式，在形式上与我曾经探索得到过的一个公式完全相同之后，我便又开始了版图的扩张，其整个入侵到统治的过程不到一天的时间，所以各位也要对自己有信心，该内容仅仅是对你现有的三角函数的知识在某个方向的拓展，相信你也能迅速和它握手言和，并进入接下来将要叙述的，它和矢量代数的一些或直接或间接的深刻联系。" ——These words only existed in a past version of one of my books.

在了解了这方面的内容后，你会更加深刻地认识到，某些无以言表的联系，贯穿于空间几何体中的，线-线、面-面、线-面，之间，同时这些联系也将重构一部分你早已遗忘但终究属于你的幻想之地(dream land)。

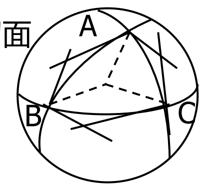
让我们开始此次远足：

I.引入

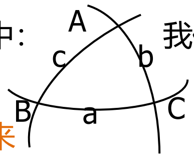
Some basic rules that we suddenly happen to have to dream of first：

假定有个半径为单位长度的球面/球壳，这样一来，对于任意的，在球面上的两个点 A、B，我们贴着球面所画出的，过此两点的最短曲线段的长度，在数值上便等于≤π的那个角 AOB 的弧度值——并且这样一来，基于单位球壳，我们便可以将 A、B、O 三点所确定的平面与球面的交线圆上的优弧和劣弧$\widehat{AB}$，在冠以“边”的名称的同时，以“角”来度量和计算它。【由于此点所带来的认识上十分便利的好处，我们以下的讨论均建立在单位球面之上。】

设过球心 O 的平面与球面的交集叫“大圆”，那么在如下三个大圆相交所创造的球面上的这个“小三角形”ABC 中，若连同把三个平面的两两交线画出来(即作直线 AO、BO、CO)，可见$\widehat{AB}=\angle AOB$、$\widehat{BC}=\angle BOC$、$\widehat{CA}=\angle COA$；若再过 A、B、C 三点作球面的三个切面，并仅考虑这三个切面和三个大圆所在的平面的 6 条交线在锥体空间 O-ABC 内部的部分，那么由于 OB 上过 B 点的切面，则 OB 垂直于在此切面上的两条交线，那么这时两交线在图示的射线方向的部分所构成的夹角 B，等于面 AOB 与面 COB 的夹角。



这时我们便可以用另外的两种方式来分别表达“线线夹角”和“面面夹角”了：在这样一个球面三角形中：

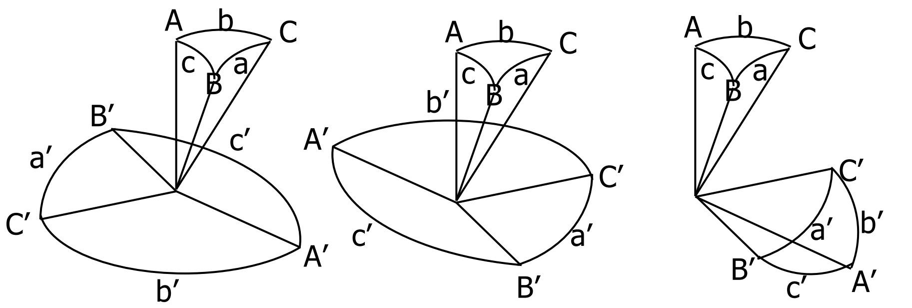


我们把三角锥体上的“线线夹角”描述为球面三角中的三条边 a、b、c；把“面面夹角”对应地叫做球面三角中的三个角 A、B、C。因而接下来的一切在球面三角上得到的结论，可以直接被应用于空间几何体上的对应角度的度量。——球面三角并不局限于球面：它的理论可被直接应用到“球的内部所发生的事情”中去：线线、面面等立体几何问题，正如它的理论也始于立体几何。在探究其是怎么从立体几何来的之前，我们得首先引入该理论模型中，一些零部件的使用说明：

1.球面上的圆的极(polar)

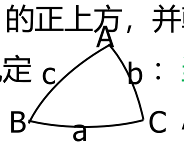
垂直于球面上一已知圆所在平面的球直径的端点，叫做这个圆的极。

2.原三角形与极三角形



当三个大圆两两相交，可知三个大圆所对应的三个平面，将单位球面的内部，不出意外共分隔出了 8 个各自独立的空间，每个锥形空间对应着其上方的一个球面三角形。如图，我们任取其中的一个，记为 ABC，并命名为原三角形。

想象我们这些观测者将自己置身于，以此球面三角形 ABC 所对应的锥形空间的放射方向为正方向的，球面三角形 ABC 的正上方，并朝着此方向的反方向向着球心 O 点看去。——在这样的情景下，我们规定



：当俯视图所示的球面三角，以顺时针方向 A→C→B→A(或以逆时针方向 A→B→C→A)，完成其所对应的锥形空间的三条射线所对应的，三个向量以顺时针方向 **OA→OC→OB→OA**(或逆时针方向 **OA→OB→OC→OA**)，进行两两叉乘：**OA×OC、OC×OB、OB×OA**(或 **OA×OB、OB×OC、OC×OA**)后，所得到的三个方向 **OB′、OA′、OC′** (或 **OC′、OA′、OB′**)的极，所构成的球面三角形，叫做原三角形的极三角形。

如图所示，图 1 中的球面三角形 A′B′C′便为原三角形 ABC 以顺时针方向做出的极三角形；图 2 中的球面三角形 A′B′C′便为同一个原三角形 ABC，在逆时针方向上的极三角形。——由于定义 1，我们知道一个圆有两个极，因而一个原三角形的三条边所对应的锥形空间的三个面，就有共 6 个极，共 8 种可能的"极所构成的三角形"。然而它们不全是极三角形。所以这里有必要阐明一下，对于图 3 这种，不是以顺时针方向或逆时针方向创造的"极所构成的三角形"，不是"极三角形"。【图 3 中，**OB′=OC×OA、OA′=OC×OB、OC′=OA×OB**，可见 **OB′、OC′**是逆时针的，而 **OA′**却属于顺时针方向——所有"方向不一致"(构不成首尾相连)的叉乘所得到的三个极，其所构成的球面三角，均不为原三角形的极三角形。】

我们为什么要这么严格地定义"极三角形"呢？——因为原三角形经这样有限制条件的变换后得到的三角形，有着其他"极所构成的三角形"这种不限制条件所变换得到的三角形，所不具有的普适规律存在——即仅仅是为了接下来用到了定义的定

理能成为定理而委曲求全的：下面我们便开始从定义过渡到定理——要知道，定理能成为定理的伊始，便是回过头去所定义的定义的功劳。

3.定理一

若球面▵A′B′C′是球面▵ABC 的极三角形，则球面▵ABC 也是球面▵A′B′C′的极三角形。

a.我们在第二点中谈到，每当给出一个特定的球面▵，我们还应指明其所对应的锥形空间(即我们得说明这个名字所代表的球面三角到底对应哪个锥形空间)——正如一个球面上的圆环，将整个球面分为了两个曲面，每个曲面均都在自己的圆锥空间的正上方一样——如果我们仅仅言及"球面▵ABC"，这个名词可以有两种不同的指向，要么指向小的锥形空间"锥形空间 ABC-①"所对应的，其上方的"球面▵ABC-①"；要么是指"球面对球面▵ABC-①的补集"——"球面▵ABC-②"，其就对应于另一个较大的锥形空间了——"球体对锥形空间 ABC-①的补集"——"锥形空间 ABC-②"。【注：但根据球面三角形的定义(由三个大圆所截)，球面三角形的面积和边界不会超过半球面，它所对应的锥形空间张角也不会超过一个平面在其方向的π角，所以其实任何一个给定的球面三角均有唯一一个锥形空间与之对应，即那个张角<π平面那个锥形空间。】【但当球面▵的三条边所在的大圆没有画出来的时候，我们很容易迷失自我，所以我仍得继续给出，没有画出大圆时，这方面的判据。】

b.即我们得指明，一个封闭图形的"内部"的具体定义，以之来区别于具有同样边界线，但因"内部"的空间位置不同，而异于你所指出的封闭图形的，其所关于球面的补集——另一个封闭图形。所以这里可以说，球面三角形不是个空心的框架，而是个内部填充了"能代表自己的"颜色的实心封闭图案。【在平面的时候，一个几何图形的内部，就是面积不为无穷大的封闭区域；然而到了球面，边界的两个方向上均为封闭区域，且面积均不为无穷大。——因此我们需要指明，哪个封闭区域，是你的封闭图形的"内部"——即哪个"内部"加上边界，是你的封闭图形。】

c.所以，此定理中，若球面▵A′B′C′的三条向径 **OA′**、**OB′**、**OC′**是由球面▵ABC 的三径顺时针叉乘得到的，那么这个所得到的极三角形▵A′B′C′，它的内部与原三角形▵ABC 的内部无交集(或者说是"相对的/反向的"or 分居某个平面异侧)；若原三角形的三个极(极三角形的三个顶点)A′、B′、C′是原▵ABC 以逆时针变换得到的，那么这样的极三角形▵A′B′C′，它的内部是与原三角形的内部有交集的那个封闭区域(或者说是"同向的"or 同处于某个平面同侧)。

Additionally，还需要补充的，此定理的后半句话，若沿用上一段话的逻辑，则为："若△A′B′C′是△ABC 在顺时针方向上的极三角形，那么若△A′B′C′也以顺时针方向做它的三个极所对应的极三角形，那么这个三角形与△ABC 是同一个球面三角。"，同样，"若△A′B′C′是△ABC 在逆时针方向上的极三角形，则△ABC 也是△A′B′C′的逆时针极三角形。"

d.关于此定理的证明：

i.作原△ABC 的两个极 A′和 C′，即就作了 OA′和 OC′分别垂直于 OBC 平面和 OAB 平面，那么就有 OA′⊥OB、OC′⊥OB，那么即有 OB⊥OA′C′平面，那么这就相当于：一旦作了原△ABC 的两个极 A′和 C′，便同时作了极△A′B′C′的一个极 B。——做三次这样的动作，则得到完整的原△ABC 的极△A′B′C′的同时，也便到了原△A′B′C′的极△ABC。

ii.但这又是怎样的规则来保证原△A′B′C′的极△ABC 不仅仅是"极 A、B、C 所构成的三角形"，而是原来的原△ABC 的呢？——即为何连用两次顺时针构造或者逆时针构造，所构造出的"极三角形的极三角形"均会回到原原三角形呢？→→这时我们就得用向量代数解释解释了，正如之后向量代数所无法解释的它自己，得用之前它所解释过的，它之外的别人——即球面三角，来解释。

①.在 c 中我们提到，在△ABC 上空顺时针叉乘得到的极三角形与原三角形相对、分居某个平面异侧，那么现在我们在△A′B′C′上空作顺时针叉乘，即有 **OC′**×**OA′**，而它的方向等于(**OB**×**OA**)×(**OC**×**OB**)的方向，我们将任意一个括号看成一个整体，比如后者，然后将前括号中的内容依公式展开——即有 (**OB**×**OA**)×(**OC**×**OB**)=[(**OC**×**OB**)·**OB**]**OA**-[(**OC**×**OB**)·**OA**]**OB**，其中混合积(**OC**×**OB**)·**OB**=**0**，此时我们便有 **OC′**×**OA′**~(**OB**×**OA**)×(**OC**×**OB**)=[-(**OC**×**OB**)·**OA**]**OB**~[-**OA′**·**OA**]**OB**，此时由于 **OA′**与 **OA** 分居 OBC 平面两侧，所以[-**OA′**·**OA**]为正，所以[-**OA′**·**OA**]**OB** 同向于 **OB**，记为[-**OA′**·**OA**]**OB**~**OB**，所以由始至终便有 **OC′**×**OA′**~**OB**，即 **OC′**×**OA′**同向于 **OB**。

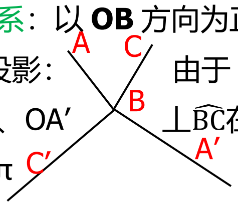
②.同理，若△A′B′C′由△ABC 逆时针叉乘得到，那么若对△A′B′C′也进行逆时针叉乘，就会有与①类似的过程和结局：**OC′**×**OA′**~(**OA**×**OB**)×(**OB**×**OC**)=(**OB**×**OA**)×(**OC**×**OB**)=-[(**OC**×**OB**)·**OA**]**OB**~-[-**OA′**·**OA**]**OB**=[**OA′**·**OA**]**OB**~**OB**，其中 **OA′** 与 **OA** 同处 OBC 平面同侧。【注：之前的"**OA′**与 **OA** 分居 OBC 平面两侧"和这里的"**OA′** 与 **OA** 同处 OBC 平面同侧"均不能说明 **OA′**·**OA** 为负和为正，但由于 **OA′同时**还是平面 OBC 的**法向量**，加上了这个条件后，这时便可以说明 **OA′**·**OA** 的正负了】【至此，我们的顺时针体系和逆时针体系，也有了另外的名字：当原三角形和极三角形的对应顶点，均分居于某对应平面异侧时，这时所构成的顺时针体系也叫做"同外体系"；同理，当原三角形和极三角形的对应顶点，均同居于某对应平面同侧时，这

时所构成的逆时针体系也叫做“同内体系”。|注：某对应平面是指：各个原 or 极三角形中，非“对应顶点”的其余两个顶点，与球心 O 三点所构成的平面。】

4.定理二

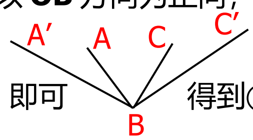
极三角形的边和原三角形的对应角互补⟸(由定理 1 可得)⟹原三角形的边和极三角形的对应角互补，即极三角形的边、角，均和原三角形的对应角、边互补。(还记得我们选择单位球面的原因嘛，就是为了顺应这种边和角的同化。)

a.关于此定理的证明：①.顺时针体系：以 **OB** 方向为正向，让自己处于 B 点正上方，沿 **BO** 方向俯视，你会观察到如下投影：



由于 OA′⊥ OBC 平面、OC′⊥ OAB 平面，则 OC′⊥$\widehat{BA}$在 B 点的切线$\overrightarrow{BA}$、OA′⊥$\widehat{BC}$在 B 点的切线$\overrightarrow{BC}$，即如图∠ABC′=∠A′BC=π/2，则∠ABC+∠A′BC′=π，即原三角形的角(∠ABC)和极三角形的对应边(∠A′BC′)互补。

②.逆时针体系：同样以 **OB** 方向为正向，让自己处于 B 点正上方，沿 **BO** 方向俯视，你会观察到如下投影：



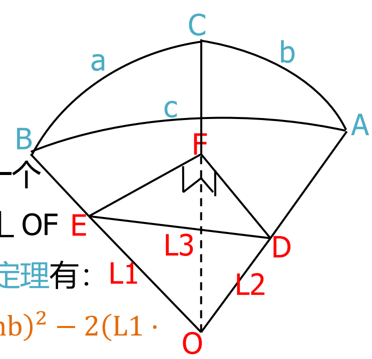
，其中∠ABC′=∠A′BC=π/2。这时只需要反向延长一下 AB 和 AC，即可得到①的图示和结论。

II.The gentle truth that finally arrives

(“Time to enjoy this game ! Use the rules preset !”):

之前的基石已然铺就好我们所将上行的路，下面我们便开始球面三角中各量关系的探索之旅——“方程是永恒的，它们所创造的快乐，也将会如涓涓细流一般，随着一个又一个的进阶版方程的发现，灌溉你欲望的心野”：

1.“边的余弦定理”——“cosc=cosa•cosb+sina•sinb•cosC”



想象把一个球面三角形和它下方的锥形空间一起独立出来，在锥形空间的三条向径中任选其一(我选的是 OC)，并在其上任取一个刻度所对应的位置，标记为点 F，作 DF ⊥ OF 交 OA 于 D、作 EF ⊥ OF 交 OB 于 E，设 OE=L1，OD=L2，OF=L3，则在▵EFD 中运用余弦定理有：$(\mathrm{EF})^2+(\mathrm{FD})^2-2(\mathrm{EF})(\mathrm{FD})\cos\mathrm{C}=(\mathrm{ED})^2$，即$(\mathrm{L1}\cdot\sin a)^2+(\mathrm{L2}\cdot\sin b)^2-2(\mathrm{L1}\cdot\sin a)(\mathrm{L2}\cdot\sin b)\cos\mathrm{C}=(\mathrm{ED})^2$，又在▵EOD 中运用余弦定理有：$(\mathrm{L1})^2+(\mathrm{L2})^2-$

$2(L1)(L2)\cos c = (ED)^2$，将两式联立，即有$(L1\cdot \sin a)^2 + (L2\cdot \sin b)^2 - 2(L1\cdot \sin a)(L2\cdot \sin b)\cos C = (L1)^2 + (L2)^2 - 2(L1)(L2)\cos c$，两边同除以$(L2)^2$，得$\left(\frac{L1}{L2}\cdot \sin a\right)^2 + (\sin b)^2 - 2\left(\frac{L1}{L2}\cdot \sin a\right)(\sin b)\cos C = \left(\frac{L1}{L2}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{L1}{L2}\right)\cos c$，进一步有$0 = \left(\frac{L1}{L2}\cdot \cos a\right)^2 + (\cos b)^2 + 2\left(\frac{L1}{L2}\cdot \sin a\right)(\sin b)\cos C - 2\left(\frac{L1}{L2}\right)\cos c$；同时由于L1·cosa=L2·cosb=L3，可知$\frac{L1}{L2} = \frac{\cos b}{\cos a}$，代入即有$0 = 2(\cos b)^2 + 2\left(\frac{\cos b}{\cos a}\cdot \sin a\right)(\sin b)\cos C - 2\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)\cos c$，即$0 = \cos a\cdot \cos b + (\sin a)(\sin b)\cos C - \cos c$，移向即有"边的余弦定理"—— "cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC"。

2."角的余弦定理"——"cosC=-cosA•cosB+sinA•sinB•cosc"

Use the rules preset：根据定理二有：c=π-C′、a=π-A′、b=π-B′、C=π-c′，则将其代入"边的余弦定理"——"cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC"即得到：cos(π-C′)=cos(π-A′)·cos(π-B′)+sin(π-A′)·sin(π-B′)·cos(π-c′)，即有-cosC′=cosA′·cosB′-sinA′·sinB′·cosc′，即 cosC′=-cosA′·cosB′+sinA′·sinB′·cosc′，对应修改变量名即有："角的余弦定理"——"cosC=-cosA·cosB+sinA·sinB·cosc"。

3."边和角的五元素公式"

边："sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC"；

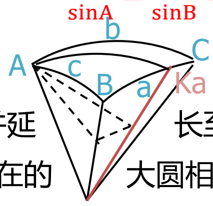
角："sinC·cosb=sinA·cosB+cosA·sinB·cosc"。

利用轮换了的 2 个"边的余弦定理"，即可得到"边的五元素公式"：①cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC，②cosb=cosc·cosa+sinc·sina·cosB，将①代入②中，便有 cosb=[cosa·cosb+sina·sinb·cosC]·cosa+sinc·sina·cosB，即有$\sin^2 a\cdot\cos b$=sina·[cosa·sinb·cosC+sinc·cosB]，移项即有 sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC，即"边的五元素公式"。

同理，若利用两个"角的余弦定理"，也可得到"角的五元素公式"；同时你也可以通过定理二，来从"边的五元素公式"直接过渡到"角的五元素公式"(像"边的余弦定理"过渡到"角的余弦定理"一样)；并且你还可以通过接下来引入的一个定理来更简单地实现它俩的互推，从另一个角度上。

4. “正弦定理”

(不分边和角- -，因之边和角的数量并不一边倒)—— “$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}(=\frac{\sin ha}{\sin B\cdot\sin C}=\frac{\sin hb}{\sin A\cdot\sin C}=\frac{\sin hc}{\sin A\cdot\sin B})$” 。



过点 A 作面 BOC 的垂线，连接 O 点和垂足 ka，并延长至与$\widehat{BC}$或$\widehat{BC}$所在的大圆相交于点 Ka，并过 Ka、A 作一个大圆与$\widehat{BC}$所在的大圆相交(有两个交点，其中那个在点 O→点 ka 方向上的，才是点 Ka)，所得的$\widehat{AKa}$这段≤π/2 的弧，便定义为球面▵ABC 的高 ha。

现过 ka 作 OB 的垂线，垂足假设为 M，由于 Aka⊥面 BOC，所以 Aka⊥OB，又因 kaM⊥OB，所以 OB⊥面 kaMA，所以 OB⊥AM，所以∠kaMA=∠B=二面角<A-OB-C>。现由于 OA·sinc=AM，而 AM·sin(∠kaMA)=Aka，所以 OA·sinc·sin(∠kaMA)= Aka，又因∠kaMA=∠B，所以即有 OA·sinc·sinB= Aka，又因 Aka/OA=sinha，所以有 sinc·sinB=sinha。同理，此图若过 ka 向 OC 作垂线，会有类似的 sinb·sinC=sinha。进一步地，同理，若此图在刚开始过 C 点和 B 点作对面的垂线的话，也会有类似的结论。

于是我们有：sinha=sinc·sinB=sinb·sinC，sinhb=sina·sinC=sinc·sinA，sinhc=sinb·sinA=sina·sinB。于是我们稍作处理便会得到“正弦定理”—— “$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}(=\frac{\sin ha}{\sin B\cdot\sin C}=\frac{\sin hb}{\sin A\cdot\sin C}=\frac{\sin hc}{\sin A\cdot\sin B})$” 。

在 3.中我们提到了可以用正弦定理直接实现两个五元素公式之间的互相转化，让我们来看看这是怎么做到的：sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC⟺ $\sin c\cdot\frac{\sin C}{\sin c}\cdot\cos B=\sin a\cdot\frac{\sin A}{\sin a}\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b\cdot\frac{\sin B}{\sin b}\cdot\cos C$⟺sinC·cosB=sinA·cosb-cosa·sinB·cosC ⟺sinA·cosb=sinC·cosB+cosC·sinB·cosa，它们之间的转化便是这样。

5. “四元素公式/余切定理”

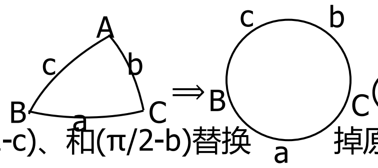
——是“cosa·cosC=sina·cotb-sinC·cotB”朝两个方向的移项结果。

同样利用五元素公式和正弦定理，只不过是换种方式，即可得到四元素公式，或者叫余切定理：sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC，方程两边同除以 sinb，并且这样分配 sinb：(sinc/sinb)·cosB=sina·(cosb/sinb)-cosa·cosC，此时便有(sinC/sinB)·cosB=sina·cotb-cosa·cosC，即 sinC·(cosB/sinB)=sina·cotb-cosa·cosC，即有 sinC·cotB=sina·cotb-cosa·cosC 这便是边的余切定理，只需稍加移项即有角的余切定理：sina·cotb=sinC·cotB+cosa·cosC。

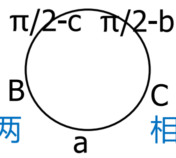
6. "聂比尔定则"及其推论

"聂比尔定则——边"：

对于一个有一个角为$\pi/2$的球面三角形：

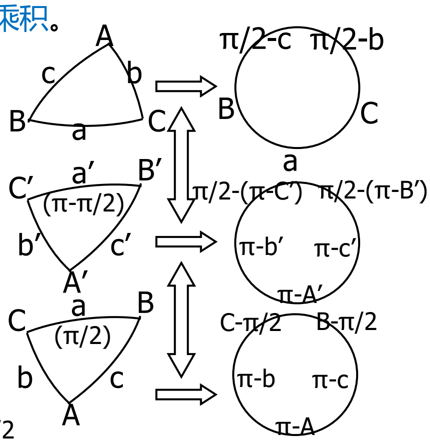


(省略掉直角A，其余5元素依次排成环状)⇒分别用$(\pi/2-c)$、和$(\pi/2-b)$替换掉原来的角A的临边c、b，即得到了

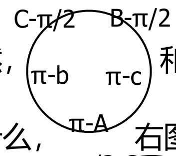


。这时，每个元素均有两个相邻元素和两个相对元素。这时，聂比尔定则被表述为：每个元素的余弦等于两相邻元素的余切的乘积，或者等于两相对元素的正弦的乘积。

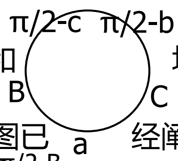
那么，对于一个有一条边为$\pi/2$的球面三角形呢？



显然，

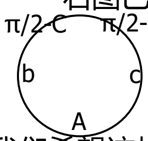


和

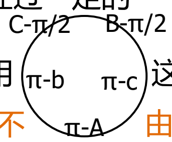


均满足聂比尔定则(至于为什么，右图已经阐述得非常简明扼要了)；

并且显然，

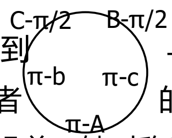


这样的五个元素并不满足聂比尔定则，但我们希望这样的熟悉的五元素能够经过一定的修正后，间接地适用于聂比尔定则，而不是用

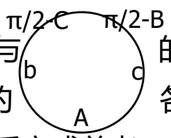


这个东西加上正宗的聂比尔定则来求解这类问题(后者虽然是正宗做法，但不由得觉得有点麻烦)。

注意到

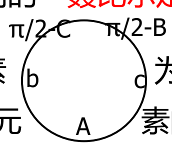


与

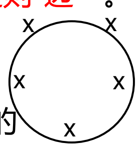


的对应位置的元素之间，要么差了个负号，要么互补，即后者的各个元素所对应的角度要么沿着x轴对称后变成前者，要么沿着y轴对称后变成前者，所以前者与后者的对应元素的sin、cos、cot映射结果，要么相等要么互为相反数(即只差个负号)——因此可行。那么我们现在就利用①.$\sin x=\sin(\pi-x)=-\sin(-x)$、②.$\cot x=-\cot(\pi-x)=-\cot(-x)$、③.$\cos x=-\cos(\pi-x)=\cos(-x)$来创造一个"对于一个有一条边为$\pi/2$ 的球面三角形"所能适用的"聂比尔定则-边"。

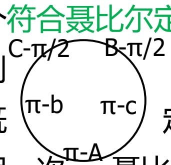
如果我们假设这个不符合聂比尔定则的环状排列之五元素



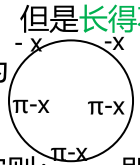
为



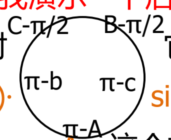
那么那个符合聂比尔定则、但是长得不好看(因而需要改进)的五元素的环状排列



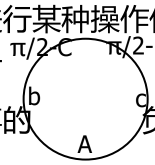
即为



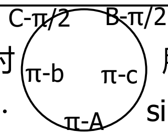
，那么接下来我演示一下后续操作的原理：根据以上的既定设定，我们先对

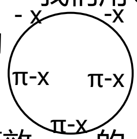


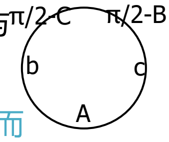
它中的任意有效的三个元素使用一次聂比尔定则：即有$\sin(C-\pi/2)\cdot\sin(B-\pi/2)=\cos(\pi-A)$，我们对其进行某种操作便有$\sin(\pi/2-C)\cdot\sin(\pi/2-B)=-\cos A$，这个操作所得到的等式，在形式上与此图

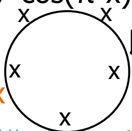


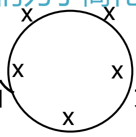
以相同三元素，并用聂比尔定则展开所得到的等式，只差了一个可喜的负号：$\sin(\pi/2-C)\cdot\sin(\pi/2-B)=\cos A$(这个等式当然是不成立的)。

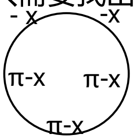
我们用等效并更高效的方式来描述上一段过程：正如我们先对

所等效的

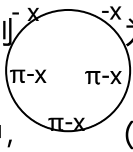
中对应的三个元素使用一次聂比尔定则：即有 sin(-x)· sin(-x)= cos(π-x)，发现对它进行了某种操作后的-sinx·sinx=cosx，与

所等效的

以相同位置的元素、聂比尔定则作用后的等式——sinx·sinx=cosx只差了个负号。——这就是我们为了简化这个问题而做出的小小的模型——我们只需要找出，哪些位置下的

中的三个元素用聂比尔定则所构成的等式，与

对应位置的三个元素以聂比尔定则所构成的等式，只差个负号。

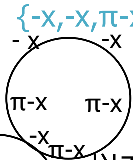
由之前的①.②.③.我们能得出这样一个表格：它表示，cosx、cotx、sinx，分别与当 x 被替换为为π-x、-x 时的，同函数名下的函数值，所相差的是一个负号还是正号(才能相等)。(比如 cosx*(-1)=cos(π-x))。——接着，由于右图的对位元素的正弦，其组合方式只能且能取遍：{-x,π-x}、{-x,-x}、{π-x,π-x}这三种，并且对应的余弦只能分别

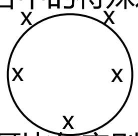
为：π-x、π-x、-x，于是我们连起来写，{sin,sin,cos}的组合只能有以下三种：{-x,π-x,π-x}、{-x,-x,π-x}、{π-x,π-x,-x}。【注：在这些{sin,sin,cos}中，(sin,sin)是自变量，cos 是因变量，因为一个(sin,sin)只对应唯一一个 cos，而一个 cos 却可能对应两个(sin,sin)。】

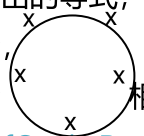
x	cos	cot	sin
π-x	-	-	+
-x	+	-	-

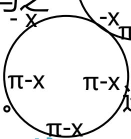
同理，但稍有区别地，{cot,cot,cos}中，不仅(cot,cot)不是自变量，且 cos 也不是自变量了：可以见得，{cot,cot,cos}可对应地取{-x,π-x,π-x}、{-x,π-x,-x}、{π-x,π-x,π-x}——其中(cot,cot)=(-x,π-x)有两个对应的 cos：π-x 和-x，与此同时，cos=π-x 也有两个对应的(cot,cot)：(-x,π-x)和(π-x,π-x)。

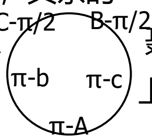
不过，相同的是，不管是{sin,sin,cos}还是{cot,cot,cos}，均只有 3 种组合，共 6 种组合。我们只需在这 6 种组合中找出三者相乘之积为负的组合：{sin,sin,cos}={{-x,π-x,π-x}、{-x,-x,π-x}、{π-x,π-x,-x}}={{-,+,-}、{-,-,-}、{+,+,+}}={+、-、+}；{cot,cot,cos}={{-x,π-x,π-x}、{-x,π-x,-x}、{π-x,π-x,π-x}}={{-,-,-}、{-,-,+}、{-,-,-}}={-、+、-}；可见{sin,sin,cos}中，只有{-x,-x,π-x}的三者之积为负，而{cot,cot,cos}的三个组合中，有{-x,π-x,π-x}和{π-x,π-x,π-x}，它们的三元素之积为负。

现在我们来找一找：{-x,-x,π-x}在{sin,sin,cos}的三种组合中的特殊之处：可知对于{sin,sin,cos}，只有当

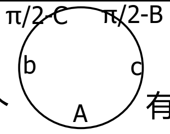
中的(sin,sin)取(-x，-x)时，

用聂比尔定则给出的等式，才与之相差一个负号；其余的{sin,sin,cos}的组合，

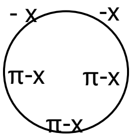
与

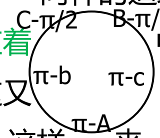
以对应元素，且以聂比尔定则给出的等式，则完全相同。进一步地，当还原到

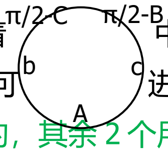
上时，{-x,-x,π-x}便只对应着{C-π/2,B-π/2,π-A}，

而它又进一步对应着

中的对应位置的组合{π/2-C,π/2-B,A}——所以，结论就是，对于"一个有一条边为π/2 的球面三角形"，若我们按照原有的聂比尔定则中叙述的排列顺序，环状排列好省略了直角边后的五元素，那么此时【对于{sin,sin,cos}，其中不含 cosA 的，其余 4 个用聂比尔定则写出的等式仍然成立，而对于用聂比尔定则写出的含 cosA 的等式，只需要在等式的左边或者右边加一个负号即可(使得所写等式成立)】。

同样的道理，对于{cot,cot,cos}，

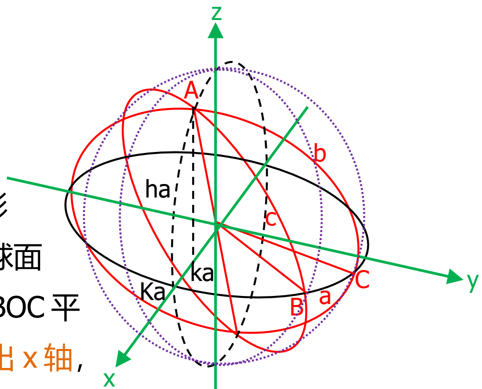
中的{-x,π-x,π-x}和{π-x,π-x,π-x}对应着

中的所有含有 cos(π-b)、cos(π-A)、cos(π-c)的{cot,cot,cos}。而这又接着对应着

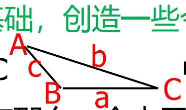
中所有含有 cosb、cosA、cosc 的{cot,cot,cos}——这样一来，我们便又可进一步将其概括为：【对于{cot,cot,cos}，其中不含 cosb、cosA、cosc 的，其余 2 个用聂比尔定则写出的等式仍然成立，而对于用聂比尔定则写出的含 cosb、cosA、cosc 的等式，只需要在等式的左边或者右边加一个负号即可(使得所写等式成立)】。

概括一下，我们的"聂比尔定则-边"：若省略了 90°边的五元素图，要沿用省略了 90°角的五元素图的形式，且要继承聂比尔定则的话，那么对{sin,sin,cos}，当 cos 不取 cosA 时，聂比尔定则无需修正；当 cos 取 cosA 时，用聂比尔定则创造了包含了 cosA 等式后，得在等式的某一边加上负号。对{cot,cot,cos}，当 cos 不取 b、A、c 时，聂比尔定则可直接使用；当 cos 取 b、A、c 时，用聂比尔定则创造了等式后，得在等式的某一边加上负号。

7. "聂比尔定则"的一个超级应用(慎入)



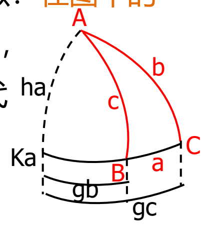
在第 4. "正弦定理"中我们提到了关于球面三角形的高 ha 的定义及其做法，那么如图：现在我们任取一个球面△ABC，将它的三条边所在的大圆补画出来，并作 A 点到 BOC 平面的垂线，垂足为 ka。以 O→ka 为 x 轴正向，过 O 点作出 x 轴，并设 x 轴正半轴与$\widehat{BC}$弧所在的大圆交点为 Ka，则知劣弧$\widehat{AKa}$=ha，并补全 ha 所在的大圆。——进一步地，以 ka→A 为 z 轴正向，过 O 点作出 z 轴；并用已创造的 x、z 轴，以及 x-y-z 右手定则，创造出过 O 点的 y 轴。至此，我们已把图示中的所有 objects 以及它们的来源全都 name 了一遍了。

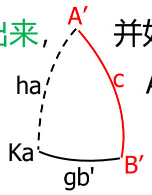
现在我们开始用我们的双手，以这个图为基础，创造一些令人惊叹的过程：首先来点引信，阐述一下基本原理：在一个平面△ABC

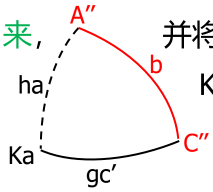
中设 **b**+**c**=**a**，则有 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^0+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^0=|\mathbf{a}|$，即也就是说，无论 B、C 角是否有那么一个大于π/2，即无论 A 点朝

BC 直线的投影点，是否落在 BC 线段以外——只要有 **b**+**c**=**a**，就会有：向量 **b** 到以 **a** 的方向为正向的轴的投影+**c** 到以 **a** 的方向为正向的轴的投影=边 a 的长度，即 a 值。

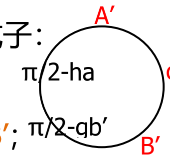
利用这个不算原理的“原理”，我们接下来的过程将有点与之类似：在图中的 Rt 球面▵AKaB 中：我们对其与▵ABC 的某些交集元素进行新的命名：如图，我们将 Rt 球面▵AKaB 独立出来，并如图进行重新命名：为了让 A 只代表▵ABC 的∠A，我们定义与 A 共点的点在▵AKaB 中体现为 A′。同理，▵AKaB 中，与 B 点共点的点叫 B′，并定义 KaB′=gb′。因此我们现在叫▵AKaB 为▵A′KaB′了哦；同样的道理：将仅有的两个 Rt▵中剩下的那个：Rt 球面▵AKaC 独立出来，并将它的与 A 共点的点叫做 A″、与 C 共点且属于之的点叫做 C″，并定义 KaC″=gc′，并从此叫▵AKaC 为▵A″KaC″。







而至于 gb 和 gc 是什么意思，以及为什么我们要定义两个不同于它们的 gb′和 gc′，将在接下来的环节叙述这和这以外的规定的来源：在 Rt▵A′KaB′中我们利用聂比尔定则可得到如下两个式子：以下均以{cot,cot,cos}创造等式：①.以π/2-ha 为 cos，得到的等式为：sinha=cotA′·tangb′，②.以 c 为 cos，则得到的等式为：cosc=cotA′·cotB′；然后将两者联立，消去其中的 cotA′得：tangb′=sinha·cotB′/cosc；同理，我们在 Rt▵A″KaC″中利用同样的途径也可得到类似形式的结果：tangc′=sinha·cotC″/cosb。



接下来就是关键了：我们任意假设向量 **BC** 或 **CB** 为 **a**(这里假设的是 **CB** 为 **a**)，并对应地假设，**BA**=**c**、**AC**=**b** 或 **CA**=**b**、**AB**=**c**(这里假设的是 **CA**=**b**、**AB**=**c**)，使得 **b**+**c**=**a**。我们同样在形式上有 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^0+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^0=|\mathbf{a}|$，并且在这里，记弧向量的点积为：$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^0\sim|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}^0|\cdot\cos C$，其中 1.$|\mathbf{b}|=b=\widehat{AC}$，2.公式写的是等价于“~”而不是等于“=”符号。3.点积的正负由两个弧向量夹角的余弦 cosC 决定(其中 C 为一个二面角，但因有方向而∈[0,π])。【可以知道，不论 **a** 被定义为向量 **BC** 还是 **CB**，只要 **b**+**c**=**a**，则 **b** 与 **a** 的夹角均为 C，**c** 与 **a** 的夹角均为 B】4.进一步地，我们记 gb=$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^0=\widehat{\mathbf{KaB}}\cdot\mathbf{a}^0$，gc=$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^0=\widehat{\mathbf{CKa}}\cdot\mathbf{a}^0$ (由于这里假设的是 **CB** 为 **a** 且 **b**+**c**=**a**，所以有$\widehat{\mathbf{KaB}}\cdot\mathbf{a}^0=-|\widehat{\mathbf{KaB}}|=-\widehat{KaB}$、$\widehat{\mathbf{CKa}}\cdot\mathbf{a}^0=|\widehat{\mathbf{CKa}}|=\widehat{CKa}$)，并且由于 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^0+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^0=|\mathbf{a}|$，以及$|\mathbf{a}|=a=\widehat{BC}$，我们便有 gb+gc=a(后面我们会知道这个等式不一定成立)。【我们还可以类似地定义投影：$\mathrm{Prj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=-|\widehat{\mathbf{KaB}}|=-\widehat{KaB}=gb$，以及投影向量：$\mathbf{Prj_{a}b}=\widehat{\mathbf{KaB}}=\mathbf{gb}$ 等等，并且像 gb+gc=a，**gb+gc=a** 也不是恒成立的。】

倘若 Ka 落在▵ABC 的边$\widehat{BC}$(或者叫劣弧$\widehat{BC}$)以外，那么有三种可能(以下设点 C 关于 O 点的对称点为 C1、B 关于 O 点的对称点为 B1，图中过 z 轴和分别过 B、C 两点的两个紫色虚线圆圈与$\widehat{BC}$所在的大圆的另两个交点便是 B1 和 C1)：①.若 Ka 落在劣弧

$\widehat{BC}$1(不包含两端点)上，则∠B>π/2 且∠C<π/2，此时还有 **gb+gc=a** 以及 gb+gc=a，并且由于这时 B′+B=π，且 gb′=-gb，将其代入之前的 tangb′=sinha·cotB′/cosc 可得 tan(-gb)=sinha·cot(π-B)/cosc，即有 tangb=sinha·cotB/cosc，同理由于这时 C″=C、gc′=gc，代入 tangc′=sinha·cotC″/cosb 即有 tangc=sinha·cotC/cosb；②.若 Ka 落在劣弧$\widehat{CB}$1(不包含两端点)上，同理有∠B<π/2 且∠C>π/2，以及 **gb+gc=a** 和 gb+gc=a，并且由于这时 C″+C=π，且 gc′=-gc，有 tangc=sinha·cotC/cosb，因 B′=B、gb′=gb 而有 tangb=sinha·cotB/cosc。③. 若 Ka 落在劣弧$\widehat{BC}$(不包含两端点)上，那么∠B<π/2、∠C<π/2，且仍有 **gb+gc=a**、gb+gc=a，B′=B，gb′=gb、C″=C，gc′=gc，因而仍有 tangb=sinha·cotB/ cosc、tangc=sinha·cotC/cosb。

不过接下来的区间上发生的事情就稍有不同了：④. 若 Ka 落在劣弧$\widehat{B1C1}$(不包含两端点)上，那么∠B>π/2、∠C>π/2，且有 **gb+gc=a**-2π·**a°**(注：这里规定同起点和同终点的弧向量并不一定相等，即不一定为同一个向量，还要看它们的环绕方向)，则 gb+gc=a-2π，且因 B′+B=π，gb′=-gb、C″+C=π，gc′=-gc，仍有 tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb。【这时若我们尝试着将 Rt▵A′KaB′与 Rt▵A″KaC″安排在同一侧的话(且同时得改变某侧的投影的定义)，可能会有与①. ②. ③.相同的关于投影和投影向量之和的结论，但这是行不通的，因为若 Rt▵A′KaB′与 Rt▵A″KaC″在同一侧的话，则将有一个球面三角形不再是球面三角形了。——这也是为什么我们的①. ②. ③.的 Rt▵A′KaB′与 Rt▵A″KaC″或同侧或异侧地，各自均只有一个球面三角形与之对应。】

⑤.现在我们来讨论端点的极端情况：i.当 Ka 落在 B 点或者 C 点上时，此时 B 或 C 等于π/2，另一个<π/2，cosB 或 cosC=0，则 **gb** 或 **gc=0**，且 gb 或 gc=0，并仍有 **gb+gc=a** 以及 gb+gc=a。同时因 B′=B，gb′=gb、C″=C，gc′=gc 仍然有 tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb 成立；ii.当 Ka 落在 B1 点或者 C1 点上时，此时 B 或 C 等于π/2，另一个>π/2，cosB 或 cosC=0，但此时 **gb** 或 **gc≠0** 了，而是 **gb=a°**方向上的 **B1B** 或−**a°**方向上的 **B1B**，**gc=a°**方向上的 **CC1** 或−**a°**方向上的 **CC1**，则 **gb+gc=a**、gb+gc=a 或者 **gb+gc=a**-2π·**a°**、gb+gc=a-2π。不过，既然 **gb** 或 **gc** 均因自己的 B(B′)或 C(C″)=90°而有两个选择，为什么不去将就对方的<π/2 的 C″或 B′而使得 Rt▵A′KaB′与 Rt▵A″KaC″在同一侧而变得只有一个选择了呢？——如果这样规定了的话，就会恒有不让人纠结的 **gb+gc=a**、gb+gc=a 成立了。在这样的假定下，此时因 B′=B，gb′=gb、C″+C=π，gc′=-gc 或 B′+B=π，且 gb′=-gb、C″=C、gc′=gc 均仍有 tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb。iii.当 ka 落在 O 点时，此时 Ka 可处于以上①~⑤中的任何情况，那么对应地，它的过程及其结论可以任由以上某位置的 Ka 作为模板复刻出。

综上，我们得知，1.不论 ka 或 Ka 处于任何位置，均有两恒等式 tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb 成立。2.当 Ka 落在劣弧$\widehat{B1C1}$(不包含两端点)上时，有 **gb+gc=a**-2π·a°、gb+gc=a-2π，其余情况均为 **gb+gc=a** 和 gb+gc=a。【第 2 点也可以被描述为：当 Ka 落在劣弧$\widehat{B1C1}$(不包含两端点)上时，有 **gb+gc=a**-2π·a°、gb+gc=a-2π；当 Ka 落在优弧$\widehat{B1C1}$(不包含两端点)上时，有 **gb+gc=a** 和 gb+gc=a；当 Ka 落在 B1 或 C1 上时，或 ka 落在 O 点时，以上结论均适用。】(注：以上讨论中的弧向量均不为自由向量。)

有了这样的结论后，好玩的事情终于来到了：Under any circumstances：tana=tan(a-2π)=tan(gb+gc)=$\frac{\text{tangb}+\text{tangc}}{1-\text{tangb}\cdot\text{tangc}}$，而我们又恒有：tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb，将这两个恒等式代入第一个恒等式中即有：tana=$\frac{\text{sinha}\cdot\text{cotB}/\text{cosc}+\text{sinha}\cdot\text{cotC}/\text{cosb}}{1-\text{sinha}\cdot\text{cotB}/\text{cosc}\cdot\text{sinha}\cdot\text{cotC}/\text{cosb}}=\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}$，这个有意思的等式就有意思在这里：该式子 tana=$\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}$中，B、C、b、c 均为已知的原球面▵ABC 中的已知量、不变量，而 a 是随着自变量 ha 变化而变化的因变量。——这样就相当于我们固定了球面▵ABC 中，b、c 边所在的大圆不动，拨动边 a 所在的大圆，使得 BOC 平面绕 y 轴旋转，过程中的每一个 ha 值均唯一对应于一个 a 值，而这个 a 关于 ha 的函数(具体映射关系)便如下所示：a=atan($\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}$)。

利用这个等式，我们可以纯粹地利用积分得到 S≤AR²的球面▵ABC 的面积$=\int_0^{\text{asin}(\text{sinc}\cdot\text{sinB})}\text{R}\cdot\text{atan}\left(\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}\right)\cdot(\text{R}\cdot\text{dha})$，【这是我们在非单位球面上的做法，其中的R 与被积变量 ha 无关，所以你同时也可以将其理解为：以 R=1 的单位球面为基础，面积比=相似比的平方】其中，对那两个有直角的三角形使用聂比尔定则：sinha=sinc·sinB′=sinb·sinC″，而对于 B′，要么 B′=π-B，要么 B′=B，同理 C″。则上式可进一步表示为：sinha=sinc·sinB=sinb·sinC，则积分上限(即蓝色部分)，由于 ha 恒为锐角，便写作 asin(sinc·sinB)，也可写作 asin(sinb·sinC)。——而对于 S≥AR²的球面▵ABC，S=2AR² $-\int_0^{\text{asin}(\text{sinc}\cdot\text{sinB})}\text{R}^2\cdot\text{atan}\left(\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}\right)\cdot\text{dha}$，在这里不推荐使用$\int_0^{\pi-\text{asin}(\text{sinc}\cdot\text{sinB})}\text{R}^2\cdot\text{atan}\left(\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}\right)\cdot\text{dha}$，因为这里的积分上限=ha 的上限=$\pi-\text{asin}(\text{sinc}\cdot\text{sinB})$>π/2，超出了之前的定义 ha<π/2 的范围，从而导致 Ka 的位置会对应地随着 ha 的跨过π/2 而变到原 Ka 关于 O 点的镜像去，导致 ha、x 轴、y 轴、投影 gb、gc、两个 Rt▵中的 gb′、gc′、B′、C″均得因对应 Ka 而改变，以至于不知道在这个新定义的体系下的这些元素们，是否在>π/2 的每个 ha 下，均仍恒有等式 tana=$\frac{\text{sinha}\cdot(\text{cotB}\cdot\text{cosb}+\text{cotC}\cdot\text{cosc})}{\text{cosb}\cdot\text{cosc}-\sin^2\text{ha}\cdot\text{cotB}\cdot\text{cotC}}$成立。

【题外话：如果要这么想和做的话，应该是有办法的：我们可以定义，过 A 点作球面的切线，此切线同时也是∠A 的角平分线，此切线上的两个方向的向量中，与 ka→A 向量，即与 Z 轴正半轴，夹角小于π/2 的那个向量，它所指方向上的球面三角形

即为面积 $S>AR^2$的球面三角(而另一个在 z 轴上的投影为负的切平分线上的切向量，它的所指方向即为 $S<AR^2$的球面三角所在的方向)。——另一种等价但更优的判断方法为：在平面 BOC 内，过 O 点作⊥∠BOC 的角平分线的垂线 B2C2(C2 像 C1 一样，在与 C 隔了个 B 的半圆上，同理 B2)，将 BOC 圆面分成两个半圆区域，若点 ka 落在 B、C 所在的半圆区域，则对应的▵ABC 的 $S<AR^2$，若落在另一个半圆区域，则 $S>AR^2$。——根据这一点，对于 $S>AR^2$的球面三角，Ka 便更正为在 ka→O 方向上了，则 ha、x 轴、y 轴、投影 gb、gc、两个 Rt▵中的 gb′、gc′、B′、C″，(的定义)便跟着 Ka 的新定义而对应着改变即可($S<AR^2$的球面三角的各个特征值保持原有定义不变)，那么之前成立的所有结论，都将无一例外地成立，因为在这样的定义下，Ka 的位置将不会出现④. 落在劣弧$\widehat{B1C1}$和①、②中的落在劣弧$\widehat{C2C1}$(不包含 C1)、劣弧$\widehat{B2B1}$(不包含 B1)所描绘的情况，因而将不会有 **gb+gc=a-2π·a°**、gb+gc=a-2π出现，而只会有 **gb+gc=a**、gb+gc=a 这样唯一形式的等式成立。因而 tangb=sinha·cotB/cosc、tangc=sinha·cotC/cosb、$\tan a=\frac{\sin ha\cdot(\cot B\cdot\cos b+\cot C\cdot\cos c)}{\cos b\cdot\cos c-\sin^2 ha\cdot\cot B\cdot\cot C}$更应该恒成立了，同样成立的还有在这样的定义下的 $S=\int_0^{\pi-\mathrm{asin}(\sin c\cdot\sin B)} R^2\cdot\mathrm{atan}\left(\frac{\sin ha\cdot(\cot B\cdot\cos b+\cot C\cdot\cos c)}{\cos b\cdot\cos c-\sin^2 ha\cdot\cot B\cdot\cot C}\right)\cdot dha$。——可见我们如若牺牲了定义上的简单，便能换来了接下来的工作的容易。】

8. "球面三角形面积及其对应锥形空间的体积"

在第 7.点中，我们尝试着用积分的方法表示出了球面三角形的面积，对比球面面积的得来方式之一$\int_0^{\pi}(2\pi R\cdot\sin\theta)\cdot(R\cdot d\theta)=-\cos\theta\cdot 2\pi R^2|_0^{\pi}=4\pi R^2$，我们便可知之前所做的工作所算出的结果应该是正确的。但这种思路下的表达式异常繁琐，还会因积分上限的取值而有两种形式，并且这个积分运算工程量浩大——重重原因中的任何一个都能打消了我们使用它的念头，此时我们便得从另外的角度想象一下——是否有更好更针对(而不是像积分那样的普适的方法)的小方法对待这个小问题：还记得之前"突然冒出来的"AR^2吗？现在我们就来解释解释它是什么以及它的来源：这源于一个"橘子瓣"的面积求法：$4\pi R^2\cdot\frac{A}{2\pi}=2AR^2$，其中的$4\pi R^2$表示球面面积，$\frac{A}{2\pi}$表示这样的一个"橘子瓣"的角 A 占该顶点 A 处的圆周角 2π的比例。

当两个大圆相交时，构成了一对、两个"橘子瓣"；而当三个大圆相交时，构成了三对、六个"橘子瓣"，同时生成了 8 个锥形空间及其所对应的 8 个球面三角形。在这样的 8 个球面三角形中任取一个，记为▵ABC，在它对面一定有一个它所关于 O 点对称的球面三角形，将其记为▵A′B′C′，其中 A′、B′、C′分别与 A、B、C 关于 O 点对称。由对称性易知，S▵ABC=S▵A′B′C′。现以 A、B、C 为顶点的各对橘子瓣都各自有两对全等的球面▵，且每对橘子瓣的两对全等▵中，均有一对为▵ABC 和▵A′B′C′。那么若将以上文字用面积来表述的话就有：设 A 点所对应的一对橘子瓣的面积为S_A，其中 S▵ABC

关于其所在的那个橘子瓣的面积的补集为$S_{A补}$，则$S_A = 4AR^2 = 2S\triangle ABC + 2S_{A补}$，则将三对橘子瓣的面积相加即有：$S_A + S_B + S_C = 4AR^2 + 4BR^2 + 4CR^2 = (2S\triangle ABC + 2S_{A补}) + (2S\triangle ABC + 2S_{B补}) + (2S\triangle ABC + 2S_{C补})$，又因$S_{球面} = 2S\triangle ABC + 2S_{A补} + 2S_{B补} + 2S_{C补} = 4\pi R^2$，则$4AR^2 + 4BR^2 + 4CR^2 = 4S\triangle ABC + 4\pi R^2$，则$S\triangle ABC = (A + B + C - \pi)R^2$，若我们定义球面剩余 E=$A + B + C - \pi$，则结论可进一步表示为：$S\triangle ABC = R^2 \cdot E$。

对比球体体积的得来方式之一：$\int \frac{1}{3} \cdot R \cdot dS = \frac{1}{3} \cdot R \cdot S = \frac{1}{3} \cdot R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$【这里可以 help 注明一下这里的$\frac{1}{3}$是怎么来的：对于任意一个由点状放射源所引起的面积比$\frac{S(h)}{S(H)}$=相似比的平方$\frac{h^2}{H^2}$的椎体体积：$\int_0^H S(h) \cdot dh = \int_0^H \frac{S(H) \cdot h^2}{H^2} \cdot dh = \frac{1}{3} \cdot \frac{S(H)}{H^2} h^3 |_0^H = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S(H)$】，我们可以类似地得到球面三角形所对应的锥形空间的体积=$\int \frac{1}{3} \cdot H \cdot dS(H) = \int \frac{1}{3} \cdot R \cdot dS = \frac{1}{3} \cdot R \cdot S = \frac{1}{3} \cdot R \cdot R^2 \cdot E = \frac{1}{3} \cdot E \cdot R^3$，这便是我们的结论：球面三角形所对应的锥形空间的体积为：$\frac{1}{3} \cdot E \cdot R^3$，其中 E=$A + B + C - \pi$。

二. "球面三角" 与 "矢量代数"

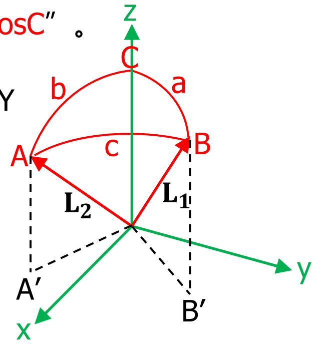
——各自的投影互为对方于另某个方向上的投影：

这两者的关系，至少在"球面三角"所局限于的三维空间上，联系甚是密切。——接下来我们就将以"球面三角的部分结论向矢量代数这个空间实体的演化"为主线，介绍"矢量代数中是如何蕴含参杂着球面三角的成分"，以及"球面三角中又如何占有了矢量代数的一部分领土"的，意在让各位体会一下人类所构筑的两个数学城堡，在新的地壳运动中(新的思维模式下)，是如何肩并肩走到了一起的——数学王国内部的和谐即将被你的智慧所发掘：

I.点积

接下来的一整串思想起源于"类比"：类比平面直角坐标系中的$L_1 \cdot L_2 \cdot \cos\triangle\theta = L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) = L_1 \cdot L_2 \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) = (L_1 \cdot \cos\theta_1)(L_2 \cdot \cos\theta_2) + (L_1 \cdot \sin\theta_1)(L_2 \cdot \sin\theta_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{L_2}$【最后一个"="表示"定义

为”】，而在空间直角坐标系中是否有类似的结论$\mathbf{L_1 \cdot L_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$呢？这时我们所用到的工具是比 $\cos\triangle\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$ 稍微更高级一点点的：球面三角中的——“余弦定理(边)”：“cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC”。



如右图所示：C 在 z 轴上，作 AA′⊥ XOY 面于 A′，BB′⊥ XOY 面于 B′，并记 $\mathbf{OA} = \mathbf{L_2}$、$\mathbf{OB} = \mathbf{L_1}$，$OA' = d_zA$、$OB' = d_zB$。那么这时在△ABC 中用余弦定理(边)即可有：cosc=cosa·cosb+sina·sinb·cosC

于是：$L_1 \cdot L_2 \cdot \cos c = (L_1 \cdot \cos a) \cdot (L_2 \cdot \cos b) + (L_1 \cdot \sin a) \cdot (L_2 \cdot \sin b) \cdot \cos C$，

即有$L_1 \cdot L_2 \cdot \cos c = z_1 \cdot z_2 + d_zB \cdot d_zA \cdot \cos C = z_1 \cdot z_2 + (x_1x_2 + y_1y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \mathbf{L_1 \cdot L_2}$。

II.叉积

类比$L_1 \cdot L_2 \cdot \sin\triangle\theta = L_1 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) = L_1 \cdot L_2 \cdot (\sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_1) = (L_1 \cdot \cos\theta_1)(L_2 \cdot \sin\theta_2) - (L_1 \cdot \sin\theta_1)(L_2 \cdot \cos\theta_2) = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = \mathbf{L_1 \times L_2}$【倒数第二个“=”表示“定义为”】，在空间坐标系中的叉积是怎么推导并规定出来的呢?

1.大小

①.Way 01

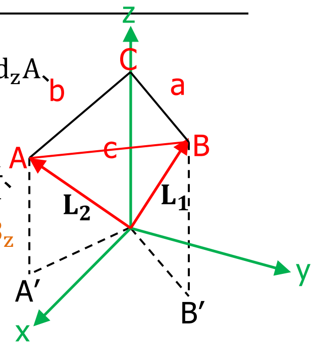
先给出一个接受起来难度较小的方法：1.设平面$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$与三坐标轴所截，并设 A=(a,0,0)、B=(0,b,0)、C(0,0,c)，则在 ABCO 四点所构成的四面体中，记 S△ABC=S、S△AOB=Sz、∠<C-AB-O>=∠z，那么易得 Sz=S·cosz，同理，Sx=S·cosx、Sy=S·cosy，那么又因为 S△AOB·cosz+S△BOC·cosx+S△COA·cosy=S△ABC，即 Sz·cosz+Sx·cosx+Sy·cosy=S，所以有(S·cosz)·cosz+(S·cosx)·cosx+(S·cosy)·cosy=S，即得到了$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$。现在在这个方程两边同时乘以 S′的平方后开根号，此时的 S′为空间中在任意位置以任意角度放置的一个封闭的平面图形的面积，那么此图形的面积 $S' = \sqrt{(S' \cdot \cos x)^2 + (S' \cdot \cos y)^2 + (S' \cdot \cos z)^2} = \sqrt{(S'x)^2 + (S'y)^2 + (S'z)^2}$，即用文字表述便是：空间中任何一个平面图形的面积，等于此图形分别在 XOY 面、YOZ 面、ZOX 面的投影图形的面积的平方和的方根值。

【这里有必要介绍一下$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 它的另一个来源、推导途径、等价方程：你是不是觉得它和向量的方向余弦所满足的等式$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 在形式上非常像？——嗯，这就是我想说的，它们不仅“相似”，而且“相等”，即描绘了两种等价的景象：假设 S′所对应的封闭图形所在的平面的法向量为 **L**，并设 **L** 与 **i** 夹角为α，与 **j**、**k** 夹角分别为β、γ，则可以证明$|\cos\alpha|=|\cos x|$、$|\cos\beta|=|\cos y|$、$|\cos\gamma|=|\cos z|$，所以$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 的成立不言而喻。】

当我们有了 $S'=\sqrt{(S'x)^2+(S'y)^2+(S'z)^2}$后，我们让 S′=空间中任意三点 A′、B′、C′所构成的三角形的面积的两倍$=L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta$【其中$L_1\cdot L_2$为三点两两所连的线段中任意两条，$\vartriangle\theta$为其夹角$\in[0,\pi]$】，那么原方程变为$L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta=\sqrt{(S'x)^2+(S'y)^2+(S'z)^2}=$ $=\sqrt{\left(L_{1x}\cdot L_{2x}\cdot\sin\vartriangle\theta x\right)^2+\left(L_{1y}\cdot L_{2y}\cdot\sin\vartriangle\theta y\right)^2+\left(L_{1z}\cdot L_{2z}\cdot\sin\vartriangle\theta z\right)^2}$，而我们知道在 YOZ 面上，$\left(L_{1x}\cdot L_{2x}\cdot\sin\vartriangle\theta x\right)^2=(\mathbf{L_{1x}}\times\mathbf{L_{2x}})^2$【注意，这个等式不能写成“$L_{1x}\cdot L_{2x}\cdot\sin\vartriangle\theta x=\mathbf{L_{1x}}\times\mathbf{L_{2x}}$”，由于$\vartriangle\theta$、$\vartriangle\theta x$、$\vartriangle\theta y$ 等$\in[0,\pi]$，而“$\mathbf{L_{1x}}\times\mathbf{L_{2x}}$”中的角度$\in R$，所以不会有“$L_{1x}\cdot L_{2x}\cdot\sin\vartriangle\theta x=\mathbf{L_{1x}}\times\mathbf{L_{2x}}$”恒成立。】，同理 ZOX、XOY 面，则代入它们即有$L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta=\sqrt{(\mathbf{L_{1x}}\times\mathbf{L_{2x}})^2+\left(\mathbf{L_{1y}}\times\mathbf{L_{2y}}\right)^2+(\mathbf{L_{1z}}\times\mathbf{L_{2z}})^2}=$ $\sqrt{\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)^2}=|\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}|$【最后一个“=”表示“定义为”】，由于在二维情形下$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}=L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta$虽然是个数，但因$\vartriangle\theta$的正负和大小而有正负之分，所以我们认为三维情况下的$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$，也得有正负或者方向的相同与相反之分，由于它“没法有正负之分”，所以只能有方向之分，即$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$理应是个向量【这仅仅是个初步推理】，所以我们在三维情况下不定义$L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta=\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$，而是$L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta=|\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}|$【由于还不知道三维中的$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$是不是向量，所以这里的双竖线目前更偏向绝对值意义，而不是纯粹的模】，并且规定其中$\vartriangle\theta\in[0,\pi]$【注意，二维中$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$**是个数，且其值直接就**$=L_1\cdot L_2\cdot\sin\vartriangle\theta$，且$\vartriangle\theta\in R$】；而关于三维中$\mathbf{L_1}\times\mathbf{L_2}$的方向，我们之后来做定义。

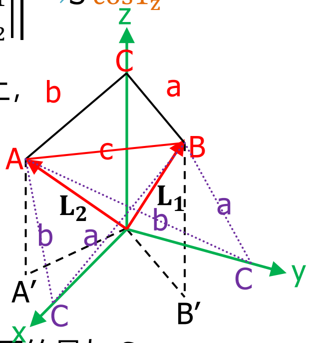
②.Way 02

第二个方法是纯粹地利用球面三角做的，有相当的难度【可能你会说：何必为了它搞那么麻烦呢——确实，醉翁之意不在酒，它的价值在于过程中应用的是新的思维方式，并且引领新的公式出现】，请自行斟酌是否观看和观看程度，不过鉴于其中有许多思想方法值得借鉴以及路途中有些重要的结论出现，所以各位可以鼓励自己迎难而上【其中所涉及到的球面三角中的公式为：“正弦定理”以及“五元素公式(边)”：“sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC”】。



如图建立一个右手系：设$\mathbf{L_2=OA}$、$\mathbf{L_1=OB}$，同样有 OA′=d_zA、OB′=d_zB，且设$\cos_zB=\frac{x1}{d_zB}$、$\sin_zB=\frac{y1}{d_zB}$，Additionally，设$\cos B_z$为以 z 为纵轴时的 cosB、设$\sin_az=\sin a=\frac{d_zB}{L_1}$，可知$\cos_zB\cdot\sin_az=\frac{x1}{L1}$、$\sin_zB\cdot\sin_az=\frac{y1}{L1}$。并且为了简化，我们把$d_zB$、$\cos_zB$、$\sin_az$、$\cos B_z$分别记为$d_z1$、$\cos_z1$、$\sin_1z$、$\cos1_z$。

根据五元素公式(边)：sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC⟹$(L_1\cdot L_2\cdot\text{sinc})\cdot\text{cosB}=(L_1\cdot\text{sina})\cdot(L_2\cdot\text{cosb})-(L_1\cdot\text{cosa})\cdot(L_2\cdot\text{sinb})\cdot\text{cosC}$⟹$S\cdot\cos B_z=d_zB\cdot z_2-z_1\cdot d_zA\cdot\cos C$⟹$S\cdot\cos1_z=\frac{1}{d_z1}\cdot[d_z^21\cdot z_2-z_1\cdot(d_z1\cdot d_z2\cdot\cos C)]$⟹$S\cdot\cos1_z=\frac{1}{d_z1}\cdot[(x_1^2+y_1^2)\cdot z_2-z_1(x_1x_2+y_1y_2)]$⟹$S\cdot\cos1_z=\frac{1}{d_z1}\cdot[x_1(x_1z_2-z_1x_2)-y_1\cdot(z_1y_2-y_1z_2)]$⟹$S\cdot\cos1_z=\cos_z1\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}-\sin_z1\cdot\begin{vmatrix}z_1&y_1\\z_2&y_2\end{vmatrix}$⟹$S\cdot\cos1_z=\begin{vmatrix}\cos_z1&\sin_z1\\ \begin{vmatrix}z_1&y_1\\z_2&y_2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}$⟹$S\cdot\cos1_z=\begin{vmatrix}\cos_z1&\sin_z1\\ \begin{vmatrix}y_2&z_2\\y_1&z_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}z_2&x_2\\z_1&x_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$，同样的道理，如果我们的 C 点在 x 轴或者 y 轴上，



我们还将有 S·$\cos1_x=\begin{vmatrix}\cos_x1&\sin_x1\\ \begin{vmatrix}z_2&x_2\\z_1&x_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_1&y_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$、S·$\cos1_y=\begin{vmatrix}\cos_y1&\sin_y1\\ \begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_1&y_1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}y_2&z_2\\y_1&z_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$、以及 S·$\cos2_z=\begin{vmatrix}\cos_z2&\sin_z2\\ \begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}$。【注，S·$\cos1_x$、S·$\cos1_y$分别表示当 C 点在 x 轴和 y 轴上时的，S 朝 COB 平面的投影面积(有正负)，均用的是与 S·$\cos1_z$相同的公式：sinc·cosB=sina·cosb-cosa·sinb·cosC；而 S·$\cos2_z$表示 C 点在 z 轴上时，S 朝 COA 平面的投影面积，所用公式为 sinc·cosA=sinb·cosa-cosb·sina·cosC】

各位可以从中发现其中的轮换规律：S·$\cos m_n=\begin{vmatrix}\cos_nm&\sin_nm\\ \begin{vmatrix}p_{\bar{m}}&n_{\bar{m}}\\p_m&n_m\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}n_{\bar{m}}&q_{\bar{m}}\\n_m&q_m\end{vmatrix}\end{vmatrix}$，其中“$\bar{m}$”表示“非 m”(m 和$\bar{m}$的值只从 1 或 2 中取)，且 p-n-q 满足右手系下的 x-y-z 轮换顺序，即 p-n 和 n-q 分别为 x-y、y-z、z-x 中的一种。【利用之前所导出的(or “之后将导出的”)S 的公式，这个公式也可以用来求$\cos m_n$】在知晓了 S·$\cos m_n$后，下面我们仅需要知道 S·$\sin m_n$即可知道 S 的值了。

根据球面三角中的正弦定理：“$\frac{\text{sinc}}{\text{sinC}}=\frac{\text{sinb}}{\text{sinB}}$”有：$\text{sinc}\cdot\text{sinB}=\text{sinb}\cdot\text{sinC}$⟹$(L_1\cdot L_2\cdot\text{sinc})\cdot\text{sinB}=L_1\cdot(L_2\cdot\text{sinb})\cdot\text{sinC}$⟹$S\cdot\sin1_z=\frac{d_z1}{\text{sina}}\cdot d_z2\cdot\text{sinC}$⟹$S\cdot\sin1_z=\frac{1}{\sin_1z}\cdot(d_z1\cdot d_z2\cdot\text{sinC})$⟹$S\cdot\sin1_z=\frac{1}{\sin_1z}\cdot\left|\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_1&y_1\end{vmatrix}\right|$【第二层竖线是指绝对值，所以你也可以写成$\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right|$，但不推荐，原因是为了对应 S·$\cos1_z$的展开式的形式，等下你就可以看见为什么了】，这时，它的轮换规则显而易见：S·$\sin m_n=\frac{1}{\sin_nm}\cdot\left|\begin{vmatrix}p_{\bar{m}}&q_{\bar{m}}\\p_m&q_m\end{vmatrix}\right|$，其中 p-q 分别为其中不包含 n 的 x-y、y-z、z-x 中的一种。

接下来我们便可以利用 $S\cdot \sin m_n=\frac{1}{\sin_n m}\cdot\left\|\begin{vmatrix} p_{\bar m} & q_{\bar m} \\ p_m & q_m\end{vmatrix}\right\|$下的 $S\cdot \sin 1_z=\frac{1}{\sin_1 z}\cdot\left\|\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right\|$，以及 $S\cdot\cos m_n=\left\|\begin{matrix}\cos_n m & \sin_n m \\ \begin{vmatrix} p_{\bar m} & n_{\bar m} \\ p_m & n_m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_{\bar m} & q_{\bar m} \\ n_m & q_m\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|$下的 $S\cdot\cos 1_z=\left\|\begin{matrix}\cos_z 1 & \sin_z 1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|$，用它俩的平方和，探索得到 S 的最终表达式是什么：①.$(S\cdot\sin 1_z)^2+(S\cdot\cos 1_z)^2=\left\|\begin{matrix}\cos_z 1 & \sin_z 1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\end{matrix}\right\|^2+\frac{1}{\sin^2{}_1 z}\cdot\left\|\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right\|^2$；现引入$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=x_1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}+y_1\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}+z_1\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=0$，进一步变换有$0=\frac{z_1}{L_1}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}+\frac{x_1}{L_1}\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}+\frac{y_1}{L_1}\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}$，即有$0=\cos_1 z\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}+\cos_z 1\cdot\sin_1 z\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}+\sin_z 1\cdot\sin_1 z\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}$，移项，两边同除以$\sin_1 z$并两边平方，即有$\frac{\cos^2{}_1 z}{\sin^2{}_1 z}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}^2=\left(\cos_z 1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}+\sin_z 1\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\right)^2$，再移项回来，即得到了我们需要的另一个式子：②.$0=-\frac{\cos^2{}_1 z}{\sin^2{}_1 z}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}^2+\left(\cos_z 1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}+\sin_z 1\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\right)^2$。

现将①.左边合并，右边展开，即有：①'.$S^2=\frac{1}{\sin^2{}_1 z}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}^2+\cos^2{}_z 1\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}^2+\sin^2{}_z 1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}^2-2\cdot\sin_z 1\cdot\cos_z 1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}$，另外地，我们也将②.式子右边展开，即有：②'.$0=-\frac{\cos^2{}_1 z}{\sin^2{}_1 z}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}^2+\sin^2{}_z 1\cdot\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}^2+\cos^2{}_z 1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}^2+2\cdot\sin_z 1\cdot\cos_z 1\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}$，现将①'、②'两式对应相加，即得到了$S^2=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1\end{vmatrix}^2$。这便是用球面三角的方法推导出的，三维空间中，叉积的模的表示方法。

2.方向

首先由于$L_1\cdot L_2\cdot\sin\triangle\theta=\sqrt{\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)^2}$方程右边让我们不禁联想到三维向量的模；其次，不相干地，我们在求(x_1,y_1,z_1)与(x_2,y_2,z_2)所确定的平面的法向量时，用现阶段已知的，三维向量的内积=0 列式：(a,b,c)·(x_1,y_1,z_1)=0、(a,b,c)·(x_2,y_2,z_2)=0，⟹得到一个含有两个方程的三元一次方程组$x_1 a+y_1 b+z_1 c=0$、$x_2 a+y_2 b+z_2 c=0$，⟹进一步得到$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2\end{vmatrix}b+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix}c=0$、$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}a+\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2\end{vmatrix}c=0$，⟹进一步得到$\frac{c}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix}}$、$\frac{c}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}}=\frac{a}{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}}$，⟹进一步得到比例式$\frac{a}{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}}=n$，发现(a,b,c)=n·$\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$【当然你也可以用$\begin{vmatrix} n\cdot x_1 & n\cdot y_1 & n\cdot z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$=0 和$\begin{vmatrix} n\cdot x_2 & n\cdot y_2 & n\cdot z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$=0 的展开，或者用线性代数的成熟力

量来"发现"它。但利用越低级的数学手段，越能让人信服，这些推导不是已知结论后的，被先入为主的思想所完全主导的毫无意义的思维活动。】——而当 n=±1 时，此向量的模长正好$=L_1 \cdot L_2$·sin△θ(△θ∈[0,π])，非常适合作为的$L_1 \times L_2$的定义。——那 n 是取+1 还是-1 呢？：由于三个基向量如果可以纳入体系的话，必须无矛盾地纳入所建立的体系，且又因它们两两之间满足(即发现它们可以纳入体系)：|**k**|=|**i**|·|**j**|·sin△θ (△θ∈[0,π])，所以我们首先得让新创造的叉乘规则适用于三个基向量：由于在二维平面上 **i**×**j**=|**i**|·|**j**|·sin($\theta_2 - \theta_1$)= 1·1·sin$\frac{\pi}{2}$=+1>0，所以我们得让三维空间中 **i**×**j** 得到指向 z 轴正向的基向量 **k**(0,0,1)，即有 **k**=**i**×**j**(而不是 **k**=**j**×**i**)，又因我们刚刚规定了待定的叉乘规则为 **i**×**j**=$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$=(a,b,c)=n·($\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$)，所以能使得 **k**=**i**×**j**，即能使得(0,0,1)=(1,0,0)×(0,1,0)成立的待定系数 n 的值为：(a,b,c)=(0,0,1)=$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$=(1,0,0)×(0,1,0)=n·($\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$)，解得 n=+1。

【注意：以上过程中并没有暗示 **i**、**j**、**k** 构成右手系：如果仅言及 (1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)，这三个两两正交的基向量，那么将有空间上的手性异构体——如果它们构成左手系的话，并且在规定叉乘规则的时候也规定了 **k**=**i**×**j**，那么解出来的 n 值仍然是 n=+1，即符合 **k**=**i**×**j** 的左手系，仍然有着同样的叉乘规则的数学表示形式：$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$= ($\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$)，只不过等下我们会看到，在研究导出了的叉乘规则后，在进一步研究方程的性质(外在直观表现、方向决定机制)时，这样的满足 **k**=**i**×**j** 的左手系的叉乘表现为左手定则，而满足 **k**=**i**×**j** 的右手系满足右手定则，然而它们的叉乘规则的数学表示形式是不变的。

有趣的是，若在左手系或者右手系中，规定了的是 **k**=**j**×**i**，那么 n 的值均会变为-1，即叉乘规则将均被改变成$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$=−($\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$)=($\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}$)，并且右手系下的叉乘规则将体现为左手定则，而左手系下的叉乘规则将体现为右手定则。——由于历史的连续性，人类在笛卡尔坐标系的创立之初，就已经 adapt to 适用了/adopt 采纳了右手性的平面直角坐标系，所以接下来人类历史中的数学中的这部分，在时空中的发展轨迹就已经注定(已然成为必然)了。——但是我得作为上帝，或者另一个平行世界的子民，考虑并罗列一下其他文明的外星人(which 是我所可能成为的高级生命体)所可能的数学发展历程。】

下面我们就开始研究研究，在 **k**=**i**×**j** 的右手系下，即在叉乘规则为$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$=$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$的右手系下，叉乘规则的数学表示形式是如何决定了两向量叉乘所得的向量的相对空间位置和方向的。设 **a**=$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$，则$a_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,

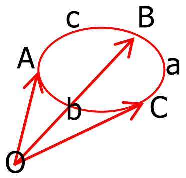
即$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，即$|\mathbf{a}|\cdot\cos<\mathbf{a},\mathbf{i}>=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$，即$\cos<\mathbf{a},\mathbf{i}>=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{|\mathbf{a}|}=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\left|\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right|}\cdot\frac{\left|\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right|}{|\mathbf{a}|}=\frac{\sin\triangle\alpha}{|\sin\triangle\alpha|}\cdot\frac{Sx}{S}$(其中△α在 YOZ 平面上，且$\triangle\alpha=\alpha_2-\alpha_1\in R$)=$\frac{\triangle\alpha'}{|\triangle\alpha'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},YOZ>$(其中$\triangle\alpha'=\triangle\alpha+2k\pi$，且$\triangle\alpha'\in[-\pi,\pi]$)【或者 put it in this way：$\cos<\mathbf{a},\mathbf{i}>=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{|\mathbf{a}|}=\frac{d_x1\cdot d_x2\cdot\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{S}=\frac{\mathbf{d_x1}\times\mathbf{d_x2}}{S}$，其中$\mathbf{d_x1}\times\mathbf{d_x2}$符合 YOZ 平面上的叉乘规则，是个可正可负的数。】

综上，$\cos<\mathbf{a},\mathbf{i}>=\frac{\triangle\alpha'}{|\triangle\alpha'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},YOZ>$(其中$\triangle\alpha'=\triangle\alpha+2k\pi$，且$\triangle\alpha'\in[-\pi,\pi]$)，或者有$\cos<\mathbf{a},\mathbf{i}>=\frac{\mathbf{d_x1}\times\mathbf{d_x2}}{S}$(其中$\mathbf{d_x1}\times\mathbf{d_x2}$符合 YOZ 平面上的叉乘规则，是个可正可负的数。)。由于$\cos<\mathbf{a},\mathbf{j}>$、$\cos<\mathbf{a},\mathbf{k}>$同理，所以 1.$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=(\frac{\triangle\alpha'}{|\triangle\alpha'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},YOZ>,\frac{\triangle\beta'}{|\triangle\beta'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},ZOX>,\frac{\triangle\gamma'}{|\triangle\gamma'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},XOY>)\cdot|(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)|$ 2.$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=((y_1,z_1)\times(y_2,z_2),(z_1,x_1)\times(z_2,x_2),(x_1,y_1)\times(x_2,y_2))=(0,y_1,z_1)\times(0,y_2,z_2)+(x_1,0,z_1)\times(x_2,0,z_2)+(x_1,y_1,0)\times(x_2,y_2,0)$。

由 1.我们知$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)$的方向余弦(l,m,n)=$(\frac{\triangle\alpha'}{|\triangle\alpha'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},YOZ>,\frac{\triangle\beta'}{|\triangle\beta'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},ZOX>,\frac{\triangle\gamma'}{|\triangle\gamma'|}\cdot\cos<\mathit{\Pi},XOY>)$，而“△α'的正负决定了 l 的正负”这句话本身就是，符合这样的叉乘规则的右手系，中的“右手定则”作为一种映射关系的一种体现。——因而将三种同形式的映射后得到的结果的矢量合成后，就体现为了“△θ'的正负决定了 k'的正负”这样的右手系下的右手定则。——同理，正如之前所提到过的，若同样的叉乘规则放在同为 **k=i×j** 的左手系下，那么同样的数学方程将在左手系中体现为左手定则。

III.三重矢积

1.模长



如图所示，我们直接开始推导三重矢积的大小，期间会出现一个非常棒的球面三角新公式，在给定的期待中阅读吧：$sin^2a\cdot cos^2c=sin^2a\cdot cos^2c\Longrightarrow(1-cos^2a)\cdot cos^2c=sin^2a\cdot(1-sin^2c)\Longrightarrow cos^2c=sin^2a-sin^2a\cdot sin^2c+cos^2a\cdot cos^2c\Longrightarrow cos^2b+cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa=sin^2a-[sin^2a\cdot sin^2c-(cos^2b+cos^2a\cdot cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa)]\Longrightarrow cos^2b+cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa=sin^2a-[sin^2a\cdot sin^2c-(cosb-cosa\cdot cosc)^2]$

现又因余弦定理(边)：cosb=cosa·cosc+sina·sinc·cosB，我们有$(cosb-cosa\cdot cosc)^2$=$(\mathrm{sina}\cdot\mathrm{sinc}\cdot\mathrm{cosB})^2$，于是有$cos^2b+cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa=sin^2a-[sin^2a\cdot sin^2c-(\mathrm{sina}\cdot\mathrm{sinc}\cdot\mathrm{cosB})^2]=sin^2a-(\mathrm{sina}\cdot\mathrm{sinc}\cdot\mathrm{sinB})^2=sin^2a\cdot(1-(\mathrm{sinc}\cdot\mathrm{sinB})^2)$，又因正弦定理 sinha=sinb·sinC=sinc·sinB，我们将后者 sinha =sinc·sinB 代入其中即有：$cos^2b+cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa=sin^2a\cdot(1-\sin^2\mathrm{ha})$ $=sin^2a\cdot\cos^2\mathrm{ha}$，现在我们尚未涉及任何与矢量代数有关的内容，便已经得到了一个 marvellous 的球面三角新公式："$cos^2b+cos^2c-2cosb\cdot cosc\cdot cosa=sin^2a\cdot\cos^2\mathrm{ha}$"

【注：这里的 ha 为 P12 里的新定义的 ha，可以有>$\frac{\pi}{2}$和<$\frac{\pi}{2}$的两种取值。】

在这个公式两边同时乘以$(\mathrm{abc})^2$，并且得如下分配 abc，即有：$(a\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{cosb})^2\cdot\mathrm{b}^2+(a\cdot\mathrm{b}\cdot\mathrm{cosc})^2\cdot\mathrm{c}^2-2(a\cdot\mathrm{c}\cdot cosb)\cdot(a\cdot b\cdot cosc)\cdot(b\cdot c\cdot cosa)=[a\cdot(b\cdot c\cdot\mathrm{sina})\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\mathrm{ha})]^2$，即有$[(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]^2=[\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$，即有三重矢积的模长：$|\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=|(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}|$

2.方向(罗辑的力量)

设向量$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$的方向为 z 轴方向，$\mathbf{a_z}$为向量 **a** 到$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$所在平面的投影向量。则不论$\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$还是$(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$，由聂比尔定则可得以下结论：$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}$=|a|·|c|·cos<**a**,**c**>=|a|·|c|·cos<**a**,$\mathbf{a_z}$>·cos<$\mathbf{a_z}$,**c**>=|$\mathbf{a_z}$|·|c|·cos<$\mathbf{a_z}$,**c**>=$\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c}$，所以有$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}$=$\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c}$，那么不论$\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$的表达式是二者其一中的哪个——均将有：$\boldsymbol{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a_z}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$。

如果我们把类似于 cos<$\mathbf{a_z}$,**c**>的，"$\mathbf{a_z}$与 **c**"在同一个平面的，向量夹角<$\mathbf{a_z}$,**c**>记为$(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})$，那么接下来便有：$\mathbf{a_z}\times[(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]=(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a_z}\times\mathbf{b})-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a_z}\times\mathbf{c})=[\mathrm{a_z}\cdot\mathrm{c}\cdot\cos(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})][\mathrm{a_z}\cdot\mathrm{b}\cdot\sin(\mathrm{b}-\mathrm{a_z})]-[\mathrm{a_z}\cdot\mathrm{b}\cdot\cos(\mathrm{b}-\mathrm{a_z})][\mathrm{a_z}\cdot\mathrm{c}\cdot\sin(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})]=\mathrm{a_z^2}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}\cdot[\sin(\mathrm{b}-\mathrm{a_z})\cdot\cos(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})-\cos(\mathrm{b}-\mathrm{a_z})\cdot\sin(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})]=\mathrm{a_z^2}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}\cdot\sin[(\mathrm{b}-\mathrm{a_z})-(\mathrm{c}-\mathrm{a_z})]=\mathrm{a_z^2}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}\cdot\sin[\mathrm{b}-\mathrm{c}]=\mathrm{a_z^2}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}$【注：这里利用的是平面上的叉积规则，即这里的二维叉积的结果为一个可正可负的值。】【其实这里就已经可以说$\mathbf{c}\times\mathbf{b}$与$\mathbf{a_z}\times[(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]$同向了，但怕各位说我混淆了平面上的叉积结果和三维中的叉积结果，我们得再走一步。】

又因$\mathbf{a_z}$与$(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$共平面，且设向量**θ**=$(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$，那么<$\mathbf{a_z}$,**θ**>=$(\theta-\mathrm{a_z})$，则接着有$\mathbf{a_z}\times[(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]=\mathrm{a_z}\cdot|(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}|\cdot\sin(\theta-\mathrm{a_z})$，那么结合上一段的结论，即有$\mathrm{a_z}\cdot|(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}|\cdot\sin(\theta-\mathrm{a_z})=\mathrm{a_z^2}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}\cdot\sin(\mathrm{b}-\mathrm{c})$，即有$|(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}|\cdot\sin(\theta-\mathrm{a_z})=\mathrm{a_z}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{b}\cdot\sin(\mathrm{b}-\mathrm{c})$。由于其中的$|(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a_z}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}|$、$\mathrm{a_z}$、c、b均大于 0，所以若将$(\theta-\mathrm{a_z})$和$(\mathrm{b}-\mathrm{c})$均±2k π后属于[-π,π]，那么此时$(\theta - a_z)$与$(b-c)$同号。【为了进一步确定$\boldsymbol{\theta}$在平面上的相对位置，我们可以利用$\mathbf{a_z} \cdot [(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] = (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c}) = 0$，将其确定下来，接下来的操作(3).会用到它。】

(1).由于$(\theta - a_z)$与$(b-c)$同号，我们发现$\mathbf{a_z} \times \boldsymbol{\theta}$，即$\mathbf{a_z} \times [(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}]$同向于$\mathbf{c} \times \mathbf{b}$，那么又因$\mathbf{a_z} \times [\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]$也同向于$\mathbf{c} \times \mathbf{b}$，(2).且加上之前已证明的$|\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}|$，(3).并且$\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$与$(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$均在同一平面上并⊥$\mathbf{a_z}$，所以$\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$与$(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$同向，又因之前已经证明$|\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}|$，所以$\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$。所以有$\boldsymbol{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$。于是我们便得到了去模的结果：$\boldsymbol{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$。【这里的(1).其实也可以说成："像$(\theta - a_z)$与$(b-c)$同号即<$\mathbf{a_z}$, $(\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a_z} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$>与<$\mathbf{c}$,$\mathbf{b}$>同号，由于<$\mathbf{a_z}$,$\mathbf{a_z} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$>与<$\mathbf{c}$,$\mathbf{b}$>也同号"，这样或许更容易让人接受。】

IV.混合积、多重矢积、拉格朗日恒等式

这些公式的推导过程已经不需要再使用球面三角的结论了，利用之前所推导的几个基础的矢量代数中的定义和公式，便能深入下去。

三."狭义相对论":认知的禁域。——The final frontiers.

I.协议:关于合法语句的合法性的公认

1.事件与参考系

狭义相对论认为,所有事件,(若不属于物理规律的话),像所有物理规律一样,(由于)在不同惯性系的表述下,也仅仅在形式上不同而已。

一个事件,在一个可以穿梭于不同惯性系的观察者看来,总是同一个事件。也就是说,他通过对比不同量度标准下,同一个事件的不同数据,总会体会到前所未有的"和谐":不同参考系的同类型的数据们,总因跨参考系的映射而——"对应";而处于相同参考系的不同类型的数据们,总因跨参考系的映射而满足同一形式的方程。——对于描述任何一个事件,任何一个参考系的任意一种量度标准,都是有效(完备)且等效的。为了准确描述"等效"一词所隐含的"相同但又不同",我们采用"对应"这个词来表示,来同时表达"不同且相同"的矛盾心理:因量度标准不同所导致的不同的测量结果,却又最终因等效而相同。

2.时间与空间

时间坐标与空间坐标是一个事件在任何一个参考系的测量下的,两个看似彼此独立的,朝着自己参考系的时间轴和空间网格中投射的可量度的投影,这一组有序信息地址联合起来与某个事件一一对应,而为了使这种一一对应有效,我们在狭义相对论中还需对应地写出这组针对某个事件的时空数据,是在哪个参考系中得到的。

——以便那个可穿梭于任意参考系的观测者拿着某个事件的时空信息，不至于找不到能够应用它的地方。——要知道它们在狭义相对论中不会普适于所有参考系，即使经过奇怪的变换。——这是因为，上帝通过狭义相对论，似乎在告诉我们：尚已进化到能够瞥见这个世界的内核的曙光的各位，也是时候该明白：每一个或大或小的元素或集合，相对于任何或大或小的元素或集合，都是完全独立的，没有属从关系，没有全等，没有相似，没有旋转，没有镜像，所有非己的，全都是非己的，任何两个物体，都将是两个不同的物体，不存在“两个相同的物体”一说。——但仍是通过狭义相对论，我们又能找出坐标系变换的方程，它们又是因此相联系的——同一个上帝，同一个狭义相对论，不同的认识。既然上帝看上去是矛盾的，我们人类的矛盾认知也就并非不可原谅了：所以，用“相对独立”一词面临我们的困境还算比较合适吧。

3.同一事件的衡量标准

在叙述了“事件与参考系”、“时间与空间”以及它们各自内部的些许联系后，我们便开始以以上认识为基准，编写一些合法的说法：在伽利略 or 牛顿的认识中，以及在狭义相对论中的认识中，均有：若 A、B、C 分别为 3 个参考系，则认作 A、B、C 均有自己的原点和网格(平面直角坐标系或空间坐标系，我们主要讨论的是 2 维平面坐标系，以及将时间单独分离出来作为独立的一维数轴)；然而区别便来了：在牛顿时空中，A、B、C 的网格的单位长度(各个维度的)，不会因观测者选择身处哪个系而变化，且不会因相对运动状态而改变，总之，它们在所有的细节上均全等，不论你怎么想象。——而狭义相对论时空中，只有与观测者相对静止的参考系，它们的网格才能保持“原牛顿状”，即被观测的参考系的网格状貌，与相对于观测者所处的参考系的运动速度有关。但是，当你想以某系的角度观察某事件时，你既可以不必身处某系，又可以不必总是与某系(的原点)相对静止，甚至可以不必与该系保持匀速直线运动，——你只需要保证你所选择的那个某系的网格为标准状即可。这样说起来或许你不怎么好理解，甚至感到有点自相矛盾，不过这是在为了你接下来所必需的想象工作取消限制以及减轻负荷。可以这么说，这么做可行的原因仅仅是：你是一个观察观察者的观察者，所以这方面的想象无需受限也可合理。

三个跟着自己的原点平动的网格(空间的、二维的)共存于观测者的俯视视野，观测者选定某一个的网格为标准网格后，其余两个参考系的网格根据相对于 selected 的参考系的 V 相，进行对应的网格变化；此时三个系的原点均落在另外两个系的网格上，网格与网格间相互交盖地共存于观察者眼前。——此时，当我们在这幅图景上贴上了“于 selected A 系观察得到的图景”的标签后：便能以 A 的角度描述：“A 的原点在 B 网格上的速度方向和大小”、“B 的原点划过 A 网格的速度”、“C 的原点在 B

网格上的空间坐标、速度"等等。——细心的各位会发现这里的"两层看似相同的定义"会使得此和除此以外的文字描述很复杂和令人困惑：比如若我要浅显地表达"以A的网格为标准网格，B在C的网格上的速度"，文字会将其描述为："以A来看，以C来看的B的速度"(那么到底是以谁来看的呢？真的变浅显了吗？)，这就让人十分不解，但又不知道哪里出了问题(因为它确实是没有问题的)。——所以，为了让语言的表达更加简洁和准确，我们有必要将"以A为标准网格，B以C网格为标准度量出的速度"换个说法："A下，B于C的速度"。

同样的说法还有："B下，C于A的网格状况"、"{网格状况|B下，C于A}"、"{事件某|B下，C于A}"。由于你总是"有能力但没必要"把3个原点连同3个无限大的网格画出来，所以你既可以根据想象的需要以及不需要，来省略掉"无限大的网格"的在除原点周围以外的广大交错直线，也可以省略掉研究对象以外所不需要利用或察看的某些系的网格，在此我就不多说了，自己能体会到如何简单是好。

当你接受并理解了以上协议后，我将用以上所构筑的合法语句来描述狭义相对论的基本假设之一：任意事件，在任意参考系的量度下虽有不同的时空参数，但是这些形式上不同的参数，本质上描述了同一个事件；而若是"物理规律"的话，连形式都将相同。(即字母的填充物，其所代表的数值，可以均映射为另一个参考系下的，而方程仍成立)。下面便是一些我的合法语句：

作为"在不同参考系的量度下，事件K为同一事件"中，对"同一事件"的"同一性"的具体衡量，对某些合适的"事件K"，将有以下5条中的某条或某些等式成立：

i.{事件K|B下，A于B}={事件K|A下，A于B}

ii.{事件K|B下，A于B}={事件K|A下，A于B}={事件K|C下，A于B}

iii.{事件K|B下，A于B}={事件K|B下，B于A}

iv.{事件K|B下，A于B}={事件K|A下，B于A}

v.{事件K|B下，A于B}={事件K|B下，A于C}={事件K|B下，A于A}

II.第二假设：光速绝对；以及时间、空间的相对性，速度的绝对性，及其变换

由于事实给出了大量光速于各系均相等且为 c 的正面例子，并且无反例；所以我们 a.有理由“假设”光速不变，且于各种运动状态的系来说，是通用的“绝对”b.但由于举例论证不是公理，所以我们保留“假设”一词，即使没人相信有反例出现。(同样的道理，上一条“第一假设”也是基于这两点：a.例子，经验上，有理由 b.是例子，经验，无理由。)

由于光速不变，牛顿时空观便与它相悖，所以，我们创建狭义相对论的任务便是：修正 A、B、C 系的网格(包括时间轴刻度状况、空间网格密度)，使得新的速度的定义与[光速绝对]协调。由于光速 c∈速度 v=△x/△t=空间间隔/时间间隔=constant，所以我们得同时修正时间与空间观念，那么：

1.一些你所需要适应的铺垫

①.Introduction01

设“事件 K”=“空间刻度数”，则我们将“以 B 的网格为标准网格，B 在虚无空间中划过的某段路程，若体现为在 A 网格上所划过的某段路程，则若以 A 网格的刻度数来量度，这段路程等价于多少个 A 网格的刻度数”简记为：{空间刻度数|B 下，B 于 A}。【To help you understand this, 该大括号语句中，第二个字母 B 所在的位置(以下简称“第二个位置”)，其中的对象，不是“事件 K——空间刻度数”的所属对象(而是被观察者、事件执行者)，而第三个位置(即字母 A 所在的位置)中的对象才是其所属对象(是衡量者)。】

②.Introduction02

设“事件 K”=“时间刻度数”，则我们将“以 B 的网格为标准网格，B 在虚无空间中划过的某段路程，若体现为在 A 网格上所划过的某段路程，则这个事件所对应的这段虚无的时间，在 A 看来，以 B 的时间轴的刻度数来量度，等价于多少个 B 时间

轴的刻度数”简记为：{时间刻度数|B下，B于A}。【To make it more specific, 在此大括号语句中，第二个位置中的对象，是“时间刻度数”的所属对象】【Not to mention, 不要忘了，第一个位置中的对象，仅旨在提示拥有“标准的时间-空间网格”的对象是谁，即在谁的视角下察看事件的。】

可见当“事件K”=“时间刻度数”时，事件K满足“同一事件”以第v.点为路径所具象化的等式，即有{时间刻度数|B下，B于A}={时间刻度数|B下，B于C}={时间刻度数|B下，B于B}，其中的三个红色字母可以同时换成一个任意的其他参考系，连等式依然成立；并且其中的任意一个绿色字母，也可以换成任意一个其他参考系，连等式依然成立。——它们成立的理由是，或者说，将这个连等式翻译成白话文即为：在B看来，以任何参考系来看(即与这里的参考系的选择无关)，(任意的)某个确定的系所参与的事件所对应的时间间隔，在B的时间轴刻度的量度下，值相等。

③.Introduction03

设“事件K”=“非相对论相对运动速度”，则我们将“以自己(B)的网格为标准网格，对方(A)在单位自己(B)的时间刻度内，所划过了的自己(B)的网格的路程，若以自己(B)的网格刻度数来量度，等价于多少个自己(B)的网格刻度数”简记为：{非相对论相对运动速度|B下，A于B}。

可见{非相对论相对运动速度|B下，A于B}={空间刻度数|B下，A于B}/{时间刻度数|B下，B于B}，【注意：由于Introduction02，可知{时间刻度数|B下，B于B}也可写成{时间刻度数|B下，B于A}】即表示在自己(B)的认知里，单位自己(B)的时间内，对方(A)在自己(B)的网格上划过了多少个自己(B)的刻度数。

可见当“事件K”=“非相对论相对运动速度”时，事件K满足“同一事件”以第iv.点为路径所具象化的等式：{非相对论相对运动速度|B下，A于B}={非相对论相对运动速度|A下，B于A}。这一点是牛顿时空观与狭义相对论时空观所相通且相同的部分，即不仅放到狭义相对论里也成立，并且左右两端的含义和内容均对应等于新的等式的左右两端，即“在自己(B)的世界里，对方(A)在单位自己(B)的时间刻度数内所跨过的自己(B)的空间刻度数=在对方(A)的世界里，自己(B)在单位对方(A)的时间刻度内所跨过的对方(A)的空间刻度数”这个等式不仅跨理论成立(等式两边不仅跨理论相等)，而且等式的任何一侧跨理论在含义和数值上等于新等式的同一侧，这便是相通且相同(形式上相同，且内容上相同)的含义。

【另外地，若我们设{非相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}= "以自己(B)的网格为标准网格，自己(B)在单位自己(B)的时间刻度内，所划过了的对方(A)的网格的路程，若以自己(B)的网格刻度密度情况来量度，等价于多少个自己(B)的网格刻度数"，可见{非相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={空间刻度数|B 下，A 于 B}/{时间刻度数|B 下，B 于 B}={非相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}(如未作特殊说明，我们均以各系各自的(相对)运动方向为各系所对应的 x 轴正向，这里方向上虽具有相反意义，但仅看绿色字体，可知我所定义的内容并不包含方向，因而没有正负号差异，并且即使我们现在讨论的是二维的空间网格，我们也暂时忽略 y 轴。)】

④.Introduction04

设"事件 K" = "相对论相对运动速度"，则我们将"以自己(B)的网格为标准网格，对方(A)在单位对方(A)的时间刻度内，所划过了的自己(B)的网格的路程，若以自己(B)的网格刻度数来量度，等价于多少个自己(B)的网格刻度数"简记为：{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}。

可见{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={空间刻度数|B 下，A 于 B}/{时间刻度数|B 下，A 于 B}，【注意：由于 Introduction02，可知{时间刻度数|B 下，A 于 B}也可写成{时间刻度数|B 下，A 于 A}】即表示在自己(B)的认知里，单位对方(A)的时间内，对方(A)在自己(B)的网格上划过了多少个自己(B)的刻度数。

可见当"事件 K" = "相对论相对运动速度"时，事件 K 也应满足"同一事件"以第 iv.点为方法所具象得到的等式：{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={相对论相对运动速度|A 下，B 于 A}。这一点是牛顿时空观与狭义相对论时空观所相通但不相同的部分，即牛顿体系中也有同样含义的等式，但等式两端的具体内容，放到狭义相对论中就不相等了，然而等式两端含义仍然是跨理论不变且相等的。

【另外地，若我们设{相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}= "以自己(B)的网格为标准网格，自己(B)在单位自己(B)的时间刻度内，所划过了的对方(A)的网格的路程，若以对方(A)的网格刻度数来量度，等价于多少个对方(A)的网格刻度数"，可见{相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={空间刻度数|B 下，B 于 A}/{时间刻度数|B 下，B 于 A}，我们尚不清楚这个比值和{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={空间刻度数|B 下，A 于 B}/{时间刻度数|B 下，A 于 B}有什么关系。不过接下来我们就知道了。】

⑤.Introduction05

设"事件 K"="相对论运动速度"，则我们将"以任何参考系的网格为标准网格，A 在单位 A 的时间刻度内，所划过了的 B 的网格的路程，若以 B 的网格刻度数来量度，等价于多少个 B 的网格刻度数"简记为：{相对论运动速度|任何参考系下，A 于 B}。

可见{相对论运动速度|某个参考系下，A 于 B}={空间刻度数|同样某个参考系下，A 于 B}/{时间刻度数|同样某个参考系下，A 于 B}，【注意：由于 Introduction02，可知{时间刻度数|某个参考系下，A 于 B}也可写成{时间刻度数|某个参考系下，A 于 A}】即表示在任何参考系的认知里，单位 A 的时间内，A 在 B 的网格上划过了多少个 B 的刻度数。

可见当"事件 K"="相对论运动速度"时，事件 K 应当满足"同一事件"的"同一性"以第 ii.点为方法所具象得到的等式(这一点可以被认为是与第二假设同地位的第一假设)：{相对论运动速度|B 下，A 于 B}={相对论运动速度|A 下，A 于 B}={相对论运动速度|C 下，A 于 B}。这一点也是牛顿时空观与狭义相对论时空观所相通但不相同的部分，即牛顿体系中也有同样含义下的连等式，但连等号所连接的具体内容，放到狭义相对论中就不相等了，然而连等号之外的各对象的含义仍然是跨理论不变且相等的。

⑥.Introduction06

根据 Introduction05，我们有{相对论运动速度|B 下，A 于 B}={相对论运动速度|A 下，A 于 B}，又因"相对论相对运动速度"属于"相对论运动速度"，所以有{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={相对论相对运动速度|A 下，A 于 B}，又根据 Introduction04，有{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={相对论相对运动速度|A 下，B 于 A}，联立它们，即有{相对论相对运动速度|A 下，A 于 B}={相对论相对运动速度|A 下，B 于 A}，所以对于"相对论相对运动速度"而言，除了符合第 iv.点之外，还将因符合第 ii.点，而符合第 iii.点。

2.开始脚踏基石体验逻辑的螺旋上升

①.我的洛仑兹因子的雏形：$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$，$\triangle x=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$

接下来我们就应用 Introduction06 中的结论，即当"同一事件"体现为"相对论相对运动速度"时，它的同一性可以由第 iii.点呈现出来：即{相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}：

我们记{空间刻度数|B 下，B 于 A}=$\triangle x$，{时间刻度数|B 下，B 于 A}={时间刻度数|B 下，B 于 B}=$\triangle t_0$，{空间刻度数|B 下，A 于 B}=$\triangle x_0$，{时间刻度数|B 下，A 于 B}={时间刻度数|B 下，A 于 A}=$\triangle t$，那么根据之前所定义的{相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={空间刻度数|B 下，B 于 A}/{时间刻度数|B 下，B 于 A}=$\triangle x/\triangle t_0$，以及{相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={空间刻度数|B 下，A 于 B}/{时间刻度数|B 下，A 于 B}=$\triangle x_0/\triangle t$，加上 Introduction06 中的结论{相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}，便有$\frac{\triangle x}{\triangle t_0}=\frac{\triangle x_0}{\triangle t}$。

我们进一步将其写作$\frac{\triangle t}{\triangle t_0}=\frac{\triangle x_0}{\triangle x}=k$，则有$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$，$\triangle x=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$，其中，要特别注意的是，这里的$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$，均为"刻度数"，是数值，它们没有单位。——也就是说，它们是由长度是相对的的单位间隔量度出来的数值，即某一绝对间隔里的相对间隔的个数。它们是"单位间隔的数量"，而不是"单位间隔的长度"，即它们是"由单位间隔量度出的长度"、"绝对间隔中所包含的长度相对的单位间隔的个数"，即"绝对间隔中的刻度数(不考虑植树问题的话)"。

——这些文字意在从各个方向引导你去往真理：单位间隔的长度是相对的，因而在用有着不同密度的刻度的刻度尺(但标明的最小分度值均为 1)量度某一绝对长度时，单位间隔不同的各个尺子会给出不同的读数，而这些$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$就是这些时间刻度尺和空间刻度尺给出的读数。所以这里的$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$均没有单位。

为了更进一步地让清楚之人更清楚，设给出示数$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$的各个时空尺，其所对应的单位间隔的长度为$\triangle t'$、$\triangle t_0'$、$\triangle x'$、$\triangle x_0'$，它们是有单位的量，它们的另一种写法为：$1s'$、$1s$、$1m'$、$1m$，或者s'、s、m'、m。现在我们定义，每一个只带纯粹的国际标准单位(如 m、s、m/s)的数值，连同它们所带的单位一起，合称为该类数值的绝对映射，比如"3m"、$\triangle x_0'$、$5\cdot\triangle x_0'$等称为长度上的绝对映射；"0.2s"、$\triangle t_0'$、$7\cdot\triangle t_0'$等为时间上的绝对映射；"4m/s"、$\frac{\triangle x_0'}{\triangle t_0'}$、$3\cdot\frac{\triangle x_0'}{\triangle t_0'}$等为速度上的绝对映射——对数值作绝对映射，相当于给数值加载上其所对应的物理环境下其所

对应的物理量的单位(有点类似给方向向量加载上长度)，数值的绝对映射结果有单位，即变成了有物理意义的量，对应到理论模型中，则数值的绝对映射们代表着：观察者在其所处的那个参考系所量度的各尺度和细节上的物理量们，即属于它自己的真实。

根据以上定义，若我们对 Introduction03 中的非相对论相对运动速度进行绝对映射，即若对{非相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={空间刻度数|B 下，A 于 B}/{时间刻度数|B 下，B 于 B}=$\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$进行绝对映射的话，即有{非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，A 于 B}=$\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}$=$\frac{\Delta x_0 \cdot m}{\Delta t_0 \cdot s}$=$\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$ m/s，这便是有了物理意义的(非相对论)相对运动速度；如果对方程{非相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}={非相对论相对运动速度|A 下，B 于 A}两边的数值进行绝对映射的话，由于方程左右两边代表的是同一个事件分别以两个系的角度呈现的表述，且分别以 A、B 为标准网格时，两个标准网格的单位间隔的绝对映射相等，因而对方程左右两边取各自的绝对映射后，两个映射结果仍然相等，即有{非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，A 于 B}={非相对论相对运动速度的绝对映射|A 下，B 于 A}=$\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$ m/s，这就表明我们得到了一个有物理意义的客观事实：A 所测 B 对 A 的速度，等于 B 测得的 A 对 B 的速度——其实把这段文字的逻辑反过来从后往前看，可以说我们的 Introduction03 中的等式它，是由这个客观事实，加上 A 系、B 系分别做观察者所在的参考系时的标准网格的单位间隔的绝对映射相等，然后去单位化(即绝对映射的逆过程、逆映射、反函数)后得到的。

②.爱因斯坦和洛伦兹的洛仑兹因子：$\triangle t' = \frac{1}{k} \cdot \triangle t_0'$、$\triangle x' = k \cdot \triangle x_0'$

根据①.末所引进的思想，如果我们对 Introduction03 中的另一个等式，即末尾那对厚的中括号之间的等式：{非相对论相对运动速度|B 下，B 于 A}={非相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}的两边也进行绝对映射的话，也将有{非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，B 于 A}={非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，A 于 B}=$\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}$，进一步地，由于 Introduction03 与 Introduction04 的各自的末尾的厚中括号部分，描述的是同一个事件：同一速度的绝对映射的不同逆映射(去单位化后的结果)们，因而我们有：$\frac{\Delta x \cdot \Delta x'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}$={相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，B 于 A}={非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，B 于 A}=$\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}$={非相对论相对运动速度的绝对映射|B 下，A 于 B}={相对论相对运动速度|B 下，A 于 B}=$\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t \cdot \Delta t'}$，即我们得到了一个这样的连等式：$\frac{\Delta x \cdot \Delta x'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}=\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t \cdot \Delta t'}=\frac{\Delta x_0 \cdot \Delta x_0'}{\Delta t_0 \cdot \Delta t_0'}$。

接下来我们用三个方法得到一个有趣的事实：

(1).Way01

若只看前一个等号所连接的等式：$\frac{\Delta x\cdot\Delta x'}{\Delta t_0\cdot\Delta t_0'}=\frac{\Delta x_0\cdot\Delta x_0'}{\Delta t\cdot\Delta t'}$，那么根据之前在①.中得到的结论$\frac{\Delta x}{\Delta t_0}=\frac{\Delta x_0}{\Delta t}$，我们有$\frac{\Delta x'}{\Delta t_0'}=\frac{\Delta x_0'}{\Delta t'}$，此时若我们调整{时间刻度数的绝对映射|B 下，B 于 A}和{时间刻度数的绝对映射|B 下，A 于 B}相等，即$\Delta t_0\cdot\Delta t_0'=\Delta t\cdot\Delta t'$，那么根据①.中的$\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=\frac{\Delta x_0}{\Delta x}=k$，我们就有$\frac{\Delta t_0'}{\Delta t'}=\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=k$，进一步地，我们若将$\Delta t_0\cdot\Delta t_0'=\Delta t\cdot\Delta t'$代入$\frac{\Delta x\cdot\Delta x'}{\Delta t_0\cdot\Delta t_0'}=\frac{\Delta x_0\cdot\Delta x_0'}{\Delta t\cdot\Delta t'}$中，即会得到$\Delta x\cdot\Delta x'=\Delta x_0\cdot\Delta x_0'$，继续由于$\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=\frac{\Delta x_0}{\Delta x}=k$，我们便有$\frac{\Delta x'}{\Delta x_0'}=\frac{\Delta x_0}{\Delta x}=k$——于是我们便得到了：$\Delta t'=\frac{1}{k}\cdot\Delta t_0'$以及$\Delta x'=k\cdot\Delta x_0'$。

(2).Way02

将整个连等式连起来看$\frac{\Delta x\cdot\Delta x'}{\Delta t_0\cdot\Delta t_0'}=\frac{\Delta x_0\cdot\Delta x_0'}{\Delta t\cdot\Delta t'}=\frac{\Delta x_0\cdot\Delta x_0'}{\Delta t_0\cdot\Delta t_0'}$，一式和三式相等，得出$\Delta x\cdot\Delta x'=\Delta x_0\cdot\Delta x_0'$；二式和三式相等，得出$\Delta t\cdot\Delta t'=\Delta t_0\cdot\Delta t_0'$，之后仍然再根据$\frac{\Delta t}{\Delta t_0}=\frac{\Delta x_0}{\Delta x}=k$便可得到$\frac{\Delta t_0'}{\Delta t'}=\frac{\Delta x'}{\Delta x_0'}=k$，于是便有同样的$\Delta t'=\frac{1}{k}\cdot\Delta t_0'$以及$\Delta x'=k\cdot\Delta x_0'$。

(3).Way03

直接根据空间间隔这一事件的同一性：{空间刻度数的绝对映射|B 下，B 于 A}={空间刻度数的绝对映射|B 下，A 于 B}=$\Delta x_0\cdot\Delta x_0'$，我们便有$\Delta x\cdot\Delta x'=\Delta x_0\cdot\Delta x_0'=\Delta x_0\cdot\Delta x_0'$，即所需的$\Delta x\cdot\Delta x'=\Delta x_0\cdot\Delta x_0'$；另外地，独立地(不以速度为桥梁)也通过时间间隔这一事件的同一性：{时间刻度数的绝对映射|B 下，B 于 A}={时间刻度数的绝对映射|B 下，A 于 B}=$\Delta t_0\cdot\Delta t_0'$，即有$\Delta t_0\cdot\Delta t_0'=\Delta t\cdot\Delta t'=\Delta t_0\cdot\Delta t_0'$，之后的操作与上两种方法相同，同样也可得出$\Delta t'=\frac{1}{k}\cdot\Delta t_0'$、$\Delta x'=k\cdot\Delta x_0'$。

③.Space and Time, Einstein and me——以及我们之间的异同

爱因斯坦在普及认知的时候，用的是后者：$\Delta t'=\frac{1}{k}\cdot\Delta t_0'$、$\Delta x'=k\cdot\Delta x_0'$，换句话说，他用的方程两边的物理量包含了单位，于是在描述"时间的变缓(or 变快)"以及"空间的收缩(or 扩张)"方面【注：目前我们尚未涉及任何具体变化趋势，k 值是待定的，所以我在此不先入为主地影响你的主观观念地采用了泾渭不分明的措辞】，老人家指代的是：单位间隔的长度值，即"新单位间隔的绝对映射相对于固(旧)有单位间隔的变化情况"；而我则倾向于采用前者：$\Delta t=k\cdot\Delta t_0$，$\Delta x=\frac{1}{k}\cdot\Delta x_0$，于是我的方程两边的物理量是纯粹的数值，它们本身不包含单位，或者包含相同的单位(这个我之后会提到)，于是我在描述时间间隔和空间间隔方面，指代的是单位长度的间隔数，

即“同一段绝对映射中，所包含的新的单位间隔的个数相对于固(旧)有单位间隔的个数的变化情况”。

我们说到：我的方程两边的物理量$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$是纯粹的数值，然而从另一个角度上，这些字符也可以像爱因斯坦的物理量$\triangle t'$、$\triangle t_0'$、$\triangle x'$、$\triangle x_0'$一样，可以有单位；但是如果要有的话，则它们的单位必须是一致的；而如果一致的话，则不论是什么(但类型得是同类型的)单位均可(不过我推荐 m 和 s)。——若我们这样定义：设(非相对论速度)V_0相$=\frac{\triangle x_0}{\triangle t_0}$，根据$\frac{\triangle x}{\triangle t_0}=\frac{\triangle x_0}{\triangle t}$，则 V 相$=\frac{\triangle x}{\triangle t_0}=\frac{(\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0)}{\triangle t_0}=\frac{\triangle x_0}{\triangle t}=\frac{\triangle x_0}{(k\cdot\triangle t_0)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\triangle x_0}{\triangle t_0}=\frac{1}{k}\cdot V_0$相，即 V 相(相对论(相对)速度)$=\frac{1}{k}\cdot V_0$相(非相对论(相对)速度)，那么$V_0$相的绝对映射$V_0'$相$=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}$($=\frac{\triangle x\cdot\triangle x'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t\cdot\triangle t'}=$V 相的绝对映射$V'$相)，同样，若在$\frac{\triangle x}{\triangle t_0}=\frac{\triangle x_0}{\triangle t}$方程两边同时加上单位 m/s($=\frac{\triangle x_0'}{\triangle t_0'}$)的话，则有：$V_r$相$=\frac{\triangle x\cdot\triangle x_0'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{\left(\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0\right)\cdot\triangle x_0'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{(k\cdot\triangle t_0)\cdot\triangle t_0'}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{1}{k}\cdot V_0'$相，或者$V_r$相$=\frac{\triangle x\cdot\triangle x_0'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x\cdot(\frac{1}{k}\cdot\triangle x')}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\triangle x\cdot\triangle x'}{\triangle t_0\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t\cdot\triangle t_0'}=\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t\cdot(k\cdot\triangle t')}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\triangle x_0\cdot\triangle x_0'}{\triangle t\cdot\triangle t'}=\frac{1}{k}\cdot V_0'$相。其中$V_r$相代表的是相对论速度的实际效应(而不是V 相的绝对映射V'相)。

怎么来解释这种实际效应呢：假如在我所倡导的两个公式$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$，$\triangle x=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$中，第一个方程两边同时乘上$\triangle t_0'$，第二个方程乘上$\triangle x_0'$，方程仍成立，即有：$\triangle t_r=\triangle t\cdot\triangle t_0'=k\cdot\triangle t_0\cdot\triangle t_0'=k\cdot\triangle T_0'$，$\triangle x_r=\triangle x\cdot\triangle x_0'=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0\cdot\triangle x_0'=\frac{1}{k}\cdot\triangle X_0'$，其中$\triangle t_r$、$\triangle x_r$像$V_r$相一样，是相对论性的实际物理效应，而$\triangle T_0'$、$\triangle X_0'$像$V_0'$相一样，是非相对论性的实际物理效应(这个后者同时也是相对论量和非相对量的绝对映射)。——这些量之间的关系符合：V_0'相$=\frac{\triangle X_0'}{\triangle T_0'}$、$V_r$相$=\frac{\triangle x_r}{\triangle T_0'}=\frac{\triangle X_0'}{\triangle t_r}=\frac{1}{k}\cdot V_0'$相。

3.光速不变与 $k=k_c=0$；共线与不共线、以至不共面的三个速度矢量

在第 2.点末尾，我阐述了这样一个思想：没压缩的单位间隔和压缩了的单位间隔均是单位间隔，它们虽不均“在绝对映射上等于 1m”，但均“代表 1m”，且这种代表是因有实际物理效应而合法且有效的。我们的世界正是因此而光怪陆离，但也正因光怪陆离才能“合理”。

我们的工作马上就要在这样的基础上展开：V 相(相对论速度)$=\frac{1}{k}\cdot V_0$相(非相对论速度)、V_r相(相对论速度的实际效应)$=\frac{1}{k}\cdot V_0'$相(非相对论速度的实际效应)，是狭义

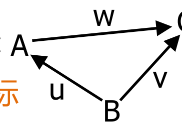
相对论中新设定的速度概念，是“被划过的对象的空间刻度数/被观察的对象的时间刻度数”的新概念下(或许牛顿会说这不是新的，而是将速度的定义更具体化)的速度，是客观存在的(V_r相将比 V 相更加体现出其存在性，但目前我们更希望专注于没有单位的、而是纯粹的刻度数、间隔数的数值 V 相上；虽然他们之间只差个“m/s”)。

①.三速度矢量共线的物理情景

首先，由于V_0相连同其时空未进行他我区分的模糊定义(其实人家也有定义，且不是模糊的，但这是后来被我赋予的，即单位自己的时间内，对方/选择对象划过的自己的空间间隔数)，对于有说服力地解释光速不变这一由大量正面经验所支撑的事实已经无能为力了，所以我们通过到这里为止的无中生有，引出了“V 相(相对论速度)= $\frac{1}{k}\cdot$ V_0相(非相对论速度)”，尝试着通过基于修正了的时间轴和空间网格，所导出的修正了的(加入了修正因子 k 的)V 相，来解释为何：光，作为一个参考系，相对于其余所有参考系的相对论(相对)速度 V 相，所对应的非相对论相对速度V_0相，均为常值 c。

鉴于旧理论中V_0相已经无法自洽地解释本该属于它管辖范围内的真相，所以在我们的新模型中，V 相= $\frac{1}{k}\cdot$ V_0相中的 k 不能是个常数(否则 V 相将因和V_0相有着相同的特点，而同样无法使得光对任何其余参考系的 V 相所对应的V_0相，均为常值 c)，因而 k 必须是关于 v 的函数，即 k=k(v)，我们进一步把 k(v)简记为k_v。

接着，如右图所示:



我们设 A、C 两系间的V_0相为 w(虽然我并没有说这个 w 是以哪个系为标准网格测量出来的，但各位应该知道，根据非相对论相对速度的定义，w 要有意义，只能是 A 或 C 作为观察者观察到的。)，则 w 这个V_0相所对应的 V 相= $\frac{1}{k}\cdot$ V_0相= $\frac{1}{k_w}\cdot$w。【在这里，这个图所对应的物理情景不会因为这个图的具体状貌而变得不是三速度矢量共线；该图仅为简明地给出所提及的字母所对应的逻辑主体和他们的空间分布情况(淡化)，以及主客情况(强化)：在这里，B 时常被认为为标准网格，u 和 v 这两个非相对论速度因 B 的测量而有意义(虽然你也可以尝试着想象分别以 A、C 为标准网格/跳转到 A、C 系，来分别给出有意义的 u、v)，而要谈 w 只能以 A 或 C 为标准网格，因为 w 的值只对他们才有意义，或者说只有 A 和 C 才能正确解读 w；接下来我们还将多次遇到这个图，到时候它还可以代表非共线/非共面的物理情景。】

现假设“事件 K”=“相对论速度”，则根据 Introduction05，有：{V 相|B 下，C 于 A}={V 相|C 下，C 于 A}(还={V 相|A 下，C 于 A}，不过我们只需要紫色部分即可。)，i.由于 u、v、w 共线(这里的共线是指平行的意思)，则{V 相|B 下，C 于 A}={空间间隔数|B 下，C 于 A}/{时间间隔数|B 下，C 于 A}=$\{(\frac{v-u}{k_u})\cdot\triangle t_B\}/\{k_v\cdot\triangle t_B\}$

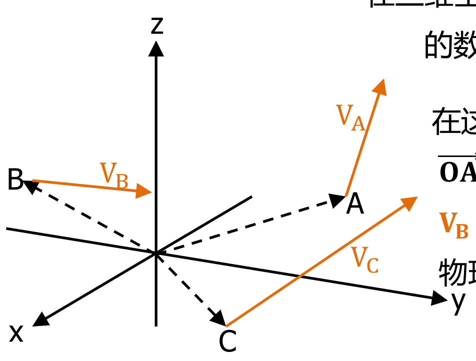
【为了便于理解，你也可以将{空间间隔数|B 下，C 于 A}写作={$\frac{(v-u)\cdot\triangle t_B}{k_u}$}；同时科普一下后者的得来过程：{时间间隔数|B 下，C 于 A}={△ t_C}={k_v ·△ t_B}】

ii.另一方面，或根据上上段文字，或根据相对论速度的普适性(即 Introduction05 中所说的所满足的性质 ii.)，有 {V 相|C 下，C 于 A}=$\frac{1}{k_w}$ ·w={V 相|任意参考系下，C 于 A}；此时根据上一段的紫色文字等式便有：$\frac{\left(\frac{v-u}{k_u}\right)\cdot\triangle t_B}{k_v\cdot\triangle t_B}=\frac{w}{k_w}$，即$\frac{v-u}{w}=\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}$，此时我们便得到了一个名不见经传的等式。的确，我们尚无法单独用它得到任何其他等式，不过，我之所以引进这一整大段过程，目的也仅仅在于为接下来类似的推理埋下伏笔，好让一个现在已经拥有必需的经验之人继续顺利地走下去。

②.三速度矢量不共线/不共面的物理情景

在开始这段进阶之旅之前，我们得迎面接受即将变得无比开阔的视野，及身居其中的更为广义(已经广义到极限了)的物理模型，也就是说，我们马上就会从单纯的 ABC 三点共线或者说三点速度平行的图景上完全剥离所有不必要的限制(之前必要的也全变成不必要的了)，那么接下来请允许我用文字来描述你所可以依凭之来想象的图景：

(1).Stage01：坐标空间层面

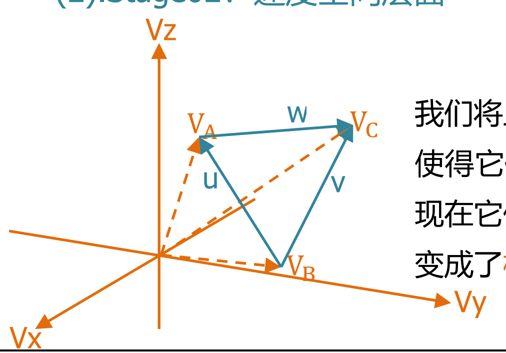


在三维空间中做匀速直线运动的三个系的原点给人留下的最直观的数学模型便是三条空间直线，及其矢量式方程：$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}\cdot t$；

在这个数学表达式中，$\mathbf{r}_0$在图中分别具象化为**黑色虚向量** $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$；而方向向量 **v** 则具象化为橙色实向量$\mathbf{V}_A$、$\mathbf{V}_B$、$\mathbf{V}_C$；当它们这样具象化时，数学的直线方程变为了物理的运动方程，此时参数 t 便具有了物理意义：时间。

但是，我们需要且愿意进入更深层次、更本质的世界。

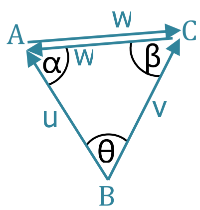
(2).Stage02：速度空间层面



我们将上一幅作品中的橙色实向量$\mathbf{V}_A$、$\mathbf{V}_B$、$\mathbf{V}_C$作平移，使得它们的起点均移动到原点，让它们张成一个速度空间；现在它们由自由向量变成了向径，于是原本的橙色实向量变成了橙色虚向量；现如图所示地，以其中一个为起点另

一个为终点地，连接两两橙色虚向量的终点，得到下一阶段的图景基石：三条代表相对速度的蓝色实向量。这里的相对速度是指V_0相，即非相对论相对速度。

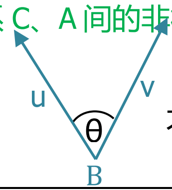
(3).Stage03：相对速度空间层面

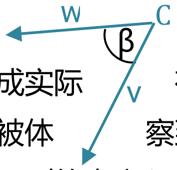


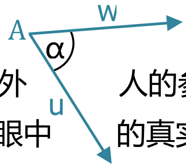
正如之前我们所略微提到过的，以后我们的工作将均在这个层面进行：这是一个三速度矢量$\mathbf{V_A}$、$\mathbf{V_B}$、$\mathbf{V_C}$可不共面、三个相对速度矢量 **u**、**v**、**w** 可不共线(但它们一定共面)的物理情景；这个图景没有你想象中的那么简单：如果说该图所对应的坐标空间和速度空间中的坐标原点所在的系为系 D，而$\mathbf{V_A}$、$\mathbf{V_B}$、$\mathbf{V_C}$均是系 D 所测得的，

系 A、B、C 分别相对于系 D 的相对速度，那么系 D 无法直接通过类比如$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$的方法得到 **u**：要知道，我们早已认识到自己不再置身于牛顿前辈们生活的时空了，所有诸如$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}=\mathbf{u}$，$\mathbf{V_C}-\mathbf{V_B}=\mathbf{v}$的等式已不再成立，因为我们之前说过：$\mathbf{u}$是 A 系对 B 系的非相对论相对速度，只有 A 系和 B 系能够直观地得到$\mathbf{u}$的值，而任何的其他参考系均不能通过类似于$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$的简单方法“尝试着努力看出”A 对 B 的非相对论速度$\mathbf{u}$，并且$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$的结果也暂时没有任何意义：既不能帮助 D 系计算出$\mathbf{u}$，A、B 系又不需要 D 系给出的信息$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$：这就是局内人即使得到局外人的信息，局内人也拿不上用场，因为这是属于局外人的，自己身处局内无法翻译这些信息为有效信息；而局外人在局外所得到的任何有关局内人的信息，在局外也永远无法准确推知局内人的其余信息，因为自己身处局外，是从局外得到的信息。所以在这里有个观念非常重要：相对速度空间并**不是由系 D 的速度空间以牛顿式视角得到的**，它本身并不需要任何得来途径，它只是属于三个系各自的隐私信息的集合，即我只是把这些暂时不知道相互的映射函数的各个已知量和未知量画在了一起而已(有未知量和未知函数才有意思三，才有动力去解决问题三)，这样便可以说是以**上帝的洞察式全景视角**(能穿梭于各系但不能同处于各系的上帝汇总起来这些信息，给出了这样的三角谜题)给出的，或者说**是由系 D 的速度空间以狭义相对时空式视角得到的**，接下来我们就会一步步呈现这样的视角所对应的映射函数。

同样地，正如：在速度空间层面，当系 D 的网格为标准网格时，系 D 无法通过$\mathbf{V_A}-\mathbf{V_B}$直接得到系 A、B 间的非相对论相对速度$\mathbf{u}$一样；在相对速度空间层面，当系 B 的网格为标准网格时，系 B 也同样无法通过$\mathbf{v}-\mathbf{u}$直接得到系 C、A 间的非相对论相对速度 **w**。下面是一些类似的对你有提示性帮助的要点：元素 u、v、θ是属于参考系 B 的，只有当 B 的网格为标准网格时，所见到的才是真正的 u、



v、θ；元素 

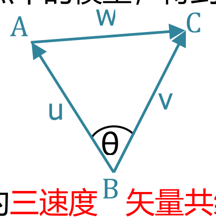
v、w、β只能被参考系C所直接量度出，也只能被C所解读，翻译成实际有效的物理量；元素 

w、u、α只有身处在A参考系中才能被体察到，这些元素到了局外人的参考系中，便会扭曲变形至你所想象不到的真实程度，成为其他参考系眼中的真实；然而属于他们自己的真实，仅仅是他们所认为的真实，他们的真实没有真实的物理意义，是变了味的真相，是以看上去随机但着实同时也是特定的方式通过哈哈镜的某个特定角度映射出来的幻象——真相的影子——除非你有对应的反函数作为唯一的解密工具，不然你无法仅仅通过影子来逆映射还原得到真相。【注：θ为：以B为标准网格时，A、C相对于B的非相对论相对速度u、v之间的夹角；同理α、β。】

③.我的洛仑兹因子关于v的具体函数的得来

(沿用第①.点的思想，从两方面分析第②.点中的模型，得到并联立两个方程)：

(1).{V相|B下，C于A}={V相|C下，C于A}

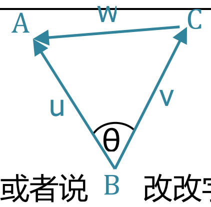


i.根据之前在第①.点中所做的铺垫，那时的三速度矢量共线的模型中，{空间间隔数|B下，C于A}={$(\frac{v-u}{k_u})\cdot\triangle t_B$}，然而到了现在扩充至第②.点中的三速度矢量不共线/不共面的模型时，只有在B、C系的相对运动速度u的方向上保留有类似的分量表达式：{u方向上的空间间隔数|B下，C于A}=$(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})\cdot\triangle t_B$；而由于网格变化只在相对速度方向上进行(到目前为止没有理由让我们凭空添加赋予网格在⊥相对速度方向上也跟着变化的新特性)，故{⊥u方向上的空间间隔数|B下，C于A}=$(v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B$【在这个方向上，网格仍然保留了你所熟悉的牛顿网格的特性】。

ii.故{空间间隔数|B下，C于A}=$\sqrt{\left(\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)\cdot\triangle t_B\right)^2+\left((v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B\right)^2}$；又因{时间间隔数|B下，C于A}={$\triangle t_C$}={$k_v\cdot\triangle t_B$}保持原形式不变，于是有{V相|B下，C于A}=$\frac{\{\text{空间间隔数}|B\text{下，}C\text{于}A\}}{\{\text{时间间隔数}|B\text{下，}C\text{于}A\}}=\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}$。

iii.又因{V相|C下，C于A}={V相|任意参考系下，C于A}=$w\cdot\frac{1}{k_w}$，于是类似①.地，我们也得到这样的一个等式：$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{w}{k_w}$，现在将其两边平方后化简为：$(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta\cdot k_u)^2=\left(w\cdot\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}\right)^2$。

(2).{V相|B下，A于C}={V相|A下，A于C}



i.对于{V相|B下，A于C}，我们只需交换或者说改改字母，便可以直接参照(1).中的 i.和 ii.依葫芦画瓢得：{V相|B下，A于C}=$\frac{\sqrt{(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v})^2+(u\cdot\sin\theta)^2}}{k_u}$。

ii.对于{V相|A下，A于C}，它直接={V相|任意参考系下，A于C}=w·$\frac{1}{k_w}$={V相|C下，C于A}。

iii.现将 i.与 ii.用等号连接：$\frac{\sqrt{(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v})^2+(u\cdot\sin\theta)^2}}{k_u}=\frac{w}{k_w}$；通过它，或者说我们仍通过互换 u、v 的方式，将(1).中的 iii.中的第一把钥匙，变换得到最后的这第二把钥匙：$(u\cdot\cos\theta-v)^2+(u\cdot\sin\theta\cdot k_v)^2=\left(w\cdot\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}\right)^2$。

(3).联立以上所得的两个橙色方程

即有：$(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta\cdot k_u)^2=(u\cdot\cos\theta-v)^2+(u\cdot\sin\theta\cdot k_v)^2$，考虑到方程两边第一项开平方均会出现$-2u\cdot v\cdot\cos\theta$，于是方程化简为$v^2\cdot\cos^2\theta+u^2+v^2\cdot\sin^2\theta\cdot k_u^2=u^2\cdot\cos^2\theta+v^2+u^2\cdot\sin^2\theta\cdot k_v^2$，移项，$\cos^2\theta$变$\sin^2\theta$，得到：$u^2\cdot\sin^2\theta+v^2\cdot\sin^2\theta\cdot k_u^2=v^2\cdot\sin^2\theta+u^2\cdot\sin^2\theta\cdot k_v^2$，再移项，合并同类项得：$u^2\cdot\sin^2\theta\cdot(1-k_v^2)=v^2\cdot\sin^2\theta\cdot(1-k_u^2)$。

约掉$\sin^2\theta$即有：$u^2\cdot(1-k_v^2)=v^2\cdot(1-k_u^2)$。这个式子便是我们用两把钥匙合成的打开大门的金钥匙：现在将其写作：$\frac{u^2}{1-k_u^2}=\frac{v^2}{1-k_v^2}=m$，解这个连等式中的两个方程中其中一个得到：$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{m}}$。

至此，我们已经得到了我的洛伦兹因子的具体表示形式：$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{m}}$，现只差一个待定字母 m 的取值需要获取，而该 m 值的获取方法十分独特，请听我娓娓道来：抛开k_v的具体形式$\sqrt{1-\frac{v^2}{m}}$不看，由于光速不变，所以k_v只能是减函数，并且$\lim_{v\to c}k_v=k_c=0$(以至于使得$\lim_{v\to c}\frac{1}{k_v}=\infty$)；而且还将有 v≤c；为什么会是这样呢？接下来描述的情境能更好的帮助你理解狭义相对论时空观：

我们假设(1).的图/物理情景中的 A 系为光，对应的 A 相对于 B 的相对速度 u 为 c，即 B 测得 A 相对于自己的速度为光速 c。此时将 u=c 和我们的假设k_c=0 带入，即有：{V相|B下，C于A}=$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-c}{k_c})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}$，假设这里的 C 系为

B 系任意选取的，v≠c 的目标参考系，由于假设了任意参考系其相对于 B 的速度 v≤c，所以这些 B 随机选取的 C 系们相对于 B 系的相对速度 v<c；所以 $v\cdot\cos\theta \le v < c$，即 $v\cdot\cos\theta - c < 0$，即 $v\cdot\cos\theta - c \ne 0$，即$\frac{v\cdot\cos\theta-c}{k_c}=\frac{\ne 0}{0}=-\infty$，即$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-c}{k_c})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=+\infty$，于是此时$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{w}{k_w}$变为：$+\infty=\frac{w}{k_w}$，由于 w 为 B 眼中的任意 v<c 的系 C，相对于系 A 的非相对论相对速度，并且我们之前规定了 w≤c，所以此时在范围≤c 内，且满足"$+\infty=\frac{w}{k_w}$"的 w 的解，只能是光速 c。

如果我们称呼相对论速度有确定值而不是∞的参考系，或者说其非相对论速度相对于除了光所在的参考系(非平凡参考系)之外的参考系均小于 c 的参考系，为平凡参考系。那么以上这段话的意思若简明扼要地翻译成非数学语言便是：只要有一个平凡参考系(比如系 B)见到一个参考系(比如 A 系)相对于自己以光速 c 运动，那么 B 可以断定，其余所有平凡参考系相对于这个参考系(A 系)也均以光速 c 运动，即该参考系(A 系)相对于其余任何一个平凡参考系也均以光速 c 运动。

以上红色字体便是"光速不变"的扩展解释，而赋予我们的物理模型这个"光速不变"的预期特征的前提条件之一为：$k_c=0$；又因之前已经得出k_v的具体表达式：$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{m}}$，于是有$k_c=\sqrt{1-\frac{c^2}{m}}=0$，得到 $m=c^2$，再将其代入$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{m}}$，得到$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$；同样形式的还有：$k_u=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$等等；这，或者说这些，便是我的洛伦兹因子的具体表示形式 or 它关于 v 的具体函数表达式，及其得来过程。

III.公式推导：时空(间隔)变换、广义速度变换、狭义速度变换、相对论余弦定理(角度变换式)、坐标间隔变换、w 的正交分解、相对论正弦定理、相对论正切定理

1.时空(间隔)变换

只需要将我们之前在 II.3.③.(3).中得到的k_v的具体表达式：$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$分别代入 II.2.①.中的$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$，$\triangle x=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$；II.2.②.中的$\triangle t'=\frac{1}{k}\cdot\triangle t_0'$、$\triangle x'=k\cdot\triangle$

x_0'中：$\triangle t=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\triangle t_0$，$\triangle x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\triangle x_0$；$\triangle t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\triangle t_0'$、$\triangle x'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\triangle x_0'$，在这两组共 4 个式子中，我暂时称"$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$"为"我的洛仑兹因子"，称它的倒数"$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$"为"爱因斯坦和洛伦兹的洛仑兹因子"。

时空变换现在因 k 变得清晰而变得清晰了(之前我们尚未能预测其具体性质)：随着相对运动速度 v 的增大，观察者所处的系 B 察看被观察的系 A 的时间轴时，会发现：A 系时间轴上同一段绝对映射里的单位间隔数$\triangle t=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\triangle t_0$会相对于自己(B 系)和所有与自己(B 系)相对静止的系的变少，刻度数会变稀疏；这对应着爱因斯坦表达式中：时间轴上同一段由相同数量的单位间隔构成的可变间隔长度$\triangle t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\triangle t_0'$在绝对映射上会变长，这同样是"刻度数会变稀疏"的等效说法。

同样的说法，在空间变换上：随着相对运动速度 v 的增大，观察者所处的系 B 察看被观察的系 A 的空间轴时，会发现：A 系 x 轴方向上同一段绝对映射里的单位间隔数$\triangle x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\triangle x_0$会相对于自己(B 系)和所有与自己(B 系)相对静止的系的变多，刻度数会变稠密；这对应着爱因斯坦表达式中：x 轴上同一段由相同数量的单位间隔构成的可变间隔长度$\triangle x'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\triangle x_0'$在绝对映射上会变短，这同样是"刻度数会变稠密"的等效说法。

2.广义速度变换

我们现在利用 II.3.③.(1).iii.中的式子$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{w}{k_w}$，将$k_v=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$带入其中，便有：$\frac{w^2}{1-\frac{w^2}{c^2}}=\frac{(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta)^2\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})}{(1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u^2}{c^2})}=m$，根据$\frac{w^2}{1-\frac{w^2}{c^2}}=m$，我们可反解得到$\frac{m}{1+\frac{m}{c^2}}=w^2$；再根据 $m=\frac{(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta)^2\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})}{(1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u^2}{c^2})}$，将其带入$w^2=\frac{m}{1+\frac{m}{c^2}}$即有$w^2=\frac{m}{1+\frac{m}{c^2}}$

$$=\frac{(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta)^2\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})}{(1-\frac{v^2}{c^2})(1-\frac{u^2}{c^2})+\frac{(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta)^2\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})}{c^2}}=\frac{(v^2-2vu\cos\theta+u^2)-\frac{v^2u^2\sin^2u}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2+u^2}{c^2}+\frac{v^2u^2}{c^4}\right)+(\frac{v^2+u^2}{c^2}-\frac{2vu\cos\theta}{c^2}-\frac{v^2u^2\sin^2u}{c^4})}=$$

$$\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{2vu\cos\theta}{c^2}+\frac{v^2u^2\cos^2u}{c^4}\right)}=\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}$$，由于我们的物理模型的前提之二：u、v≤c，所以分

母的括号内$1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\geq0$，所以分母开方不加负号，于是$w=\frac{\sqrt{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{c}\right)^2}}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$，这便是广义的速度变换式。

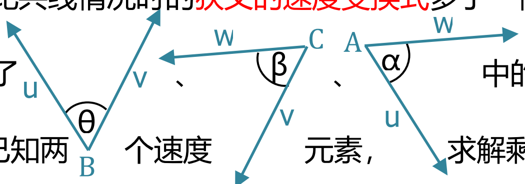
这个式子的意义在于：你可以既不必身处 A 系，也不必身处 C 系，而是在一个无法直接测量到 A、C 系之间的非相对论相对速度 w 的“局外系”B 系，通过测量 A 对你的相对速度 **v**、和 C 对你的相对速度 **u**；或者说测量 A 对你的相对速度大小 v、C 对你的相对速度大小 u、加上 v 与 u 间的夹角θ的值，来间接“算出” **w** 的大小 w。

3.狭义速度变换

在广义速度变换式的基础上，令 **v** 与 **u** 共线，则原式子转化为$w=\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$；这里的 w 仍然仅仅是 A、C 系之间的相对速度 **w** 的大小，并且式子里的 **v** 和 **u** 也均为向量；现考虑到共线情况下的 **w** 的方向，并且将原向量 **v** 和 **u** 退化为伪矢量(只有两个共线且相反的方向的向量；或者说具有正负号的数值) v 和 u 便有：$w_{\overline{AC}}=\frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$以及$w_{\overline{CA}}=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$，这便是狭义的速度变换式。虽然狭义的速度变换式是由广义的速度变换式退化得来的，但是在有个方向上它进化了：在(正负号所代表的)“方向”上。

4.相对论余弦定理(角度变换式)

由于广义的速度变换式比共线情况时的狭义的速度变换式多了一倍的信息量，即除了 u、v、w 之外，还包含了



、 、 中的θ、β、α三个角度。求解方式也从原来的已知两个速度元素，求解剩下的第三个速度元素，到了现在的已知(S·A·S)边、角、边(eg：u、θ、v)三个元素，求解“对边”(eg：w)这个速度元素。所以我们还需找到角度变换式，即接下来的相对论余弦定理，用以求解除了“对边”以外，6 个元素中还剩下的其余两个元素(eg：α、β)：“对边”的两个邻角(即 A·S·A 中的两个 A)。

由于$w^2=\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}$，根据$\frac{\sqrt{\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{w}{k_w}$，知其分子$(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2-\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{u}}{c}\right)^2=(v\cdot\cos\theta-u)^2+(v\cdot\sin\theta)^2\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\left(w\cdot\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}\right)^2$，于是原方程变为了$w^2=\frac{\left(w\cdot\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}\right)^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}$，即$\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2=\left(\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}\right)^2$，又因$1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}$与$\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}$均恒≥0，所以开方不变号，得到

$1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}=\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}$，即有$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\frac{1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{1}{c^2}}$，即$\cos\theta=\frac{1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{vu}{c^2}}$，此即为相对论余弦定理，或称为角度变换式。

这里我需要声明一点，一但该 6 元素构成的三角关系中的某 SAS 已知，则剩下 3 个元素 ASA 也就唯一确定下来了，其原因在于：比如若在 B 系测量得到了 u、θ、v，则接下来 cosα、cosβ便可以通过$\cos\alpha=\frac{1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}}{\frac{uw}{c^2}}$、$\cos\beta=\frac{1-\frac{k_w\cdot k_v}{k_u}}{\frac{wv}{c^2}}$被唯一确定下来。【希望你能发现公式的轮换规律】为什么我们要以 w 为桥梁 or 跳板来迂回地求α和β呢？或者说为什么角度变换式不像速度变换式由两个速度求第三个速度一样，去用两个角度求第三个角度呢?

这是因为，我们在一个时刻只能身处一个系，而一个系所能测量出的最多的有效信息只有 SAS 三个，其中只包含了一个 A；所以之所以不存在这样的，与速度变换式对称的角度变换式，本质上是因为我们不能同处于两个系，同时得到两个角度和它们之间的相对运动速度。另外，退一步说，如果(还有待探索)角度之间存在的这样的关系(即像 SAS 得到 A 的对边 S 一样，用 ASA 得到 S 的对角 A)的话，那么若要通过它利用仅有的已知条件 SAS 求通解，仍然要经过不多不少的三步，只是最后一步可变而已，所留余地并不宽敞。

5.坐标间隔变换

㈠.单一事件之第一大类：衡量标准=A 下|A 时间流逝$\triangle t_{\#}$

①.($\triangle x_C$,$\triangle y_C$,$\triangle z_C$,衡量标准)=($\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$,$k_w\cdot\triangle y_B$,$\triangle z_B$,A 下|A 时间流逝$\triangle t_C$)

(1).前期准备：

我们将 II.3.③.(1).iii.中的式子$\frac{\sqrt{(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u})^2+(v\cdot\sin\theta)^2}}{k_v}=\frac{w}{k_w}$还原成 II.3.③.(1).ii.中的初始形式：{V 相|B 下，C 于 A}=$\frac{\{\text{空间间隔数}|B\text{ 下，}C\text{ 于 }A\}}{\{\text{时间间隔数}|B\text{ 下，}C\text{ 于 }A\}}$=$\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)\cdot\triangle t_B\right)^2+\left((v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B\right)^2}}{\triangle t_C}$=$\frac{w}{k_w}$={V 相|任意参考系下，C 于 A}，并进一步意义化为：$\sqrt{\left(\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)\cdot\triangle t_B\right)^2+\left((v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B\right)^2}=\frac{w}{k_w}\cdot\triangle t_C$，现在我们设$(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B=\triangle x_B$、$(v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B=\triangle y_B$、$w\cdot\triangle t_C=\triangle L$、$\triangle L\cdot$

$\cos(\pi-\alpha)=\triangle x_C$、$\triangle L\cdot\sin(\pi-\alpha)=\triangle y_C$，【注：w 为 **w** 的大小，连同$\triangle L$恒为正；$\triangle x_C$与$\cos(\pi-\alpha)$同号；$\triangle x_B$与$(v\cdot\cos\theta-u)$同号，而$v\cdot\cos\theta-u$的符号的量度仍然依照下面即将给出的坐标系为标准；其中$\triangle x_B$、$\triangle y_B$、$\triangle x_C$、$\triangle y_C$、$\triangle L$均属于 II.2.①.中的$\triangle x_0$。】那么原式变为了$\sqrt{\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2}=\frac{\triangle L}{k_w}$，即$\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2=\frac{x_C^2+y_C^2}{k_w^2}$，接下来我们就将用到这个式子：$\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2=\frac{x_C^2}{k_w^2}+\frac{y_C^2}{k_w^2}$。

(2).物理图景：

在此模型中，在以 B 为标准网格拥有者时，其测量$\triangle x_B$、$\triangle y_B$所用的坐标系，在各项细节上全等于，在以 A 的网格为标准网格时(即跳转到 A 系时)，测量$\triangle x_C$、$\triangle y_C$所用的坐标系。什么叫做“完全等价”呢？或者说，如何让不能互通有无的 A、B 系分别在自己的系中设立两个完全相同的坐标系呢？

a.x 轴的设定：

i.首先，两个坐标系的原点均选于 A 系原点；

ii.两个坐标系的 x 轴平行于 AB 两系之间的相对运动速度 **u**；

iii.两个坐标系的 x 轴的朝向必须都从“跳跃之前”的系 B，指向“跳跃之后”的系 A：这里即均朝向方向为$\overrightarrow{AB}$方向的 **u** 所指向的方向；

b.y 轴的设定：

i.两个坐标系的 y 轴均分别落在跳跃之前的系 B 和跳跃之后的系 A 各自所测的，其他两系(eg：对于 A，“其他两系”=“B、C”)对自己的两个相对运动速度(**u**、**w**)所确定的平面上；

【在我的模型中，或者说，在我对狭义相对时空的现有认知里，从 II.3.②.的 Stage03 中关于相对速度空间的图开始，到现在(这里)，均认为θ、α、β扇角所对应的扇形所在的平面，是跨系相互平行的；其理由之一便是：在此期间我们没有任何机会和理由尝试着得到任何关于 z 方向的方程。——那么我们唯一可做的便是：维持原判，即保留原牛顿时空中，相对速度空间中 z 方向的性质：$\triangle z_A=\triangle z_B$、甚至$z_A=z_B$(若$z_A$、$z_B$的初始$const01.=const02.$的话)】

【虽然在 II.3.②.的 Stage03 的图中，所有垂直于 x 轴的方向上网格密度均相同且为原牛顿状，以此导致 y 轴和 z 轴同化，继而导致α、β被算出来(确定下来)后，即使连同有确定方向的由 B 过渡到 A 的 **u**，也只能将 C 对 A 的相对速度 **w** 的方向限制在

A 的视角下，以 **u** 为轴、以α为半顶角的圆锥壳的各条母线上；并且即使同时也将 **w** 的方向限制在 C 的视角下，以 **v** 为轴、以β为半顶角的圆锥壳的各条母线上，我们也不能将两个圆锥壳相交，以限制 **w** 的方向：因为这两个圆锥壳不在同一个时空中：一个在 A 所在的时空里，一个在 C 所在的时空中。】

【注：即使θ、α、β扇角所对应的扇形所在的平面，并不两两彼此跨系平行，我们之前的广义速度变换式、相对论余弦定理等等，甚至这里的坐标间隔变换，也取同样的内容且成立；因为它们的成功推导，依托的是等式和等式中各元素单独的物理意义，而不是我们为了服务于完整的解释和赋予方程连贯的物理意义，而将各元素串起来所揣测的整个物理图景；它们或许成立于另一种比如三角单螺旋(**u**、**v**、**w** 三火柴棍首尾相连但θ、α、β不共面的相对速度空间)模型的物理图景。只不过目前由于我们既没有充足的理由肯定旧有模型，又没有充足的理由否定其他奇怪图景，于是我们没有必要在未知更多方程所对应的求解方法情况下，引入多余的未知元素——理论已经自洽了，何必自己对其挑完刺后不知道怎么补洞？】

ii.两个坐标系的 y 轴均指向“既不是跳跃之前的系，又不是跳跃之后的系”的系 C 所在的那片 180°区域；

c.z 轴的设定：

i.两个坐标系的 z 轴分别与各自的 x、y 轴构成右手系；

此时，这两个坐标系，便是同一个坐标系。

(3).开始推导：

i.x 方向上：$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$

在(1).中的 5 个 definitions 中的$w\cdot\triangle t_C=\triangle L$中[同时还要用到$(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B=\triangle x_B$、$\triangle L\cdot\cos(\pi-\alpha)=\triangle x_C$]，分别将$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B=k_v\cdot\frac{\triangle x_B}{v\cdot\cos\theta-u}$以及$\triangle L=\frac{\triangle x_C}{\cos(\pi-\alpha)}=-\frac{\triangle x_C}{\cos\alpha}$代入方程左边和右边，为的是得到如下一个仅含两个目标元素$\triangle x_B$、$\triangle x_C$的新方程：$w\cdot k_v\cdot\frac{\triangle x_B}{v\cdot\cos\theta-u}=-\frac{\triangle x_C}{\cos\alpha}$，对其稍作整理得：$\triangle x_C=\frac{w\cdot k_v\cdot\cos\alpha}{u-v\cdot\cos\theta}\cdot\triangle x_B$。

现将$\cos\theta=\frac{1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{vu}{c^2}}$以及$\cos\alpha=\frac{1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}}{\frac{uw}{c^2}}$代入该式，即有：$\triangle x_C=\frac{w\cdot k_v\cdot\frac{1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}}{\frac{uw}{c^2}}}{u-v\cdot\frac{1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{vu}{c^2}}}\cdot\triangle x_B=\frac{w\cdot k_v\cdot\frac{1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}}{w}}{\frac{u^2}{c^2}-(1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w})}\cdot\triangle x_B$，现又因$k_u^2=1-\frac{u^2}{c^2}$，代入$\frac{u^2}{c^2}=1-k_u^2$，得到$\triangle$

$x_C=\frac{k_v-k_u\cdot k_w}{1-k_u^2-1+\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}\cdot\triangle x_B=\frac{k_v-k_u\cdot k_w}{\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}-k_u^2}\cdot\triangle x_B=\frac{k_v-k_u\cdot k_w}{k_v-k_u\cdot k_w}\cdot\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B=\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$。Then here is the formular：$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$。

ii.y 方向上：$\triangle y_C=k_w\cdot\triangle y_B$

我们在(1).中得到了这么一个式子：$\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2=\frac{\triangle x_C^2}{k_w^2}+\frac{\triangle y_C^2}{k_w^2}$，现根据(3).的结论：$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$，我们有$\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2=\frac{\triangle x_C^2}{k_w^2}$，于是我们有$(\triangle y_B)^2=\frac{\triangle y_C^2}{k_w^2}$；现由$k_w$于恒＞0，且在我们的模型中，由于$\triangle y_B$与$\triangle y_C$均由同一个坐标系测量得到，并且对应的物理图景中，$\triangle y_B$与$\triangle y_C$应该在这样的坐标系的测量下同向、同号，于是去平方得到our last rope：$\triangle y_C=k_w\cdot\triangle y_B$。

iii.z 方向上：$\triangle z_C=\triangle z_B$

正如我们在(2).b.i.的第一个厚中括号所说，由目前的已知领域们所能繁衍出的这个自洽模型，保留了原牛顿时空中，相对速度空间中 z 方向的性质：$\triangle z_A=\triangle z_B$、甚至$z_A=z_B$。在我们的现有模型中，解决问题的办法数量，刚刚等于(reach,达到)问题的数量，不需要更多的问题，因为我们找不到其所对应的解决问题的办法。

iv.重中之重：衡量标准

请注意：以上$(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B,k_w\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$这一切，建立在"衡量标准=A 下|A 时间流逝$\triangle t_C$"的条件下，即：若当 B 的网格标准时，当 B 时间流逝$\triangle t_B$时， B 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L'=(\triangle x_B,\triangle y_B,\triangle z_B)$，那么当 A 的网格为标准网格时，当 A 时间流逝$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B$时，A 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L=(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B,k_w\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$。因此我们以后将其完整地写作：$(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C,$衡量标准$)=(\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B,k_w\cdot\triangle y_B,\triangle z_B,$A 下|A 时间流逝$\triangle t_C)$。

②.$(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C,$衡量标准$)=(\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B,$A 下|A 时间流逝$\triangle t_B)$

(1).开始推导：

i.x 方向上：$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B$

仅仅将①.(1).中的 5 个 definitions 中的$w\cdot\triangle t_C=\triangle L$修改为$w\cdot\triangle t_B=\triangle L$，即我们更改了$\triangle L$的含义，同时$\triangle x_C$和$\triangle y_C$的含义也被改变了；此后分别将$\triangle t_B=\frac{\triangle x_B}{v\cdot\cos\theta-u}$、$\triangle L=-\frac{\triangle x_C}{\cos\alpha}$代入$w\cdot\triangle t_B=\triangle L$的左边和右边，得到：$\triangle x_C=\frac{w\cdot\cos\alpha}{u-v\cdot\cos\theta}\cdot\triangle x_B$，将其与①.(3).i.中的$\triangle x_C=\frac{w\cdot k_v\cdot\cos\alpha}{u-v\cdot\cos\theta}\cdot\triangle x_B$对比可知：新$\triangle x_C=\frac{1}{k_v}\cdot$旧$\triangle x_C$，那么根据"旧

$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B$" ，可知："新$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B$" ，即也就是新意义(新衡量标准、新$\triangle L$)下的：$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B$。

ii.y 方向上：$\triangle y_C=\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B$

根据$\sqrt{(\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)\cdot\triangle t_B)^2+\left((v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B\right)^2}=\frac{w}{k_w}\cdot\triangle t_C$，以及$w\cdot\triangle t_B=\triangle L$，有：$\sqrt{\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2}=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle L$，于是有$\left(\frac{\triangle x_B}{k_u}\right)^2+(\triangle y_B)^2=\frac{k_v^2}{k_w^2}\cdot\triangle x_C^2+\frac{k_v^2}{k_w^2}\cdot\triangle y_C^2$，代入$\triangle x_C=\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B$，即有$(\triangle y_B)^2=\frac{k_v^2}{k_w^2}\cdot\triangle y_C^2$，依照与①.(3).ii.相同的理由，开方得：$\triangle y_C=\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B$。

iii.z 方向上：$\triangle z_C=\triangle z_B$

(2).意义：

若当 B 的网格为标准网格时，当 B 时间流逝$\triangle t_B$时， B 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L'=(\triangle x_B,\triangle y_B,\triangle z_B)$，那么当 A 的网格为标准网格时，当 A 时间也流逝$\triangle t_B$时，A 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L=(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$。

③.($\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C$,衡量标准)=($\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B$,A 下|A 时间流逝$\triangle t_A$)

(1).规律：

我们发现，从①.到②.，衡量标准由"A 下|A 时间流逝$\triangle t_C$"过渡到了"A 下|A 时间流逝$\triangle t_B$" ，时间间隔数除以了k_v，那么对应地，$\triangle L=(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B,k_w\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$的$\triangle x_C,\triangle y_C$也分别除以了$k_v$，得到了$\triangle L=(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$。从物理意义上它们之间的因果关系也很好理解：**w** 是常矢量，因而$\triangle x_C=\triangle L\cdot\cos(\pi-\alpha)=w\cdot\triangle t_?\cdot\cos(\pi-\alpha)$，在 w 和α固定时，正比于$\triangle t_?$，同理$\triangle y_C$。

利用此规律，我们可通过$\triangle t_A=\triangle t_B\cdot k_u$，轻而易举地得到这三兄弟之末：($\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C$,衡量标准)=($\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B$,A 下|A 时间流逝$\triangle t_A$)。接下来我们还会继续利用此规律，得到在其他方面更有价值的方程。

(2).意义：

若当 B 的网格为标准网格时，当 B 时间流逝$\triangle t_B$时， B 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L'=(\triangle x_B,\triangle y_B,\triangle z_B)$，那么当 A 的网格为标准网格时，当 A 时间流逝$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$时，A 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L=(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C)=(\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle x_B,\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B,\triangle z_B)$。

㈡.单一事件之第二大类：衡量标准=A 下|C 时间流逝$\triangle t_C$

①.$(\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C$,衡量标准$)=(\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B,\triangle y_B,\triangle z_B$,A 下|C 时间流逝$\triangle t_C)$

(1).前期准备：

我们假设：当 A 的网格为标准网格时，当 A 时间流逝$\triangle t_?$时，A 系也看见 C 系时间刻度数变化$\triangle t_C$。现在我们需要求出$\triangle t_?$，而以下是两种方案：

a.方案一：

i.$\sqrt{\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\right)^2+(v\cdot\sin\theta)^2}\cdot\triangle t_B=\frac{w}{k_w}\cdot\triangle t_C=w\cdot\triangle t_?$

ii.$\sqrt{\left(\frac{w\cdot\cos\alpha-(-u)}{k_u}\right)^2+(w\cdot\sin\alpha)^2}\cdot\triangle t_?=\frac{v}{k_v}\cdot\triangle t_C=v\cdot\triangle t_B$

将上述两个连等式的后一个方程单独提炼出来：i.$\triangle t_?=\frac{1}{k_w}\cdot\triangle t_C$，ii.$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B$，将后者代入前者，得到$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$。

b.方案二：

i.B 的网格为标准网格，则 B 的时间为标准时间，则$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B$。

ii.A 的网格为标准网格，则 A 的时间为标准时间，则$\triangle t_C=k_w\cdot\triangle t_?$。

同样也将得到：$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$。

【这个式子是异常和谐的：假如我们从 B 系跳跃到 A 系后又跳跃回 B 系，那么设第二次回到 B 系时，当 B 时间流逝$\triangle t_{??}$时，B 系也看见 C 系时间刻度数变化$\triangle t_C$，那么就有以下类似的两个方程：

i.A 的网格为标准网格，则 A 的时间为标准时间，则$\triangle t_C=k_w\cdot\triangle t_?$。

ii.B 的网格为标准网格，则 B 的时间为标准时间，则$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_{??}$。

得到：$\triangle t_{??}=\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle t_?=\frac{k_w}{k_v}\cdot\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B=\triangle t_B$。

这和期望中的一模一样，可见我们的理论是如何自洽的。】

(2).开始推导：

利用㈠.③.(1).所发现的规律，或者说仿照㈠.③.的得来过程，由于我们已经得到了熟悉的$\triangle t_? = \frac{k_v}{k_w} \cdot \triangle t_B$，时间间隔数从“$(\triangle x_C, \triangle y_C, \triangle z_C$,衡量标准$) = (\frac{k_w}{k_u \cdot k_v} \cdot \triangle x_B, \frac{k_w}{k_v} \cdot \triangle y_B, \triangle z_B$,A 下|A 时间流逝$\triangle t_B)$”中的$\triangle t_B$到这里的$\triangle t_?$，乘以了$\frac{k_v}{k_w}$，于是：

若当 B 的网格为标准网格时，当 B 时间流逝$\triangle t_B$时，即当(B 见)C 时间流逝$\triangle t_C$时， B 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L' = (\triangle x_B, \triangle y_B, \triangle z_B)$，那么当 A 的网格为标准网格时，当 A 时间流逝$\triangle t_? = \frac{k_v}{k_w} \cdot \triangle t_B$时，即当(A 见)C 时间也流逝$\triangle t_C$时，A 所测量的 C 对 A 的位移$\triangle L = (\triangle x_C, \triangle y_C, \triangle z_C) = (\frac{k_w}{k_u \cdot k_v} \cdot \frac{k_v}{k_w} \cdot \triangle x_B, \frac{k_w}{k_v} \cdot \frac{k_v}{k_w} \cdot \triangle y_B, \triangle z_B) = (\frac{1}{k_u} \cdot \triangle x_B, \triangle y_B, \triangle z_B)$。

简记为：$(\triangle x_C, \triangle y_C, \triangle z_C$,衡量标准$) = (\frac{1}{k_u} \cdot \triangle x_B, \triangle y_B, \triangle z_B$,A 下|C 时间流逝$\triangle t_C)$。这个式子是不是非常棒？其简洁程度令人叹为观止。

㈢.事件群的坐标间隔变换：衡量标准=A 下|A 时间流逝$\triangle t_B$

①.$(\triangle x_{C_i}, \triangle y_{C_i}, \triangle z_{C_i}$,衡量标准$) = (\frac{k_{w_i}}{k_u \cdot k_{v_i}} \cdot \triangle x_{B_i}, \frac{k_{w_i}}{k_{v_i}} \cdot \triangle y_{B_i}, \triangle z_{B_i}$,A 下|A 时间流逝$\triangle t_B)$

(1).定义：

在这里，B 是跳跃之前的系，A 是想要跳跃到的系，事件群所对应的 C 系群由C_i表示；也就是说，现在被观察的 C 系已经不止一个了，而是由一群各自相对于 B 以$\mathbf{v}_i$、相对于 A 以$\mathbf{w}_i$，匀速直线运动的C_i系组成的被观察对象的集合。

(2).注意事项：

i.既然提到它们是独立的参考系们，那么它们之间必须没有物理联结，即其中没有一个参考系在任意另一个参考系的空间网格上的坐标值因物理联结而固定不变。

ii.由于㈠.①.的衡量标准中$\triangle t_C = k_v \cdot \triangle t_B$，到这里会被写为$\triangle t_{C_i} = k_{v_i} \cdot \triangle t_B$，而后者 is not universal：由于$k_{v_i}$会因$\mathbf{v}_i$的大小$v_i$的不同而不同，而因此所导致的多重衡量标准：A 下|A 时间流逝$\triangle t_{C_i} = k_{v_i} \cdot \triangle t_B$无法实现：A 系无法同时参考那么多互异的衡量标准。因而我们不能用㈠.①.的衡量标准作为**事件群的坐标间隔变换**的衡量标准。

同样的道理，㈡.①.中的衡量标准也因$\mathbf{v}_i$、$\mathbf{w}_i$的不统一所导致的$\triangle t_? = \frac{k_{v_i}}{k_{w_i}} \cdot \triangle t_B$不一致而不能成为**事件群的坐标间隔变换**的衡量标准。

iii.不过类似于㈠.③.中的这样，不含v_i、w_i的衡量标准$\triangle t_A = \triangle t_B \cdot k_u$，连同$\triangle t_B$，等都是允许作为**事件群的坐标间隔变换**的衡量标准的。

6.w 的正交分解

①.u 方向上：$w \cdot \cos\alpha = \frac{u - v \cdot \cos\theta}{1 - \frac{uv\cos\theta}{c^2}}$，因坐标系不同，也可写为 $w \cdot \cos(\pi - \alpha) = \frac{v \cdot \cos\theta - u}{1 - \frac{vu\cos\theta}{c^2}}$

(1).假如我们要求 w·cos(π-α)，或许你第一个想到的方法便是：w·cos(π-α)=−w·cosα=$-\frac{\sqrt{(v-u)^2 - \left(\frac{v \times u}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}} \cdot \frac{1 - \frac{k_u \cdot k_w}{k_v}}{\frac{uw}{c^2}}$，然后将其技术地化简？

(2).第二个你也想试一试的：利用 5.㈠.①.(1).中的 5 个 definitions 中的两个：$w \cdot \triangle t_C = \triangle L$、$\triangle L \cdot \cos(\pi - \alpha) = \triangle x_C$，将左式的$\triangle L$代入进右式，得到$w \cdot \cos(\pi - \alpha) = \frac{\triangle x_C}{\triangle t_C}$，这确实合情合理，但是我们可能用这种方法来计算出其数值吗?

(3).这第三个方法可不是那么容易想到的：

i.根据相对论速度的普适性(即 II.1.Introduction05 中所说的所满足的性质 ii.)，我们有理由也认为相对论速度在分量上也普适，即{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 **u** 方向上的分量|B 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A}/{时间刻度数|B 下，C 于 B(A)}={$\frac{1}{k_u} \cdot \triangle x_B$}/{$\triangle t_C$}

即有{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\frac{1}{k_u} \cdot \triangle x_B$}/{$\triangle t_C$}，现在勒令{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}，那么对应的{空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}={$\frac{1}{k_u} \cdot \triangle x_B$}。

ii.还记得 II.1.Introduction03：{非相对论相对运动速度 w 在 **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}= "以 A 的网格为标准网格，C 在单位 A 的时间刻度内，划过了多少个 A 的网格刻度数" ={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，A 于 A}。

iii.在 i.中我们勒令了{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}，根据 5.㈡.①.(1).我们有：当 A 的网格为标准网格时，当 A 系也看见 C 系时间刻度数变化$\triangle t_C$时，A 时间

流逝$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$，即与{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}相对应的，有{时间刻度数|A 下，A 于 A}={$\triangle t_?$}={$\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$}。

iv.现在又利用 i.中已经得到的{空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}={$\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$}，将以上两个式子代入 ii.中的方程：w·cos(π-α)={非相对论相对运动速度 w 在 **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，A 于 A}={$\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$}/{$\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$}。于是我们便有方程：$w\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B}{\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B}=\frac{\frac{\triangle x_B}{\triangle t_B}}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}$

v.现由于 5.㈠.①.(1).中的 5 个 definitions 中的：$(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B=\triangle x_B$，我们便有$\frac{\triangle x_B}{\triangle t_B}=v\cdot\cos\theta-u$，现将其代入 $w\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{\frac{\triangle x_B}{\triangle t_B}}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}$，即有 $w\cdot\cos\alpha=\frac{u-v\cdot\cos\theta}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}$，又因为$\cos\theta=\frac{1-\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{vu}{c^2}}$，所以有$\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}=1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}$，将其代入 $w\cdot\cos\alpha=\frac{u-v\cdot\cos\theta}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}$，便有 w 的正交分解之 $w\cdot\cos\alpha=\frac{u-v\cdot\cos\theta}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}$，它的另一种表示形式，即若依 5.㈠.①.(2).的坐标系为参考标准时，表示为：$w\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}$。【这个式子也相当和谐，它几乎就是用 v·cosθ代替了 v 后的狭义的速度变换式。另外，我们在没有假设这样的分量表达式成立的前提下就在之前独自得到了 w 的高(二)维表达式，挺不错的不是。】

vi.现在让我们回到 i.，回过头得出{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={$\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$}/{$\triangle t_C$}=$\frac{\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B}{k_v\cdot\triangle t_B}=\frac{\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B}{\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B}\cdot\frac{1}{k_w}=w\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\frac{1}{k_w}=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)$，这样的形式也是合乎想象的。进一步地，我们也可以代入 $w\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}$，得到$\frac{w}{k_w}$在 x 方向的正交分解=$\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}\cdot\frac{1}{k_w}$【当然也可写为=$\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_v\cdot k_u}$，哪种方便用哪种。】

(4).根据 $w\cdot\cos\alpha=\frac{u-v\cdot\cos\theta}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}$，我们轮换轮换应该有：$v\cdot\cos\theta=\frac{u-w\cdot\cos\alpha}{1-\frac{uw\cos\alpha}{c^2}}$，我们来看看是不是这样，检验一下理论的自洽与否：我们将 $w\cdot\cos\alpha=\frac{u-v\cdot\cos\theta}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}$代入$\frac{u-w\cdot\cos\alpha}{1-\frac{uw\cos\alpha}{c^2}}$，得到：$\frac{u-\frac{u-v\cdot\cos\theta}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}}{1-\frac{uw\cos\alpha}{c^2}}=\frac{u\left(1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)-(u-v\cdot\cos\theta)}{(\frac{k_w\cdot k_u}{k_v})(\frac{k_v\cdot k_u}{k_w})}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot v\cdot\cos\theta}{k_u^2}=v\cdot\cos\theta$，我们确实得到了合乎想象的结果。

同样比较有意思的(这将链接到 5.㈡.①.(1).和 IV.2.②./⑤.)：

i.$\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}\cdot(\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B)=w\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\triangle t_?=\triangle x_C$

ii.$\frac{u-w\cdot\cos\alpha}{1-\frac{uw\cos\alpha}{c^2}}\cdot(\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle t_?)=v\cdot\cos\theta\cdot\triangle t_{??}=v\cdot\cos\theta\cdot\triangle t_B=\triangle x_B(new)$

②.⊥ u 方向上：$w\cdot\sin\alpha=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$、$w\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$

(1).同样，在⊥ **u** 方向上，我们也沿用①.(3).的逻辑：

i.我们同样有理由也认为相对论速度在⊥ **u** 分量上也普适，即{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在⊥ **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在⊥ **u** 方向上的分量|B 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A}/{时间刻度数|B 下，C 于 B(A)}={$\triangle y_B$}/{$\triangle t_C$}

即有{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在⊥ **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle y_B$}/{$\triangle t_C$}，现在勒令{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}，那么对应的{空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}={$\triangle y_B$}。

ii.{非相对论相对运动速度 w 在⊥ **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，A 于 A}。

iii.在 i.中我们勒令了{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}，根据 5.㈠.①.(1).我们有：当 A 的网格为标准网格时，当 A 系也看见 C 系时间刻度数变化$\triangle t_C$时，A 时间流逝$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$，即与{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}相对应的，有{时间刻度数|A 下，A 于 A}={$\triangle t_?$}={$\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$}。

iv.现在又利用 i.中已经得到的{空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}={$\triangle y_B$}，将以上两个式子代入 ii.中的方程：w·sin(π-α)={非相对论相对运动速度 w 在⊥ **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}/{时间刻度数|A 下，A 于 A}={$\triangle y_B$}/{$\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$}。于是我们便有方程：$w\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{\triangle y_B}{\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B}=\frac{\frac{\triangle y_B}{\triangle t_B}}{\frac{k_v}{k_w}}$

v.现由于 5.㈠.①.(1).中的 5 个 definitions 中的：$(v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B=\triangle y_B$，我们便有$\frac{\triangle y_B}{\triangle t_B}=v\cdot\sin\theta$，现将其代入$w\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{\frac{\triangle y_B}{\triangle t_B}}{\frac{k_v}{k_w}}$，即有$w\cdot\sin\alpha=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$，便有 w 的正交分解之$w\cdot\sin\alpha=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$，它的另一种表示形式为：$w\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$。

vi.回到 i.：{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在⊥ **u** 方向上的分量|A 下，C 于 A}={△ y_B}/{△ t_C}=$\frac{\triangle y_B}{k_v \cdot \triangle t_B}$=$\frac{\triangle y_B}{\frac{k_v}{k_w} \cdot \triangle t_B}$·$\frac{1}{k_w}$= w·sin(π-α)·$\frac{1}{k_w}$=$\frac{w}{k_w}$·sin(π-α)，进一步我们可以得到意义上合乎逻辑的$\frac{w}{k_w}$·sin(π-α)的具体表达式=$\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$。

7.相对论正弦定理

①. $\frac{\frac{w}{k_w}}{\frac{v}{k_v}}=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$或$\frac{\frac{w}{k_w}}{\sin\theta}=\frac{\frac{v}{k_v}}{\sin\alpha}$或$\frac{w}{k_w}\cdot\sin\alpha=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$

(1).根据 6.②.我们有：$\frac{\frac{w}{k_w}}{\frac{v}{k_v}}=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$，或者写成$\frac{\frac{w}{k_w}}{\sin\theta}=\frac{\frac{v}{k_v}}{\sin\alpha}$、$\frac{w}{k_w}\cdot\sin\alpha=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$，这个式子是不是要比 w 或$\frac{w}{k_w}$在⊥ **u** 方向上或者说在 y 方向的分解表达式要好看些？并且，它同样显示了对牛顿时空下的正弦定理"$\frac{w}{\sin\theta}=\frac{v}{\sin\alpha}$"的继承；轮换规则：$\frac{\text{边 1}}{\sin\text{ 对角 1}}=\frac{\text{边 2}}{\sin\text{ 对角 2}}$。

8.相对论正切定理

①.$\tan\alpha=k_u\cdot\tan\alpha_0$、$\tan(\pi-\alpha)=k_u\bullet\tan(\pi-\alpha_0)$

(1).方法一：根据 6.w 的正交分解中两个方向上的式子：w·cos(π-α)=$\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{v u\cos\theta}{c^2}}$、w·sin(π-α)=$\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$，后式除以前式得 tan(π-α)=$\frac{v\cdot\sin\theta}{v\cdot\cos\theta-u}\cdot\frac{1-\frac{v u\cos\theta}{c^2}}{\frac{k_v}{k_w}}$，又因$\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}=1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}$，于是我们有 tan(π-α)=$\frac{v\cdot\sin\theta}{v\cdot\cos\theta-u}\cdot\frac{\frac{k_v\cdot k_u}{k_w}}{\frac{k_v}{k_w}}=k_u\cdot\frac{v\cdot\sin\theta}{v\cdot\cos\theta-u}$；现再将$(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B=\triangle x_B$以及$(v\cdot\sin\theta)\cdot\triangle t_B=\triangle y_B$，代入其中，得到：tan(π-α)=$k_u\cdot\frac{\triangle y_B}{\triangle x_B}$，现假设 tan(π-$\alpha_0$)=$\frac{\triangle y_B}{\triangle x_B}$，我们便有：tan(π-α)=$k_u$·tan(π-$\alpha_0$)，于是也有：tanα=$k_u$·tan$\alpha_0$。【其中$\alpha_0$={B 下|$\mathbf{w}_0$与$-\mathbf{u}$的夹角}，其中$\mathbf{w}_0$={B 下|$\mathbf{v}-\mathbf{u}$}】

(2).方法二：利用 5.坐标间隔变换：

i.根据 5.坐标间隔变换中的㈡.①.(△ x_C,△ y_C,△ z_C,衡量标准)=($\frac{1}{k_u}$·△ x_B,△ y_B,△ z_B,A 下|C 时间流逝△ t_C)，我们有$\frac{\triangle y_C}{\triangle x_C}=k_u\cdot\frac{\triangle y_B}{\triangle x_B}$【虽然等号左边的时间流逝为 A 下|C 时

间流逝$\triangle t_C$，等号右边的时间流逝为 B 下|C 时间流逝$\triangle t_C$，A、B 两系时间流逝不等，但速度夹角和时间流逝有什么关系？因此时间流逝标准并不影响该方程的成立】，所以有$\frac{\triangle y_C}{\triangle x_C}=k_u\cdot\tan(\pi-\alpha_0)$。

又因 5.㈠.①.(1).中的 5 个 definitions 中的：$\triangle L\cdot\cos(\pi-\alpha)=\triangle x_C$、$\triangle L\cdot\sin(\pi-\alpha)=\triangle y_C$，又有$\frac{\triangle y_C}{\triangle x_C}=\tan(\pi-\alpha)$，因而有$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\triangle y_C}{\triangle x_C}=k_u\cdot\tan(\pi-\alpha_0)$。

ii.同样，利用任意其他的坐标间隔变换也可以做到：$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\triangle y_C}{\triangle x_C}=\frac{k_w\cdot\triangle y_B}{\frac{k_w}{k_u}\cdot\triangle x_B}=\frac{\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B}{\frac{k_w}{k_u\cdot k_v}\cdot\triangle x_B}=\frac{\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\cdot\triangle y_B}{\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle x_B}=k_u\cdot\frac{\triangle y_B}{\triangle x_B}=k_u\cdot\tan(\pi-\alpha_0)$。

All roads lead to Roman, isn't it?

IV.闵科夫斯基时空

This is a special zone for you to get familiar with.在这里我会以倒叙的写作手法为你带来这方面的 tricks，享受这场奇怪而精彩的 magic show。

1.我的现有体系下的闵科夫斯基时空

①.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left(k_u^2+\frac{k_u^2\cdot k_w^2}{k_v^2}-2\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\right)=\left(k_u^2+\frac{k_u^2\cdot k_v^2}{k_w^2}-2\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}\right)$

②.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left[\left(1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\right)^2-(1-k_u^2)\right]=\left[\left(1-\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}\right)^2-(1-k_u^2)\right]$

③.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left[\left(1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}\right]=\left[\left(1-\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}\right]$

④.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{1-\frac{k_u\cdot k_w}{k_v}}{\frac{u}{c^2}}\right)^2-c^2\right]=\left[\left(\frac{1-\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}{\frac{u}{c^2}}\right)^2-c^2\right]$

⑤.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left[(w\cdot\cos\alpha)^2-c^2\right]=\left[(v\cdot\cos\theta)^2-c^2\right]$ (how beautiful this equation is!)

⑥.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot(w\cdot\cos(\pi-\alpha))^2-\left(\frac{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}{k_u}\right)^2\cdot c^2=(v\cdot\cos\theta)^2-c^2$

⑦.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left(\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}\right)^2-\left(\frac{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}{k_u}\right)^2\cdot c^2=(v\cdot\cos\theta)^2-c^2$

⑧.$\left(\frac{k_v}{k_w}\right)^2\cdot\left(\frac{v_x-u}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}\right)^2-\left(\frac{1-\frac{uv_x}{c^2}}{k_u}\right)^2\cdot c^2={v_x}^2-c^2$

⑨.$\left(\frac{v_x-u}{k_u}\right)^2-\left(\frac{1-\frac{uv_x}{c^2}}{k_u}\right)^2\cdot c^2={v_x}^2-c^2$ (A glimpse of a light beam across the sky!)

⑩.$\left(\frac{(v_x\cdot t_0)-u\cdot t_0}{k_u}\right)^2-\left(\frac{t_0-\frac{u\cdot(v_x\cdot t_0)}{c^2}}{k_u}\right)^2\cdot c^2=(v_x\cdot t_0)^2-(c\cdot t_0)^2$

(1).$\left(\frac{(v_x\cdot t_0)-u\cdot t_0}{k_u}\right)^2-\left(\frac{t_0-\frac{u\cdot(v_x\cdot t_0)}{c^2}}{k_u}\right)^2\cdot c^2=(v_x\cdot t_0)^2-(c\cdot t_0)^2$

(2).令$v_x\cdot t_0=x_0$，则有：$\left(\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}\right)^2-c^2\cdot\left(\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{k_u}\right)^2={x_0}^2-(c\cdot t_0)^2$

(3).令$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{k_u}$，则有：$x^2-(c\cdot t)^2={x_0}^2-(c\cdot t_0)^2$ (Amazing?!......)

2.部分元素的解释

①.这里的t_0相当于$\triangle t_B$。

②.这里的$x_0=v_x\cdot t_0$，本该在我的模型：坐标间隔变换中扮演$\triangle x_B$的角色，但这里的x_0是新意义下的$\triangle x_B$，即$\triangle x_B(new)$。

即在那里的话，“$x_0=v_x\cdot t_0$” is supposed to be written as “$x_0=(v_x-u)\cdot t_0$”，它对应着“$\triangle x_B=(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B$”，其中$\triangle x_B$={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A(以 B 的网格密度状况衡量)}，执行标准：{时间刻度数|B 下，C 于 B}={$\triangle t_C$}；不过在这里，“$x_0=v_x\cdot t_0$”对应着新$\triangle x_B$意义下的“$\triangle x_B(new)=(v\cdot\cos\theta)\cdot\triangle t_B$”，这里的$\triangle x_B(new)$={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 B}，执行标准：{时间刻度数|B 下，C 于 B}={$\triangle t_C$}。

③.这里的$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{k_u}$相当于 III.5.㈡.①.(1).中的$\triangle t_?$。

即$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{k_u}=\frac{1-\frac{uv_x}{c^2}}{k_u}\cdot t_0=\frac{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}{k_u}\cdot t_0=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B=\triangle t_?$。【III.5.㈡.①.(1).我们有：当 A 的网格为标准网格时，当 A 系也看见 C 系时间刻度数变化$\triangle t_C$时，A 时间流逝$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$，即与{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}相对应的，有{时间刻度数|A 下，A 于 A}={$\triangle t_?$}={$\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$}。】

④.这里的$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}$相当于 III.5.㈡.①.中的$\triangle x_C$，即$x=\triangle x_C=w\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\triangle t_?$。

即 III.6.①.(3).中，当{时间刻度数|A 下，C 于 A}={$\triangle t_C$}时，对应的{空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A}={$\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$}。即$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}=\frac{v_x\cdot t_0-u\cdot t_0}{k_u}=\frac{v_x-u}{k_u}\cdot t_0=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\cdot\triangle t_B$，而根据 5.㈠.①.(1).中的 5 个 definitions 中的：$(v\cdot\cos\theta-u)\cdot\triangle t_B=\triangle x_B$，所以 $x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\cdot\triangle t_B=\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B=\triangle x_C$。

同时，$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\cdot\triangle t_B=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\cdot\frac{k_w}{k_v}\cdot\triangle t_?=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}\cdot\triangle t_?=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}\cdot\triangle t_?=w\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\triangle t_?$

⑤.所以对于我们的公式"$x^2-(c\cdot t)^2=x_0{}^2-(c\cdot t_0)^2$"可以用我们的旧元素，将其写为我们熟悉的样子"$\triangle x_C{}^2-(c\cdot\triangle t_?)^2=\triangle x_B(new)^2-(c\cdot\triangle t_B)^2$"

又因为 III.5.㈡.①.给出了：($\triangle x_C$,$\triangle y_C$,$\triangle z_C$,衡量标准)=($\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$,$\triangle y_B$,$\triangle z_B$,A 下|C 时间流逝$\triangle t_C$)，因此在衡量标准：B 下|C 时间流逝=A 下|C 时间流逝=$\triangle t_C$下，还将有：$\triangle x_C{}^2+\triangle y_C{}^2+\triangle z_C{}^2-(c\cdot\triangle t_?)^2=\triangle x_B(new)^2+\triangle y_B{}^2+\triangle z_B{}^2-(c\cdot\triangle t_B)^2$【因为在同样的标准下，$\triangle y_C=\triangle y_B$，$\triangle z_C=\triangle z_B$，加上$\triangle y_C{}^2+\triangle z_C{}^2=\triangle y_B{}^2+\triangle z_B{}^2$即可】

于是我们在以后的旅途中，会看到对应的$x^2+y^2+z^2-(c\cdot t)^2=x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-(c\cdot t_0)^2$。【注：像$x_0=\triangle x_B(new)\neq\triangle x_B$，$y$、$z$、$y_0$、$z_0$虽均有类似的：$y_0(=\triangle y_B(new))\neq\triangle y_B$、$y(=\triangle y_C(new))\neq\triangle y_C$，但里面的不等号是因另外一种原因而起的，不过由于$y_0^2+z_0^2=\triangle y_B^2+\triangle z_B^2$、$y^2+z^2=\triangle y_C^2+\triangle z_C^2$，等式仍然成立：在以后的模型中，我们会赋予$y$、$z$、$y_0$、$z_0$新的意义，并且在新意义下，该式也成立。】

V.开始把我的工作纳入主流认知体系：salute to the pioneers.

1.坐标变换

①.伽利略变换

(1).引入

在相对论发展以前，$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$，tegether with $y=y_0$、$z=z_0$是广为所知和所接受的【注：为了服务于我的 model，让理论前后共用一个通用的模型，所以这里x_0代替了 x，x 代替了 x′，t_0代替了 t，t 代替了 t′，u 代替了 v，即$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$代替了主流方程形式$x'=x-v\cdot t$、$x=x'+v\cdot t'$】，并且我们承认若我们还没有认识相对论之前，会肯定其的正确性。

i.为了和以前的模型接轨，这两个主要的式子$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$，其中的元素可以一一对应地写为如下熟悉的旧元素：$\triangle x_C=\triangle x_B(new)-u\cdot\triangle t_B$、$\triangle x_B(new)=\triangle x_C+u\cdot\triangle t_?$，对应元素t、$t_0$、x、$x_0$——$\triangle t_?$、$\triangle t_B$、$\triangle x_C$、$\triangle x_B(new)$在含义上是一样的。

ii.同时t、t_0、x、x_0在意义上也与 II.2.①.中的$\triangle t$、$\triangle t_0$、$\triangle x$、$\triangle x_0$完全相同。(这也是为什么我没有采用t′、t、x′、x系统)

iii.该牛顿时空和接下来的狭义相对论时空甚至整本书都是基于同一个物理模型：II.3.②.stage03 的相对速度层面图，以及 II.3.③.中的图，甚至连对应的字母都是一样的——这也是为什么我采用的是 u 而不是 v 作为两个观察者所在的系的相对速度：因为在我们的图中，跳转前所在的系 B 和跳转后所在的系 A(如果 A、B 系均以 C 系过相同时间$\triangle t_C$为标准，那么也可称 A 系为跳转前的系、B 系为跳转后的系，这时候他们逻辑上平等，接下来的模型就是这样的。)之间的相对速度是由 u 表示的，而 C 系均作为被观察的对象。

(2).旧时空观

i.A、B 两系的各坐标系的对应坐标轴同向，并且如 III.5.㈠.①.(2).的物理图景所示，x 轴正向为平行于 AB 系相对速度 **u** 的方向，并由 B 指向 A；不过与 III.5.㈠.①.(2).不同的地方有三处：

a.B 系所建立的坐标系的原点不再落在 A 系头上，而是在落在 B 系头上，以便测量 C 系空间坐标在 B 的 x 轴上的投影$x_0=\triangle x_B(new)$。

b.A、B 两系所建立的坐标系的 y 轴均不再局限于三个相对速度 **u**、**v**、**w** 构成的平面，而是只需要垂直于各自的 x 轴，而不规定其具体方向(但确定下来后不要随意更改，并且两 y 轴相平行)；因此各自的 z 轴也只需要垂直于可绕 x 轴旋转的 xOy 平面并与 x、y 轴共同构成右手系即可。

c.A、B 系原点重合开始计时，此时为时间t_0和t对应的时间轴的零点，即此时$t_0=t=0$(注：该规定仅仅规定了这一时刻有$t_0=t$，而并不能现在说它们一直满足此关系)。【“A、B 系原点重合开始计时”＋“此时$t_0=t=0$”是伽利略变换和洛伦兹变换的重要前提，因为它们是类似$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$这样有类似$u\cdot t_0$、$u\cdot t$部分的式子成立的必然要求】【以前我们用的是时间间隔，当时并不需要考虑时间轴的零点选取问题。】

ii.由于 **u** 的方向也是由 B 指向 A，与 x 轴同向，因此两个主要方程$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$中 u 为正。

iii.仅仅由$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$，把其中一个代入另一个，我们便可以推出$t_0=t$，于是从原先的四个式子：$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$、$y=y_0$、$z=z_0$，我们便进化到了伽利略变换及其逆变换：

a.$x=x_0-u\cdot t_0$、$y=y_0$、$z=z_0$、$t=t_0$

b.$x_0=x+u\cdot t$、$y_0=y$、$z_0=z$、$t_0=t$

②.洛伦兹变换

伽利略变换给了世人充足的理由相信：时空是绝对的，谁来量度都是等价的；为了不太冒犯权威和为了在前人已有的基础上拓展，彭加勒、洛伦兹、爱因斯坦等

boss提出了的$x=\gamma(x_0-u\cdot t_0)$、$x_0=\gamma(x+u\cdot t)$修正草案(这用到了狭义相对性原理：两个式子均有乘积因子γ并且它们相同)，以调谐“光速最大”or“光速不变”问题。

接下来我会以我的理解对洛伦兹变换进行演绎，期间会稍微改变式子的模样以与我的理论兼容；整个过程是很和谐地进行的，各位不会觉得“突兀”。

(1).我的洛伦兹因子γ的得来

i.我把$x=\gamma(x_0-u\cdot t_0)$、$x_0=\gamma(x+u\cdot t)$写作$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\gamma}$、$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\gamma}$，这仅仅是为了与我之前的理论接轨，除此之外，我们没有更多的理由这样做。

ii.仅仅由$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\gamma}$、$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\gamma}$这两个式子，把其中一个代入另一个，比如若把后者代入前者：$x=\frac{\frac{x+u\cdot t}{\gamma}-u\cdot t_0}{\gamma}$，进一步化简有：$\gamma^2\cdot x=x+u\cdot t-\gamma\cdot u\cdot t_0$，得到$\gamma\cdot u\cdot t_0=(1-\gamma^2)\cdot x+u\cdot t$，即有$t_0=\frac{(1-\gamma^2)\cdot x+u\cdot t}{\gamma\cdot u}$；同样的道理，将前者代入后者，即有类似的$t=\frac{(\gamma^2-1)\cdot x_0+u\cdot t_0}{\gamma\cdot u}$。

iii.根据现有的两对式子：$1^0.x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\gamma}$、$t=\frac{(\gamma^2-1)\cdot x_0+u\cdot t_0}{\gamma\cdot u}$和$2^0.x_0=\frac{x+u\cdot t}{\gamma}$、$t_0=\frac{(1-\gamma^2)\cdot x+u\cdot t}{\gamma\cdot u}$，再加上光速不变所对应的这第三个式子$3^0.\frac{x}{t}=c=\frac{x_0}{t_0}$，需且仅需这三个：

step01：把1^0或者2^0代入3^0，即有：$\frac{u\cdot x_0-u^2\cdot t_0}{(\gamma^2-1)\cdot x_0+u\cdot t_0}=c=\frac{u\cdot x+u^2\cdot t}{(1-\gamma^2)\cdot x+u\cdot t}$，即有：$u\cdot x_0-u^2\cdot t_0=c\cdot(\gamma^2-1)\cdot x_0+c\cdot u\cdot t_0$或者$u\cdot x+u^2\cdot t=c\cdot(1-\gamma^2)\cdot x+c\cdot u\cdot t$，合并同类项得：$[u+c\cdot(1-\gamma^2)]\cdot x_0=(c\cdot u+u^2)\cdot t_0$或者$[u-c\cdot(1-\gamma^2)]\cdot x=(c\cdot u-u^2)\cdot t$。移项得：$\frac{x_0}{t_0}=\frac{c\cdot u+u^2}{u+c\cdot(1-\gamma^2)}$或者$\frac{x}{t}=\frac{c\cdot u-u^2}{u-c\cdot(1-\gamma^2)}$。

step02：再将新推出的：$\frac{x_0}{t_0}=\frac{c\cdot u+u^2}{u+c\cdot(1-\gamma^2)}$或者$\frac{x}{t}=\frac{c\cdot u-u^2}{u-c\cdot(1-\gamma^2)}$代入：$3^0.\frac{x}{t}=c=\frac{x_0}{t_0}$中，即可得到$\frac{c\cdot u+u^2}{u+c\cdot(1-\gamma^2)}=c$或者$\frac{c\cdot u-u^2}{u-c\cdot(1-\gamma^2)}=c$，随意解其中一个，即可得到$\gamma^2=1-\frac{u^2}{c^2}$；当u很小时，$\gamma$应该近似于1而不是$-1$才能和旧理论相衔接，因此开方后取$\gamma=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$，这便是“我的”洛伦兹因子$\gamma$的具体表达式的得来，可见其在函数表达式上与$k_u$完全吻合。

(2).洛伦兹变换的具体形式及其逆变换

i.将得到的$\gamma=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$代入(1).iii.的两对式子中，即有：$1^0.x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$和$2^0.x_0=\frac{x+u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t_0=\frac{t+\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，那么我们便从原先的四个式子：$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\gamma}$、$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\gamma}$、$y=y_0$、$z=z_0$，进化到了洛伦兹变换及其逆变换：

a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$y=y_0$、$z=z_0$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

b.$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$y_0=y$、$z_0=z$、$t_0=\frac{t+\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

ii.正如之前所提到的，洛伦兹变换由于也存在$u\cdot t_0$、$u\cdot t$部分，因此其成立的前提也有“A、B 系原点重合开始计时”＋“此时$t_0=t=0$”；并且其还与伽利略变换不同的是：

在伽利略变换中，若把$t_0=t=0$代入$x=x_0-u\cdot t_0$、$x_0=x+u\cdot t$，会得到$x_0=x$，这正是 A、B 系原点重合时所应见到的景象，并且因此对x_0、x的关于各自的时间的函数关系式$x_0(t_0)$、$x(t)$的具体长相并无限制(所以伽利略变换中的 C 系可以是非惯性系)；

然而在洛伦兹变换中若把$t_0=t=0$代入 a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$以及 b.$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t_0=\frac{t+\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$中，会分别得到：a.$x=\frac{x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$0=\frac{-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$以及 b.$x_0=\frac{x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$0=\frac{\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，由于 u 通常不为 0，所以解这四个方程会得到$x_0=x=0$，这就意味着，当 A、B 系原点重合时，洛伦兹变换不仅应有$t_0=t=0$，还将有x_0、x的关于各自的时间的函数关系式满足：$x_0(0)=x(0)=0$，而伽利略变换只需满足$x_0(0)=x(0)$即可(调整常数很容易做到)。

iii.由于洛伦兹变换建立在平直时空和惯性系的基础上，各系之间的相对速度为常值，因此$x_0(t_0)$和$x(t)$是关于各自的时间的一次函数，类如$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$+const01.以及$x(t)=w_x\cdot t$+const02.【注：$v_x=v\cdot\cos\theta$、$w_x=w\cdot\cos(\pi-\alpha)$】

那么根据 ii.所提到的，当$t_0=t=0$时，有$x_0(t_0)=x(t)=0$，即有$v_x\cdot 0$+const01.$=w_x\cdot 0$+const02.=0，于是 const01.=const02.=0，于是即有：$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$、$x(t)=w_x\cdot t$，可见洛伦兹变换中的x_0和x关于各自时间的函数关系的取法并不是自由的。同样体现了这一点的，还有我们在(1).iii.所引进的第三个式子$3^0.\frac{x}{t}=c=\frac{x_0}{t_0}$：其中的$x=c\cdot t$、$x_0=c\cdot t_0$并不含常数。

iv.洛伦兹变换中的新旧元素对照表及其含义同样参考①.i./ii.以及 IV.2.，之前已经提及，我们从头至尾所用的模型是相同的，同样字母所代表的含义是不变的。在和我之前的理论进行对比后，我有以下认识：

a.之前我们的理论，以 III.5.坐标间隔变换为代表，落脚于“间隔”，并不关心也无法关心初始时空坐标及其变换式，这不是我们理论的管辖范围；而洛伦兹变换作为坐标变换，相对于我们之前的理论，长处便体现在此。

b.然而，由于洛伦兹变换中的t、t_0、x、x_0，均有限制：模型中，必须以 A、B 系原点重合开始计时：$t_0=t=0$，并且x_0和x关于各自时间的函数关系的取法并不是自由的：$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$、$x(t)=w_x\cdot t$，这导致了以不自由的t、t_0、x、x_0元素为模型的洛伦兹变换并不是真正意义上的普适的坐标变换，即不是所有时空坐标都能代入t、t_0、x、x_0其中；而以 III.5.坐标间隔变换为代表的旧理论虽然无法从 C 在 B 系的任意某个时空坐标得出某标准下对应的 C 在 A 系的时空坐标，但是一旦我们知道某标准下 C 在 A、B 两系的初始时空坐标，我们便可以通过已知在第二个时间点时 C 在 B 系的时空坐标，进而已知两个时间点之间 C 在 B 系划过的时空间隔，得出 C 在 A 系划过的时空间隔，进而得出在第二个时间点时 C 在 A 系的时空坐标。

2.洛仑兹变换与之前理论的相通之处

①.时空变换

(1).时间变换

i.在 a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$中，令$x=0$，带入第一个等式得$x_0=u\cdot t_0$，再将$x_0=u\cdot t_0$带入$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$(或者直接将$x=0$带入 b.$t_0=\frac{t+\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$)，便有：$t=\frac{t_0-\frac{u^2}{c^2}\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=k_u\cdot t_0$

ii.之前提到$x=w_x\cdot t$，而这里有$x=0$，所以$w_x=0$；之前提到$x_0=v_x\cdot t_0$，而现在又有$x_0=u\cdot t_0$，得$v_x=u$；之前提到$t=\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B=\frac{k_v}{k_w}\cdot t_0$，现在又有$t=k_u\cdot t_0$，得$\frac{k_v}{k_w}=k_u$。

于是这个图景是这样的：在 A 系看来，C 系向 A 系 x 轴投影点恒与 A 系原点重合(即x=0、w_x=0)，A 系原点处有**−u** ⊥ **w**；在 B 系看来，A 系原点处仍然有 **u** ⊥ **v-u**(即v_x=u、v_y=**v**·sinθ=**v-u**、cosθ=$\frac{u}{v}$)。

iii.我们需要得到的结论并不是$t=k_u\cdot t_0$所对应的$\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$，而是$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$；也就是说，我们只需要证明此时$\triangle t_A=\triangle t_?$：这是一个非常有意思的结论，这个模型也因此特殊起来，并且这个说理过程也是精华中的精华；而现在我会像 IV.1.一样，以“倒叙”的写作手法展示整个推导过程：

a.$u^2=u^2\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{k_v^2}$ → b.$u^2=(\frac{u^2}{v^2}-\frac{u^2}{c^2})\cdot\frac{v^2}{k_v^2}$ → c.$u^2=[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)]\cdot\frac{v^2}{k_v^2}$；现由于 cosθ=$\frac{u}{v}$，于是$1-\frac{u^2}{v^2}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，代入其中便有：d.$u^2=[k_u^2-\sin^2\theta]\cdot\frac{v^2}{k_v^2}$ → e.$(u\cdot\sin\theta)^2=[k_u^2-\sin^2\theta]\cdot\left(\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta\right)^2$ → f.$\left(\frac{v}{k_v}\cdot\sin^2\theta\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2=k_u^2\cdot\left(\frac{v\cdot\sin\theta}{k_v}\right)^2$ → g.$\left(\frac{v\cdot(\cos^2\theta-1)}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2=k_u^2\cdot\left(\frac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{k_v}\right)^2$ → h.$\sqrt{\left(\frac{v\cdot(\frac{u}{v}\cdot\cos\theta-1)}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2}=k_u\cdot\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}{k_v}$ → i.$\triangle t_B\cdot\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2}=k_u\cdot\triangle t_B\cdot\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|}{k_v}$ → j.$\triangle t_B\cdot\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2}=\triangle t_?\cdot\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|\cdot\triangle t_B}{k_v\cdot\triangle t_B}$；根据数学归纳法：现在假设我们要证的结论$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$成立，那么将会有$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B$，接下来我们将$\triangle t_C=k_v\cdot\triangle t_B$代入方程，如果无矛盾地推出了$\triangle t_A=\triangle t_?$，于是$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$成立，与假设无矛盾，于是最终$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$成立——于是有 k.$\triangle t_A\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2}\cdot\triangle t_B}{\triangle t_A}=\triangle t_?\cdot\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$

现根据 III.6.①.(3).i.所提到的相对论速度在分量上的普适性，即{相对论运动速度$\frac{-\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|B 下，A 于 C}={相对论运动速度$\frac{-\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|A 下，A 于 C}；而{相对论运动速度$\frac{-\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|B 下，A 于 C}={空间刻度数(分量)|B 下，A 于 C}/{时间刻度数|B 下，A 于 C(B)}=$\frac{\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2}\cdot\triangle t_B}{\triangle t_A}$；另根据 II.1.Introduction04 有{相对论运动速度$\frac{-\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|A 下，A 于 C}={相对论运动速度$\frac{\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|C 下，C 于 A}，又根据 II.1.Introduction05(或者说仍然根据 III.6.①.(3).i.)有{相对论运动速度$\frac{\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|C 下，C 于 A}={相对论运动速度$\frac{\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|B 下，C 于 A}={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A}/{时间刻度数|B 下，C 于 A(B)}=$\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$，即有{相对论运动速度$\frac{-\mathbf{w}}{k_w}$在 y 方向上的分量|A 下，A 于 C}=$\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$。

于是联立以上三个方程：$\frac{\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2\cdot\triangle t_B}}{\triangle t_A}$={相对论运动速度$\frac{-w}{k_w}$在 y 方向上的分量|B 下，A 于 C}={相对论运动速度$\frac{-w}{k_w}$在 y 方向上的分量|A 下，A 于 C}$=\frac{|v-u|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$，得到$\frac{\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2\cdot\triangle t_B}}{\triangle t_A}=\frac{|v-u|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$；又由于在上上一段末尾，我们得到了 k.$\triangle t_A\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}\right)^2+(u\cdot\sin\theta)^2\cdot\triangle t_B}}{\triangle t_A}=\triangle t_?\cdot\frac{|v-u|\cdot\triangle t_B}{\triangle t_C}$，联立它们便可得到：$\triangle t_A=\triangle t_?$；于是$\triangle t_A=\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$，即$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$，即 II.2.①.中的$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$。

iv.同样我们可以令 b.$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$和 a.$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$中的$x_0=0$，像之前用“$\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$”以及$\triangle t_A=\triangle t_?$推导出$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$一样，我们可以通过“$\triangle t_B=k_u\cdot\triangle t_?$”以及“$\triangle t_!=\triangle t_B$”推导出类似的公式：“$\triangle t_!=k_u\cdot\triangle t_?$”，并且正如之前的$\triangle t_?$既是$\triangle t_?$又等于$\triangle t_A$，这里的$\triangle t_B$也既是$\triangle t_B$又等于$\triangle t_!$；此时由两个新的相对速度 **u** ⊥ **v** 所构成的直角三角形便与之前由−**u** ⊥ **w** 所构成的直角三角形关于 A、B 连线的垂直平分线对称；之前我们一开始时处在未跳转到 A 系的 B 系，而现在我们一开始却相反，处在已经从 A 系跳转到了的 B 系中；现在的$\triangle t_B$在含义上虽然仍然是$\triangle t_B$，但是已经主客观上变为客观了，是跳跃之后的系的标准时间了，现在的它在地位上等价于之前的$\triangle t_?$，即之前的$\triangle t_?$的位置现在被现在的$\triangle t_B$所占用；同样的改变还有：之前的$\triangle t_B$的位置现在被现在的$\triangle t_?$所占用、之前的$\triangle t_A$的位置现在被$\triangle t_!$所占用。

正如我们用$\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$得到了$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$，很多人傻乎乎的用$\triangle t_B=k_u\cdot\triangle t_?$错误的得到了$\triangle t=\frac{1}{k}\cdot\triangle t_0$，我不相信爱因斯坦是这样得来他的$\triangle t'=\frac{1}{k}\cdot\triangle t'_0$的，何况目前尚无可行的办法像我们直接得到$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$一样，通过同样的材料、不同的方法来直接得到$\triangle t'=\frac{1}{k}\cdot\triangle t'_0$。要知道，$\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$中的$\triangle t_B$、$\triangle t_?$和$\triangle t_B=k_u\cdot\triangle t_?$中的$\triangle t_B$、$\triangle t_?$，是分别以对立的(互为镜像的)系统中的标准为标准量度的，意义上是完全相反的，因此最终结果在意义上仍然将是与$\triangle t=k\cdot\triangle t_0$完全相同的。

(2).空间变换

i.Now, focus on 之前在 IV.2.④.中给出的$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}\cdot\triangle t_B=\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B=\triangle x_C$，而$x=\triangle x_C$={空间刻度数(分量)|A 下，C 于 A(以 C 时间流逝$\triangle t_C$为标准衡量)}；而根据 III.6.①.(3).i.所提到的相对论速度在分量上的普适性，即{相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 x 方向上的分量|A 下，C 于 A}={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 x 方向上的分量|B 下，C 于 A}，我们有$x=\triangle x_C$={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 x 方向上的分量|A 下，C 于 A}·$\triangle t_C$={相

对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 x 方向上的分量|B 下，C 于 A}·△ t_C={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A}【注：△ t_C={时间刻度数|B 下，C 于 A}】，于是即有x=△ x_C={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A(以 C 时间流逝△ t_C为标准衡量)}。

ii.又因x=△ x_C=$\frac{1}{k_u}$·△ x_B，于是{空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A}=$\frac{1}{k_u}$·△ x_B，而根据 IV.2.②.有△ x_B={空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A(以 B 的网格密度状况衡量)}，于是有：{空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A(以 A 的网格密度状况衡量)}=$\frac{1}{k_u}$·{空间刻度数(分量)|B 下，C 于 A(以 B 的网格密度状况衡量)}，即有 II.2.①.中的：△ $x = \frac{1}{k}$·△ x_0。

iii.事实上，这里空间变换的得来应该安排在时间变换之前，因为时间变换中的$\frac{u\cdot\cos\theta-v}{k_v}$用到了空间变换的概念；而这里的$\frac{v\cdot\cos\theta-u}{k_u}$看上去也用上了，事实上并没有，因为我们只对分子做了代换工作，而并没有尝试着通过理解整个分式而从中得到实质性帮助。——不过之所以我们这样安排，是因为我们很大程度上穿插了以前的很多概念，即使调换先后顺序，也不免有人说达不到目的 or 效果；就当这也是一次数学归纳法：假设旧领域正确，推出与旧领域相适应的新领域正确，进而旧领域正确。

②.从洛仑兹变换到 III.5.㈠.①.(1).中的坐标间隔变换的衡量标准之一：A 下|C 时间流逝△ t_C，以及该标准下的变换式

i.关于衡量标准之 A 下|C 时间流逝△ t_C这点，我们已经在 IV.2.③.中提及：t=△ $t_?$，其得来方法可以从中察看。

ii.关于该标准下的变换式中的某些部分，我们在 IV.2.①.中提及了：t_0=△ t_B；并在 IV.2.④.中提及了：x=△ x_C，其得来方法可以从中察看。

iii.根据 IV.2.①.中所提及的$x_0=v_x\cdot t_0$，我们将有△ $x_B(new)=x_0=v_x\cdot t_0=(v_x-u)\cdot t_0+u\cdot t_0=(v\cdot\cos\theta-u)\cdot$△ $t_B+u\cdot$△ t_B=△ x_B+x_A，因此△ x_B=△ $x_B(new)-x_A=x_0-x_A$；当然你也可以通过$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{k_u}$直接得到：$x=\frac{x_0-x_A}{k_u}$。

iv.在之前，(△ y_C,△ z_C)=(△ y_B,△ z_B)可以由“相对论速度在分量 y、z 上的普适性+A 系 B 系标准均为 C 时间流逝△ t_C”得到：即(△ y_C,△ z_C)={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 y、z 方向上的分量|A 下，C 于 A}·△ t_C={相对论运动速度$\frac{w}{k_w}$在 y、z 方向上的分量|B 下，C 于 A}·△ t_C=(△ y_B,△ z_B)；而在洛伦兹变换中，由于 A、B 两系 x 轴重合，以及⊥x 轴的网格原状和各向同性【其实还要加上新 y、z 的间隔变换仍然服从旧

$(\triangle y_C, \triangle z_C)$所满足的，我之前的结论】，于是有$y=y_0$、$z=z_0$，即$(y,y_0)=(z,z_0)$，并且这里的y、$y_0$、z、$z_0$的值都是由自由的 y、z 轴所量度的了。

现在我们把以上四点中的一切代入 IV.2.的($\triangle x_C,\triangle y_C,\triangle z_C$,衡量标准)=($\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B,\triangle y_B,\triangle z_B$,A 下|C 时间流逝$\triangle t_C$)，便可得到以洛伦兹变换中的各物理量表示的方程：

(x,y,z,衡量标准)=($\frac{1}{k_u}\cdot(x_0-x_A)$,$y_0$,$z_0$,A 下|A 时间流逝 t)

③.爱因斯坦的速度相加定理与我的 w 的正交分解不谋而合

i.主流写法下的速度相加定理：$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}}$、$u_y'=\frac{u_y\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}}$、$u_z'=\frac{u_z\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x\cdot v}{c^2}}$。我们将其中的元素一一替换以适应我们的通用模型：$w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_y=\frac{v_y\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_z=\frac{v_z\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$。

在进行证明之前，我们需要给出一些元素的含义：在 1.②.(2).iii.的厚中括号内有：$w_x=w\cdot\cos(\pi-\alpha)$，同样的有：$w_y=w\cdot\cos(\pi-\alpha)_y$、$w_z=w\cdot\cos(\pi-\alpha)_z$，其中$(\pi-\alpha)$、$(\pi-\alpha)_y$、$(\pi-\alpha)_z$均为：当 A 的网格为标准网格时，**w** 在 A 所建立的坐标系下的三个方向角；并且根据 1.①.(2).i.b.所提到的洛伦兹变换中的 y、z 轴的设定相对于 III.5.㈠.①.(2).的物理图景的自由化，我们有以下关系：$\cos^2(\pi-\alpha)_y+\cos^2(\pi-\alpha)_y=\sin^2(\pi-\alpha)$。也就是说，洛伦兹变换仍然是符合 III.5.㈠.①.(2).的厚中括号所提到的相对速度空间层面的种种特征的，只是量度方式不同而已；接下来我们会更进一步认识到这一点。

同样，像w_x、w_y、w_z一样，这里的v_x、v_y、v_z，也有：$v_x=v\cdot\cos\theta$、$v_y=v\cdot\cos\theta_y$、$v_z=v\cdot\cos\theta_z$，其中θ、θ_y、θ_z为当 B 的网络为标准网络时，**v** 在 B 所建立的坐标系下的三个方向角；并且同样有：$\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=\sin^2\theta$。

ii.跨时空的旅者，独立却等效的工作：

a.$w\cdot\cos(\pi-\alpha)=w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}$，这便是我们在 III.6.①.所推导的 w 在 **u** 方向上的正交分解：$w\cdot\cos(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\cos\theta-u}{1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}}$。

b.因$w_y=\frac{v_y\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}=\frac{v\cdot\cos\theta_y\cdot k_u}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}=\frac{v\cdot\cos\theta_y}{\frac{k_v}{k_w}}$、$w_z=\frac{v_z\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}=\frac{v\cdot\cos\theta_z\cdot k_u}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}=\frac{v\cdot\cos\theta_z}{\frac{k_v}{k_w}}$，于是再根据$\cos^2(\pi-\alpha)_y+\cos^2(\pi-\alpha)_y=\sin^2(\pi-\alpha)$以及$\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=\sin^2\theta$我们有：$(w\cdot\sin(\pi-\alpha))^2=(w\cdot\cos(\pi-\alpha)_y)^2+(w\cdot\cos(\pi-\alpha)_z)^2=w_y^2+w_z^2=(\frac{v\cdot\cos\theta_y}{\frac{k_v}{k_w}})^2+(\frac{v\cdot\cos\theta_z}{\frac{k_v}{k_w}})^2=(\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}})^2$，这便是 III.6.②.中的 w 在⊥ **u** 方向上的正交分解：$w\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v\cdot\sin\theta}{\frac{k_v}{k_w}}$。

iii.(附件/Additionally/福利/bonus)以洛伦兹变换简便推导速度相加定理：

a.在洛伦兹变换：a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$y=y_0$、$z=z_0$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$中，我们在 1.②.(2).提到过：洛伦兹变换中的t、t_0、x、x_0，均有限制：模型中，必须以 A、B 系原点重合开始计时：$t_0=t=0$，并且x_0和x关于各自时间的函数关系的取法并不是自由的：$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$、$x(t)=w_x\cdot t$；同样，y_0和y、z_0和z关于各自时间的函数关系的取法也不是自由的：它们将会满足：$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$；$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$、$z(t)=w_z\cdot t$。

你可以用相对论速度在分量上的普适性来暂时验证验证这些式子的正确性：由于$y=y_0$，则根据$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$，即有$v_y\cdot t_0=w_y\cdot t$，即有$v_y\cdot\triangle t_B=w_y\cdot\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$，即$v_y\cdot\triangle t_B=\frac{w_y}{k_w}\cdot k_v\cdot\triangle t_B$或者说$\frac{v_y}{k_v}=\frac{w_y}{k_w}$，即$v_y\cdot\triangle t_B=\frac{w\cdot\cos(\pi-\alpha)_y}{k_w}\cdot\triangle t_C$或者说$\frac{v\cdot\cos\theta_y}{k_v}=\frac{w\cdot\cos(\pi-\alpha)_y}{k_w}$，即$v_y\cdot\triangle t_B=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_y\cdot\triangle t_C$或者$\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_y=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_y$；而这两个分支的最终结果都合理得十分清晰，所以我们的$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$并不与$y=y_0$矛盾；同理因$\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_z=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_z$，$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$、$z(t)=w_z\cdot t$也与$z=z_0$相适应。

来源：这四个式子$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$；$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$、$z(t)=w_z\cdot t$可以通过已知/设定其中的两个：$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$，再加上 III.6.②. (1).vi.谈及的 w 在⊥ **u** 方向上的正交分解之：$\frac{w}{k_w}\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$或者 III.7.相对论正弦定理中的$\frac{w}{k_w}\cdot\sin\alpha=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$得到：比如将方程$\frac{w}{k_w}\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$两边的相对论速度在的旧 y 轴上的分量，再投影到各系互相平行的新 y 轴上，即有：$\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_y=\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_y$，此时再沿着上一段的这个结论的地方逆流而上即可，最后加上$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$以及 $y=y_0$，便可以得到$y(t)=w_y\cdot t$。

在这里我们也非常容易的可以从$\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_y=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_y$和$\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_z=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_z$以及$\frac{w}{k_w}\cdot\sin(\pi-\alpha)=\frac{v}{k_v}\cdot\sin\theta$看出：其与 i.中的两个结论：$\cos^2(\pi-\alpha)_y$

$+\cos^2(\pi-\alpha)_y=\sin^2(\pi-\alpha)$以及$\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=\sin^2\theta$并无矛盾；并且由此我们可以发现，相对论速度在分量上的普适性可以说来自于 III.6.①.(3).vi.以及 III.6.②. (1).vi.。

b.(a.的补充)在 V.1.②.(2).iii.中我们提到，$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$+const01.以及$x(t)=w_x\cdot t$+const02.中的各常数之所以为 0，是因为当$t_0=t=0$时，有$x_0(t_0)=x(t)=0$，而后者中 AB 重合时$t_0=t=0$又是洛仑兹变换中含$u\cdot t_0$、$u\cdot t$部分的式子成立的必然要求，而此时$x_0(t_0)=x(t)=0$是其代入洛仑兹变换后所得推论；可见在这个过程中我们并未有任何理由要求当$t_0=t=0$时，有额外的$y_0(t_0)=y(t)=0$、$z_0(t_0)=z(t)=0$成立，那么为什么y_0和y、z_0和z关于各自时间的函数关系的取法也不是自由的，且也有$y_0(t_0)=y(t)=0$、$z_0(t_0)=z(t)=0$成立，并且我们在一开始只能像上上一段那样无常数地给出：$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$呢?

根据 V.1.②.(2).iii.有：由于洛伦兹变换建立在平直时空和惯性系的基础上，各系之间的相对速度为常值，因此$y_0(t_0)$、$z_0(t_0)$是关于时间的一次函数，即有：$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$+const1.以及$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$+const2.；现根据 V.1.①.(2).i.b.我们将以洛伦兹变换所采用的新 y、z 轴量度的(y_0,z_0)转换为 III.5.㈠.①.(2).旧理论中以旧 y、z 轴量度的(y_B,z_B)【注：不像$x_0=x_B$一样，$(y_0,z_0)=(y_B,z_B)$不成立，因为洛伦兹变换所采用的 x 轴和旧理论一样，而 y、z 轴是新的；不过有$y_0^2+z_0^2=y_B^2+z_B^2$、$\triangle y_0^2+\triangle z_0^2=\triangle y_B^2+\triangle z_B^2$成立】：$(y_0,z_0)=(v_y\cdot t_0$+const1.,$v_z\cdot t_0$+const2.)=旧系统$(y_B,z_B)$下的($v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B$+const3.,const4.)。【注：为了在解释上更明了，这里的某些元素和某些式子在表示形式上与 IV.2.⑤.中的有冲突，不过它们的含义是相同的；各自的形式在各自的写作环境下有特定的作用，理解了这部分的表达之后，请以 IV.2.⑤.为准。】

根据在 V.1.②.(2).iv.a.所提到的，旧理论立足于坐标间隔变换，无法也不允许插入任何初始坐标【有以下两个说法：1.C 点在 A 系和 B 系的初始时空坐标并不一定符合坐标间隔变换公式(即将其作为间隔代入公式等式不一定成立)；2. C 点在 A 系和 B 系的初始时空坐标不需要也不允许满足任何公式，包括坐标间隔变换公式，它们之间不存在某个固定的映射函数关系，虽然可以有，但有没有和是什么均视具体情况而定。】，因此旧系统(y_B,z_B)下的($v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B$+const3.,const4.)中为了使得它体系下的伪坐标变换洛伦兹变换成立，默认 const3.=0(它没有理由为 0 以外的任何常数，虽然它也没有理由为 0 这个看上去也特殊的常数，不过这已经触及哲学的境地了)；

而新系统洛伦兹变换服从于旧理论的物理图景及坐标间隔变换，并且有$y_0^2+z_0^2=y_B^2+z_B^2$，因此$(v_y\cdot t_0+\text{const1.})^2+(v_z\cdot t_0+\text{const2.})^2=(v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B+\text{const3.})^2+(\text{const4.})^2$，其中$v_y=v\cdot\cos\theta_y$、$v_z=v\cdot\cos\theta_z$、const3.=0，于是$(v\cdot\cos\theta_y\cdot t_0+\text{const1.})^2+(v\cdot\cos\theta_z\cdot t_0+\text{const2.})^2=(v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B)^2+(\text{const4.})^2$，其中等式左

边的非常数部分，必须等于等式右边的非常数部分，即有$(v\cdot\cos\theta_y\cdot t_0)^2+2\cdot const1.\cdot v\cdot\cos\theta_y\cdot t_0+(v\cdot\cos\theta_z\cdot t_0)^2+2\cdot const1.\cdot v\cdot\cos\theta_z\cdot t_0=(v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B)^2$，又因$\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=\sin^2\theta$，所以$(v\cdot\cos\theta_y\cdot t_0)^2+(v\cdot\cos\theta_z\cdot t_0)^2=(v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B)^2$，于是$2\cdot const1.\cdot v\cdot\cos\theta_y\cdot t_0+2\cdot const1.\cdot v\cdot\cos\theta_z\cdot t_0=0$，即有 const1.=const2.=0，现在再将其反带回$y_0^2+z_0^2=y_B^2+z_B^2$，即可有 const4.=0。于是 const1.=const2.=const3.=const4.=0，得到$(y_0,z_0)=(v_y\cdot t_0,v_z\cdot t_0)$=旧系统$(y_B,z_B)$下的$(v\cdot\sin\theta\cdot\triangle t_B,0)$。

即有$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$。而用它来得到四个式子$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$；$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$、$z(t)=w_z\cdot t$的过程已经在 a.中展示了；并且 b.一开头那段末尾所提及的三个问题也均已得到回答。

c.推导：现根据更具体版本的洛伦兹变换：a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$y=w_y\cdot t$、$z=w_z\cdot t$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，我们有：$w_x=\frac{x}{t}=\frac{x_0-u\cdot t_0}{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}=\frac{v_x\cdot t_0-u\cdot t_0}{t_0-\frac{u\cdot v_x}{c^2}\cdot t_0}=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_y=\frac{y}{t}=\frac{w_y\cdot t\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)\cdot t_0}=\frac{w_y\cdot\frac{k_v}{k_w}\cdot t_0\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)\cdot t_0}=\frac{v_y\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)}$【这里用到了 a.中的$\frac{v}{k_v}\cdot\cos\theta_y=\frac{w}{k_w}\cdot\cos(\pi-\alpha)_y$来得到$\frac{w_y}{k_w}=\frac{v_y}{k_v}$进而得到$w_y\cdot\frac{k_v}{k_w}=v_y$】、$w_z=\frac{z}{t}=\frac{w_z\cdot t\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)\cdot t_0}=\frac{w_z\cdot\frac{k_v}{k_w}\cdot t_0\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)\cdot t_0}=\frac{v_z\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}\right)}$【同理$\frac{w_z}{k_w}=\frac{v_z}{k_v}$】，于是我们就得到了速度相加定理：$w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_y=\frac{v_y\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_z=\frac{v_z\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$；根据$1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}=\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}$，速度相加定理还可以表示为：$w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$、$w_y=\frac{k_w}{k_v}\cdot v_y$、$w_z=\frac{k_w}{k_v}\cdot v_z$。

④.闵科夫斯基时空

i.据洛伦兹变换：a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$y=y_0$、$z=z_0$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，有$x^2-(c\cdot t)^2=\frac{(x_0-u\cdot t_0)^2-(c\cdot t_0-\frac{u}{c}\cdot x_0)^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{x_0^2+u^2\cdot t_0^2-c^2\cdot t_0^2-\frac{u^2}{c^2}\cdot x_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot x_0^2-c^2\cdot(1-\frac{u^2}{c^2})\cdot t_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}=x_0^2-(c\cdot t_0)^2$；同样可以通过洛伦兹变换的逆变换通过类似的操作，从右边到左边地得到以上式子：$x^2-(c\cdot t)^2=x_0^2-(c\cdot t_0)^2$；再根据$y=y_0$、$z=z_0$，便有$x^2+y^2+z^2-(c\cdot t)^2=x_0^2+{y_0}^2+{z_0}^2-(c\cdot t_0)^2$。

ii.该等式中的各个量不会因它们的具体函数没有外显而可以对他们进行任意意义下的赋值：等式里的x、y、z、t、x_0、y_0、z_0、t_0的意义仍然是之前旅途中所赋予他

们的意义，它们的具体函数关系式仍然满足：$x_0(t_0)=v_x\cdot t_0$、$x(t)=w_x\cdot t$、$y_0(t_0)=v_y\cdot t_0$、$y(t)=w_y\cdot t$；$z_0(t_0)=v_z\cdot t_0$、$z(t)=w_z\cdot t$、$t=\frac{k_v}{k_w}\cdot t_0$、AB 系原点重合时$t_0=t=0$。

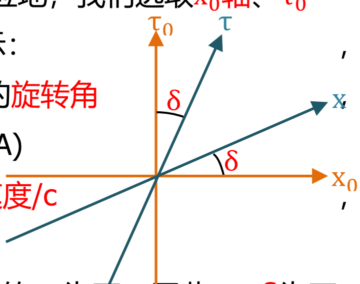
iii.该式子是由洛伦兹变换推导而来的，而洛伦兹变换本质上并不是坐标变换而是坐标间隔变换，且服务于我旧理论的框架之下，所以我们可以在更广阔的背景和更宽松的条件下有 IV.2.⑤.的升级版：旧元素们在洛伦兹变换的新的自由 x、y 轴坐标系下所满足的方程：$\triangle x_C{}^2+\triangle y_C{}^2+\triangle z_C{}^2-(c\cdot\triangle t_?)^2=\triangle x_B(new)^2+\triangle y_B(new)^2+\triangle z_B(new)^2-(c\cdot\triangle t_B)^2$，其中$\triangle x_B(new)=v\cdot\cos\theta\cdot\triangle t_B$、$\triangle x_C=w\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\triangle t_?$、$\triangle y_B(new)=v\cdot\cos\theta_y\cdot\triangle t_B$、$\triangle y_C=w\cdot\cos(\pi-\alpha)_y\cdot\triangle t_?$、$\triangle z_B(new)=v\cdot\cos\theta_z\cdot\triangle t_B$、$\triangle z_C=w\cdot\cos(\pi-\alpha)_z\cdot\triangle t_?$、$\triangle t_?=\frac{k_v}{k_w}\cdot\triangle t_B$，其间不再对 C 系在 A、B 系下的初始时空坐标有任何规定。

VI.时空图

1.坐标轴的选取，及其旋转角度与刻度密度

我们发现在$x^2-(c\cdot t)^2=x_0^2-(c\cdot t_0)^2$中，$x$与$c\cdot t$同量纲，$x_0$与$c\cdot t_0$同量纲；这说明$c\cdot t$、$c\cdot t_0$也是一种新的距离量，我们分别令$\tau=c\cdot t$，$\tau_0=c\cdot t_0$；于是洛仑兹变换中的两对式子 a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t=\frac{t_0-\frac{u}{c^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、b.$x_0=\frac{x+u\cdot t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$、$t_0=\frac{t+\frac{u}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$变为：a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$、b.$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$、$\tau_0=\frac{\tau+\frac{u}{c}\cdot x}{k_u}$，看上去 a、b 内部比以前对称多了是不是？接下来我们会以此来亲手发掘更对称的图景。

i.我们一般以 B 系为尚未跳跃的标准网格系，因此对应地，我们选取x_0轴、τ_0轴作为时空图中的标准平面直角坐标系的 x、y 轴。如图所示：

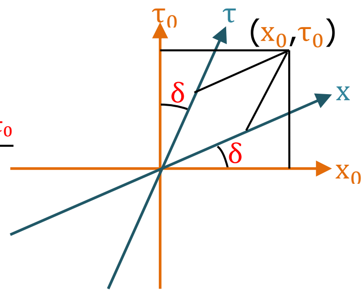


δ表示跳跃之前的系的坐标轴到跳跃之后的系的相应坐标轴的旋转角δ的正负与其方向有如下对应关系：令 tanδ=跳跃之后的系(A)相对于跳跃之前的系(B)在所设定的坐标系的量度下的相对速度/c 可知根据 V.1.①.(2).i.所采用的图景及所建立的坐标系下有：这里的图景所对应的 $\tan\delta=\frac{u}{c}$，并根据 V.1.①.(2).ii.可知其中的 u 为正，因此 tanδ为正；而又由于$-\frac{\pi}{4}\le\delta\le\frac{\pi}{4}$($\because -c\le$相对速度$\le c$)，所以此时$\delta>0$，并对应如图所示的：跳跃之前的系的 x 轴：$x_0$轴到跳跃之后的系的 x 轴：$x$轴的旋转方向为标准平面直角坐标系$x_0$-O-$\tau_0$下的逆时针旋转；并且跳跃之后的系的$x$-O-$\tau$仿射坐标系中的 y 轴：$\tau$轴相对于跳

跃之前的系的 y 轴：τ_0轴的旋转方向为与之相反的顺时针旋转；可见不论δ > 0 还是 < 0，其所对应的两个轴的旋转操作及其结果均是关于标准平面直角坐标系x_0-O-τ_0下的直线$\tau_0=x_0$对称的。

根据以上设定，现在我们记斜率 n=tanδ=$\frac{u}{c}$，那么x-O-τ系的x轴等价于x_0-O-τ_0系下的直线$\tau_0=n\cdot x_0$；并且x-O-τ系的τ轴也与x_0-O-τ_0系下的直线$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$重合；那么接下来我们来算算会发生什么有趣的事情。【这种设定并不是凭空遐想出而恰好被验证正确的：它来源于此：分别令 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$中的x=0、τ=0，得到x=0 所对应的$x_0=\frac{u}{c}\cdot\tau_0$，即$x_0=n\cdot\tau_0$，即$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$；而τ=0 对应$\tau_0=\frac{u}{c}\cdot x_0$，即$\tau_0=n\cdot x_0$；又由于x=0 对应τ轴，因而τ轴对应的表达式为$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$；同样，τ=0 对应x轴，因而x轴对应的表达式为$\tau_0=n\cdot x_0$】

ii.现在让我们以 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$所对应的标准平面直角坐标系$x_0$-O-$\tau_0$为量度标准，在其下作出点/向径$(x_0,\tau_0)$；并为了得到$(x_0,\tau_0)$在x-O-τ仿射坐标系下的坐标$(X,\Gamma)$，过点$(x_0,\tau_0)$，分别平行于τ轴作直线$\Gamma_1=\frac{1}{n}\cdot(X_1-x_0)+\tau_0$交x轴于$(X,0)$，以及平行于x轴作直线$\Gamma_2=n\cdot(X_2-x_0)+\tau_0$交τ轴于$(0,\Gamma)$，如图所示：



现在我们来动笔算算：联立$\Gamma_1=\frac{1}{n}\cdot(X_1-x_0)+\tau_0$以及$\Gamma_1=n\cdot X_1$：解得$X_1=\frac{x_0-n\cdot\tau_0}{1-n^2}$，代入 n=$\frac{u}{c}$，得到$X_1=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u^2}$，又因 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$所以$X_1=\frac{x}{k_u}$，于是我们便得到了点$(X,0)$在$x_0$-O-$\tau_0$系下的表示形式：$(X_1,\Gamma_1)=(\frac{x}{k_u},n\cdot\frac{x}{k_u})$，即有$(X,0)\sim(\frac{x}{k_u},n\cdot\frac{x}{k_u})$，现在我们仅关注其中的 x 方向上的分量对应关系：即有：$X\sim\frac{x}{k_u}$。【注："~"表示"对应"】

同样，联立$\Gamma_2=n\cdot(X_2-x_0)+\tau_0$以及$\Gamma_2=\frac{1}{n}\cdot X_2$，会得到类似的：$(X_2,\Gamma_2)=(n\cdot\frac{\tau}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，即有$(0,\Gamma)\sim(n\cdot\frac{\tau}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，同样我们仅关注其中的 y 方向上的分量对应关系：即有：$\Gamma\sim\frac{\tau}{k_u}$。

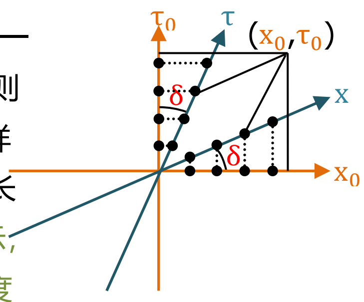
iii.在我们所得到的$(X,\Gamma)\sim(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$中：$X_1=\frac{x}{k_u}$表示$(x_0,\tau_0)$以平行于τ轴的方式朝x轴的投影后，所得投影点$(X_1,\Gamma_1)$再以平行于$\tau_0$轴的方式朝$x_0$轴投影，所得投影点$(X_1,0)$的横坐标$X_1$以$x_0$-O-$\tau_0$系的$x_0$轴的刻度密度来量度，有$\frac{x}{k_u}$多个$x_0$轴的单位间隔。

那么若不仅要求有$(X,\Gamma)\sim(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，而且要进一步实现$(x_0,\tau_0)$在x-O-τ仿射坐标系下，以τ轴、x轴的刻度密度所量度的坐标$(X,\Gamma)=(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，那么我们该如何调整τ轴、x轴的刻度密度呢？

同样，我们以 x 方向为例：若要让(x_0,τ_0)所对应的(X,Γ)以平行于τ轴的方式朝x轴的投影后，所得投影点(X_1,Γ_1)所对应的$(X,0)$的横坐标X以x-O-τ系的x轴的刻度密度来

量度，也有$X_1=\frac{x}{k_u}$多个x轴的单位间隔，即有$X=X_1=\frac{x}{k_u}$。也就是说，我们要让 O 点到$(X,0)\sim(X_1,\Gamma_1)$的这一段的长度(绝对映射)内含有的x-O-τ系的x轴的单位间隔数，与 O 点到$(X_1,0)$的这一段的长度内含有的x_0-O-τ_0系的x_0轴的单位间隔数目相同。即有：$\frac{X_1\cdot\sec\delta}{x\text{ 轴的单位间隔的长度}}=\frac{X_1}{x_0\text{轴的单位间隔长度}}$，即有：x轴的单位间隔的长度=$x_0$轴的单位间隔的长度·secδ；所以x轴的刻度密度=$\frac{\text{同一段绝对映射}}{x\text{ 轴的单位间隔的长度}}=\frac{\text{同一段绝对映射}}{x_0\text{轴的单位间隔长度}\cdot\sec\delta}$=$x_0$轴的刻度密度·cosδ；综上，不论是从单位间隔的长度，还是从间隔密度方面，均有：要想使得(x_0,τ_0)在x-O-τ仿射坐标系下，以τ轴、x轴的刻度密度所量度的坐标$(X,\Gamma)=(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，则x轴的刻度将更稀疏，倍率为$x_0$轴的刻度密度的 cosδ倍。

同样的道理，要想使得(x_0,τ_0)在x-O-τ仿射坐标系下，以τ轴、x轴的刻度密度所量度的坐标$(X,\Gamma)=(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，则 O 点到$(0,\Gamma)\sim(X_2,\Gamma_2)$的这一段的长度(绝对映射)内含有的x-O-τ系的τ轴的单位间隔数，与 O 点到$(0,\Gamma_2)$的这一段的长度内含有的x_0-O-τ_0系的τ_0轴的单位间隔数目相同。则两个 y 轴之间的单位间隔的长度和刻度密度的映射关系同样满足以上关系：τ轴的单位间隔的长度=τ_0轴的单位间隔的长度·secδ、τ轴的刻度密度=τ_0轴的刻度密度·cosδ。如图所示，黑点在两个系的 4 根轴上的分布状况即为各个轴的刻度密度状况，两个系的对应轴之间的单位间隔的长度的映射关系也如图所示。



iv.同样，若我们再进一步调节τ轴、x轴的刻度密度，使得(x_0,τ_0)在x-O-τ仿射坐标系下，以 iii.中的τ轴、x轴的刻度密度状况所量度的坐标$(X,\Gamma)=(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})$，变成在新的τ轴、x轴的刻度密度状况下显示的$(X,\Gamma)=(x,t)$——可见新$(X,\Gamma)=(x,t)=k_u\cdot(\frac{x}{k_u},\frac{\tau}{k_u})=k_u\cdot$旧$(X,\Gamma)$，即有新$X=k_u\cdot$旧X所对应的：$\frac{X_1\cdot\sec\delta}{\text{新 }x\text{ 轴的单位间隔的长度}}=k_u\cdot\frac{X_1\cdot\sec\delta}{\text{旧 }x\text{ 轴的单位间隔的长度}}$，以及新$\Gamma=k_u\cdot$旧Γ所对应的：$\frac{\Gamma_2\cdot\sec\delta}{\text{新 }\tau\text{ 轴的单位间隔的长度}}=k_u\cdot\frac{\Gamma_2\cdot\sec\delta}{\text{旧 }\tau\text{ 轴的单位间隔的长度}}$。

因此，我们有新x轴的单位间隔的长度=$\frac{1}{k_u}\cdot$旧x轴的单位间隔的长度、新τ轴的单位间隔的长度=$\frac{1}{k_u}\cdot$旧τ轴的单位间隔的长度，可见我们x轴、τ轴的刻度又变得更稀疏了，倍率为旧x轴、旧τ轴的刻度密度的k_u倍；又在 iii.的末尾，我们推导得到了：旧x轴的单位间隔的长度=x_0轴的单位间隔的长度·secδ、旧τ轴的单位间隔的长度=τ_0轴的单位间隔的长度·secδ——于是我们有：新x轴的单位间隔的长度=$\frac{\sec\delta}{k_u}\cdot x_0$轴的单位间隔的长度、新τ轴的单位间隔的长度=$\frac{\sec\delta}{k_u}\cdot\tau_0$轴的单位间隔的长度。

于是当x-O-τ仿射坐标系中各坐标轴的单位间隔的长度$=\frac{1}{k_u \cdot \cos\delta}\cdot x_0$-O-$\tau_0$标准平面直角坐标系中对应坐标轴的单位间隔的长度，或者说x-O-τ仿射坐标系中各坐标轴的刻度密度$=k_u \cdot \cos\delta \cdot x_0$-O-$\tau_0$标准平面直角坐标系中对应坐标轴的刻度密度时，即有$(x_0,\tau_0)$在新的τ轴、x轴的刻度密度状况下显示的$(X,\Gamma)=(x,t)$，即此时以$x_0$-O-$\tau_0$系量度的坐标为$(x_0,\tau_0)$的点，在x-O-τ系下的坐标恰好是$(x,t)$。【注：$(x,t)$满足变形了的洛伦兹变换中的 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$】

由于等号等价于“等价于”符号，即等号两边的表达式互为充分必要条件，那么我们不需要再经历那么多同样的过程，便能有：当x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系中各坐标轴的单位间隔的长度$=k_u \cdot \cos\delta \cdot$x-O-τ仿射坐标系中对应坐标轴的单位间隔的长度，或者说x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系中各坐标轴的刻度密度$=\frac{1}{k_u \cdot \cos\delta}\cdot$x-O-τ仿射坐标系中对应坐标轴的刻度密度时，有：以x-O-τ系量度的坐标为(x,t)的点在x_0轴、τ_0轴的刻度密度状况下显示的$(X_0,\Gamma_0)=(x_0,\tau_0)$，即在$x_0$-O-$\tau_0$系下的坐标恰好是$(x_0,\tau_0)$。【注：$(x_0,\tau_0)$满足变形了的洛伦兹变换中的 b.$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$、$\tau_0=\frac{\tau+\frac{u}{c}\cdot x}{k_u}$】【注：“不必要”的另两个理由：1.当有 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$时，便会有 b.$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$、$\tau_0=\frac{\tau+\frac{u}{c}\cdot x}{k_u}$，反之亦然；2.反证法：假设$(x,t)$映射得到的不是$(x_0,\tau_0)$，那么再映射回来(这个过程我们是熟悉的)，得到的就不再是(x,t)，矛盾——于是(x,t)映射得到的是(x_0,τ_0)，即先有(x,t)再有(x_0,τ_0)仍然成立。】

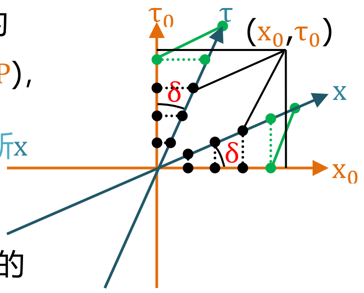
2.对应轴对应刻度的相对位置的特殊计算方法及以 A 系为标准系的时空图

在之前我们以 B 系为标准系的时空图中，斜率 n=tanδ$=\frac{u}{c}$，δ＞0，对应的x轴相对于x_0轴做顺时针旋转；现由于 secδ$=\sqrt{1+\tan^2\delta}=\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}$，我们将其代入x-O-τ仿射坐标系中各坐标轴的单位间隔的长度$=\frac{\sec\delta}{k_u}\cdot x_0$-O-$\tau_0$标准平面直角坐标系中对应坐标轴的单位间隔的长度，即有：x-O-τ仿射坐标系中各坐标轴的单位间隔的长度$=\frac{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot x_0$-O-$\tau_0$标准平面直角坐标系中对应坐标轴的单位间隔的长度。

但是即使我们这样做了，我们也没有得到关于x-O-τ仿射坐标系中各刻度相对于x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系中相同/对应刻度的相对位置更直观的图景；而接下来我们会定性和定量地给出一个更实用的绘图方法：

①.对应轴对应刻度的相对位置

i.现在我们从另一个角度，即非绝对位置，而是相对位置的角度，来描述x-O-τ仿射坐标系的刻度特征：设x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系的x_0轴的第 P 个刻度所处位置的坐标在x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系的量度下为$(P,0)$，根据旧x轴的单位间隔的长度$=x_0$轴的单位间隔的长度·secδ，则x_0轴的第 P 个刻度$(P,0)$所对应的旧x轴的第 P 个刻度在x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系的量度下为$(P,n\cdot P)$；再根据新x轴的单位间隔的长度$=\frac{1}{k_u}\cdot$旧x轴的单位间隔的长度，则有x_0轴的第 P 个刻度$(P,0)$所对应的新x轴的第 P 个刻度在x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系的量度下为$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$。



ii.现在我们如图所示地，连接当 P=4(随便取的)时的两个对应的 x 轴的两个对应刻度们：点$(P,0)$与点$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$，并求出这条线段的斜率$=\frac{\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P-0}{\frac{1}{k_u}\cdot P-P}=\frac{n}{1-k_u}=\frac{1+k_u}{n}>\frac{1}{n}$，所以虽然新x轴的刻度相对于旧x轴的刻度有所膨胀，但其上的任何一个刻度点的膨胀程度不会超过x_0轴的对应刻度点以平行于τ轴的方式朝x轴投影的投影点；例如图中的新x轴的第 4 个刻度点的位置将介于x轴的两个绿点之间，并且新x轴的任何刻度点与x_0轴的对应刻度点的连线斜率置于$(\frac{1}{n},+\infty)$之间。

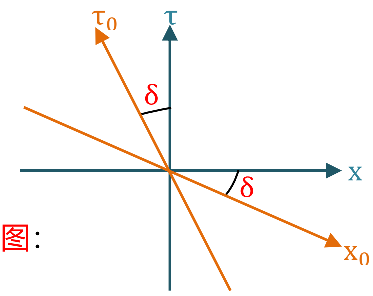
同样的道理，点$(0,P)$与点$(\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot P)$的连线斜率$=\frac{\frac{1}{k_u}\cdot P-P}{\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P-0}=\frac{1-k_u}{n}=\frac{n}{1+k_u}<n$，因此新τ轴的第 4 个刻度点的位置将介于τ轴的两个绿点之间，并且新τ轴的任何刻度点与τ_0轴的对应刻度点的连线斜率置于$(0,n)$之间；这点也可以通过对称性：斜率之积=1，加上之前的俩 x 轴对应刻度点连线斜率置于$(\frac{1}{n},+\infty)$之间得到。

iii.在 ii.中我们定性地分析了x-O-τ仿射坐标系的各刻度相对于x_0-O-τ_0标准平面直角坐标系的对应刻度的相对位置，现在让我们来更为定量地分析它：我们知道新x轴的$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$相对于旧x轴的$(P,n\cdot P)$放射性地扩张了$\frac{1}{k_u}$倍，这是为了改变读数所导致的单位间隔的长度的变化所引起的，是有理由的；现在我们暂无理由地，"若无事事"地尝试一下对$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$再放射性地扩张$\frac{1}{k_u}$倍后所得的点$(\frac{1}{k_u^2}\cdot P,\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P)$与$(P,0)$的连线斜

率$=\frac{\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P-0}{\frac{1}{k_u^2}\cdot P-P}=\frac{n}{1-k_u^2}=\frac{1}{n}$，可见其平行于$\tau$轴，这就非常有趣了：这个点$(\frac{1}{k_u^2}\cdot P,\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P)$正好是我们在 ii.中所做的$x_0$轴的对应刻度点以平行于$\tau$轴的方式朝$x$轴投影的绿色投影点。

现根据$(P,n\cdot P)\cdot(\frac{1}{k_u^2}\cdot P,\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P)=(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)\cdot(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$，那么之前的定性描述：“图中的新x轴的第 4 个刻度点的位置将介于x轴的两个绿点之间”可以被进一步精确为现在的定量描述：“图中的新x轴的第 4 个刻度点到原点的距离为两个绿点到原点的距离的比例中项”，其中的两个绿点由x_0轴的对应刻度点分别以平行于τ_0轴的方式和平行于τ轴的方式交x轴得到；同样，新τ轴的第 4 个刻度点到原点的距离也等于两个绿点到原点的距离的比例中项，其中的两个绿点由τ_0轴的对应刻度点分别以平行于x_0轴的方式和平行于x轴的方式交τ轴得到。并且当 P 取 4 以外的任意刻度序数时，该类表述也成立。

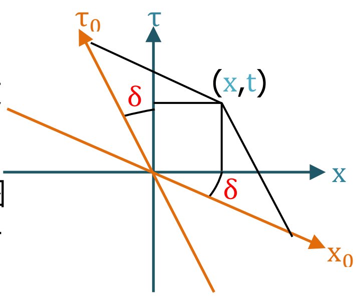
②.以 A 系为标准系的时空图



i.以 A 系为标准系的时空图：

现在我们保留 A、B 两系在相对速度空间层面的各自的坐标系的坐标轴朝向不变(即仍然同向于 A 对 B 的相对速度 **u** 的方向)，从 B 系跳转到 A 系，并设定 A 系为尚未跳转的标准网格系(相当于之前的 B 系)，此时便对应变形了的洛仑兹变换的逆变换：

b.$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$、$\tau_0=\frac{\tau+\frac{u}{c}\cdot x}{k_u}$；由于 tanδ=跳跃之后的系(B)相对于跳跃之前的系(A)在所设定的坐标系的量度下的相对速度/c，可知 n=tanδ$=\frac{-u}{c}=-\frac{u}{c}$，又由于 u 为正，因此 tanδ为负；而又由于$-\frac{\pi}{4}\le\delta\le\frac{\pi}{4}$($\because -c\le$相对速度$\le c$)，所以此时δ<0，并对应如图所示的：跳跃之前的系的x轴到跳跃之后的系的x_0轴的旋转方向为标准平面直角坐标系x-O-τ下的顺时针旋转；并且τ_0轴相对于τ轴的旋转方向为与之相反的逆时针旋转；旋转后和旋转前的各系 x-y 轴均关于标准平面直角坐标系x-O-τ下的直线τ=x对称。【注：我们可以将 b.$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$、$\tau_0=\frac{\tau+\frac{u}{c}\cdot x}{k_u}$看作是由 a.$x=\frac{x_0-\frac{u}{c}\cdot\tau_0}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$中所有 u 均被替换成-u：b'.$x=\frac{x_0-\frac{-u}{c}\cdot\tau_0}{k_{-u}}$、$\tau=\frac{\tau_0-\frac{-u}{c}\cdot x_0}{k_{-u}}$，再加上对应物理量的对调得到的】

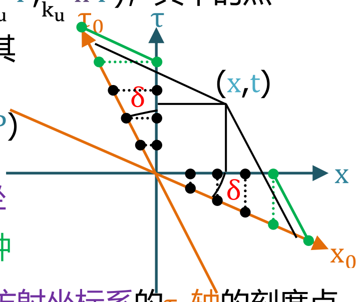


ii.同样，在标准平面直角坐标系x-O-τ下作点(x,t)，过它分别平行于τ_0轴作直线$\Gamma_1=\frac{1}{n}\cdot(X_1-x)+t$交$x_0$轴于$(X_0,0)$，以及平行于$x_0$轴作直线$\Gamma_2=n\cdot(X_2-x)+t$交$\tau_0$轴于$(0,\Gamma_0)$，如图所示。同样，我们通过联立$\Gamma_1=\frac{1}{n}\cdot(X_1-x)+t$以及$\Gamma_1=n\cdot X_1$，可

得到$X_1=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot t}{k_u^2}$，又因$x_0=\frac{x+\frac{u}{c}\cdot\tau}{k_u}$，于是$X_1=\frac{x_0}{k_u}$，即有$(X_0,0)\sim(X_1,\Gamma_1)$
$=(\frac{x_0}{k_u},n\cdot\frac{x_0}{k_u})$；同样有：$(0,\Gamma_0)\sim(X_2,\Gamma_2)=(n\cdot\frac{\tau_0}{k_u},\frac{\tau_0}{k_u})$，即有：$(X_0,\Gamma_0)\sim(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x_0}{k_u},\frac{\tau_0}{k_u})$。

iii.同样，现在为了使得x_0-O-τ_0仿射坐标系下对点(x,t)的读数$(X_0,\Gamma_0)=(X_1,\Gamma_2)=(\frac{x_0}{k_u},\frac{\tau_0}{k_u})$，则其各坐标轴的刻度得扩张 sec$\delta$倍。并为了进一步使得跳跃后的系所得读数显示为$(X_0,\Gamma_0)=(x_0,\tau_0)$，$x_0$-O-$\tau_0$仿射坐标系的各坐标轴的刻度还得扩张$\frac{1}{k_u}$倍。即$x_0$-O-$\tau_0$仿射坐标系中各坐标轴的单位间隔的长度$=\frac{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot$x-O-$\tau$标准平面直角坐标系中对应坐标轴的单位间隔的长度。

iv.在x-O-τ标准平面直角坐标系的量度下，两个 x 轴上的对应刻度点$(P,0)$和$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$仍然满足：$(P,n\cdot P)\cdot(\frac{1}{k_u^2}\cdot P,\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P)=(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)\cdot(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$，其中的点$(\frac{1}{k_u^2}\cdot P,\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P)$可由$(P,0)$以平行于$\tau_0$轴的方式交$x_0$轴得到，因其与$(P,0)$的连线斜率$=\frac{\frac{1}{k_u^2}\cdot n\cdot P-0}{\frac{1}{k_u^2}\cdot P-P}=\frac{n}{1-k_u^2}=\frac{1}{n}=\tau_0$轴的斜率；而$(P,n\cdot P)$可由$(P,0)$以平行于$\tau$轴的方式交$x_0$轴得到；而$x_0$-O-$\tau_0$仿射坐标系的$x_0$轴的刻度点$(\frac{1}{k_u}\cdot P,\frac{1}{k_u}\cdot n\cdot P)$到原点的距离即为以这两种方式所交得的点到原点的距离的比例中项。同样，x_0-O-τ_0仿射坐标系的τ_0轴的刻度点到原点的距离亦=以这两种方式所交得的点到原点的距离的比例中项。



v.推荐认知：

时空图中各元素(x_0、τ_0、x、τ)在含义上仍然推荐采用$\triangle x_C$、$\triangle t_?$、$\triangle x_B(new)$、$\triangle t_B$标准；即这些元素仍然是间隔，"间隔的值总是从零开始"不正是"它们为间隔"的最好理由和直观体现么。因此时空图中的各坐标值已经是间隔了，而同类坐标之差，即坐标间隔，既可以看作间隔的间隔——即间隔的变化量，又可以看作间隔，因为间隔与间隔之间作差，结果仍落在"间隔"这个集合内；正如坐标与坐标之差，既是坐标间隔，又是相对坐标一样。

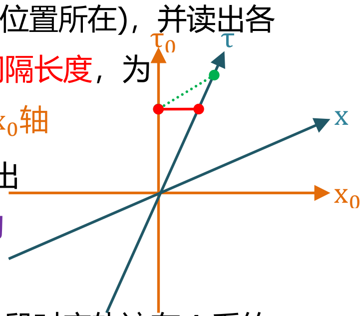
③.相对论方程们各自在时空图中的体现

i.时间变换在时空图中的体现

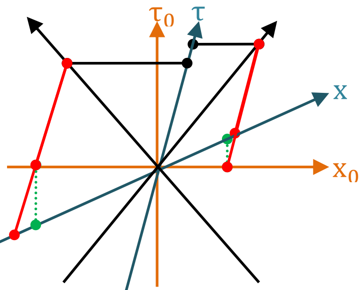
C 系在四维时空中所划出的点集(x_0,y_0,z_0,τ_0)所构成的世界线，投影到 VI.①.i.的时空图 B-A 中【"时空图 B-A"表示以 B 系的 x-o-y 坐标系——x_0-O-τ_0坐标系为标

准平面直角坐标系，A 系的 x-o-y 坐标系——x-O-τ坐标系为仿射坐标系的时空图】，便成了点集(x_0,τ_0)所构成的世界线。我们假设 C 系在 B 系看来满足方程$x_0=v_x\cdot t_0$，且有$v_x=u$，那么$x_0=\frac{u}{c}\cdot(c\cdot t_0)$，即有$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$，那么 C 系在时空图 B-A 中的世界线，以$x_0$-O-$\tau_0$标准平面直角坐标系来量度，方程为$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$，其中 $n=\frac{v_x}{c}=\frac{u}{c}$，并且若其以x-O-τ仿射坐标系来描绘，则为x=0，即 C 系的世界线与x-O-τ仿射坐标系的τ轴重合。

若我们把$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$所对应的$x_0=n\cdot\tau_0$代入$\tau=\frac{\tau_0-\frac{u}{c}\cdot x_0}{k_u}$，即可得到$\tau=k_u\cdot\tau_0$，若两边再除以 c，即得$t=k_u\cdot t_0$；这整个过程相当于我们又重新履历了一遍 V.2.①.(1).i.的推导过程，但若要真正得到$\triangle t_A=k_u\cdot\triangle t_B$，而不是$t=k_u\cdot t_0$所对应的$\triangle t_?=k_u\cdot\triangle t_B$，我们还得像 V.2.①.(1).i.一样继续前进，推导出$\triangle t_A=\triangle t_?$；然而在这里我们想关注的却是另一方面：我们来看看$\tau=k_u\cdot\tau_0$是如何在时空图中反映的：将 C 系世界线$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$上的各点分别平行于$x_0$轴朝$\tau_0$轴投影、平行于x轴向τ轴投影(后者即为各点位置所在)，并读出各个时间轴对投影的读数：如图所示，由于τ轴在τ_0轴方向的单位间隔长度，为τ_0轴在τ_0轴方向的单位间隔长度的$\frac{1}{k_u}$倍，那么这两个τ轴对连线//x_0轴的两个红色投影点给出的读数满足：τ轴给出的示数$\tau=k_u\cdot\tau_0$轴给出的示数τ_0，即有$\tau=k_u\cdot\tau_0$。若以动态的形式将该方程在时空图中的物理含义描述出来便有：当 C 系行走在 B 系坐标系所描绘的世界线方程$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$上时，当 C 系的时间在 B 系量度下经过了$\tau_0$时，这段时空轨迹在 A 系的时间轴的刻度密度的量度下却只流逝了$k_u\cdot\tau_0$这么多 A 系的单位时间；而当 C 系的时间在 A 系量度下经过了τ个单位长度时，在 B 系的量度下却整整流逝了$\frac{1}{k_u}\cdot\tau$这么多个 B 系的单位时间间隔。【不要忘了τ、τ_0均是数值；以及衡量标准：均见 C 系流逝相同的 C 系的时间刻度数 or 均见 C 系划过某指定系的相同数量的空间刻度数】



ii.空间变换在时空图中的体现



如图，我画了两根数轴一样的黑轴代表两个物体的世界线(在画的时候注意它们的世界线方程$\tau_0=\frac{1}{n}\cdot x_0$的斜率的绝对值$|\frac{1}{n}|=\frac{c}{|v_x|}\geq 1$)；图中的另两条//$x_0$轴的黑色线段，既可以被认为是在 B 看来，分别在$\tau_0$轴的某两个不同时刻下、在同一时间所分别测得的两根尺子的固有长度；同时因为有了两根黑轴的设定，它们也可被认为是同一时刻下τ_0，C 系(两根黑轴都代表名为 C 系的参考系的世界线；同时也可以被认为是 C 系的τ轴，不过 C 系不是观测者所在的系而是被观测的系，因而我们只关注其作为世界线的性质)在 B 系下的世界线方程$\tau_0=\frac{c}{v_x}\cdot x_0$与 A 系在 B 系下的世界线方程$\tau_0=\frac{c}{u}\cdot x_0$，中$\tau_0$分别相等时，黑线段的两个端点在 B 系下的横坐标之差：即$x_0-x_0=\left(\frac{v_x}{c}-\frac{u}{c}\right)\cdot\tau_0=(v_x-u)\cdot t_0$。【并且推荐采

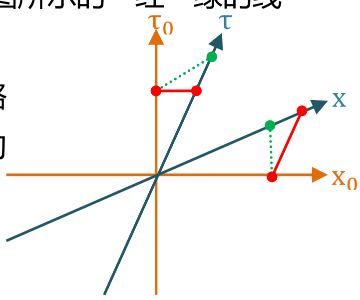
用后一种更动态的理解；前一种理解中，其实棒子也不是实体，而是两对应黑点的连线而已，随着棒子(最好说成两个黑点)朝着τ_0轴正向的移动，棒子本身在x_0方向上有伸长。】

现在我们随意选取两段黑色线段中的某段，取其两个端点中不在 A 系的τ轴上的那个端点，即选取两个端点中那个在 C 系的黑轴世界线上的端点；过它作一条平行于τ轴的红色直线分别交x轴、x_0轴于两个红点；其中，x轴上的红点可看作黑轴上的该端点朝x轴的投影(∵红线//τ轴)，并且x轴对该红点的读数或者说x轴对 O 点到该红点的长度(向径)的读数，等于在 A 系看来，也见到 C 系过了$\triangle t_C$时，在 A 系的量度标准下，C 系对 A 系的间距；而x_0轴上的红点并不是黑轴上的该端点朝x_0轴的投影(∵红线不//τ_0轴)，而是为了便于量度黑色线段所做出的点，此时量度 O 到该红点的矢量大小，在 B 系的量度下即等效于量度黑色线段所对应的$x_0 - x_0$，即在 B 系看来，见到 C 系过了$\triangle t_C$时(此时 B 系过了如图的τ_0，黑线段走到/伸长到如图所示的位置)，在 B 系的量度标准下，C 系对 A 系的间距。

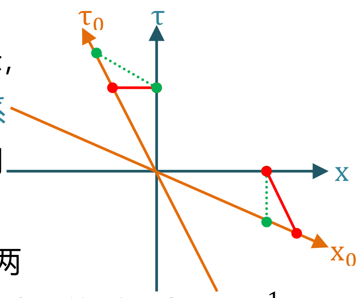
如图所示，由于x轴在x_0轴方向的单位间隔长度，为x_0轴在x_0轴方向的单位间隔长度的$\frac{1}{k_u}$倍，并且根据②.(1).iii.，连线//τ轴的两个红点中，x轴上的红点在x_0轴方向上的刻度(或者说朝x_0轴的投影)为x_0轴上的红点的$\frac{1}{k_u^2}$倍，那么这两个 x 轴对连线//τ轴的两个红点给出的读数满足：x轴给出的示数$x=(\frac{1}{k_u^2} \div \frac{1}{k_u})\cdot x_0$轴给出的示数$x_0$，即有$x=\frac{1}{k_u}\cdot x_0$，即$x=\frac{1}{k_u}\cdot(x_0 - x_0)$，这对应着洛仑兹变换中的 a.$x=\frac{x_0-u\cdot t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，这同时也对应着坐标间隔变换中的 III.5.㈡.①.中的$\triangle x_C=\frac{1}{k_u}\cdot\triangle x_B$。但若要得到真正意义上的 II.2.①.中的空间变换$\triangle x = \frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$的话，还得像 V.2.①.(2).一样，往前继续走一步。所以在这里我们只是形象地给出了得到空间变换的路途中的某个式子$x=\frac{1}{k_u}\cdot x_0$在时空图中的表现形式而已【注意其中的x_0的含义为$x_0 - x_0$】。

iii.时空变换在时空图中的 4 种表达方式

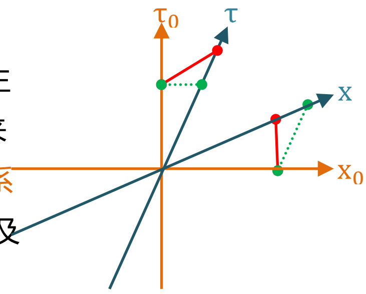
Picture01：我们把 i.和 ii.的图结合起来放在同一个图中，并且顺便将 ii.中的图化简一下，只保留其中对空间变换公式有直接贡献的部分(如图所示的一红一绿的线段)。并注意保留整幅图的对称性，于是我们便得到了这样的一幅图：其中，对空间变换的理解，仍然需要像 ii.一样把省略的黑轴和黑线段给加上，只不过不同的是，这个过程是在你的脑子里实现的。在这个图中，有$\tau=k_u\cdot\tau_0$、$x=\frac{1}{k_u}\cdot x_0$【注意其中的x_0的含义为$x_0 - x_0$】。



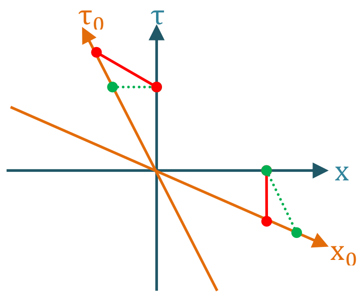
Picture02：等地位地，我们也可以采用以 A 系的视角为 primary 视角，来描绘同样的时空变换方程。并且如图所示，我们仍然采用的是关联的表达方式：即用标准平面直角坐标系 A 的测量值来表达仿射坐标系 B 对沿着其τ_0轴运动的 C 系的同类量的测量值：$\tau_0=k_u\cdot\tau$，以及用 C 系的黑轴世界线与 B 系的仿射坐标系的τ_0轴在标准平面直角坐标系 A 的同一τ刻度下的两点的 x 轴坐标之差来表示仿射坐标系 B 的x_0轴所给出的这一同类量的测量值：$x_0=\frac{1}{k_u}\cdot x$【注意其中的x的含义为$x - x$】。



Picture03：对称地，我们也可以采用与 Picture01 同主视角(同样以 B 系为标准网格系)，但采用非关联的表达方式来绘图：即用仿射坐标系 A 的测量值来表达标准平面直角坐标系 B 对沿着其τ_0轴运动的 C 系的同类量的测量值：$\tau_0=k_u\cdot\tau$，以及用 C 系的黑轴世界线与标准平面直角坐标系 B 的τ_0轴在仿射坐标系 A 的同一τ刻度下的两点的x轴坐标之差来表达标准平面直角坐标系 B 的x_0轴所给出的这一同类量的测量值：$x_0=\frac{1}{k_u}\cdot x$。



Picture04：同样的，我们也可以采用与 Picture02 同主视角(同样以 A 系为标准网格系)，但采用非关联的表达方式来绘图：即用仿射坐标系 B 的测量值来表达标准平面直角坐标系 A 对沿着其τ轴运动的 C 系的同类量的测量值：$\tau=k_u\cdot\tau_0$，以及用 C 系的黑轴世界线与标准平面直角坐标系 A 的τ轴在仿射坐标系 B 的同一τ_0刻度下的两点的x_0轴坐标之差来表示标准平面直角坐标系 A 的x轴所给出的这一同类量的测量值：$x=\frac{1}{k_u}\cdot x_0$。



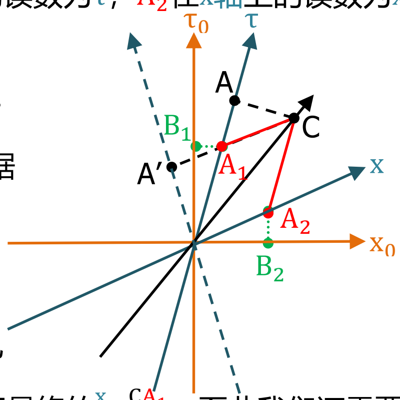
iv.速度相加定理在 x 方向上的表达式$w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$or 狭义速度变换式$w_{\overrightarrow{AC}} = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$在时空图中的体现

正如根据$x_0=u\cdot t_0$我们有$x_0=\frac{u}{c}\cdot\tau_0$一样，由于$x=w_x\cdot t$于是我们有$x=\frac{w_x}{c}\cdot\tau$，现我们假设 C 系的世界线方程在 B 系的坐标参量的描述下有：$x_1=v_x\cdot t_1$，于是同样有类似的：$x_1=\frac{v_x}{c}\cdot\tau_1$。即：$\frac{x_1}{\tau_1}=\frac{v_x}{c}$、$\frac{x_0}{\tau_0}=\frac{u}{c}$、$\frac{x}{\tau}=\frac{w_x}{c}$。

现根据 a.$x=\frac{x_1-\frac{u}{c}\cdot\tau_1}{k_u}$、$\tau=\frac{\tau_1-\frac{u}{c}\cdot x_1}{k_u}$以及$\frac{x}{\tau}=\frac{w_x}{c}$，我们有$\frac{w_x}{c}=\frac{x}{\tau}=\frac{x_1-\frac{u}{c}\cdot\tau_1}{\tau_1-\frac{u}{c}\cdot x_1}=\frac{\frac{x_1}{\tau_1}-\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}\cdot\frac{x_1}{\tau_1}}=\frac{\frac{x_1}{\tau_1}-\frac{x_0}{\tau_0}}{1-\frac{x_0}{\tau_0}\cdot\frac{x_1}{\tau_1}}$，即有$\frac{x}{\tau}=\frac{\frac{x_1}{\tau_1}-\frac{x_0}{\tau_0}}{1-\frac{x_1}{\tau_1}\cdot\frac{x_0}{\tau_0}}$。在时空图这节伊始，我们曾规定了 A 系的x轴对 B 系的x_0轴的逆时针旋转角δ和 A 系的τ轴对 B 系的τ_0轴的顺时针旋转角δ满足 $\tan\delta=\frac{u}{c}$，现在我们利用这一规则，进行如下表示 $\tan\delta_0=\frac{u}{c}=\frac{x_0}{\tau_0}$、$\tan\delta_1=\frac{v_x}{c}=\frac{x_1}{\tau_1}$。

于是$\frac{x}{\tau}=\frac{\frac{x_1}{\tau_1}-\frac{x_0}{\tau_0}}{1-\frac{x_1}{\tau_1}\cdot\frac{x_0}{\tau_0}}=\frac{\tan\delta_1-\tan\delta_0}{1-\tan\delta_1\cdot\tan\delta_0}=\frac{\sin\delta_1\cdot\cos\delta_0-\sin\delta_0\cdot\cos\delta_1}{\cos\delta_1\cdot\cos\delta_0-\sin\delta_1\cdot\sin\delta_0}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1+\delta_0)}$，这个狭义速度变换式/速度相加定理(x 方向)的等效方程$\frac{x}{\tau}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1+\delta_0)}$是如何在时空图中体现出来的呢?

下面我们来对此进行一番考察：在 C 系的黑箭头世界线上取一点 C，分别向 A 系的τ轴、x轴投影，所得的两个红色投影点A_1、A_2再分别向 B 系的τ_0轴、x_0轴投影，对应得到两个绿色投影点B_1、B_2：此番操作之后，设A_1在τ轴上的读数为τ，A_2在x轴上的读数为x，并设B_1在τ_0轴上的读数为τ_b，B_2在x_0轴上的读数为x_b。那么根据之前对刻度密度的介绍可知$\tau_b=\frac{1}{k_u}\cdot\tau$，$x_b=\frac{1}{k_u}\cdot x$。于是$\frac{x}{\tau}=\frac{\frac{x}{k_u}}{\frac{\tau}{k_u}}=\frac{x_b}{\tau_b}=\frac{OB_2}{OB_1}$。由于$\angle B_1OA_1=\angle B_2OA_2=\delta_0$，则根据两个 Rt△$B_1OA_1$与 Rt△$B_2OA_2$的相似关系可知$\frac{OB_2}{OB_1}=\frac{OA_2}{OA_1}$。又因平行四边形中$CA_1=OA_2$，于是$\frac{OA_2}{OA_1}=\frac{CA_1}{OA_1}$。综上，我们将这些式子一个个地写成连等式，便可以清楚地看见整个推导过程及最终结果：$\frac{x}{\tau}=\frac{\frac{x}{k_u}}{\frac{\tau}{k_u}}=\frac{x_b}{\tau_b}=\frac{OB_2}{OB_1}=\frac{OA_2}{OA_1}=\frac{CA_1}{OA_1}$，即最终的$\frac{x}{\tau}=\frac{CA_1}{OA_1}$。至此我们还需要再做两条辅助线，帮助我们继续整个推理过程。

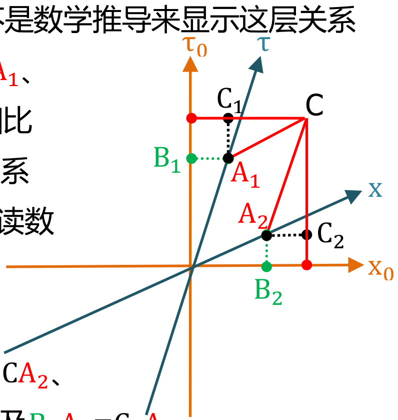


如图地，延长CA_1与τ轴关于τ_0轴的镜像(蓝色虚线)相交于点 A’，则由于<τ_0-O-x_0>=π/2，加上镜像所导致的∠B_1OA’=∠B_1OA_1(注：若指的是旋转角的话，则∠B_1OA’=$-\delta_0$，不过这里∠B_1OA’和∠B_1OA_1仅仅是通常意义上的角度)，以及之前推导 Rt△相似所用的$\angle B_1OA_1=\angle B_2OA_2$，于是我们有∠$B_1$OA’=∠$B_2OA_2$，并且因此τ轴关于$\tau_0$轴的镜像(蓝色虚线)⊥x轴，即CA’⊥τ轴镜像；现在我们再过 C 点作 CA⊥τ轴于 A，可知现在的 O、C、A、A’四点共圆，于是非常容易地有 Rt△CA_1A相似于 Rt△OA_1A’，于是$\frac{CA_1}{OA_1}=\frac{CA}{OA'}$，又因$\frac{CA}{OA'}=\frac{(\frac{CA}{OC})}{(\frac{OA'}{OC})}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1-(-\delta_0))}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1+\delta_0)}$，于是根据之前的$\frac{x}{\tau}=\frac{CA_1}{OA_1}$，有现在的最终表达式：$\frac{x}{\tau}=\frac{CA_1}{OA_1}=\frac{CA}{OA'}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1+\delta_0)}$，即我们不通过代数手段，仅仅利用时空图中的几何关系信息，

得到了纯代数手段给出的，反映狭义速度变换式/速度相加定理(x 方向)的，同样的公式：$\frac{x}{\tau}=\frac{\sin(\delta_1-\delta_0)}{\cos(\delta_1+\delta_0)}$。

v.闵可夫斯基时空距离量关系方程在时空图中的体现

之前我们给出了这样一个方程：$x^2-(c\cdot t)^2=x_0^2-(c\cdot t_0)^2$。现在我们将其写作只有纯粹的距离量参与的形式：$x^2-\tau^2=x_0^2-\tau_0^2$；由于受到相对速度的约束：$-c\leq$相对速度$\leq c$，所导致的$-1\leq n=\tan\delta=\frac{\text{相对速度}}{c}\leq 1$，于是$-\frac{\pi}{4}\leq\delta\leq\frac{\pi}{4}$，因此任何参考系在 B 系(标准网格系)的物理量的表示下的世界线方程所对应的世界线，或者说任何参考系在标准平面直角坐标系下的τ轴，其朝向将受限于$-\frac{\pi}{4}\leq\delta\leq\frac{\pi}{4}$所对应的$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$的四分之一平面的锥形空间中。由此将导致$\tau_0^2$恒$>x_0^2$，即$\tau_0^2-x_0^2$恒$>0$，于是我们现在将类似于$x^2-\tau^2=x_0^2-\tau_0^2$这种形式的表示方法，改为如下表示法$\tau^2-x^2=\tau_0^2-x_0^2=s^2$，其中由于被观察的系不会超光速，所以恒$s^2>0$，所以$s$在实数域取值。



现在我们便仅仅用时空图中的几何数量关系而不是数学推导来显示这层关系$\tau^2-x^2=\tau_0^2-x_0^2$(特别有意思！)：如图所示地，图中的$A_1$、$A_2$、$B_1$、$B_2$在定义上均与上一幅图中的含义相同；而相比上一幅图所多出的两条红色投影线，代表 C 点分别向 B 系的τ_0轴和x_0轴的投影，此时 B 系对这两个红色投影点的读数对应着 C 系在 B 系下的坐标(x_0,τ_0)；另外地，图中还多了两条上这两条红色投影线的黑色线段，这是两条辅助线，为的是构造出两对全等三角形：Rt△B_1OA_1与 Rt△C_2CA_2、以及 Rt△B_2OA_2与 Rt△C_1CA_1。此时便会有$B_1A_1=C_2A_2$以及$B_2A_2=C_1A_1$。

现在让我们进入几何世界进行推导：由于上一节所提到的 Rt△B_1OA_1 ∽Rt△B_2OA_2，于是我们有$\frac{OB_2}{OB_1}=\frac{B_2A_2}{B_1A_1}$，即有$OB_1\cdot B_2A_2=OB_2\cdot B_1A_1$，于是我们有如下方程：$(OB_2)^2+OB_1(OB_1+2B_2A_2)=(OB_1)^2+OB_2(OB_2+2B_1A_1)$，又由于上一段所提到了由三角形全等所得的结论：$B_1A_1=C_2A_2$以及$B_2A_2=C_1A_1$，将其替换方程中的部分元素即有$(OB_2)^2+OB_1(OB_1+C_1A_1+B_2A_2)=(OB_1)^2+OB_2(OB_2+C_2A_2+B_1A_1)$，现因左上角和右下角是两个小矩形，因此有$OB_2+C_2A_2=x_0$、$OB_1+C_1A_1=\tau_0$，因而$OB_2=x_0-C_2A_2=x_0-B_1A_1$、$OB_1=\tau_0-C_1A_1=\tau_0-B_2A_2$，而我们在上一节又提到过$OB_2=x_b$、$OB_1=\tau_b$，于是将这六个量分别代入方程便有：$x_b^2+(\tau_0-B_2A_2)(\tau_0+B_2A_2)=\tau_b^2+(x_0-B_1A_1)(x_0+B_1A_1)$。现因$B_2A_2=OB_2\cdot\tan\delta=x_b\cdot\frac{u}{c}$、$B_1A_1=OB_1\cdot\tan\delta=\tau_b\cdot\frac{u}{c}$，将它们代入方程即有：$x_b^2+(\tau_0^2-x_b^2\cdot\frac{u^2}{c^2})=\tau_b^2+(x_0^2-\tau_b^2\cdot\frac{u^2}{c^2})$，即有$k_u^2\cdot x_b^2+\tau_0^2=k_u^2\cdot\tau_b^2+x_0^2$，移项即有$k_u^2\cdot$

$\tau_b^2-k_u^2\cdot x_b^2=\tau_0^2-x_0^2$。在上一节我们提到：$\tau_b=\frac{1}{k_u}\cdot\tau$、$x_b=\frac{1}{k_u}\cdot x$，于是有$\tau=k_u\cdot\tau_b$、$x=k_u\cdot x_b$，现将其代入其中即有：$\tau^2-x^2=\tau_0^2-x_0^2$。

VII.质速关系与质能关系

1.质速关系

①.合理假设质量 M 的显式函数关系式：$M(m_0,v)=m_0\cdot f(v)$

在 II.3.①.中我们提到，我的洛仑兹因子 k 不能是个常量，否则在"V 相$=\frac{1}{k}\cdot V_0$相"这样的修正下，仅仅把"牛顿时空结构"变成了"新·牛顿时空结构"，并未在本质上修正速度为相对论速度，来使得模型中光速不变。因此 k 得是个关于某个或某些物理量的函数，然而在$\frac{1}{k}\cdot V_0$中，k 只能被看作是关于V_0(即之后的 v)的函数，因此我们有 k=k(v)。

同样的道理，现在在实验室中发现物体的质量 M 也不是个常量了，并且同时发现其与 v 有关。根据经验，当 v=0 时，新模型中 的 M 应与物体的静质量成正比，即 M 亦与物体的静质量m_0有关。于是 $M=M(m_0,v)$，根据实验规律和经验模型，容易有：$M(m_0,0)=m_0$，以及 $M(0,v)=0$，这让我们自然而然地首先选择尝试这样的物理模型：$M(m_0,v)=m_0\cdot f(v)$，并且其中 f(0)=1。【另一个这么设定的理由：依据之前我们所得到的有关空间变换的结论：$\triangle x=\frac{1}{k}\cdot\triangle x_0$，由于 k=k(v)，我们发现也有与 $M=M(m_0,v)$类似的$\triangle x=\triangle x(\triangle x_0,v)$，并且由于在之后的推导中发现 k(v)有如下特性 k(0)=1，于是$\triangle x=\triangle x(\triangle x_0,v)$也将有类似的特性：$\triangle x(\triangle x_0,0)=\triangle x_0$以及$\triangle x(0,v)=0$；在这些同样的特性下，$\triangle x(\triangle x_0,v)$的最终的具体表达式$\triangle x=\frac{1}{k_v}\cdot\triangle x_0$确实属于$\triangle x(\triangle x_0,v)=\triangle x_0\cdot F(v)$的两个简单函数相乘的模型；虽然其中也恰好有 F(0)=1，但是这并不意味着 f(v)=F(v)；何况即使我们通过实验手段绘制曲线加上合理外推洞悉到 $M(m_0\neq0,c)=\infty$，并且理论上发现也有$\triangle x(\triangle x_0\neq0,c)=\infty$，即即使 M 和$\triangle x$这两者的各项属性是多么地吻合，我们也无法直接得出它们的函数关系式完全一模一样，即仍无法直接臆测 f(v)=F(v)】

②.质量守恒、动量守恒、以及质量与动量跨系守恒

i.在相对论创生以前的世界观中，一个由两个物体构成的体系，其中的两个物体在碰撞前后的质量守恒关系由第三者书写的方程来表现即为：$m_1+m_2=m_1'+m_2'$(这假设的是"碰撞"的场景，并且设碰撞后的独立单元们仍然是两个碎片)；同时，设 A 系相对于 B 系的相对速度 **u** 的方向为 x 方向，则这个体系的碰撞前后在 x 方向上的动量守恒关系由以下旧认知所对应的方程体现：$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1'v_{1x}'+m_2'v_{2x}'$。

现在用后一个动量守恒方程减去前一个质量守恒方程的 u 倍，即有 x 方向上的动量跨系守恒方程：$m_1(v_{1x}-u)+m_2(v_{2x}-u)=m_1'(v_{1x}'-u)+m_2'(v_{2x}'-u)$，准确地说，该方程与上一个 x 方向上的动量守恒方程共同构成了表达 x 方向上的动量跨系守恒的方程组，即我们仅仅用 B 系所推导/测量出的"碰撞"这一事件发生前后的质量守恒和 x 方向上的动量守恒，推导出了" A 系也将测量/推导出：同一个"碰撞"事件在 A 系看来，将也满足 x 方向上的动量守恒"【注：A 系的 x 方向和 B 系的 x 方向是同一个方向：**u** 方向】。

另外，在旧时空观中，质量跨系守恒方程本身也就是$m_1+m_2=m_1'+m_2'$，即在 B 系看来的事件中物质的质量守恒属性，当换做 A 为观测者时，也将观测到同一个事件的质量守恒。并且旧时空观下，质量跨系守恒方程组的对应项甚至都相等。

ii.现在我们在相对论时空中，仍然假设同一个碰撞情境。不过 B 系列出的质量守恒方程因质量m_0被修正为 M 而变为为：a.$M_1+M_2=M_1'+M_2'$；同时，B 系列出的 x 方向上的动量守恒方程为 b.$M_1v_{1x}+M_2v_{2x}=M_1'v_{1x}'+M_2'v_{2x}'$；现在我们假设对于同一个事件，A 系列出的 x 方向上的质量守恒方程为 c.$\overline{M_1}+\overline{M_2}=\overline{M_1'}+\overline{M_2'}$；并且对于同一个事件，A 系列出的 x 方向上的动量守恒方程为 d.$\overline{M_1}w_{1x}+\overline{M_2}w_{2x}=\overline{M_1'}w_{1x}'+\overline{M_2'}w_{2x}'$。

现在我们代入(1).中的合理假设 $M(m_0,v)=m_0\cdot f(v)$，及其所对应的$\overline{M}(m_0,w)=m_0\cdot f(w)$，期间我们得假设不再作为质量守恒和质量跨系守恒的方程(组)$m_1+m_2=m_1'+m_2'$在转而以"物质的静止质量守恒和物质的静止质量跨系守恒"为新意义时，仍成立于相对论时空【因为低速下新理论必须与旧理论融洽】，因此 A 系和 B 系对于同一物体的静止质量均给出相同的值——在此条件下我们将它们代入原方程 a.b.c.d.中，得到：a.$m_1f(v_1)+m_2f(v_2)=m_1'f(v_1')+m_2'f(v_2')$、b.$m_1f(v_1)v_{1x}+m_2f(v_2)v_{2x}=m_1'f(v_1')v_{1x}'+m_2'f(v_2')v_{2x}'$、c.$m_1f(w_1)+m_2f(w_2)=m_1'f(w_1')+m_2'f(w_2')$、d.$m_1f(w_1)w_{1x}+m_2f(w_2)w_{2x}=m_1'f(w_1')w_{1x}'+m_2'f(w_2')w_{2x}'$。

现在我们开始推导。推导原理：像 i.一样，当我们以某个系(比如 B 系)的角度观察到此系下 C 事件满足动量守恒和质量守恒后，必须不需要任何其他假设，就能推

出来其他所有系(比如 A 系)，也观察或计算到或列出，同一个 C 事件对于他们来说，也将具有动量守恒和质量守恒。也就是说，在这里，c.d.两个方程必须能够通过且只需通过 a.b.两个方程推导出来，同时 a.b.两个方程也必须能够通过且只需通过 c.d.两个方程推导出来。换句话说，c.d.两个方程能由 a.b.两个方程的线性组合表示(因为 c.d.中的任意一个方程在形式上可以看出几乎没法用 a.b.的非线性组合表示)，同时 a.b.两个方程也能表示为 c.d.两个方程的线性组合。于是，方程 c.d.与 a.b.能互相线表，并且对线表系数有以下约定：

若要以 a.b.来推出 c.d.中的 d.，则 d.=t(a.,b.)=g(u)·a.+h(u)·b.，其中线表系数 g(u)和 h(u)如左式所示，可以不是常数，而是与任何与 C 对 B 的相对速度 v 和 C 对 A 的相对速度 w 这两个与 C 有关的速度无关的函数，这里取 A 对 B 的相对速度 u 的函数这个与跨系守恒的两个系 AB 有关的且与 C 无关(或者说“与与 C 有关的速度无关”)的函数 g(u)和 h(u)来作为待定的线表系数；由于 AB 系是平权的，则当 a.b.以 t(a.,b.)映射到 d.时，c.d.也必须以 t(c.,d.)映射到 b.，因此 b.=t(c.,d.)=g(-u)·c.+h(-u)·d.【注：此时线表系数函数的自变量 A 对 B 的相对速度 u 变成了 B 对 A 的相对速度-u】。

当我们有了 d.=g(u)·a.+h(u)·b.和 b.=g(-u)·c.+h(-u)·d.时，a.和 c.的表达式也已经通过解二元一次方程组确定下来了：a.=[d.-h(u)·(g(-u)·c.+h(-u)·d.)]/g(u)，c.=[b.-h(-u)·(g(u)·a.+h(u)·b.)]/g(-u)，所以我们没有必要也不能够另求 a.和 c.的表达式了。现在依据分类标准的不同可以将 a.b.c.d.分为：第一种分类方式：d.=g(u)·a.+h(u)·b.和 b.=g(-u)·c.+h(-u)·d.作为一个组合、a.=[d.-h(u)·(g(-u)·c.+h(-u)·d.)]/g(u)和 c.=[b.-h(-u)·(g(u)·a.+h(u)·b.)]/g(-u)作为一个组合；第二种分类方式：d.=g(u)·a.+h(u)·b.和 c.=[b.-h(-u)·(g(u)·a.+h(u)·b.)]/g(-u)作为一个组合、a.=[d.-h(u)·(g(-u)·c.+h(-u)·d.)]/g(u)和 b.=g(-u)·c.+h(-u)·d.作为一个组合。

我们在接下来的推导中，采用第一种分类方式中的 d.b.这个组合。由于 d.b.作为部分剩余方程的线性组合：d.=g(u)·a.+h(u)·b.和 b.=g(-u)·c.+h(-u)·d.，并且为了之后推导的便利，它们同样可以被写为：d.=h(u)·b.-g(u)·a.和 b.=h(-u)·d.-g(-u)·c.【这一点仍然符合上上一段的对称性】。现在我们用 a.b.c.d.中的公有部分m_1、m_2、m_1'、m_2'之外的非公有部分来分别表征四个方程 a.b.c.d.：比如用$f(v)$来 features a.、$f(v)\cdot v_x$ features b.、$f(w)$features c.、$f(w)\cdot w_x$ features d.，于是方程 d.b.分别被方程 a.b.和 c.d.线表的方程 d.=h(u)·b.-g(u)·a.和 b.=h(-u)·d.-g(-u)·c.被进一步写为方程 d.b.的每一个特征项，分别被方程 a.b.和 c.d.的对应的特征项线表的方程：$f(w)\cdot w_x$=h(u)·$f(v)\cdot v_x$ −g(u)·$f(v)$和$f(v)\cdot v_x$=h(-u)·$f(w)\cdot w_x$ −g(-u)·$f(w)$。

根据 B 系下的 x 方向上的速度相加定理：$w_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}}$，以及相对论余弦定理：$1-\frac{v_x\cdot u}{c^2}=\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}$，将它们结合便有：$w_x=\frac{v_x-u}{\frac{k_u\cdot k_v}{k_w}}$，进而有$\frac{w_x}{k_w}=\frac{v_x}{k_v}\cdot\frac{1}{k_u}-\frac{u}{k_u}\cdot\frac{1}{k_v}$，为了后续的对应方便，我们进一步将其记作$\frac{1}{k_w}\cdot w_x=\frac{1}{k_u}\cdot\frac{1}{k_v}\cdot v_x-\frac{u}{k_u}\cdot\frac{1}{k_v}$；同样的道理，结合 A 系下的 x 方向上的速度相加定理：$v_x=\frac{w_x-(-u)}{1-\frac{w_x\cdot(-u)}{c^2}}$以及相对论余弦定理：$1-\frac{w_x\cdot(-u)}{c^2}=\frac{k_{-u}\cdot k_w}{k_v}$，便有：$\frac{v_x}{k_v}=\frac{w_x}{k_w}\cdot\frac{1}{k_{-u}}-\frac{-u}{k_{-u}}\cdot\frac{1}{k_w}$，同样我们将其进一步写作$\frac{1}{k_v}\cdot v_x=\frac{1}{k_{-u}}\cdot\frac{1}{k_w}\cdot w_x-\frac{-u}{k_{-u}}\cdot\frac{1}{k_w}$。

现在将上一段得到的两个式子和上上一段得到的两个式子对应地进行对比：根据上上一段：$f(w)\cdot w_x=h(u)\cdot f(v)\cdot v_x-g(u)\cdot f(v)$和$f(v)\cdot v_x=h(-u)\cdot f(w)\cdot w_x-g(-u)\cdot f(w)$，根据上一段：$\frac{1}{k_w}\cdot w_x=\frac{1}{k_u}\cdot\frac{1}{k_v}\cdot v_x-\frac{u}{k_u}\cdot\frac{1}{k_v}$和$\frac{1}{k_v}\cdot v_x=\frac{1}{k_{-u}}\cdot\frac{1}{k_w}\cdot w_x-\frac{-u}{k_{-u}}\cdot\frac{1}{k_w}$。可见，要使得上上一段的两个式子成立地有依有据，则上一段得到的两个方程与上上一段的两个方程中的非公有部分要成比例，即$\frac{f(w)}{(\frac{1}{k_w})}=\frac{h(u)}{(\frac{1}{k_u})}\cdot\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}=\frac{g(u)}{(\frac{u}{k_u})}\cdot\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}$和$\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}=\frac{h(-u)}{(\frac{1}{k_{-u}})}\cdot\frac{f(w)}{(\frac{1}{k_w})}=\frac{g(-u)}{(\frac{-u}{k_{-u}})}\cdot\frac{f(w)}{(\frac{1}{k_w})}$，显而易见，当$\frac{f(w)}{(\frac{1}{k_w})}=\frac{h(u)}{(\frac{1}{k_u})}\cdot\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}=\frac{g(u)}{(\frac{u}{k_u})}\cdot\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}=r$时，有$\frac{f(w)}{(\frac{1}{k_w})}=\frac{f(v)}{(\frac{1}{k_v})}=r$以及$\frac{h(u)}{(\frac{1}{k_u})}=\frac{g(u)}{(\frac{u}{k_u})}=1$，即有$f(v)=r\cdot\frac{1}{k_v}$，附带地有$h(u)=\frac{1}{k_u}$、$g(u)=\frac{u}{k_u}$。现在又根据①.(1).中提到的 $f(0)=1$，再加上$k_v|_{v=0}=1$，将它们代入$f(v)=r\cdot\frac{1}{k_v}$即可有：$f(0)=r\cdot\frac{1}{k_0}$即得 $r=1$。

于是$f(v)=\frac{1}{k_v}$。于是 $M=M(m_0,v)=m_0\cdot f(v)=m_0\cdot\frac{1}{k_v}$。现在将 M 写作$m$(之前推导时不这么写，是因为若这样写的话，为了区分不同的质量，其角标会很多；而现在之所以这么写，是为了和主流体系接轨)，即有 $m=m_0\cdot\frac{1}{k_v}$。事情就这么自然而然地发生了。

③.相对论动量的两种表达式及质速关系的另一种简便并且有说服力的由来

i.由于之前的很多篇幅都给出了“相对论速度$\frac{v}{k_v}$”作为“事件的同一性”的一个体现的充分运用及其所导出的各式各样的结论，它在全景式(洞察式)时空观中的公信力是不言而喻的。因此我们在全景式时空观下，由于全景式质量=物体的静止质量m_0，全景式速度=相对论速度$\frac{v}{k_v}$，可以直接认定[相对论动量]=[全景式质量]·[全景式速度]=[物体的静止质量]·[相对论速度]=$m_0\cdot\frac{v}{k_v}$；另一方面，由于常见的现实景况(观察者式时空观)有别于思想实验(全景式时空观)，那么从现实景况(观察者式时空观)上讲，由于观察者式质量=物体的相对论质量m，观察者式速度=非相对论速度v，那么在这样的另一个视角下，[相对论动量]=[观察者式质量]·[观察者式速度]=[物体的相对论质量]·[非相对论速度]=$m\cdot v$。

由于不论思想实验(全景式时空观)所给出的[相对论动量]的表达式，还是从现实景况(观察者式时空观)来看所应有的[相对论动量]表达式，两种不同的理解下的物理量均应有同样的数学形式，因此有：$m_0 \cdot \frac{v}{k_v} = m \cdot v$。据此便可以得出：$m = m_0 \cdot \frac{1}{k_v}$。

我之所以不把这种方法放在上面那个繁琐的方法之前，一方面我怕各位不认同这种简洁；另一方面，也是最主要的方面，上一个“繁琐的方法”其实醉翁之意不在酒，它除了最终到达目的地地给出了相对论质量的表达式之外，最主要的目的是想让各位熟悉熟悉相对论动量守恒方程、相对论质量守恒方程、相对论动量质量跨系守恒方程组，以及它们之间的牵连关系，而我们所给出的相对论质量的数学表达式必须与广泛认同的物理世界的运行规律所对应的基本方程们协调一致而毫无矛盾，这才是这么做的出发点。

ii.在过程中我们得到了相对论动量的两种表达形式：$p = m_0 \cdot \frac{v}{k_v} = m \cdot v$，其中要么速度为相对论量，要么质量为相对论量，且有且只有一个为相对论量；此外，相对论动量 p 不会因为表达形式的选择而失去以下特点：由于 $p = m_0 \cdot \frac{v}{k_v}$，而选定某个被观测对象后，其中的$m_0$为常数，那么相对论动量 p 会因相对论速度$\frac{v}{k_v}$具有普适性的特点而同样具有普适性：即会在各系的测量下守恒、跟相对论速度一样是个物体的全景式属性参数。

2.质能关系

①.一些积分关系引理

i.$\frac{dk_v}{dv} = \frac{d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dv} = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{c^2}\frac{v}{k_v} = -\frac{1}{m_0 c^2} \cdot \left(m_0 \frac{v}{k_v}\right) = -\frac{p}{m_0 c^2}$，由上式可知：$k_v = \int k_v' \cdot dv = -\frac{1}{m_0 c^2}\int p \cdot dv$，因此，或者直接利用凑微分可得$\int p \cdot dv = -m_0 c^2 \cdot k_v$

ii.另一方面，从另一个分支上讲：$\frac{dk_v}{dv} = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{v}\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{1-k_v^2}{k_v} = -\frac{1}{v}\left(\frac{1}{k_v} - k_v\right)$，那么$\left(\frac{v}{k_v}\right)' = \frac{k_v - v \cdot k_v'}{k_v^2} = \frac{k_v + \left(\frac{1}{k_v} - k_v\right)}{k_v^2} = \frac{1}{k_v^3}$，可得$\frac{v}{k_v} = \int \frac{1}{k_v^3} \cdot dv$，即$p = m_0 \int \frac{1}{k_v^3} \cdot dv$

②.质能关系式

$E=\int F\cdot dx=\int \frac{dp}{dt}\cdot dx=\int \frac{dx}{dt}\cdot dp=\int v\cdot dp=v\cdot p-\int p\cdot dv=v\cdot m_0\frac{v}{k_v}+m_0c^2\cdot k_v$ $=\frac{m_0}{k_v}(v^2+c^2\cdot k_v^2)=mc^2$，由于 $E=mc^2$，记静质量对应的静能量$E_0=m_0c^2$。又由于质速关系：$m=\frac{m_0}{k_v}$，可得$E=\frac{E_0}{k_v}$。

由于$E_0=m_0c^2$，那么(1).i.中的式子$\int p\cdot dv=-m_0c^2\cdot k_v=-E_0\cdot k_v$，则我们可以从中得到一个中间方程：$E=v\cdot p-\int p\cdot dv=v\cdot p+k_v\cdot E_0$

③.能量动量关系

根据中间方程：$E=v\cdot p+k_v\cdot E_0$，两边同时乘以 E，可得：$E^2=(E\cdot v)\cdot p+(E\cdot k_v)\cdot E_0$，即有$E^2=(mc^2\cdot v)\cdot p+E_0\cdot E_0$，即$E^2=(mv)\cdot p\cdot c^2+E_0^2$，即$E^2=p^2\cdot c^2+E_0^2$。

④.能量守恒方程与能量跨系守恒方程组

根据之前所列的相对论质量守恒方程：a.$m_1f(v_1)+m_2f(v_2)=m_1'f(v_1')+m_2'f(v_2')$，两边同乘以$c^2$，我们便有$E_1f(v_1)+E_2f(v_2)=E_1'f(v_1')+E_2'f(v_2')$，而由于$E=\frac{E_0}{k_v}$(注意正如$m_1$、$m_2$、$m_1'$、$m_2'$的属性均为$m_0$，方程中的$E_1$、$E_2$、$E_1'$、$E_2'$的属性均为$E_0$)，且$f(v)=\frac{1}{k_v}$，即可得到相对论能量的守恒方程。在这里我就不书写这些守恒方程的具体表达形式了，因为字符和角标的表示可能会与之前的冲突而使得有些同学一头雾水。

相对论能量跨系守恒方程组的成立也基于之前我们所给出的相对论质量跨系守恒方程组的成立。