

学号20161413

密级无

# 东北大学本科毕业论文

## 基于三维铌酸锂非线性光子晶体的 非线性全息设计与研究

学院名称：理学院

专业名称：应用物理学

学生姓名：谢尘竹

指导教师：高志达 教授

二〇二〇年六月



# **Nonlinear Holographic Design and Research Based on Three Dimensional Lithium Niobate Nonlinear Photonic Crystals**

By Chenzhu Xie

Supervisor: Professor Zhida Gao

Northeastern University

June 2020



## 郑重声明

本人呈交的学位论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料真实可靠。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。本学位论文的知识产权归属于培养单位。

本人签名：谢尘竹      日期：2020年6月10日



## 摘要

非线性光子晶体具有空间依赖的二阶非线性系数分布，人们根据各种位相匹配机制设计二阶非线性系数分布，从而有效地操控各种非线性光学效应的发生，铌酸锂( $\text{LiNbO}_3$ )晶体具有出色的非线性光学性质，是当前最受欢迎的人工非线性光子晶体材料之一，一维和二维的铌酸锂非线性光子晶体已被广泛地应用于激光变频、非线性光场调控，以及非线性光学成像等领域。然而三维非线性光子晶体由于受到加工技术的限制，在实验上的实现成为近年来非线性光学领域的最大挑战之一。2018年，基于飞秒激光直写技术擦除二阶非线性系数的三维铌酸锂非线性光子晶体横空出世，三维铌酸锂非线性光子晶体拥有更高的空间维度，包含更加丰富的倒格矢，进而允许通过设计三维非线性光子晶体的结构以全方位操控非线性过程的发生，大量基于三维非线性光子晶体的非线性光学研究将进一步开展和进行。

本课题面向飞秒激光直写的三维铌酸锂非线性光子晶体，研究了三维非线性结构中的准相位匹配机制，提出三维 Gerchberg–Saxton (GS) 算法，对于给定三维倒格矢分布，逆向求解三维纯相位体全息结构，接着利用迂回相位编码方法，获得最终的二阶非线性系数三维分布，可通过飞秒激光直写的方式，选择性地对相应位置的二阶非线性系数进行部分擦除，将三维体全息结构“刻”在非线性晶体内。本文利用数值方法模拟了基频光入射下，三维非线性光子晶体内同时实现二次谐波的产生以及高效调控，出射晶体后的二次谐波成功在远场成像。

**关键词：**铌酸锂；飞秒激光；非线性光子晶体；准相位匹配；非线性全息



## ABSTRACT

A nonlinear photonic crystal (NPC) possesses space-dependent second-order nonlinear coefficients, which can effectively control nonlinear optical interactions through quasi-phase matching. Lithium niobate ( $\text{LiNbO}_3$ ) crystal is one of the most popular materials from which to fabricate NPC structures because of its excellent nonlinear optical properties. One- and two-dimensional  $\text{LiNbO}_3$  NPCs have been widely utilized in laser frequency conversion, spatial light modulation and nonlinear optical imaging. However, limited by traditional poling methods, the experimental realization of three-dimensional (3D) NPCs remains one of the greatest challenges in the field of nonlinear optics in recent years. In 2008, An experimental demonstration of a 3D  $\text{LiNbO}_3$  NPC by using a femto-second laser to selectively erase the nonlinear coefficients in a  $\text{LiNbO}_3$  crystal was presented. The effective conversion efficiency is comparable to that of typical quasi-phase-matching processes. Such a 3D  $\text{LiNbO}_3$  NPC provides a promising platform for future nonlinear optical studies based on its unique ability to control nonlinear interacting waves in 3D configuration.

This study is based on the three-dimensional lithium niobate nonlinear crystals modulated by femtosecond laser writing system. Through the three-dimensional GS algorithm and adopting certain phase and amplitude constraints, the target object light distribution is repeatedly Fourier transformed into a phase only hologram. Then, according to the three-dimensional Fourier computed volume hologram generated by the three-dimensional GS algorithm, the three-dimensional detoured phase coding method is used to shift the different coordinate positions of focusing beam with respect to the periodic cell structure in the modulation region of the lithium niobate crystal to selectively erase the second-order nonlinear coefficients at the corresponding positions, and "carve" the hologram in the modulation area of the three-dimensional photonic crystal. Finally, under the incidence of the fundamental-frequency light, the second harmonic wave is generated in the crystal and the second harmonic wave after exiting the crystal is imaged in the far field at the same time.

**Key words:**  $\text{LiNbO}_3$ ; Femtosecond laser; Nonlinear photonic crystal; Quasi phase

matching; Nonlinear holography

# 目 录

|   |     |
|---|-----|
| 郑重声明 .....  | I   |
| 摘要 .....  | II  |
| ABSTRACT .....  | III |
| 1 绪论 .....  | 1   |
| 1.1 引言 .....  | 1   |
| 1.1.1 非线性光学 .....   | 1   |
| 1.1.2 非线性光子晶体 .....   | 1   |
| 1.2 非线性全息 .....   | 3   |
| 1.2.1 非线性全息的三个特征 .....  | 4   |
| 1.2.2 非线性全息的应用 .....  | 6   |
| 1.3 非线性全息编码成像 .....   | 6   |
| 1.3.1 二维非线性菲涅尔全息编码成像 .....  | 8   |
| 1.3.2 三维非线性傅里叶全息编码成像 .....  | 9   |
| 2 三维非线性傅里叶全息成像原理 .....  | 11  |
| 2.1 非线性光学 .....   | 11  |
| 2.1.1 从麦氏方程组的微分形式到非线性电介质中的波动方程 .....                                    | 11  |
| 2.1.2 磁各向同性的非线性电介质中的波动方程及其解 .....                                       | 13  |
| 2.2 一维非线性光子晶体中的准相位匹配机制 .....  | 18  |
| 2.2.1 准相位匹配是除完美相位匹配方法外提高转换效率的较好方法 .....                                 | 19  |
| 2.3 利用三维非线性光子晶体实现傅里叶全息成像 .....  | 23  |
| 2.3.1 三维光子晶体中的准相位匹配机制 .....   | 23  |
| 2.3.2 结构倒格波的波矢与振幅和远程成像的关系 .....   | 27  |
| 3 三维非线性结构设计与全息成像仿真 .....  | 32  |
| 3.1 三维 GS 算法：约束结构角谱为目 S 标图像逆向获得 $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$ 分布 ..... | 32  |

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 3.1.1 基于三维光子晶体的远场傅里叶计算体全息的逆向过程原理..... | 32 |
| 3.1.2 波长匹配问题.....                     | 33 |
| 3.1.3 三维角谱分布函数的初始化.....               | 35 |
| 3.1.4 三维 GS 算法实现过程.....               | 36 |
| 3.2 三维迂回相位编码：对正空间非线性结构多值化编码.....      | 38 |
| 3.2.1 二维迂回相位编码原理.....                 | 39 |
| 3.2.2 三维迂回相位编码过程.....                 | 44 |
| 3.3 三维光子晶体各面倍频光光强、相位分布及远场成像仿真.....    | 48 |
| 3.3.1 三维光子晶体两侧面的倍频光强分布、相位分布.....      | 49 |
| 3.3.2 三维光子晶体后端面与远场倍频光强分布.....         | 50 |
| 4 总结与展望 .....                         | 54 |
| 4.1 总结 .....                          | 54 |
| 4.2 展望 .....                          | 55 |
| 参考文献 .....                            | 58 |
| 致    谢 .....                          | 61 |
| 附录 A 中文译文.....                        | 64 |
| 附录 B 外文原文.....                        | 72 |

# 1 绪论

## 1.1 引言

### 1.1.1 非线性光学

1960 年，红宝石激光器神奇的辐射一举扫除了光学领域的沉寂，各种奇异的效应如同雨后春笋展现在世人面前，量子光学、非线性光学、全息技术、超快现象、光学信息处理以及光纤通信等众多崭新的分支学科相继脱颖而出。其中，激光的问世所派生出的傅里叶光学、光学全息技术和非线性光学等新分支尤其令人瞩目。

光与物质相互作用的非线性性质，在 1961 年由 Franken 发现二次谐波以来，逐渐成为如今光学领域最具有活力的学科之一<sup>[1-2]</sup>。次年 Bloembergen 等人对非线性光学的参量过程做了详尽的研究，并提出了准相位匹配理论(Quasi phase matching, QPM)，后来被广泛应用于光参量振荡、激光变频等技术中<sup>[3-5]</sup>。

### 1.1.2 非线性光子晶体

非线性光学主要研究光与材料之间的相互作用。随着光学功能的集成化与器件的小型化要求越来越高，天然材料难以满足科技发展需求，于是关于人工微结构材料的研究得到了迅猛发展，比如将材料的折射率进行波长级有序调制，人们制造出了具有光子能带的光子晶体；将金属、聚合物制成亚波长的周期、准周期结构的有序排列，人们发明了超构材料，得到了负折射率或可实现光学隐形等的人工微结构材料。

与上述各人工微结构材料平行地，非线性光子晶体也是一种可实现多种非线性光学效应的人工微结构材料，别名光学超晶格，也称准相位匹配结构，是一种二阶及以上上的非线性系数在空间上受到调制的人工晶体，其最基本的功能是实现倍频或和差频过程中的准相位匹配<sup>[6-8]</sup>。通过对结构的特殊设计，非线性光子晶体也能够对非线性过程所产生的倍频光、和差频光的多种属性进行操控，如振幅、相位和轨道角动量等。

非线性光子晶体的调制维度提高后可以在额外的一个维度上弥补非线性过程的波矢失配，进而大大丰富了准相位匹配的类型。准相位匹配的概念最早由诺贝尔奖获得者 Bloembergen 于 1962 年的准相位匹配理论中提出，但直到三十年后光学超晶格的成功制备，它才进入到一个迅速发展的阶段。1998 年，Berger 将准相位匹配结构

从一维推广至二维并正式提出了非线性光子晶体这一称谓，同时也提到了三维非线性光子晶体<sup>[9-10]</sup>，但限于当时的技术和制备方法，无法实现这种三维结构<sup>[11]</sup>。

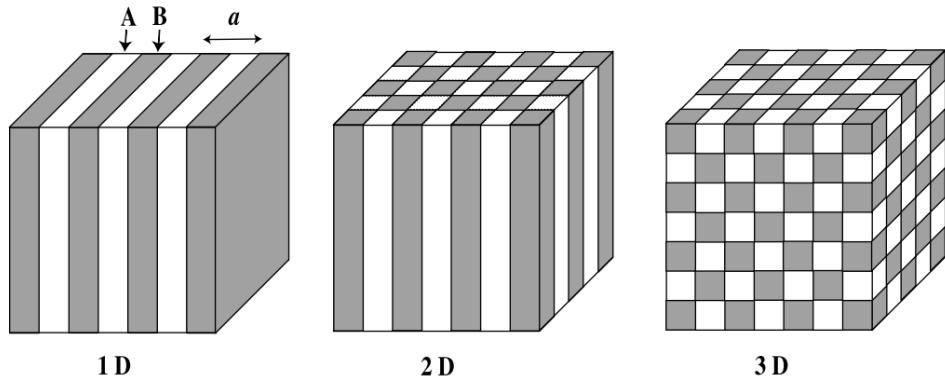


图 1.1 一维、二维、三维非线性光子晶体即受调制的二阶非线性系数空间阵列

2018 年张勇课题组通过飞秒激光直写技术<sup>[12]</sup>，通过聚焦光斑破坏局域晶体结构，从而能够在三个空间维度上调制透明铌酸锂晶体的二阶非线性系数，世界首次真正在实验上实现了制备可以实现三维准相位匹配的非线性光子晶体<sup>[13]</sup>。三维非线性光子晶体在理论上能真正实现任意角度上的非线性过程的相位匹配，进而实现对经典和量子光波（纠缠光子）的空间模式、频谱、（波包）振幅、相位的全方位调制，展现出在集成量子信息技术、光束的波前调控和波形调控<sup>[14]</sup>、非线性全息成像、非线性光信息的储存和重建等领域的广阔应用前景。三维超晶格的制备技术突破也使得光学超晶格的商业化成为可能，为激光波长扩展，全光开关，超快光学等领域奠定了基础。

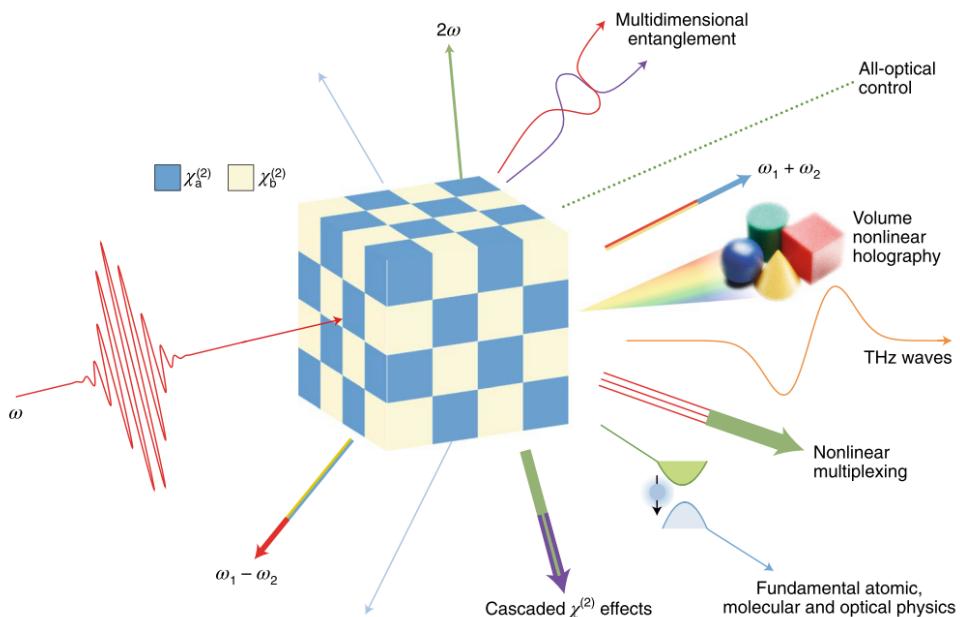


图 1.2 三维非线性光子晶体的潜在应用<sup>[15]</sup>

本文基于三维铌酸锂非线性光子晶体，探索其在非线性计算全息成像领域的应用：在前人的准相位匹配理论和非线性全息理论基础上，利用三维 GS 算法设计正空间中三维光子晶体调制区域内的相位分布，并通过三维迂回相位编码法将 GS 算法所得的相位分布转换为晶体实际的二阶非线性系数分布，完成三维非线性光子晶体体全息结构的设计，接着利用数值模拟计算了该三维光子晶体中的倍频过程，同时实现了频率转换和倍频光的三维非线性全息成像。

## 1.2 非线性全息

“全息”一词来自希腊文“holos”，意为完全的信息。在光学领域是指不仅包括光的振幅信息，还包含光的相位信息。近些年来，随着激光技术的飞速发展，非线性光学与全息技术相结合，取得了许多理论和实验上的突破<sup>[16]</sup>。

非线性全息术是一种利用基频光经非线性光子晶体变频后所得的和差倍频光的干涉和衍射原理，记录并再现物体真实的三维图像的技术。非线性全息也延续了普通全息的分类方法，如根据记录介质的厚度可分为平面全息和体全息；根据介质对光波的调制作用，可分为振幅和位相全息；根据物光与参考光在全息图的同侧还是异侧，可分为反射和透射全息；根据全息图记录物光信息的内容不同，可分为近场的菲涅尔全息、远场的傅里叶全息等等。

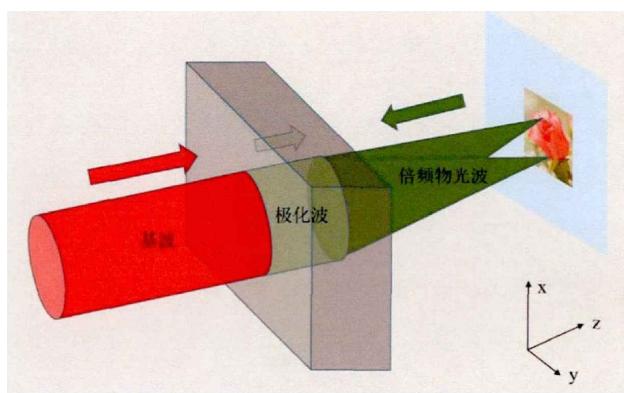


图 1.3 非线性波前记录过程

国内的南京大学继提出了非线性光学中的波动理论——非线性惠更斯原理后，首次提出了非线性菲涅尔全息术，允许通过倍频光重现物光波前：当基波入射非线性晶体后，与介质相互作用时产生非线性倍频极化波，与此同时倍频极化波作为参考光与倍频物光波相互干涉形成干涉条纹，倍频波中所包含的物光信息则被存储在干涉条纹中。由于极化波不能出射晶体，所以没法用晶体外传统的全息板记录该正空间的干涉

条纹；但基波和包含物光信息的重现倍频物光可以出射晶体，并且二者很容易分离。

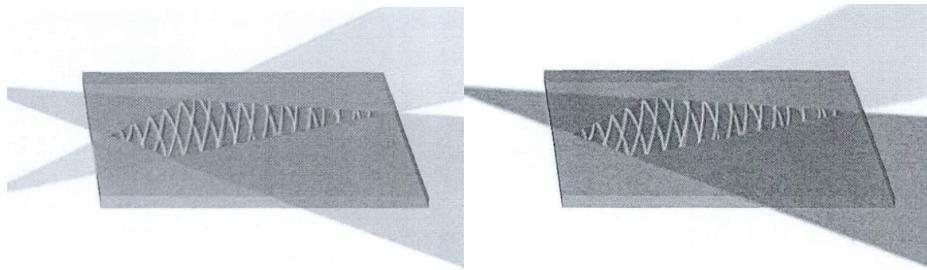


图 1.4 倍频波前记录（左）与再现（右）原理示意图

之后再通过电场极化技术，在非线性晶体中加工出对应干涉条纹的二值化图案，就完成了记录过程。当平面波基频光入射晶体时，其产生的非线性极化波作为参考光，经过晶体内储存的干涉图样畴结构，便可出射与原物光的倍频光的相位和频率一致、振幅成比例的还原倍频物光。此即是非线性全息技术发展早期所提出的非线性菲涅尔全息原理。

### 1.2.1 非线性全息的三个特征

#### 1.2.1.1 计算全息

不像线性全息，正空间非线性全息的干涉条纹的形成机制是倍频的物光波与倍频的极化波之间的干涉；而由于极化波本身作为参考光不能在真实空间中稳定传播，必须依赖于介质以至时刻处于介质中，因此这种特殊的干涉机制下所形成的干涉条纹，虽然基于正空间的非线性全息原理，是真实存在的，但若不采用特殊手段，该干涉条纹无法被介质以二阶非线性系数分布的形式记录下来，因此由于特殊的干涉机制以及参考光无法在除介质之外的空间中稳定传播，非线性全息均属于计算全息(Computer-generated holography, CGH)的范畴。因此对于非线性全息的全息图，不论是记录物光正空间信息的菲涅尔衍射干涉条纹，还是记录倒空间信息的夫琅禾费衍射干涉条纹，以及三维光子晶体正空间中的目标图像的傅里叶全息图，均只能采用计算机编码的方式记录和生成。而采取计算全息术也有两点优势，一方面不需要在实空间存在具体的对象（但仍需要诸如以二进制形式储存在电脑中的相片等，记录下振幅或复振幅分布的信息），另一方面也可以实现任意理想的波前。

#### 1.2.1.2 体全息

非线性全息除了只能是计算全息之外，一般也尽量采取体全息技术。因为在非线

性光学中，为了有效地提高转换效率，需要增加基波在晶体中的传输距离，于是晶体便不可避免地需要选用三维的人工超晶格；当然，此处的维度只是指提供非线性过程的场所——晶体本身的三维结构是块状还是薄面，并不涉及其内部的二阶非线性系数的调制维度，和可维持波矢匹配、可实现准相位匹配的维度，因此即使是二维光学超晶格（二阶非线性系数是沿某平面二维调制的，在通光方向仍有厚度的“三维”光子晶体），其所参与的二维非线性全息，也属于体全息。

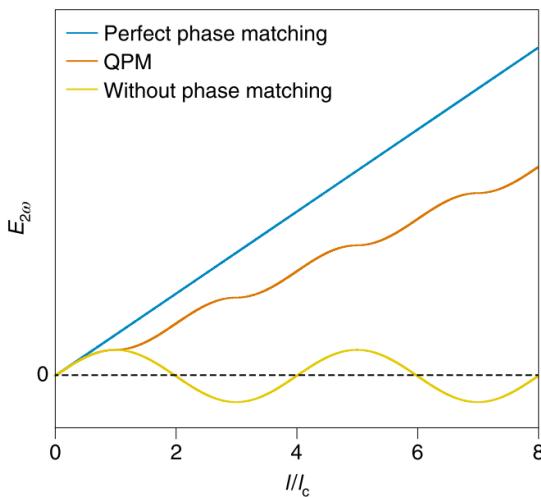


图 1.5 准相位匹配（红线）与完美相位匹配和波矢失配的对比  
以及三者的二次谐波光强随传播距离的函数关系

非线性体全息也传承了经典体全息中的选择特性，即因实空间中的非线性惠更斯原理所导出的非线性布拉格衍射，相对于平面全息，体全息的再现光必须严格符合记录时的参考光，包括入射角度、波长等；并且选择特性更强。不同的是线性全息基于光栅的布拉格条件，而非线性全息是基于相位匹配条件。

### 1.2.1.3 晶体本身同时也是全息板，且需于实验前计算并加工完毕

非线性全息除了必须是计算全息、最好是体全息之外，既可以是菲涅尔全息，又可以是傅里叶全息，但实现准相位匹配的晶体必须同时也是记录全息图像信息的介质——“全息板”。然而一般晶体对于光场干涉条纹的响应主要体现在折射率变化上，而一阶非线性系数的分布无法直接转换为二阶非线性系数分布，这就要求在记录过程需以二阶非线性系数调制的方式将干涉条纹写入非线性光子晶体，而无法通过自然的介质记录干涉图样的方式得到。因此记录工作得分为计算、编码，以及将计算所得的干涉条纹或全息图写入晶体，至少两个步骤。

具体地说，在非线性全息的特殊干涉机制下，正空间中的干涉条纹只在晶体中且只在干涉过程中存在，因此在时空上都很难通过外界的普通的全息板记录下来，以至全息板只能是光子晶体本身。然而任何晶体均无法既吸收光子发生作用以将干涉条纹记录为二阶非线性系数的分布，同时又持续地维持整个准相位匹配过程，因为这是矛盾的——准相位匹配理论告诉我们非线性系数的分布会影响倍频光的生成，而记录过程又要求倍频光的干涉条纹影响介质的二阶非线性系数分布，这样的相互作用总会导致准相位匹配效率或记录效果的其中一方的降低；而干涉条纹在记录为折射率分布的同时却很难从实验上将该分布提取出来并转化为介质的二阶非线性系数分布，种种原因导致非线性全息的记录过程只能是计算全息配合编码加工的形式。

总的来说，在空间上，因特殊的干涉机制导致记录过程中所产生的干涉条纹与光子晶体不可分隔；而为了记录条纹，记录介质与干涉条纹在空间上也不可分离。因此，光子晶体与记录介质在空间上须重叠。但由于晶体无法在时间上做到记录过程与倍频过程的重合，所以记录过程不能采取实验配合化学试剂的方法，而需采用计算配合编码加工的过程，才能将光子晶体加工成以二阶非线性系数记录了全息图信息的介质。

### 1.2.2 非线性全息的应用

非线性全息一方面在成像领域有着非常重要的地位，另一方面在波前调控的作用也不容小觑<sup>[17-18]</sup>。比如利用非线性光学全息的原理，用特殊光束代替物光波，便可以实现任意非线性光束整形。比如将 Airy 光束、拉盖尔-高斯光束、涡旋光束等一系列具有特殊光束与非线性极化波相干涉，就能得到非线性光束整形后的光子晶体结构，进而实现相应非线性光束的输出。

当然，非线性全息还在偏振调控、信息储存以及即时调制器等领域也有非常广阔的应用前景；同时，光学中的非线性全息技术在合适的非线性材料体系中还可以推广到更广泛的电磁波段甚至其它波动体系中去。

## 1.3 非线性全息编码成像

二维、三维的非线性全息编码成像，都属于计算全息的范畴；但根据“全息板”即非线性光子晶体记录的是倍频物光与极化波参考光的干涉图样，还是以二维物像的傅里叶变换结合编码方法获得的二阶非线性系数的空间分布，仍旧分为菲涅尔计算全息和傅里叶计算全息。

基于非线性菲涅尔全息原理，洪熙昊、陆荣儿等人分别发展了二值化编码法、准多值化编码法（即四值化编码法），将物体经菲涅尔衍射的光场与非线性极化波（参考光）之间的干涉条纹强度分布先二值化或四值化，再利用电场极化翻转铁电材料钽酸锂的相应位置的畴向，以将计算所得的二值化干涉条纹记录在二维非线性晶体中，实验时只需基频重现光照射晶体即可还原倍频物光。但是在这一工作中，由于加工技术限制，只实现了一维光场的复现，这是二维非线性光子晶体的一个缺陷。

具体而言，图 1.1 的左二图所代表的二维光子晶体共有两种成像方式，一种是通光方向沿畴的自发极化方向即  $z$  向，此时用以补偿色散的结构倒格矢共有  $x$  向与  $y$  向分量两种，可以实现  $x-o-y$  面的准相位匹配和二维非线性全息成像图案的设计，但此时通光方向即  $z$  向因无法进行结构调制而无法实现准相位匹配，导致无论二维光子晶体  $z$  向厚度多大，晶体内振幅沿  $z$  向振荡的倍频光在出射晶体后端面时，振幅只能取下图中无周期结构的 sin 式振荡的最高值，导致倍频效率极低，成像非常暗；第二种方式是选择  $x$  向或  $y$  向为通光方向，此时虽可实现通光方向准相位匹配过程提高倍频光场振幅，但由于  $z$  向准相位匹配过程始终无法实现，导致对  $z-o-x$ 、 $y-o-z$  面的一维结构调制只能调控一维光场分布，以至于需要采用基频光沿  $z$  向一层层扫描二维光子晶体，才能实现二维非线性全息成像；并且由于最终生成的二维图像是无数个一维光场的叠加，导致只能做近场菲涅尔全息无法用层状频谱结构做远场傅里叶全息，并且成像图案不可避免会受到相邻层干涉散斑叠加的影响而质量下降。

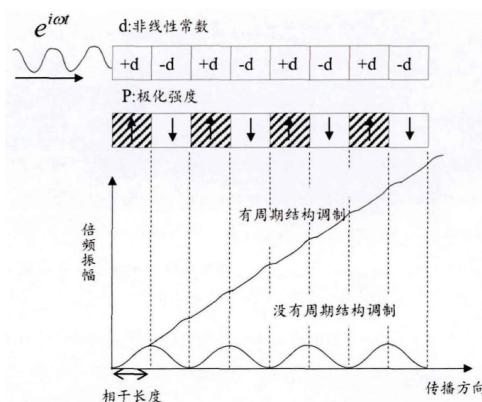


图 1.6 二维非线性光子晶体内周期性反转的铁电畴中准相位匹配过程下的倍频强度分布图

相比而言，基于可提供任意方向的倒格矢弥补波矢失配的三维光子晶体，三维非线性全息没有任何准相位匹配限制，且既可做菲涅尔全息又可实现傅里叶全息。同样，对三维非线性光子晶体内非线性系数分布，也是计算而非实验所得，本文选择傅里叶

全息设计，为了利用三维倒格矢完成准相位匹配同时实现远场成像，采用三维 GS 算法寻找我们所需要倒格矢对应的实空间结构分布，能够使得远场二次谐波光场图案完全满足准相位匹配输出。

### 1.3.1 二维非线性菲涅尔全息编码成像

在计算得到全息图后，非线性材料将作为全息图的载体，将全息图的内容加工成微结构。在二维光学超晶格材料中，由于其电畴翻转特性，正负畴之间相位相差  $\pi$ ，因此它可以作为一种天然的二值全息板，同时实现非线性光学效应与全息成像。

人们为了实现二维非线性全息，在基于二维超晶格正负畴结构的基础上，发明了二值化编码方法<sup>[19]</sup>，即将干涉光场分布  $I_s$  取符号函数  $\text{sign}(I_s)$ ，其值随平面光场分布的正负取 +1 或 -1，分别对应待加工超晶格材料中同一平面内的白色正畴和黑色负畴；之后继续发明了准多值化编码方法，但都限于加工工艺的精度限制，以及所选超晶格材料的限制，无法加工出真正连续的畴结构，也就无法应用连续编码；因此二维非线性全息受材料和加工工艺的限制，在二值化→准多值化→多值化→连续编码的路上，遇见了多值化这一瓶颈，成像质量有待进一步提高。同时二维非线性全息的共同特点是无法同时实现二维非线性光场调控的同时实现准相位匹配，这是由于电场极化技术畴翻转必然贯穿整个结构导致的。

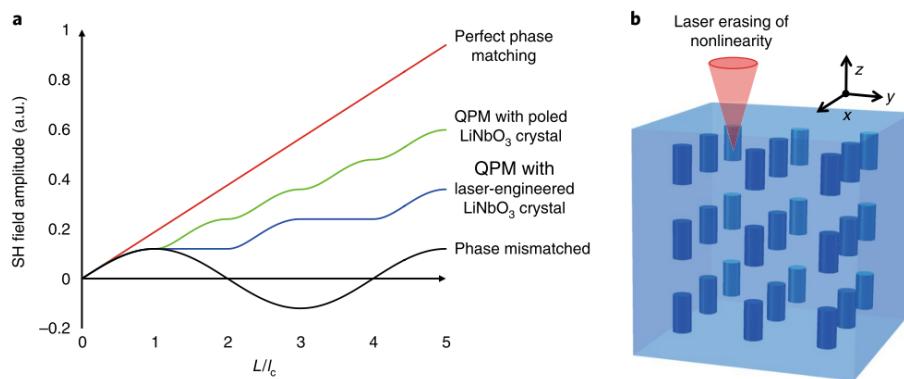


图 1.7 飞秒加工（蓝线）与周期性极化（绿线）的铌酸锂晶体的准相位匹配效率对比<sup>[13]</sup>

相应地，虽然三维非线性晶体目前难以实现非线性系数反转（1:-1），但三维非线性结构和三维全息本身相对于二维就多一个维度的自由度，可以提供三个维度上的倒格矢以满足准相位匹配条件，衍生出的相关应用数不胜数；并且由于飞秒直写具有很高的加工精度，即飞秒脉冲对介质的作用时间极短，光斑直径也极小，可以极大地避免在加工过程中产生热效应，防止脉冲能量在介质中扩散，再配合上高精度的移动

装置，使得三维非线性全息在设计和加工上都能近似连续编码；再加上加工过程中也不需要很多其他工艺离不开的掩膜板以及化学制剂，因此可退而求其次只对介质非线性系数的大小进行调制（1:0.85）<sup>[20]</sup>，这一思路也曾被运用于多种材料以实现准相位匹配，例如用离子注入的方法降低 GaAs 的非线性系数<sup>[21-24]</sup>、用热极化的方法增加玻璃光纤的二阶非线性系数<sup>[25]</sup>，以及通过人工设计在超构材料中实现准相位匹配<sup>[26]</sup>等。

### 1.3.2 三维非线性傅里叶全息编码成像

铌酸锂（LiNbO<sub>3</sub>）是一种铌、锂和氧的化合物，钛铁矿型结构，铁电相的铌酸锂在光轴方向有个三重对称轴，属于三方晶系，可选择含 6 个 LiNbO<sub>3</sub> 式量的六方晶胞或含 2 个式量的三角晶胞作为晶胞；其在光轴方向还有个三度旋转轴，因此其点群为 3m，空间群为 R3c，不具有对称中心，是压电晶体；同时在其居里温度 1210℃以下，跨过一级相变后随着其温度的降低，电致伸缩能（电弹性能）密度占据总能量密度比例升高，锂离子从原原胞内氧八面体中心相对于氧原子层（ $\perp$  光轴）沿平行光轴的某个方向位移，同性相斥的缘故导致原顺电相时位于两氧原子层正中且与锂离子共线于光轴的铌离子也随着锂离子相对于氧原子层进行同向位移但位移量不同，导致原胞内正负电中心不重合，以至于出现宏观和微观的自发极化，并且单畴态的铌酸锂的自发极化方向与其光轴方向平行或反平行，随着温度的降低自发极化程度提高，有热电效应，此时铌酸锂具有自发极化且电畴方向能随外加电场方向的改变转向而是铁电晶体，且易于加工；同时氧八面体中心存在锂离子空位而属于 p 型半导体；而从一阶非线性系数上，它还是负单轴晶体（ $n_o > n_e$ ）。经过畸化处理的铌酸锂晶体具有压电、铁电、热电、光电、非线性光学等多性能。其单晶是光波导、移动电话、压电传感器、光学调制器和各种其它线性光学应用的重要材料，同时因其非线性系数  $d_{33}$  和光损伤阈值均较高，所以也是非线性光学应用的重要材料。

本文的研究所采用的技术是飞秒激光直写技术以调制铌酸锂晶体的二阶非线性系数的三维分布，而非采用光刻的方法镀上周期性电极和二倍周期地反向施加脉冲电压<sup>[27-28]</sup>以制成周期极化畴反转的二维准相位匹配结构，因此调制出来的是三维光子晶体；正是因为由于采用的加工工艺、非线性全息的类别、人造微结构材料及其调制维度的不同，采用的数值计算的对象和方法、计算全息编码方法也不一样，相应地我们采用三维 GS 算法先算得正空间相位三维分布即傅里叶相位体全息图，再将三维的相位分布通过三维迂回相位编码法转换为二阶非线性系数的三维分布，并且由于飞秒激

光的加工精度允许，对相位的编码是多值化且准连续的。最后用基频光入射晶体并采用二级倍频光成像。

相比而言，这种加工技术及编码方法在效率上比上述两种二维非线性全息高，且因准相位匹配维度的提高而具有更高的信息容量，即三维非线性全息可产生二维图像，而二维非线性全息只可生成一维光场分布；在普通的二维非线性全息中存在畴极化方向的相位失配导致非线性转换效率较低，而基于三维非线性光子晶体的非线性体全息在该方向的转换效率上具有天然的优势，毕竟非线性光子晶体及非线性全息从二维发展到三维是质的创新。三维非线性全息也能在高效频率转换的同时对光束整形和重现全息图像，即全方位调控光场，这也是线性全息和二维非线性全息所不可比拟的。

## 2 三维非线性傅里叶全息成像原理

### 2.1 非线性光学

激光的问世使作用于介质的光场振幅提高了好几个数量级，大量涌现出的旧理论无法解释的新现象打破了介质电极化强度与介质中外电场一次方呈简单线性关系的旧有认识：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_n(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{P}}(\omega_n) &= \varepsilon_0 \left[ \sum_{\pi}^{\omega_n = \omega_{m_{\pi(1)}}} \overrightarrow{\chi_e^{(1)}}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(1)}}) + \sum_{\pi}^{\omega_n = \omega_{m_{\pi(1)}} + \omega_{m_{\pi(2)}}} D_{m_1, m_2} \overrightarrow{\chi_e^{(2)}}(\omega_n; \omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}}) \right. \\ &\quad : \tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(1)}}) \tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(2)}}) + \dots + \sum_{\pi}^{\omega_n = \omega_{m_{\pi(1)}} + \omega_{m_{\pi(2)}} + \dots + \omega_{m_{\pi(l)}}} D_{m_1, m_2, \dots, m_l} \overrightarrow{\chi_e^{(l)}}(\omega_n; \overbrace{\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}}, \dots, \omega_{m_{\pi(l)}}}^l) \\ &\quad \left. \cdots \overbrace{\tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(1)}}) \tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(2)}}) \cdots \tilde{\mathbf{E}}(\omega_{m_{\pi(l)}})}^l + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中，求和区间遍历符合条件  $\omega_{m_{\pi(1)}} + \omega_{m_{\pi(2)}} = \omega_n$  的单色光场的排列  $(\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}})$  的集合  $\{(\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}})\}$ （以  $l=2$  为例）。

求和项中包含了  $\omega_{m_{\pi(1)}} = \omega_{m_{\pi(2)}}$  的情况，此时相应项即描述(二)倍频极化光，并在相位匹配条件满足以及结构的倒格矢可补上相应波矢失配时，作为非线性介质中的波动方程等式右侧的非线性波源项，将在介质中对应地持续产生二次谐波，否则

$\omega_{m_{\pi(1)}} \neq \omega_{m_{\pi(2)}}$  即描述的是产生和频光或差频光。

若当  $m_1 \neq m_2$  时， $(\omega_{m_{\pi(2)}}, \omega_{m_{\pi(1)}}) \neq (\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}})$ ，即集合  $\{(\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}})\}$  中的每个元素是一种“排列性序列”，则  $D_{m_1, m_2} = 1$ ；否则若任一排列光场序列  $(\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}}, \dots, \omega_{m_{\pi(l)}})$  对于任意两个独立取值且值不相同的角标  $m_{i_1}, m_{i_2}$  均具有置换对称性，即若满足  $\omega_{m_{\pi(1)}} + \omega_{m_{\pi(2)}} + \dots + \omega_{m_{\pi(l)}} = \omega_n$  的集合  $\{(\omega_{m_{\pi(1)}}, \omega_{m_{\pi(2)}}, \dots, \omega_{m_{\pi(l)}})\}$  中每个元素是一种“组合性序列”，则：

$$D_{m_1, m_2, \dots, m_l} = \frac{l!}{\prod_k^{\{m\}} \text{card}\{i_{m=k}\}!} = \frac{l!}{\prod_{k=1}^{m_{\max}} \text{card}\{i_{m=k}\}!} = \frac{l!}{\sum_k^{\{m\}} \text{card}\{\overline{m_i | m_i = k}\}!} = \frac{l!}{\sum_m \text{card}\{\overline{m_i | m_i = m}\}!} \quad (2.2)$$

它称为简并因子，体现了倍频光与和差频光的 2 倍振幅区别，也体现了参与转换的是光而非频率。

#### 2.1.1 从麦氏方程组的微分形式到非线性电介质中的波动方程

可以证明，普遍形式(介质中)的麦氏方程组的微分形式，(其内四个方程均)仍适用于非均匀、各向异性，甚至非线性的电磁介质，并且适用于非稳恒(电磁)场。以 SI

单位制写为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho}_f \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}}_f + \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

其中  $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  都是复色场、时变场。在一般的电介质中，自由电荷体密度  $\tilde{\rho}_f = 0$ ，因此  $\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\rho}_f \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，则四号方程右侧只剩极化电流与位移电流之和  $\partial \tilde{\mathbf{D}} / \partial t$ ；若所考虑的材料是磁性的，则  $\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 (\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{M}})$ 。将考虑上述两个条件的四号方程，代入经  $\nabla \times$  作用后的三号方程中，得：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) &= \nabla \times \left( -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \xrightarrow{\text{四号方程}} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} + \nabla \times \tilde{\mathbf{M}} \right) \\ &= -\mu_0 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}) \right] \xrightarrow[c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}]{\tilde{\mathbf{D}}=\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{P}}} -\frac{1}{c^2 \cdot \mu_0 \epsilon_0} \cdot \mu_0 \left[ \frac{\partial^2 (\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{P}})}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}) \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 \cdot \epsilon_0} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

得非线性介质中电场波动方程的最普遍形式：

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}) \right] \quad (2.5)$$

### 2.1.1.1 复数形式傅里叶展开以单色化叠加场、分离时间项、引入电磁非线性效应

但上述各物理量都是叠加场，为引入非线性效应以及分离时间项以将各量和波动方程变为定态的，首先需要将方程和物理量全都单色化。现选择合适的时空坐标系、时空坐标原点，以及延拓方法，使得延拓后的  $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ 、 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  以及  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  在四个维度上分别都是偶函数且是周期函数，则此时延拓后的叠加场可展为傅里叶余弦级数，接着再将其转换为复数形式的傅里叶级数展开式，将参与混频的复色场展开为单色场的线性叠加；通过类似的过程可单色化非线性、线性过程所产生的复色  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)$ ，并分离其时间项；同理接着单色化  $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{B}}$ 、分离其时间项、引入  $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{B}}$  的非线性效应。

### 2.1.1.2 三维空间中的含磁非线性电介质中的定态单色电场波动方程的最普遍形式

据前一节理论，将  $\tilde{\mathbf{D}}_n = \tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_n^{NL} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_n + \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}$  代入单色化后的式(2.5)，并注意到  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{\epsilon}}^{(1)}$  不含时，则式(2.5)变为

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_n) + \frac{1}{c^2} \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_n}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n) \quad (2.6)$$

将  $\tilde{\mathbf{M}}_n = \tilde{\mathbf{M}}_n^{(1)} + \tilde{\mathbf{M}}_n^{NL}$  及  $\tilde{\mathbf{M}}_n^{(1)} = \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_n$  代入上式得：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n^{NL}) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times [\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_n] \right) \xrightarrow{\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \text{不含时空}} \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_n]$$

$$\begin{aligned} &= \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}_n}{\partial t^2} = \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 (\tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_n^{NL})}{\partial t^2} = \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 [\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_n + \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}]}{\partial t^2} \\ &= \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\chi}}_m^{(1)}(\omega_n) \cdot [\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}}{\partial t^2}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

整理得非线性介质中单色电场波动方程的最普遍形式：

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_n) + \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_n}{\partial t^2} = -\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n^{NL}) \quad (2.9)$$

由于该方程中各三维矢量均可分离出相同的时间部分  $e^{-i\omega_n t}$ ，即  $\tilde{\mathbf{E}}_n = \mathbf{E}_n(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t}$ 、

$\tilde{\mathbf{P}}_n^{NL} = \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t}$ 、 $\tilde{\mathbf{M}}_n^{NL} = \mathbf{M}_n^{NL}(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t}$ ，因此可将该方程变为定态的：

$$\begin{aligned} &\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})] - \omega_n^2 \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \\ &= \omega_n^2 \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) + \omega_n^2 \mu_0 [\nabla \times \mathbf{M}_n^{NL}(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

若忽略介质的非线性磁化  $\tilde{\mathbf{M}}_n^{NL}$ ，只考虑线性磁化项  $\tilde{\mathbf{M}}_n^{(1)}$  时，上述方程变为：

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})] - \omega_n^2 \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \omega_n^2 \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

若忽略介质的所有磁化  $\tilde{\mathbf{M}}_n$ ，即介质为非磁介质，为纯电介质时，上述方程变为：

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})] - \frac{\omega_n^2}{c^2} \overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

此即常见的三维空间中的无磁非线性电介质中的定态波动方程。

### 2.1.2 磁各向同性的非线性电介质中的波动方程及其解

2.1.2.1 磁各向同性介质中，完美相位匹配条件下，波动方程的解随非线性效应的减弱而收敛到单色定振幅平面电磁波

可以证明，在  $\mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{0}$ 、完美相位匹配条件下，磁各向同性介质中，波动方程的解收敛于单色定振幅平面电磁波，不论介质的一阶非线性系数（二阶极化率或介电常数张量）如何，即无论介质是各向同性还是各向异性的、无论电矢量无源  $\nabla \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = 0$

是否成立；也不关心介质的二阶以上非线性系数是否为零。因此波动方程的解相对于定振幅平面波变化不大。但这只是在方程的简化和解的近似上做这样的处理，以使得对波动方程的解得以顺利进行下去，然而实际计算非线性效应的时候，因非线性源与方程解的性质直接相关而不能忽略。

### 2.1.2.2 各向异性非线性介质中波动方程的解的形式与各向同性非线性介质中的相同

由于已知磁各向同性非线性电介质中波动方程的解近似为定振幅平面电磁波，而定振幅平面电磁波又是无源的，所以  $\nabla \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = 0$  可直接使用。则在磁各向同性条件下：

$\mu_{nxz}^{(1)} = \mu_{nyy}^{(1)} = \mu_{nzz}^{(1)} = \mu_n^{(1)}$  下，有：

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_n^2 \mu_n^{(1)} \epsilon_{nxz}^{(1)} \right] E_{nx}(\mathbf{r}) = -\omega_n^2 \mu_n^{(1)} P_n^{NL}(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 \mu^{(1)}(\omega_n) \epsilon^{(1)}(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\omega_n^2 \mu^{(1)}(\omega_n) \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

由于波动方程的线性部分对的解的影响是，从各向同性介质到各向异性介质会出来两个折射率曲面，导致可能的介电常数数目从一个变为两个，进而导致双波动方程和两个解，其影响是增加波动方程和解的数量；而从接下来的过程可知，波动方程非线性部分对波动方程的解的影响是，从线性介质到非线性介质，解中的定振幅会变成随空间缓变的振幅。可见二者对波动方程的影响无交集，因此在非线性介质中，各向同性介质中的解，与各向异性介质中的两个光束的解，数学形式必将延续线性介质中的结论，即仍然相同。

因此接下来的内容，适用于铌酸锂晶体这一既是非线性介质、同时也是各向异性介质的负单轴晶体。即下面的部分可直接用各向同性的非线性介质中的波动方程即式(2.13)的二式，毕竟其解的形式与式(2.13)的一式的两个解的形式是相同的。

### 2.1.2.3 描述和频波生成过程的耦合波方程

现只考察二阶非线性效应中的 SFG(Sum-Frequency Generation)过程对应的和频极化光作为波源所生成的和频波解，则式(2.13)右侧非线性波源项  $\mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r})$  只剩  $\mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r})$ ：

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \omega_n^2 \mu^{(1)}(\omega_n) \epsilon^{(1)}(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\omega_n^2 \mu^{(1)}(\omega_n) \mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (2.14)$$

现考虑单色平行连续入射光垂直晶面地入射无损的铌酸锂非线性光学介质，并忽略铌酸锂晶体中 o、e 光的双折射现象；将该几何场景和所选坐标系下的三维铌酸锂晶体的二阶非线性系数的各分量代入式(2.14)中，并两边取大小（注意不是取模，要保留场的相位部分），得到 SFG 对应的标量极化光的复振幅表达式：

$$P^{(2)}(\omega_3) = 4\epsilon_0 d_{eff} \cdot E(\omega_1)E(\omega_2) \quad (2.15)$$

其中假设克莱曼对称性的前提成立，即介质的色散可以忽略，以至  $d_{eff}$  不含  $\omega_3$ 。

现假设  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{A}_1 e^{i(k_1 \cdot r - \omega_1 t)} = \mathbf{E}_{01} e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{A}_2 e^{i(k_2 \cdot r - \omega_2 t)} = \mathbf{E}_{02} e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$  以及  $\tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)} = \mathbf{P}_{03}^{(2)} e^{i[(k_1 + k_2) \cdot r - (\omega_1 + \omega_2)t]} = \mathbf{P}_{03}^{(2)} e^{i[(k_1 + k_2)z - \omega_3 t]}$  三者的传播方向均沿  $z$  轴正向（注意  $z$  轴在这里不一定为光轴方向；尽管在各阶非线性系数中的下角标中的  $z$  均指代光轴方向的分量，但那里的  $z$  与这里的  $z$  不同），则式(2.15)写作：

$$P_3^{(2)}(z) = 4\epsilon_0 d_{eff} \cdot E_1(z)E_2(z) = 4\epsilon_0 d_{eff} \cdot E_{01}E_{02} e^{i(k_1 + k_2)z} =: P_{03}^{(2)} e^{i(k_1 + k_2)z} \quad (2.16)$$

同时波动方程(2.14)写作标量形式：

$$\frac{\partial^2 E_3(z)}{\partial z^2} + \omega_3^2 \mu_3^{(1)} \epsilon_3^{(1)} E_3(z) = -\omega_3^2 \mu_3^{(1)} P_3^{(2)}(z) \quad (2.17)$$

因  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$  均沿  $z$  轴正向传播， $\mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_3(\mathbf{r})e^{ik_3 \cdot \mathbf{r}}$  的波矢将与  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ 、 $\mathbf{k}$  完全同向，于是可将其标量形式写作：

$$E_3(z) = A_3(z) e^{ik_3 z} \quad (2.18)$$

将式(2.18)与(2.16)代入波动方程(2.17)，并注意到据  $v_3^2 = 1/\left[\mu_3^{(1)} \epsilon_3^{(1)}\right] = \omega_3^2/k_3^2$  有  $k_3^2 = \omega_3^2 \mu_3^{(1)} \epsilon_3^{(1)}$ ，以至下面一式中左侧第三项与第四项抵消，得到：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2 A_3(z)}{dz^2} e^{ik_3 z} + 2 \frac{dA_3(z)}{dz} ik_3 e^{ik_3 z} - k_3^2 A_3(z) e^{ik_3 z} \right] + \omega_3^2 \mu_3^{(1)} \epsilon_3^{(1)} A_3(z) e^{ik_3 z} = -\omega_3^2 \mu_3^{(1)} P_{03}^{(2)} e^{i(k_1 + k_2)z} \\ & \frac{d^2 A_3(z)}{dz^2} + 2ik_3 \frac{dA_3(z)}{dz} = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} P_{03}^{(2)} e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

当  $P_3^{(2)}(z)$  很小时，可以采用缓变振幅近似，即认为

$$\left| \frac{d^2 A_3(z)}{dz^2} \right| \ll \left| k_3 \frac{dA_3(z)}{dz} \right| \quad (2.20)$$

于是方程(2.19)第一项可忽略，得到耦合振幅方程：

$$\frac{dA_3(z)}{dz} = \frac{ik_3}{2\epsilon_3^{(1)}} P_{03}^{(2)} e^{i\Delta k \cdot z} \xrightarrow{\substack{k_3 = \frac{|\omega_3|}{v_3} = \frac{|\omega_3 n_3|}{c} = \frac{|\omega_3| n_3}{c} = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)} \epsilon_{r3}^{(1)}}}{c} = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} n_{3e}}{c} \\ \epsilon_3^{(1)} = \epsilon_0 \epsilon_{r3}^{(1)} = \epsilon_0 n_{3e} |n_{3e}| = \epsilon_0 n_{3e}^2}} \frac{i |\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c} P_{03}^{(2)} e^{i\Delta k \cdot z} \quad (2.21)$$

其中定义了波矢失配量  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ 、一阶非线性系数和等效标量折射率默认为正、但即使是和频，频率  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  也不一定为正；一般的无磁非线性电介质中  $\mu_{rm}^{(1)} = 0$ ，此时  $\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} = 0$ 。该方程描绘了三波混频过程中，目标合成光的振幅  $A_3(z)$  与参与合成的两束光的场振幅  $A_1 = E_{01}$ 、 $A_2 = E_{02}$  间的关系。

现若参与混频的两束原料光  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{A}_1(z)e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{A}_2(z)e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$  的振幅也含空，则由二者极化出的和频极化光  $\tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)} = \mathbf{p}_3^{(2)}(z)e^{i[(k_1 + k_2)z - \omega_3 t]}$  的振幅也含空，但此时耦合振幅方程(2.21)仍成立，因为对右侧非线性波源项没有求导，整个推导过程保持不变：

$$\frac{dA_3(z)}{dz} = \frac{ik_3}{2\epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(z) e^{i\Delta k \cdot z} = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c} p_3^{(2)}(z) e^{i\Delta k \cdot z} \quad (2.22)$$

该扩展后的耦合振幅方程将  $\omega_1, \omega_2$  两束光的振幅变化也考虑了进去。由于三波混频应一共有  $A_3^1 = 3$  个转换过程，而  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  只是其中之一，还应有  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ 、 $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$  所分别对应的转换过程，因此类似地可得到两个额外的耦合振幅方程：

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = \frac{ik_1}{2\epsilon_1^{(1)}} p_1^{(2)}(z) e^{-i\Delta k \cdot z} = \frac{i|\omega_1| \sqrt{\mu_{r1}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{1e} c} p_1^{(2)}(z) e^{-i\Delta k \cdot z} \quad (2.23)$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = \frac{ik_2}{2\epsilon_2^{(1)}} p_2^{(2)}(z) e^{-i\Delta k \cdot z} = \frac{i|\omega_2| \sqrt{\mu_{r2}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{2e} c} p_2^{(2)}(z) e^{-i\Delta k \cdot z} \quad (2.24)$$

式(2.22)、(2.23)、(2.24)三个耦合振幅方程一起共同描述同一个三波混频过程。

#### 2.1.2.4 相位匹配问题

(1) 完美相位匹配时，和频波振幅随传播距离线性增长

在两个参与混频的入射光场振幅近似恒定，且波矢失配为零时

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = 0 \quad (2.25)$$

将式(2.22)两边对  $z$  积分得：

$$A_3(z) = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c} P_{03}^{(2)} \cdot z \quad (2.26)$$

此时和频光的振幅的模  $|A_3(z)|$  随着和频光传播距离  $z$  而线性增大，这也说明该解符合缓变振幅条件(2.20)，反过来说明缓变振幅近似条件是正确的。

(2) 波矢失配时，和频波能流随波矢失配程度的增加以  $\text{sinc}^2(\cdot)$  下降和振荡

当完美相位匹配条件即式(2.25)不满足时，考虑极化光  $\tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}$  从  $z=0$  开始向  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  转换

( $A_3(0)=0$ )，并于  $z=L$  结束转换过程，则对入射光为定振幅的式(2.42)积分得：

$$A_3(L) = A_3(L) - A_3(0) = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c} P_{03}^{(2)} \int_0^L e^{i\Delta k \cdot z} dz = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c} P_{03}^{(2)} \frac{e^{i\Delta k \cdot L} - 1}{i\Delta k} \quad (2.27)$$

设  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  从  $z=L$  出射晶体后端面（或结束波矢匹配），则由于出射晶体（结束相位匹配）后振幅不再改变，则单色定振幅平面波  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  的能流密度时间平均值为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_3 = \tilde{\mathbf{S}}_3 &= \frac{\mathcal{S}_3}{2} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_3 \times \mathcal{H}_3 = 2 \mathbf{E}_{03} \times \mathbf{H}_{03} = 2 \sqrt{\frac{\mathcal{E}_3^{(1)}}{\mu_3^{(1)}}} |E_{03}|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 = 2 \mathcal{E}_3^{(1)} \sqrt{\frac{1}{\mu_3^{(1)} \mathcal{E}_3^{(1)}}} |A_3(L)|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 = 2 \mathcal{E}_3^{(1)} v_3 \\
\cdot |A_3(L)|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 &= 2 \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_{r3}^{(1)} \frac{c}{n_3} |A_3(L)|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 = 2 \mathcal{E}_0 n_{3e}^2 \frac{c}{n_{3m} n_{3e}} |A_3(L)|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 = \frac{2 \mathcal{E}_0 n_{3e} c}{n_{3m}} |A_3(L)|^2 \hat{\mathbf{k}}_3 \quad (2.28)
\end{aligned}$$

同理对于两个参与混频的定振幅入射光  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$ , 也有类似的:

$$\mathbf{I}_i = \frac{2 \mathcal{E}_0 n_{ie} c}{\sqrt{\mu_{ri}^{(1)}}} |E_{0i}|^2 \hat{\mathbf{k}}_i \quad (2.29)$$

将式(2.16)、(2.27)代入(2.28)得:

$$I_3 = \frac{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)} \mu_{r2}^{(1)} \mu_{r3}^{(1)}}}{n_{1e} n_{2e} n_{3e}} \frac{2 d_{eff}^2 \omega_3^2 I_1 I_2}{\varepsilon_0 c^3} \cdot L^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k \cdot L}{2}\right) = I_{3\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k \cdot L}{2}\right) \propto \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k \cdot L}{2}\right) \quad (2.30)$$

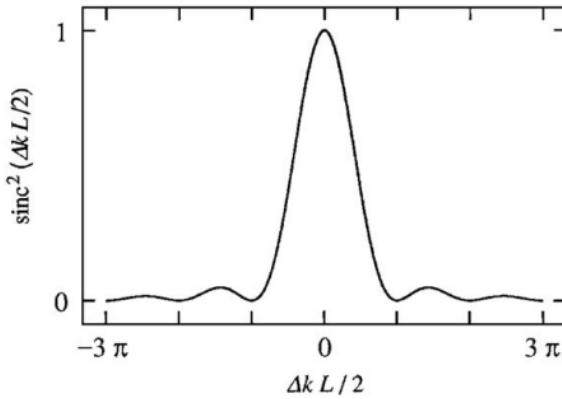


图 2.1 不同波矢失配程度下的和频波与完美相位匹配时的和频波的能流比

可见当  $|\Delta k \cdot L| = |\Delta k| \cdot L$  增加时, 三波混频过程的效率相对于随传播距离线性增长的完美相位匹配时的  $I_{3\max}$  有所下降; 当  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  传播到  $0 \sim 2\pi/|\Delta k|$  间的极值点  $d[L \cdot \operatorname{sinc}(\Delta k \cdot L/2)]/dL = d[2/\Delta k \cdot \sin(\Delta k \cdot L/2)]/dL = \cos(\Delta k \cdot L/2) = 0 (\Delta k \neq 0)$  即

$$z_n = \frac{\pi n - \pi/2}{\Delta k/2} (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.31)$$

处即介于完美相位匹配到完全脱离匹配的中点  $z_0 = \pi/|\Delta k|$  (一般  $\Delta k < 0$ ) 处时, 能量会开始从  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  流回  $\tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}$  并返回到  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$  中, 因此定义其中  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  的净能量开始流出之时的长度  $L_{coh} := z_0 = \pi/|\Delta k|$  为相干长度, 于是式(2.30)还可写作:

$$I_3 = \frac{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)} \mu_{r2}^{(1)} \mu_{r3}^{(1)}}}{n_{1e} n_{2e} n_{3e}} \frac{2 d_{eff}^2 \omega_3^2 I_1 I_2}{\varepsilon_0 c^3} \cdot L^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{L_{coh}}\right) = I_{3\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{L_{coh}}\right) \quad (2.32)$$

### (3) 通常情况难以实现(完美)相位匹配的原因

对于两正频光的和频过程  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ，总可以假设  $0 < \omega_1 \leq \omega_2 < \omega_3$ ，此时正常色散介质中有  $n_1 \leq n_2 < n_3$ 。另一方面，假设完美相位匹配条件  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = 0$  可以满足，即下式可以成立

$$\frac{n_1\omega_1}{c} + \frac{n_2\omega_2}{c} = \frac{n_3\omega_3}{c} \quad (2.33)$$

那么  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3(\omega_1 + \omega_2)$ ，得到  $(n_1 - n_3)\omega_1 = (n_3 - n_2)\omega_2$ ，又因  $\omega_1 \leq \omega_2$ ，有

$n_1 - n_3 \geq n_3 - n_2$ ，即有：

$$n_1 + n_2 \geq 2n_3 \quad (2.34)$$

但在正常色散中有  $n_1 \leq n_2 < n_3$ ，对应  $n_1 + n_2 \leq 2n_3$  以及  $k_1 + k_2 \leq k_3$ ，所以正常色散中不可能实现完美相位匹配。

### (4) 实现相位匹配的最常用手段：非线性各向异性晶体的双折射

## 2.2 一维非线性光子晶体中的准相位匹配机制

针对特定的应用（如接下来的利用铌酸锂晶体所进行的非线性全息），会想办法使用比对角二阶非线性系数  $d_{33}$ ，但要想让  $d_{33}$  出现在  $d_{eff}$  中，必须让参与混频的两条入射光  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  的偏振方向相同且均为 e 光，此时双折射相位匹配技术失效。

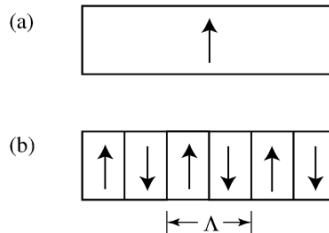


图 2.2 自然均匀单向自发极化的铁电晶体(a)和人工周期性极化的铁电材料(b)

当普通的相位匹配技术无法实施时，准相位匹配技术就大显神通了：利用人工工艺将一维铁电材料沿  $z$  轴方向以  $\Lambda/2 = L_{coh} = \pi/|\Delta k|$  为厚度将其切成一片片薄层，并以  $\Lambda = 2L_{coh} = 2\pi/|\Delta k|$  为周期将相邻两片薄层的自发极化方向即晶轴(相对于波矢的)正向翻转  $180^\circ$  排列（图 2.2），而晶轴方向的翻转意味着原自然单向均匀极化晶体的  $d_{eff}$  反号，便可因此获得受矩形波函数调制的随  $z$  变化的二阶非线性极化率系数

$$\begin{aligned} d(z) &= d_{eff} \cdot \text{sgn} \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right] = d_{eff} \cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2 \text{rect} \left[ \frac{2(z - n\Lambda)}{\Lambda} \right] - 1 \right\} \\ &= d_{eff} \cdot \left\{ 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

### 2.2.1 准相位匹配是除完美相位匹配方法外提高转换效率的较好方法

#### 2.2.1.1 二阶非线性系数的空间周期调制函数可展成不同倒格矢的倒格波的线性叠加

根据图 2.2 和式(2.35)，每当和频光或倍频光传播半个周期即一个薄膜厚度，振幅因波矢失配而快要开始衰减之时 ( $L = (2m+1) \cdot z_0 = (2m+1) \cdot L_{coh}$ )，立刻使其步入下一个自发极化方向相反薄膜中，随着非线性系数的反号，能量的绝对流向也反向，以至当同一地点处倍频光的相位超前于极化光相位  $\pi/2$  内时，能量朝  $k_3$  正向流动，而当倍频光相位滞后于极化光  $\pi/2$  内时，能量逆  $k_3$  反向流动，这样就保证了能量的相对流向始终从基频光流向倍频光，维持二次谐波振幅随传播距离而持续增长，如下图所示：

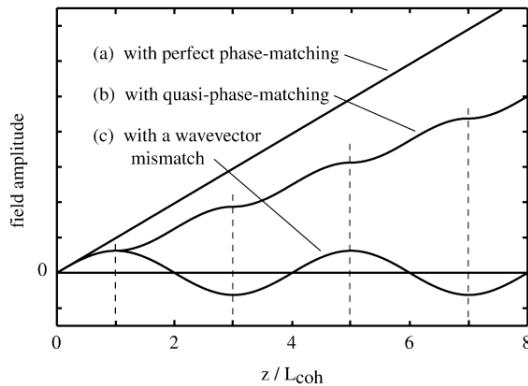


图 2.3 三种相位匹配条件下生成的和/差/倍频波振幅随传播距离的变化对比

接下来将从数学上描绘和证明这一点。由于在这样的人工材料中二阶非线性极化率系数从  $d_{eff}$  变为了式(2.35)的  $d(z)$ ，因此原耦合波方程等一系列方程中的  $d_{eff}$  也需要修正为  $d(z)$ 。现将  $d(z)$  展为复数形式傅里叶级数：

$$d(z) = d_{eff} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{iG_m z} \quad (2.36)$$

其中级数部分来源于将调制函数  $\text{sgn}[\cos(2\pi/\Lambda \cdot z)]$  展为复数形式的傅里叶级数：

$$\text{sgn}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{\frac{i2\pi m z}{\Lambda}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{\frac{i2\pi m z}{\Lambda}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{iG_m z} \quad (2.37)$$

其中  $k_m = 2\pi m / \Lambda$  为  $d(z)$  的第  $m$  级傅里叶分量的光栅矢量，而  $2\pi/\Lambda$  等效于拥有简立方、面心立方、体心立方正格子晶胞（三者的“外壳”8顶点均构成简立方）或长方体正格子晶胞点阵构型的一维光子晶体的倒格子的平行于光轴的基矢的大小。因此  $k_m = 2\pi m / \Lambda$  可以看做一维光子晶体的一维倒易点阵中的某两点间的倒格矢，但不能将其比作光子晶体的格波波矢。在这样的理解下，式(2.36)可被认为是将二阶非线性系数展开为了以各级倒格矢为波矢量的各级倒格波的线性叠加。

而根据式(2.35)，可通过傅里叶变换得傅里叶级数各级系数：

$$C_m = \mathcal{F} \left\{ \operatorname{sgn} \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right] \right\} = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \left( 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) - 1 \right) e^{-iG_m z} dz \quad (2.38)$$

其中先考虑

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \left\{ \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) \right\} \quad (2.39)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) \right\} &= \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) e^{-iG_m z} dz \\ &= e^{-iG_m n\Lambda} \cdot \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \operatorname{rect} \left( \frac{2z - 2n\Lambda}{\Lambda} \right) e^{-iG_m (z-n\Lambda)} d(z-n\Lambda) \\ &= e^{-iG_m n\Lambda} \cdot \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2-n\Lambda}^{\Lambda/2-n\Lambda} \operatorname{rect} \left( \frac{2z}{\Lambda} \right) e^{-iG_m z} dz = e^{-iG_m n\Lambda} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\Lambda/2-n\Lambda}^{\Lambda/2-n\Lambda} \operatorname{rect} \left( \frac{2z}{\Lambda} \right) e^{-i\pi m \frac{2z}{\Lambda}} d \left( \frac{2z}{\Lambda} \right) \\ &= e^{-iG_m n\Lambda} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1-2n}^{1-2n} \operatorname{rect}(z) e^{-i\pi m z} dz \end{aligned} \quad (2.40)$$

当  $n \neq 0$  时，积分区间上的  $\operatorname{rect}(z) = 0$ ，积分值为零，则式(2.39)只剩  $n=0$  一项，以至原式(2.38)变为：

$$\begin{aligned} C_m &= 2 \mathcal{F} \left\{ \operatorname{rect} \left( \frac{2z}{\Lambda} \right) \right\} - \mathcal{F} \{ 1 \} = \int_{-1}^1 \operatorname{rect}(z) e^{-i\pi m z} dz - \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} e^{-iG_m z} dz \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\pi m z} dz - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-i\pi m z} dz = \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi m}{2} \right) - \operatorname{sinc}(\pi m) \end{aligned} \quad (2.41)$$

它的离散取值分布图像为：

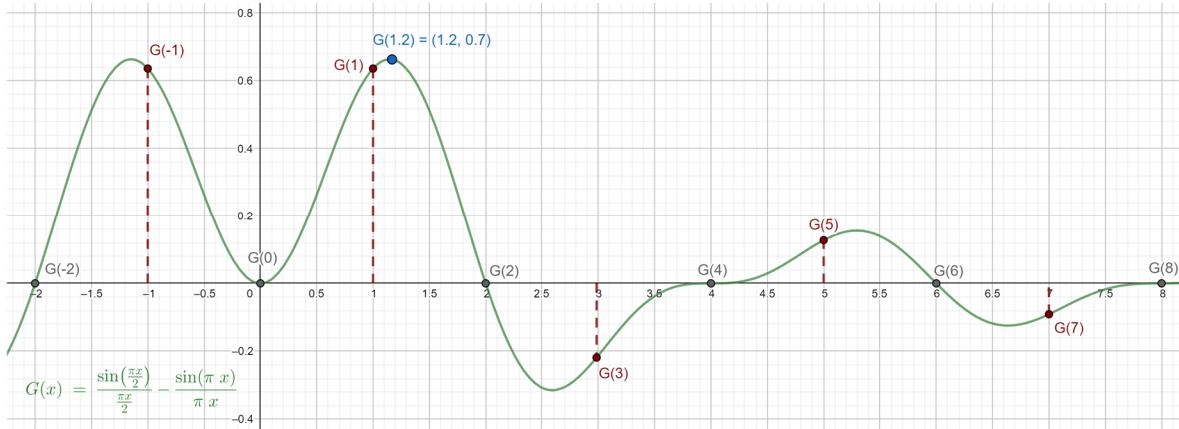


图 2.4  $C_m$  的非零值  $C_{2k+1}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 中  $C_{\pm 1}$  最大

### 2.2.1.2 选择振幅较大的相应级次倒格波的波矢进行波矢匹配并以此设计调制周期可提高出射和频光场振幅

由于将  $d(z)$  或其调制函数展开成傅里叶级数而不是傅里叶积分，因此  $m$  是离散取值的，对于只取整数的  $m$ ， $C_m$  的极大值为  $C_{\pm 1}$ ，因此在  $d(z)$  的级数展开式中，第  $\pm 1$  级倒格矢所对应的倒格波的振幅、能量是最高的，占据了  $d(z)$  的绝大部分。因此即使

任何调制函数的傅里叶级数展开式中任何一个倒格波的波矢都可以被用于补偿波矢失配，并以此来设计调制函数的调制周期，但为了使得所设计的  $d(z)$  中补偿波矢失配的那个倒格波振幅最大，以提高生成的和频波振幅，必须采用  $d(z)$  展开式中的第  $\pm 1$  级倒格波来补偿波矢失配。

在采用了  $\pm 1$  级倒格矢补偿波矢失配并以此设计了调制周期后，其他倒格波的波矢便不能准确补偿波矢失配，以至于即使波矢失配量中加上了这些倒格波波矢后，其相应的耦合波方程仍有不同程度的波矢失配，则这些倒格波所对应生成的和频光振幅  $A_3(z)$  会随  $z$  的增加而在零附近以  $|\sin(\Delta k \cdot L/2)|$  即  $|\sin(\pi/2 \cdot L/L_{coh})|$  形式振荡，但最终出射晶体时仍会可能有小部分贡献。因此从一定的传播距离来看， $\pm 1$  级倒格波之外的倒格波所生成的和频波对最终出射的和频波也有贡献，但相比  $\pm 1$  级贡献比例不大且各异。而对于  $\pm 1$  级也只取这两级中的某一级倒格波，因为级数  $m$  相反导致二者的波矢方向是反向的，所以只可能有一个对波矢失配起主要的补偿作用。于是式(2.36)变为：

$$d(z) \approx d_{eff} \cdot C_m e^{iG_m z} \quad (2.42)$$

将其代入三个耦合波方程(2.22-2.24)并替换掉其中的  $d_{eff}$ ，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_3(z)}{dz} = \frac{2i|\omega_3|\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{n_{3e}c} (d_{eff} \cdot C_m e^{iG_m z}) \cdot A_1(z)A_2(z)e^{i\Delta k \cdot z} = \frac{2i|\omega_3|\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}d_\varrho}{n_{3e}c} A_1(z)A_2(z)e^{i\Delta k_\varrho \cdot z} \\ \frac{dA_1(z)}{dz} = \frac{2i|\omega_1|\sqrt{\mu_{r1}^{(1)}}d_\varrho}{n_{1e}c} A_3(z)A_2^*(z)e^{iG_m z}e^{-i\Delta k \cdot z} = \frac{2i|\omega_1|\sqrt{\mu_{r1}^{(1)}}d_\varrho}{n_{1e}c} A_3(z)A_2^*(z)e^{-i(\Delta k_\varrho - 2G_m) \cdot z} \\ \frac{dA_2(z)}{dz} = \frac{2i|\omega_2|\sqrt{\mu_{r2}^{(1)}}d_\varrho}{n_{2e}c} A_3(z)A_1^*(z)e^{iG_m z}e^{-i\Delta k \cdot z} = \frac{2i|\omega_2|\sqrt{\mu_{r2}^{(1)}}d_\varrho}{n_{2e}c} A_3(z)A_1^*(z)e^{-i(\Delta k_\varrho - 2G_m) \cdot z} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

以及参与混频的两入射光为定振幅时的：

$$I_3 = \frac{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)}\mu_{r2}^{(1)}\mu_{r3}^{(1)}}}{n_{1e}n_{2e}n_{3e}} \frac{2\omega_3^2}{\epsilon_0 c^3} d_\varrho^2 \cdot I_1 I_2 \cdot L^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k_\varrho \cdot L}{2}\right) \quad (2.44)$$

以及据式(2.29)有：

$$\begin{aligned} |E_{03}| &= \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c}} I_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2\epsilon_0 n_{3e} c}} \frac{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)}\mu_{r2}^{(1)}\mu_{r3}^{(1)}}}{n_{1e}n_{2e}n_{3e}} \frac{2\omega_3^2}{\epsilon_0 c^3} d_\varrho^2 \left( \frac{2\epsilon_0 n_{1e} c}{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)}}} |E_{01}|^2 \frac{2\epsilon_0 n_{2e} c}{\sqrt{\mu_{r2}^{(1)}}} |E_{02}|^2 \right) \cdot L^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k_\varrho \cdot L}{2}\right) \\ |E_{03}| &= |A_3(L)| = \frac{2\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}|\omega_3|}{n_{3e}c} d_\varrho \cdot |E_{01}| |E_{02}| \cdot L \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_\varrho \cdot L}{2}\right) \propto d_\varrho \cdot |E_{01}| |E_{02}| \cdot L \cdot \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_\varrho \cdot L}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (2.45)$$

其中

$$d_Q = d_{\text{eff}} \cdot C_m \quad (2.46)$$

$$\Delta k_Q = \Delta k + G_m \quad (2.47)$$

而其中对于正常色散介质而言，波矢失配量  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 < 0$ ，因此要想得到补偿后的波矢失配量  $\Delta k_Q = \Delta k + G_m = 0$ ，需有  $G_m = -\Delta k > 0$ ，因此应取正级次的倒格波；又由于想利用拥有最大振幅  $C_{\pm 1}$  的  $\pm 1$  级倒格波，则需取其中的  $+1$  级倒格波，此时  $d_Q = d_{\text{eff}} \cdot C_m$  才最大， $dA_3(z)/dz$  及最后生成的  $A_3(L) \propto d_{\text{eff}} C_m \cdot |E_{01}| |E_{02}| \cdot L \cdot \text{sinc}(\Delta k_Q \cdot L/2)$ （设两入射光定振幅）才最大，对应图 2.3 中(b)曲线的斜率最高，即使因  $C_m < 1$  而斜率没有(a)高。此时才有  $G_m = G_1 = 2\pi/\Lambda > 0$ ，同时  $C_m = C_1 = 2/\pi$ 。于是上述两式变为：

$$d_Q = d_{\text{eff}} \cdot C_1 = \frac{2}{\pi} d_{\text{eff}} \quad (2.48)$$

$$\Delta k_Q = \Delta k + \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.49)$$

因此准相位匹配达成的条件为  $\Delta k_Q = \Delta k + 2\pi/\Lambda = 0$ ，即：

$$\Lambda = \frac{2\pi}{-\Delta k} = 2L_{\text{coh}} = \frac{2\pi}{k_3 - k_1 - k_2} \quad (2.50)$$

### 2.2.1.3 以周期性调制的二阶非线性系数中不同所选级次的倒格矢补上波矢失配量为目标地设计一维光子晶体可获得不同出射和频光振幅

该式子便提供了对于给定的三束混频光的波矢或波矢失配量，为弥补和消除波矢失配以达波矢匹配和相位匹配，一维光子晶体的二阶非线性系数的调制周期的计算和设计方法。在相同的调制函数和调制方法如(2.37)下，也可以采取不同级次的倒格波的倒格矢来进行波矢匹配，此时  $d_Q = d_{\text{eff}} \cdot C_m$  会因所选倒格波的振幅  $C_m$  的变化而变化，以致影响  $dA_3(z)/dz$  并最终影响  $A_3(z)$  的大小，同时调制周期  $\Lambda = 2\pi m / |\Delta k|$  也会有所变化。

一般地，参与混频的两束入射光的频率和波矢的方向和大小(即波长)是给定的，那么若只考虑二者分别在负单轴晶体中的 e 光成分或 o 光成分，则二者在晶体中的频率和波矢也便确定了，而由于待合成的  $\omega_3$  光的频率  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  也确定了，则  $\omega_3$  光的波矢大小，随考虑其为 e 光或 o 光，也通过关系式  $k_3 = |\omega_3|/v_3 = |\omega_3| n_3 / v_3 = |\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} n_{3ee} / c$  或  $|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} n_{3eo} / c$  确定了，但问题就来了，待合成的和频光  $\omega_3$  的波矢方向没有确定！这一点非常关键，它直接暗示了三维情况下，在波矢失配满足时，将可能不仅有一条倍频光出射，而是所有波矢失配量被三维调制后的二阶非线性系数展开所得的各级倒格波的倒格矢所补偿上了的  $\omega_3$  光，即所有以极化光的波矢终点为起点的倒格矢的终点，若落在以极化光的波矢起点为中心所作的旋转椭球面或球面上，则相应的  $\omega_3$  光均能

被合成并出射晶体，并且由于它们的频率和波矢大小相等而相位差恒定，进而两两相干，因此生成的所有  $\omega_3$  光再经振幅调制后均可作为还原的倍频物光波出射晶体，生成非线性全息图像。

当然，式(2.35)只是最简单的对二阶非线性系数的调制方法，也有更多更复杂的调制方法，只要能够人工地造成二阶非线性系数随空间的起伏的方法，均有潜力实现准相位匹配。接下来对三维非线性光子晶体的二阶非线性系数的设计和调制方法就属于其中之一。

## 2.3 利用三维非线性光子晶体实现傅里叶全息成像

因非线性全息属于计算全息，因此没有记录干涉图样过程，只有重现倍频物光波的过程，所以在实验之前，对三维非线性光子晶体的结构设计必须同时兼顾非线性光学效应与全息成像，即所设计的结构必须能先有较高效率实现基频光到倍频光的转换，同时不同波矢的倍频光的振幅会因不同波矢失配量所对应的不同倒格矢所对应的不同倒格波的不同振幅而有所空间分布，并还原出逆向设计出的二维图像，这样才能实现整个非线性全息成像过程。

### 2.3.1 三维光子晶体中的准相位匹配机制

由于非线性光学效应的强度直接决定了倍频极化光的强度，而倍频极化波源的强度配合相位匹配程度又决定了倍频光的强度，而倍频光的强度即决定了还原出的倍频物光的强度，进而决定了远场所成的二维图像的整体明暗程度，因此对三维光子晶体的结构设计必须首先同时拥有较高的非线性系数和相位匹配程度。

#### 2.3.1.1 为提高转换效率所采取的晶体放置方位和入射光种类选择以及偏振方向

而三维铌酸锂晶体的非线性系数中  $d_{33}$  是最大的，但之前提到过，要想让  $d_{33}$  出现在  $d_{eff}$  中，必须让参与混频的所有光的极化方向大致相同，准确地说，晶体内的  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$  的偏振方向完全相同且与光轴完全重叠，而由于 o 光电矢量恒垂直于光轴，只有 e 光的电矢量在其主平面内而才有可能平行于光轴，则  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$  必须均为 e 光，此时  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_{1z}, \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_{2z}$ ，二者的其他分量全为零，则二阶非线性极化过程变为：

$$\begin{bmatrix} P_x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) \\ P_y^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) \\ P_z^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) \end{bmatrix} = 4\epsilon_0 \begin{bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{bmatrix} \cdot E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \quad (2.51)$$

可见此时可以最大程度地利用  $d_{33}$ ：由于  $d_{33}$  最大， $\tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}$  的 z 分量也最大，因此其

极化方向也大致朝向光轴 $z$ 方向，而由于在傍轴近似下， $\tilde{\mathbf{E}}_3$ 波矢与 $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$ 波矢近似同向，则其偏振方向由于也近似垂直于其波矢方向，且由于是e光而电矢量位于主平面内，所以 $\tilde{\mathbf{E}}_3$ 与 $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$ 也近似同向，则 $\tilde{\mathbf{E}}_3$ 也大致朝向光轴方向，因此此时 $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}, \tilde{\mathbf{E}}_3$ 四者与光轴大致同向（前两者是完全重合），且混频的三波是e光。以上便意味着无法使用双折射实现相位匹配，只能采用准相位匹配技术。

### 2.3.1.2 三维电磁各向同性非线性电介质中的定态波动方程的标量化

考虑三维情形下的和频波生成过程，沿用三维空间中电磁各向同性非线性电介质中的定态波动方程即式(2.14)。但现先将三维情形下仍成立的 $\mathbf{v}_3^2 = 1/\left[\mu_3^{(1)}\epsilon_3^{(1)}\right] = \omega_3^2/k_3^2$ 所对应的 $k_3^2 = \omega_3^2\mu_3^{(1)}\epsilon_3^{(1)}$ 代入式(2.14)左侧，右侧保持原样，得：

$$\nabla^2 \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) + k_3^2 \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} \mathbf{P}_3^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (2.52)$$

然而即使在三维情形下，仍会尝试着将式(2.52)中各量标量化的同时，又不降低波动方程的维度。为此，同样忽略铌酸锂晶体的双折射、认为铌酸锂晶体的二阶非线性系数的色散可以忽略以至于克莱曼对称性对二阶非线性系数仍不失效、但保留铌酸锂晶体的一阶非线性系数的正常色散，并只考虑特定入射的几何场景和选定的坐标系。将所选坐标系下的三维铌酸锂晶体的二阶非线性系数的各分量代入式(2.51)中，并两边取大小（保留场的相位部分），得到SFG和SHG的标量极化光复振幅表达式：

$$P_3^{(2)}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) \cdot E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) \cdot A_1(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2)\cdot r} =: p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2)\cdot r} \quad (2.53)$$

其中 $P^{(2)}(\omega_3) = |\mathbf{P}_3^{(2)}| \arg[\mathbf{P}_3^{(2)}]$ 、 $E_1(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}_1(\mathbf{r})| \arg[\mathbf{E}_1(\mathbf{r})]$ 、 $E_2(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}_2(\mathbf{r})| \arg[\mathbf{E}_2(\mathbf{r})]$ 且

$$\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2d_{eff}(x, y, z), & \omega_1 = \omega_2 \\ 4d_{eff}(x, y, z), & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad (2.54)$$

是经过三维设计并调制后的含空二阶非线性系数。

同样对式(2.52)剩余物理量即 $\mathbf{E}_3(\mathbf{r})$ 保留相位部分地标量化 $E_3(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}_3(\mathbf{r})| \arg[\mathbf{E}_3(\mathbf{r})] = A_3(\mathbf{r}) e^{ik_3 \cdot r}$ ，并将其与非线性波源项即式(2.53)代入式(2.52)，得到三维标量波动方程：

$$\nabla^2 E_3(\mathbf{r}) + k_3^2 E_3(\mathbf{r}) = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2)\cdot r} \quad (2.55)$$

### 2.3.1.3 傍轴近似和缓变振幅近似条件下的标量波动方程及三个耦合波方程

假设 $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}, \tilde{\mathbf{E}}_3$ 四者的波矢方向均大致沿 $z$ 轴正向，即虽不一定与 $z$ 轴严格重合（为增大 $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$ 而需利用上 $d_{33}$ ，则光轴在这里近似垂直于 $z$ 轴），但满足傍轴近似条件即 $k_3 \approx k_{3z}$ 、 $k_{3x}, k_{3y} \approx 0$ 。在傍轴近似的思想下，方程(2.55)左侧的laplace算符和波矢可分解为传播方向和上传播方向的两部分：

$$\nabla_T^2 E_3(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 E_3(\mathbf{r})}{\partial z^2} + k_{3z}^2 E_3(\mathbf{r}) + (k_3^2 - k_{3z}^2) E_3(\mathbf{r}) = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2)\cdot\mathbf{r}} \quad (2.56)$$

其中，左侧的  $z$  向部分可通过类似式(2.19)的过程得：

$$\frac{\partial^2 E_3(\mathbf{r})}{\partial z^2} + k_{3z}^2 E_3(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial z^2} e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}} + 2 \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} i k_{3z} e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}} \quad (2.57)$$

同样设有三维情形下的  $z$  向的缓变振幅近似：

$$\left| \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| k_{3z} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad (2.58)$$

于是将式(2.57-2.58)代入式(2.56)并两侧同除以  $e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}}$  得：

$$\nabla_T^2 [A_3(\mathbf{r}) e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}}] / e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}} + 2 i k_{3z} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} + (k_3^2 - k_{3z}^2) A_3(\mathbf{r}) = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2-k_3)\cdot\mathbf{r}} \quad (2.59)$$

其中左侧上  $z$  向的部分类似(2.57)地有

$$\nabla_T^2 [A_3(\mathbf{r}) e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}}] / e^{i k_3 \cdot \mathbf{r}} + (k_3^2 - k_{3z}^2) A_3(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial y^2} + 2 i k_{3x} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial x} + 2 i k_{3y} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial y} \quad (2.60)$$

同样假设  $x, y$  向的缓变振幅条件成立，但不作傍轴近似即  $k_{3x}, k_{3y} \approx 0$ ，则下面二阶导项可以扔掉，一阶导项得到保留：

$$\left| \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right| \ll \left| k_{3x} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 A_3(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right| \ll \left| k_{3y} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad (2.61)$$

于是将式(2.60-2.61)代入式(2.59)，得：

$$2 i k_{3x} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial x} + 2 i k_{3y} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial y} + 2 i k_{3z} \frac{\partial A_3(\mathbf{r})}{\partial z} = 2 i \mathbf{k}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r}) = -\frac{k_3^2}{\epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i(k_1+k_2-k_3)\cdot\mathbf{r}} \quad (2.62)$$

便有了第一个耦合波方程：

$$\begin{aligned} \frac{dA_3(\mathbf{r})}{\widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot dI} &= \widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r}) = \frac{i k_3}{2 \epsilon_3^{(1)}} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{\frac{k_3 = |\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)} n_{3e}}}{\epsilon_3^{(1)} = \epsilon_0 n_{3e}^2}} \frac{i |\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{2 \epsilon_0 n_{3e} c} p_3^{(2)}(\mathbf{r}) e^{i \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &\xrightarrow{p_3^{(2)}(\mathbf{r}) = 2 \epsilon_0 Z_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) \cdot A_1(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r})} \frac{i |\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} \chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})}{2 n_{3e} c} A_1(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r}) e^{i \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

其中  $\widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r})$  为标量场  $A_3(\mathbf{r})$  沿  $\widehat{\mathbf{k}}_3$  方向的方向导数  $dA_3(\mathbf{r}) / (\widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot dI)$ ，其中  $dI$  为朝空间任意方向的微小矢量段，不需要与  $\widehat{\mathbf{k}}_3$  平行； $\widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot dI = dI_{\widehat{\mathbf{k}}_3}$  便是沿  $\widehat{\mathbf{k}}_3$  方向的微小标量段； $dA_3(\mathbf{r}) = (\widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot dI) \widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r}) = dI_{\widehat{\mathbf{k}}_3} \widehat{\mathbf{k}}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r}) = dI_{\widehat{\mathbf{k}}_3} \cdot \nabla A_3(\mathbf{r})$  即标量场  $A_3(\mathbf{r})$  与朝  $\widehat{\mathbf{k}}_3$  方向的微小矢量位移  $dI_{\widehat{\mathbf{k}}_3}$  相对应的标量微分量。由于  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3^{(2)}, \tilde{\mathbf{E}}_3$  四者的波矢方向均大致沿  $z$  轴正向，则对参与混频的两个入射波也有类似的傍轴近似条件  $k_1 \approx k_{1z}, k_{1x}, k_{1y} \approx 0$ 、 $k_2 \approx k_{2z}, k_{2x}, k_{2y} \approx 0$  成立（但推导过程中仍不会使用它），而又因克莱曼对称性成立

使  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  不含频率，则同理可导出其余两个标量形式的耦合波方程：

$$\frac{dA_1(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot d\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \nabla A_1(\mathbf{r}) = \frac{i|\omega_1| \sqrt{\mu_{r1}^{(1)}} \chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})}{2n_{le}c} A_3(\mathbf{r}) A_2^*(\mathbf{r}) e^{-i\Delta k \cdot r} \quad (2.64)$$

$$\frac{dA_2(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot d\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \nabla A_2(\mathbf{r}) = \frac{i|\omega_2| \sqrt{\mu_{r2}^{(1)}} \chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})}{2n_{le}c} A_3(\mathbf{r}) A_1^*(\mathbf{r}) e^{-i\Delta k \cdot r} \quad (2.65)$$

### 2.3.1.4 二阶非线性系数经三维周期性空间调制下的准相位匹配机制

其中，设经空间调制的  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  及其调制函数  $B(\mathbf{r}) = B(\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z; \mathbf{r})$  在  $x, y, z$  三个方向上均是周期函数，即使没有周期，也可以晶体内部调制的空间范围在  $x, y, z$  三个方向上的长度为周期，用 B-K 边界条件将其延拓成周期函数，并设结构的正空间周期为  $\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ ，则二阶非线性系数及其调制函数可展为三维复数形式傅里叶级数：

$$\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot B_{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot \sum_{m_x, m_y, m_z=-\infty}^{+\infty} C_{m_x, m_y, m_z} e^{iG_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.66)$$

其中倒格波的振幅

$$\begin{aligned} C_{m_x, m_y, m_z} &= \mathcal{F}\{B_{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z}(\mathbf{r})\} = \frac{1}{\Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z} \int_{-\Lambda_x/2}^{\Lambda_x/2} \int_{-\Lambda_y/2}^{\Lambda_y/2} \int_{-\Lambda_z/2}^{\Lambda_z/2} B_{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z}(\mathbf{r}) e^{-i(G_{m_x}x + G_{m_y}y + G_{m_z}z)} dx dy dz \\ &= \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} B_{\Omega}(\mathbf{r}) e^{-iG_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.67)$$

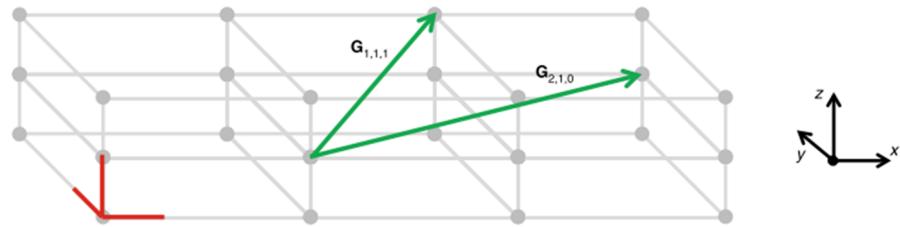


图 2.5 三维准相位匹配过程中弥补各个方向的波矢失配的不同级次倒格矢<sup>[13]</sup>

其中， $\Omega = \Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z$  为三维光子晶体正空间中的原胞/晶胞即周期性结构的体积大小， $d^3 \mathbf{r} = dx dy dz$ ，且

$$\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{G}_{m_x} + \mathbf{G}_{m_y} + \mathbf{G}_{m_z} = \frac{2\pi m_x}{\Lambda_x} \mathbf{i} + \frac{2\pi m_y}{\Lambda_y} \mathbf{j} + \frac{2\pi m_z}{\Lambda_z} \mathbf{k} \quad (2.68)$$

在之前，一维的调制函数是已知的且可写出表达式，其傅里叶变换所得的各单色倒格波的振幅在某些级有最大值，因此当时单纯为了提高出射的唯一一束和频光振幅，会选择依照该级倒格波所对应的倒格矢，来弥补波矢失配，并参照之设计一维的调制周期。但现在既要考虑非线性过程的出射倍频光振幅整体不能太低，又要考虑非线性全息成像即出射的多束倍频光的振幅起伏、分布问题，所以调制函数  $B_{\Omega}(\mathbf{r})$  的设

计并不需要也不能使其中一项倒格波的振幅  $C_{m_x, m_y, m_z}$  占主导地位，而是通过设计正空间的  $B_\Omega(\mathbf{r})$  分布，以得到倒空间中各倒格波的振幅  $C_{m_x, m_y, m_z}$  分布，以及倒格子原胞尺寸和点阵分布即倒格矢分布，并同时实现多个波矢匹配过程并出射多束振幅不同的倍频光，以最终在距离晶体厘米级的光屏上实现非线性全息成像：

$$\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) \approx \chi_{eff}^{(2)} \cdot C_{m_x, m_y, m_z} e^{i\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}} := \chi_Q^{(2)} e^{i\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.69)$$

将其代入三个耦合波方程得：

$$\frac{dA_3(\mathbf{r})}{dl_{\hat{\mathbf{k}}_3}} = \frac{dA_3(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_3 \cdot d\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}}_3 \cdot \nabla A_3(\mathbf{r}) = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{3e}c} A_1(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r}) e^{i\Delta k_Q \cdot \mathbf{r}} \quad (2.70)$$

$$\frac{dA_1(\mathbf{r})}{dl_{\hat{\mathbf{k}}_1}} = \frac{dA_1(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot d\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \nabla A_1(\mathbf{r}) = \frac{i|\omega_1| \sqrt{\mu_{r1}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{1e}c} A_3(\mathbf{r}) A_2^*(\mathbf{r}) e^{-i(\Delta k_Q - 2\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}) \cdot \mathbf{r}} \quad (2.71)$$

$$\frac{dA_2(\mathbf{r})}{dl_{\hat{\mathbf{k}}_2}} = \frac{dA_2(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot d\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \nabla A_2(\mathbf{r}) = \frac{i|\omega_2| \sqrt{\mu_{r2}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{2e}c} A_3(\mathbf{r}) A_1^*(\mathbf{r}) e^{-i(\Delta k_Q - 2\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}) \cdot \mathbf{r}} \quad (2.72)$$

为实现准相位匹配，需有  $\Delta k_Q = \Delta \mathbf{k} + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{0}$ ，即需满足

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{k}_3 \quad (2.73)$$

此即“补上”波矢失配的含义：由于介质的正常色散，导致目标波矢  $\mathbf{k}_3$  比已有波矢之和  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  大，所以要通过周期性结构的倒格波的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  补上这一段尚欠缺的失配的波矢。将其写为分量形式即有，所设计的调制后的三维分布的二阶非线性系数的级数展开式中振幅占优的倒格波的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  必须同时满足下述  $x, y, z$  三个方向的波矢匹配条件：

$$\begin{cases} k_{1x} + k_{2x} + G_{m_x, m_y, m_z; x} = k_{3x} \\ k_{1y} + k_{2y} + G_{m_x, m_y, m_z; y} = k_{3y} \\ k_{1z} + k_{2z} + G_{m_x, m_y, m_z; z} = k_{3z} \end{cases} \quad (2.74)$$

### 2.3.2 结构倒格波的波矢与振幅和远程成像的关系

#### 2.3.2.1 所有终点落在 $\mathbf{k}_3$ 的旋转椭球波矢曲面上的倒格矢的级次下的和频光的波矢失配量均为零

但由于波动方程化为定态之初，只限制了和频光频率为  $\omega_3$ ，没有限制其波矢  $\mathbf{k}_3$  的具体细节，只因介质的折射率确定了而导致该频率  $\omega_3$  下，和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  的波矢  $\mathbf{k}_3$  的大小才确定了： $k_3 = |\omega_3|/v_3 = |\omega_3|n_3/v_3 = |\omega_3|\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}n_{3e}/c$ ，又因和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  为 e 光，因此和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  的波矢  $\mathbf{k}_3$  满足：

$$|\mathbf{k}_3| = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} n_{3ee}}{c} \quad (2.75)$$

也就是说只限制了和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_3$  的波矢  $\mathbf{k}_3$  的大小，即起点为 e 光波矢曲面中心的  $\mathbf{k}_3$ ，其终点必须落在 e 光的折射率曲面

$$\frac{1}{n_{3ee}^2} = \frac{\sin^2 \theta_{3e}}{n_{3e\parallel}^2} + \frac{\cos^2 \theta_{3e}}{n_{3e\perp}^2}, \quad n_{3ee}(\theta_{3e}) = \frac{n_{3e\parallel} n_{3e\perp}}{\sqrt{n_{3e\perp}^2 \sin^2 \theta_{3e} + n_{3e\parallel}^2 \cos^2 \theta_{3e}}} \quad (2.76)$$

所确定的旋转椭球波矢曲面上（对于傍轴近似以及光轴近似垂直于波矢的情况下，波矢集中落在负单轴晶体的 e 光波矢曲面的短轴方向上的小许球面度所对应的有些许曲率的圆薄片上）：

$$|\mathbf{k}_3| = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{c} \cdot \frac{n_{3e\parallel} n_{3e\perp}}{\sqrt{n_{3e\perp}^2 \sin^2 \theta_{3e} + n_{3e\parallel}^2 \cos^2 \theta_{3e}}} \quad (2.77)$$

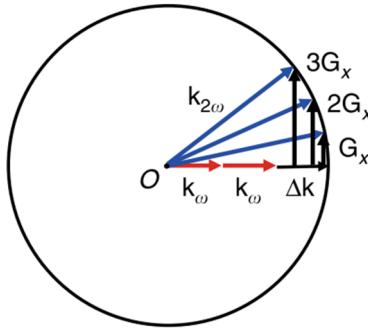


图 2.6 对倍频波与和频波的波矢只有大小限制而无方向限制<sup>[14]</sup>

除此之外，对波矢  $\mathbf{k}_3$  的方向均没有限制。这意味着当极化光波矢  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  与和频光波矢  $\mathbf{k}_3$  的起点均置于旋转椭球波矢面(2.77)的对称中心时，对于任意级次的，起点在极化光波矢量  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  终点的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$ ，若其终点恰好落在(2.77)所确定的  $k_3$  曲面上，则其所对应的拥有波矢  $\mathbf{k}_{3;m_x, m_y, m_z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  的和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_{3;m_x, m_y, m_z}$  均因满足波矢匹配而可以随传播距离而振幅持续增大。那么所有满足式(2.77)的  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  都将被利用上，并同时出射与这些倒格矢相匹配的  $\mathbf{k}_{3;m_x, m_y, m_z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  所对应的和频光  $\tilde{\mathbf{E}}_{3;m_x, m_y, m_z}$  们。

### 2.3.2.2 所有满足波矢匹配条件而出射的不同级次的和频光振幅均正比于相应级次的倒格波振幅

而之后会给出这些和频光因各自的振幅正比于相应级次的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  所对应的倒格波  $C_{m_x, m_y, m_z} e^{i\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}}$  的振幅  $C_{m_x, m_y, m_z}$ （目前暂可从式(2.45)可见一斑），因此当各级次的倒格波的振幅系数  $C_{m_x, m_y, m_z}$  们因  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的具体调制情况有相应的三维的谱分布的

同时，各符合波矢匹配而振幅可持续增长并可出射晶体的和频波  $\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}$  的振幅  $A_{3;m_x,m_y,m_z}(\mathbf{r})$ ，也将受到  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的调制函数的影响。

那么对  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的调制情况，将影响满足  $\mathbf{k}_{3;m_x,m_y,m_z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x,m_y,m_z}$  的倒格波级次和具体的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x,m_y,m_z}$  方向、各级和频波的波矢  $\mathbf{k}_{3;m_x,m_y,m_z}$  方向、进而影响各级和频波的能量流  $\tilde{\mathbf{S}}_{3;m_x,m_y,m_z}$  方向和出射方向，同时也会影响相应级次的和频波  $\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}$  的振幅  $A_{3;m_x,m_y,m_z}(\mathbf{r})$  大小。

这样一来，在一定的球面度内，不仅团簇着出射的  $\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}$  的波矢和能量流，在方向上有一定的分布， $\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}$  的振幅，也会随着不同波矢和能量流方向，所对应的不同级次，而有一定的分布。同时，各级  $\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}$  因频率相同又是相干的，因此在对目标二维图案进行逆向设计完毕所得的  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  下，从晶体中出射的各级因满足波矢匹配而被筛选出来，并且振幅也归根结底被  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  调制的  $\{\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}\}$ ，便可最终落在观察屏上并显示出设计好的二维全息图。这便是三维非线性光子晶体在非线性全息成像领域的应用之一。

下面将给出不同级次的和频光振幅表达式。仿照式(2.27)，沿  $\hat{\mathbf{k}}_3$  方向进行积分：

$$\begin{aligned} A_3(\mathbf{r}; \mathbf{L}_{\hat{\mathbf{k}}_3}) &= A_3(\mathbf{r}; (\mathbf{r} - \mathbf{L}_{\hat{\mathbf{k}}_3}) \cdot \hat{\mathbf{k}}_3 = 0) = A_3(L_{\hat{\mathbf{k}}_3} = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_3) = A_3(L_{\hat{\mathbf{k}}_3} = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_3) - A_3(0 = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_3) \\ &= \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{3e}c} \int_0^{L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} \left[ A_1(\mathbf{r}) A_2(\mathbf{r}) e^{i\Delta k_Q \cdot \mathbf{r}} \right] \Big|_{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_3 = l_{\hat{\mathbf{k}}_3}} dl_{\hat{\mathbf{k}}_3} \end{aligned} \quad (2.78)$$

其中当参与混频的两个入射光场到和频光群的转换效率不太高时，和频光集  $\{\tilde{E}_{3;m_x,m_y,m_z}\}$  从  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  中吸取的能量并不多，不会造成  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$  振幅的显著下降，此时两个参与混频的入射光场振幅近似恒定， $A_1(\mathbf{r}) = E_{01}$ 、 $A_2(\mathbf{r}) = E_{02}$  不含空，则有：

$$A_3(\mathbf{r}; \mathbf{L}_{\hat{\mathbf{k}}_3}) = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{3e}c} E_{01} E_{02} \int_0^{L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} e^{i\Delta k_Q \cdot l_{\hat{\mathbf{k}}_3}} dl_{\hat{\mathbf{k}}_3} = \frac{i|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} \chi_Q^{(2)}}{2n_{3e}c} E_{01} E_{02} \frac{e^{i\Delta k_Q \cdot L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} - 1}{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3} \quad (2.79)$$

其中

$$\int_0^{L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} e^{i\Delta k_Q \cdot l_{\hat{\mathbf{k}}_3}} dl_{\hat{\mathbf{k}}_3} = \int_0^{L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} e^{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3 \cdot l_{\hat{\mathbf{k}}_3}} dl_{\hat{\mathbf{k}}_3} = \frac{e^{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3 \cdot L_{\hat{\mathbf{k}}_3}} - 1}{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3} = \frac{e^{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3} - 1}{i\Delta k_Q \cdot \hat{\mathbf{k}}_3} \quad (2.80)$$

由于此处  $\chi_Q^{(2)}$  中的  $\chi_{eff}^{(2)}$  比原  $d_{eff}$  在数学形式上小 4 倍，因此振幅即(2.79)比(2.27)和(2.45)在数学形式上小 4 倍，于是  $I_3$  在数学形式上应比(2.30)以及(2.44)小 16 倍，其他参数或不变或被替换，得倍频或和频过程结束后的：

$$I_3 = \frac{\sqrt{\mu_{r1}^{(1)} \mu_{r2}^{(1)} \mu_{r3}^{(1)}}}{n_{1e} n_{2e} n_{3e}} \frac{\omega_3^2}{8\epsilon_0 c^3} (\chi_Q^{(2)})^2 \cdot I_1 I_2 \cdot L_{\hat{k}_3}^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k_Q \cdot L_{\hat{k}_3}}{2}\right) [29] \quad (2.81)$$

同样对于和频过程结束即  $l_{\hat{k}_3} \geq L_{\hat{k}_3}$  后，有类似式(2.45)的：

$$|E_{03}| = |A_3(\mathbf{r}; \mathbf{L}_{\hat{k}_3})| = \frac{\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} |\omega_3|}{2n_{3e} c} \chi_Q^{(2)} \cdot |E_{01}| |E_{02}| \cdot L_{\hat{k}_3} \cdot \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_Q \cdot L_{\hat{k}_3}}{2}\right) \right| \quad (2.82)$$

将该解或准相位匹配  $\Delta k_Q = \mathbf{0}$  时的式(2.82)代入式(2.58)、(2.61)均成立，说明之前所假设的  $x, y, z$  方向上的缓变振幅近似也均成立。

当准相位匹配条件  $\Delta k_{Q; m_x, m_y, m_z} = \Delta k_{m_x, m_y, m_z} + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z} + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = \mathbf{0}$  得到满足，同时相应级次的波矢  $\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z}$  和倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  的终点落在  $\mathbf{k}_3$  波矢曲面的相应旋转椭球面上时，非线性全息过程表述为：

$$\begin{cases} \left| E_{3; m_x, m_y, m_z}(\mathbf{r}; \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z} = l_{\hat{k}_{3; m_x, m_y, m_z}} \geq L_{\hat{k}_{3; m_x, m_y, m_z}}) \right| = \frac{\sqrt{\mu_{r3}^{(1)}} |\omega_3| \chi_{eff}^{(2)}}{2n_{3e} c} C_{m_x, m_y, m_z} |E_{01}| |E_{02}| L_{\hat{k}_{3; m_x, m_y, m_z}} \\ \left| \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} \right| = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{c} \cdot \frac{n_{3e//} n_{3e\perp}}{\sqrt{n_{3e\perp}^2 \sin^2 \theta_{3e; m_x, m_y, m_z} + n_{3e//}^2 \cos^2 \theta_{3e; m_x, m_y, m_z}}} \end{cases} \quad (2.83)$$

可见在对二阶非线性系数  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  进行了某一具体的三维空间调制（式(2.66)）即  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot B_{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot \sum_{m_x, m_y, m_z=-\infty}^{+\infty} C_{m_x, m_y, m_z} e^{i\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} \cdot \mathbf{r}}$  后，二式给出了在这样的  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  分布下，通过非线性过程、和频过程、准相位匹配即倒格矢弥补波矢失配的筛选过程，所留下的和频光集  $\{\tilde{E}_{3; m_x, m_y, m_z}\}$  的波矢集  $\{\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z}\}$  在倒空间中的一定的发散程度和球面度分布；而一式则同时给出了不同级次、不同波矢、不同出射方向的和频光的振幅大小。

值得注意的是，对于式(2.83)中任何一个物理量，若其角标含  $m_x, m_y, m_z$ ，说明该物理量或者说该物理量的自变量们是倒空间的，即描绘该物理量所选用的坐标，只能由衍射级次  $(m_x, m_y, m_z)$  和倒空间的三基矢  $2\pi/\Lambda_x \mathbf{i}, 2\pi/\Lambda_y \mathbf{j}, 2\pi/\Lambda_z \mathbf{k}$  所决定的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = 2\pi m_x / \Lambda_x \mathbf{i} + 2\pi m_y / \Lambda_y \mathbf{j} + 2\pi m_z / \Lambda_z \mathbf{k}$  来描述，那么其中的  $E_{3; m_x, m_y, m_z}$  连同其波矢  $\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z}$  由于只能写出二者关于倒空间坐标的函数关系，则均只能由倒格矢描述，并且因此  $E_{3; m_x, m_y, m_z}$  的振幅所携带的信息，是二阶非线性系数的倒空间信息，即其频谱信息。同样， $E_{3; m_x, m_y, m_z}$  的实际传播距离、有效倍频距离、其波矢与光轴的夹角即  $l_{\hat{k}_{3; m_x, m_y, m_z}}, L_{\hat{k}_{3; m_x, m_y, m_z}}, \theta_{3e; m_x, m_y, m_z}$  三者，也均只能由倒空间的坐标量描绘。只不过由于正空间与倒空间三基矢的方向对应同向且均为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ，且基矢大小有数量关系，而可以通过坐

标系变换得到坐标变换关系，并用于两种坐标系下的坐标过渡，比如式(2.83)中的 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 、光轴方向和相应折射率椭球，四者可通过坐标变换从正空间过渡到倒空间。

合理设计 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 可同时对不同传播方向上的倍频光、和频光的振幅进行调制，便在理论上允许了三维光子晶体可进行倍频波、和频波的三维非线性全息成像，并同时给出了非线性全息成像的过程和对于给定目标图像，相关物理量的设计和计算方法。



### 3 三维非线性结构设计与全息成像仿真

上一章描述了在其他条件已知时，对于给定的二阶非线性系数分布函数  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ ，可通过考察终点落在  $\omega_3$  光的波矢曲面上的倒格矢  $((m_x, m_y, m_z), \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z})$ ，以及  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  或其调制函数的傅里叶变换即  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  的角谱  $((m_x, m_y, m_z), C_{m_x, m_y, m_z})$ ，确定出射的和频光集中，每一条级次的和频光的波矢、波矢方向和不同方向的振幅大小分布，即  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  的频谱  $(\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}, C_{m_x, m_y, m_z})$  经横坐标在倒空间中的三维平移  $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}, C_{m_x, m_y, m_z})$  后所得的平移后的频谱  $(\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z}, C_{m_x, m_y, m_z})$ ，或者更准确地说是横坐标于倒空间平移、纵坐标于频谱空间拉伸后的频谱  $(\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z}, C_{m_x, m_y, m_z} \cdot L_{\hat{\mathbf{k}}_3})$ ，进而正向确定出射光在近场光屏或 CCD 上的近场衍射光强分布图，即  $(\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z}, |E_3(\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z})|)$ 、 $(\mathbf{r}(\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z}), |E_3(\mathbf{r})|)$ 、 $((x, y, z)|_{\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z}}, I_{3; x, y, z})$ ，实现三维非线性近场菲涅尔计算体全息。

而本章内容则是在其他条件已知的情况下，对远场目标物  $((x, y, z)|_{\hat{\mathbf{k}}_{3; m_x, m_y, m_z}}, I_{3; x, y, z})$ ，反向数值计算和设计出二阶非线性系数  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  在正空间的三维调制函数，并依据所得结果，在仿真软件内编写程序，通过多值化编码方法将计算结果转换为三维光子晶体的正空间实际结构，然后仍通过数值仿真查看对于所设计的结构，出射倍频光的远场成像图案是否与目标物匹配，如果匹配且成像质量较高，说明对  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  的计算结果正确，并且相应的编码法对于将  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  转换为三维光子晶体内实际刻写的正空间结构是有效的，经验证各步骤的结果均符合预期、方案设计正确且成熟后，便可对实际的三维光子晶体进行飞秒激光直写加工，并以基频光照射，以查看远场倍频光场的分布情况，继而在完成三维非线性全息过程的理论验证、数值模拟验证之后，完成三维非线性傅里叶计算体全息过程的实验验证。

#### 3.1 三维 GS 算法：约束结构角谱为目标图像逆向获得 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 分布

##### 3.1.1 基于三维光子晶体的远场傅里叶计算体全息的逆向过程原理

上一章未提到，倍频光集  $\{E_{3; m_x, m_y, m_z}\}$  所携带的信息是三维光子晶体结构的频谱信息，而倒空间的频谱信息只能通过二维傅里叶变换才能在实空间中呈现出来，因此不能直接查看晶体后端面的倍频光强分布，而是需要看  $\{E_{3; m_x, m_y, m_z}\}$  经过一次夫琅禾费衍射后的远场分布图案，此时  $\{E_{3; m_x, m_y, m_z}\}$  的振幅分布才能在正空间中以光强分布的形式体现出来。因此对此只能采取傅里叶全息技术而不能采取菲涅尔全息。

由于远场光强和振幅分布图案是目标图案，因此倍频光集 $\{E_{3;m_x,m_y,m_z}\}$ 所携带的三维光子晶体的 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 的角谱的振幅分布也需要是目标图案的振幅分布，于是 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 本身的三维分布函数可以说是目标图案的振幅分布的傅里叶变换，但由于目标图案是二维的， $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 与其角谱均是三维的分布，接下来就需要完成从目标图案到 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 的角谱，再用到三维 GS 算法到 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 的转换。

### 3.1.2 波长匹配问题

在仿真的程序中，假设基频光沿 $y$ 轴正向传播，且正空间中对二阶非线性系数的调制周期为 $\Lambda_x = 4, \Lambda_y = 3, \Lambda_z = 4$ （单位为 $\mu\text{m}$ ），该结构是个 $x-o-z$ 面为正方形，但厚度即 $y$ 方向较薄的小长方体，并且在实空间中一共有 $16 \times 16 \times 16$ 个这样的长方体，每个长方体中心的点阵坐标储存为一个三维数组 $(x, y, z) = (n_x \cdot \Lambda_x, n_y \cdot \Lambda_y, n_z \cdot \Lambda_z)$ ，其中三坐标每一个的取值有 16 个： $n_x, n_y, n_z = [-8, 7] \in \mathbb{Z}$ ，这该周期结构相应的倒格子点阵为 $(2\pi m_x / \Lambda_x, 2\pi m_y / \Lambda_y, 2\pi m_z / \Lambda_z)$ ，且也有 $m_x, m_y, m_z = [-8, 7] \in \mathbb{Z}$ ，每一个倒格点即代表光子晶体的一个倒格子，任意两个倒格点之间的倒格矢，相当于一个倒格子到另一个倒格子的平移矢量。

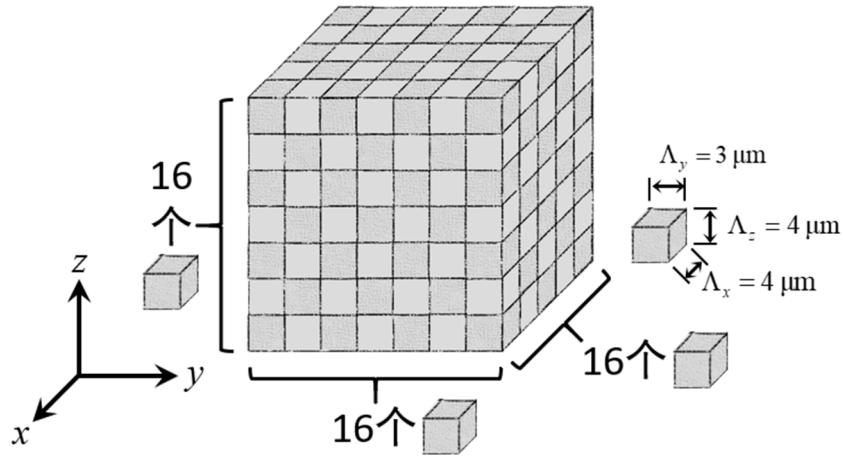


图 3.1 三维光子晶体正空间调制区域像素分布

在这个 $64 \times 48 \times 64$ 的大长方体调制区域外，二阶非线性系数 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 的值不再改变，但在数学上采用 B-K 周期性边界条件将该调制区域的 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$ 分布情况延拓到正空间中晶体内的其余部分，使得一共有 $16 \times 16 \times 16$ 个调制周期为 $\Lambda'_x = 64, \Lambda'_y = 48, \Lambda'_z = 64$ 的实际调制区域，相应格波波矢终点构成的点阵为 $(2\pi l_x / \Lambda'_x, 2\pi l_y / \Lambda'_y, 2\pi l_z / \Lambda'_z)$ ，其中 $l_x, l_y, l_z = [-8, 7] \in \mathbb{Z}$ ，之所以称其为格波波矢构成的倒格点阵，是因该倒格点阵全分布在同一个倒格子内，且每个 $2\pi/\Lambda_x \times 2\pi/\Lambda_y \times 2\pi/\Lambda_z$ 的长方体倒格子内都有这样一个点

阵，类似固体物理中的格波波矢全都位于同一布里渊区内，比倒格子的分布更密集。

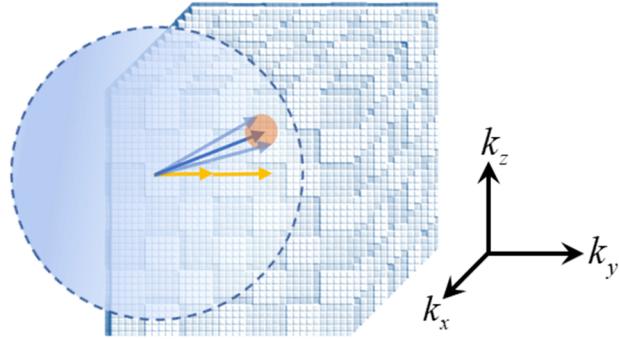


图 3.2 三维光子晶体倒空间调制区域像素分布及考虑细节倒格矢后的波矢匹配椭球面

正如 2.2 节一维准相位匹配中，采取振幅最大的 $\pm 1$  级倒格波的倒格矢进行波矢匹配，以确定 $\chi_{eff}^{(2)}(z)$ 的一维调制周期一样，这里也需要先假定最终出射晶体并在远场成像的倍频光集 $\{E_{3;m_x,m_y,m_z}\}$ 是某一级次 $(m_x, m_y, m_z)$ 的倒格矢进行波矢匹配的结果。这里说某一级次 $(m_x, m_y, m_z)$ ，却又暗示该级次下的倍频光不止一束，是因为在做了 B-K 周期性边界条件将以 $\Lambda_x = 4, \Lambda_y = 3, \Lambda_z = 4$ 为周期的尺寸为 $64 \times 48 \times 64$ 的调制区域延拓后，式(2.83)中的波矢匹配条件会相应地修正为：

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} + \mathbf{q}_{l_x, l_y, l_z}| = \frac{|\omega_3| \sqrt{\mu_{r3}^{(1)}}}{c} \cdot \frac{n_{3e//} n_{3e\perp}}{\sqrt{n_{3e\perp}^2 \sin^2 \theta_{3e; m_x, m_y, m_z} + n_{3e//}^2 \cos^2 \theta_{3e; m_x, m_y, m_z}}} \quad (3.1)$$

$E_{3;m_x,m_y,m_z}$  连同其波矢 $\hat{\mathbf{k}}_{3;m_x,m_y,m_z}$ 也需要修正为 $E_{3;m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}$ 、 $\hat{\mathbf{k}}_{3;m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}$ ，且还有：

$$\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot B_{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z}(\mathbf{r}) = \chi_{eff}^{(2)} \cdot \sum_{m_x, m_y, m_z=-8}^7 \sum_{l_x, l_y, l_z=-8}^7 C_{m_x, m_y, m_z; l_x, l_y, l_z} e^{i(\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} + \mathbf{q}_{l_x, l_y, l_z}) \cdot \mathbf{r}} \quad (3.2)$$

其中

$$\mathbf{q}_{l_x, l_y, l_z} = q_{l_x} \mathbf{i} + q_{l_y} \mathbf{j} + q_{l_z} \mathbf{k} = \frac{2\pi l_x}{\Lambda'_x} \mathbf{i} + \frac{2\pi l_y}{\Lambda'_y} \mathbf{j} + \frac{2\pi l_z}{\Lambda'_z} \mathbf{k} \quad (3.3)$$

为三维光子晶体格波波矢，或称为细节倒格矢。现假设采取 $(m_x, m_y, m_z) = (2, 1, 0)$  级次的倒格矢 $\mathbf{G}_{2,1,0}$ ，并采取 $(l_x, l_y, l_z) = (l_x, 6, l_z)$  级细节倒格矢 $\mathbf{q}_{l_x, 6, l_z}$  即 $y$ 向第六层细节倒格矢 ( $q_{l_x, 6, l_z; y} = q_{l_y=6} = 2\pi l_y / \Lambda'_y = -0.41888$ )，则相应的傅里叶系数 $C_{m_x, m_y, m_z; l_x, l_y, l_z} = C_{2,1,0; l_x, 6, l_z}$ 。

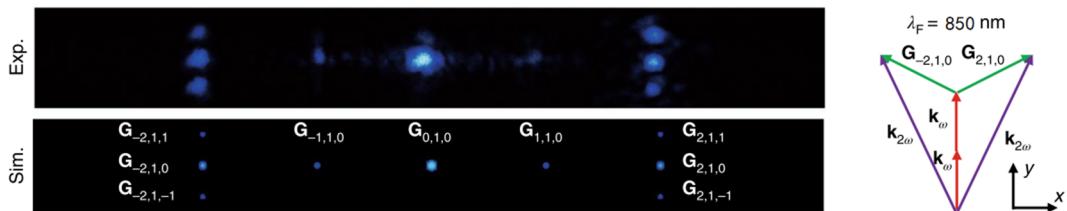


图 3.3 利用 2,1,0 级次倒格矢 $\mathbf{G}_{2,1,0}$ 补偿波矢失配示意图<sup>[13]</sup>

接下来便是筛选匹配该衍射级的倒格矢和该层细节倒格矢的波长的过程，以使得该波长的基波所对应的倍频波的波矢  $k_3$  曲面将通过  $\mathbf{G}_{2,1,0} + \mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  附近：通过将范围位于  $0.5\text{~}\mu\text{m}$  之间（步长或增量为  $0.01\text{~}\mu\text{m}$ ）的波长一维数组，在温度  $T=25^\circ\text{C}$  时，代入偏振方向平行于光轴的基频光入射晶体的物理场景下的铌酸锂的色散折射率函数  $n_e(\lambda, T)$ ，生成该范围内的波长所对应的基波波矢大小范围（也是一维数组），以及半波长、同样温度下，相应的倍频波波矢大小所构成的一维数组  $\{k_3\}$ 。

在细节波矢平面假定为  $\mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  的情况下，通过 matlab 的 find() 函数寻找这些不同波长的基频波和倍频波所对应的  $y$  方向的(细节)波矢失配量的最小值（即式 3.1 的  $y$  方向分量方程的右侧减左侧的绝对值的最小值），其所对应的基频波的波长，就是所采取的目标基频光的波长，在衍射级采取  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  和  $\mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  的情况下，数值仿真所给出的结果为  $0.859\text{~}\mu\text{m}$ ，可见三维光子晶体调制周期与匹配的波长处在同一个数量级，因此一方面说明以这样的周期调制的材料，称得上是三维光子晶体，另一方面也说明经这样调制的三维光子晶体理应具备操控相匹配的光波段的光场的能力。

在通过确定目标衍射级以确定了大致匹配的波长之后，才能继续采用该波长的基波所对应的倍频波的波矢  $k_3$  曲面进行接下来的计算。在 3.3 节，我们会更进一步地确定最匹配目标衍射级的波长为  $0.850\text{~}\mu\text{m}$ ，此处的  $0.859\text{~}\mu\text{m}$  只是大致匹配  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  倒格子内的第六层细节倒格矢平面。

### 3.1.3 三维角谱分布函数的初始化

通过 3.1.2 节所确定的波长，只是在待选定的一维波长数组( $0.501, 0.502, \dots, 1.500$ )  $\mu\text{m}$  中，使得倍频光波矢  $k_3$  曲面最接近  $y$  向第 6 级细节倒格矢平面的基频光波长，其所对应的倍频光波矢  $k_3$  曲面并不完全落于第 6 级细节倒格矢平面即  $\mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  上，原因有两个，一是其  $y$  向(细节)波矢失配量只是最小值，但该最小值不一定是零；二是倍频光波矢  $k_3$  曲面是个旋转椭球面，不可能与该平面重合。不过该曲面一定在相应细节倒格矢所在的倒格子，即倒格矢  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  所对应的倒格子内。

在  $\mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  所在的  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  倒格子内，由于该倒格子在整个倒空间中所占体积很小，再加上铌酸锂晶体各波长下  $n_\perp, n_\parallel$  差别不大，导致  $e$  光的旋转椭球面没有那么扁或长，因此可将该  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  倒格子区域内的倍频  $e$  光的旋转椭球面近似为球面。

在这样的近似下，计算该  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  倒格子内不同  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  坐标下的倍频光波矢  $\mathbf{k}_3$  的  $y$  分量的大小  $k_{3y}$  的值，构成一个离散的二维分布函数  $k_{3y}(q_{l_x}, q_{l_z})$ 。接着用 matlab 的 sort 函数将每一个  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  下，一维数组  $q_{l_y}$  所对应的  $|k_{3y}(q_{l_x}, q_{l_z}) - q_{l_y}|$  的值进行升序排列，并

取其中绝对值最小的值所对应的  $q_{l_y}$ ，即离曲面  $k_{3y}(q_{l_x}, q_{l_z})$  最近的相应级次的细节倒格矢的  $y$  分量  $q_{l_y}$ ，这样便找到了离  $e$  光的旋转椭球面最近的三维的离散细节倒格矢  $(q_{l_x}, q_{l_y}, q_{l_z})$  的分布情况。

于是在  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  内的每一个  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  下，将这些细节倒格矢所对应的  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  在倒空间的振幅  $C_{2,1,0;l_x, l_y, l_z}$  置为目标  $16 \times 16$  大小的图片（与  $l_x, l_z = [-8, 7] \in \mathbb{Z}$  在  $x-o-z$  方向上也为  $16 \times 16$  的像素矩阵相对应）的相应  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  处的像素点的振幅。至此便完成了对三维角谱分布函数的初始值即初始三维分布情况的确定，注意  $C_{2,1,0;l_x, l_y, l_z}$  是个由三维倒空间坐标描述的复数数组，只不过其初始化的值在  $e$  光旋转椭球面附近为目标图片的振幅，而在  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  内的其他  $(q_{l_x}, q_{l_y}, q_{l_z})$  下的值，全为零，以至于该复数数组只是初始值全为实数罢，之后的 GS 算法的中间过程中它会被赋值为复数数组。

### 3.1.4 三维 GS 算法实现过程

#### 3.1.4.1 二维 GS 算法的目的和操作流程

一般对一个实空间光场振幅分布，即一个实数二维数组的傅里叶变换，即其频谱或其傅里叶全息图的二维数组中每一个像素点的值，既有振幅部分又有相位部分，若只取其中的相位部分，振幅部分全置 1（全取其他常实值效果也类似），则再对该纯相位全息图(POH)的进行傅里叶逆变换回到正空间物光场分布，并只取其振幅部分所还原得到的重建像，仍能得到目标物光场振幅分布的大致轮廓，但该过程中由于期间在将傅里叶全息图转换为纯相位傅里叶全息图时，“只取全息图的相位部分而直接扔掉了其振幅部分的信息”的操作，以及最终“只取纯相位全息图傅里叶逆变换回正空间的物光场的振幅而抛弃其相位”的操作，两次舍弃一半的信息，导致最终重建像质量不高，干涉散斑严重。

而典型的二维 GS 算法便针对目标实空间光场振幅分布，在经上述过程得到纯相位全息图的傅里叶逆变换所得的复数形式的物光场分布后，不直接取振幅得到重建像，而是将其振幅约束为目标图像振幅，相位不变，将所得的既有振幅又有相位的复数形式的物光场，作为新的输入再继续相同的第二轮操作，直到迭代次数升到一定程度（一般 50 次即可），使得最终重建像成像质量随着迭代次数的增加而上升的效果不再明显后，停止迭代并对最后一次迭代所得的复数形式的正空间物光场取振幅输出为重建像。

简言之，Gerchberg 和 Saxton 所提出的这个 GS 算法，目的是为了对于给定的正空间物光场，在迭次傅里叶变换(IFTA)的过程中，每次做了傅里叶变换后只取傅里叶

全息图的相位，每次做了傅里叶逆变换后限制正空间光场的振幅，最终收敛到一个纯相位傅里叶全息图，其所还原得到的重建像的质量，虽比原像质量差一点，但比不迭代并只取相位的傅里叶全息图的傅里叶逆变换所得的重建像的质量要好。

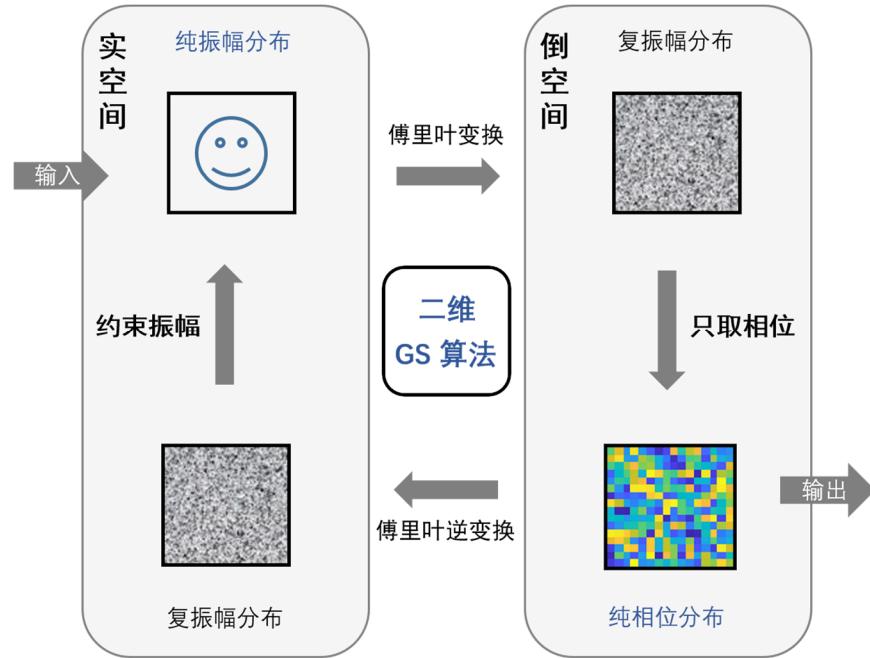


图 3.4 二维 GS 算法即迭次傅里叶变换算法的流程图

### 3.1.4.2 三维 GS 算法的流程

三维 GS 算法与之类似，但目标振幅分布与其傅里叶全息图均是三维数组，并且目标振幅的三维分布在倒空间而非正空间中，且将其傅里叶逆变换作为振幅置 1 的纯相位三维数组，与通常意义上的 GS 算法中的傅里叶变换关系对的振幅约束对象恰好相反。在本仿真中，每次傅里叶变换后的结果为  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  倒格子内离散细节倒格矢  $(q_{l_x}, q_{l_y}, q_{l_z})$  分布所对应的复角谱系数  $C_{2,1,0;l_x, l_y, l_z}$ ，它是一个关于倒空间三个方向的坐标的三维函数，其自变量是个  $16 \times 16 \times 16$  的三维数组，接着将复角谱分布的振幅部分置为 3.1.3 节末的初始化  $C_{2,1,0;l_x, l_y, l_z}$  实振幅三维近球面分布情况，并进行傅里叶逆变换回到  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的实空间复函数分布，接着将  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的振幅约束为 1 相位保持不变地转换为正空间的纯相位分布，于是按照这样的循环迭代 10000 次，取最后一次经由  $C_{2,1,0;l_x, l_y, l_z}$  傅里叶逆变换所得的  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  复数分布的相位部分和其中的相位角，便得到正空间中  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的复数纯相位分布和实数相位角分布，之后将用此实的相位角的三维分布对三维光子晶体进行多值化编码。

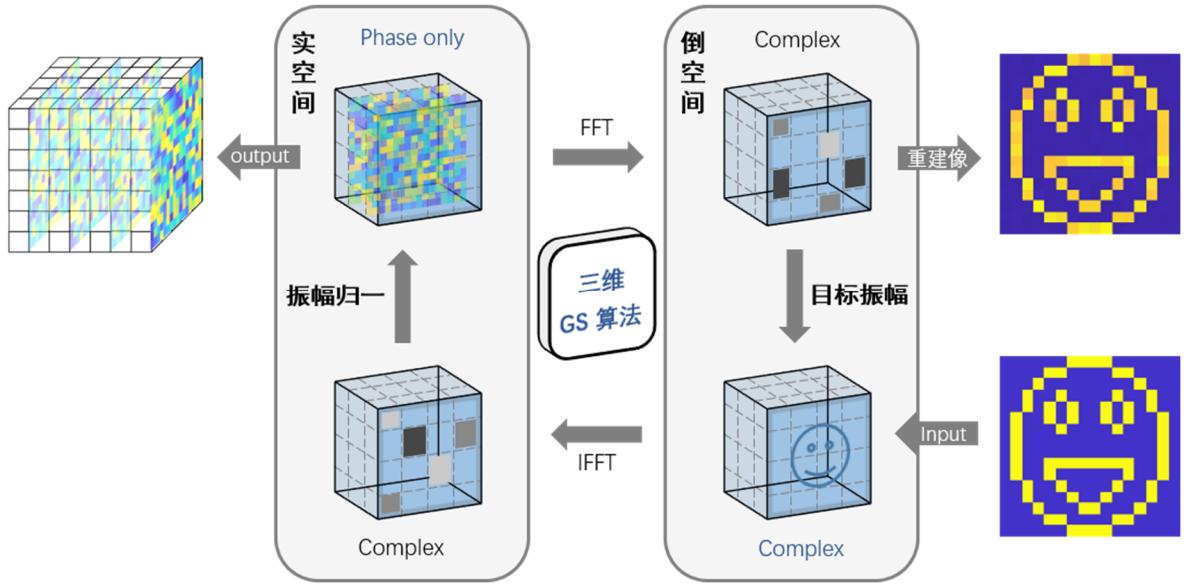
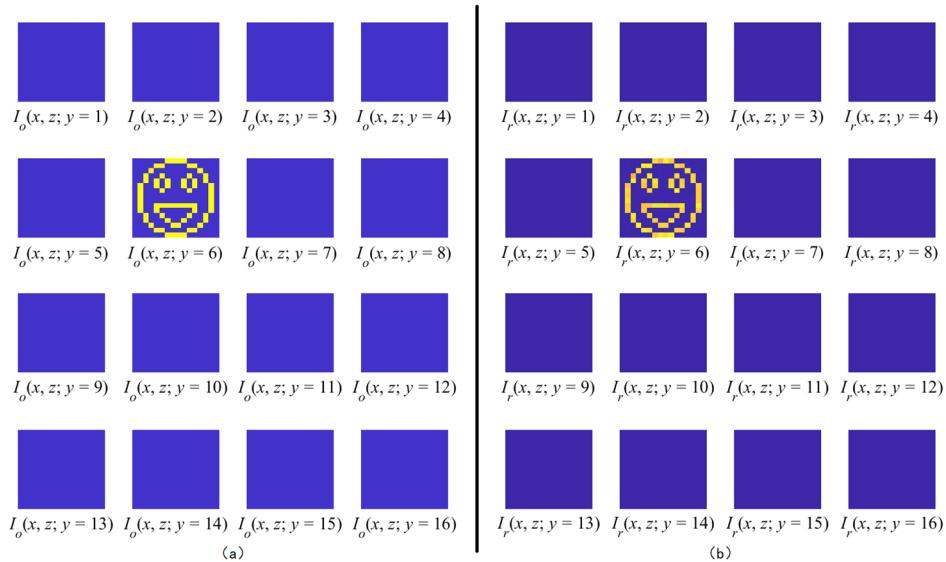


图 3.5 利用三维 GS 算法计算二阶非线性系数的三维相位分布

其中可以取最后一次迭代所得的  $C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}$  复数数组的振幅，输出为  $y$  向排列的共 16 个不同  $y$  向细节倒格矢分量  $q_{l_y}$  所对应的 16 个  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  平面上的倒空间二维角谱分布图  $C_{2,1,0;l_x,l_y_0,l_z}$ ，查看三维 GS 算法的效果是否达到预期，即所设计的正空间的三维纯相位  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  分布的三维角谱在某一两个  $(q_{l_x}, q_{l_z})$  平面上的二维分布，是否是目标图像的光场振幅分布。

图 3.6 目标  $C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}$  分布 (a) 和 GS 算法所得结构在倒空间的实际  $C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}$  分布 (b)

### 3.2 三维迂回相位编码：对正空间非线性结构多值化编码

在上一节通过三维 GS 算法算出了正空间中  $16 \times 16 \times 16$  个  $\Lambda_x \times \Lambda_y \times \Lambda_z = 4 \times 3 \times 4 \mu\text{m}$

小长方体中每个长方体内的相位分布后，倒格矢  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  所指向的倒格子内， $16 \times 16 \times 16$  个细节倒格矢  $(q_{l_x}, q_{l_y}, q_{l_z})$  所对应的细节倒格子的角谱分布  $C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}$  的振幅分布，也就大致是图 3.6 的目标振幅分布了；可见在  $16 \times 16$  的低像素的情况下，至少在轮廓即 0-1 分布上是完全一致的，只不过振幅大小略有不同。因此振幅正比于该倒空间中三维光子晶体结构的角谱分布的倍频光集  $\{E_{3;m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}\}$ ，经过夫琅禾费衍射后在远场所成的正空间的像，便是目标图案的光强分布。

接下来要做的便是将三维 GS 算法所得的正空间中  $16 \times 16 \times 16$  个  $4 \times 3 \times 4 \mu\text{m}$  的小长方体，所对应的  $16 \times 16 \times 16$  大小的三维相位分布矩阵，通过逐层二维迂回相位编码的方法，将三维矩阵中每一个像素所储存相位信息，落实到相应正空间坐标处的周期性小长方体结构中去。

总调制区域即尺寸为  $64 \times 48 \times 64 \mu\text{m}$  的正空间大长方体在  $y$  方向上的厚度为 48  $\mu\text{m}$ ，若以  $1 \mu\text{m}$  为 1 层则共有 48 层。但由于飞秒激光直写头的移动精度，允许我们再将这  $y$  向的 48 层进一步划分为 480 小层，每一层  $0.1 \mu\text{m}$ ，10 小层为 1 大层，3 大层为 1 个小长方体在  $y$  方向的周期  $\Lambda_y = 3 \mu\text{m}$ ，因此每一个小长方体在这第二部分的仿真程序中，被划分为了 30 个  $y$  向厚度为的  $0.1 \mu\text{m}$  的小层，注意到该厚度比匹配该级次的光波波长  $0.859 \mu\text{m}$  要小大约 1 个数量级，因此调制出来的三维光子晶体的二阶非线性系数在实空间中的三维分布精度对于实现三维傅里叶全息成像是够高的。

针对这 480 层在正空间调制区域中以  $x-o-z$  向二维分布的  $16 \times 16$  个  $4 \times 4 \mu\text{m}$  的正方形小方块，需逐层采用二维迂回相位编码方法将三维 GS 算法所得的正空间相位分布转换为三维光子晶体调制区域中每一层的实际结构。

### 3.2.1 二维迂回相位编码原理

#### 3.2.1.1 总可用不同复振幅分布的傅里叶全息图重现有限范围内的同一个目标光场

二维迂回相位编码技术最早被应用于二元振幅型傅里叶迂回计算全息图的生成。

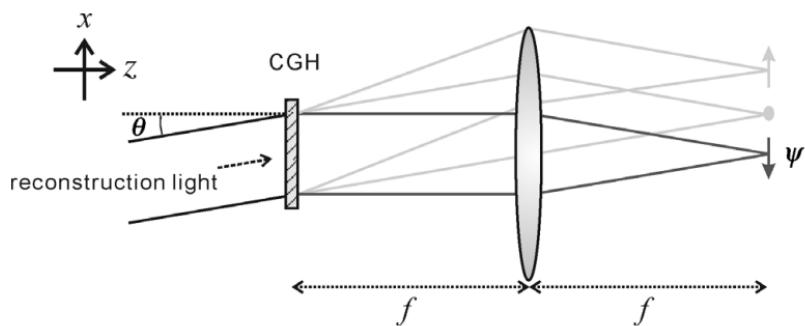


图 3.7 二维傅里叶计算全息还原重现像的过程

在典型的傅里叶计算全息图还原重建像的过程中，若不考虑零级背景光和孪生像的问题，则二维傅里叶全息图的复振幅  $H(x, y)$  与二维重建像的复振幅  $\psi(x, y)$  满足：

$$\psi(x, y) = \mathcal{F}\{H(x, y)\psi_r(x, y)\} \quad (3.4)$$

其中， $\psi_r(x, y) = e^{ik_3 x} = e^{ik_3 \cdot \sin \theta \cdot x} = e^{ik_3 \cdot x_0 / f \cdot x}$  为不考虑振幅的斜射单色平面波重现光 (reconstruction light)，因它的斜射而在 CGH(Computer-generated hologram)、透镜、光屏三个互相平行的平面上，引入了相同的附加相位因子，且其本应是  $(x, y)$  的函数，但因参考光垂直于  $y$  轴沿纸面入射而使得其在引入的额外相位与  $y$  无关。

这里把透过 CGH 前后的重现光比作三维光子晶体中经过  $64 \times 48 \times 64 \mu\text{m}$  的调制区域前后的倍频光  $E_3$ ，相应的傅里叶计算全息图 CGH 比作三维光子晶体中的二阶非线性系数的调制区域，CGH 中储存的信息等价于调制区域的  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\mathbf{r})$  的调制函数分布信息即光子晶体中所刻写的结构信息，携带 CGH 信息的重现光经过透镜比作携带光子晶体结构信息的倍频光  $E_3$  经过远场夫琅禾费衍射，重现光在光屏上成的像  $\psi(x, y)$  比作倍频光  $E_3$  的远场像，所以重现光沿用了  $E_3$  的波矢大小  $k_3$ 。

针对光屏上有限范围  $d_x \times d_y$  内的目标光场  $\psi(x, y)$ ，二维迂回相位编码所生成的二元(binary)振幅型 CGH (开孔或不开孔对应透光或不透光) 即  $H_b(x, y)$ ，可以替代实际的傅里叶全息图的复振幅分布  $H(x, y)$ ，经傅里叶变换后复现相同的重建像：

$$\mathcal{F}\{H_b(x, y)\psi_r(x, y)\} = \mathcal{F}\{H(x, y)\psi_r(x, y)\} = \psi(x, y) \quad (3.5)$$

### 3.2.1.2 原复振幅傅里叶计算全息图的采样全息图及其相应的采样重建光场分布

将  $H(x, y)$  划分为  $M \times N$  ( $M = N$ ) 个  $w \times w$  的格子 (虚拟网格)，取其中某个正方形小格子中心为坐标原点，其余小格子的中心位置便可由  $(x_m, y_n) = (m \cdot w, n \cdot w)$  表示，其中  $(m, n)$  的取值范围由  $(M, N)$  及其奇偶性确定：

$$\begin{cases} m_{\min} = -\frac{M - \text{mod}(M, 2)}{2}, m_{\max} = -\frac{M - \text{mod}(M, 2)}{2} + M - 1 = \frac{M + \text{mod}(M, 2)}{2} - 1 \\ n_{\min} = -\frac{N - \text{mod}(N, 2)}{2}, n_{\max} = \frac{N + \text{mod}(N, 2)}{2} - 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

对于三维光子晶体调制范围  $64 \times 48 \times 64 \mu\text{m}$  的每一个  $x-o-z$  面，由于其由  $16 \times 16$  个  $4 \times 4 \mu\text{m}$  的小正方形组成，所以可认为实际情况下，那里的  $M = N = 16$ 、 $w = 4 \mu\text{m}$ 。如下图所示：

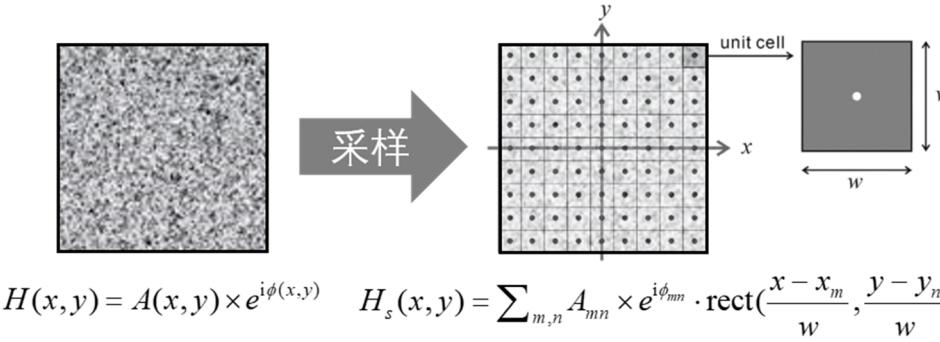


图 3.8 复振幅傅里叶全息图的小格子划分与采样

对于任意一个尺寸  $(M \cdot w) \times (N \cdot w)$  已经确定了的  $H(x,y)$ ，总可以将  $M, N$  调整得够大，或者将小格子边长  $w$  划分得足够小、小格子足够密集，使得  $H(x,y) = A(x,y) \times e^{i\phi(x,y)}$  在每个小方格中的值的起伏不大，此时对  $H(x,y)$  在每个小方格中心处的振幅和相位即  $A(x_m, y_n)$  与  $e^{i\phi(x_m, y_n)}$  进行采样，其值近似于整个小方格区域内  $A(x,y)$  与  $e^{i\phi(x,y)}$  的平均值，同一小方格内其他  $(x,y)$  处的  $A(x,y)$  与  $e^{i\phi(x,y)}$  与其相差不大，因此对  $H(x,y)$  可以用格点个数个离散的点光源阵列近似表示：

$$H(x,y) \approx H_s(x,y) = \sum_{m,n} A(x_m, y_n) \times e^{i\phi(x_m, y_n)} \cdot \text{rect}\left(\frac{x-x_m}{w}, \frac{y-y_n}{w}\right)$$

$$H_s(x,y) = \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot \text{rect}\left(\frac{x-x_m}{w}, \frac{y-y_n}{w}\right) \quad (3.7)$$

其中 s 表示 sampled，当  $w$  足够小时， $\text{rect}[(x-x_m)/w, (y-y_n)/w]$  函数变为 Kronecker delta 即  $\delta_K[x-x_m, y-y_n]$  而非  $\delta_D[x-x_m, y-y_n] = \text{rect}[(x-x_m)/w, (y-y_n)/w]/w$  即 Dirac delta。

对于  $H_s(x,y)$ ，此时重现像的光场分布也是采样式的：

$$\begin{aligned} \psi_s(x,y) &= \mathcal{F}\{H_s(x,y)\psi_r(x,y)\} = \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x-x_m}{w}, \frac{y-y_n}{w}\right)e^{ik_{3x}x}\right\} \\ &\xrightarrow{\text{位移定理}} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \left\langle e^{i[(k_x-k_{3x})x+k_yy]} \middle| \text{rect}\left(\frac{x-x_m}{w}, \frac{y-y_n}{w}\right) \right\rangle \\ &\xrightarrow{\text{延迟定理}} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot \frac{1}{4\pi^2} e^{-i[(k_x-k_{3x})x_m+k_yy_n]} \left\langle e^{i[(k_x-k_{3x})x+k_yy]} \middle| \text{rect}\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right) \right\rangle \\ &\xrightarrow{\text{相似性定理}} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot \frac{w^2}{4\pi^2} e^{-i[(k_x-k_{3x})x_m+k_yy_n]} \left\langle e^{iw[(k_x-k_{3x})x+k_yy]} \middle| \text{rect}(x, y) \right\rangle \\ &= \frac{w^2}{4\pi^2} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot e^{ik_{3x}x_m} e^{-i[k_xx_m+k_yy_n]} \frac{\sin \frac{w(k_x-k_{3x})}{2}}{\frac{w(k_x-k_{3x})}{2}} \frac{\sin \frac{wk_y}{2}}{\frac{wk_y}{2}} \\ &= \frac{w^2}{4\pi^2} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot e^{ik_{3x}x_m} e^{-i[k_xx_m+k_yy_n]} \text{sinc}\left[\frac{w(k_x-k_{3x})}{2}, \frac{wk_y}{2}\right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

其中  $k_x = k_0 \cdot \sin \theta_x = k_0 \cdot x/f$ 、 $k_y = k_0 \cdot \sin \theta_y = k_0 \cdot y/f$  类似  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  所对应的  $\mathbf{G}_{m_x}$ 、 $\mathbf{G}_{m_y}$ ，

均属于描述正空间结构的频谱信息的频谱空间中的坐标量，与光波长无关 ( $k_0 \neq k_3$ )。

即使  $w$  相对于  $d_x$  并不足够小，只要是远场成像即  $d_x/f \ll 1$ ，且  $k_0$  不大，则有：

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{w(k_x - k_{3x})}{2} \right|_{\max} = \left| \frac{w(k_0 x - k_3 x_0)}{2f} \right|_{\max} = \left| \frac{w(k_0 d_x/2 - k_3 x_0)}{2f} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{w k_y}{2} \right|_{\max} = \frac{w k_0 d_y}{2f} \ll 1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

在该条件下，上式(3.8)中的二维 sinc 函数的值趋近 1，此时该式可理解为对原  $H(x, y)$  的采样全息图  $H_s(x, y)$  上，无数个点光源所发出的平面波，在重现平面的叠加。当进一步设定小方格尺寸为：

$$w = \frac{2\pi}{k_{3x}} l = \frac{2\pi l}{k_3 \cdot \sin \theta} = \frac{l \cdot \lambda_3}{\sin \theta}, \quad (l \in \mathbb{N}^+) \quad (3.10)$$

时，重现光所引入的斜射因子  $e^{ik_{3x}x_m} = e^{ik_3 \cdot \sin \theta \cdot m \cdot w} = e^{i2\pi l \cdot m} = 1$  将消失，此时重建像的采样光场分布为：

$$\psi_s(x, y) \approx \frac{w^2}{4\pi^2} \sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}} \cdot e^{-i[k_x x_m + k_y y_n]} \quad (3.11)$$

将其与式(3.7)对比，可见二者拥有相同的采样部分  $\sum_{m,n} A_{mn} \times e^{i\phi_{mn}}$ 。

在三维非线性全息中，当周期性平面结构的尺寸  $w = 4 \mu\text{m}$  和重现光即倍频光波长  $\lambda_3 = 0.859 \mu\text{m}$  (3.3 节会进一步修订为  $0.85 \mu\text{m}$ ) 给定后，由于重现光即倍频光在正空间中是正入射调制区域，因此式(3.10)中的  $l$  不论如何取值，哪怕不取正整数而取分数或无理数，此时正入射所引入的额外相位因子均因  $\sin \theta = 0$  而为 1。因此在三维非线性全息的正入射情况下， $l$  可以任意取值，且  $l$  与  $\sin \theta$  的值均与倒格矢  $\mathbf{G}_{2,l,0}$  的方位无关，波长  $\lambda_3$  与  $l$  也不必满足式(3.10)的关系，因其右侧分母  $\sin \theta = 0$ 。

### 3.2.1.3 一种 $H_b(x, y)$ 即二元振幅型傅里叶全息图的开孔策略

基于对  $H(x, y)$  划分完了虚拟网格后的采样傅里叶全息图  $H_s(x, y)$ ，现取另一形状和尺寸均与  $H_s(x, y)$  相同的不透光光阑，并也划分好与之相同尺寸的虚拟网格即  $M \times N$  ( $M = N$ ) 个  $w \times w$ ，在其每一个小方格中，以其中心  $(x_m, y_n) = (m \cdot w, n \cdot w)$  为小方格坐标系原点，对每一个小方格中的不透光材料进行开孔，接下来将推出开孔面积  $a_{mn} =$

$p_{mn} \times q_{mn}$  正比于透光振幅  $A_{mn}$ ，则可通过调整每一个孔的面积以控制该小方格所代表的点光源光场振幅，进而调控整个二维全息面的光场振幅分布  $A(x, y)$ 、 $A_{mn} = A(x_m, y_n)$ ；而调整每个矩形孔中心相对于小方格中心的( $x$  向)位移  $\alpha_{mn}$ ，即可单独改变每个小方格内次波源的初始相位，进而控制  $\phi(x, y)$ 、 $\phi_{mn} = \phi(x_m, y_n)$  即  $H_b(x, y)$  的二维相位分布。

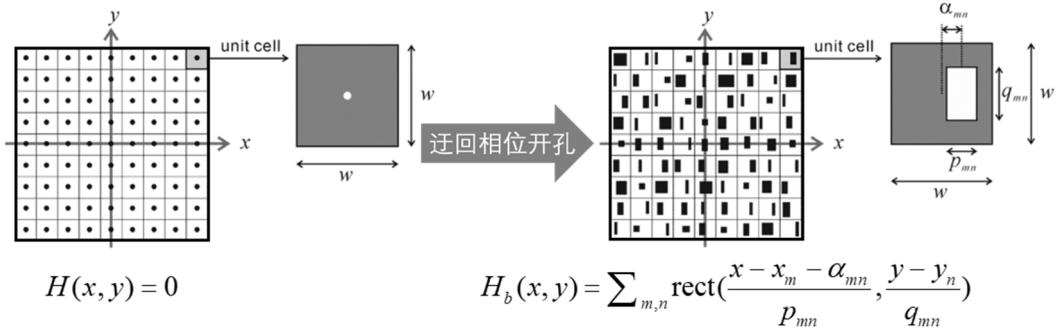


图 3.9 迂回相位二元振幅全息图示意图

对于二元振幅型傅里叶全息图  $H_b(x, y)$ ，即阵列式开孔的光阑，其透过率函数即为其复振幅分布，同时也为其振幅分布，因其相位分布是均匀的：

$$H_b(x, y) = \sum_{m,n} \text{rect}\left(\frac{x - x_m - \alpha_{mn}}{p_{mn}}, \frac{y - y_n}{q_{mn}}\right) \quad (3.12)$$

在相同的斜射等振幅单色平面重现光  $\psi_r(x, y) = e^{ik_3 x}$  的照射下，重建像所在的平面的复振幅分布为：

$$\begin{aligned} \psi_b(x, y) &= \mathcal{F}\{H_b(x, y)\psi_r(x, y)\} = \sum_{m,n} \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x - x_m - \alpha_{mn}}{p_{mn}}, \frac{y - y_n}{q_{mn}}\right)e^{ik_3 x}\right\} \\ &\xrightarrow{\text{位移定理}} \sum_{m,n} \frac{1}{4\pi^2} \left\langle e^{i[(k_x - k_{3x})x + k_y y]} \left| \text{rect}\left(\frac{x - x_m - \alpha_{mn}}{p_{mn}}, \frac{y - y_n}{q_{mn}}\right) \right. \right\rangle \\ &\xrightarrow{\text{延迟定理}} \sum_{m,n} \frac{1}{4\pi^2} e^{-i[(k_x - k_{3x})(x_m + \alpha_{mn}) + k_y y_n]} \left\langle e^{i[(k_x - k_{3x})x + k_y y]} \left| \text{rect}\left(\frac{x}{p_{mn}}, \frac{y}{q_{mn}}\right) \right. \right\rangle \\ &\xrightarrow{\text{相似性定理}} \sum_{m,n} \frac{p_{mn} q_{mn}}{4\pi^2} e^{-i[(k_x - k_{3x})(x_m + \alpha_{mn}) + k_y y_n]} \left\langle e^{i[p_{mn}(k_x - k_{3x})x + q_{mn}k_y y]} \left| \text{rect}(x, y) \right. \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,n} p_{mn} q_{mn} e^{ik_{3x} x_m} e^{-i(k_x - k_{3x})\alpha_{mn}} e^{-i[k_x x_m + k_y y_n]} \frac{\sin \frac{p_{mn}(k_x - k_{3x})}{2}}{\frac{p_{mn}(k_x - k_{3x})}{2}} \frac{\sin \frac{q_{mn}k_y}{2}}{\frac{q_{mn}k_y}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,n} p_{mn} q_{mn} e^{ik_{3x} x_m} e^{-i(k_x - k_{3x})\alpha_{mn}} e^{-i[k_x x_m + k_y y_n]} \text{sinc}\left[\frac{p_{mn}(k_x - k_{3x})}{2}, \frac{q_{mn}k_y}{2}\right] \quad (3.13) \end{aligned}$$

由于在虚拟网格的每个小方格内所开孔径必小于小方格边长即  $p_{mn}, q_{mn} < w$ ，则根据式(3.9)的理由，上式中 sinc 函数值趋近于 1；再依式(3.10)对光阑的虚拟网格尺寸设置与  $H_b(x, y)$  的网格相同的边长  $w_l = 2\pi l/k_{3x}$ ，则上式中倾斜因子  $e^{ik_{3x} x_m} = 1$  也可略去；又因  $d_x/x_0 \ll 1$ ，而有

$$\frac{|k_x|_{\max}}{k_{3x}} = \frac{(k_0 d_x/2)/f}{k_3 x_0/f} = \frac{k_0 d_x/2}{k_3 x_0} \ll 1 \quad (3.14)$$

所以式(3.13)中的 $e^{-i(k_x-k_{3x})\alpha_{mn}} \approx e^{ik_{3x}\alpha_{mn}}$ ，于是代入开孔面积 $a_{mn} = p_{mn}q_{mn}$ 有：

$$\psi_b(x, y) \approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m,n} a_{mn} e^{ik_{3x}\alpha_{mn}} e^{-i[k_x x_m + k_y y_n]} \quad (3.15)$$

对比式(3.11)得：

$$\begin{cases} a_{mn} = w^2 A_{mn} \\ k_{3x} \alpha_{mn} = \phi_{mn} \end{cases} \quad (3.16)$$

代入 $w = 2\pi l/k_{3x}$ 得：

$$\begin{cases} a_{mn} = w^2 A_{mn} \propto A_{mn} \\ \alpha_{mn} = \frac{\phi_{mn}}{k_{3x}} = \frac{\phi_{mn}}{2\pi} \frac{w}{l} \propto \phi_{mn}, \alpha_{mn} \in \frac{[-\pi, \pi]}{2\pi} \frac{w}{l} = [-\frac{w}{2l}, \frac{w}{2l}], (l \in \mathbb{N}^+) \end{cases} \quad (3.17)$$

其中孔的位移量 $\alpha_{mn}$ 不仅受到式(3.17)的限制，还要用 $l$ 的取值，或 $p_{mn}$ 配合 $\phi_{mn}$ 的取值，或 $\phi_{mn}$ 的取值范围，来保证小孔边界没有超出虚拟周期性小方格的边界，即

$$|\alpha_{mn}| + \frac{p_{mn}}{2} \leq \frac{w}{2} \Rightarrow |\alpha_{mn}| \leq \frac{w - p_{mn}}{2} \quad (3.18)$$

在实际中采用设置 $l=2$ ，以及 $p_{mn}=1.5 \mu\text{m}$ 来保证上式的成立。

而孔的面积 $a_{mn}$ 暗示光阑上所开的孔不需要是严格的矩形孔，可以是圆孔、椭圆孔甚至任何其他形状，但其面积必须是 $a_{mn}$ ，同时其中心相对于小方格的中心的位移也必须是上式所确定的 $\alpha_{mn}$ 。该式便给了我们对不透光正方形光阑设计每个开孔的位移和开孔面积的依据。

### 3.2.2 三维迂回相位编码过程

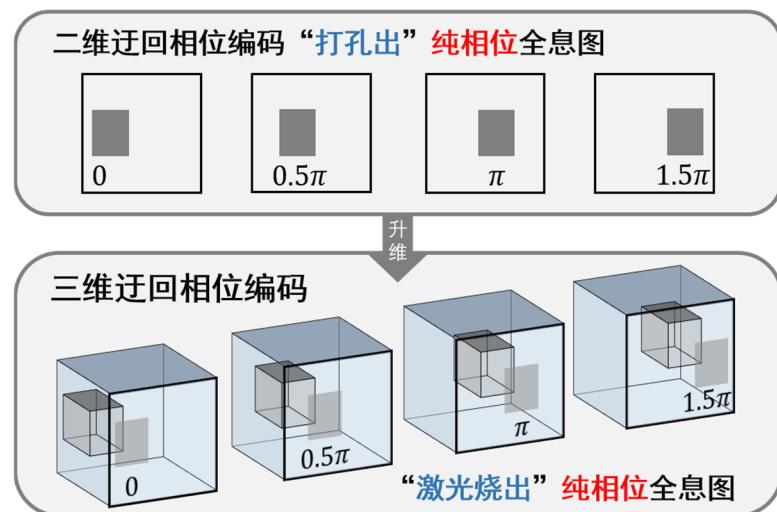


图 3.10 三维迂回相位编码与二维迂回相位编码的异同

三维光子晶体的逐层编码便采用了二维迂回相位开孔策略，可认为其正空间中

480 层  $0.1\text{ }\mu\text{m}$  厚的  $x-o-z$  向  $16\times 16$  个  $4\times 4\text{ }\mu\text{m}$  的正方形小方块，分别对应了  $M=N=16$ 、 $w=4\text{ }\mu\text{m}$ 、 $d_x=d_y=64\text{ }\mu\text{m}$ ，每一层的相位分布，即式(3.17)或式(3.7)中的  $\phi_{mn}$ ，也即生成 3.1.4.2 节中图 3.6 中右侧 16 张  $16\times 16$  像素的角谱振幅分布图的，下面的 16 张  $16\times 16$  像素的纯相位分布图中，某张图的二维相位分布：

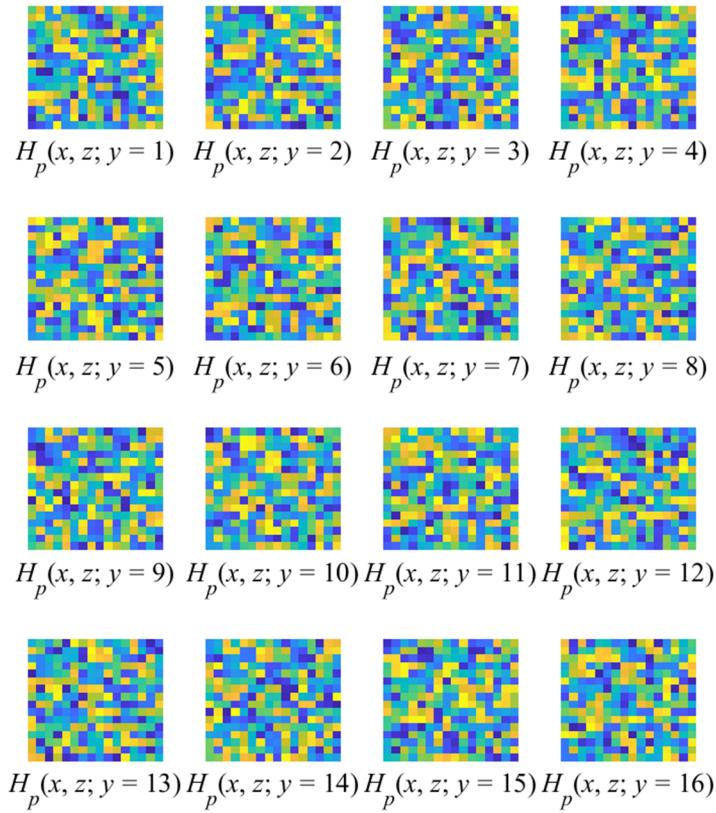


图 3.11 三维 GS 算法所生成的正空间二阶非线性系数的三维相位分布

在 480 层待编码的平面中，处于同一个  $\Lambda_y=3\text{ }\mu\text{m}$  内的 30 层厚  $0.1\text{ }\mu\text{m}$  的待编码平面，均共用同一个  $x-o-z$  面的二维相位分布，即共用图 3.11 中某一张  $16\times 16$  像素的图片。但不能 30 层中每一层都按照相应的二维相位分布进行编码和加工，因为如果这样做，则  $y$  向的结构周期便不再是  $\Lambda_y=3\text{ }\mu\text{m}$ ，而是对于各  $(x, z)$  没有统一的周期可言。受到一维准相位匹配结构在一个周期内的正负畴宽度相等时基频光到倍频光的转换效率最高的启发， $y$  向一个  $\Lambda_y=3\text{ }\mu\text{m}$  周期内的编码与未编码、加工与未加工的层状结构宽度比应为 1:1，即前  $1.5\text{ }\mu\text{m}$  内的 15 层编码，后  $1.5\text{ }\mu\text{m}$  内的 15 层不编码，或反之。否则倍频效率会降低，以致最终全息成像图案整体亮度下降。仿真也证实了当编码占空比为 1:4 和 1:1 时，下一节模拟的远场成像整体光强没有占空比为 1:2 时强。

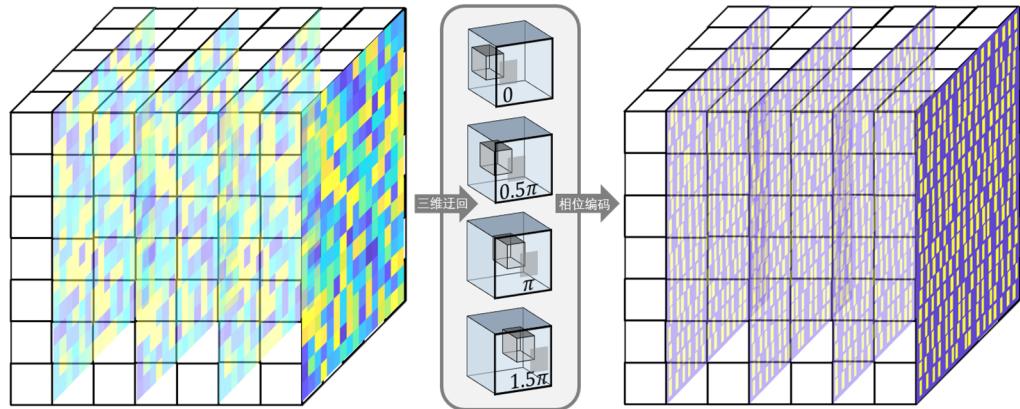


图 3.12 三维迂回相位编码将三维 GS 算法生成的纯相位体全息图转为实际晶体结构

对于  $y$  向一个周期内，前半个周期中的每一层，由于其不是不透光的光阑因而对其进行的迂回相位编码操作，不是对其内每个  $4 \times 4$  的小方格进行开孔，而是对其进行飞秒激光直写，本身应开孔的位置现经飞秒激光短暂作用后，相应位置区域的二阶非线性系数  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  的值会降低 15%，因此式(3.17)中的  $a_{mn}$  在三维非线性全息中的含义并非开孔面积，而是激光光斑在  $x-o-z$  面的烧灼面积，由于已经证实开孔形状不一定需要为矩形，因此即使激光光斑在  $x-o-z$  方向的横截面是圆形或椭圆形，也不影响式(3.17)中相应结论的成立。而激光打击位置即光斑中心相对于  $x-o-z$  向平面周期结构即小正方形中心的  $x$  向偏移量  $\alpha_{mn}$ ，符合式(3.17)的约束。

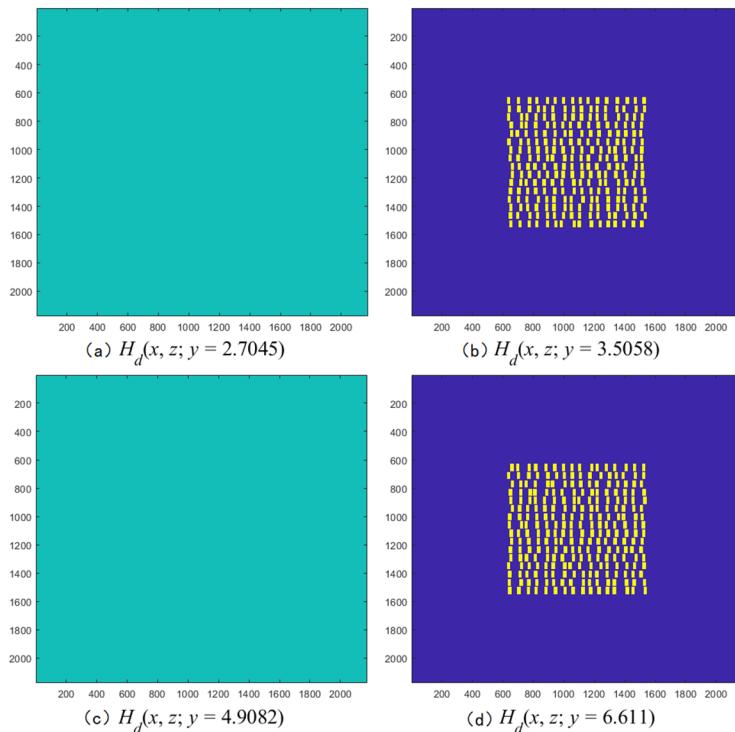


图 3.13 三维迂回相位编码的各层二维开孔结构（左列相对右列为同一周期内的非编码面）

我们的设备所产生的飞秒激光光斑直径 $\sim 1.2 \mu\text{m}$ , 纵深 $5\sim 10 \mu\text{m}$ , 因此设定了 $p_{mn} = 3.5 \mu\text{m}$ 、 $q_{mn} = 1.5 \mu\text{m}$ 的矩形孔为编码单元, 面积与激光光斑纵截面面积相仿, 且宽度较窄, 满足式(3.18), 以至小孔虽在 $x$ 方向有位移, 但总会落在 $4\times 4$ 小方格中。

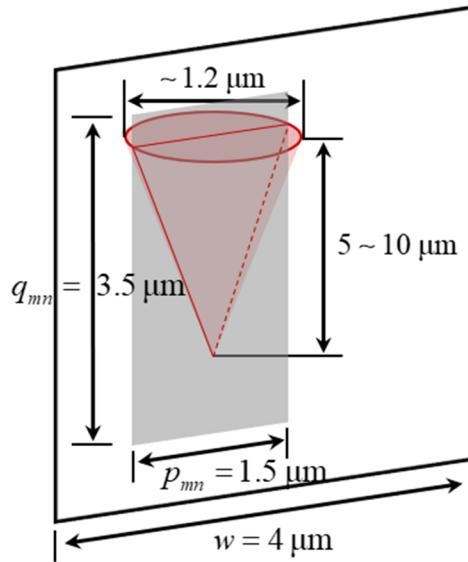


图 3.14 三维飞秒激光光斑形状及其侧面相对于迂回相位编码小孔的尺寸

由于加工系统的平移理论精度为 $10 \text{ nm}$ , 因此不仅即将 $\Lambda_y = 3 \mu\text{m}$ 分成了 30 层, 还在 $x, z$ 向上将 $\Lambda_x = \Lambda_z = 4 \mu\text{m}$ 分别分成了 60 层, 调制区域在 $x, z$ 方向一共被划分为了 960 层 (见下图光斑分布区域的横纵向尺寸), 因此正空间中 $960\times 480\times 960$ 个最小移动步长/增量所构成的密集细网格, 能够保证孔中心的实际位移量 $\alpha_{mn}$ 误差较小, 其所代表的相位值就较精确, 且位移和相位可近似连续取值。由于仿真中设置了 $l=2$ 使得 $\alpha_{mn} \in [-w/2l, w/2l] = [-w/4, w/4] = [-1, 1] \mu\text{m}$ , 而在该区间内有 30 层, 因此对位移量 $\alpha_{mn}$ 和相位 $\phi_{mn}$ 的分级为 30 级, 即 $[-15, 15]/15 \times \mu\text{m} \leftrightarrow [-\pi, \pi]$ 。

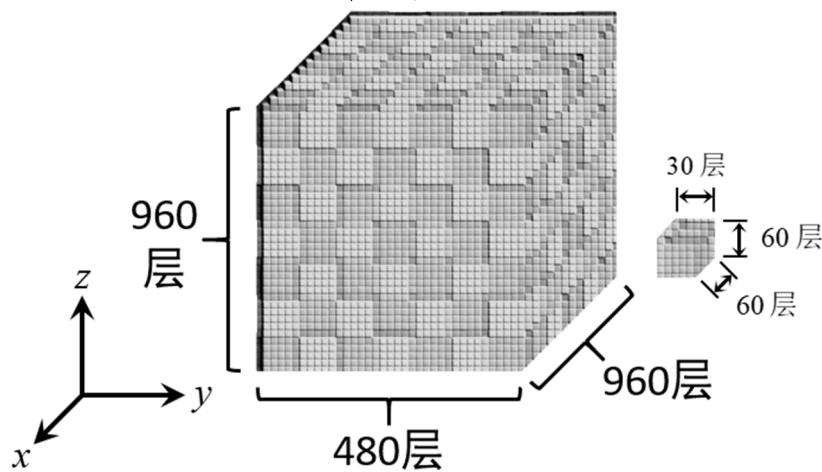


图 3.15 三维飞秒直写加工系统平移网格

上述将小孔面积取值与光斑面积相等，并基于此以确定方形小格子尺寸  $w \times w$  的设计，是为了在加工空间范围  $d_x \times d_y$  固定的条件下，实现最大的小格子数  $M \times N$ ，这样目标图像的像素和容量、信息便可更大，目前因加工所用飞秒激光光斑面积无法再小， $16 \times 16$  像素的目标图片已经是最大尺寸了。并且由于飞秒激光光斑既不能更小，在确定了最小  $w \times w$  尺寸后光斑又不能更大，所以光斑即小孔的面积无法改变，则式(3.17)中的式一即  $a_{mn}$  就无法改变，以至于振幅分布  $A_{mn}$  就无法改变，这就要求必须使用三维 GS 算法得出傅里叶体全息图的纯相位分布，并只能用上式(3.17)的式二，即孔位移量分布来代表相位分布，无法利用和表示傅里叶体全息图中的振幅分布信息。

若将开孔面积取得比光斑面积大，则虚拟小方格尺寸  $w \times w$  也会增大，导致像素  $M \times N$  降低，允许加载的目标图片像素就会降低；但这样做有个好处，即小孔面积所对应的大光斑面积，将由许多小光斑面积的交集所得，而不是一个小光斑的直接结果，是积分效应；因此此时不仅小孔形状所对应的大光斑形状，可与矩形差别不大、可以是任意形状，而且可以通过调控小孔即大光斑大小，以调控傅里叶体全息图振幅分布，这样便不再需要通过三维 GS 算法，计算等效于原傅里叶体全息图的三维复振幅分布的纯相位全息图的三维相位分布。

### 3.3 三维光子晶体各面倍频光光强、相位分布及远场成像仿真

3.1 节通过三维 GS 算法完成了从目标二维图像到实空间中晶体调制区域内三维相位分布的转化；3.2 节利用三维迂回相位编码法将 3.1 节所得的三维相位分布转换为了三维光子晶体调制区域内的实际刻写的结构分布；该 3.3 节将验证 3.2 节所编码和刻写完毕的三维光子晶体，其结构是否能实现基频光到倍频光的转换的同时，倍频光在远场的成像的特定衍射级次的光场分布，也为 3.1 节的目标图像。

在仿真程序的第三部分中，将第二部分所生成的 480 层二维结构分布，所对应的 480 个 mat 文件，以及 1 个储存其他参数信息的 mat 文件，作为第三个程序，即三维光子晶体内光强分布，以及远场光强分布模拟程序的输入，所得的输出即基频光场在晶体内既实现倍频的同时，又被所经过的  $64 \times 48 \times 64 \mu\text{m}$  的调制区域调制了其倒空间二维频谱信息后的倍频光场，出射晶体并经夫琅禾费衍射后所得的远场光强分布。

### 3.3.1 三维光子晶体两侧面的倍频光强分布、相位分布

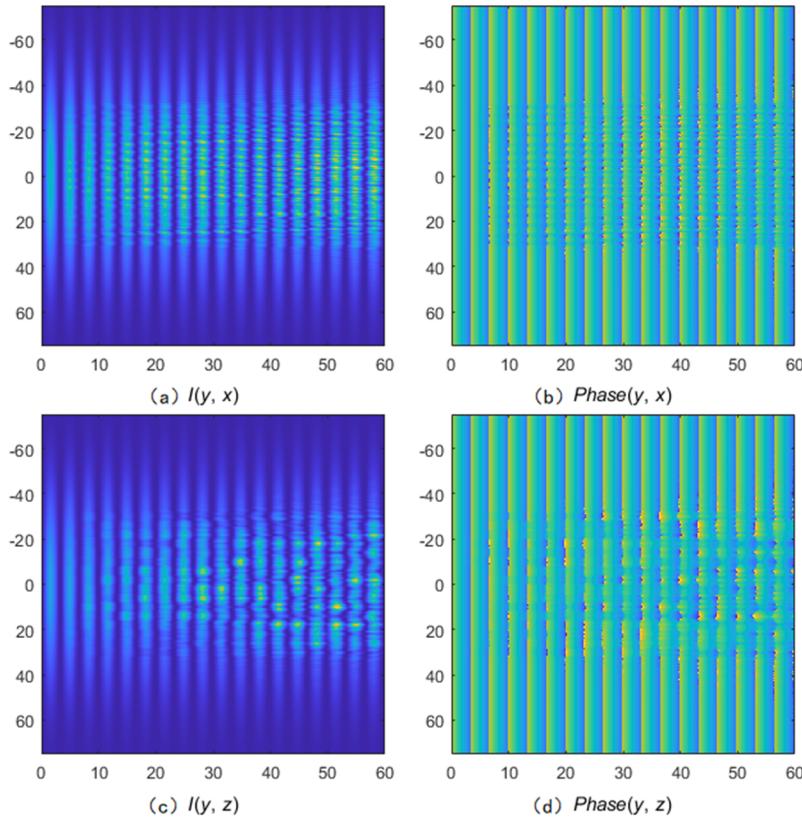


图 3.16 晶体中轴面  $y-o-x$  面（上排）和  $y-o-z$  面（下排）的光强分布和相位分布

图 3.13 和图 3.16 的横纵坐标单位均为  $\mu\text{m}$ ，图 3.16 中带光斑点的区域在通光方向的调制区域厚度，对应横轴即  $y$  向的  $48 \mu\text{m}$ ，调制区域在纵轴即  $x$  向和  $z$  向的宽度和高度为  $64 \mu\text{m}$ ，除此之外  $y$  向还空余了  $12 \mu\text{m}$ ， $x$  向和  $z$  向也分别剩下  $86 \mu\text{m}$ ，是晶体未调制区域；调制区域与视野区域的尺寸占比  $64:150 = 960:2200$  与图 3.13 相同。

以上四张图的  $y$  向光强和相位起伏周期相同且大致为  $3.33 \mu\text{m}$ ，这可通过查看式 2.81 或 2.82 在  $\mathbf{L}_{\hat{k}_3}, \mathbf{k}_3$  指向  $y$  向时的周期得出：该方向调制区域的光强起伏周期与非调制区域的大致相同，毕竟所选级次的倒格矢  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  与细节倒格矢  $\mathbf{q}_{l_x,6,l_z}$  的大小，相对于波矢失配量  $\Delta\mathbf{k}$  而言比较小，所以不用考察  $\Delta\mathbf{k}_o$  对应的调制区域周期，而是直接考察  $\Delta\mathbf{k}$  所对应的非调制区域的光强起伏周期，可见理论计算结果与实际仿真结果吻合：

$$\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}_{\hat{k}_3}}{2} = \pi \Rightarrow L_{\hat{k}_3} = \frac{2\pi}{|\Delta\mathbf{k}_y|} = \frac{2\pi}{k_{3y} - k_{1y} - k_{2y}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0.85/2/2.2909} - 2 \times \frac{2\pi}{0.85/2/1.628}} = 3.318 \mu\text{m} \quad (3.19)$$

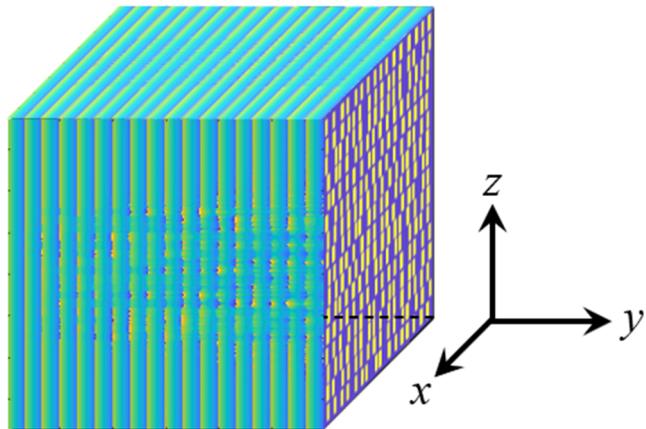
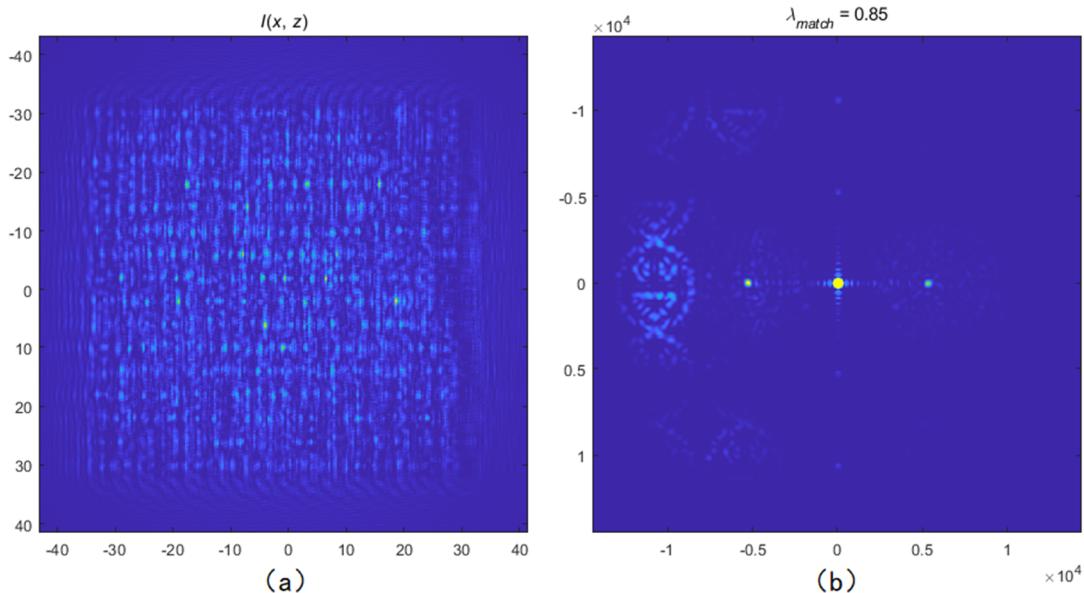


图 3.17 二级衍射成像时晶体侧端面倍频光相位分布图

### 3.3.2 三维光子晶体后端面与远场倍频光强分布

图 3.18 晶体后端面  $x-o-z$  面光强分布 (a) 及  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  所对应的倍频光远场二级衍射成像 (b)

选择不同的基波波长，可匹配到不同的衍射级  $m_x, m_y, m_z$  或倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  所对应的笑脸图案。此前在 3.1 节中暂时确定的  $0.859 \mu\text{m}$  的基波波长，不一定准确匹配  $\mathbf{G}_{2,1,0}$  该级倒格矢，需在  $0.859 \mu\text{m}$  附近改变波长查看远场成像中相应级次的目标图案是否是中部较亮，才能确定最终匹配该级倒格矢或衍射级次的基波波长，最终仿真得到的匹配波长为  $0.850 \mu\text{m}$ 。

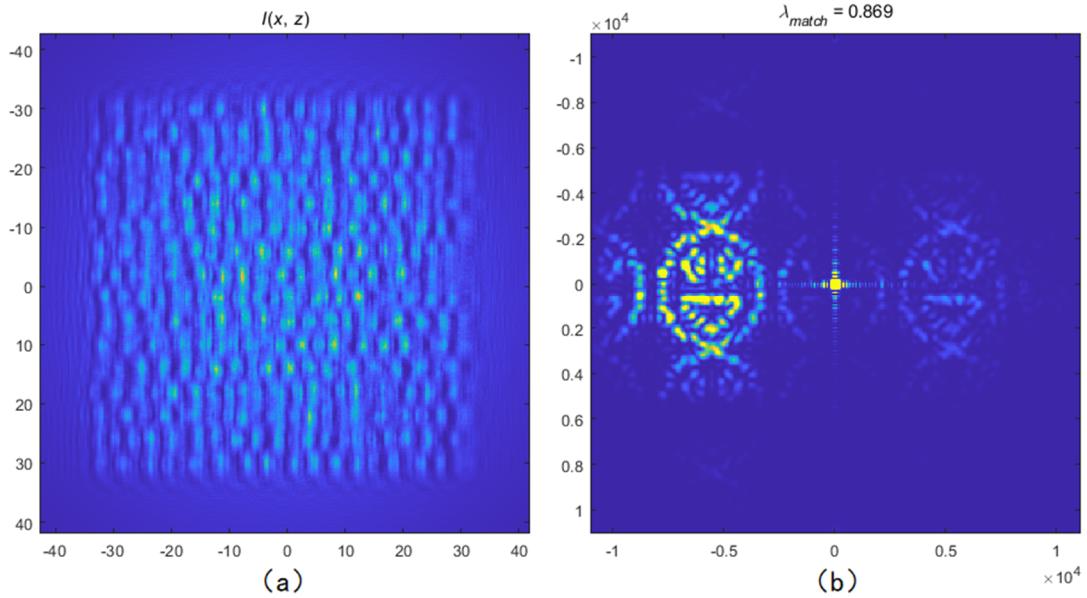
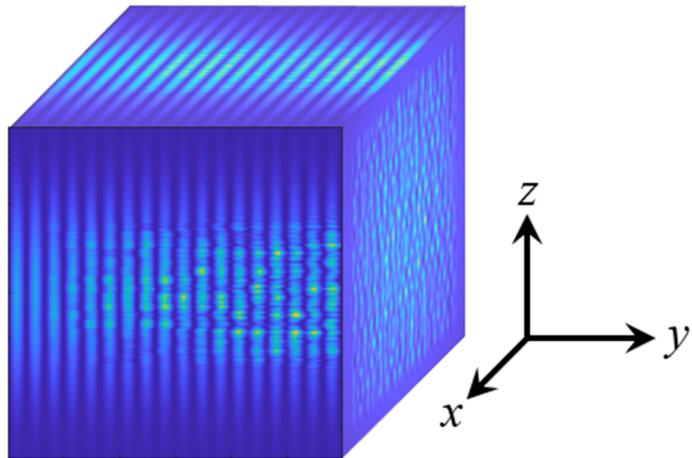
图 3.19  $\mathbf{G}_{1,1,0}$  所对应的倍频光远场一级衍射成像、晶体后端面光强分布

图 3.20 第(1,1,0)级次倍频光场在三维光子晶体三个端面的光强分布情况

之所以改变波长可以匹配不同的衍射级次，且不同衍射级的图案对应不同的远场  $x$  向位置，是因不同基波波长的晶体内倍频波矢曲面大小不同，导致波矢失配量不同，以至于起点固定在两倍晶体内基波波矢处、终点落在晶体内倍频光波矢曲面上的倒格矢  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  不同，则对应不同细节倒格矢  $\mathbf{q}_{l_x, l_y, l_z}$  的、大小与方向均在  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  即  $\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z}$  附近的波矢集  $\{\mathbf{k}_{3; m_x, m_y, m_z; l_x, l_y, l_z}\} = \{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} + \mathbf{q}_{l_x, l_y, l_z}\}$  的公有出射方向，便因  $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z} = 2\pi m_x / \Lambda_x \mathbf{i} + 2\pi m_y / \Lambda_y \mathbf{j} + 2\pi m_z / \Lambda_z \mathbf{k}$  即  $m_x, m_y, m_z$  的不同而不同，且  $0 < m_x = 1 < 2$  对应的  $\mathbf{k}_{3x; 1, 1, 0} = \mathbf{G}_{m_x} \Big|_{m_x=1} = 2\pi / \Lambda_x$ ，便会比  $m_x = 2$  对应的  $\mathbf{k}_{3x; 2, 1, 0} = \mathbf{G}_{m_x} \Big|_{m_x=2} = 4\pi / \Lambda_x$  偏  $x$  轴负向

即偏右<sup>①</sup>，同样比  $m_x = 0$  对应的  $\mathbf{k}_{3x;0,l_1,0} = 0$  偏左，这便解释了图 3.19 中拥有  $\mathbf{k}_{3;1,l_1,0}$  邻域内的波矢集  $\{\mathbf{k}_{3;l_1,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  的簇射倍频光集  $\{E_{3;1,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  所生成的一级衍射目标笑脸图，为何在二级衍射笑脸图像  $\{E_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  的右侧，同时又在零级衍射图像的左侧。

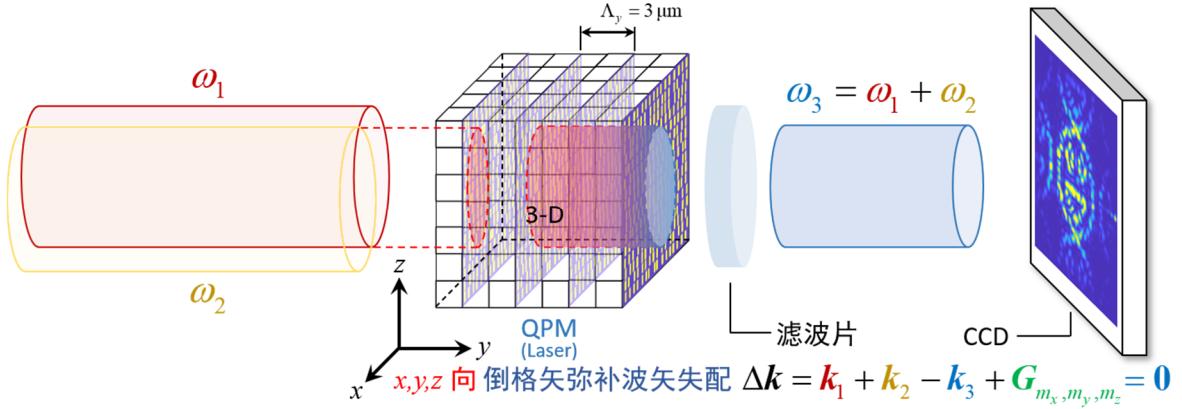


图 3.21  $\mathbf{G}_{1,1,0}$  所对应的倍频光远场一级衍射成像光路和过程示意图

而之所以一级衍射成像整体背景强度比二级衍射成像高，可以这样解释：据式(2.83)有  $|E_{3,m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}| \propto C_{m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}$ ，而据式(2.67)有：

$$C_{m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z} = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} B_{\Omega}(\mathbf{r}) e^{-i(G_{m_x,m_y,m_z} + q_{l_x,l_y,l_z}) \cdot \mathbf{r}} d^3 r \approx \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} \frac{\chi_{eff;\Omega}^{(2)}(\mathbf{r})}{\chi_{eff}^{(2)}} e^{-i(G_{m_x,m_y,m_z} + q_{l_x,l_y,l_z}) \cdot \mathbf{r}} d^3 r \quad (3.20)$$

则将三维 GS 算法所得的正空间相位分布代入上式会发现（从一维准相位匹配周期性结构的角谱分布图 2.4 可见一斑）：

$$C_{1,1,0;l_x,l_y,l_z} > C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z} \quad (3.21)$$

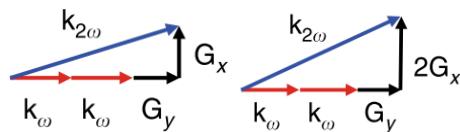


图 3.22  $\{C_{1,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  与  $\{C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  所对应的  $\{\mathbf{k}_{3;l_1,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  与  $\{\mathbf{k}_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  的大致方位<sup>[14]</sup>

即集合  $\{C_{1,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  内每一个元素的值都比集合  $\{C_{2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  内具有相同细节倒格矢元素的值更大。于是便有  $|E_{3;l_1,1,0;l_x,l_y,l_z}| > |E_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}|$ 。这样一来，图 3.19 的左图即携带结构倒空间一级衍射信息的正空间光强分布，便比图 3.18 的左图携带倒空间二级衍射

<sup>①</sup> 入射光入射方向和 y 轴正向均朝右，且从左往右看晶体后端面的 x-o-z 系的 x 轴朝右，则 x 轴插出纸面向外， $m_x, m_y, m_z$ 、 $\mathbf{G}_{m_x, m_y, m_z}$  与  $\mathbf{k}_{3;m_x, m_y, m_z}$  均参照该坐标系。对于最终成像的图像，其所参照的坐标系也为此坐标系。

信息的整体光强分布更强，再根据帕色渥定理或能量守恒定理， $m_x=1$  级与  $m_x=2$  级的晶体后端面光强分布，经过夫琅禾费衍射即一次傅里叶变换前后，二者在频域中的能量与其在空域中的能量相同，所以最终正空间中光强分布是一级衍射图像大于二级衍射图像。

还有一种不可忽略的因素会直接导致上述衍射级光强强弱关系： $\{\tilde{\mathbf{E}}_{3;m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}\}$  与  $\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{E}}_2$  的能流密度的交叠程度，会因  $\{\mathbf{k}_{3;m_x,m_y,m_z;l_x,l_y,l_z}\}$  相对于  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  的偏离程度的增加而降低，导致在晶体内有效倍频距离下降，进而导致倍频效率降低，以至最终相应级次  $m_x, m_y, m_z$  的倍频光集的强度下降，导致远场成像平均光强降低。而  $\{\mathbf{k}_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  比  $\{\mathbf{k}_{3;l,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  相对于  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  偏离得更严重，因此  $\{\mathbf{k}_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  所对应的  $\{\tilde{\mathbf{E}}_{3;2,1,0;l_x,l_y,l_z}\}$  整体光强较低，其远场成像图案也更暗，说明利用高阶倒格矢进行准相位匹配和实现非线性全息成像也有一定的走离效应。综合二者便可解释 2 级以上的衍射光强随级次的增加很快降低。

## 4 总结与展望

### 4.1 总结

本文先调研了基于二维准相位匹配结构的二维非线性菲涅尔全息，接着围绕基于三维准相位匹配结构的三维非线性傅里叶全息，探讨了以下内容：

先从非线性电磁介质中麦氏方程组的微分形式导出电场波动方程的最普遍形式，接着通过单色化参与混频的复色电场及介质中电磁相关的复色线性和非线性极化场、分离时间项、引入电磁非线性效应，得到三维空间中的含磁非线性电介质中的定态单色电场波动方程的最普遍形式；同时由于当完美相位匹配条件满足时，在磁各向同性介质中，不论介质是否是电各向异性的，波动方程的解均随着波动方程右侧非线性波源项值的减小而收敛于单色定振幅平面电磁波，为二阶非线性系数与一阶非线性系数均不为零的磁各向同性铌酸锂单轴晶体内定态波动方程的试探解的相位部分保持平面波解、振幅采用缓变振幅近似的常数变易法提供了理论依据。

而通过另一结论即电各向异性与电各向同性的磁各向同性非线性电介质中波动方程的解的形式相同，允许我们跳过各向异性的坎，直接在电磁各向同性的非线性电介质中的三维单色定态波动方程的基础上做文章；而为考虑波动方程的二阶和频波和倍频波解，方程右侧非线性波源项只保留二阶非线性极化过程生成的和频极化光，并利用克莱曼对称性、构建固定且特殊的实验几何场景和相应姿势的坐标系以计算有效二阶非线性系数、对波动方程两侧各矢量场保留相位地取模，得到标量场近似下的一维和三维的波动方程。接着由波动方程的标量形式导出描述三波混频的三个一维和三维的耦合波方程，给出了一维、三维完美相位匹配条件，以及相位不匹配时，随波矢失配的增加和频波振幅的振荡情况。

然后给出了非线性电介质的正常色散是波矢失配和完美相位匹配无法实现的原因，而为最大程度地利用铌酸锂晶体的最大二阶非线性系数张量分量  $d_{33}$  以及为实现倍频的同时还要成像，则无法使用铌酸锂晶体的双折射现象以弥补波矢失配量，为此必须采用准相位匹配技术。透过周期性电极化反转的一维准相位匹配结构的研究，发现结构的特定倒格矢可以补偿相应的波矢失配，以至于牺牲一点转换效率可以完成相位匹配过程；而考察飞秒激光直写的三维光子晶体中的准相位匹配机制，我们发现

$\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  经三维周期性调制的光子晶体可以从三个维度上弥补和频波生成过程中的波矢失配，并且三维标量波动方程并未限制和频波波矢方向，只限制了其大小，导致所有终点落在和频波波矢旋转椭球面上的结构倒格矢均可弥补相应方向上的波矢失配，以至三维光子晶体可以同时簇射波矢方向不同的携带结构角谱信息的二阶和频光集，说明三维光子晶体具有实现三维非线性傅里叶全息的能力。

继证明了三维光子晶体可以实现三维非线性全息后，由于飞秒激光光斑大小暂无法自由调整和均一分布、和频光集携带的是结构角谱信息，以及远场成像相对于近场成像的优势，我们对三维非线性全息采取了傅里叶体全息技术，基于目标图像的远场光强分布，考虑给定的衍射级次所对应的倒格矢和细节倒格矢平面，匹配了基频光波长并初始化结构的三维角谱分布后，通过三维 GS 算法，逆向设计出了三维光子晶体的结构正空间相位分布。

为将所得的三维相位分布刻写为三维光子晶体的实际  $\chi_{eff}^{(2)}(\mathbf{r})$  分布结构，我们利用三维迂回相位编码算法，将三维 GS 算法生成的纯相位体全息图，转换为 240 层中每层飞秒激光直写的光斑坐标  $x$  向偏移量阵列，并且由于坐标偏移量与相位的分级数为 30 级，实现了对三维光子晶体的多值化准连续编码。在这样的高坐标移动精度和正确的设计思路下，所编码完成的结构在远场数值模拟仿真中成功实现了准相位匹配过程即基频光到倍频光集的转换，并得到了倍频光集在三维光子晶体后厘米级光屏上的远场衍射所成目标像，即只利用同一个三维光子晶体，同时实现了二次谐波的生成和三维非线性全息编码成像，完成了三维非线性傅里叶计算体全息全过程。

## 4.2 展望

二阶非线性系数经空间调制的非线性光子晶体被广泛用于完成准相位匹配过程以实现激光变频，周期性极化的铌酸锂晶体便是其中最受欢迎的非线性光子晶体之一。自从 1998 年，非线性光子晶体的概念在理论上从一维被拓展到二维，许多有趣的非线性光学效应，如级联非线性光学过程、非线性切连科夫辐射、非线性 Talbot 自成像，以及量子路径纠缠等，在过去的二十年内被广泛地研究和报道了<sup>[30-37]</sup>。

随着准相位匹配理论和飞秒激光直写等加工技术的发展，非线性光子晶体从二维拓展到三维，2018 年，最后一个空间维度的突破允许我们从三个维度上实现全方位的准相位匹配。基于二阶非线性系数在三个维度上均被调制的三维光子晶体，本文在完成三维准相位匹配过程的同时，实现了三维非线性全息编码成像，展示了三维光子

晶体在三维非线性远场傅里叶计算体全息成像方向上的应用之一。

本文在技术上可优化的地方至少还有两处，一是加工精度中的位移精度远远高于光斑大小的精度，即机械结构的最小位移步长远小于飞秒激光光斑最小直径。在本文的第三章中，三维迂回相位编码的逐层开孔的小孔面积均采用光斑最小面积，是为了实现加工平台所允许的最大像素尺寸  $16 \times 16$  像素的目标物光场输出成像，为此只能用三维 GS 算法反向生成与目标图像的复振幅全息图效果相似的纯相位全息图，但毕竟飞秒激光光斑最小面积的不可变所导致的傅里叶全息图振幅部分的丢失，不可避免地会降低最终的远场重建像的成像质量。

为此，为了使得光斑面积可变，在光斑最小面积不变的情况下，可尝试在相同尺寸的总调制区域内设计更大的周期结构以开面积大于光斑面积的孔，使得大光斑面积为小光斑面积的交集，以生成可变面积的孔，这样便可不经三维 GS 算法生成纯相位全息图而直接采用目标物像的傅里叶变换设计三维光子晶体结构，以提高成像质量。

但这样会牺牲目标图像的像素即尺寸大小。因此接下来技术上应努力的方向是减小飞秒激光光斑直径的同时保持其能量密度不降低太多，使得相同的周期结构内擦除二阶非线性系数的程度即调制深度不变，但加工区域面积可变，以通过擦除区域中心位移量阵列调制正空间三维光子晶体内非线性全息图相位分布的同时，连同其三维振幅分布也一并调制，实现在光子晶体内直写目标物的三维复振幅体全息图。即使保持现有设计思路不变，减小飞秒激光光斑面积也可提高目标物像的像素尺寸和分辨率。

第二个可优化的目标点是在三维 GS 算法上，在叠次傅里叶变换的每次傅里叶变换到角谱分布的迭代之前对正空间中的复振幅全息图所加入的振幅分布限制不一定要全空间的分布都置 1，可以随着迭代次数的增加，循序渐进地从弱振幅限制到强振幅限制，这样所收敛到的纯相位全息图应更接近全局最优解，则其作用于重现倍频光后所还原得到的倍频光的正空间远场分布的成像质量理应会更好。

而在第三章的波长匹配一节，也暗示可以将不同目标图像分别置于不同级次的倒格矢所指向的倒格子，以及不同的细节倒格矢  $x-o-z$  平面上，则可利用一次电光效应，对三维非线性晶体外加不同大小的静电场，改变其一阶非线性系数即折射率的大小，从而改变晶体内基频光的波长和波矢曲面半径，以至于匹配到不同级次的倒格矢和细节倒格矢，出射不同波长的同频同颜色倍频光集，在远场复原不同的目标重建像。

另外，在同时实现了三维准相位匹配和三维非线性全息成像之余，还可以考虑优化目标结构，在实现准相位匹配完成基频光到倍频光的转换的同时，完成对倍频光束

的整形，并用整形后的具有特定波前或波形的倍频光束，实现三维非线性全息成像。这样便更加体现出三维光子晶体全方位调控光场的潜力之大，不仅能分别实现多种不同类型的光场操纵功能，最难能可贵的是在同一块三维光子晶体内同时实现三种及以上的光场调控技术。当一晶多用达到一定程度后，经三维非线性光子晶体调制后的出射高度有序的非线性光场所蕴含的多维信息量将远远大于相同能量下，只蕴含振幅和相位信息的普通激光光场，预示着三维光子晶体在应用层面的广阔前景；而本文所研究的三维非线性全息只是三维非线性光子晶体在非线性全息方向上的应用之一。

当非线性光子晶体的调制维度和准相位匹配维度提高到三维后，以前受技术限制不能实施甚至无法想象的点子现在都可基于三维非线性光子晶体进行深深浅浅的尝试，这或多或少印证了安德森前辈的那句“More is different”，以及法拉第先生的“新生的婴儿”一说。

## 参考文献

- [1] Maiman T H . Stimulated optical radiation in ruby[J]. *Nature*, 493–494 (1960).
- [2] Franken P A, Ward J F Optical harmonics and nonlinear phenomena[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1963, 35(1): 23.
- [3] Armstrong, J. A., Bloembergen, N., Ducuing, J. & Pershan, P. S. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric. *Phys. Rev.* **127**, 1918–1939 (1962).
- [4] Miller R C. Optical second harmonic generation in piezoelectric crystals[J] *Applied Physics Letters*, 1964, 5(1): 17-19.
- [5] Myers L E, Bosenberg W R, Eckardt R C, et al. Multimigrating quasi-phase-matched optical parametric oscillator in periodically poled LiNbO<sub>3</sub>[J]. *Optics letters*, 1996, 21(8): 591-593.
- [6] Myers, L. E. et al. Quasi-phase-matched optical parametric oscillators in bulk periodically poled LiNbO<sub>3</sub>. *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 2102–2116 (1995).
- [7] Zhu, S., Zhu, Y. Y. & Ming, N. B. Quasi-phase-matched third-harmonic generation in a quasi-periodic optical superlattice. *Science* **278**, 843–846 (1997).
- [8] Chen, B. Q., Zhang, C., Hu, C. Y., Liu, R. J. & Li, Z. Y. High-efficiency broadband high-harmonic generation from a single quasi-phase-matching nonlinear crystal. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 083902 (2015).
- [9] Xu, T. X. et al. Three-dimensional nonlinear photonic crystal in ferroelectric barium calcium titanate. *Nat. Photonics* **12**, 591–595 (2018).
- [10] Xu, T. et al. A naturally grown three-dimensional nonlinear photonic crystal. *Appl. Phys. Lett.* **108**, 051907 (2016).
- [11] Berger, V. Nonlinear photonic crystals. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4136-4139 (1998).
- [12] Kroesen, S., Tekce, K., Imbrock, J. & Denz, C. Monolithic fabrication of quasi phase-matched waveguides by femtosecond laser structuring the  $\chi^{(2)}$  nonlinearity. *Appl. Phys. Lett.* **107**, 101109 (2015).

- [13] Wei, D., Wang, C., Wang, H. et al. Experimental demonstration of a three-dimensional lithium niobate nonlinear photonic crystal. *Nature Photon* **12**, 596–600 (2018).
- [14] Wei, D., Wang, C., Xu, X. et al. Efficient nonlinear beam shaping in three-dimensional lithium niobate nonlinear photonic crystals. *Nat Commun* **10**, 4193 (2019).
- [15] Keren-Zur, S., Ellenbogen, T. A new dimension for nonlinear photonic crystals. *Nature Photon* **12**, 575–577 (2018).
- [16] X. Hong, B. Yang, C. Zhang, Y Qin, and Y. Zhu. "Nonlinear Volume Holography for Wave-Front Engineering," *Phys. Rev. Lett.* **113**. 163902 (2014).
- [17] Zhang, J., Zhao, X., Zheng, Y., Li, H. & Chen, X. Universal modeling of second-order nonlinear frequency conversion in three-dimensional nonlinear photonic crystals. *Opt. Express* **26**, 15675–15682 (2018).
- [18] Bahabad, A. & Arie, A. Generation of optical vortex beams by nonlinear wave mixing. *Opt. Express* **15**, 17619–17624 (2007).
- [19] Lee, W.-H. Binary computer-generated holograms. *Appl. Opt.* **18**, 3661–3669 (1979).
- [20] Kroesen, S., Tekce, K., Imbrock, J. & Denz, C. Monolithic fabrication of quasi phase-matched waveguides by femtosecond laser structuring the  $\chi^{(2)}$  nonlinearity. *Appl. Phys. Lett.* **107**, 101109 (2015).
- [21] S. Janz *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **65**, 216 (1994).
- [22] J. P. Bouchard *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 4247 (2000).
- [23] K. Zeaiter *et al.*, *Opt Lett.* **28**, 911 (2003).
- [24] D. Artigas, E. U. Rafailov, P. Loza-Alvarez & W. Sibbett, *IEEE J. Quantum Electron.* textbf{40}, 1122 (2004).
- [25] P. G. Kazansky, V. Pruneri & P. S. J. Russell, *Opt. Lett.* **20**, 843 (1995).
- [26] A. Rose & D. R. Smith, *Phys. Rev. A* **84**, 013823 (2011).
- [27] Magel, G. A., Fejer, M. M. & Byer, R. L. Quasi-phase-matched second-harmonic generation of blue light in periodically poled LiNbO<sub>3</sub>. *Appl. Phys. Lett.* **56**, 108–110 (1990).
- [28] Broderick, N. G., Ross, G. W., Offerhaus, H. L., Richardson, D. J. & Hanna, D. C.

- Hexagonally poled lithium niobate: a two-dimensional nonlinear photonic crystal.  
*Phys. Rev. Lett.* **84**, 4345–4348 (2000).
- [29] Arie, A., Habshoosh, N. & Bahabad, A. Quasi phase matching in two-dimensional nonlinear photonic crystals. *Opt Quant Electron* **39**, 361–375 (2007).
- [30] Broderick, N. G., Ross, G. W., Offerhaus, H. L., Richardson, D. J. & Hanna, D. C. Hexagonally poled lithium niobate: a two-dimensional nonlinear photonic crystal.  
*Phys. Rev. Lett.* **84**, 4345–4348 (2000).
- [31] Saltiel, S. M. et al. Generation of second-harmonic conical waves via nonlinear bragg diffraction. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103902 (2008).
- [32] Zhang, Y., Wen, J., Zhu, S. N. & Xiao, M. Nonlinear Talbot effect. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 183901 (2010).
- [33] Jin, H. et al. Compact engineering of path-entangled sources from a monolithic quadratic nonlinear photonic crystal. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 023603 (2013).
- [34] Lu, R. E. et al. Nearly diffraction-free nonlinear imaging of irregularly distributed ferroelectric domains. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 067601 (2018).
- [35] Fang, X. et al. Coupled orbital angular momentum conversions in a quasi-periodically poled LiTaO<sub>3</sub> crystal. *Opt. Lett.* **41**, 1169–1172 (2016).
- [36] Zhang, Y., Gao, Z. D., Qi, Z., Zhu, S. N. & Ming, N. B. Nonlinear Cerenkov radiation in nonlinear photonic crystal waveguides. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 163904 (2008).
- [37] Chen, C. et al. Cerenkov third-harmonic generation via cascaded  $\chi^{(2)}$  processes in a periodic-poled LiTaO<sub>3</sub> waveguide. *Opt. Lett.* **36**, 1227–1229 (2011).



## 致 谢

衷心感谢张勇老师和高志达教授在我毕设过程中分阶段提供了各种可行的方向性指导和细节性建议，促进我兼顾效率与质量地完成了毕设任务。

在这里必须要感谢和祝福有幸言传身教于的东北大学理学院物理系任课老师们，如果这个系统没有你们的辛勤耕耘，作为相同的输入的我，便不会有今天的输出。我的三维血肉在每一个方向的投影都蕴含了这些教师的身影，他们包括：李楠、朱林、柳艳、胡勇、王旗、张建峰、公卫江、吴海娜、刘国良、高志达、杨玉玲、孟祥颖、李云鹤、何砚发、代雪峰、张德安、易光宇、白质明、张敬飞，也希望大家保持教学热情，为应用物理学、基础物理学培养出更多壮苗。

在整个本科生涯，东北大学理学院其他系以及其他学院的教师也曾极大地震撼过我的神经末梢，他们是：理学院数学系教师郭阳、孔庆海、张雪峰，化学系教师孙宏滨、王卓鹏，软件学院教师高天寒，信息科学与工程学院教师李景宏、马大中、孙玉舸。同时也感谢陶天琦、岳登晓两位辅导员老师在四年里对我们的成长呵护有加。

感谢三年同寝舍友翟心哲、周健豪、姚家铭前仆后继地左右为男、上下其手，锻炼和培养了我中通外直的内禀属性，同时也带给了我苦尽甘来的欢声笑语。

在本文的撰写过程中，陈鹏程师兄无私地给予了我很大的程度的理论指导和技术支持。这是我第一次系统地主动接受外界的影响和参与较强的相互作用，收获颇丰。

杨振宁在他的《六十八年心路》中提到，当下物理学所面临的困难有增无减的原因，在于随着实验物理与理论物理的成熟和发展，这两个领域的物理实验均演变得越来越复杂、成本和周期都越来越不堪重负，一方面导致理论物理学家与理论物理学之间的鸿沟，甚至跨越了实验物理学家与理论物理学家之间的鸿沟，另一方面导致理论物理研究生，甚至连同实验物理研究生，都离实验现象越来越远；但对物理学科本身，问渠那得清如许，就是因为它是一门基于实验的学科。但学科在发展，有序度在集成，复杂度在提升，就像不可逆的熵增，物理学的实验现象离接下来一代代学生渐行渐远已经大势所趋，再加上上个世纪费曼在巴西的考察所经历的噩梦一遍又一遍地正在中国和其他国家发生，以至于梦寐以求的大统一理论可能在 22 世纪之前仍无法掌握。若朝闻道的曙光在我有生之年确定无法一瞥，那我宁可不去飞蛾扑火地朝思暮想它。

以上这段文字为在接下来的研究生生涯中，希望近距离接触物理特别是能动手实验的我，在保研时选择专业方向提供了指导思想，那就是该专业首先必须要存在实验，不能是纯理论，否则我无法通过现象来否定或肯定自身的理论，以及评判、分析或查看他人的理论的过人之处和弊病之处，也就会陷入大学时期的天马行空的纯理论泥潭，尽管沉浸于自己创造的自洽逻辑中也很有趣，但对物理而言终究是不完整的；其次，实验成本必须相对低廉（尽管高端实验都贵且偏向自动化）、必须触手可及、必须有人工操作的部分、实验平均周期也不能过长。这样光学方向就至少满足条件了。

另外，在杨的盛宴已过和安德森的多者异也的“抛砖引玉”下，我发现在极小和极大尺度的领域，物理学中美丽的女人都已经被爱因斯坦、朗道那个世纪的年轻人所占有了，我既不太愿意或许也没有能力和勇气甚至没有可能性，在没有照顾好自己的同时去处理这些天才们剩下的旁枝末节；所以我费尽心思说服自己必须选择中间尺度的舞台，一方面补上我所欠缺的实验技巧，另一方面也给自己一个机会去重新认识和还原人眼所能接受的尺度的量级下，自然的本来面目；而处于中间尺度的物理学圣地凝聚态物理，又过于人才辈出、诸神之战，独木不成林的我必须选择一个颇有建树的人作为导师，但矛盾在于鉴于本科的经验，我提出的理论很可能与大多数人迥异，若与导师无法兼容便可能成为灭顶之灾，特别是当导师的理论被反复验证有考虑不周之处时。所以我找不出理由说服自己迈出选择极小或极大，以及凝聚态物理的那一步。

在这些矛盾下，我暂时远离了我从课本中熟悉到的每一个旧领域，选择了另一个比原子尺度即纳米级的凝聚态物理体系更大一点的，光波长级即微米级的另一个更“中间”一点的中间尺度体系——非线性光子晶体领域。毕竟我需要一个肉眼可见的顷刻间就能决定理论是对是错的现象级领域，在那里任何人所提出的每一个理论首先必须是可检验的，即既可证实也可证伪，其次检验的时间成本也得相对较低，在这样的思想下我选择加入张勇老师在 2018 年刚开创的新领域中，暂时免去了与物理学中几大领域直接竞争的局面。这里虽然离现象更接近而在理论物理学家看来不够基本，但只要够“正确”即可，即只要每一步都在做正功，总会越来越接近还原事情的真相。

既然极小尺度与极大尺度充满了智者和历史的尘埃且至今仍然乌云不散，可能上帝正是在以这种碰壁的方式启发我们回过头来从与自身尺度相符的领域找寻那把丢失的钥匙；不过即使这个问题在该尺度或根本无解也没关系，因为在这个领域恰好可以不用去担心上帝允不允许相应事情的发生，也不用关心上帝会以什么样的奇淫巧技

实现这样的过程，反而可以在不违背他老人家的基本意愿的前提下，为作品添加个人的自由意志，兼顾科学和艺术地成为该新领域的国王，而不必把重心放在那位创生我们的普罗米修斯身上。毕竟当后代都开始按照我们的新规则运作或熟悉我们的新理论时，便是我们的理论超越其后辈和同辈以及它对它自身的约束之时——在年轻的新领域独树一帜的概率和难易程度，等价于在旧宇宙里创造新宇宙本身，相对于思考如何修缮、维系甚至认识庞大的旧宇宙的难易程度。所以我选择了将精力暂时用于培养和创造、规范新的下一代，而不是冒着风险找出上一代的瑕疵并说服和修正它。

尽管光学非线性效应从其公式确实看不出除了能量守恒外更深层次的物理意义，但 Landau、Butcher、Lifshitz、Pershan 等人确实已经对各阶非线性系数完成了数学描述并为其在量子理论中找到了安家之地，有了这点我就不必过于担心了；相反，非线性过程从表达式来看一般人也都望而却步，这对于将要与那些年轻人同台竞技的我而言倒是优点。我既不畏惧艰深但优美的理论构建，又不嫌弃眼花繁杂的数值演算，也不排斥动手实验，毕竟所有道路都通向罗马，都叫格物致知，而这三条道路也是去往罗马的必经之路，少了一条都像华容道一样虽然仍能封闭和自洽但局外人看还是缺了块拼图。我爷爷说，青年在选择领域时的考虑就像娶老婆一样，回头看才会发现，只要她心坎好、合得来，哪哪儿和谁谁儿都一样；再加上旧有领域虽美但精致而森严的妆容让人不寒而栗，这样我就直接选了一个此前从未听闻过的年轻的新领域。

每个浪漫的男科学家都喜欢独坐幽篁之时，大道至简、指点江山地竹中窥落日，但历史腾出的这样的机会已经不多了，我这样的个体在时下的大环境下大约只可以在粗茶淡饭之余借闲情逸致将其推演一番，尽管在理论物理学家看来我们的领域里的排列组合才更像把玩之物……但每一个认真严格且快乐地对待自己的领域和作品并与之一同前行的人，又何尝不是在各自的时空长廊里研究和摆设自己的新旧玩具呢？

最后，引用《球状闪电》里的两段文摘，“理想主义者和玩世不恭的人都觉得对方很可怜，可他们实际都很幸运。”幸运地能够活在了自己的世界。而我们踌躇在应用和理论的边缘，一面是理论的桃花园林，一面是技术的屋舍俨然，既然一只脚触摸到了现实，就不能假装没有看到这份现实。——“金黄色的树林里分出两条路，可惜我们不能同时去涉足，但我们却选择了，人迹罕至的那一条，这从此决定了我们的一生。”林云喃喃地吟起了弗罗斯特的那首诗，声音像林间的清泉。

I'll go gentle into that good night.



## 附录 A 中文译文

# 一种基于双向误差扩散的数字菲涅尔全息图向纯相位全息图转换的新方法

P.W.M. Tsang<sup>1,\*</sup> and T. -C. Poon<sup>2,3</sup>

**摘要：**我们报告了一种新颖、快速的数字转换方法，可将复振幅的菲涅耳全息图转换为纯相位全息图。简单来说，逐行地依次扫描复数全息图中的像素，且从相反的方向扫描奇数行和偶数行，形成双向误差扩散过程。每次访问的幅度像素被强制为恒定值，同时保留精确的相位值。产生的误差扩散到未曾被访问过的像素点中去。由此产生的新颖的纯相位全息图称为双向误差扩散（BERD）全息图。来自 BERD 全息图的重建图像，保真度高于那些从原始的复振幅全息图获得的重现像。

## 1. 引言

过去二十年里，计算机全息术（CGH）经历了令人鼓舞的发展。导致 CGH 成功的主要因素之一，可归功于极大加快了数字全息图的计算速度的快速算法的出现。最重要的是，计算和半导体技术的飞速发展，还使得廉价的商用 PC 和硬件（比如可编程逻辑门阵列 FPGA），能够以数字方式很快地生成中等尺寸的数字全息图。

尽管结果令人满意，但全息图显示还是一个困难的问题，这在一定程度上对全息技术的实际实现施加了瓶颈。主要问题之一是，像以硅为衬底的液晶（LCoS）那样能够显示全息图的高分辨率设备，却只能要么显示复振幅全息图的幅度，要么显示其相位分量，没法二者同时都显示。

对这个问题的一种直接解决方案是，采用两个空间光调制器（SLMs），来显示实部和虚部两分量，或者说复振幅全息图的振幅和相位信息。同样，复振幅全息图可以用一对纯相位全息图模拟，并用一对纯相位 SLMs 显示。

在一些方案中，将一对 SLMs 替换为单个设备，显示一对全息图；然后在之后，通过光栅合并重建的波前。尽管这种方法是有效的，但是光学装置的安装和排列相当复振幅。此外，分配给全息图的两个分量中每个分量的，SLM 的面积，会减少到其

原始面积的一半。

另外，也可以将复振幅全息图转换为纯振幅或纯相位全息图（POH），以便可以用单个设备直接显示。但是，如果使用纯相位显示方式，来显示菲涅耳全息图，则重建的图像将被散焦的两个孪生像污染。通过从同轴全息转换为离轴全息，孪生像中的那个实像，可以与重现的虚像分离开，然而两个图像之间的角度分离程度，受到显示器的分辨率的限制。

此外，由于干涉条纹图案的不透明性，减弱了重现光的透射光强，因此振幅全息图的光学效率相当低。另一方面，一个 POH 可以用纯相位设备显示，从而获得更高的光学效果效率，并同时消除孪生像。不利的一面是，消除(实)振幅分量，将导致重建图像严重失真(变形)。

为了减轻这个问题，通常采用 Gerberg-Saxton 算法，或叠次菲涅耳变换，这两个迭代的方法，来计算相位全息图，从而重建图像将与目标平面图像匹配。但是，用这种方法生成的相位全息图，是需要消耗大量计算资源的。

迄今为止开发的生成 POH 的最快方法，很可能是“一步式相位恢复（OSPR）过程”。简而言之，首先在生成数字全息图之前，就将随机相位(片)添加到物平面的每个(像素)点上。全息图的相位分量，可以被阈值量化或误差扩散后，用纯相位设备显示。

由 OSPR 过程生成的重建图像通常有噪声，并且有多个子帧，每个子帧代表 添加了不同的随机相位模式 的相同的物平面，并必须快速呈现给观察者，以平均掉/抹平散斑噪声。然而，子帧需要更多的计算来生成，而且还需要以高帧速率显示，以避免闪烁。

在本文中，我们提出了一种新颖而快速的方法，将复振幅菲涅耳全息图转换成单一相位的全息图，称为双向误差扩散全息图。生成的 BERD 全息图能够表示物平面，并在重建图像上保持良好的视觉质量。与 OSPR 方法或其他从物平面生成纯相位全息图的迭代方法不同，我们提出的方法可以直接应用于给定的数字复振幅全息图。

## 2. 一种新奇的纯相位全息图：双向误差扩散全息图

### 2.1 基于单向误差扩散的基本方法

首先，考虑一个复振幅的菲涅耳全息图，它是由物平面( $x-o-y$ 面)上每个点发出的物光波生成的。全息图中的每个像素点用  $P(u,v)$  表示，并且有相应的复振幅分布  $H(u,v)$  (其中  $u,v$  分别是全息图像面的坐标系的垂直轴和水平轴，见 Fig. 1(a))，该未经处理的菲涅尔全息图的表达式由下式给出：

$$H(u,v) \Big|_{\substack{0 \leq u < X \\ 0 \leq v < Y}} = \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} \frac{I(x,y) \exp(i2\pi r_{x,y;u,v} / \lambda)}{r_{x,y;u,v}}, \quad (1)$$

其中的  $I(x,y)$  与  $r_{x,y;u,v} = [(u-x)^2 \delta + (v-y)^2 \delta + w_{x,y}^2]^{0.5}$  分别是物平面上  $(x,y)$  点的光强，以及它距离全息图像面上  $(u,v)$  点的距离。物平面上某点  $(x,y)$  距离全息面的距离，用  $w_{x,y}$  表示； $\lambda$  是光波的波长， $\delta$  是全息面的单个像素的尺寸(边长)。 $X$  和  $Y$  是全息图(像素矩阵)的行数和列数，并且假定与物平面的尺寸一致(包括单个像素点的尺寸，以及像素点的行数和列数)。

我们假设在全息图的产生过程中没有加入随机相位。复振幅全息图可以转换成一个纯相位全息图 POH，即  $H_p(u,v)$ ，通过将每个像素点的  $H_p(u,v)$  的(实)振幅值  $|H_p(u,v)|$  设为 1，同时保持  $H_p(u,v)$  的相位与  $H(u,v)$  的相位一致：

$$|H_p(u,v)| = 1, \text{ and } \arg(H_p(u,v)) = \arg(H(u,v)). \quad (2)$$

然而，我们将在后面指出，使用 Eq. (2)生成的 POH，其重现图像的质量非常差。显然，重建图像的严重失真是由于去除振幅信息后，全息图中每个像素点的误差都很大。

针对上述问题，我们提出使用 Floyd-Steinberg 误差扩散技术，来补偿每个全息图像素的误差。该过程概述如下。首先，将全息图中的每个像素点按从左到右的顺序逐行扫描，将待求值的像素点的值，根据式(2)转换为纯相位量  $H_p(u,v)$ 。假设  $P(u_j,v_j)$  是当前正在处理的像素。通过将振幅简单设定为单位 1，将会产生一个误差：

$$E(u_j,v_j) = H(u_j,v_j) - H_p(u_j,v_j). \quad (3)$$

接着，由单纯地将振幅置一以只取相位所产生的该误差  $E(u_j,v_j)$  将被扩散到之前没有访问过的邻域像素。它的邻域成员的复振幅的值  $H$  将根据以下公式进行更新：

$$H(u_j, v_j + 1) \leftarrow H(u_j, v_j + 1) + w_1 E(u_j, v_j), \quad (4)$$

$$H(u_j + 1, v_j - 1) \leftarrow H(u_j + 1, v_j - 1) + w_2 E(u_j, v_j), \quad (5)$$

$$H(u_j + 1, v_j) \leftarrow H(u_j + 1, v_j) + w_3 E(u_j, v_j), \quad (6)$$

$$H(u_j + 1, v_j + 1) \leftarrow H(u_j + 1, v_j + 1) + w_4 E(u_j, v_j), \quad (7)$$

其中运算符"←"表示用表达式右侧的变量更新(覆盖)表达式左侧的变量(的值)。常系数  $w_1 \sim w_4$  的值分别被设置为文献[16]中所采用的值: 7/16、3/16、5/16、1/16。

根据方程式(4)~(7), 如图 1(b)所示为  $P(u, v)$  和它的邻域像素通过扩散来补偿误差的空间关系图中显示了  $P(u_j, v_j)$  是怎样将误差扩散到它的四个未访问的邻域像素的。等价地, 方程式(4-7)可以如下地重新排列成一个紧凑的递归表达式:

$$H(u_j, v_j) \leftarrow H(u_j, v_j) + w_1 E(u_j, v_j - 1) + w_4 E(u_j - 1, v_j - 1) + w_3 E(u_j - 1, v_j) + w_2 E(u_j - 1, v_j + 1), \quad (8)$$

根据式(8), 图 1(c)形象地显示了每个像素更新后的值可以看做为其四个相邻像素的加权和。当全息图的所有像素被访问和处理后, 原始的全息图将被转换成一个纯相位全息图 POH。我们将在仿真实验部分说明, 用该方法得到的全息图  $H_p(u, v)$  的重现像, 与用原始复振幅全息图得到的重现像相似。

## 2.2 基于双向误差扩散过程的增强方法

2.1 节所述的基本方法虽然有效, 但会对重建图像造成噪声污染。一种可能的解释是, 在误差扩散过程中, 如式(8)所示, 每个全息图像素所掺入的都是与之相对位置固定的各相邻像素所扩散的误差之和。这构成了一个类似于可预测的编码器在编码误差的过程, 在这个过程中产生的误差在一定程度上与信号相关。因此, 全息  $H_p(u, v)$  的重构图像, 将与相关的与误差有关的噪声信号叠加在一起形成最终的重建像。

为了克服这一问题, 我们提出了一种增强的方法来降低全息信号与误差之间的相关性。首先, 我们注意到在 4~7 号方程中表示的误差扩散过程与扫描全息图图像中每一行像素的方向无关。因此, 我们改变了每一行像素的扫描方向, 使得 Eq. (8)中的递归过程, 在每一行像素被访问后都会中断, 从而导致了相关的误差, 在每一行被访问完毕后会被打断 (而不是一直积累)。

奇数行产生的误差以 Eqs. (4-7)中给出的方法扩散到相邻的像素，而偶数行则通过反向(从右到左)应用误差扩散过程进行补偿，如下面的 Eqs. (9-12)所示。像素  $P(u_j, v_j)$  及其邻域像素之间的空间关系如图 1(d)所示。

$$H(u_j, v_j - 1) \leftarrow H(u_j, v_j - 1) + w_1 E(u_j, v_j), \quad (9)$$

$$H(u_j + 1, v_j + 1) \leftarrow H(u_j + 1, v_j + 1) + w_2 E(u_j, v_j), \quad (10)$$

$$H(u_j + 1, v_j) \leftarrow H(u_j + 1, v_j) + w_3 E(u_j, v_j), \quad (11)$$

$$H(u_j + 1, v_j - 1) \leftarrow H(u_j + 1, v_j - 1) + w_4 E(u_j, v_j). \quad (12)$$

由基于处理复振幅全息图的偶数行的 Eqs. (4-7)，以及处理奇数行的 Eqs. (9-12)，所产生的全息图，称为双向误差扩散(BERD)全息图。

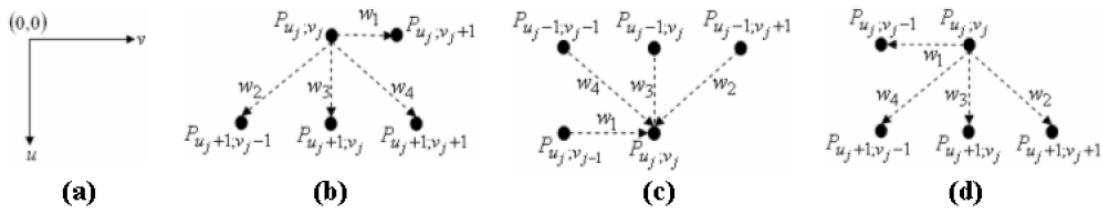


Fig. 1. (a) Horizontal and vertical axes of the co-ordinate system. (b) Diffusion of the error from the current pixel to its neighborhood, scanned from left to right. (c) An alternative representation of (a), showing the updating of a pixel from its neighborhood. (d) Diffusion of the error from the current pixel to its neighborhood, scanned from right to left.

### 3. 实验结果

采用二值化图像“CITYU”、平滑图像“Lena”，和高纹理图像“Mandrill”（如图 2(A)-2(c)所示）对本文方法进行评价。应用式(1)生成三幅图像的复振幅菲涅耳全息图。其中，全息图以及（作为物像）测试的图像，都包含  $2048 \times 2048$  个像素，每一个像素都是  $7\mu\text{m} \times 7\mu\text{m}$  的方形尺寸。

光束的波长为  $650 \text{ nm}$ 。所有的图像都平行于全息图平面，且位于距全息图平面  $0.3\text{m}$  处。这三种复振幅全息图的数值重建图像与原始图像相同，因此在这里没有显示。

接着利用式(2)简单去除全息图的实振幅分量，只保留菲涅尔全息图的相位部分，数值重建图像如图 3(a)-3(c)所示。可以看到，这三幅重建图像的阴影区域(的原图信息)被广泛地删除了，留下的大部分是图像的边缘和轮廓。

为了克服这一问题，我们在 2.1 节中提出的单向误差扩散方法被应用于将复振幅

全息图转换为纯相位全息图（POHs）。重建的纯相位全息图 POHs 所对应的图像如图 4(a)-4(c)所示。我们观察到重建的图像与图 2(a)-2(c)中的原始图像很接近。

然而，也注意到一定数量的噪音污染，尤其是在黑暗区域。

随后，我们用我们提出的双向误差扩散方法将复振幅全息图转换成 BERD 全息图，如 2.2 节所述。如图 5(a)-5(c)所示，用这种方法生成的 BERD 全息图的数值重构图像与原始图像非常相似，并且噪声信号不明显。

将由上述三种方法得到的 POHs 重建图像的质量，与用复振幅全息图得到的 POHs 重建图像的质量，通过保真度评价方法进行定量评价，如表 1 所示。显然，所提出的双向误差扩散方法所生成的 BERD 全息图的保真度(在 PSNR 方面)明显高于同类算法所得的全息图。为清晰起见，图 2-5 以它们的实际大小分别显示在媒体文件 MF2-MF5 中。



Fig. 2. (a)-(c) Test images “CITYU”, “Lena”, and “Mandrill”.

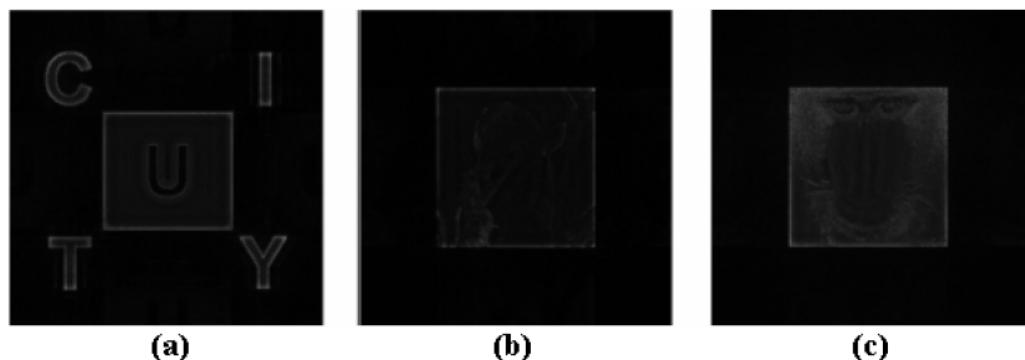


Fig. 3. (a)-(c) Reconstructed images of the phase-only holograms derived from direct removal of the magnitude component of the complex holograms.



Fig. 4. (a)-(c) Reconstructed images of the phase-only holograms derived from our proposed unidirectional error diffusion method.



Fig. 5. (a)-(c) Reconstructed images of the BERD holograms (novel phase-only holograms derived from our proposed bidirectional error diffusion method).

**Table 1. Quantitative comparison between the fidelity of the reconstructed images as shown in the Figs. 3(a)-3(c), 4(a)-4(c), and 5(a)-5(c) (with reference to the ones obtained from the original complex holograms in Figs. 2(a)-2(c)) from phase-only holograms derived from different means. The reported values are PSNR values.**

|   | CITYU   | Lena    | Mandrill |
|---|---------|---------|----------|
| Direct removal of the magnitude component | 13.0 dB | 16.1 dB | 16.2 dB  |
| Unidirectional error diffusion            | 24.3 dB | 28.1 dB | 27.0 dB  |
| Bidirectional error diffusion             | 31.6 dB | 38.6 dB | 32.7 dB  |

## 4. 结论

本文提出了一种快速将复振幅的菲涅尔数字全息图转换为纯相位全息图的新方法，即 BERD 全息图。这一过程是通过 BERD 机制完成的，每个全息图像素被依次扫描并强制约束为一个恒定的振幅，同时产生的误差扩散到未访问的邻域。奇数行和偶数行从相反的方向扫描，构成一个双向误差扩散过程。

我们提出的方法有三个主要优点。

首先，生成的新型 BERD 全息图的重构图像与用原始复振幅全息图得到的结果非常相似，证明纯相位全息图相对于复振幅全息图的近似是有用的。其次，我们所提

出的方法只涉及了中等的计算量，对于大部分图片一般像素和尺寸的图片，生成其所对应的纯相位菲涅尔全息图所消耗的计算资源并不是很大。第三，我们的方法可以直接应用于现有的复振幅菲涅耳全息图，而不需要在真实空间实际存在客观的物像。

一个潜在的研究方向是探索一套更好的误差扩散系数( $w_1 \sim w_4$ )，以及误差扩散矩阵元个数及其方向甚至非邻域扩散，以提高重建后的 BERD 全息图像的质量；还可以进行边界条件的优化，比如在扩散到最后一行之时，可将最后一行的误差扩散到第一行，同理，也可将最后一列的误差扩散到第一列，实现周期性边界条件下的单双向误差扩散法；也可以在左右双向误差扩散的基础上，加上上下方向后实行四向误差扩散算法，预期这样会进一步提高相应四向误差扩散算法所生成的纯相位全息图的重建像成像质量。

## 致谢

这项工作得到了中国科学院客座教授的支持，在高级国际科学家项目下的资助编号为 2010T2G17，和高端外国专家来华招聘项目，资助号 GDJ20130491009。

## 附录 B 外文原文