

Salute to 李云鹤

目录

第一篇 复变函数论	5
第一章 复变函数	5
1.1 复数与复数的运算	5
(一).复数的基本概念	5
(二).无限远点	6
(三).复数的运算	6
1.2 复变函数	8
(一).复变函数的定义	8
(二).区域的概念	9
(三).复变函数例	9
1.3 导数	11
1.4 解析函数	13
1.5 平面标量场	15
1.6 多值函数	19
(一).多值函数的定义	19
第二章 复变函数的积分	22
2.1 复变函数的积分	22
2.2 柯西定理	23
(一).单连通区域的情形	23
(二).复连通区域的情形	24
(三).总结: 柯西定理的几种表示形式	24
2.3 不定积分	25
(一).不定积分公式	26
(二).同样这道例题	27
2.4 柯西公式	27
(一).柯西公式	27
(二).复联通区域上的柯西积分公式	28
(三).柯西公式的几个推论	29
第三章 幂级数展开	33
3.1 复数项级数	33
(一).复数项级数	33
(二).函数项级数	34
3.2 幂级数	34
3.3 泰勒级数展开	36

3.4 解析延拓	38
3.5 洛朗级数展开	39
3.6 孤立奇点的分类	42
第四章 幂级数展开	43
4.1 留数定理	43
4.2 应用留数定理计算实变函数的定积分	47
第五章 傅里叶变换	54
5.1 傅里叶级数	54
(一).周期函数的傅里叶展开	54
(二).奇函数及偶函数的傅里叶展开	55
(三).定义在有限区间上的函数的傅里叶展开	55
(四).复数形式的傅里叶级数	56
5.2 傅里叶积分与傅里叶变换	56
(一).复数形式的傅里叶积分	56
(二).傅里叶变换的基本性质	60
(三).多重傅里叶积分	61
5.3 δ 函数	62
(一). δ 函数	62
(二). δ 函数的一些性质	62
(三). δ 函数是一种广义函数	63
(四). δ 函数的傅里叶变换	64
(五).多维的 δ 函数	65
第六章 拉普拉斯变换	65
6.1 拉普拉斯变换	65
(一).拉普拉斯变换的定义	66
(二).拉普拉斯变换的性质	68
6.2 拉普拉斯变换的反演	71
(一)有理分式反演法	71
(二)查表法	72
(三)黎曼-梅林反演公式	73
6.3 应用例	74
第二篇 数学物理方程	76
第七章 定解问题	76
7.1 数学物理方程的导出	76
(一).波动方程	76
(二).输运方程	79
(三).稳定场方程	80
7.2 定解条件	82

(一).初始条件	82
(二).边界条件	82
(三).衔接条件 (即电动力学中的边值关系)	84
7.3 数学物理方程的分类	85
7.4 达朗贝尔公式 定解问题	85
(一).达朗贝尔公式	85
(二).端点的反射	87
(三).定解问题是一个整体	95
(四).定解问题的适定性	95
第八章 分离变数法	96
8.1 齐次方程的分离变数法	96
(一).第一类边界问题	96
(二).第二类齐次边界问题	99
(三).第一、二类齐次边界条件混合问题	100
(四).稳定场问题一	101
(五).稳定场问题二	103
8.2 非齐次方程(振动方程和输运方程)	104
(一).傅里叶级数法	105
8.3 非齐次边界条件的处理	106
(一).一般处理方法	106
(二).特殊处理方法(特解法)	107
8.4 泊松方程	108
第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题	110
9.1 特殊函数的常微分方程	110
(一).拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$	110
(二).波动方程 $u_{tt} - a^2 \nabla^2 u=0$	114
(三).输运方程 $u_t - a^2 \nabla^2 u=0$	114
(四).亥姆霍兹方程 $\nabla^2 v + k^2 v=0$	115
9.2 常点邻域上的级数解法	117
(一).二阶线性常微分方程的级数解法	117
(二).勒让德方程的级数解	117
9.3 正则奇点邻域上的级数解法	120
(一).奇点邻域上的级数解	120
(二).正则奇点邻域上的级数解	120
(三).贝塞尔方程	123
第十章 球函数	129
10.1 轴对称球函数	129
(一).勒让德多项式	129
(二).第二类勒让德函数	132

(三).勒让德多项式的正交关系	133
(四).勒让德多项式的模	133
(五).广义傅里叶级数	134
(六).拉普拉斯方程的轴对称定解问题	139
(七).母函数	141
(八).递推公式	142
10.2 连带勒让德函数	142
(一).连带勒让德函数	143
(二).连带勒让德函数的正交性	145
(三).连带勒让德函数的模	145
(四).广义傅里叶级数	146
10.3 一般的球函数	146
(一).球函数	146
(二).球函数的正交关系	147
(三).球函数的模	148
(四).球面上的函数的广义傅里叶级数	148
(五).正交归一化的球函数	149
第十一章 柱函数	149
第十二章 格林函数法	149
12.1 泊松方程的格林函数法	149
12.2 用电像法求格林函数	153
(一).无界空间的格林函数 基本解G0	153
(二).电像法求格林函数G1	154

物理数学方法是普通物理(力热光电原子)与四大力学的粘合剂：力学 \longleftrightarrow 理论力学，热学 \longleftrightarrow 热力学与统计物理，电磁学 \longleftrightarrow 电动力学，原子物理 \longleftrightarrow 量子力学。

一个有趣的 introduction: 算符 $\vec{\nabla} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, 读作(或者说在 matlab 的语句里对应) “\nabla”。设 u 为某一标量(场), 则 $\nabla u = \nabla(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ 便变成了一个矢量(场), 若再来一次 $\nabla \nabla u$, 则 $\nabla \nabla u = \nabla \cdot \nabla(u) = (\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}) = \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y}$, 或者 $= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 又被操作为了一个标量(场)。 $\nabla \nabla u$ 被记为 $\nabla^2 u$ 或 Δu , $\Delta u = 0$ 被称为**拉普拉斯方程**; 若 $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon}$, 即若面内包含了点电荷, 则变成了**泊松方程**。

【 $\nabla u = \nabla(u) = \nabla \cdot u$, 即也可被写为 $\nabla \cdot u$, 表示一个矢量乘以一个作为系数的标量, 得到的还是经过拉伸变换 or 附模后的矢量; $\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \nabla u = \nabla(\nabla(u)) = \nabla \cdot \nabla(u) = \nabla \cdot \nabla \cdot u$, 既可以理解为 $(\nabla \cdot \nabla) \cdot u$, 又可以理解为 $\nabla \cdot (\nabla \cdot u)$ ——实际上 “算符” 这个概念,

在操作某对象时，既有“点乘”的意思，比如在操作矢量 $\nabla(u)$ 时， $\nabla(\nabla(u))$ 没有 $\nabla \cdot \nabla(u)$ 表达效果好；也有“对其作某种映射”的意思，比如在操作标量时， $\nabla \cdot u$ 没有 $\nabla(u)$ 表达效果好——所以我觉得 $\nabla \cdot \nabla(u)$ 是个不错的表示，但 $\nabla(\nabla \cdot u)$ 就糟糕透了】

【当然，如果纯粹地应用“点乘”的形式和含义的话，也不是不可，理由在于有与之对称的叉乘形式存在： $\nabla \times u$ ；并且电动力学中经常采用的是这样(“点乘”和“叉乘”)的理解方式。】

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数

1.1 复数与复数的运算

(一).复数的基本概念

(1).复数的代数式： $z=x+iy$ ，其中变量为斜体，单位&常数(如 $i=\sqrt{-1}$)为直体。 $x=\text{Re}(z)$ ， $y=\text{Im}(z)$ ，其中 Re 为“real part”的 abbreviation，Im 对应“imaginary part”。

z 可以用复(数)平面上的矢量来表示； y 轴称为虚轴，单位长度表示 $1 \cdot i$ (每一小格代表的物理量有单位，单位为 i)； x 轴称为实轴，单位长度为 1。

(2).复数的极坐标形式(三角式)： $z=\rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ ，由于只是表示形式上的不同， z 的以上两种表示形式的实部、虚部、模、辐角应分别相等，则可推知 $x=\rho\cos\varphi$ 、 $y=\rho\sin\varphi$ 、 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$ 、 $\varphi=\arctan(\frac{y}{x})$ 。

其中 ρ 称为该复数的模，记为 $|z|$ ； φ (向量与正实轴的夹角)称为该复数的辐角，记作 $\text{Arg } z$ 。一个复数的辐角值不能唯一地确定， $\text{Arg } z=\arg z+2k\pi$ ， $\arg z$ 称为 $\text{Arg } z$ 的主值，以及 z 的主辐角。一般 $\arg z$ 取 $[0,2\pi)$ ，也有的取 $[-\pi,\pi)$ 。

复数 0 的 $|z|=0$ ，其辐角 $\text{Arg } z$ 无明确意义；无限远点的 $\text{Arg } z$ ，连同其实部和虚部，也均没有明确意义。

(3).复数的指数式：利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ ，可得 $z = \rho e^{i\varphi}$ 。

【 $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ 该级数在复数范围内绝对收敛，将其记作 e^z 。因此 $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + (i\frac{x}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \cdot \sin x$ ，并且 $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x$ (当然你也可以用 $\frac{e^0}{e^{ix}}$ 来得到它)；并有 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ 、 $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ 】

(4).复数 z 的共轭复数 z^* ，指的是 z 所对应的复平面上的矢量对实轴的反映/镜像，即 $z^* = x - iy = \rho(\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}$ 。

(二).无限远点

在复变函数论中，通常还将模为无限大的复数，也跟复数平面上的一点相对应，并且称该点为无限远点。实数的取值范围为 $(-\infty, +\infty)$ ，复数的模的取值范围可为 $[-\infty, +\infty]$ 。包括了无限远点的复平面，称为扩充了的复平面。

把一个球放在复数平面上，球的南极 S 与复平面相切于原点，在复数平面上取一点 A ，连接 A 与球的北极 N ，连线相交于 A' 。——这样，复平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点——对应了起来。这种对应关系称为测地投影。这个球称为复数球。

设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远点移动，对应的点 A' 就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近。不管 A 沿着什么样的曲线向着无限远处移动， A' 总是相应地沿着某条曲线逼近 N 。——因此，可以将平面上的无限远看作一点，通过测地投影而跟复数球上的北极 N 相对应。

(三).复数的运算

复数的加减法：可看作复平面上矢量的和差。因此复数不能比较大小，只有复数的模可以。

复数的乘法： $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$ 。【从这推导过程还可看出： $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ，并可进一步推知 $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ 、 $(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^* = (z_1 \cdot z_2)^* \cdot z_3^* = z_1^* \cdot z_2^* \cdot z_3^*$ 】

复数的除法: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{|x_2 \ y_2|}{x_2^2 + y_2^2}$ 。当然你也可将代数式情形下, 分子分母都 $\times z_2^*$: $\frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$ 。

复数的乘方: $z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \rho^n e^{ni\varphi} = \rho^n e^{i(n\varphi)} = \rho^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$, 因此有 $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$ 。

利用二项式定理将 $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n$ 展开, 可得到 $\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \cos^{n-k} \varphi \cdot i^k \cdot \sin^k \varphi = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$, 将方程左右的实部对应相等, 虚部对应相等, 便可反过来推知实数范围内的三角函数 n 倍角公式。当 $k=0, 2, 4, \dots$ 时, 等号左边的这些对应项不含 i , 因此 $\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \cdot i^{2k} \cdot \sin^{2k} \varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot C_n^{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \cdot \sin^{2k} \varphi$; 同理 $i \cdot \sin n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1} \varphi \cdot i^{2k+1} \cdot \sin^{2k+1} \varphi$, 因此 $\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot C_n^{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1} \varphi \cdot \sin^{2k+1} \varphi$, 该等式称为棣莫弗等式。

复数的开方: $\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i \arg z + 2k\pi}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i \arg z}{n}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i \arg z}{n}} (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n})$, 一般对于给定的 z , $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个不同的取值【 k 从 0 取到 $n-1$ 是一个轮回, 相当于将 2π 这个全方向, 分成了 n 份, 每瓣张角 $\frac{2\pi}{n}$; 根据植树问题, 互异的边的朝向也有花瓣那么多, 也就是复数因子 $e^{\frac{i \arg z}{n}}$ 的朝向有 n 个】。(n 为整数)

①. $|z|^2 = z \cdot z^* = \rho^2 = x^2 + y^2$; ②. $z^2 = z \cdot z = x^2 + i \cdot 2xy - y^2$; ③. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$; ④. $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$; ⑤. $(z_1 + z_2)^* = (z_1^* + z_2^*)$ 、 $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ [因此有 $|z_1 \cdot z_2| = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^* = (z_1 \cdot z_1^*) \cdot (z_2 \cdot z_2^*) = |z_1| \cdot |z_2|$, 可推广至多个复数相乘]。⑥. $z \rightarrow z_0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, 由于 $z = x + iy$, 则复变数接近复常数的问题, 可以归结为实变数 x, y 分别逼近 x_0, y_0 的问题。

因此, 分别关于实变数的和、差、积、商的极限的定理, 以及这些极限是否存在的判据, 都适用于复变数。

$\sqrt[3]{-8} = ?$; 一个显而易见的答案是 -2; 但我们曾说过, -8 可看作虚部为 0 的复数, 而复数的开 n 次方一般会有 n 个不同的取值。

因此设 $\sqrt[3]{-8} = \rho e^{i\varphi}$, 得 $\rho^3 e^{i3\varphi} = -8$, 因此实数部分 $\rho^3 \cdot \cos 3\varphi = -8$, 且虚数部分 $\rho^3 \cdot i \cdot \sin 3\varphi = 0$ 。根据后者, 我们可得到 $3\varphi = k\pi$; 又因 $\rho > 0$, 且 $\cos 3\varphi = \pm 1$, 所以 $\rho = 2$, 且因此 $3\varphi = \pi + 2k\pi$, 以使得 $\cos 3\varphi = -1$ 。

对于 k 分别取 -1、0、1, $\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3} = -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, \pi$, $\rho = 2$, 代入 $\rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ 即有 $2[\cos(-\frac{1}{3}\pi) + i \cdot \sin(-\frac{1}{3}\pi)] = 1 - i\sqrt{3}$ 、 $2[\cos(\frac{1}{3}\pi) + i \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi)] = 1 + i\sqrt{3}$ 、-2。

【有趣的是，我们是什么时候养成的，将 $z=x+iy$ 中的 i 放在 y 前面的习惯呢？按理说若将 i 视为“单位”的话，它理应放在数字 y 的后面；我估计这是因为在推导欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$ 时出现的原因。】

当然，我们还可将“-8 可看作虚部为 0 的复数”这句话展开来，以另一种方式得到它： $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{-8+i\cdot 0}=\sqrt[3]{8(-1+i\cdot 0)}=\sqrt[3]{\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}=\rho^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\varphi}{3}}=\rho^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\varphi}{3}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{3})$ ，其中利用 $\sqrt[3]{8(-1+i\cdot 0)}=\sqrt[3]{\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}$ 来确定出 ρ 和 φ 的可能值，再将其代入可不经 $\rho^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\varphi}{3}}$ 而直接由 $\sqrt[3]{\rho(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}$ 所得到的 $\rho^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\varphi}{3}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{3})$ 中，即可。

1.2 复变函数

(一).复变函数的定义

对于复数平面上的一个点集 E ，其中的每一个 $z=x+iy$ ，都有一个 or 多个复数值 w 与之对应，则称 w 为 z 的(复变)函数，记作 $w(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ 。其中， z 称为 w 的宗量，定义域为 E ，记作 $w=f(z), z\in E$ 。【 $w(z)=w(z(x,y))=w(x,y)$ ，可以将 w 看作 x,y 的二元函数，但不是二元实函数； w 的实部 u 和虚部 v 才是 x,y 的二元实函数】

【这就好比 $(x,y)\rightarrow f(x,y)$ 二元实函数 $\rightarrow (u(x,y),v(x,y))$ 复变函数，之所以能写成 $w(z)=u+i\cdot v$ 这样，是因为映射方式 $f(\cdot)$ 一般是初等函数，复数 $z=x+iy$ 经有限次四则运算、乘方开方和复合运算后，所得 $f(z)=f(x+iy)$ 仍然是复数，仍希望写成 $u+i\cdot v$ 的样子，只不过 u,v 分别是 x,y 的函数了： iy 自乘后会跑到实数部分 u 去， x 乘以 $i(iy)$ 后会跑到虚数部分 v 去，指数为复数的复数，其指数上的复数最好化为代数式，比如 $z_1^{z_2}=(\rho_1 e^{i\varphi_1})^{z_2}=\rho_1^{(x_1+i\cdot y_1)} e^{i\varphi_1(x_1+i\cdot y_1)}=\rho_1^{x_1} e^{-y_1\varphi_1} \cdot \rho_1^{i\cdot y_1} e^{i\varphi_1 x_1}=e^{(x_1\ln\rho_1-y_1\varphi_1)} \cdot e^{i(\varphi_1 x_1+y_1\ln\rho_1)}$ (底为复数的复数就更好办了)等，因此 u,v 均是关于 (x,y) 的二元实函数；这些运算对于复数集合是封闭的】

“宗量”一词，相当于“自变量”；即 z 虽对于 x,y 来说，是 x,y 的函数，但它对于 w 来说，是 w 的自变量；同样，在泛函分析中， $J[y(x)]$ 中的 $y(x)$ 对 J 来说，也是 J 的宗量，而“ $\delta y(x)$ 之于 $J[y(x)]$ ”相当于“ dx 之于 $f(x)$ ”【理论力学后续的变分法】。

复变函数论中，主要研究的是解析函数(1.4)。

(二).区域的概念

在解析函数论中，函数的定义域不是一般的点集，而是需要满足一定条件的。这样的点集称为**区域**，用 B 表示。

邻域：在复平面上以 z_0 为圆心，以任意小正实数 ε 为半径作一圆，圆内所有点的集合，称为 z_0 的邻域。

内点/外点：若 z_0 及其邻域均(不)属于点集 E ，则称 z_0 为该点集的内(外)点。

边界点：若在 z_0 的每个邻域内，既有 $\in E$ 的点，也有 $\notin E$ 的点，则称 z_0 为该点集的**边界点**。**边界点的全集**称为**边界线**。

区域：满足(1).**全由内点组成**。(2).**具有连通性**的点集；是宗量 z 在复数平面上的取值范围。**【连通性**：点集中的任意 2 点可用一条不间断的曲线连接，且该曲线上的点全都属于该点集**】**

开区域：只需满足(1).**全由内点组成**的点集。**【比如 ∞ 字样的开区域**，由于这家伙不具有连通性，所以 \notin **区域**；一个不是**区域**的东西还能算是**开区域**？嘿嘿，有点强扭的瓜的感觉。不过并非所有的**开区域**都不是**区域**，这里举的例子只是特例，所以二者有交集；**开区域**可以是**区域**。**】**

闭区域：**区域** B 及其**边界线**所组成的点集，记作 \bar{B} 。**【区域**可以是：圆形域 $|z - z_0| < r$ (r 表示模)、环形域；**闭区域**可以是闭圆域、闭环域 $a \leq |z - z_0| \leq b$ 等；有意思的是，与**开区域**不同，**闭区域**总 \notin **区域****】**

(三).复变函数例

多项式： $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ ；有理分式： $\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m}$ ；根式： $\sqrt{z - a}$ ，其中 m, n 为正整数，其余所有常数如 a_i, b_i, a ，均是复常数。

①. $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \cdot \sin y)$ 。由于 $|e^{iy}| = 1$ ，所以 $|e^z| = e^x$ ， e^x 扮演 ρ 的角色；并且 $\arg(e^z) = y$ ， y 扮演 φ 的角色。——由于 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ 以 2π 为周期 $[e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i(2k\pi)} = e^{i\varphi} \cdot \cos(2k\pi) = e^{i\varphi} \cdot 1]$ ，因此 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期，的周期函数(复变函数的周期性是对宗量 z 而言的)。

②. 像 $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ 收敛为 e^z 一样，由于 $1 - \frac{z^2}{2!} + \dots - \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ ，在复数范围内也绝对收敛，且分别收敛为 $\cos z, \sin z$ ，那么我们可以将欧拉公式的推导过程 $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + (\frac{ix}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \cdot \sin x$ 中

的所有 x 替换为 z , 得到 $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$, 因此有 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 、 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 。【 iz 仍是个复数 z 】

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{izz} + e^{-izz}}{4} - \frac{e^{izz} + e^{-izz}}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{-2}{4} \right) = 1. \text{ 可见之在复数域也成立。}$$

由于 $e^{i\varphi}$ 、 $e^{i(-\varphi)}$ 以 $\Delta\varphi = 2\pi$ 为周期, 因此 e^{iz} 、 e^{-iz} 也以 $\Delta z = 2\pi$ 为周期, 因此 $\cos z$ 、 $\sin z$ 也均以 2π 为周期; 这与实数范围内的 $\cos x$ 、 $\sin x$ 以 $\Delta x = 2\pi$ 为周期一致。——但同实数域下的不同的是, $\cos z$ 、 $\sin z$ 在复数域内均为无界函数, 即它们的模在某些 z 处趋向无穷大:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \cdot \sin x); \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \cdot \sin x) + e^y(\cos x - i \cdot \sin x)}{2} \\ &= \frac{(e^{-y} + e^y)\cos x + i \cdot (e^{-y} - e^y)\sin x}{2} = \frac{(e^y + e^{-y})}{2} \cos x - i \cdot \frac{(e^y - e^{-y})}{2} \sin x = \cosh y \cdot \cos x - i \cdot \sinh y \cdot \sin x; \\ \sin z &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \cdot \sin x) - e^y(\cos x - i \cdot \sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^y)\cos x + i \cdot (e^{-y} + e^y)\sin x}{2i} = \cosh y \cdot \sin x + i \cdot \sinh y \cdot \cos x. \end{aligned}$$

【可以这么记: 就像 $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ 一样, 类似地: $\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \cdot \sin x \cdot \sinh y$; 而 $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, 于是 $\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cdot \cos x \cdot \sinh y$ 】

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cosh^2 y \cdot \cos^2 x + \sinh^2 y \cdot \sin^2 x} = \sqrt{(1 + \sinh^2 y) \cdot \cos^2 x + \sinh^2 y \cdot \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \frac{(e^{2y} + e^{-2y} - 2)}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}. \\ |\sin z| &= \sqrt{\cosh^2 y \cdot \sin^2 x + \sinh^2 y \cdot \cos^2 x} = \sqrt{(1 + \sinh^2 y) \cdot \sin^2 x + \sinh^2 y \cdot \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} = \frac{1}{2} \sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\sin^2 x - \cos^2 x)}. \end{aligned}$$

它们在某些地方的值, 不仅 >1 , 还 $\rightarrow +\infty$ 。

③. 正如实数域内 $\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ 被定义为双曲正弦 $\sinh x$ 一样 ($\text{sh} x$), $\frac{(e^z - e^{-z})}{2}$ 被定义为 $\sinh z$; 同样 $(\text{ch} z) \cosh z = \frac{(e^z + e^{-z})}{2}$ 。

由于 e^z 以 $2\pi i$ 为周期, 因此双曲函数也以 $2\pi i$ 为周期; 另外, 可看出 $\cosh z = \cos(iz)$ 、 $\sinh z = -i \sin(iz)$ 【这或许是因为将 $\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ 取名为 $\sinh z$ 的原因之一】; 同实数域内所满足的一样, 也有 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ 。有意思的是, 若将 $\cosh z = \cos(iz)$ 、 $\sinh z = -i \sin(iz)$, 代入其中, 便可得到 $\cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$, 而之前的 $\cos z$ 和 $\sin z$ 也满足此等式。

从另一个角度, 我们也可通过 $\cos z$ 和 $\sin z$ 所满足的平方和 $=1$, 得到 $\cos(iz)$ 和 $\sin(iz)$ 满足它 【因为 iz 也属于复数 z 】, 进而得到 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ 。

④. $\ln z = \ln(|z|e^{i\text{Arg } z}) = \ln|z| + i\text{Arg } z$ (也就是 $\ln \rho + i\varphi$), 是个无穷多值函数。可见在复数范围内, 负数的对数依然有意义: 复数不仅保证了 $\sqrt{-1}$ 的意义, 还保留了 $\ln(-1)$ 的存在意义 $= \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi)$ 。

根据 $\ln z = \ln \rho + i\varphi$, 若令 $|z|=1$, 则 $\ln z = i\varphi$ 、 $\varphi = -i\ln z$, 因此许多时候我们可以用复数 $-i\ln z$, 来代替幅值这一实变数 φ , 用复数知识来解决一些实数范围内的问题; 不过得注意, 此时的 z 只能在复平面的圆周 $|z|=1$ 上变化, 且 z 的辐角 $\text{Arg } z$ 的值, 即为 $-i\ln z$ 的值, 也就对应所要代表的 φ 。【比如我们之后便可以用它来求 $\sum_{i=1}^n \cos(i\varphi)$ 、 $\sum_{i=1}^n \sin(i\varphi)$ 以及 $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \cdot d\theta$ 】

另外, 同样令 $z = e^{i\varphi}$ 或 $\ln z = i\varphi$, 还可以用复数来表示实三角函数如 $\cos \varphi$: 将 $z = e^{i\varphi}$ 三角表示展开后平方: $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 + i2\sin \varphi \cos \varphi$, 于是 $z^2 + 1 = 2\cos \varphi [\cos \varphi + i\sin \varphi] = 2z \cos \varphi$, 于是 $\cos \varphi = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $d\varphi = \frac{1}{iz} dz$; 当然也可以用 $\varphi = -i\ln z$ 代入 $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ 得到; 这样就能直接代入诸如 $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \cdot d\theta$ 中了(然后使用 2.4 的柯西公式或 2.3 末的重要公式来推导, 不过二者的途中都需要用到二项式定理)。

⑤. 设 s 是任意复常数, 对 $z \neq 0$, 幂函数定义为 $z^s = e^{s \cdot \ln z} = e^{s \cdot (\ln \rho + i\varphi)} = \rho^s \cdot e^{i(s\varphi)}$; 当 s 为正实数时, 补充规定 $z=0$ 时, $z^s=0$ 。从中可见, 一般来说, z^s 也是个无穷的多值函数。

1.3 导数

设 $w=f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有定义, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|z - z_0| < \varepsilon$ 时, 有 $|f(z) - w_0| < \delta \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ 。——若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。注: $z \rightarrow z_0$ 是以任意方向、任意曲线逼近(而不像实变数 Δx 只能沿着实轴逼近 0), 条件很强, 要求较高, 非常严格。

设 $w=f(z)$ 是在区域 B 上定义的单值函数, 若在 B 上的某点 z 处, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 存在, 且与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关, 则称 $w=f(z)$ 在 z 点可导(单演), 且此极限为 $f(z)$ 在 z 处的导数 or 微商。

现察看 Δz 沿着//实轴方向逼近 0 的情形: $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w(x+\Delta x, y) - w(x, y)}{\Delta x} = \frac{[u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y)] - [u(x, y) + i v(x, y)]}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \cdot \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$, 取极限 $\Delta z \rightarrow 0$ (由于 $\Delta y=0$) 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 后, $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

Δz 沿着//虚轴方向逼近 0: 类似地有 $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w(x, y+\Delta y) - w(x, y)}{i \cdot \Delta y} = \frac{1}{i} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i \cdot \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right]$, $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ 。【可加这种不对称的差异, 根源来自于分母 $\Delta z = i \cdot \Delta y$ 多了一个 i 】

至少它俩必须得相等，复变函数才可能可导。于是 $\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ ，实部和虚部得相等，即有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 【可以这么记：方程左边均是对 x 的偏导，后者是 v 对 x 的，且多了个负号；而不用记忆右边，只需知道每个方程左右的分子相异、分母不同即可：像线代一样发生了“元素排斥”；或许因不对称能创造最终的对称，或者创造与该不对称相对称的不对称，而有了不对称本身的美，这便是为什么 Mr.Li 说它是物理学/数学中较美的公式之一；与理论力学中的(哈密顿)正则方程类似】；这被称为柯西-黎曼方程，or 柯西-黎曼条件。C-R 条件是复变函数可导的必要条件。“ u 、 v 在 z 处满足 C-R” + “ u 、 v 在 z 处有连续一阶偏导”，是复变函数在 z 处可导的充分(必要)条件。证明如下：

正如高数中，二元实变函数一阶偏导数存在且连续的条件，将推出 f 可微一样；这里“ u 、 v 在 z 处有连续一阶偏导”将推知 u 、 v 可微：即可写成 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ 、 $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ ；那么接着 $dw = du + i \cdot dv = (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + i(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})dy = (\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})dx + (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x})dy = (\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})(dx + i \cdot dy) = (\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})dz$ 。——那么 $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ ，即推出了复变函数在 z 处可导。【该式 $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ 与之前所得的 $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ 、 $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ 是一致的】

极坐标下的 C-R 条件： $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ 。【它也可以这么记：前后(/左右)顺序上， (x,y) 对应 (ρ, φ) ，因此俩方程左边都分别是对 ρ 的偏导，且后一个是 v 对 ρ 的偏导，对应着多了一个负号；剩下的元素仍然利用“互斥规则”而不需要记忆；只不过两方程右边都还需要多 \times 一个 $\frac{1}{\rho}$ ：从量纲上就可以看出来。】

以上两式中有 $\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ ，可见 $u = u(\rho, \varphi)$ ，而 $\rho = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\varphi = \varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ ，因而 $u = u(x, y) = u(\rho(x, y), \varphi(x, y))$ ，那么 $\frac{\partial \rho}{\partial x}(\rho, \varphi) = \frac{x}{\rho} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} = \cos \varphi$ ； $\frac{\partial \rho}{\partial y}(\rho, \varphi) = \frac{y}{\rho} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho} = \sin \varphi$ ； $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\rho, \varphi) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\rho \cdot \sin \varphi}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho} \sin \varphi$ ； $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\rho, \varphi) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\rho \cdot \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi$ 。

因此： $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} (-\frac{1}{\rho} \sin \varphi)$ ；而 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \cos \varphi$ ，二者相等，得 $\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} (-\frac{1}{\rho} \sin \varphi) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \cos \varphi$ 。另外，将上组式子中的 $v \leftrightarrow u$ 替换： $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} (-\frac{1}{\rho} \sin \varphi)$ ， $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \cos \varphi$ ，二者满足 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ： $\frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} (-\frac{1}{\rho} \sin \varphi) = -\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} \cos \varphi$ 。

将上述方程组中相同函数名的三角函数合并： $(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho}) \cdot \sin \varphi + (\frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho}) \cdot \cos \varphi = 0$ ， $(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho}) \cdot \cos \varphi - (\frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho}) \cdot \sin \varphi = 0$ [前者左侧移到右侧，后者右移左]，即相当于有

$(a,b) \cdot (y,x)=0$, 且 $(a,b) \times (y,x)=0$; 两方程对于任何 φ, ρ 均成立, 即相当于对于任意 (y,x) , 两式子均同时成立, 那么只能有 $(a,b)=(0,0)$, 即 $\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ 。

这样的证明 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ 是左到右的证明、正向证明、推导性证明(即更偏向推导而非证明)、必要性证明; 而你也可以利用 $u=u(x,y)=u(x(\rho,\varphi),y(\rho,\varphi))$, 以及 $\frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\varphi), \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\rho,\varphi), \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\varphi), \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\rho,\varphi)$, 来进行右到左的证明、逆向证明、验证性证明(即更偏向证明而非推导)、充分性证明, 这样会轻松许多。

1.4 解析函数

设函数 $w=f(z)$ 在及 z_0 其邻域内处处可导, 称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。若 $f(z)$ 在区域 B 内每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 B 上(内)的解析函数。

在某点, 解析 \neq 可导, 解析条件比可导更苛刻, 即解析 $>$ 可导, 即解析为可导的充分条件, 可导为解析的必要条件(“解析”在“可导”的圈子里); 而在某区域 B 上, 解析 = 可导。【由于解析是可导的子集, 那么之前应用在可导函数上的 C-R 条件, 便可以应用在接下来的解析函数中】

不解析的点, 称为函数的奇点, 比如: $f(z)$ 在点 z_0 —— 1. 无定义 or 无确定值 2. 不连续 3. 不可导 4. 可导但在 z_0 邻域内非处处可导。

解析函数的两条主要性质(两个必要条件): (充要条件的话, 就是之前的定义嘛 - -)

①. 若 $f(z)=u+iv$ 在 B 上解析, 则(若进一步令) $u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$ (C_1, C_2 为常数), 是 B (这里的 B 有点不像是复平面上的, 因 u, v 分别是二元实函数, 因此 y 轴单位量不是 i 而是 1 ; 这里若分别单独来看 u, v 的 (x,y) , 则这确实对应实平面; 但 u, v 的得来是从 $f(z)=f(x+iy)$ 分离后得到的, 而 $z=x+iy$ 中的 x, y 又属于复平面, 因此怎么说都行; 之前本该在介绍区域的时候就介绍它的, 只不过这里时机更为成熟: 因此我们似乎并不需要区分 y 轴的单位间隔的单位是 i 还是 1) 上的两组正交曲线簇(族群)。——将 C-R 条件: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, 前式左边乘以后式右边, 移项, 即可得到 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \cdot (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) = \nabla u \cdot \nabla v = 0$; 这表明 $\nabla u, \nabla v$ 所代表的曲线族 “ $u=C_1$ ” 和 “ $v=C_2$ ” 的法向量相互垂直, 因此 “ $u=C_1$ ” 和 “ $v=C_2$ ” 处处正交。

②. 若 $f(z)=u+iv$ 在 B 上解析, 则 u, v 均是 B 上的调和函数。【调和函数: (1). 函数 $H(x,y)$ 在区域 B 上有二阶连续偏导数, 且 (2). 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 H=0$; 这里的 $H(x,y)$ 应是指实函数, 对应的区域 B 为实二维平面上的区域】

(1).2.3 节将证明, 区域 B 上的解析函数在 B 上存在任意阶导数, 因此分别关于 $u(x,y)$ 、 $v(x,y)$ 的 3 个, 共 6 个二阶偏导数, 均存在且连续(三阶导存在, 因此二阶导连续)。

(2).将 C-R 方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 中的前式对 x 求导, 后式(稍调换了顺序)对 y 求导, 相加便消去了 v 的二阶混合偏导, 即得到了 $\nabla^2 u = 0$ 。对 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 进行同样的操作可得: $\nabla^2 v = 0$ 。

这样 u 、 v 都满足二维的 Laplace 方程, 它们都是调和函数。由于这俩实函数都是同一个复变函数的实部和虚部, 也称它们为**共轭调和函数**。

②'.这样的话, 若给定一个**二元调和函数**, 可将其认为某个解析函数的实部, 利用 C-R 求出相应的虚部, 也就确定了对应的某个解析函数。

若将假定的**二元调和函数**认为是解析函数的实部 $u(x,y)$, 我们来尝试着求一下其 $v(x,y)$: 首先证明一下 v 的微分 $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ 是全微分, 再利用全微分的性质求 v :

(1). $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$, 其中 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(-\frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0$ [C-R 条件+ u 为**二元调和函数**($\nabla^2 u = 0$)], 因此 $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ 是全微分。

(2).以下三种方法, 第一步都得利用 C-R, 用 u 的 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 来得到(表示) $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$:

a.曲线积分法: 由于全微分的积分与路径无关, 故可选取特殊的积分路径, 对 $dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ 进行二型(曲)线积分。

b.凑全微分显式法: 可将 $dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ 的右端凑成全微分的显式, $dv = d(\text{它})$, 则 $v = \text{它} + C$ 。

c.不定积分法: 将 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ 两边对 y (偏)积分【已知 u 为某一解析函数的实部, 并给出了表达式的话】, 得到 $v = \int \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + g(x)$, 再让两边对 x 求偏导, 即有 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + g'(x)$, 又因 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, 因此通过对比 $\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + g'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$, 可得到 $g(x)$ 表达式以及最终的 $v(x,y)$ 。

例: 若将 $\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 认为是解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$ [你可以先验证一下它是不是调和的-], 求其实部 $u(x,y)$, 以及 $f(z)$ 。

$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 不好求。试改用极坐标系: $v(x,y) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\rho(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{2\rho} \sin \frac{\varphi}{2}$ 。【由于 $\varphi \in [0, 2\pi]$, 因此 $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$, $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ 开根号取正】

首先根据 $\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \sin \frac{\varphi}{2}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}$, 利用极坐标下的 C-R 条件: $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, 得到 $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{\rho}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}$.

于是 $du = \sqrt{\frac{1}{2\rho}} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = d(\sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2})$ 。——如何一眼看出来? : 减号前一项暗示 u 中有 $\cos \frac{\varphi}{2}$ 作为因子, 而后一项又暗示有 $\sqrt{2\rho}$ 作为因子 = , 其实这就相当于脑子里默默地划拉了一下不定积分法不是么。

$$\text{因此 } f(z) = u + iv = (\sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2} + C) + i\sqrt{2\rho} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}} + C = \sqrt{2z} + C.$$

1.5 平面标量场

若研究的场在空间某方向上是均匀的, 从而只需要在上该方向的平面上研究它, 这样的场称为平面场。介绍一下解析函数在平面场研究中的应用: 从平面静电场开始:

书头我们说过, 没有电荷的存在的区域, 静电场的电势 U , 满足二维的拉普拉斯方程, 因此可用区域与电场所处区域相同, 的某一解析函数 $f(z)$ 的实部 u , 来表示该区域静电场的电势(你看, $U \longleftrightarrow u$ 父子)。——我们称这一解析函数为该平面静电场的复势, 因为其实部或虚部(v 也可以表示电势, 不过不是因为 $V \longleftrightarrow v$, 而是: $\nabla^2 v = 0$)就是电势。

为确定起见(: 解析函数的 u, v 都可表示电势差 U 或电势 V - -), 设 u 表示电势, 则 “ $u(x, y) = \text{Const.}$ ” 表示等势线族; 根据解析函数的性质①., $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ 所导致的 $u = C_1$ 和 $v = C_2$ 处处正交, 暗示我们 $v(x, y) = \text{Const.}$ 就是电场线族。

v 的更深层意义还将体现如下: 取两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 任作一曲线连接 A 和 B , 我们来算一算穿过曲线 AB 的电场强度通量 N (这里指穿过一块母线 \perp 我们所研究的平面, 与之相交于曲线 AB , 且高为 1 的柱面): 设柱面高矢量垂直纸面(x - y 面)向外, 即为 z 轴的单位矢量 \mathbf{k} ; $d\mathbf{s}$ 的方向从 A 指向 B ; 有向曲面的正方向 $d\mathbf{A}$ (作为参考的面元矢量) 位于 $d\mathbf{s}$ 的左手侧, $N = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times d\mathbf{s}) = \iint_S \mathbf{k} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \cdot \int_A^B (d\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} \cdot \int_A^B (d\mathbf{s} \times -\nabla u) = \mathbf{k} \cdot \int_A^B (\nabla u \times d\mathbf{s}) = \mathbf{k} \cdot \int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, 0 \right) \times (dx, dy, 0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \times (dx, dy) = \int_A^B \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \int_A^B \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_A^B \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx = v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1)$.

因此 $v(x, y)$ 在 A 和 B 两点的取值之差, 就是在这样设定的 $d\mathbf{A}$ 的正方向下, A, B 两点间穿过的电场强度通量。因此称 $v(x, y)$ 为通量函数【我们可以通过察看两点间的通量来间接得到通量函数表达式, 它像电势 u 一样, 常数项因规定的零点在哪而异】。——令 $v = C_2$, 这表示通量 v 不随 (x, y) 变化的 (x, y) 曲线, 即该曲线所对应的(积分)路径

上, 每一点的 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times d\mathbf{s}) = \mathbf{k} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = |\mathbf{k}| \cdot |d\mathbf{s} \times \mathbf{E}| \cdot \cos(0^\circ \text{ 或 } 180^\circ) = 0$, 得到 $|d\mathbf{s} \times \mathbf{E}| = 0$, 即 $\mathbf{E} // d\mathbf{s}$, 这表明 $v = C_2$ 的物理含义, 正是**电场E线族**。【有趣的是: 在同一个 (x, y) 处, $\nabla u // "v = C_2"$ 】

由此可见, 只要给出复势, 就不仅给出了电势分布(即 $u = C_1$), 还直接给出了电场线族方程(即 $v = C_2$)、电场强度通量密度(单位 $d\mathbf{A}$ 中的 \mathbf{N} , 就是 \mathbf{E} 的强度)、电荷密度(由高斯定理得来的, 麦克斯韦方程组的第一条: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$ 、 $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_{e0} \cdot dV$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{e0}$)。【当然, 更有意义的是已知 u , 再求出适当的复势, 来求 v 】

题外话 1:

同样, 在流体力学中, **平面无旋液流**——没有旋度的(速度)矢量, 可以表示为某标量的梯度, 因此称该标量为(速度)势[电动力学中提到过: “标量场的梯度必为无旋场 $\nabla \times \nabla \phi = 0$ ” \Leftrightarrow “无旋($\nabla \times \mathbf{f} = 0$)场 \mathbf{f} 必可表示为标量场的梯度 $\mathbf{f} = \nabla \phi$ ”]; 借助**速度势**就可以将平面无旋液流问题转换为平面标量场问题。

在没有源和汇(相当于平面静电场中没有点电荷)的区域, 速度势满足拉普拉斯方程, 因此可用某区域的解析函数 $f(z) = u + iv$ 来表示该区域上某平面无旋液流的速度势; $f(z)$ 称为该平面无旋液流的复势。为确定起见, 用 $v(x, y)$ [速度 $\mathbf{v} \longleftrightarrow v$] 来表示速度势, 则曲线 $u = C_1$ 就是流线族, u 就是**流量函数**。它跟通量函数一样, 在 A、B 两点取值之差, 即为流线在 A、B 两点间穿过的流量。【在 同一个 (x, y) 处, $\nabla v // "u = C_1"$ 】

例: 开平面上的解析函数(你可以先验证验证, 看看两个必要条件成不成立先): $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, 若用虚线描绘 “实部 $u = C_1$ ” ——以 $|x| = |y|$ 为渐近线的双曲线族, 用实线描绘 “虚部 $v = C_2$ ” ——以 $x \cdot y = 0$ 为渐近线的双曲线族。

则若将该等温网看为**平面静电场**, 则这是由两块截面分别为 y 、 x 轴的无限大带(等量同号)电平面创造的, 实线为等势线, 虚线为电场线(可见虚部 $v = \text{const.}$ 也可作为等势线)。

【但这里有点问题, z^2 处处解析, 对应着 $\nabla^2 v = 0$, 但若将该 z^2 理解为某平面静电场的复势, 则 $\nabla^2 v = 0$ 意味着 $\nabla \cdot (-\mathbf{E}) = 0$, 即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 其积分形式为 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\varepsilon_0} Q_i = 0$, 这在电动力学中意味着高斯面内不包含电荷, 也就是说, 复平面上任意一点处没有电荷, 包括 $x=0$ 和 $y=0$ 两个轴上, 但这又与两块带电平面的解释相矛盾——虽然在 $x=0$ 和 $y=0$ 之外, 对数学模型所对应的物理情景解释得还行; 当然, 电动力学在后面利用**唯一性定理**确定静电场的电势场强分布时, 会提及, $\nabla^2 v = 0$ 只需要在各个区域内部, 而不需要在交界面处给定。但似乎这并没正面回答这里的问题。】

若将该等温网看为**平面无旋液流**，则这是液体从 y 轴(虚轴)的 $+\infty$ 方向流来，被 x 轴阻拦而向 $x=\pm\infty$ 两方向流去的情形，实线为流线，虚线为等速度势线(可见实部 u 也可作为速度势)。

题外话 2:

物体的稳定温度分布中，也有**平面温度场**。均匀物体中的稳定温度分布满足拉普拉斯方程。所以可设某区域上的解析函数 $f(z)$ 的实部 u 为温度分布，则 $v=C_2$ 即为热流线族， v 为**热流量函数**，它在 A 、 B 两点取值之差正比于 A 、 B 间穿过的热流量。【在同一个 (x,y) 处， $\nabla u // "v=C_2"$ 】

通常借用平面温度场的词汇将各种物理情景下的曲线族 $u=C_1$ 和 $v=C_2$ 均合称为**等温网**。

题外话 3:

在实数域：如果给出了电荷分布情况，则先尝试着求几部分场源单独的场强分布，再求合场强分布，以此求总电势分布的话，有点复杂。正如我们希望先求两个场源的电势分布再标量叠加来求总的电势分布一样(并且还可通过 $\mathbf{E}=-\nabla u$ 继续求合场强)——在复势中，我们也遵从类似的简单优先的原则：

由于复势的实部和虚部，在含义上都是**同一矢量场沿(同一)路径积分的结果(通量函数是点乘切向矢量，势函数是点乘径向(法向)矢量)**，都是**标量场**；因此我们也总希望先通过矢量场，确定下来通量函数 or 势函数后，再通过 C-R 条件求出另一个，以此确定下来复势；然后再通过各个场源的复势叠加，来求得总标量场的复势(因为复势的实虚部均是标量，复势也是标量，满足叠加原理)，进而以此来求得总场的电场线方程和等势线方程。

而如何在第一步通过矢量场来确定**通量函数** or **势函数**呢，下面举个例子：对于某一位于原点且 \perp 纸面的线电荷(线密度为 $+q$) 在纸面上产生的电场，在 $d\varphi$ 方向角内的电通量 $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{q}{2\pi\rho\epsilon_0} \cdot \mathbf{e}_r\right) \cdot (\rho d\varphi \cdot \mathbf{e}_r) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} d\varphi = \frac{q\varphi}{2\pi\epsilon_0} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$ ，以此确定**通量函数** $v = \frac{q\varphi}{2\pi\epsilon_0} + \text{const.}$ 。——于是 $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{q}{2\pi\rho\epsilon_0}$ ，偏积分得**势函数** $u = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + f(\varphi)$ ，利用 $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ ，可对比得出 $f(\varphi) = C$ 。现令 C 和 $\text{const.} = 0$ (这对应着设定了平面上某条**圈**和**线**分别为**势函数**和**通量函数**的**零点**)，于是 $f(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + i \frac{q\varphi}{2\pi\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln z$ 。

于是便可通过 $f(z+a) - f(z-a)$ [左正右负] 或 $f(z-a) - f(z+a)$ [左负右正] 来得到在 $z = \pm a$ 处的两个电偶(线)极子所产生的总场的复势，于是总场的**势函数**和**通量函数**、**等势线**和**电场线**等特征就出来了。——所得的 $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+a}{z-a}$ ，以及 $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z-a}{z+a}$ ，均在 $\pm a$ 处不解

析——这就可以从物理的角度解释为：那里有电荷！因此电场 \mathbf{E} 的散度 $\neq 0$ ，即势函数 u 不满足调和。【当然， $\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+a)+iy}{(x-a)+iy} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x^2-a^2+y^2)-i2ay}{(x-a)^2+y^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} [\ln \rho' + i\phi']$ 】

例：已知平面静电场的电场线为抛物线族 $y^2 = c^2 + 2cx (c > 0)$ ，求等势线。

我们先将其表示为 $v(x,y) = C_2$ 的形式：解一元二次方程得 $c = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ ，又 $c > 0$ ，于是 $-x + \sqrt{x^2 + y^2} = c$ 。看样子 $-x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 就是 $v(x,y)$ ？可惜 v 得是调和函数，才能通过复势来求电势 u ，而 $-x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 却不是： $\nabla^2(-x + \sqrt{x^2 + y^2}) \neq 0$ 。

因此不能有 $v(x,y) = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$ ，而应是 $v = f(-x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ，这样才可能使 $\nabla^2 v = 0$ ，并且与此同时满足 $v = f(-x + \sqrt{x^2 + y^2}) = C_2$ 对应 $-x + \sqrt{x^2 + y^2} = c$ 。【函数/因变量 $f(-x + \sqrt{x^2 + y^2}) = \text{常数 } C_2$ ，将解得相应自变量 $-x + \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数 } c$ 】

(1). **数学过渡：**根据 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)$ ； $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{1}{\rho} \cos \phi$ ；对前者我们有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho^2} \sin \phi\right)\right] \cos \phi + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \cos \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right] \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \phi + \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi\right)\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \cos \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right] \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \phi + 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi\right)\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \cos \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right] \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)$ ；对后者我们有： $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{1}{\rho^2} \cos \phi\right] \sin \phi + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{\rho} \cos \phi\right)\right] \frac{1}{\rho} \cos \phi = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \sin^2 \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{1}{\rho^2} \cos \phi \sin \phi\right] + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{\rho} \cos \phi\right)\right] \frac{1}{\rho} \cos \phi = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \sin^2 \phi + 2 \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{1}{\rho^2} \cos \phi \sin \phi\right] + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{\rho} \cos \phi\right)\right] \frac{1}{\rho} \cos \phi$ 。【这里也可用 $\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \cos \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right]^2$ 来算 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ，可能会更快】

$v \leftrightarrow u$ 替换： $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \cos^2 \phi + 2 \frac{\partial v}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi\right)\right] + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \cos \phi\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right] \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)$ ； $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \phi + 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{1}{\rho^2} \cos \phi \sin \phi\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{\rho} \cos \phi\right)\right] \frac{1}{\rho} \cos \phi$ 。

因此 $\nabla^2 u = 0$ 用 **二维极/柱坐标** 表示便是： $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \phi + 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(-\frac{1}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi\right)\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \cos \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right)\right] \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \phi + 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{1}{\rho^2} \cos \phi \sin \phi\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \left(-\frac{1}{\rho} \sin \phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{\rho} \cos \phi\right)\right] \frac{1}{\rho} \cos \phi = 0$ ，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \frac{1}{\rho^2} = 0$ ；同理 $\nabla^2 v = 0$ 用 **二维极/柱坐标** 表示便是： $\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \frac{1}{\rho^2} = 0$ 。【注：这里的 $\nabla^2 u$ 、 $\nabla^2 v$ 以及之前的一阶偏导 $\frac{\partial u}{\partial x}(\rho, \phi)$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y}(\rho, \phi)$ 等，均没有用到 C-R 条件，只是数学上的坐标变换而已；另外，同样的方法，我们还可推出 **三维的拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$ 的球坐标表示形式**，并还能将 $\nabla^2 u$ 、 $\nabla^2 v$ (或者说 ∇^2) 的 **三维球坐标表示形式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$ 应用到《原子物理》中求解氢原子波函数上去】**

(2). **Game starts:**

首先将 $v=f(-x+\sqrt{x^2+y^2})$ 写成极坐标形式: $f(\rho(1-\cos\varphi))$, 并且记为 $f(t)$; 然后再利用 $\nabla^2 v=0$, 即 $\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \frac{1}{\rho^2} = 0$, 得到 $f''(t) \cdot (1-\cos\varphi)^2 + f'(t) \cdot \frac{1}{\rho} (1-\cos\varphi) + [f'(t) \cdot \rho \sin\varphi]' \cdot \frac{1}{\rho^2} = 0$, 即 $f''(t) \cdot (1-\cos\varphi)^2 + f'(t) \cdot \frac{1}{\rho} (1-\cos\varphi) + [f''(t) \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi + f'(t) \cdot \rho \cos\varphi] \cdot \frac{1}{\rho^2} = 0$, 即 $f''(t) \cdot (2-2\cos\varphi) + f'(t) \cdot \frac{1}{\rho} = 0$. 得到 $\frac{f''(t)}{f'(t)} = -\frac{1}{2\rho(1-\cos\varphi)} = -\frac{1}{2t}$.

因此 $\frac{d \ln[f'(t)]}{dt} = -\frac{1}{2t}$. 于是 $\ln[f'(t)] = \ln t^{-\frac{1}{2}} + C'$, 于是 $f'(t) = C \cdot t^{-\frac{1}{2}}$, 因此 $f(t) = C_I \cdot t^{\frac{1}{2}} + C_{II}$, 即 $v = C_I \sqrt{\rho(1-\cos\varphi)} + C_{II}$. 现直接引用第 9 页的例子, 可得到 $u = C_I \sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2} + C_{III}$. 于是等势线方程为 “ $u=C_1$ ”, 即 $C_I \sqrt{2\rho} \cos \frac{\varphi}{2} + C_{III} = C_1$. 于是便有 $\sqrt{\rho(1+\cos\varphi)} = \frac{C_1 - C_{III}}{C_I}$, 令 $c' = (\frac{C_1 - C_{III}}{C_I})^2$, 则 $x + \sqrt{x^2 + y^2} = c'$, 得到 $y^2 = c'^2 - 2c'x (c' > 0)$. 【当然了对于 $v=C_2$ 转换到 $t=c$, 常数 C_2 与 c 之间的关系, 也满足类似的: $c = (\frac{C_2 - C_{II}}{C_I})^2$ 】

$u=C_1$ 所对应的 $y^2 = c'^2 - 2c'x (c' > 0)$, 对应的实线, 代表着等势线族; 而 $v=C_2$ 所对应的虚线 $y^2 = c^2 + 2cx (c > 0)$, 代表的是电场线族。——这是一块横截面为负实轴(负半 x 轴)的无限大带电平面产生的平面静电场。

1.6 多值函数

(一).多值函数的定义

仿照第 4 页中复变函数的定义, 对于复数平面上的一个区域 B , 其中的每一个 z , 都有多个复数值 w 与之对应, 则称 w 为 z 的多值函数。【将 “一个 or 多个” \rightarrow 多个】

在初等函数中, 除了单值函数, 还有多值函数, 如: 根式函数(幂函数的反函数)、对数函数(指数函数的反函数)、反三角函数(三角函数的反函数)。下面我们以根式函数为例, 介绍多值函数的一些性质:

(1). 实变函数看上去也有多值的: 比如所有满足 $y^2=x$ 的 $y=f(x)$ 都是根式函数, 但若都将它们认为是同一个根式函数(实际上一般不这么认为), 则该根式函数有两个分支: $+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$, 它们可看作该 $y=f(x)$ 的两个单值分支(但实际上单值分支不是这么定义的), 但它们是相互独立的。

然而对于复变根式函数, 满足 $w^2=z$ 的 $w=f(z)$ 也有两个: $+\sqrt{z}$ 和 $-\sqrt{z}$, 但其中的每一个又都可以再分裂为两个单值函数: 比如 $+\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i \cdot \text{Arg } z} = \sqrt{|z|} e^{i \cdot \frac{\arg z}{2} + k \cdot i\pi}$, 它可以分裂为 $k=0, 2, 4, \dots$ 所对应的 $w_1 = \sqrt{|z|} e^{i \cdot \frac{\varphi_1}{2}} [\varphi_1 = \arg z \in [0, 2\pi)]$; 且可进一步将 φ_1 拓展为(本身 φ 在之前就是) $\text{Arg } z$ 的属性 $\in [0 + 4n\pi, 2\pi + 4n\pi)$ ——这是为了对应 $k=0, 2, 4, \dots$, 以及 $k=1, 3, 5, \dots$ 所对应的 $w_2 = \sqrt{|z|} e^{i \cdot \frac{\varphi_2}{2}} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt{|z|} e^{i \cdot \frac{\varphi_2}{2}} [\varphi_2 = \arg z \in [0, 2\pi)]$; 且进一步地

$\in [0+4n\pi, 2\pi+4n\pi]$ 。——这两个在相同 φ 取值处($\varphi_1=\varphi_2$; 指定义域未扩充的 φ_1, φ_2)的函数值不同, 且都满足 $f(z)=\sqrt{z}$ 的 w , 称为多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的两个单值分支。【注: 这些 $2k\pi, 4n\pi$, 虽然在数学上取值是分立的, 但在物理情景(甚至是数学情景)上, k 的台阶般整数地增加, 对应着极径连续逆时针转动, 转过一圈又一圈; 它们并不是纯数学且分立的, 有对应的连续的物理情景, 前者是由后者创造的: “ z 转一圈 w 不复原(变成 $-w$, 相当于 w 转了半圈, 即 π 角), z 转两圈 w 复原(w 转了 2π)”, 之后也会谈及因此而创造的黎曼面】

$+\sqrt{z}$ 的两个分支 $w_1=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi_1}{2}}=+\sqrt{z_1}$ 和 $w_2=-\sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi_2}{2}}=-\sqrt{z_2}$, 看上去有点像[这是个巧合, 等会我们会介绍有些函数甚至不只两个分支, 这样区别就明显了] $w^2=z$ 所分成的两个: $+\sqrt{z}$ 和 $-\sqrt{z}$, 但本质上前者才能称为两个单值分支, 因为它们并非相互独立: 例如, 若我们先考虑 w_1 , 让宗量 z 从某点 $z_0(|z_0|, \varphi_{10})$ 出发, 在复平面上沿着某一包含原点 $z=0$ 的闭合路径 $l[|z|, \varphi_1]=0$ 绕行一周回到 z_0 , 则 φ_1 增加了 2π (准确地说是 $|\Delta\varphi_1|=2\pi$, 这里我们假设 z 是逆时针旋转的, 并且并不关心 $|z|$ 怎么变化, 只需要让它最终回到 $|z_0|$ 即可: $\varphi_1=\varphi_{10}+2\pi$), 对应的 $w_1(|z_0|, \varphi_{10}+2\pi)=\sqrt{|z_0|}e^{i\frac{\varphi_1}{2}}=-\sqrt{|z_0|}e^{i\frac{\varphi_{10}}{2}}$ 变成了 $-w_1(|z_0|, \varphi_{10})$, 相当于进入了 “ $k=1$ 且 $\varphi_{20}=\varphi_{10}$ ” 的 $w_2(|z_0|, \varphi_{20})=-\sqrt{|z_0|}e^{i\frac{\varphi_{20}}{2}}$, 也就进入了另一单值分支 w_2 。

而如果 z 从 $z_0(|z_0|, \varphi_{10})$ 出发, 沿着另一不包含复平面原点 $z=0$ 在其内的闭合路径 $l'[|z|, \varphi_1]=0$ 绕行一周回到 z_0 , φ_1 并没有改变(同样是不回头地朝某个确定方向(顺 or 逆)绕曲线一周, 这次的 $\Delta\varphi_1$ 在过程中却有正有负, 且正负相消使得最终 $\Delta\varphi_1=0$, 让 φ_1 又回到了 φ_{10})(就像高斯定理中闭合曲面外的点电荷穿过曲面的电通量 $=0$ 一样, 沿闭合曲面积分走的立体角并不是 4π , 而是 $<4\pi$ 的值), w 仍然 $=w_1=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi_1}{2}}$, 仍然在单值分支 w_1 内, 并没有转入另一条单值分支 w_2 。

于是对于 $w=\sqrt{z}$ 这个函数而言, $z=0$ 点具有以下特征: 当 z 绕某点一周回到原处时, 对应函数不复原; 且各个分支在 $z=0$ 处的函数值相同 $=0$ 。——定义: 对于多值函数 $w=f(z)$, 若 z 绕某一点一周, 函数 w 不复原(并且函数值也不还原)(跨入另一个分支), 但在该点各单值的分支函数值相同(而不是在绕行每周的起终点 z_0 处, 这一分界点处的函数值相同), 则称该点为多值函数的支点。——若当 z 绕支点 n 周回到原处, 函数 w 复原, 便称该点为多值函数的 $n-1$ 阶支点。——比如 $z=0$ 是 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点 ($n=1+1=2$, 绕两圈后复原; 支点与之后的极点、零点等定义不同, 注意区分)。

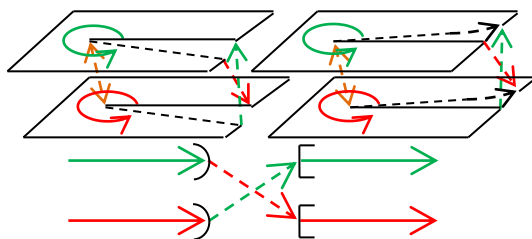
除了 $z=0$ 外, $z=\infty$ (无穷远点)也是 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点: 令 $z=\frac{1}{t}$ (其中 t 也像 z 一样是个复数 and 宗量, 也有 $t=|t|e^{i\theta}$), 则有 $w=\sqrt{\frac{1}{t}}=\sqrt{\frac{1}{|t|e^{i\theta}}}=\frac{1}{\sqrt{|t|}}e^{-i\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{|t|}}e^{-i\frac{\arg z}{2}-k\cdot i\pi}$, 其中 $w_1=\frac{1}{\sqrt{|t|}}e^{-i\frac{\theta_1}{2}}[\theta_1\in[0+4n\pi, 2\pi+4n\pi]]$; $w_2=\frac{1}{\sqrt{|t|}}e^{-i\frac{\theta_2}{2}-i\pi}=-\frac{1}{\sqrt{|t|}}e^{-i\frac{\theta_2}{2}}[\theta_2\in[0+4n\pi, 2\pi+4n\pi]]$ 。 t 以 t_0 为起点, 绕 $t=0$ 一周回到原处时, w 值从 $w_1=\frac{1}{\sqrt{|t_0|}}e^{-i\frac{\theta_{10}}{2}}$ 变

为了 $-|t_0|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta_{10}}{2}}$, 即 $\theta_2=\theta_{10}$ 的 $w_2=-|t|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta_2}{2}}$, 函数 w 不还原(从 w_1 进入另一个分支 w_2), 绕两周后 w_2 还原为 w_1 。又 $w_2=-0^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta_2}{2}}=\infty=0^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\theta_1}{2}}=w_1$ 【 $-0^{-\frac{1}{2}}$ 可能因底数 0 偏向 0^- 而不一定是负值, 同理 $0^{-\frac{1}{2}}$ 不一定为 $+\infty$, 因此它俩是一个效果: $-0^{-\frac{1}{2}}=0^{-\frac{1}{2}}=\infty$; 这或许是无穷远点 $z=\frac{1}{t}=\frac{1}{0}$ 的实虚部没有意义的原因的一种解释; $t=0$ 的辐角没有意义, 但其幅值 $|t|=0$ 】, 因此 $t=0$ 是 $w=\sqrt{\frac{1}{t}}$ 的一阶支点, 同时 $z=\infty$ 也是 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点。

(2).我们之前所定义的解析函数是单值的, 因此当时可以讨论其微积分性质(当时主要是微分)。然而这里的多值函数却因多值而不连续了: 同一个 z 处对应多个 $f(z)$ 值。——要讨论某复变函数的微积分性质, 前提是这家伙得连续! 在每个 z 处 $w=f(z)$ 不同的话, 没法积分。因此其中一个方法是: 将多值函数单值化。【我们做了缝合工作后, w 在两个支点($z=0, \infty$)处、 z_0 处、 $\varphi=0$ 处均不是突变的, 而是连续的】

现在我们对于描述 $w=\sqrt{z}$ 随 z 的变化情况(仍以该函数为例), 作如下约定: 对于两个单值分支, 宗量 z 的变化范围分别是: $0 \leq \text{Arg } z$ (即 φ) $< 2\pi$, 对应单值分支 w_1 , 且对应着 w_1 中的 $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ 【不再+ $4n\pi$ 了】; $2\pi \leq \text{Arg } z$ (即 φ) $< 4\pi$, 对应单值分支 w_2 , 且对应着 w_2 中的 $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ 。

我们之所以这样做是想做个缝合: 将一个复平面从无限远处, 沿着正实轴剪至原点 $z=0$ 处, 割线上缘对应 $\text{Arg } z \geq 0$ (可取 0), 下缘对应 $\text{Arg } z < 2\pi$ (不可取 2π); 对另一个位于其正下方的复平面也如此操作, 其上割线对应 $\text{Arg } z \geq 2\pi$ (可取 2π), 下割线对应 $\text{Arg } z < 4\pi$ (不可取 4π)。【虚线实线代表了可取 or not; 左图为真, 右图为假; 下图对应左图的右视图, 为真】



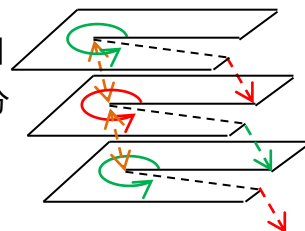
该剪切操作也可描述为: 作一条线把 $z=0$ 和 $z=\infty$ 两个支点连在一起, 再沿该线把复平面剪开[这样一来, 由于无穷远点的辐角没有意义, 则该割线的辐角就不一定=0 了, 对应着 $\arg z$ 的取值区间不一定为 $[0, 2\pi)$, 初始取值也就是割线位置可从某 z_0 所对应的辐角开始取: $[\arg z_0, \arg z_0 + 2\pi)$]; 或许这样的描述更广义?】

现将上平面的下割线($\text{Arg } z < 2\pi$)与下平面的上割线($\text{Arg } z \geq 2\pi$)缝合, 下平面的下割线($\text{Arg } z < 4\pi$)与上平面的上割线($\text{Arg } z \geq 0$)缝合【tips: 红绿交替, 相叠加便是黄色, 黄色箭头因此意味着双向连通】, 这样构成的一个两叶的面称为 $w=\sqrt{z}$ 的黎曼面。当 z 在上平面变化时, $0 \leq \text{Arg } w < \pi$, 当 z 在下平面变化时, $\pi \leq \text{Arg } w < 2\pi$ ——从该函数特征上可看出 w 的辐角 $\text{Arg } w$ 总是 $= \text{Arg } z$ 的二分之一, 因此 z 转了一圈的时候, w 才转了半圈, 此时 w 朝着 z_0 所对应的 w_0 的相反方向, w 值当然没有复原; 而 z 转了两圈的时候, w 便因转了两个半圈而回到原来的辐角了。

——这也可以用 z 在双叶黎曼面上的变化+对应的 w 在单叶复平面上的变化，来描述： z 从上平面的 $z_0^{(1)}$ 出发，绕着 $z=0$ 连续变化一圈，在此期间，轨迹 l 越过割线 $\text{Arg } z < 2\pi$ ，到达下平面上与 $z_0^{(1)}$ 复数值相同的点 $z_0^{(2)}$ 处(不需关心 $z=0$ 连续变化过程中的幅值的连续变化情况，但其辐角必须连续变化且最终 $+2\pi$ ，并且最终的幅值也回归原值： $z_0^{(2)} = z_0^{(1)} = z_0$ ；上角标只是表示先后 z_0 所处的黎曼面上的不同叶)，在此过程中 $z_0^{(1)} \rightarrow z_0^{(2)}$ 的 l 对 $z=0$ 的张角为 2π ，而对应的在另一个复平面上的 $w_0^{(1)} \rightarrow w_0^{(2)}$ ($w_0^{(1)} \neq w_0^{(2)}$ ， $w_0^{(2)} = -w_0^{(1)}$) 的 L 对原点的张角为 π ，该过程中 L 上每个 w 点与 l 上相应 z 点满足： w 的幅值 $= \sqrt{|z|}$ ，辐角 $= \frac{\text{Arg } z}{2}$ 。—— z 再 $z=0$ 绕一圈后， l' 跨越 $\text{Arg } z < 4\pi$ ，其终点与 l 起点相连， $z_0^{(2)}$ 回到 $z_0^{(1)}$ ， $w_0^{(2)}$ 在自己的复平面上经历另一路径 L' (对 $z=0$ 的张角 $\in [\frac{\text{arg } z_0}{2} + \pi, \frac{\text{arg } z_0}{2} + 2\pi]$) 返回 $w_0^{(1)}$ ， L' 连上 L 。

可见：1. l' 连上 l 构成黎曼面的闭合路径，相应地， L 连上 L' 构成 w 所在的复平面上的闭合路径。2. 黎曼面上的点与 w 的复平面上的点一一对应。3. 黎曼面上两个单支互相衔接，连续过渡。

然而这样限制了宗量 z 的辐角为 $[0, 4\pi)$ ——若积分要积好几圈(比如 $[0, 6\pi)$)呢？所以这样的单值化多值函数的操作，对于某些积分问题就不可取了。不过或许篡改 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面可能允许我们做到：对数函数的黎曼面就是这样螺旋上升 or 下降式的。



第二章 复变函数的积分

2.1 复变函数的积分

在复数平面的某分段光滑曲线 l 上定义了连续函数 $f(z)$ ，起点为 z_0 ，终点 z_n ，期间插入 $n-1$ 个分点 $z_1 \sim z_{n-1}$ ，分为 n 个小段 $[z_{k-1}, z_k]$ ，每个小段上任取一点 ζ_k (读作 zeta)，求和 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$ ，取极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k$ ——若该和的极限存在，且值与各个 ζ_k 的选取无关，则称该和的极限为 $f(z)$ 沿曲线 l ，从 z_0 到 z_n 的路积分，记作 $\int_l f(z) dz$ 。【相当于实变函数的(二型)线积分】

$\int_l f(z) dz = \int_l (u + iv)(dx + i dy) = \int_l (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$ ，可以看出，一个复变函数的积分，实际上是两个二元实变函数的线积分的有序组合：分别对(路积分的)实、虚部做 1 次二元线积分。——因而实变函数的线积分的性质对路积分也成立(如反转积分路径，积分变号等)。不过路积分有个特有的积分不等式： $|\int_l f(z) dz| \leq$

$\int_l |f(z)dz| = \int_l |f(z)||dz| \leq \int_l \max\{|f(z)|\}|dz| = \max\{|f(z)|\} \int_l |dz| = ML$ 。——当然，仿照第二类曲线积分，还可以用参数方程来计算路积分。

例：路径 l_1 ： $y=0$ (被积函数中 y =常数0，且 $dz=dx$)， x 从 $0 \rightarrow 1$ ，然后 $x=1$ ， y 从 $0 \rightarrow 1$ ；路径 l_2 ： $x=0$ ， y 从 $0 \rightarrow 1$ ，然后 $y=1$ ， x 从 $0 \rightarrow 1$ 。分别求这两条路径下的 $\int_l \operatorname{Re}(z) \cdot dz = \int_l x \cdot dz$ ：

$\int_{l_1} x \cdot dz = \int_0^1 x \cdot dx + i \int_0^1 1 \cdot dy = \frac{1}{2} + i$ ；而 $\int_{l_2} x \cdot dz = i \int_0^1 0 \cdot dy + \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$ 。可见复变函数的积分值不仅依赖于起点和终点，还与积分路径有关。

2.2 柯西定理

解析函数有个导数性质(C-R；当然还有因此得来的其余两个性质)，也有个积分性质(柯西定理)，还有个积分公式(柯西公式)；复变函数的积分值与路径无关的条件：

(一).单连通区域的情形

由区域的性质可知，区域总是有连通性的——我们将区域在连通性上进一步分类。
单连通区域：在其中作任何简单的闭合曲线，曲线上和曲线内的点都属于该区域。

单连通区域柯西定理：如果 $f(z)$ 在闭单连通区域 \bar{B} (又是闭区域又是单连通的)上解析(其实由于闭区域不是区域，因此 $f(z)$ 由于无法在边界点上解析(边界点的邻域中在 \bar{B} 之外的点处甚至没有定义 $f(z)$)，而无法在闭区域上解析- -；这里闭区域的第二层含义是：区域是有界的)，则沿着 \bar{B} 内或其边界上任意一分段光滑曲线 l ，有： $\oint_l f(z) \cdot dz = 0$ 。

证明：我们尝试着对环积分 $\oint_l f(z) \cdot dz = \oint_l (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$ 应用格林公式，但必须满足使用条件：P、Q有连续的一阶偏导，显然这里的 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 都在 \bar{B} 上连续(∵解析函数二阶导存在)。因此 $\oint_l f(z) \cdot dz = - \iint_S (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) dx dy + i \iint_S (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy$ ；又因 \bar{B} 上解析的函数满足的 C-R 条件： $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 。可得 $\oint_l f(z) \cdot dz = 0$ 。

上述柯西定理还可以推广(条件更弱化，适用性更广)： $f(z)$ 只需要在开的单连通区域 B 上解析，而在闭的单连通区域 \bar{B} 上连续；这样沿着 \bar{B} 内或其边界上任意一分段光滑曲线 l 也有 $\oint_l f(z) \cdot dz = 0$ 。

(二).复连通区域的情形


有些函数在区域上并非处处解析，在某点或某些子区域上不可导 or 不连续 or 根本没有定义，即存在**奇点**。我们想作一些适当的闭合曲线将这些奇点分隔出去，“挖掉”它们，形成的某种带“孔”的区域，即**复连通区域**。——另一种定义：只要有一个闭合曲线内不属于该区域的点，则这样的区域便是复连通区域。

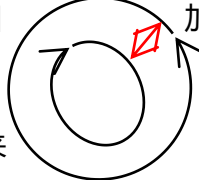
区域(单连通 and 复连通区域)的**边界线的正方向**：当观察者沿着该方向前进时，区域总在观察者左侧。

复连通区域柯西定理：如果 $f(z)$ 为**闭复单连通区域**上的单值解析函数，则：

$\oint_l f(z) \cdot dz + \sum_{i=1}^n \oint_{l_i} f(z) \cdot dz = 0$ 。——其中的 l 为区域**外边界线**， l_i 为区域**内边界线** (inner)，且积分均沿着边界线的**正方向**，或均沿着内外边界线的**反方向**。

证明：通过切补路径的方法将复连通区域转变为单连通区域，再应用单连通区域柯西定理：

法一：在内外边界线之间填充无数个环状路径， 路径绕向与**外边界线**的绕向相同(对此而言是**正方向**)，且相邻圆环不留**缝隙地彼此相切**，那么两个黑圆环(黑色有向路径)可看作由无数个**红色有向路径**矢量叠加而成。再对每个**红色有向路径**使用**单连通柯西定理**，并将所有这样的方程相加即可。

法二：其实这是法一的红色圈圈往少了加的极限情况： 来得出这是由一个逆时针指向的红色圈圈创造的么？——看不出来的话，可以尝试着把它沿着**红色双向箭头**剪开，得到的单连通区域的**边界线**便是与原复连通区域的外边界线**同向**的**红色有向路径**。

(三).总结：柯西定理的几种表示形式

1. $f(z)$ 在单连域 B 上解析，在闭连域 \bar{B} 上连续，则 $\oint_l f(z) \cdot dz = 0$ 。—— l 为 B 内 or B 边界上的任意**方向**和**路径**的**分段光滑**闭曲线。

2. $f(z)$ 在闭复连域 B 上解析，则 $\oint_l f(z) \cdot dz + \sum_{i=1}^n \oint_{l_i} f(z) \cdot dz = 0$ 。—— l, l_i **同为**内外边界线的正向 or 反向。【这相当于 1. 的 l 为 B 边界上的情况(当然要说是内也可以)】

3. $f(z)$ 在闭复连域 B 上解析， $\oint_l f(z) \cdot dz = \sum_{i=1}^n \oint_{l_i} f(z) \cdot dz$ 。—— l, l_i **同为**顺时针 or 逆时针。

4. 对于某个在某闭单连域 or 闭复连域上解析的函数, 只要起点和终点固定不变, 当积分路径连续变形(即不跳过“孔”)时, 函数的积分值不变。

例: 一个经典的题: $I = \oint_L (z - \alpha)^n \cdot dz$ (n 为整数), 讨论可能的积分值。——我们先用经典手段来处理这个经典的题, 该结果之后还能以更简单的手段得到, 并且该结果很重要。【像 z_0 一样, α 是个复常数】

首先考虑刚开始是以“包含 α 与否”还是以“ $n \geq 0, n < 0$ ”为标准, 来分出两大类。——哪个好? 这或许需要动点脑筋: 两者地位平等, 理由在于, 在 $n \geq 0$ 的情况下, 无论 L 包含了 α 与否, α 都不是奇点(甚至函数没有奇点, $\therefore n$ 为整数), $I=0$; 而在 L 不包含 α 的情况下, 不论 n 的取值如何, 函数都没有奇点, $I=0$ 。——我们随便选其中一种分类标准(前者): 因此 $n \geq 0$ 的函数 $f(z) = (z - \alpha)^n$, 满足单连通区域柯西定理的使用条件(即柯西定理的 1. 号表示形式), 于是 $n \geq 0$ 对应 $I=0$ 。

而当 $n < 0$ 时, 需讨论 L 是否包含了 α , 即再将此大类分为两个小类: 若 L 不包含 α , 则仍然有 $I=0$; 若 L 包含 α , 则我们利用柯西定理的 3. 号表示形式, 另取一条绕向与 L 相同, 且以 α 为圆心的圆形路径 L' , 转换为对 L' 的环积分: $\oint_{L'} (z - \alpha)^n \cdot dz$ 。

现在我们采用参数方程 or 变量替换法(先 $z \rightarrow z'$, 再 $z' - \alpha = z$; 并且注意, 关于“ $z \rightarrow z'$ ”的 L' , 其圆心已经从 $z' = \alpha$ 处平移到了 $z = z' - \alpha = \alpha - \alpha = 0$ 处, 变成关于 z 的 L'' 了): $I = \oint_{L'} (z - \alpha)^n \cdot dz = \oint_{L'} (z' - \alpha)^n \cdot dz' = \oint_{L''} z^n \cdot d(z + \alpha) = \oint_{L''} z^n \cdot dz$ 。现再取用 z 的极坐标表示形式: $\oint_{L''} z^n \cdot dz = \oint_{L''} \rho^n e^{in\varphi} \cdot (i\rho e^{i\varphi} \cdot d\varphi + e^{i\varphi} \cdot d\rho)$, 其中在整个积分回路 L'' 和积分过程中, $d\rho$ 均=0; 因此变成了 $\oint_{L''} i\rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \cdot d\varphi = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \cdot d\varphi$, 现需讨论 $n \neq -1$ 时: 原式变为 $\frac{\rho^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\rho^{n+1}}{n+1} [(e^{2\pi i})^{(n+1)\varphi} - (e^0)^{(n+1)\varphi}] = 0$; 当 $n = -1$ 时, 原式变为 $i\rho^{-1+1} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$ 。【我们相当于把复变积分化为了两个实变的积分, 只不过是关于两个极坐标的实变函数; 在这里我们对 φ 是从 0 积到 2π 的, 这对应着默认 L'' 、 L' 和 L 是逆时针绕向的; 但实际上若它们都是顺时针的情况下, 值变为 $-2\pi i$ 】

现在我们重新归类一下, 由于只有在 $n < 0$ 且 L 包含 α 且 $n = -1$ 的情况下, 积分值 I 才 $\neq 0$, 因此——当 $n \neq -1$ 时, 不论 L 包不包含 α , I 都=0; 当 $n = -1$ 时, 只有在 L 包含 α 时, $I = \pm 2\pi i$, 否则 I 仍=0。

2.3 不定积分

学了该部分, 就不用将 $\int_L f(z) dz$ 展开成两个实变函数并分别积分; 或者使用参数方程; 而是直接对 z 积分; 但只有解析函数, 且路径变化不绕过奇点, 才能这么直接对 z 积分。——否则一般的复变函数与路径有关, 且因此像 $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 这样只给出积分

上下限没什么意义。【这里的 $\zeta, d\zeta$ 分别相当于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ 中的 $\zeta_k, \Delta z_k$ ，当然也相当于 $\int_l f(z)dz$ 中的 z, dz 】

(一).不定积分公式

柯西定理 shows us: 若 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析, 则 $\int_l f(z)dz$ 的值只与 l 的起点和终点有关(与路径无关)。进一步当起点固定为 z_0 时, 此时该不定积分就变成了一个单值函数, 一个只与终点 z 有关的变上限积分: $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ 。

可证明 $F'(z) = f(z)$, 且因此 $F(z)$ 在 B 上是解析的($\because f(z)$ 在 B 上解析)——即 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。——对此我们只需要对 B 上任意一点 z 证明 $F'(z) = f(z)$ 就行了:

①. 以 z 为圆心作一含于 $(\subseteq) B$, 半径为 Δz 的小圆。 $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} [\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta]$, 由于积分与路径无关, 我们把 $z_0 \rightarrow z + \Delta z$ 的路径设定为 $z_0 \rightarrow z$ 的任意曲线与 $z \rightarrow z + \Delta z$ 的直线段的合成, 于是 $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$ 【其中利用柯西定理可将前后的 $\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ 项抵消】。

②. 而 $f(z)$ 因与积分变量 ζ 无关, 因此可以被写为 $= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta$ 【当然, 另一个原因是 $\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$; 这与 $z \rightarrow z + \Delta z$ 的路径是直线段 Δz 无关】, 于是 $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta$ 。

③. 由于 $f(z)$ 在 B 上解析, 那 $f(z)$ 必也在 B 上连续, 则对于任意给定的小正实数 ε , 总存在对应的正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $|\zeta - z| < \delta(\varepsilon)$ 时, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ 。那么我们只需将小圆半径 Δz 取得足够小, 以使得 $\Delta z < \delta(\varepsilon)$ 所对应的 $\delta(\varepsilon)$, 这样一来由于 ζ 的 ζ_k 性质【 ζ 只在 $z \rightarrow z + \Delta z$ 的路径上取, 且该路径又是条直线段 Δz 】, 会导致 $|\zeta - z| < \Delta z < \delta(\varepsilon)$ 。

④. 于是当 Δz 足够小, 以至于 $< \delta(\varepsilon)$ 时, 会有 $|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)| = |\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta| = \frac{1}{|\Delta z|} |\int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta|$, 再根据积分不等式 $|\int_l f(z)dz| \leq \int_l |f(z)dz| = \int_l |f(z)||dz|$, 有 $\frac{1}{|\Delta z|} |\int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)||d\zeta| < \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} \varepsilon |d\zeta|$; 又因为 $z \rightarrow z + \Delta z$ 是一条直线段 Δz (否则右式积分值 $\geq |\Delta z|$, 且不定, 且可能无上限), 因此 $\int_z^{z+\Delta z} |d\zeta| = |\Delta z|$ (相当于一型曲线积分), 于是 $\frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} \varepsilon |d\zeta| = \varepsilon$ 。

⑤. 因此当 $\Delta z < \delta(\varepsilon)$ 时, $|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)| < \varepsilon$ ——即 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0$, 即有 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$ 。

同样还可以证明, 牛顿—莱布尼兹公式: $\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$, 即路积分的值 = 原函数的改变量。

(二).同样这道例题

$$I = \oint_l (z - \alpha)^n \cdot dz \quad (n \text{ 为整数}):$$

我们从原函数的角度来看, 仍然有之前的结果: 当 $n \neq -1$ 时, $(z - \alpha)^n$ 的原函数为 $\frac{(z - \alpha)^{n+1}}{n+1}$: 若 l 包含 α , 则 z 绕 α 一周, 原函数的改变量为 0: 即 $\frac{(z - \alpha)^{n+1}}{n+1} = \frac{(z \cdot e^{\pm i \cdot 2\pi} - \alpha)^{n+1}}{n+1}$; 若 l 不包含 α , 则 z 回到初始值, Δ 原函数 = 0。【这里其实有点问题: 当 $n < 0$ 且 l 包含 α 时, 本来 $(z - \alpha)^n$ 因有奇点存在于 l 内而不能直接用原函数(化为面积分后偏导无穷大, 非 0)的; 但通过严格证明, 是可以的; 同理下面 $n = -1$ 的情形也有此问题存在】

而若 $n = -1$, $(z - \alpha)^{-1}$ 的原函数为 $\ln(z - \alpha)$: 若 l 包含 α , 则 z 绕 α 一周, 原函数 $\ln(z - \alpha) = \ln(|z - \alpha| e^{i \operatorname{Arg}(z - \alpha)}) = \ln|z - \alpha| + i \operatorname{Arg}(z - \alpha)$ 的改变量为 $\pm 2\pi i$; 若 l 不包含 α , 则 z 回到初始值, Δ 原函数 = 0。

总结一下: l 包围 α : $\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = \pm 1$, l 不包围 α : $\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = 0$; $\frac{1}{2\pi i} \oint_l (z - \alpha)^n dz = 0$ ($n \neq -1$)。【前两个已经暗示 $n = -1$ 】

例: $\int_0^i z \cdot \cos z \cdot dz = \int_0^i z \cdot d(\sin z) = z \cdot \sin z \Big|_0^i - (-\cos z \Big|_0^i) = (z \cdot \sin z + \cos z) \Big|_0^i = (\cos z + i \sin z) \Big|_0^i = e^z \Big|_0^i = e^i - 1$

2.4 柯西公式

柯西定理只能计算闭连通域中不含被积函数的奇点的环积分, 而柯西积分公式却能用于被积路径所含区域中包含(被积函数的)奇点的环积分。

(一).柯西公式

若 $f(z)$ 在闭单连通区域 \bar{B} 上解析(区域也得是有界的), l 为 \bar{B} 的**正向**边界线, α 为 B 内任意一点, 则有(单连通区域)**柯西公式**: $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ 。【这个说法可能是为了对应**单连通区域柯西定理**; 还可说成: l 为 B 内(包括其边界线)任意**正向**闭合曲线, α 为 l 内任意一点】

证明 1: 根据**复连通柯西定理**: $\oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$, 其中 C_ε 为 l 内, 以 α 为圆心, ε 为半径的圆。此结果与 ε 的大小无关, 因此令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则 $C_\varepsilon \rightarrow \alpha$, $f(z) \rightarrow f(\alpha)$, 再根据 $f(z)$ 在 α 处解析并因此连续, 那么 $\oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = f(\alpha) \oint_{C_\varepsilon} \frac{1}{z - \alpha} dz = f(\alpha) \cdot \pm 2\pi i$ 。 —

—因此 $f(\alpha) = \frac{1}{\pm 2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$, 当 l 为正向(逆时针)时, $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$; 当 l 为顺时针时, $f(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$ 。

证明 2: $\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\varphi} + \alpha)}{\rho e^{i\varphi}} d(\rho e^{i\varphi} + \alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\varphi} + \alpha)}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} \cdot d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi} + \alpha) \cdot d\varphi$ 【注: 其中 $d(\rho e^{i\varphi})$ 中的 $d\rho$ 仍 $=0$, 因为在变量替换后, $l \rightarrow l'$, 我们仍然将 l' 不跃过奇点地连续变化为了一个以 $z=0$ 为圆心的圆 C_ε' , 圆心半径 $\varepsilon = \rho$ 】, 进一步地, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi} + \alpha) \cdot d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot d\varphi = f(\alpha)$ 。

柯西公式将解析函数在任何一内点 α 的值 $f(\alpha)$ 用沿边界线 or 边界内任意一包含 α 的闭合曲线的回路积分表示了出来。——**在数学上**, 这本质是因为解析函数在各点的值通过 C-R 方程互相联系着; 而**从物理上**说, 解析函数紧密联系着平面标量场, 而**平面标量场的边界条件决定着区域内部的场**。

(二).复联通区域上的柯西积分公式

由于 α 是任取的, 因此通常用 z 表示 α , 而用 $\zeta(x, y, z \mapsto \xi, \eta, \zeta)$ 来代替被积变量 z 。因此柯西公式改写为 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ 。若 $f(z)$ 有奇点, 则若 $f(z)$ 在挖去奇点后的复联通区域上解析, 则柯西公式仍然成立, 其中的 l 既可以是包含 z 的**小的正向闭合/多孔区域边界**, 又可以是**该复联通区域的所有(内外)正向边界线**。——后者被称为**复联通区域上的柯西积分公式**【也就是说绕 α 的 l 可以是甜甜圈俩边界, 且 α 在甜甜圈的本体区域内】。一般地, 单连通的柯西积分公式, 比复联通区域上的更有实际意义。

利用**复联通区域上的柯西积分公式**, 我们可以将柯西公式推广至不仅适用于 l 所围内部区域, 也适用于 l 外部(甚至)到包含无限远点的区域——设 $f(z)$ 在闭合回路的外部解析(在无穷远点也解析); 以 $z=0$ 为圆心, 足够大的 R 为半径, 作圆 C_R , 使得 l 包含于 C_R 内。于是由于 $f(z)$ 在 l 及 C_R 所围的复联通区域上解析, 应用**复联通区域上的柯西积分公式**, 有: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, 其中 $z \in l, C_R$ 之间的区域。——其中前一项与之前单连通区域的柯西公式很相似, 但 l 绕向不同, 变成顺时针了; 这里的 C_R 才与之前的 l 绕向相同, 因为它俩都是外边界线的正向, 而这里的 l 是内边界线的正向。

现在我们尝试着将 C_R 的 R 变大, 以至于 $R \rightarrow \infty$: 由于 $f(z)$ 在无限远点解析, 则 $f(z)$ 在无限远点连续——即对于任意小正实数 ε , 总存在对应的正实数 $R_1(\varepsilon)$, 使得当 $|z| > R_1$ 时, $|f(z) - f(\infty)| < \varepsilon$ 。其中 $f(\infty)$ 有界(不然 $f(z)$ 如何能在此处连续 even 解析?)。

于是对于所有 $R > R_1$ 的 R (因此下面各式中的 ζ 都在路径 C_R 上且 $|\zeta| = R > R_1$)，均有 (这个思路并没有对无穷远点使用复连通区域上的柯西公式；因而并不意味着将无穷远点也包含在 C_R 内了，但可以认为无穷远点也在其内，也能使用之；这里只是利用了连续的定义)：

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(\infty) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(\infty) \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| = \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|f(\zeta) - f(\infty)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{\varepsilon}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{\varepsilon}{|R - |z||} |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{R - |z|} \oint_{C_R} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{R - |z|} 2\pi R. \quad \text{【其中 } |\zeta| - |z| \leq |\zeta - z| \leq |\zeta| + |z| \text{】} \end{aligned}$$

即**复连通区域上的柯西积分公式**中的第二项变为了： $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(\infty)$ 。你也可以通过 $f(z)$ 在无限远点连续，用“ R 和 $\zeta \rightarrow \infty$ ，对应 $f(\zeta) \rightarrow f(\infty)$ ”，来直接得到它： $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(\infty) \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(\infty)$ ，其中 $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1$ 似乎有点问题：其实问题根源出在**复连通区域上的柯西积分公式**中的 C_R 所包围的单连通区域本身，包含了 l 内部的区域，而里面或许是有奇点，或者 $f(z)$ 或 $f(\zeta)$ 在该区域没有定义。——不过该公式整体来看是没有问题的，相当于单连通区域柯西公式中的 l 从一个始终包含点 z 的二维肥皂泡连续变形成游泳圈状，并首尾相接后两个接触面(线)相消，变成内边界为 l ，外边界为 C_R 的复连通区域。——或许这是为什么人们偏爱在闭合回路 l 外部的任何地方解析的 $f(z)$ ，因为这样可以将复连域上的柯西公式中的第二项变为 $f(\infty)$ 【不过若用刚才的第二个方法得到 $f(\infty)$ ，则还是逃/绕不过该问题；但若使用之前的“对连续的定义”的方法，便可以绕过该问题】。

更特殊地，当 $f(\infty) = 0$ 时，对于处于 l, C_R 之间的区域(或 l, ∞ 之间的区域)的 z ，
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(三).柯西公式的几个推论

①.**柯西公式的重要推论之一**：解析函数任意阶导数均存在。

下面我们看看其存在形式：

根据单/复连域的柯西公式：由于 z 为 l 所围的区域 B 的内点，而 ζ 是沿着 B 的边界 l 变化的，因此 $\zeta - z \neq 0$ ，因此 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 在 z 所在的区域处处可导，因此可在积分符号内对 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 对 z 求(偏)导：(在我们将符号 α 改为 z 后， z 可视为变量； ζ 在求导过程中视为一个常数)

$$\text{可得：} f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \text{ 以及高阶导数公式：} f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

②.**模数原理**： $f(z)$ 在某闭区域 B 上解析，则 $|f(z)|$ 只在边界 l 上取极大值。

对 $[f(z)]^n$ 应用柯西公式, $[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $|f(z)|^n = \frac{1}{2\pi} \oint_l \frac{[f(\zeta)]^n}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \oint_l \frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_l \frac{M^n}{\delta} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{\delta} s$, 因此 $|f(z)| \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{\delta} s} = M \left(\frac{1}{2\pi} \frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$ 【 $M=|f(z)|$ 在 l 上的最大值; δ 为 $|\zeta - z|$ 的最小值; $s = \oint_l |d\zeta|$ 】, 由于此式对任意 n 均成立, 那么其必要条件之一便是对 $n \rightarrow \infty$ 成立, 则 $|f(z)| \leq M$ 【不论是 $\frac{1}{2\pi} \frac{s}{\delta} > 1$ or < 1 , 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ 】。

当然若 $\frac{1}{2\pi} \frac{s}{\delta} < 1$, 还可以限制得更严: $|f(z)| \leq M \frac{1}{2\pi} \frac{s}{\delta}$ 。【这里由于 l 并非是以原点为圆心的圆, 因此 $|\zeta - z|$ 最好不缩放为之前的 $|\zeta| - |z|$, 而是取个 s 即可】

③.刘维尔定理: 如 $f(z)$ 在全平面上解析, 且有界 ($|f(z)| \leq N$), 则 $f(z)$ 必为常数。

对 $f'(z)$ 使用柯西公式, 于是 $f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \leq \frac{1}{2\pi} \oint_l \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{N}{R^2} |d\zeta| = \frac{N}{R}$ 。由于此式对任意 R 均成立, 那么不妨取其必要条件之一: 对 $R \rightarrow \infty$ 成立, 即有 $|f'(z)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N}{R} = 0$ 。即 $f(z) \equiv \text{const.}$ 。

幸好复连通区域的柯西公式的 version02: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty)$ 的适用环境为:

“ $f(z)$ 在闭合回路 l 的外部解析”, 要是 $f(z)$ 还在 l 内部解析 [再加上 $f(z)$ 有界的话], 那不就出事了么, 不是吗?

例 1: 求 $\oint_l \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$, 其中 l 为复平面上的圆 $|z-i| = \frac{1}{2}$ 。

可见被积函数本身在全复平面上有 3 个奇点; 而题设所给的 l 所包含的区域只含有其中的 1 个奇点, 即 $\oint_l \frac{e^z}{z(z+i)(z-i)} dz$ 中的 $z=i$ 。——因此 1. 我们不能使用柯西定理, 只能使用柯西公式; 2. 并且使用的是单连通区域柯西公式, 而不是复连通的; 3. 并且形式上最好采用 $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$, 而不是 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, 因为题目给的被积函数中的宗量就是用 z 表示的。

于是原式 $= \oint_l \frac{e^z/[z(z+i)]}{(z-i)} dz = \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$, 可见其中的 $e^z/[z(z+i)]$ 即为柯西公式中的 $f(z)$; 而柯西公式中的 α 即为 i 。根据 $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$, 可得 $\oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 2\pi i \cdot f(\alpha)$ 。因此 $\oint_l \frac{e^z/[z(z+i)]}{(z-i)} dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^i}{i(i+i)} = -\pi i e^i$ 。

从中我们可见, 柯西公式的使用秘诀为: 1.a. 被积函数在全平面上是否处处解析, 若是, 则不论如何 l , 均适用柯西定理, 环积分值 $= 0$; b. 若否, 察看其所有奇点都在哪, 积分路径 l 所围区域内是否落有奇点, 若否, 则仍使用柯西定理; c. 若是, 则应使用柯西公式; 若 l 只包含被积函数的一个奇点 α , 则使用单连通区域柯西定理; 否则使用我们等下介绍的三种方法。2. 将被积函数处理成柯西公式中的 $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ 的模样: 将被积函数中与 l 所包含的奇点有关的部分, 凑成 $z - \alpha$ 的样子, 留在分母; 其余部分去往分子, 凑成 $f(z)$ or 作为 $f(z)$ 而存在。3. 得出结果: $2\pi i \cdot f(\alpha)$ 。

——当然，以上这一切都建立在这样的基础上：1.被积函数在 l 中存在的奇点 α (or l 中包含有被积函数的奇点)，不能同时也是凑出来的 $f(z)$ 的奇点！！否则 $2\pi i \cdot f(\alpha)$ 岂不是凉凉？——事实上，要应用单连通 or 复连通的柯西公式，本身前提就要求 $f(z)$ 在对应区域上解析。2. l 内只含有一个被积函数的奇点，即一个 α ，对应分离出一个 $z-\alpha$ 。

例 2：计算积分 $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz$ ，其中 l 为(1). $|z|=\frac{1}{2}$ ；(2). $|z-1|=1$ ；(3). $|z|=3$ ；

(1).被积函数 $\frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4}$ 在 $|z|=\frac{1}{2}$ 圆内没有奇点，利用柯西定理，该环积分=0。

(2). $|z-1|=1$ 包含其中一个奇点 $z=1$ ，因此使用单连通的柯西公式： $\oint_{\gamma} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz = 2\pi i \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$ 。

(3). $|z|=3$ 包含 $z=\pm 1$ 两个奇点，因此不能使用单连通的柯西公式，下面介绍 3 种方法：**【还可用留数定理】**

法一：因式分解成两个能用单连通区域柯西公式的环积分： $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z+1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = \frac{1}{2} 2\pi i \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} 2\pi i \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \pi i$ 。

法二：复连通的柯西定理(柯西定理的 3.号表示形式)： $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1+1} + 2\pi i \frac{\sin(-\frac{\pi}{4})}{-1-1} = \sqrt{2} \pi i$ 。

法三：复连通的柯西公式： $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz = 2\pi i \cdot f(\alpha) = 2\pi i \cdot f(1)$ ；因此 $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz = 2\pi i \cdot f(1) + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz = 2\pi i \cdot f(1) + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz$ ，再根据单连通的柯西公式： $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot g(-1)$ 。因此 $2\pi i \cdot f(1) + 2\pi i \cdot g(-1) = \sqrt{2} \pi i$ 。

该方法(法三)本质上并不与法二相同，因为复连通的柯西公式并非是由复连通的柯西定理推出来的[但单连通的柯西公式可看作由复连通柯西定理推出(参见证明一)]，因为复连通柯西公式相当于是单连通柯西公式的解析区域从包含 z 的圆，连续变化为同样包含 z 的游泳圈，过程中有边界的消融——这就像单连通柯西定理到复连通柯西定理的过渡方式；而不是直接应用柯西定理的 3.号表示形式，即复连通的柯西定理，来将圈圈缩小 or 扩大为另一同向闭合曲线。

不过复连通的柯西公式有一方面得向复连通的柯西定理靠拢 and 对齐：之前的 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ 应该像 $\oint_{\gamma} f(z) \cdot dz + \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i} f(z) \cdot dz = 0$ 一样，被写成更完整的形式： $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ ，也就是说， $l \rightarrow \gamma_i$ 意味着复连通的柯西公

式进一步适用于更“多孔”的复连通区域；之前我们没有这么写，是为了给当时紧接着的推导服务。这样扩充了的形式之所以成立，与单连通的柯西定理→复连通的柯西定理的自然过渡道理相同：从圆圈连续变化为甜甜圈，甜甜圈也可连续变化为恋人甜甜圈(两个孔)。【注意复连通的柯西公式中的 l_i 绕向，由于为内边界们，绕向为顺时针/反向；而复连通的柯西定理的内边界们 l_i 可正向可反向，因为只需要与 l 同正向反向即可】

这里我们还需要重申一下法三中的精髓所在 or 注意事项们：1.被积函数与被积函数中所拆分出来的 $f(z)$ 不是一回事，前者在积分区域中可以有奇点 α ，正因如此才要使用柯西公式，以转化为在**该区域处处解析的 $f(z)$** ，用其在该点的值 $f(\alpha)$ 来表示该积分！2.由于我们是**逆向运用单连通和复连通的积分公式**，因此并不像“ $f(\alpha)=\dots$ ”一样，而是“ $\dots=f(\alpha)$ ”，这样的话我们并不能提前知道 $f(\alpha)$ 中的 α 是啥，因为我们手里总是现有方程左边的东西：对于正向的柯西积分公式而言，“ $f(\alpha)=\dots$ ”方程左边 $f(\alpha)$ 是已知、明示 α 的；但逆向运用的话，“ $\dots=f(\alpha)$ ”方程左边是一个 or 一些待求的环积分，它们在所给的包含的区域中可能不止一个奇点(被积函数的)，这样在像“法三”一样运用复连通区域柯西公式时， α 的值可以是其中的任意一个对于被积函数而言的奇点，对于 $f(z)$ 却不是；因此在用 $f(z)$ 来得到环积分值的时候，代入哪个奇点 α ，是人为可选的。——不过得保证 $f(z)$ 在 α 处解析，即被积函数的奇点 $z=\alpha$ 对于 $f(z)$ 来说不是奇点，这其实等价于选取的 α 得在 $f(z)$ 解析范围内，即引用的柯西公式的环积分区域内：比如“法三”中 $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz$ ，我们选定了 $\alpha=1$ 这个奇点，那么得保证该 $\alpha=1$ 在“ $|z|=3 \sim |z+1|=\frac{1}{2}$ ”复连通区域内，并且同时保证“ $f(z)=\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1}$ 在该区域内处处解析”。——所以在我们将来将 $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz$ 变为 $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz$ 后，即选定了 $\alpha=1$ 后，接下来不能胡乱选定“?”这个内边界 l_i ，比如它就不能是 $|z-1|=\frac{1}{2}$ ，否则 $\alpha=1$ 既不在“ $|z|=3 \sim |z-1|=\frac{1}{2}$ ”复连通区域内， $\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1}$ 又不在该区域上解析。——所以我们之前也可选定 $\alpha=-1$ ，即将 $\frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4}$ 拆分为 $\frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1}$ ，并且与之对应地，选择“ $|z|=3 \sim |z-1|=\frac{1}{2}$ ”区域。

3.因此我们在之后将 $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} dz$ 改写为 $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} dz$ ，你也明白了其中的道理了吧：此时我们将要用到的是**单连通的柯西公式**，为此，选定的 α 必须在积分区域内，而**单连通的柯西公式**对应的是之内的区域！——之前，同样是“ $|z+1|=\frac{1}{2}$ ”，在**复连通的柯西公式**中扮演的是“内边界线”的角色，区域在它外面！；然而在**单连通的柯西公式**中，它突然就变为了“外边界线”，区域变成里面的了！因此我们为了维护积分区域“ $|z+1|=\frac{1}{2}$ ”内不改变，应当将 α 选取为在其中的 -1 ，为此之前由 $\frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4}$ 所拆分为的 $\frac{1}{z-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1}$ ，应重新拆分为 $\frac{1}{z+1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1}$ ；并且此时 $f(z)$ 也变为了 $\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1}$ ，它在“ $|z+1|=\frac{1}{2}$ ”内处处解析。

例 3: 求 $\oint_{|z|=1} \frac{\sinh z}{z^2} dz$:

利用**二阶导数公式**: $f'(\alpha) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz$, 可得 $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(\alpha)$ 。于是原式 $= \oint_{|z|=1} \frac{\sinh z}{(z-0)^2} dz$, 由于奇点 $\alpha=0$ 在**单连通的柯西公式**适用的 $|z| < 1$ 内, 且 $f(z) = \sinh z$ 在该 $|z| < 1$ 区域内处处解析, 因此 $\oint_{|z|=1} \frac{\sinh z}{(z-0)^2} dz = 2\pi i \cdot \cosh 0 = 2\pi i$ 。

第三章 幂级数展开

3.1 复数项级数

(一).复数项级数

1. 设有复数项无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + i \sum_{k=0}^{\infty} v_k$, 其前 $n+1$ 个通项的和, 称为级数的部分和 S_n ; 部分和组成的序列 $\{S_n\} = \{\sum_{k=0}^n w_k\}$, 该序列收敛则复数项级数收敛。而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n w_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n v_k$, 因此复数项无穷级数的收敛性问题就归结为两个实数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ 的收敛性问题。于是, 实数项级数的许多性质和规律可迁移至复数项级数。【之所以从 $k=0$ 开始取, 是因为复数项级数中的泰勒展开和洛朗展开有 0 阶项】

2. **柯西收敛判据**: 级数收敛的充分必要条件: 对于任一给定的小正数 ε , 必有 N 存在, 使得 $n > N$ 时, $|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k| < \varepsilon$, p 为任意正整数。——取 $p=1$ 时, 得到复数项级数收敛的一个**必要条件**: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+1} w_k = 0$ 。

3. 若级数各项的模, 所组成的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|$ 收敛, 则级数**绝对收敛**。——绝对收敛的级数必是收敛的。且绝对收敛的级数, 各项的**先后次序可任意改变, 和不变**。

两个绝对收敛的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ 、 $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$, 其和为 A 、 B , 将它们“逐项相乘”, 得到的级数也是绝对收敛的, 其和 $= AB$; 即**两个绝对收敛的级数的和、积, 也是绝对收敛的**。

(二).函数项级数

4. **函数项级数的柯西判据**：级数在 B 或 l 上收敛的充要条件：在 B 或 l 上各点 z ，对于任一给定的小正数 ε ，必有 $N(z)$ 存在，使得 $n > N(z)$ 时， $|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)| < \varepsilon$ ， p 为任意正整数。——若 N 与 z 无关，称级数在 B 或 l 上一致收敛(该概念只针对函数项级数而言)。【函数项级数：对于固定 z 值，变成了复数项级数；对于不同的 z 值，则又要讨论新 z 值下的收敛性】

5. **一致收敛的性质①**：若 $w_k(z)$ 在 B 内连续，且函数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 在 B 内一致收敛，则和函数(函数项无穷级数的和) $w(z)$ 也是 B 内的连续函数，即有 $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_k(z)$ 。即极限符号可提到求和符号内。

一致收敛的性质②：若 $w_k(z)$ 在 B 内的分段光滑曲线 l 上连续，且函数级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 在 l 上一致收敛【已经暗示和函数有界了】，则级数的和 $w(z)$ 也是 l 上的连续函数，且级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 可沿着 l 逐项积分： $\int_l \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \cdot dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_l w_k(z) \cdot dz$ 。即积分符号可提到求和符号内。

一致收敛的性质③：若 $w_k(z)$ 在 \bar{B} 内单值解析(不仅连续)，且级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ 在 \bar{B} 内一致收敛，则 $w(z)$ 也是 \bar{B} 中的单值解析函数，其各阶导数可由级数逐项求得： $\frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} w_k(z)$ ，即求导符号可提到求和符号内，即 $w^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ 。——且 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$ 在 \bar{B} 内也一致收敛【这对之前的 $\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_k(z)$ 、 $\sum_{k=0}^{\infty} \int_l w_k(z) \cdot dz$ 也应有相同的结论】。

绝对且一致收敛：若对于某区域 B 或 l 上所有各点 z ，级数的各项的模 $|w_k(z)| \leq m_k$ ，且正的常数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} m_k$ 收敛，则级数在 B 或 l 上绝对且一致收敛。【绝对是因为模，一致是因为对于所有各点】

3.2 幂级数

通项为幂函数的级数： $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ，称为(以 z_0 为中心的)幂级数。——若正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(z-z_0)^k$ 收敛，则 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 绝对收敛。

正项级数收敛性判别法：

(1). **比值判别法(达朗贝尔判别法)**： $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |z-z_0| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R$ 。——以 z_0 为圆心，半径为 R 确定一个圆，此圆内幂级数绝对

一致收敛。这个圆称为**收敛圆**， R 为**收敛半径**。——若 $|z - z_0| < R$ ，则幂级数绝对收敛；若 $|z - z_0| > R$ ，则幂级数发散。【这里 R 可记为前项的系数/后项的的极限】

比如①. $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} (|t| < 1)$; ②. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2} (|z| < 1)$;
③. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z (|z| < \infty)$, 其**收敛半径** $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty$ 。这意味着该级数在全平面上收敛，而不是处处发散！

(2).根值判别法(柯西判别法): $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R$ 。

幂级数在收敛圆内的性质①：幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 的和函数 $w(z)$ ，是收敛圆内的**解析函数**。

——根据**一致收敛的性质③**，由于幂级数的通项 $w_k(z) = a_k(z - z_0)^k$ 是幂函数，其在收敛圆内(甚至全平面上)**单值解析**，而 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 又在收敛圆内**一致收敛**，故可得之。

由于 $w(z)$ 的收敛圆内不可能出现 $w(z)$ 的奇点，因此利用这点可以快速判断 R 的上限：比如 $w(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 有奇点 $z = \pm i$ ，因此 R 不可能 > 1 ，否则在 $|z - z_0| < R$ 内包含 $|z - z_0| = R$ 上的奇点 $z = \pm i$ ， $w(z)$ 不解析。

幂级数在收敛圆内的性质②：和函数 $w(z)$ 在收敛圆内可逐项积分。【因为该区域内 $w(z)$ **单值解析**，因此连续，又有界(·和的极限存在)，因此可积】

即 $\int_l w(z) \cdot dz = \int_l \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) \cdot dz = \int_l w(z) \cdot dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_l a_k(z - z_0)^k \cdot dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_l (z - z_0)^k \cdot dz$ 。而根据**单连通区域柯西定理**，在收敛圆这个单连通区域内，解析函数 $w(z)$ 的积分与路径无关，因此还可进一步表示为： $\int_{z_0}^z w(z) \cdot dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{z_0}^z (z - z_0)^k \cdot dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1} \Big|_{z=z_0}^{z=z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} (z - z_0)^k$ 。

幂级数在收敛圆内的性质③：和函数 $w(z)$ 在收敛圆内可逐项求导。【和函数可求任意阶导数，是因为**性质①**：和函数在收敛圆内解析；求导符号能放求和符号里面，是因为每项幂函数的导数均存在，且其和的极限存在】

即 $w'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (z - z_0)^k$ 。

幂级数在收敛圆内的性质④：和函数 $w(z)$ 在收敛圆内可表示为连续函数的回路积分。

根据**幂级数在收敛圆内的性质②**， $w(z)$ 在收敛圆内可逐项积分，那么 $w(z)$ 可以沿着一个半径 R_1 稍 $< R$ 的圆周 C_{R_1} 上积分。于是我们对 $w(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k$ 遍乘

$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta-z}$ (其中 $|z-z_0| < |\zeta-z_0| = R_1 < R$), 再对 ζ 环积分: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{a_k(\zeta-z_0)^k}{\zeta-z} d\zeta$, 而幂函数在开平面解析, 因此 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = w(z)$ 。即有 $w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ 。

这进一步表明**幂级数在收敛圆内的性质①**: $w(z)$ 是收敛圆内的解析函数。且可因此在此收敛圆内求导任意多次和逐项积分, 且不改变收敛半径。

3.3 泰勒级数展开

从 3.2 可知, 幂级数的和函数 $w(z)$ 在收敛圆内部为解析函数, 那么一个在某圆内解析的函数 $w(z)$ 是否也能展开成级数呢? ——等下我们将知道: 由于 $w(z)$ 各阶导数都存在, 因而它总能在收敛圆内展成泰勒级数——然而实变函数要能展成泰勒级数, 却要求 1. 其任意阶导数都存在(这不一定), 且即使它们都存在, 其泰勒级数的和也不一定收敛(2. 即还需要拉格朗日余项 $R(n)$ 的极限 $= 0$)。

由于复变函数的解析性可保证收敛圆内无限次可导, 所以复变函数的泰勒展开的实用范围比实变函数的泰勒展开更广。【但其实复变函数能解析的本身要求就很高, 能解析之后(越过了这个坎后), 就很宽松了】

定理 设 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析, 则对圆内的任意 z 点, $f(z)$ 可展开为幂级数: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, 其中 $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心(即 z_0) 的圆。【正如幂级数的收敛域一般是个圆形域一样, 要展开成幂级数的解析函数, 至少要在某圆形域内解析】

证明 作 $R_1 < R$, 且与 C_R 同圆心 z_0 , 且也包含 z 的, 一个稍小的圆 C_{R_1} (保证收敛); 根据柯西公式, 该圆 C_{R_1} 内所有 z 对应的 $f(z)$ 都可展成 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, 其中 ζ 在边界 C_{R_1} 上, z 在圆 C_{R_1} 内, 因此 $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$, 于是 $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$ 在该 z 所在区域收敛且 $= \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$, 则 $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{(\zeta-z_0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$, 将该结果代入 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, 将积分符号和 $\frac{1}{2\pi i}$ 归入求和符号内, 将与 ζ 无关的 $(z-z_0)^k$ 提到积分符外: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$ 。【可见推导的精髓在于, 将柯西公式中的 $\frac{1}{\zeta-z}$ 通过 $\frac{1}{(\zeta-z_0)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$ 展成级数, 便得泰勒级数】

此时再应用柯西公式中的 n 阶导公式: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$, 于是原式变为 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$, 适用范围为 $|z-z_0| < R$. 该式称为 $f(z)$ 的泰勒展开, 右端的级数称为 $f(z)$ 以 z_0 为中心的泰勒级数; 若 $z_0=0$, 称为麦克劳林级数。

泰勒展开是唯一的: 假如另有一不同于上一段的泰勒展开 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, 对其求 $m(m=0,1,2,\dots)$ 阶导后带入 $z=z_0$, 即可得 $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$, 这些系数与上一段的展开式中的相同, 因此展开式是唯一的。【“先求导+后代入”本质上来源于高阶导的柯西公式】

间接法求泰勒展开式: ①. 代入已知函数的展开式:

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!}}{2i}$, $k=0,2,4$ 等偶数时, 分子两项抵消=0, 于是 $\sin z = \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(i)^{2m+1} - (-i)^{2m+1}] z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(-1)^m i - (-1)^m (-i)] z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$. ②. 对已知函数的展开式求导: $\cos z = \frac{d}{dz} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2m!}$. 可知它们的收敛半径为无穷大, 因为它们的收敛半径与 e^z 的相同。

直接法求泰勒展开式: 多值函数的支点一定是它的奇点, 比如 $\ln(z)$ 的两个支点 $z=0, z=\infty$ (你可以试一下, 将 $z=0$ 代入 $\ln(z)$ 的各个分支 $= \ln 0 + i\varphi = -\infty + i\varphi$, 都是接近实轴的 $-\infty$; 再加上 z 绕 $z=0$ 一周, $\ln(z)$ 不还原, 因此 $z=0$ 是其支点), 就是它的奇点, 其邻域并不处处解析 (因为指定其支点的邻域内的某点, 其对支点的 φ 角, 不知道是属于 $f(z)$ 的哪条分支上的)。因此若要对 $\ln(z)$ 在 $z=1$ 的邻域上泰勒展开, 则由于级数的收敛圆内不能含有奇点, 因此可以事先判断收敛半径 $|z-z_0| < 1$ 。

虽然 $\ln(z)$ 是个多值函数, 但若将展开中心取在 $z=1$ 而非支点处, 则由于 $\ln(z)$ 在 $z=1$ 的邻域 (该邻域不包含支点) 上的各个单值分支相互独立, 不会随着 z 的变化互相跳跃 or 连续过渡, 因此可按照单值函数的展开方法对齐展开: $\frac{f^{(0)}(z)}{0!}, \frac{f^{(1)}(z)}{1!}, \frac{f^{(2)}(z)}{2!}, \dots$ 分别为 $\frac{\ln z}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{-1}{2!}, \dots$. 代入 $z=z_0=1$, 于是 $\ln(z) = \ln 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} (z-1)^k = \ln 1 + i2n\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} (z-1)^k = n2\pi i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k$. 收敛半径 $|z-1| < 1$ (通过比值法可得)。

$n=0$ 的单值分支 (该 n 既是 $\ln(z)$ 中的, 又是 $\ln 1$ 中的; 但最好看成 $\ln(z)$ 中的), 称为 $\ln(z)$ 的主值。 $\ln(z)$ 每一个 n 所对应的分支, 都对应着该 n 下的级数。因此级数本身也像 $\ln(z)$ 一样, 在解析区域中的每一个 z 处, 都是多值的; 只不过由于该题中 $\ln(z)$ 是以 $z=1$ 为中心展开的, 这样一来属于某个分支的 z 在区域中变化时, 不会跑到另一分支上去。

3.4 解析延拓

设某个区域 b 上的解析函数 $f(z)$, 找出另一函数 $F(z)$, 它在含有 b 的一个较大的区域 B 上解析, 且在区域 b 上等于 $f(z)$, 称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的解析延拓。——简单地说, 解析延拓就是解析函数定义域的扩大。(不一定局限于对级数进行)

比如 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (|z| < 1)$, 而 $F(z) = \frac{1}{1-z} (z \neq 1)$; 可见要对 $f(z)$ 进行解析延拓, 其中一种方法(最理想的情况), 就是找出它的和函数(如果 $f(z)$ 是个级数的话); 普遍来说, 解析延拓可以通过泰勒级数进行:

比如仍对于 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (|z| < 1)$, 先将其在 $z = \frac{i}{2}$ 的邻域上展开, 于是

$$f_0^{(k)}(z) = \sum_{k_1=k}^{\infty} \frac{k_1!}{(k_1-k)!} \cdot z^{k_1-k}, \text{ 则扩大了解析区域的函数 } f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0^{(k)}(\frac{i}{2})}{k!} (z - \frac{i}{2})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{k_1=k}^{\infty} \frac{k_1!}{(k_1-k)!} (\frac{i}{2})^{k_1-k}}{k!} (z - \frac{i}{2})^k, \text{ 利用比值法判定收敛半径, 可得到: } |z - \frac{i}{2}| <$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(k+1) \cdot \frac{\sum_{k_1=k}^{\infty} \frac{k_1!}{(k_1-k)!} (\frac{i}{2})^{k_1-k}}{\sum_{k_1=k+1}^{\infty} \frac{k_1!}{(k_1-k)!} (\frac{i}{2})^{k_1-k}}| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) \left| \frac{\sum_{k_1=k}^{\infty} \frac{k_1!}{(k_1-k)!} (\frac{i}{2})^{k_1-k}}{\sum_{k_1=k+1}^{\infty} \frac{(k_1+1)!}{(k_1+1-k)!} (\frac{i}{2})^{k_1+1-k}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 于是 } |z - \frac{i}{2}| < \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 就超出了 } |z| < 1. \text{ 然后我们再再在所得的 } f_1(z) \text{ 的解析区域内取一点作为其中心点, 再作泰勒展开, 得到 } f_2(z) \dots \text{ 如此一来, 解析区域不断扩大。}$$

可见, 利用泰勒级数进行解析延拓虽然是个普遍办法, 但具体计算很繁。所以一般都利用特殊方法(比如还有**函数关系法**: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \rightarrow \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$, 后面一个方程左边的 $\Gamma(x)$ 中 $x > 0$, 而右边却只需要 $x > -1$ 且 $\neq 0$)。这里就涉及到解析延拓所得函数是否因方法而异的问题了, 可以用反证法证明解析延拓是唯一的:

设 $f(z)$ 为 b 上的解析函数, 用两种方法将其拓展到同一个较大区域 B 上, 所得的解析函数 $F_1(z) \neq F_2(z)$ 。它们在区域 b 上相同。因而 $F_1(z) - F_2(z)$, 在 b 上处处为 0, 在 B 上非处处为零。——取 b 上边界线上一点 z_0 , 其邻域一部分属于 b , 一部分不属于 b ; 若 $F_1(z) - F_2(z)$ 在 z_0 的邻域里, 且不属于 b 的区域中 $= 0$, 则将该区域与 b 的并集, 记为 b' , $F_1(z) - F_2(z)$ 在新的区域 b' 上处处 $= 0$; 你既可以绕着 b 边界线走一圈来扩大 b 至 b' , 也可以朝着 b 的边界外法线方向走; 过程中 b' 在持续扩大, 直到 B 中 b' 之内均有 $F_1(z) - F_2(z) = 0$, 其余地方均有 $F_1(z) - F_2(z) \neq 0$; 边界线们由你来挑明, 因为是你说的 B 上的 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$ 不同, 你需要说明在哪里不同, 因此需要说明从哪里开始不同的。

在扩张完全后的 b' 区域的边界上取一点 z_0 , 保证该 z_0 的邻域内既有非 b' 区域成分, 又有 b' 区域部分[总能保证]。然后以 z_0 为中心将解析函数 $F_1(z) - F_2(z)$ 泰勒展开 $= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, 设这些系数中第一个不为 0 的是 a_m [m 有限, 且总能找到 $a_m \neq 0$, 否则即使是在其邻域的非 b' 区域, 值也 $= 0$, 这样 b' 还能扩大, 然而我们已经扩张完全],

那么 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \approx a_m(z-z_0)^m$, 这样即使是在其邻域的 b' 区域, 也有 $F_1(z) - F_2(z) \approx a_m(z-z_0)^m \neq 0$, 这样必须要求各 a_k 都=0; 但这样一来邻域的非 b' 区域也都=0了, 就需要继续扩张 b' 的版图——但我们已经扩张完全了 b' 了。

因此, 矛盾。于是 $F_1(z) - F_2(z)$ 在 B 上处处为 0。即用两种方法得到的 $F_1(z), F_2(z)$ 等价。因此解析延拓唯一。

3.5 洛朗级数展开

当 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内解析, Taylor 定理告诉我们, $f(z)$ 必可展开成幂级数。那么当 $f(z)$ 在所研究的区域(圆域)内存在奇点时, 还可否展开呢? 是不是该在除去奇点的环域上展开呢?

含正、负幂项的幂级数, 称作**双边幂级数**, 即 $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$; 其中右项为双边幂级数的**正幂部分**, 左项为**负幂部分**。

正如 $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 的**收敛半径**为 $|z|<1$, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}$ 的**收敛半径**为 $|z|>1$ 一样, 改变参数让前者**收敛半径**更大, 后者**收敛半径**更小, 并相加在一起成一个新的级数, 则我们是不是可以创造一个内部处处解析的环域呢?

负幂部分的收敛域: 令 $\zeta = (z-z_0)^{-1}$, 则 $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \zeta^k$, 其中 $|\zeta|<\frac{1}{R_2}$, 则 $|z-z_0|^{-1}<\frac{1}{R_2}$, 即 $|z-z_0|>R_2$, 在该**圆外部收敛**。

双边幂级数的收敛环: 进一步记**正幂部分** $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的**收敛半径**为 R_1 , 若 $R_2 < R_1$, 则 $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ 在**环域** $R_2 < |z-z_0| < R_1$ (称为级数的**收敛环**)内绝对且一致收敛。其和为某一解析函数。级数可逐项求导。——若 $R_2 > R_1$, 则级数处处发散。

定理 设 $f(z)$ 在环形区域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内单值解析, 则对环域内的任意 z 点, $f(z)$ 可展开为幂级数 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$, 其中 $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$, 不能继续 $= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ 。 C 为环域内绕内圆一周的任意闭合曲线。

证明 将俩同以 z_0 为圆心的, 外圆 C_{R_1} 稍缩小为 $C_{R'_1}$, 内圆 C_{R_2} 稍扩大为 $C_{R'_2}$ (保证收敛), 应用复连通区域上的柯西公式, $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ 。对于沿 $C_{R'_1}$ 的积分, ζ 在 $C_{R'_1}$ 上, z 在内部, 即 $|z-z_0| < |\zeta-z_0|$, 于是 $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$ 将导致同样的 $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$; 而对于沿 $C_{R'_2}$ 的积分, ζ 在 $C_{R'_2}$ 上, z 在外部, 即 $|\zeta-z_0| < |z-z_0|$, 此时我们只能创造公比 $= |\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}| < 1$ 的级数收敛了, 即

$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = -\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ 。代入复连通区域柯西公式，即有：
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_1}} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_2}} f(\zeta) \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta + \sum_{k=-1}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$$
 再将其中沿 $C_{R'_2}$ 的逆时针积分，利用复连通柯西定理，更改为沿着 $C_{R'_1}$ 的逆时针积分，于是两项合并为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$ (再利用了复连通柯西定理，将 $C_{R'_1}$ 更改为了 C)，即有 $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta$ 。

——只有当被展函数 $f(z)$ 在 C_{R_2} 内不存在奇点时，此时 $f(z)$ 在 C 内才处处解析，才能利用高阶导公式，继续像泰勒展开那样将 a_k 继续写成 $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ ；但这样一来就与泰勒展开无异了，就不是洛朗展开了。

(1). 尽管 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 的级数中含有 $z-z_0$ 的负幂项，单独看这些项， $z=z_0$ 均是它们的奇点，但 z_0 不一定也是 $f(z)$ 的奇点【正如 3.4 所言，将和函数 $f(z)$ 展开成级数后，收敛域一般变小了一样。从级数到 $f(z)$ ，收敛域大了，不收敛域就小了，前者的奇点就不一定是后者的奇点了】。——另外，幂级数若在环形域上收敛(区别于泰勒级数)，就是个洛朗级数，不一定要有负幂次项(你会说，这怎么可能做到？很简单，人为定义定义域为环形域)。【以上两点在例题中会出现】

(2). 如果只有环心 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则内圆 C_{R_2} 半径可以任意小， C 的可取半径无限趋近于 0，解析域中的 z 可无限接近 z_0 ，这时称 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ 为 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 邻域内的洛朗展开式。3.6 将用它来研究函数在其孤立奇点附近的性质。

(3). 同泰勒展开一样，洛朗展开也是唯一的【也有点像解析延拓的唯一性；洛朗展开是否像泰勒展开一样，也是解析延拓的可取方法之一呢？】。展开的唯一性使得可用不同方法求环域上解析函数 $f(z)$ 的洛朗展开式。

例 1: 将 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 的邻域内展开：

我们不需要管“原点的邻域”半径有多大，事实上题干也不知道，它才这么模糊地告诉你的。求出来有多大就有多大，因此“原点的邻域”只是为了提醒你收敛环的环心是原点。

引用 $\sin z$ 在以 $z_0=0$ 为中心的泰勒展开式 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} (|z| < \infty)$ ，先将其的全平面解析域挖去 $z=z_0$ ，再在 $(0 < |z| < \infty)$ 的区域上，用 z 遍除 $\sin z$ 的展开式(用 $\sin z$ 的展开式遍除以 z)，就得到 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m+1)!} (0 < |z| < \infty)$ 。

当然我们还有一种手段：另定义一个在开平面上解析的函数 $F(z)$ ：其在 $z \neq 0$ 处 $= \frac{\sin z}{z}$ ；为了保证其在开平面上解析，至少应在 $z=0$ 处连续，则 $F(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ 。于是

此时函数 $F(z)$ 便可以在全平面上泰勒展开, 再将其泰勒展开式的定义域抠掉 $z=z_0$ 即得到了 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的洛朗级数。

例 2: 在 $1<|z|<\infty$ 的环域上, 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 展为洛朗级数:

乍一看, 可见环心在 $z=0$ 处, 而 $\frac{1}{z^2}$ 的奇点 $z=0$ 不在 $1<|z|<\infty$ 的环域内, 所以它可以出现在通项中(途中 $\frac{1}{z^2}$ 提出来后就不需要动了); 于是 $\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k}}$
 $=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}}$ 。【看到 $1<|z|$, 就想着写成 $|\frac{1}{z}|<1$ 的形式, 以创造类似 $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=? \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^k$ 的】

展开式中全是负幂次项, 但 $z_0=0$ 本身不是和函数的奇点。不过话又说回来, 其实将 $f(z)$ 展成这样的洛朗级数后, **解析域变小了**; 但缩小了的解析域仍不包含和函数 [原来的被展函数 $f(z)=$ 原函数 -] 的奇点 $z=\pm 1$ 。【**为了更标准化, 也可以 $\sum_{k=0}^{-\infty} z^{-2k-2}$** 】

例 3: 在 $z_0=1$ 的邻域上, 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 展为洛朗级数:

正如例 2 中以 $z=0$ 为中心的环境因不能包含和函数的两个奇点, 而可以提前猜到其内环半径 >1 ; 这里也可以提前推测到**半径**和**环心**满足: $0<|z-1|<2$; 于是我们得想方设法弄出 $z-1$ 作为某些通项的分母, 这样至少会有前半节 $0<|z-1|$ 的出现 = , 并且弄出来 $\frac{1}{z-1}$ 后不用管它。【同样, 看到 $|z-1|<2$, 就尝试着用 $|\frac{z-1}{2}|<1$ 凑出 $\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$ 】

于是 $f(z)=\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1-z}{2})^k$
 $=\frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^k}{2^{k+2}} (0<|z-1|<2)$, 对其级数项应用比值法, 可得 $|z-1|<2$, 于是这就得出了 $0<|z-1|<2$ 。

展开式中只有一个负幂次项, 即前面那个 -1 次幂项。

例 4: 在 $z_0=0$ 的邻域上, 将 $e^{\frac{1}{z}}$ 展开:

引用 e^z 的泰勒展开 $=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (|z|<\infty)$, 将 z 替换为 $\frac{1}{z}$, 于是 $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^k}{k!} (|\frac{1}{z}|<\infty)$, 即 $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{-\infty} \frac{z^{-k}}{(-k)!} (|z|>0)$ 。【注: $e^{\frac{1}{z}}$ 可不是 e^{-z} , 后者可直接引用泰勒展开】

例 5: 在 $z_0=0$ 的邻域上, 将 $e^{\frac{1}{2}xz-\frac{1}{z}}$ 展开:

原式 $=e^{\frac{1}{2}xz} \cdot e^{-\frac{1}{z}}$; 仿照 e^z 的展开, $e^{\frac{1}{2}xz}=\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}xz)^l}{l!} (|\frac{1}{2}xz|<\infty \rightarrow |z|<\infty)$; 仿照 $e^{\frac{1}{z}}$ 的展开, $e^{-\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{(-\frac{2}{x})z}}=\sum_{n=0}^{-\infty} \frac{[(-\frac{2}{x})z]^n}{(-n)!} (|(-\frac{2}{x})z|>0 \rightarrow |z|>0)$; 这两个在两个收敛域的交集 $0<|z|<\infty$ 上, 绝对收敛的级数, 可以逐项相乘, 乘积中各项的幂从 $(-\infty, +\infty)$ 均可取到; 现考虑乘积中的**各正幂项** $z^m (m \geq 0)$, 对于 $e^{-\frac{1}{z}}$ 中的每一个 n 所对应的项 $(n \leq 0) \frac{[(-\frac{2}{x})z]^n}{(-n)!}$, 应取 $e^{\frac{1}{2}xz}$ 中的第 $l=-n+m$ 项 $(m=0, 1, 2, \dots) \frac{(\frac{1}{2}xz)^l}{l!}$ 们分别去乘后相加, 再对相同的 m 次幂项

$$\text{并合并同类项, 于是有 } \sum_{n=0}^{-\infty} [\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}xz)^{-n+m}}{(-n+m)!} \cdot \frac{[(\frac{-2}{x})z]^n}{(-n)!}] = \sum_{n=0}^{-\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{x}{2})^{-n+m}}{(-n+m)!} \cdot \frac{(\frac{x}{2})^{-n}}{(-n)!} z^m \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} [\sum_{n=0}^{-\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(-n+m)! \cdot (-n)!} (\frac{x}{2})^{-2n+m}] z^m = \sum_{m=0}^{+\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+m)! \cdot (n)!} (\frac{x}{2})^{2n+m}] z^m$$

同样, 为了得到**各负幂项** $z^m (m < 0)$, 对于 $e^{\frac{1}{2}xz}$ 中的每一个 l 所对应的项($l \geq 0$) $\frac{(\frac{1}{2}xz)^l}{l!}$, 应取 $e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}$ 中的第 $n = -l + m$ 项($m = -1, -2, -3, \dots$) $\frac{[(-\frac{2}{x})z]^{-l+m}}{(-n)!}$ 们分别去乘后相加, 再对相同的 m 次幂项并合并同类项:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} [\sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{[(-\frac{2}{x})z]^{-l+m}}{(l-m)!} \cdot \frac{(\frac{1}{2}xz)^l}{l!}] = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{-l+m} (\frac{x}{2})^{l-m}}{(l-m)!} \cdot \frac{(\frac{x}{2})^l}{l!} z^m \\ = \sum_{m=-1}^{-\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)! \cdot l!} (\frac{x}{2})^{2l-m} z^m = \sum_{m=-1}^{-\infty} [\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)! \cdot n!} (\frac{x}{2})^{2n-m}] z^m = \\ \sum_{m=-1}^{-\infty} [(-1)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-m)! \cdot n!} (\frac{x}{2})^{2n-m}] z^m.$$

于是 $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=0}^{+\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+m)! \cdot (n)!} (\frac{x}{2})^{2n+m}] z^m + \sum_{m=-1}^{-\infty} [(-1)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-m)! \cdot n!} (\frac{x}{2})^{2n-m}] z^m$, ($0 < |z| < \infty$), $[\]$ 中的函数正是 **m 阶的贝塞尔函数 $J_m(x)$** , 因此该展开式也可写为 $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) \cdot z^m$ 。【注: $m \leq -1$ 时的 $J_m(x)$ 中的 $-m$ 可以写为 $+|m|$ 的形式。】

3.6 孤立奇点的分类

利用洛朗级数展开, 研究单值函数 or 多值函数的单值分支, 的孤立奇点的分类, 及其性质。

若 $f(z)$ 只在 z_0 处不可导, 而在 z_0 的任意小邻域内处处可导, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**——比如 $\frac{1}{z}$ 、 $e^{\frac{1}{z}}$ 、 $\frac{1}{1+z^2}$; 反之, 若在 z_0 的任意小邻域内, 总可以找到除 z_0 外的不可导点, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**非孤立奇点**——比如 $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, 首先对于 $\frac{1}{z} = 0$, 它有个奇点 $z_0 = 0$; 而对于 $\sin(\frac{1}{z}) = 0$, 有 $\frac{1}{z} = k\pi$, 则 $z = \frac{1}{k\pi}$, 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, $z \rightarrow z_0 = 0$ 这个奇点。——我们接下来研究的是前一种奇点, 即孤立奇点。

(1). 上一节给出的定理显示, 在挖去奇点 z_0 后的区域上单值解析的函数 $f(z)$, 必可展成洛朗级数。我们将展开式中的正幂部分, 称为**解析部分**; 负幂部分称为**主要部分** or **无限部分**(不知道为什么要这么定义, 既谈不上主要又不一定在数量上无限), 若没有负幂项, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的**可去奇点**; 若含有有限个负幂项, 或无限个负幂项, 则 z_0 分别称为 $f(z)$ 的**极点**和**本性奇点**。

若 z_0 为**可去奇点**, 则 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ (R 可 $\rightarrow \infty$) 上的洛朗展开式中没有负幂项, 那么 $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0$ 是有限的, 即和函数、 $f(z)$ 在可去奇点的邻域上是有界的, 此时 z_0 虽是 $f(z)$ 的奇点, 但并非是其展开式(中任何一项通项)的奇点【这之前有点相反: 之前说展开式的奇点不一定是 $f(z)$ 的奇点】。——那么便可以定义一个函数 $g(z)$,

使得其在非 $f(z)$ 的奇点处 $=f(z)$ ，在 $f(z)$ 的奇点 z_0 处 $=\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ，这时 $g(z)$ 便可在包含 $f(z)$ 的奇点的区域上泰勒展开为： $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ ($|z-z_0|<R$)。——于是 z_0 便不再是 $g(z)$ 的极点，因此可去奇点以后将不作为奇点看待。

若 z_0 为**极点**，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ (R 可 $\rightarrow \infty$) 上的洛朗展开式中有有限项负幂项，那么 $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k = \infty$ 。 m 称为极点的**阶(数)**，一阶的极点也称**单极点**。【若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $f(z)$ 可表示为： $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ ，其中 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ 为有限值，但(/ 且) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)} = \infty$ (不为有限值)，即 z_0 得是 $\frac{g(z)}{(z-z_0)}$ 的极点：即 $g(z)$ 在表达式上与某函数 $F(z)$ 在其可去奇点处的展开式类似，但额外要求其 $a_0 \neq 0$ (其他系数不作要求)】

若 z_0 为**本性奇点**，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ (R 可 $\rightarrow \infty$) 上的洛朗展开式中有无限项负幂项，此时 $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的结果依 $z \rightarrow z_0$ 的方式决定。——比如 $e^{\frac{1}{z}}$ ，当 z 沿正实轴 $\rightarrow z_0=0$ 时， $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \infty$ (复数一般不将其写成 $+\infty$)；当 z 沿负实轴 $\rightarrow z_0=0$ 时， $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$ ；当 z 以 $\frac{i}{2\pi n}$ ($n=1,2,\dots$) 的序列 $\rightarrow z_0=0$ 时， $e^{\frac{1}{z}}=1$ ，是个常数。

(2). 以上的讨论中， z_0 为有限远点。当无限远点作为孤立奇点时，事情反着说就行了： $f(z)$ 在 $\infty>|z-z_0|>R$ (R 有限) 上解析，则可在该区域展成洛朗级数，其负幂部分，称为**解析部分**；正幂部分称为**主要部分** or **无限部分**。若没有正幂项，则 $z_0=\infty$ 称为 $f(z)$ 的**可去奇点**；若含有有限个正幂项，或无限个正幂项，则 ∞ 分别称为 $f(z)$ 的**极点**和**本性奇点**。——此时可作 $\zeta=\frac{1}{z}$ ，将 $z_0=\infty$ 变换为 $\zeta=0$ ，然后再从 ζ 的平面来看 $f(\frac{1}{\zeta})$ 。比如 $e^z, \cos z, \sin z$ 均以无穷远点为**本性奇点**；而多项式 $\sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k$ 以无限远点为 n 阶极点。

(3). 多值函数额外还有一种奇点，即其**支点**。

第四章 幂级数展开

4.1 留数定理

柯西定理，可处理被积函数在回路 Γ 包围的闭区域内**解析时的环积分值**， $=0$ ；而**柯西积分公式**，可处理被积函数在积分回路 Γ 内有**奇点的环积分值**，但要求被积函数在形式上能拆分出一个在该区域解析的 $f(z)$ 作为分子，这就要求被积函数在形式上很**特殊** (比如有特殊形式的分母作为现成的提醒)；而**留数定理**，直接将被积函数在除去奇点的复连通域上展开为洛朗级数(使用复连通柯西定理；分别以各点为环心展开一个个

环域上的洛朗级数), 再根据柯西定理, 利用各奇点的留数(的环积分)之和, 得到总的环积分值。

(1).根据 3.4 解析延拓, 当把 $f(z)$ 展开为洛朗级数后, 有很大可能收敛区域缩小了(这是普遍情况; 再给个具体的理由: 若 $f(z)$ 有不只一个奇点, 则其以某个奇点为环心展开为的洛朗级数, 其收敛外环半径不允许超过离它最近的奇点与该奇点的距离; 因此 $f(z)$ 以每个奇点为环心的洛朗展开的环域, 其外环半径都是各不相同的有限值, 各个环域取并集, 非常有可能没有 $f(z)$ 的解析区域大), 因此我们不能像 $\oint f(z)dz$ 一样, 直接对 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ 进行 $\oint \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k dz$ 操作, 因为题目所给的积分回路 l , 可能不在 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ 的收敛环内, 因此要将 l 变为总在其环域内的情形。

为此, 根据柯西定理, 将 l 变为 n 条, 分别紧紧包围着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 的小回路 l_1, l_2, \dots, l_n , 它们的绕向与 l 一致。若题目所设的 l 是正向环绕的, 则 $\oint f(z)dz = \sum_i \oint_{l_i} f(z)dz = \sum_i \oint_{l_i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik}(z-z_i)^k dz = \sum_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} \oint_{l_i} (z-z_i)^k dz$, 对于某个具体的 i , 利用之前的结论: l 包围 α : $\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z-\alpha} = \pm 1$, l 不包围 α : $\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z-\alpha} = 0 (n=-1)$; $\frac{1}{2\pi i} \oint_l (z-\alpha)^n dz = 0 (n \neq -1)$ 。则在 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} \oint_{l_i} (z-z_i)^k dz$ 中, 所有 $\neq -1$ 的 k 的对应项, 其环积分值 $= 0$; 只有 $= -1$ 的项, 由于 l 包围 z_i , 则 $a_{i,-1} \oint_{l_i} (z-z_i)^{-1} dz = 2\pi i a_{i,-1}$ 。而这个 $a_{i,-1}$ 是 $f(z)$ 在第 i 个奇点 z_i 处展开的洛朗级数的 $(z-z_i)^{-1}$ 项系数, 称作 $f(z)$ 在 z_i 处的留数(残数), 记为 $\text{Res}f(z_i)$ 。于是, $\sum_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} \oint_{l_i} (z-z_i)^k dz = \sum_i 2\pi i \cdot \text{Res}f(z_i) = 2\pi i \sum_i \text{Res}f(z_i)$ 。【可见推导的精髓在于: 1. 利用柯西定理将大回路 l 变成小回路 l_i 们, 环积分变为了环积分的求和。2. 将被积函数们展成洛朗级数, 取其留数。】

留数定理: 若 $f(z)$ 在回路 l 所围的区域 B 上除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外解析, 在闭区域 \bar{B} 上除 z_1, z_2, \dots, z_n 外连续, 则 $\oint f(z)dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}f(z_i)$, 即正向回路积分 = 被积函数在回路所围区域各奇点的留数之和的 $2\pi i$ 倍。【注意: 下角标 i 与虚数 i 的异同】

Additionally:

设 $f(z)$ 在无限远点邻域解析, l 到无穷远这片复连通域没有 $f(z)$ 的有限远奇点, 则 $\oint f(z)dz = \oint \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \oint z^k dz = -2\pi i a_{-1} = 2\pi i \text{Res}f(\infty)$, 其中(为了之后的统一)定义 $-a_{-1}$ 为 $f(z)$ 在无穷远点的留数 $\text{Res}f(\infty)$ 。

若 $f(z)$ 只有有限个有限远奇点, 则这些有限远的奇点必在某个圆 $|z| < R$ 的内部; 在 $R < |z| < \infty$ 的区域任取一个回路 l , 则 $0 = \oint_{l'} f(z)dz + \oint_l f(z)dz = 2\pi i f(\infty) + 2\pi i \sum_i \text{Res}f(z_i) = 2\pi i [f(\infty) + \sum_i \text{Res}f(z_i)] = 2\pi i \{f(z) \text{ 在所有各奇点的留数之和}\}$ 。

(2).对于极点, 能够不作洛朗展开而直接计算出留数(但其实有时候还不如直接展开成洛朗级数):

①.1. 设 z_0 是 $f(z)$ 的**单极点**, $f(z)$ 的洛朗展开式为 $\sum_{k=-1}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=-1}^{+\infty} a_k(z-z_0)^{k+1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-1}(z-z_0)^k = a_{-1} = \text{Resf}(z_0)$.

$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z)$ 既可以用来判断 z_0 是否是 $f(z)$ 的**单极点** [若是, 则该极限为**非零有限值**; 若不是, 则该极限要么 $=0$ (可去极点或非奇点), 要么 $=$ 非零的无限值 (更高阶的极点)], 又同时是计算 $f(z)$ 在 z_0 处的留数公式。【这相当于 $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ 中 $g(z)$ 的 $a_0 \neq 0$ 】

2. 若看不出来 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z)$ 的极限, 但 $f(z)$ 可表示为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的形式, $P(z), Q(z)$ 都在 z_0 处解析, 且 z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点 (**m 阶零点**: $Q(z)|_{z=z_0}$ 从 m 阶导**开始** $\neq 0$: 即 $Q(z)$ 可表示为 $(z-z_0)^m q(z)$, 其中 $q(z)$ 在 z_0 处 $\neq 0$), 且 $P(z_0) \neq 0$ (这是因为最终结果中分子是 $\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$, 而它必须为**非零有限值**, z_0 才能是 $f(z)$ 的一阶极点), 则: $\text{Resf}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0) \cdot P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0) \cdot P'(z) + P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 。【注: 我们并不关心 $Q(z)$ 的 $m+1$ 阶导以及更高阶导, 在 z_0 处是否 $=0$; 即 $q(z)$ 的各阶导数在 z_0 处是否为 0 】

【你可以用莱布尼兹求导公式对 $(z-z_0)^m q(z)$ 求 n 阶导数:

$\frac{d^n}{dz^n} Q(z) = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^i}{dz^i} (z-z_0)^m \cdot \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}} q(z) = \sum_{i=0}^n C_n^i A_m^{m-i} (z-z_0)^{m-i} \cdot \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}} q(z)$, 当 $n < m$ 时, i 的最大值 $i_{\max} = n < m$, $m - i_{\max} > 0$, $z-z_0$ 的最低次幂项 $(z-z_0)^{m-i_{\max}} = (z-z_0)^{m-n}$ 都不是常数 1 , 因此每一项都残留有因子 $(z-z_0)$, 不论 $\frac{d^n}{dz^n} q(z_0) \sim \frac{d^{n-n}}{dz^{n-n}} q(z_0)$ 是否 $\neq 0$, z_0 仍然是 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z)$ 的零点——但由于最低次幂项变为了 $m-n$ 次幂, 因此 z_0 是 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z)$ 的 $(m-n)$ 阶零点, 即再求导 $m-n$ 次, 最低次幂就将变为 0 , 即 $\text{const.} = 1$; 当 $n = m$ 时, $(z-z_0)^{m-i_{\max}} = (z-z_0)^{m-n} = (z-z_0)^{m-m} = 1$, 且 $\frac{d^{n-i_{\max}}}{dz^{n-i_{\max}}} q(z) = q(z)$, 而 $q(z_0) \neq 0$, 其余项含有因子 $(z-z_0)$, 于是此时 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z_0) = C_n^0 A_m^0 q(z_0) = m! q(z_0)$; 当 $n > m$ 时, $\frac{d^n}{dz^n} Q(z_0) = C_n^m A_m^0 (z_0 - z_0)^0 \cdot \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} q(z_0) = C_n^m m! \cdot \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} q(z_0)$, 我们并不关心 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z_0)$ 以及 $\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} q(z_0)$ 是不是 0 。】

②. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 **m 阶极点**, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k(z-z_0)^{k+m} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k = a_{-m}$, 为**非零有限值**, 但 $\text{Resf}(z_0) = a_{-1} \neq a_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z)$ 。

既然 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z)$ 只能用来判断 z_0 是否是 $f(z)$ 的 **m 阶极点**, 那 $\text{Resf}(z_0)$ 怎么求呢? ——令 $F(z)$ 在环域上 $= (z-z_0)^m \cdot f(z)$, 在 z_0 处的值 $F(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z) = a_{-m} =$ **有限值**, 则 $F(z)$ 在圆域内 (收敛且) 解析, 所以可展成泰勒级数, 且其泰勒展开式就是 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k$ 。

那么将 $f(z)$ 的泰勒展开式 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$ 与 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k$ 对比, 可得 $\frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} = a_{k-m}$, 取 $k=m-1$, 得到 $a_{-1} = \frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ 【这就像泰勒展开的系数一样, 比它低了一阶】, 其中 $F(z) = (z - z_0)^m \cdot f(z)$ 。

【注: 我们还可将 $F(z) = (z - z_0)^m \cdot f(z)$ 中的 m 值取得更高, 此时虽然 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z)$ 会变成有限值零, 但我们已经判断了 z_0 作为极点的阶(数), 现只关注 $\text{Resf}(z_0)$ 的求法: 比如若我们取 $F(z)$ 在环域上 $= (z - z_0)^{m+n} \cdot f(z) = (z - z_0)^{m+n}$ 。

$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+m+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-m} (z - z_0)^{k+n}$, 将 $F(z)$ 泰勒展开进行对比:
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-m} (z - z_0)^{k+n} = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{k-n-m} (z - z_0)^k$, 取 $k=m+n-1$, 得到 $a_{-1} = \frac{F^{(m+n-1)}(z_0)}{(m+n-1)!}$ 。——这可应用于 $f(z)$ 的分母次数比分子高许多的情形; 当然此时更倾向于将分子分母分别泰勒展开: 特别是分子泰勒展开后, 若能除以一个幂指数分母, 则 $f(z)$ 会直接变成洛朗级数, 直接对应地找到 a_{-1} 即可】

③. 因此, 利用以上 1+1 个极限: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z), \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z)$, 就能判断极点的阶; 利用 1+1 个公式: $\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \cdot \frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$, 就能算出 $f(z)$ 在极点的留数。

例 1. 计算 $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$ 在 $z_0 = 1$ 的留数:

由于无论 z 以何种方式 $\rightarrow 1$, 均有 $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$, 那么 $z=1$ 是函数的极点。也可以通过因式分解来判断: $\frac{1}{z^n - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)}$, 其阶数可用 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$ 判断出来: $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)} = \frac{1}{n}$, 为非零有限值, 可见 $z=1$ 是单极点, 即 $f(z)$ 的 1 阶极点。

也可认为 $P(z_0) = 1$, $Q'(z_0) = (z^n - 1)' = n z_0^{n-1} = n$, $\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 为非零有限值, 则 $z=1$ 是函数的一阶极点, 且 $\text{Resf}(1) = \frac{1}{n}$ 。

例 2. 确定 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 的极点, 并求出函数在这些极点的留数:

$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cdot \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{(z - n\pi)'}{\cos z} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$, (也可用 $\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$) 为非零有限值, 因此 $n\pi$ 是 $f(z)$ 的单极点们, $f(z)$ 在各 $z_0 = n\pi$ 处的留数即分别为 $(-1)^n$ 。

例 3. 确定 $f(z) = \frac{z+2i}{z^5+4z^3}$ 的极点, 并确定函数在这些极点的留数:

$\frac{z+2i}{z^5+4z^3} = \frac{z+2i}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z^3(z-2i)}$; $z \rightarrow 0$ 或 $2i$ 均能使函数值 $\rightarrow \infty$, 因此这俩都是其极点。根据 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z^3} = -\frac{1}{8i} = \frac{i}{8}$, 可见 $2i$ 为单极点, 且 $f(z)$ 在 $2i$ 处的留数为 $\frac{i}{8}$; 根据 $\lim_{z \rightarrow 0} z^3 \frac{1}{z^3(z-2i)} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$, 可见 0 为 $f(z)$ 的一个三阶极点, 因此 $\frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ 中的 m 取 3, 于是 $\text{Resf}(0) = \frac{F^{(2)}(z)}{2!} \Big|_{z=0} = \frac{[z^3 \cdot f(z)]''}{2!} \Big|_{z=0} = \frac{[\frac{1}{z-2i}]''}{2!} \Big|_{z=0} = \frac{1}{(0-2i)^3} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$ 。

例 4. 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} (0 < \varepsilon < 1)$:

被积函数分母 $\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon = 0$, 得两根 $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$, 其中单极点(之所以说其为单极点, 是因为 $\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \cdot \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon z_1 + 2}$ 为非 0 有限值) $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 的模 $= \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} > 1$, 不在单位圆内。而 $|z_2| = \left| \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right| = \frac{1 - \sqrt{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{\varepsilon} < \frac{1 - \sqrt{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)}}{\varepsilon} = 1$, 在单位圆内, 计算时需考虑此极点。【也可以通过 $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$, 两边取模得到 $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, 借此看出若一个在圆内, 则另一个必在圆外, 且 $\frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 在外, $\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 在内】

由于其是单极点, 则 $\text{Resf}\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\varepsilon z + 2} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{2\varepsilon z_2 + 2} = \frac{1}{2\varepsilon \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} + 2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ 。

应用留数定理, 则 $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} = 2\pi i \sum_i \text{Resf}(z_i) = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ 。

例 5. 求 $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$ 的极点和留数: 【这 5 道题的分母都可写成 $z - z_0$ 的形式, 因此还可用柯西积分公式, 举得不太“唯一”和“针对”】

若 z_0 是 $P(z)$ 的 K 阶零点、 $Q(z)$ 的 L 阶零点, 则 z_0 是 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 的 $K-L$ 阶零点。当然, 你也可以使用对分子泰勒展开来一探其极点的阶数 $m=3$ 。并且我们推荐后者, 因为其变成洛朗展开后, 顺便就能对应地看出留数; 你也可以将 $m=3$ 取得更高, 用 $a_{-1} = \frac{f^{(m+3-1)}(0)}{(m+3-1)!}$ 来求留数, 但这样仍很麻烦。

4.2 应用留数定理计算实变函数的定积分

一方面, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的积分区间 $[a, b]$, 可看作(只是)复数平面实轴上的一段 l_1 而已, 于是可通过变量代换(如 $x = \frac{\ln z}{i}$ 、 $dx = \frac{1}{iz} dz$), 并将 l_1 对应修改为某个新的, 复平面上的, 闭合回路(如 $|z|=1$; 这相当于复平面上两条积分曲线的映射), 然后再利用留数定理; 另一方面, 不变量代换 x 为 z , 而是将 x 看作的 z 一部分: 即将 $f(x)$ 先解析延拓到某一区域 B [这个延拓往往只是把 $f(x)$ 改为 $f(z)$ 而已, 因为 $f(z)$ 在实轴上的表达式和值就是 $f(x)$; 且解析延拓是唯一的], 再将其沿着 B 的边界 l 的环积分值, 减去所引入的(补充的), 被积函数在额外路径 l_2 上的路积分。

类型一 $I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$

该类型的被积函数有两个特点: 1. 被积函数是三角函数的有理函数(即分子分母可表为 \sin, \cos 的代数多项式), 2. 积分区间是 $[0, 2\pi]$ (若不是 $0 \sim 2\pi$, 用变量替换不容易写成环路积分, 不是么 =)。【我觉得这家伙不一定只能处理 1. 条件下的被积函数, 只要满足 2., 不管 1. 如何, 都可试一试将 $x = -i \ln z$ 带入其中; 不过可能既然积分上下限已经是 $[0, 2\pi]$, 那被积函数离三角函数也不远了 =]

令 $z=e^{ix}$, 将 x 看作 $z=\rho e^{i\varphi}$ 中的 φ , 并且 $\rho=1$; 这对应着当实变数 x 从 0 变到 2π 时, 复变数 $z=e^{ix}$ 从 $z=1$ 出发, 沿单位圆 $|z|=1$ 逆时针走一圈回到 $z=1$ 。将 $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$ 、 $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$ 、 $\frac{1}{iz} dz$, 代入其中, 原积分便化为 $I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz$ 。【由于懒得搞打逆时针箭头了, 以后需要的时候再标明情况哈, 否则默认为逆时针; 特别是这里本身就有 $\int_0^{2\pi}$ 作为 reminder】

例 1. 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon \cdot \cos x} dx (0 < \varepsilon < 1)$:

$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+\varepsilon \cdot \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z+\varepsilon \cdot (z^2+1)} dz = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{\varepsilon z^2+z+\varepsilon} dz$, 利用上一节例 4. 所得的结论, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\varepsilon z^2+z+\varepsilon} dz = \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, 于是 $I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ 。

例 2. 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2\varepsilon \cdot \cos x + \varepsilon^2} dx (0 < \varepsilon < 1)$:

$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1-2\varepsilon \cdot \frac{z+z^{-1}}{2} + \varepsilon^2} \frac{1}{iz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{i}{\varepsilon(z^2+1)-\varepsilon^2 z-z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{i}{\varepsilon z(z-\varepsilon)+\varepsilon-z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{i}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)} dz$, 被积函数本身在全平面上有俩单极点: $\frac{1}{\varepsilon}$ 和 ε , 但只有 ε 在 $|z|=1$ 内; 因此计算其留数: $\lim_{z \rightarrow \varepsilon} (z-\varepsilon) \cdot \frac{i}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)} = \frac{i}{\varepsilon^2-1}$ 。因此 $I = 2\pi i \cdot \frac{i}{\varepsilon^2-1} = \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}$ 。

类型二 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$:

该类被积函数的特点有三: 1. 积分区间 $(-\infty, +\infty)$, 2. 复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点, 在上半平面除有限个奇点外解析, 3. z 在上半平面及实轴上 $\rightarrow \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地 $\rightarrow 0$ (即在上半平面, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 不论 $\arg z$ 如何变化, $z \cdot f(z) \rightarrow 0$, 与 $z \rightarrow \infty$ 的方式无关)。

看似条件很强, 但其实第 3. 点是第 1. 点的必然要求: 就像实数范围内的无穷区间型反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 一样, 该积分收敛(审敛)的充要条件, 就是 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 0$ (或者说被积函数 $f(x)$ 要 $\leq \frac{k}{x^p}$, 其中 $p > 1$; 与无界函数型的结论相反)。——那么拓展到复数范围, 同样有类似的结论, 且如果 $f(x)$ 是有理分式 $\frac{z^n+a_1 z^{n-1}+\dots}{z^m+b_1 z^{m-1}+\dots}$, 则如 2. 所言, 其分母必须没有实的零点; 且与 3. 对应地, 分母多项式的次数至少高于分子两次及以上: $m-n \geq 2$ 。

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{-R_2}^{+R_1} f(x) dx$, 其中 R_1, R_2 是分别独立地趋向于 ∞ ; 在实数范围内, 即使这样, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$ 也很容易做到 $\rightarrow 0$; 但在复数范围内, 如果 $R_1 \neq R_2 \rightarrow \infty$, 即它们趋向无穷的程度不同, 则连接实轴上积分区间 $[R_1, -R_2]$ 的两个端点, 所作的一条位于上半复平面的回路 l , 便不是半圆形的, 这样的话, 各个方向的“波前”趋向无穷大的速度也就不同, 那么此时在某些方向上, 或者 z 的某种趋向方式下, 很有可能

$z \cdot f(z)$ 不一定 $\rightarrow 0$, 且其值与 $z \rightarrow \infty$ 的方式有关, 这就违背了条件 3.; 并且因此所算出的实变函数定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 也将变得不收敛或不唯一(或者说就是不收敛)。

因此我们要计算的是, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 这种积分(值)的**主值**, 即 $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$, (p: principle 或 primary?) 那么如此一来, 我们在复平面上半区域补充来用以与 $l_1 [(-R, 0) \rightarrow (R, 0)]$ 的那条 l_2 , 便是**逆时针方向的半圆** $C_R [(R, 0) \rightarrow (-R, 0)]$, 且有 $\oint_{l_1} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) \cdot dz + \int_{C_R} f(z) \cdot dz$, 取 $R \rightarrow \infty$, 则得到 $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \oint_{l_1} f(z) dz - \int_{C_\infty} f(z) \cdot dz$ 。

由于 $|\int_{C_R} f(z) \cdot dz| = |\int_{C_R} z f(z) \cdot \frac{dz}{z}| \leq \int_{C_R} |z f(z)| \cdot \frac{|dz|}{|z|} \leq \max\{|z f(z)|\} \int_{C_R} \frac{|dz|}{R} = \max\{|z f(z)|\} \cdot \pi$, 以及 $\lim_{R \rightarrow \infty} \max\{|z f(z)|\} = \lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0$ (可通过观察 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$ 是否满足条件来判断, 即**分母比分子至少高两次**), 因此 $|\int_{C_\infty} f(z) \cdot dz| = 0$, 由于 $\int_{C_\infty} f(z) \cdot dz$ 该复数的模 $= 0$, 因此该复数, 即积分值 $= 0$; 而根据**留数定理**, $\oint_{l_1} f(z) dz = 2\pi i \cdot \{f(z) \text{ 在上半平面所有奇点的留数之和}\}$, 可知 $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \{f(z) \text{ 在上半平面所有奇点的留数之和}\}$ 。【注: 这里不认为无限远点是奇点, 计算留数时不包含其在内】。

例 3. 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$:

当然可以用原函数 $\arctan x$ 来做 $= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$; 也可将被积函数解析延拓为 $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}$, 其两个**单极点** $\pm i$, 但只有一个 $+i$ 在上半平面, 于是 $\text{Res}f(+i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$; 需要说明因 $\frac{1}{1+x^2}$ 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 0$ 而 $\int_{C_\infty} f(z) \cdot dz = 0$, 因此 $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \oint_{l_1} f(z) dz - \int_{C_\infty} f(z) \cdot dz = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$ 。【要么像我们这样中途声明 $\int_{C_\infty} f(z) \cdot dz = 0$, 要么提前说明它满足的三个条件】

例 4. 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$:

同样, 将 $f(x)$ 解析延拓为 $f(z) = \frac{1}{(z-i)^n} \cdot \frac{1}{(z+i)^n}$, 它在上半平面有 n 阶极点 $+i$, 于是 $\text{Res}f(+i) = \frac{F^{(n-1)}(+i)}{(n-1)!}$, 其中 $F(+i) = (z-i)^n \cdot \frac{1}{(z-i)^n} \cdot \frac{1}{(z+i)^n} = \frac{1}{(z+i)^n}$, 而 $F^{(n-1)}(+i) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z+i)^{-n} \Big|_{z=i} = (-n) \cdots (-n-n+2)(i+i)^{-n-n+1} = n \cdots (2n-2) \cdot (-1)^{n-1} \cdot i^{-2n} \cdot i \cdot 2^{-2n+1} = n \cdots (2n-2) \cdot (-1)^{-1} \cdot i \cdot 2^{-2n+1} = -\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 \cdot 2^{2n-1}} \cdot i$ 。

于是, $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \oint_{l_1} f(z) dz - \int_{C_\infty} f(z) \cdot dz = \frac{\pi \cdot (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 \cdot 2^{2n-2}}$ 。

例 5. 计算 $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$:

乍一看积分区间并不符合**类型二**的条件 1.。但由于被积函数 $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ 是偶函数, 所以 $\int_0^{\infty} = \int_{-\infty}^0$, 以至于 $2 \int_0^{\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}$, 得到 $\int_0^{\infty} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi \cdot (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 \cdot 2^{2n-1}}$ 。

当然, 你也可以将回路拓展为: $(0,0) \rightarrow (R,0)$ 、沿 $\frac{1}{2}$ 圆弧 C_R 到 $(-R,0)$ 、再 $(-R,0) \rightarrow (0,0)$; 只不过此时需要减两段。

例 6. 计算 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$:

解析延拓为 $\frac{1}{1+z^4}$, 其中令 $z^4 = -1$, 得到 $z^2 = \pm i = e^{i(\pm\frac{\pi}{2})}$, 于是 $z = \pm e^{i(\pm\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}}$, 即 $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ 或 $\pm e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 分别处于 4 个象限的 45° 方向距离原点 1 个单位的地方; 由于线积分路径只是正实半轴, 因此我们只需将拓展回路确定为: $(0,0) \rightarrow (R,0)$ 、沿 $\frac{1}{2}$ 圆弧 C_R 到 $(0,R)$ 、再 $(0,R) \rightarrow (0,0)$ 。此时需减去的额外那段线积分 l_2 $(0,R) \rightarrow (0,0)$ 中, 自变量 $z=iy$, 因此 $dz=idy$, 以至于 $\int_{l_2} \frac{1}{1+z^4} dz = i \int_0^R \frac{1}{1+y^4} dy = -i \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$, 它可用原式来表达, 因此可与之合并。

这样解的话, 所选回路较小, 圈定的极点数少, 计算量稍少。据此还可用同样的 $\frac{1}{4}$ 扇面, 求诸如 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{100}} dx$ 的值。

类型三 $I = \int_0^{\infty} F(x) \cos mx \cdot dx, \int_0^{\infty} G(x) \sin mx \cdot dx$:

该类被积函数的特点有三: 1. 积分区间 $[0, +\infty]$, 2. 偶函数 $F(x)$ 和奇函数 $G(x)$ 在实轴上没有奇点, 在上半平面除有限个奇点外解析, 3. z 在上半平面及实轴上 $\rightarrow \infty$ 时 $F(x), G(x)$ 一致地 $\rightarrow 0$ 。

$\int_0^{\infty} F(x) \cos mx \cdot dx = \int_0^{\infty} F(x) \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{imx} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F(x) e^{-imx} \cdot dx$, 由于 $F(x)$ 是偶函数, 令 $x=-y$, 代入右项 $= \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} F(-y) e^{imy} \cdot d(-y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 F(y) e^{imy} \cdot dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 F(x) e^{imx} \cdot dx$, 于是原式 $= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} \cdot dx$; 同样, $\int_0^{\infty} G(x) \sin mx \cdot dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{imx} \cdot dx$ 。

这样一来, 利用 $\oint_l F(z) e^{imz} dz = \int_{-R}^R F(x) e^{imx} \cdot dx + \int_{C_R} F(z) e^{imz} \cdot dz$, 得到 $\int_0^{\infty} F(x) \cos mx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} \cdot dx = \frac{1}{2} [\oint_l F(z) e^{imz} dz - \int_{C_{\infty}} F(z) e^{imz} \cdot dz]$, 其中当 m 为负数时, 回路 l 和 C_R 选在实轴下方, 绕向为顺时针; 当 m 为正数时, 回路 l 和 C_R 选在实轴上方, 绕向为逆时针。——以保证左式是从负实轴积分到正实轴。现在我们就差 $\int_{C_{\infty}} F(z) e^{imz} \cdot dz$ 这家伙的值的计算了:

约当引理: 若 1. 实数 $m > 0$, 2. C_R 为原点为圆心且位于上半平面的半圆周, 3. z 在上半平面及实轴上 $\rightarrow \infty$ 时 $F(z)$ 一致地 $\rightarrow 0$ 。则: $\int_{C_{\infty}} F(z) e^{imz} \cdot dz = 0$ 。

将 $z = R \cdot e^{i\varphi} = R \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, 以及 $dz = d(R \cdot e^{i\varphi}) = R d(e^{i\varphi}) = i R e^{i\varphi} d\varphi = i z d\varphi$, 代入 $|\int_{C_R} F(z) e^{imz} \cdot dz| = |\int_0^{\pi} F(z) e^{imR\cos\varphi} e^{-mR\sin\varphi} \cdot i z d\varphi| = |\int_0^{\pi} F(z) e^{-mR\sin\varphi} \cdot R d\varphi| \leq \max\{|F(z)|\} \cdot R \cdot |\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} \cdot d\varphi|$ 。其中, $\lim_{R \rightarrow \infty} \max\{|F(z)|\} = \lim_{z \rightarrow \infty} |F(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$,

则现在只需要证明 $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \left| \int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right|$ 为一个有限值, 即可证明

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} \cdot dz = \left| \int_{C_\infty} F(z) e^{imz} \cdot dz \right| = 0:$$

由于 $\sin \varphi$ 在积分区间 $[0, \pi]$ 上关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称, 因此被积函数 $e^{-mR \sin \varphi}$ 也关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称。那么 $\int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi$ 。由于在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的区间上 $\sin \varphi > \frac{1}{\pi/2} \cdot \varphi$, 且 $m > 0$, 因此 $-m \sin \varphi < -m \frac{2}{\pi} \varphi$, 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \frac{2}{\pi} \varphi} \cdot d\varphi = -\frac{\pi}{2mR} (e^{-mR \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} - 1) = -\frac{\pi}{2mR} (1 - e^{-mR})$, 因此 $R \cdot \left| \int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right| < \frac{\pi}{m} (1 - e^{-mR})$ 。即 $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \left| \int_0^\pi e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right| < \frac{\pi}{m}$ 。

——如果 $m < 0$, 则约当定理表述为: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} F(z) e^{imz} \cdot dz = 0$, 其中 C'_R 为 C_R 关于实轴的对称半圆, 在 x 轴下方, 回路绕向为顺时针。【至于为什么: $\left| \int_{C'_R} F(z) e^{imz} \cdot dz \right|$ 会变为 $\left| \int_0^{-\pi} F(z) e^{-mR \sin \varphi} \cdot R d\varphi \right| \leq \max\{|F(z)|\} \cdot R \cdot \left| \int_0^{-\pi} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right|$, 而根据 $\int_0^{-\pi} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi = 2 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi$, 以及 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 的区间上 $\sin \varphi < \frac{1}{\pi/2} \cdot \varphi$, 和 $m < 0$ 有 $-m \sin \varphi < -m \frac{2}{\pi} \varphi$, 于是 $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi > \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-mR \frac{2}{\pi} \varphi} \cdot d\varphi = -\frac{\pi}{2mR} (e^{mR} - 1) = \frac{\pi}{2mR} (1 - e^{mR})$, 注意该积分值是负的, 因此 $R \cdot \left| \int_0^{-\pi} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right| = 2R \cdot \left| \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi \right| = -2R \cdot \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \varphi} \cdot d\varphi < -\frac{\pi}{m} (1 - e^{mR})$ 】

结论: $\int_0^\infty F(x) \cos mx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty F(x) e^{imx} \cdot dx = \frac{1}{2} \oint_l F(z) e^{imz} dz$, 其中当 m 为负数时, (由于) l 为顺时针绕向, $\frac{1}{2} \oint_l F(z) e^{imz} dz = -\pi i \{F(z) e^{imz} \text{ 在下半平面的留数和} \}$; 其中当 m 为正数时, l 为逆时针绕向, $\frac{1}{2} \oint_l F(z) e^{imz} dz = \pi i \{F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面的留数和} \}$ 。

不过由于 $\{F(z) e^{imz} \text{ 在下半平面某极点的留数} \} = -\{F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面关于实轴对称的极点的留数} \}$, 因此 $\{F(z) e^{imz} \text{ 在下半平面的留数和} \} = -\{F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面的留数和} \}$; 因此, 公式可统一为 $\int_0^\infty F(x) \cos mx \cdot dx = \pi i \{F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面的留数和} \}$, 不论 m 的正负。

同样 $\int_0^\infty G(x) \sin mx \cdot dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty G(x) e^{imx} \cdot dx = \frac{1}{2i} \oint_l G(z) e^{imz} dz$, 当 m 为负数时 $= -\pi \{G(z) e^{imz} \text{ 在下半平面的留数和} \}$; 当 m 为正数时 $= \pi \{G(z) e^{imz} \text{ 在上半平面的留数和} \}$ 。同样, 公式也可统一为后者的形式。【但是要注意, 即使在计算 $\oint_l F(z) e^{imz} dz$ 和 $\oint_l G(z) e^{imz} dz$ 时, 公式可以统一为 $2\pi i \{F(z) e^{imz} \text{ 或 } G(z) e^{imz} \text{ 在上半平面的留数和} \}$, 但实际选取的回路 l (的位置及其方向), 仍因 m 的正负而异! ! 虽然这里看不出来什么异样 (因为我们不关心 l 的选取: 无论 l 怎么选取, 被积函数对 C'_R 和 C_R 上的积分值都在极限情况下 $= 0$), 但我们在类型四就将体会到其中的差异, 因为 l 将导致 C_ε 的绕向不同】

例 7. 计算 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx$:

由于 $F(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ 满足偶函数、实轴上无奇点、一致 $\rightarrow 0$ 的条件，积分限也符合，
 则 $I = \frac{1}{2} [\oint_l F(z) e^{imz} dz - \int_{C_\infty} F(z) e^{imz} \cdot dz] = \frac{1}{2} \oint_l \frac{1}{z^2+a^2} e^{imz} dz = \pi i \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{imz}}{z^2+a^2} =$
 $\pi i \frac{e^{imai}}{ai+ai} = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$ 。【 $\pm ai$ 是 $F(z) e^{imz} = \frac{e^{imz}}{z^2+a^2}$ 的两个单极点】

例 8. 计算 $\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} dx$:

由于 $F(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^2}$ 满足奇函数、实轴上无奇点、一致 $\rightarrow 0$ 的条件，积分限也符合，
 则 $I = \frac{1}{2i} [\oint_l G(z) e^{imz} dz - \int_{C_\infty} G(z) e^{imz} \cdot dz] = \frac{1}{2i} \oint_l \frac{z}{(z^2+a^2)^2} e^{imz} dz = \frac{2\pi i}{2i} \frac{1}{1!} [(z -$
 $ai)^2 \frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}]' |_{z=ai} = \pi [\frac{ze^{imz}}{(z+ai)^2}]' |_{z=ai} = \frac{m\pi}{4a} e^{-ma}$ 。【 $\pm ai$ 是 $G(z) e^{imz} = \frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}$ 的两个二阶极点】

类型四 实轴上有单极点的情形：或者为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 中的满足**类型二**的 3 个条件的 $f(x)$ ；抑或是**类型三**中计算形如 $\int_0^\infty F(x) \cos mx \cdot dx$, $\int_0^\infty G(x) \sin mx \cdot dx$ 所采用的 $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty F(x) e^{imx} \cdot dx$ 、 $\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty G(x) e^{imx} \cdot dx$ 中的 $F(z) e^{imz}$ 、 $G(z) e^{imz}$ ，——如果这样的 $f(x)$ 、 $F(z) e^{imz}$ 、 $G(z) e^{imz}$ 在实轴上有奇点(最好是单极点)的话，我们得像求实数范围内的瑕积分(无界函数型反常积分)一样，**额外地**(意味着其他步骤相同，且 $f(z)$ 满足那些条件)“避开”这个“瑕点”(实数范围内将积分区间分为两段，上 or 下积分限取靠近瑕点的极限，分别求其积分后，再求和；要求两段积分均存在/收敛)，转而从充分小的正数 ε 为半径，以 $z=\alpha$ 为圆心，作半圆绕过奇点 α ，再来构成我们之前的积分回路 l 。

同样，利用 $\oint_l f(z) dz = \int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ ，其中，等式右端前两项是我们想要的，第三个积分是在满足条件的 $f(z)$ 下 $\rightarrow 0$ 的，那么我们只需计算第四项：

由于 α 为 $f(z)$ 的单极点，则 $f(z)$ 在 $z=\alpha$ 的邻域展开的洛朗级数，在形式上应为：
 $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + P(z-\alpha)$ ，其中 $P(z-\alpha)$ 为级数的解析部分，它在 C_ε 上连续且有界，于是由于 $|\int_{C_\varepsilon} P(z-\alpha) dz| \leq \max\{|P(z-\alpha)|\} \cdot |\int_{C_\varepsilon} dz| = \pi \varepsilon \cdot \max\{|P(z-\alpha)|\}$ ， $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ 中的 $\int_{C_\varepsilon} P(z-\alpha) dz$ 部分便 $\rightarrow 0$ 。

而其中的 $\int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z-\alpha} dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z-\alpha} d(z-\alpha) = \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}} d(\varepsilon e^{i\varphi}) = \int_{C_\varepsilon} a_{-1} i d\varphi = a_{-1} i (-\pi) = -\pi i \text{Resf}(\alpha)$ 。【注意，这里 $\int_{C_\varepsilon} d\varphi = -\pi$ 是在 l 逆时针、导致 C_ε 顺时针，的前提下才能有的；若 l 是顺时针 and 下半平面的回路，则这里的 $\int_{C_\varepsilon} d\varphi = \pi$ ，那么接下来的答案也就不一样了】于是 $\int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(x) dx = \oint_l f(z) dz - \int_{C_\varepsilon} f(z) dz - 0 = \oint_l f(z) dz + \pi i \text{Resf}(\alpha)$ 。相较于之前的计算，只相当于多加一项或有限项 $\pi i \text{Resf}(\alpha)$ 而已，即实轴上有限个单极点的情况也适用。【这一项也可能由于 l 的顺时针 and 下半平面的选取，而成为 $-\pi i \text{Resf}(\alpha)$ ，这种情况通常出现在**类型三**中 $m < 0$ 的情形(**类型二**的 l 一般都逆时针的)】

实轴上的奇点只能是单极点，不能是二阶及以上的极点，甚至本性极点。否则 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，第四项 $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ 的值，将趋向于 ∞ 或不可预知/不存在(与 $z \rightarrow 0$ 的方式有关)。

Additionally:

数学上称之为**希尔伯特变换**，物理上称之为**色散关系**：

设 $f(z)$ 仍满足当 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 时, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则根据 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(x) dx = \oint_{\Gamma} f(z) dz - \int_{C_\varepsilon} f(z) dz - 0 = \oint_{\Gamma} f(z) dz + \pi i \operatorname{Res} f(\alpha)$. 若进一步地, 其中的 $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$, 即 $f(z)$ 在上半平面处处解析, 那么 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \operatorname{Res} f(\alpha)$.

现在我们考虑如下变换: 由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则 $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{f(z)}{z} = 0$, 于是 $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{f(z)}{z - \alpha_0} = 0 (0 \leq \arg z \leq \pi)$; 其中 α_0 是一实数, 则由于 $f(z)$ 在上半平面处处解析, $F(z) = \frac{f(z)}{z - \alpha_0}$ 在上半平面也处处解析, 导致 $\oint_{\Gamma} F(z) dz = 0$, 且只在实轴上有 $f(z)$ 所原本拥有的各个一阶极点 $\alpha = \alpha_i (i=1, 2, 3, \dots)$, 以及除此之外的一个实轴上的一阶极点 α_0 [注意, α_0 不能是 $f(z)$ 的一阶极点 (所以我才用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 来表示 $f(z)$ 的各个极点), 否则 α_0 将是 $F(z)$ 的二阶极点, 就求不出 $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ 了]; 则新创造的函数 $F(z) = \frac{f(z)}{z - \alpha}$ 满足**类型二**的条件, 那么将有 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \oint_{\Gamma} F(z) dz + \pi i \operatorname{Res} F(\alpha_0) = \pi i \operatorname{Res} F(\alpha_0) = \pi i f(\alpha_0)$.

那么好玩的事情来了: 设 $f(\alpha_0) = a + ib$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \pi i (a + ib) = \pi i (a + ib) = \pi(-b + ia)$, 即 $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = -b + ia$. 两边分别取实部, 得到 $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - \alpha_0} dx = \operatorname{Im}(-b + ia) = a = \operatorname{Re}(a + ib) = \operatorname{Re} f(\alpha_0)$, 因此 $\operatorname{Re} f(\alpha_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$. 两边分别取虚部, 得到 $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - \alpha_0} dx = \operatorname{Re}(-b + ia) = -\operatorname{Im}(a + ib) = -\operatorname{Im} f(\alpha_0)$, 于是 $\operatorname{Im} f(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - \alpha_0} dx$.

例 9. 计算 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$:

原积分函数, 在补充定义后是没有奇点的; 但若我们将该实函数, 认为是 $G(x) \sin mx$ 型的, 则将得到 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x} \cdot dx$. $\frac{e^{imx}}{x}$ 除了在实轴上有**单极点** $x=0$ 外, 满足**类型三**的条件.

然而这家伙在上半平面没有奇点, 于是 $\int_{-\infty}^{0-\varepsilon} \frac{e^{imx}}{x} dx + \int_{0+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x} dx = \oint_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z} dz - \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{imz}}{z} dz - 0 = \pi i \operatorname{Res} f(0) = \pi i e^{im0} = \pi i$. 那么 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x} \cdot dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$.

推论: 对于 $m > 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{mx} d(mx) = \frac{\pi}{2}$; 对于 $m < 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin(-m)x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$.

第五章 傅里叶变换

5.1 傅里叶级数

(一).周期函数的傅里叶展开

1. 【 $f(x+2l)=f(x)$ 】周期为 $2l$ 的任一函数 $f(x)$ 可以利用三角函数族： $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{k\pi x}{l}$ ，展开为傅里叶级数。令 $\frac{k\pi x}{l} = X$ ，由于 $\frac{k\pi \Delta x}{l} = \Delta X = 2\pi$ 得到 $T = \Delta x = \frac{2l}{k}$ ，这些函数的周期分别为：任意、 $\frac{2l}{1}$ 、 $\frac{2l}{2}$ 、 \dots ，它们均可看作由 $f(x)$ 的周期 $2l \times \frac{1}{k}$ (k 为整数)，来得到；公有周期为 $2l$ 。

这组基本函数族是完备的，即该组基的线性组合能生成该维度的所有函数，因此不能去掉其中任何一个；它们同时也是正交的，即其中任意两个不同的函数之积，在 $[-l, l]$ 上的积分=0，即：

$$(1). \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = 0 (k \neq 0, \text{ 否则 } 1 \text{ 与 } 1 \text{ 相同});$$

$$(2). \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = 0;$$

$$(3). \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx = 0 (k \neq n, \text{ 否则 } \cos \frac{k\pi x}{l} \text{ 与 } \cos \frac{n\pi x}{l} \text{ 相同});$$

$$(4). \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx = 0 (k \neq n, \text{ 否则 } \sin \frac{k\pi x}{l} \text{ 与 } \sin \frac{n\pi x}{l} \text{ 相同});$$

$$(5). \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx = 0;$$

利用三角函数族的正交性，可以求得傅里叶级数 $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l})$ 的展开系数：①. $\int_{-l}^l f(x) \cdot 1 \cdot dx = \int_{-l}^l a_0 \cdot dx = 2la_0$;

②. $\int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l a_k \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = a_k \int_{-l}^l \frac{\cos \frac{2k\pi x}{l} + 1}{2} \cdot dx$ ，其中的 $\cos \frac{2k\pi x}{l}$ 周期为 $\frac{2l}{k} \cdot \frac{1}{2} =$ 积分区间长度 $2l$ 的 $\frac{1}{2k}$ 倍，于是 $a_k \int_{-l}^l \frac{\cos \frac{2k\pi x}{l} + 1}{2} \cdot dx = a_k \frac{2l}{2} = a_k l$ ，因此 $\int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = a_k l$ 。

③. 同样的道理，根据 $\sin^2 \frac{k\pi x}{l} = \frac{1 - \cos \frac{2k\pi x}{l}}{2}$ ，得 $\int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = b_k l$ 。【以后直接使用 $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = l$ ，】

于是 $a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cdot dx$; $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$; $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$ 。在实际操作中, 应注意: a. 积分上下限可调整为 $0 \sim 2l$ 等任何一个区间长度为 $2l$ 的区间两端点, 因为被积函数 $f(x)$ 、 $f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}$ 、 $f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$ 都以 $2l$ 为其的一个周期。b. 由于有三角函数的存在, 则可利用凑微分算积分, 一般将 $\cos \frac{k\pi x}{l}$ 、 $\sin \frac{k\pi x}{l}$ 放入微分算符 d 内。

2. 狄里希利定理 (傅里叶级数收敛的充分条件) :

若 $f(x)$ 满足: (1). 处处连续, 或每个周期中, 只有有限个第一类间断点(可去间断点和跳跃间断点: 左右极限均存在, 或等或不等)。(2). 在每个周期只有有限个极值点。

则: 级数收敛, 且级数和, 在连续点 x 处 $=f(x)$; 在间断点 x 处 $=\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)]$ 。

(二). 奇函数及偶函数的傅里叶展开

若 $f(x)$ 既是周期函数又是奇函数, 则 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$, 称为傅里叶正弦级数; 因 $f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$ 是偶函数, 系数 b_k 可进一步写为: $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$; 且 $f(0)=f(l)=0$ 。

若 $f(x)$ 既是周期函数又是偶函数, 则 $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}$, 称为傅里叶余弦级数; 因 $f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}$ 是偶函数, 系数 a_k 可进一步写为: $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$; $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cdot dx$; 且 $f'(0)=f'(l)=0$ 。

(三). 定义在有限区间上的函数的傅里叶展开

这有点像解析延拓: 如在有限区间 $(0, l)$ 上有定义的函数 $f(x)$, 可以采取延拓的方法, 使其成为某种周期函数 $g(x)$, 其在 $(0, l)$ 上 $g(x) \equiv f(x)$ 。然后再对 $g(x)$ 作傅里叶展开, 其级数和在 $(0, l)$ 上代表 $f(x)$ 。

若对 $f(x)$ 在区间边界上的值或导数值有要求, 即若额外要求 $f(0)=f(l)=0$, 则对 $f(x)$ 进行奇延拓成奇周期函数 $g(x)$ 【因为奇函数在原点处值 $g(0)=0$; 或者说, $g(l)$ 的展开式的值根据狄里希利定理, 在间断点 $x=l$ 处的值 $=\frac{1}{2}[g(l_+) + g(l_-)] = \frac{1}{2}[g(l_+ - 2l) + g(l_-)] = \frac{1}{2}[g((-l)_+) + g(l_-)] = 0$ 】; 若额外要求 $f'(0)=f'(l)=0$, 则对 $f(x)$ 进行奇延拓成偶周期函数 $g(x)$ 【虽然延拓 $f(x)$ 所得到的 $g(x)$ 的非级数形式, 在 0 、 l 处一般是不可导的, 但 $g(x)$ 的级数形式(各项)在这里是可导的, 且导数 $=0$ 】。

(四).复数形式的傅里叶级数

注意，复数形式的傅里叶级数，只是在形式上是复数形式而已：即它是由实数形式的傅里叶级数推导而来的，而不是推广而来的；但它的形式非常统一和谐，因此广为沿用。

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} + e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2} + b_k \frac{e^{i\frac{k\pi x}{l}} - e^{-i\frac{k\pi x}{l}}}{2i})$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\frac{k\pi x}{l}} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\frac{k\pi x}{l}}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \text{ 其中 } c_0 = a_0; \quad c_+ = \frac{a_k - ib_k}{2};$$

$$c_- = \frac{a_k + ib_k}{2}. \quad \text{【} c_+ \text{是指该系数所对应的 } e \text{ 指数 } e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \text{ 其指数是正的】}$$

$$\text{进一步地将系数用复数表示: } c_0 = a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cdot dx; \quad c_+ = \frac{a_k - ib_k}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\int_{-l}^l f(x) \cdot [\cos \frac{k\pi x}{l} - i \sin \frac{k\pi x}{l}] \cdot dx}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{-i\frac{k\pi x}{l}} \cdot dx; \quad c_- = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2} \frac{\int_{-l}^l f(x) \cdot [\cos \frac{k\pi x}{l} + i \sin \frac{k\pi x}{l}] \cdot dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{i\frac{k\pi x}{l}} \cdot dx.$$

于是，统一地写为： $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$ ， $c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{-i\frac{k\pi x}{l}} \cdot dx (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。
 【注意：系数中的 e 指数 $-i\frac{k\pi x}{l}$ 与非系数部分的指数部分 $i\frac{k\pi x}{l}$ 有个负号之差！】为了使级数的系数部分中的积分变量 x 与外面非系数部分的 x 不冲突(在含义上不混淆)，我们之后将其记为 $c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i\frac{k\pi \xi}{l}} \cdot d\xi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ，虽然这项工作在此之前实数形式的傅里叶变换的系数中就该体现(可能实数 x 喜欢用 ξ 替换，而复数 z 习惯用 ζ 替换；不不不，本质上这是因为 $x, y, z \longleftrightarrow \xi, \eta, \zeta$)。

5.2 傅里叶积分与傅里叶变换

定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的非周期函数 $f(x)$ ，一般来说不能展成傅里叶级数。但可以认为它是周期 $2l \rightarrow \infty$ 时的周期函数。所以，我们也可以把非周期函数展开为所谓的“傅里叶积分”。【由于复数形式的傅里叶级数的广为应用，我们不再推导实数形式的傅里叶积分，它的推导和复数形式的异曲同工；并且由于二者等价，所以可通过复数形式的傅里叶积分得到实数形式的傅里叶积分】

(一).复数形式的傅里叶积分

1. 将复数形式的 c_k 代入复数形式的傅里叶级数， $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i\frac{k\pi \xi}{l}} \cdot d\xi] e^{i\frac{k\pi x}{l}}$ 。设不连续参量 $w_k = \frac{k\pi}{l}$ ，则 $\lim_{l \rightarrow \infty} \Delta w_k = \lim_{l \rightarrow \infty} w_k - w_{k-1} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\pi}{l} = 0$ ，这意味着离散

的 $\{w_k\}$ 序列变成了连续的轴上的刻度 $\{w\}$ 了, 并且 Δw_k 因此也可写为 dw_k , 而由于 $\Delta w_k = \frac{\pi}{l}$ 本身就与 k 无关, 所以 $l \rightarrow \infty$ 时, 将 Δw_k 写作 dw 。

回顾一下实变函数的定积分的定义: 连续函数 $f(x)$, 起点 x_0 , 终点 x_n 均固定, 其间插入 $n-1$ 个分点 $x_1 \sim x_{n-1}$, 分为 n 个小段 $[x_{k-1}, x_k]$, 每个小段上任取一点 ξ_k , 则我们定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$, 如果 Δx_k 是恒定的话(即 n 个小段是等分的/等长的 $\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$), 则该结果还可进一步拓展为, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1+j}^{n-j} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1+j}}^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-j}} f(x) dx = \int_{\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}}^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - j \cdot \frac{x_n - x_0}{n}} f(x) dx = \int_{\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}}^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - j \cdot \frac{x_n - x_0}{n}} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$, 其中 i, j 为某 ≥ 0 的固定常整数。

而对于**无穷限的反常积分**, 我们先将 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$, 写作 Δx_k 等长时候的 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_0 + k \Delta x) \cdot \Delta x$, 再拓展求和限为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_0 + k \Delta x) \cdot \Delta x$, 此时便有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x_0 + k \frac{x_n - x_0}{n}\right) \cdot \frac{x_n - x_0}{n} = \int_{\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + k \frac{x_n - x_0}{n}}^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + k \frac{x_n - x_0}{n}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, 其中的 x_0, x_n 仍是某固定区间的俩端点。由于 n 只是趋向于无穷大 $n \rightarrow \infty$, 而 k 却可取到 $\pm\infty$, 因此积分上下限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + k \frac{x_n - x_0}{n}$, 可取到 $\pm\infty$ 。上上一段中的 $w_k, \Delta w_k$ 就如同这里的 $x_k, \Delta x_k$, 并且也是 Δw_k 等间距的情况。

于是 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i \frac{k\pi\xi}{l}} \cdot d\xi \right] \frac{\pi}{l} e^{i w_k x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i w_k \xi} \cdot d\xi \right] \Delta w_k e^{i w_k x}$, 现在我们令 $l \rightarrow \infty$, 即有 $\frac{1}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i w_k \xi} \cdot d\xi \right] e^{i w_k x} \right\} \Delta w_k = \frac{1}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi \right] e^{i w x} \right\} \Delta w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi \right] e^{i w x} dw$ 。【该式中, 最外积分限实际上是 $k \rightarrow \infty$, 对应自变量 $w = \frac{k\pi}{l} \rightarrow \infty$; 而里面的积分限, 是指 $l \rightarrow \infty$, 对应自变量 $x \rightarrow \infty$ 】

【注: $\lim_{l \rightarrow \infty} w_k = -\infty$ 可以这么理解: $w_k = \frac{k\pi}{l}$ 中的 l 虽 $\rightarrow \infty$, 但视为一个 ∞ 的定值(而不是一个趋势), 以保证 $dw = \frac{\pi}{l}$ 是个无穷小的定值; 而 k 却是 $\rightarrow -\infty$ 的趋势, 总能比 l 大, 即比分的 $\pi \div \frac{\pi}{l} = l$ 个小区间更多, 所以 w_k 可取到 $\pm\infty$; 另一方面, 更好的一种理解是: 将 $w_k = \frac{k\pi}{l}$ 与 $x_0 + k \frac{x_n - x_0}{n}$ 对比, 其中的 $x_0 = 0, x_n - x_0 = \pi, l = n, k = k$ 。将该求和写成无穷积分, 便在情理之中了。】

该式 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi \right] e^{i w x} dw$, 称为 $f(x)$ 的(复数形式的)傅里叶积分(对应傅里叶级数)。不过我们常常将其中的 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi$ 部分简记为 $F(w)$, 称作 $f(x)$ 的傅里叶变换(式), 或将 ξ 替换为 x 后, 称为傅里叶变换的像函数 $\mathcal{F}[f(x)]$; 对于后一种称呼, 有对应关系: $F(w) = \mathcal{F}[f(x)], f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)]$, 并称 $f(x)$ 为傅里叶变换的原函数。【傅里叶变换式 $F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi$, 可与傅里叶级数中的系数

$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \cdot e^{-i \frac{k\pi}{l} \xi} \cdot d\xi$ 对比起来记忆(本来前者就是由后者得来的); 并且也可将 $F(w)$ 之外的部分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw$ 与 **类型三** 的 $\int_0^{\infty} F(x) \cos mx \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} \cdot dx$ 对比记忆; 或者将其与 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x}$ 中 c_k 之外的部分, 对比起来记忆(本来前者就是由后者得来的)】

2. 傅里叶积分定理:

若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上满足: (1). 在任意有限区间满足 **狄里希利条件**; (2). 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上 **绝对可积** (即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 收敛), 则 $f(x)$ 可表示为 **傅里叶积分**。——其中 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 中的 “|” 不仅是绝对值且更是模, 它来源于对 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi$ 要求绝对收敛, 即 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) \cdot e^{-i w \xi}| \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 。

可见 **傅里叶积分定理** 比 **狄里希利定理**, 的条件要强的多, 因为诸如 $\sin x$ 、常值函数等, 绝大部分函数均不满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 收敛。

例 1. 求矩形脉冲 $f(t) = h \cdot \text{rect}(t/2T)$ 的复数形式的傅里叶变换, 其中矩形函数的定

义为 $\text{rect } x = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$, 而更一般地有 $\frac{1}{l} \text{rect}(\frac{x}{l}) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & |x| < \frac{l}{2} \\ 0, & |x| > \frac{l}{2} \end{cases}$ 。

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h \cdot \text{rect} \frac{t}{2T} \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{h}{2\pi} \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{h}{2\pi w} i \cdot e^{-iwt} \Big|_{-T}^T = \frac{h}{2\pi w} i \cdot (e^{-i w T} - e^{i w T}) = \frac{h}{2\pi w} i \cdot [-i 2 \sin(wT)] = \frac{h \sin(wT)}{\pi w}$$

在数学中, $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$; 在信号分析中, $\text{sinc}(x)$ 常记为 $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ 。因此利用后者, 我们可将其写为 $\frac{h \sin(wT)}{\pi w} = \frac{hT}{\pi} \frac{\sin(\pi \cdot \frac{wT}{\pi})}{\pi \cdot \frac{wT}{\pi}} = \frac{hT}{\pi} \text{sinc}(\frac{wT}{\pi})$ 。——可见的 $\text{rect}(\frac{t}{2T})$ 的像函数为 $\frac{T}{\pi} \text{sinc}(\frac{wT}{\pi})$, 那么 $\frac{1}{2T} \text{rect}(\frac{t}{2T})$ 的像函数即为 $\frac{1}{2\pi} \text{sinc}(\frac{wT}{\pi})$ 。若令 $2T = l$, 则 $\frac{1}{l} \text{rect}(\frac{t}{l})$ 的像函数即为 $\frac{1}{2\pi} \text{sinc}(\frac{w}{2\pi} \frac{l}{2\pi}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \pi (\frac{w}{2\pi} \frac{l}{2\pi})}{\pi (\frac{w}{2\pi} \frac{l}{2\pi})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{wl}{2}}{\frac{wl}{2}}$ (我们在 5.3.8 函数的傅里叶变换中也能得出这个结论)。若令其中的 $l = 1$, 则 $\text{rect}(t) = \frac{1}{2\pi} \text{sinc}(\frac{w}{2\pi})$ 。

$F(w) - w$ 的图像, 称作频谱。 $\frac{hT}{\pi} \text{sinc}(\frac{wT}{\pi})$ 的频谱上, 除了 $\frac{\pi}{T}$ 、 $\frac{2\pi}{T}$ 、 $\frac{3\pi}{T}$... 这些 w 刻度之外, $F(w)$ 几乎在每个 w 上都有分量。所以这就是 FM-76.5 之外的频率也有 FM-76.5 的声音, 而 FM-76.5 也有其他频率的噪声的缘故所在。

例 2. 求 $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ 的傅里叶变换。

法: $\mathcal{F}[\frac{\sin \pi t}{\pi t}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i \cdot \pi t} \cdot e^{-iwt} \cdot dt$
 $dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\pi-w)t} - e^{i(-\pi-w)t}}{t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} [\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{i(\pi-w)t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{i(-\pi-w)t} \cdot dt]$, 对于前一个积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{i(\pi-w)t} \cdot dt$, 这就如同 **类型三** 中的 $\int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{imx} \cdot dx$, 当然并不是因为 $\frac{1}{t}$ 是奇函数我就将其类比于 $G(x)$, 这里说它像 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{imx} \cdot dx$ 也无妨: 这其实并不是实

变函数的定积分，而是直接从其中的中间过程插入开做，因此我们无需关心 $\frac{1}{t}$ 的奇偶性（奇偶性是用来化 $\int_0^\infty G(x)\sin mx \cdot dx$ 为 $\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty G(x)e^{imx} \cdot dx$ 的）。

更准确地说，这是**类型四**，即被积函数 $f(x)=G(x)e^{imx}=\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}$ ，在实轴上有单极点 $t=0$ 的情形。当 $\pi-w>0$ 时，相当于 $m>0$ ，根据**约当引理**，我们得选取逆时针&上半平面的回路 l ，那么此时该公式中的 C_ε 对应地为顺时针： $\int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(x)dx = \oint_l f(z)dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0$ ，于是其中的 $\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = -\pi i \text{Resf}(\alpha)$ ，因而总的来说 $= \oint_l f(z)dz + \pi i \text{Resf}(\alpha)$ 。

当 $\pi-w<0$ 时，相当于 $m<0$ ，根据**此时的约当引理**，我们得选取顺时针&下半平面的回路 l ，那么此时该公式中的 C_ε 对应地为逆时针：于是其中的 $\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \pi i \text{Resf}(\alpha)$ ，因而总的来说 $= \oint_l f(z)dz - \pi i \text{Resf}(\alpha)$ 。但其中的 $\oint_l f(z)dz$ 此时虽然在本质上应为 $-2\pi i$ 乘以 $\{f(z)=F(z)e^{imz}$ 在下半平面的留数和 $\}$ ，但之前说了，该结果与 $2\pi i \cdot \{\text{上半平面留数和}\}$ 无异，因此 $\oint_l f(z)dz$ 的计算方法，可以不因回路的选取的改变而改变。

于是当 $\pi-w>0$ 时，前一个积分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t} e^{i(\pi-w)t} \cdot dt$ 中的 C_ε 顺时针转，导致其积分结果为 $\pi i \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{1}{t} e^{i(\pi-w)t} = \pi i$ （其中的 $\oint_l f(z)dz = 0$ ，因为 $\frac{1}{t} e^{i(\pi-w)t}$ 在上半平面没有奇点）；而当 $\pi-w<0$ 时，前一个积分中的 C_ε 逆时针转，积分值为 $-\pi i$ 。

同样的道理：当 $-\pi-w>0$ 时，后一个积分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t} e^{i(-\pi-w)t} \cdot dt$ 中的 C_ε 顺时针转，导致其积分结果为 πi ；而当 $-\pi-w<0$ 时，后一个积分中的 C_ε 逆时针转，积分值为 $-\pi i$ 。

综上，当 $|w| < \pi$ 时，俩积分和为 $[\pi i - (-\pi i)] = 2\pi i$ ，使得 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = \frac{1}{2\pi}$ 。除此之外要么 $[\pi i - \pi i] = 0$ 、要么 $[(-\pi i) - (-\pi i)] = 0$ ，此时 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right] = 0$ 。因此 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi} \text{rect}\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ 。同样我们也可得到 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{w}{2}\right)$ 【可用之后**相似定理**解释】。

这个结果非常有趣：对比上一个例题的 $\mathcal{F}[\text{rect}(t)] = \frac{1}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ ，以及这一题的结果 $\mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \frac{1}{2\pi} \text{rect}\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ ，可见它俩是有多么和谐！！互为像函数！。

法二： $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot [\cos(wt) - i\sin(wt)] \cdot dt$ ，其中， $-\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \sin(wt) \cdot dt$ 中被积函数是个奇函数，因此该积分值=0。于是只需考虑 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \cos(wt) \cdot dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin \pi t \cdot \cos(wt)}{t} dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(\pi+w)t + \sin(\pi-w)t}{2t} dt$ ，即有 $\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(\pi+w)t + \sin(\pi-w)t}{t} dt$ ，利用 p51 中**例 9**的推论：对于 $m>0$ ， $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ；对于 $m<0$ ， $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$ ，有： $\pi+w>0$ ， $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi+w)t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ ； $\pi-w<0$ ， $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi-w)t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}$ 。

同样, $\pi - w > 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi-w)t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$; $\pi - w < 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi-w)t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}$ 。那么

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi+w)t - \sin(\pi-w)t}{t} dt = \frac{1}{2\pi^2} \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, w > \pi \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, -\pi < w < \pi \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, w < -\pi \end{cases} = \frac{1}{2\pi^2} \begin{cases} 0, |w| > \pi \\ \pi, |w| < \pi \end{cases}$$

(二).傅里叶变换的基本性质

(1).**导数定理** $\mathcal{F}[f'(x)] = iwF(w)$ 【我好奇其为什么不写为 $\mathcal{F}[f'(x)] = iw\mathcal{F}[f(x)]$ 】

证 利用分部积分, $\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-iwx} \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} d(f(x)) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + iw \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iwx} \cdot dx$, 由于傅里叶积分定理, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) \cdot e^{-iwx}| \cdot d\xi$ 收敛, 因此类似**类型二**, 有 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \cdot (f(\xi) \cdot e^{-iwx}) = 0$, 那么更应有 $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi) \cdot e^{-iwx} = 0$ 。因此 $e^{-iwx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$, 于是 $\mathcal{F}[f'(x)] = iw\mathcal{F}[f(x)]$ 。

(2).**积分定理** $\mathcal{F}[\int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi] = \frac{1}{iw} F(w)$

证 设 $\int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi = g(x)$, $\mathcal{F}[g'(x)] = iw\mathcal{F}[g(x)]$ 于是 $\mathcal{F}[g(x)] = \frac{1}{iw} \mathcal{F}[g'(x)] = \frac{1}{iw} \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{iw} F(w)$ 。

以上两条定理, 告诉我们原函数的求导和求积运算, 经傅里叶变换后(被 $\mathcal{F}[\cdot]$ 映射后), 变成了像函数的代数运算($\times iw$)。

(3).**相似性定理** $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} F(\frac{w}{a})$ 【 $F(\frac{w}{a})$ 还可写为 $\mathcal{F}[f(x)]|_{w=\frac{w}{a}}$; 这便是为什么要用 $F(\frac{w}{a})$ 而不用 $\mathcal{F}[f(x)]|_{w=\frac{w}{a}}$ 的原因!! 前者自带 w , 更简洁! 】

证 $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \cdot e^{-iwx} \cdot d(ax) = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \cdot e^{-i\frac{w}{a}ax} \cdot d(ax) = \frac{1}{a} F(\frac{w}{a})$ 。

(4).**延迟定理** $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-iwx_0} F(w)$ 【延迟定理针对的是原函数的延迟! 】

证 $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \cdot e^{-iwx} \cdot dx = e^{-iwx_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \cdot e^{-iwx_0} \cdot e^{-iwx_0} \cdot d(x - x_0) = e^{-iwx_0} F(w)$ 。

(5).**位移定理** $\mathcal{F}[e^{iw_0x} f(x)] = F(w - w_0)$ 【位移定理针对的是像函数的位移! 】

证 $\mathcal{F}[e^{iw_0x} f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i(w-w_0)x} \cdot dx = F(w - w_0)$ 。【注: (5).中的 e^{iw_0x} 与(4).中的 e^{-iwx_0} 有三点不同: 负号、 w 、 x ; $F(w - w_0)$ 还可写为 $\mathcal{F}[f(x)]|_{w=w-w_0}$ 】【并且延迟和位移二者均是在说自变量的减小 w_0 or x_0 (函数的右移), 而不是函数乘以一个衰减系数 e^{-iwx_0} or 放大系数 e^{iw_0x} ! 】

(6).**卷积定理** 若 $\mathcal{F}[f_1(x)] = F_1(w)$ 、 $\mathcal{F}[f_2(x)] = F_2(w)$, 则 $\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi) \cdot d\xi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi) \cdot d\xi] \cdot e^{-iwx} \cdot dx = 2\pi F_1(w)F_2(w)$

证 交换积分次序 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) [\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)e^{-iwx} \cdot dx] \cdot d\xi$, 并像(4).一样操作
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) [e^{-iwx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)e^{-i w(x-\xi)} \cdot d(x-\xi)] \cdot d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) [e^{-i w \xi} F_2(w)] \cdot d\xi$
 $= 2\pi F_2(w) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i w \xi} \cdot d\xi = 2\pi F_1(w)F_2(w)$ 。【注: $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi) \cdot d\xi$ 称为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积】

(三).多重傅里叶积分

二维及以上无界空间的非周期函数, 也可以展为傅里叶积分。不过是多层求和对应的多重积分了。

比如对于三维的 $f(x,y,z)$, 先将其中的 y,z 看作常量, 将其对 x 展为傅里叶积分得:
 $f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, y, z) e^{i w_1 x} d w_1$, 其中 $F(w_1, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y, z) \cdot e^{-i w_1 \xi} \cdot d\xi$; 再将
 $F(w_1, y, z)$ 展为对 y 的傅里叶积分 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, z) e^{i w_2 y} d w_2$, 其中 $F(w_1, w_2, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, \eta, z) \cdot e^{-i w_2 \eta} \cdot d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, z) \cdot e^{-i w_1 \xi} \cdot d\xi] \cdot e^{-i w_2 \eta} \cdot d\eta$; 再将 $f(x,y,z)$ 中的
 $F(w_1, y, z)$ 中的 $F(w_1, w_2, z)$ 展为对 z 的傅里叶积分 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, w_3) e^{i w_3 z} d w_3$, 其中
 $F(w_1, w_2, w_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, \zeta) \cdot e^{-i w_3 \zeta} \cdot d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot e^{-i w_1 \xi} \cdot d\xi] \cdot e^{-i w_2 \eta} \cdot d\eta] \cdot e^{-i w_3 \zeta} \cdot d\zeta = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot e^{-i(w_1 \xi + w_2 \eta + w_3 \zeta)} \cdot d\xi d\eta d\zeta$ 。

$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, y, z) e^{i w_1 x} d w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, z) e^{i w_2 y} d w_2 e^{i w_1 x} d w_1 =$
 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, w_3) e^{i w_3 z} d w_3 e^{i w_2 y} d w_2 e^{i w_1 x} d w_1 =$
 $\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2, w_3) e^{i(w_1 x + w_2 y + w_3 z)} d w_1 d w_2 d w_3$, 其中
 $F(w_1, w_2, w_3) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot e^{-i(w_1 \xi + w_2 \eta + w_3 \zeta)} \cdot d\xi d\eta d\zeta$ 。

简便起见, 也可写为 $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{w}) e^{i \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}} d \mathbf{w}$, 其中 $F(\mathbf{w}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \cdot e^{-i \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}} \cdot d \mathbf{r}$ 。【注: $d \mathbf{w}$ 、 $d \mathbf{r}$ 这种简记方法没有什么物理含义, 仅存的含义或许是:
 $d w_1 d w_2 d w_3$ 、 $d \xi d \eta d \zeta$ 可由分别以 $d \mathbf{w}$ 、 $d \mathbf{r}$ 为体对角线的体积元所代表】

5.3 δ函数

(一). δ函数

为了描述质点的**质量密度**、点电荷的**电荷密度**、**瞬时力**等等这类集中于**空间某一点或时间的某一瞬时**的物理量，在物理学中引入**δ函数**： $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ 、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1. \quad \text{【线代中也有类似的**克罗内克符号**：} \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{】}$$

我们将其平移一下，得到更一般的δ函数： $\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$ 、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta(x) dx = 1$ 。注意：δ函数、δ函数中的自变量 x ，均是有量纲的，其量纲 $[\delta(x)]$ 为 $\frac{1}{[x]}$ ，即 x 的量纲的倒数，以使得它们的乘积即面积无量纲。而 x 的量纲因研究对象的不同而不同——比如若我们要描述“线密度”，则 x 的量纲应该是长度量纲(如 m)、 $\delta(x)$ 的量纲为 $\frac{1}{m}$ ，以使得 $\int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx$ 的单位为 1，以及 $m\delta(x)$ 和 $q\delta(x)$ 单位分别为质量线密度和电量线密度；而要描述瞬时力时， $[x] = s$ ， $[\delta(x)] = \frac{1}{s}$ ， $I\delta(x)$ 的量纲为 N ，即动量对时间的变化率， I 为这段极小时间间隔内，力 $I\delta(x)$ 产生的冲量。此时的 $\delta(x)$ 可写为 $\delta(t)$ 。

在电路原理中， $\delta(t)$ 被用来描述**单位冲击函数**，它是当**脉冲宽度** $\Delta t \rightarrow 0$ 时的**单位脉冲函数** $f(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \Delta t] \\ \frac{1}{\Delta t}, & t \in (0, \Delta t) \end{cases}$ ，即有 $\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & t \notin [t_0, t_0 + \Delta t] \\ \frac{1}{\Delta t}, & t \in (t_0, t_0 + \Delta t) \end{cases}$ 。或许这样更能帮你理解 ∞ 的由来，以及 δ 含有单位的事实。

$\delta(x)$ 的原函数为**阶跃函数/亥维赛单位函数** $H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ，可进一步拓展为 $H(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$ 。在电路原理中， $H(t)$ 用 $1(t)$ 表示，称作**单位阶跃函数**。 $1(t - t_0)$ 、 $f(t - t_0)$ 、 $\delta(t - t_0)$ 的名字前多加三个字“延迟的”【这就像**延迟定理**一样，说的是原函数的延迟！】。它们之间的关系：1. **脉冲函数** 可看作由两个**阶跃函数**之差构成，即 $f(t - t_0) = \frac{1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$ ；2. $\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t - t_0 + \Delta t) - 1(t - t_0)}{\Delta t} = 1'(t - t_0)$ ，这也印证了 $H(x)$ 是 $\delta(x)$ 的原函数。

(二). δ函数的一些性质

1. **δ函数** 是偶函数，则其**导数**为**奇函数**： $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ 。

2. $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$ 、 $\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = H(x_2 - x_0) - H(x_1 - x_0)$ 。

3.δ函数的挑选性/采样性：对于一个定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的连续函数 $f(t)$,
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$ 。【该式可代替之前的，作为δ函数的定义；之后我们会看到】

证 应用中值定理, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(\xi)\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)dt$
 $=f(\xi)$, 其中 $\xi\in[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, 则 $\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\xi=t_0$, $f(\xi)$ 成为 $f(t_0)$ 。

4.连续量也可以用δ函数表出： $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f(t)$ 。

5.若 $\varphi(x)=0$ 的实根 $x_k(k=1,2,\dots,n)$ 全部是单根, 则 $\delta[\varphi(x)]=\sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}$ 。

证 依定义, $\delta[\varphi(x)]=\begin{cases} 0, & \varphi(x) \neq 0 \\ \infty, & \varphi(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \neq x_1 \wedge x \neq x_2 \wedge \dots \wedge x \neq x_n \\ \infty, & x = x_1 \vee x = x_2 \vee \dots \vee x = x_n \end{cases}$
 $= \begin{cases} 0, & x \neq x_1 \\ \infty, & x = x_1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq x_2 \\ \infty, & x = x_2 \end{cases} + \dots + \begin{cases} 0, & x \neq x_n \\ \infty, & x = x_n \end{cases} = \sum_k \delta[x-x_k] = \sum_k c_k \delta[x-x_k]$, 设 ε 足够小, 使得 x_i 的邻域 $(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$ 内无其他根; 则当 $\varphi'(x_i)>0$ 时, $\varphi(x_i+\varepsilon)>\varphi(x_i)=0>\varphi(x_i-\varepsilon)$, $1=H(\varphi(x_i+\varepsilon))-H(\varphi(x_i-\varepsilon))=\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta[\varphi(x)] \cdot d\varphi = \varphi'(x_i) \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta[\varphi(x)] \cdot dx$
 $= \varphi'(x_i) \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \sum_k c_k \delta[x-x_k] \cdot dx = \varphi'(x_i) \sum_k c_k \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta[x-x_k] \cdot dx = \varphi'(x_i) \sum_k c_k [H((x_i+\varepsilon)-x_k) - H((x_i-\varepsilon)-x_k)] = \varphi'(x_i) c_k [H((x_i+\varepsilon)-x_i) - H((x_i-\varepsilon)-x_i)] = \varphi'(x_i) c_k$,
 于是 $c_k = \frac{1}{\varphi'(x_i)}$ 。【各 x_k 为单根, 保证了 $\varphi'(x_i) \neq 0$ 】

则当 $\varphi'(x_i)<0$ 时, $\varphi(x_i+\varepsilon)<\varphi(x_i)=0<\varphi(x_i-\varepsilon)$, $-1=H(\varphi(x_i+\varepsilon))-H(\varphi(x_i-\varepsilon))=\int_{\varphi(x_i-\varepsilon)}^{\varphi(x_i+\varepsilon)} \delta[\varphi(x)] \cdot d\varphi$, 后续操作完全一样 $=\varphi'(x_i)c_k$, 于是 $c_k = -\frac{1}{\varphi'(x_i)}$ 。综上,
 $c_k = \frac{1}{|\varphi'(x_i)|}$, 证毕。

一些例子: $\delta[ax] = \frac{\delta(x-0)}{|\varphi'(0)|} = \frac{\delta(x)}{|a|}$; $\delta[x^2-a^2] = \frac{\delta(x+a)}{|\varphi'(-a)|} + \frac{\delta(x-a)}{|\varphi'(a)|} = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{|2a|}$, 它还可继续写为 $\frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{|2x|}$ 。

(三).δ函数是一种广义函数

δ函数可以看作是某些常规函数序列的极限, 但这极限应在积分意义下理解, 即凡是具有挑选性/采样性的函数序列, 即满足 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\lim_{l\rightarrow 0} \delta_l(t-t_0)]dt=f(t_0)$ 或 $\lim_{n\rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_n(t-t_0)dt=f(t_0)$ 的序列 δ_l, δ_n , 其 $n\rightarrow \infty$ 或 $l\rightarrow 0$ 时, 都是δ函数。

比如当 $l\rightarrow 0$ 时的 $\frac{1}{l}\text{rect}(\frac{x}{l})$ 、 $\frac{1}{\pi} \frac{l}{l^2+x^2}$, 以及当 $n\rightarrow \infty$ 时的 $\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$ 、 $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ 、 $\frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2}$ 。
 其中 $\frac{1}{\pi} \frac{l}{l^2+x^2}$ 与 $\frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2}$ 等价。

可以验证, 它们均符合 $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, 以及 $\lim_{l \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\delta_l(t)] dt = f(0)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(t) dt = f(0)$ 。【其中 $\frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$ 的积分会引用到之前的例 9. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, 因偶函数性质而 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \pi$, 于是 $\frac{1}{\pi}$ 便是让其归一化的系数; $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (\frac{x}{\varepsilon})^2} d(\frac{x}{\varepsilon})$ 】

(四).δ函数的傅里叶变换

1. 根据 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw$, $F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi$, 令其中的 $f(x)$ 为 $\delta(x)$, 则 $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{iwx} dw$, $\delta(x)$ 的傅里叶变换 $C(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi = \frac{1}{2\pi} e^{-i w 0} = \frac{1}{2\pi}$ (C 应该是指 constant)。于是 $\delta(x)$ 的傅里叶积分 $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{ix} = \frac{1}{2\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2i \sin(wx)}{ix} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(wx)}{x} = \delta_1(x)$, 如(三).所言, 它也是一个 δ 函数。不过该 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$ 函数, 在 $x \neq 0$ 时, 并非 $=0$, 而是不存在(当年我这么说是知之甚少所致, 它严格的就是 δ 函数, 在非零处的函数值就是 0); 但这并不影响其被视为一个 δ 函数。

2. 常数 A 的傅里叶变换: $\mathcal{F}[A] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi = \frac{A}{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{e^{-i w \xi} - e^{i w \xi}}{-i w} = \frac{A}{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{-2i \sin(w\xi)}{-i w} = \frac{A}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin(w\xi)}{w} = A \delta_1(w)$, 这是一个傅里叶变换, 然而这一结果却非常像 $\delta(x)$ 的傅里叶积分, 但要注意该 δ_1 是关于 w 的函数! 进一步地, A 的傅里叶积分 $= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[A] e^{iwx} dw = \int_{-\infty}^{\infty} A \delta_1(w) e^{iwx} dw = A e^{i w 0} = A$, 这一点却又反过来像 $\delta(x)$ 的傅里叶变换。

3. 根据之前例 1. 中的 $\mathcal{F}[h \cdot \text{rect}(\frac{t}{2T})] = \frac{h}{\pi} \frac{\sin(wT)}{w}$, 有 $\mathcal{F}[\text{rect}(\frac{t}{2T})] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(wT)}{w}$, 以及 $\mathcal{F}[\frac{1}{T} \text{rect}(\frac{t}{2T})] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(wT)}{wT}$, 再根据相似性定理 $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \mathcal{F}(\frac{w}{a})$, 即有 $\mathcal{F}[\frac{1}{T} \text{rect}(\frac{t}{T})] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{wT}{2})}{\frac{wT}{2}}$, 令 $T=l$, $t=x$, 即可得到 $\mathcal{F}[\frac{1}{l} \text{rect}(\frac{x}{l})] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{wl}{2})}{\frac{wl}{2}}$ 。于是 $\mathcal{F}[\delta(x)] = \mathcal{F}[\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \text{rect}(\frac{x}{l})] = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{wl}{2})}{\frac{wl}{2}} = \frac{1}{2\pi}$, 从这个角度也可得到 $\delta(x)$ 的傅里叶变换。

4. 求 $f(x) = a \sin(w_0 x)$ 的傅里叶变换

$\mathcal{F}[a \sin(w_0 x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot \sin(w_0 x) \cdot e^{-iwx} \cdot dx = \frac{a}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i w_0 x} - e^{-i w_0 x}) \cdot e^{-iwx} \cdot dx = \frac{a}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i(w-w_0)x} - e^{-i(w+w_0)x}) \cdot dx$, 直接借用 2. 中的 $\mathcal{F}[A] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-i w \xi} \cdot d\xi = A \delta_1(w)$, 可看出 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i w \xi} \cdot d\xi = 2\pi \delta_1(w)$, 于是 $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i(w-w_0)x} - e^{-i(w+w_0)x}) \cdot dx = 2\pi \delta_1(w - w_0) - 2\pi \delta_1(w + w_0)$, 代入可得 $\mathcal{F}[a \sin(w_0 x)] = \frac{a}{2i} [\delta_1(w - w_0) - \delta_1(w + w_0)] = \frac{a}{2} i [\delta_1(w + w_0) - \delta_1(w - w_0)]$ 。

再求其傅里叶积分: $\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{a}{2} i [\delta_1(w + w_0) - \delta_1(w - w_0)]] e^{iwx} dw = \frac{a}{2} i [e^{i w_0 x} - e^{i w_0 x}] = a \sin(w_0 x)$ 。

以上这些函数其实不满足傅里叶积分的条件，因而不存在通常意义的傅里叶变换 or 傅里叶积分。但由于在积分的意义下， δ 函数可看作某通常函数序列的极限，而这些通常函数本身的傅里叶变换和积分是存在的。

因此可将这些通常函数先傅里叶变换 or 积分，而后再取极限，所得的极限视为 δ 函数的傅里叶变换和积分。此时的傅里叶变换称为**广义傅里叶变换**，此时的傅里叶积分称为**广义傅里叶积分**。

(五).多维的 δ 函数

$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases}$ 、 $\iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$ 。在直角坐标系中它往往用三个一维 δ 函数的乘积表示： $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ ； $m\delta(\mathbf{r})$ 可用于表示三维空间中位于坐标原点的质量为 m 的质点的密度； $q\delta(\mathbf{r})$ 表示局域体密度。

第六章 拉普拉斯变换

6.1 拉普拉斯变换

狭义的傅里叶变换和积分，需要原函数满足**狄里希利条件**，以及在 $(-\infty, +\infty)$ 上**绝对可积**。这个要求相当强，以至于许多常见函数都不满足。

拉普拉斯变换，就是变宽了条件的傅里叶变换；拉普拉斯积分，就是拉普拉斯逆变换(但书上说拉普拉斯变换即为拉普拉斯积分，虽然从对称性上我并不认同，而且这么定义岂不是对一个东西起两个名字？还一一对应么 = =；但之后我们对此进一步认识)；之前的傅里叶变换没怎么提到其逆变换，其实傅里叶变换的逆变换就是傅里叶积分——因为原函数可由像函数的积分得到： $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(x)] e^{iwx} dw$ ，而像函数又可通过原函数的积分得到： $\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iwx} \cdot dx$ 。只不过我们之前只是将前后两者分别冠名为 $f(x)$ 的**傅里叶积分**和 $f(x)$ 的**傅里叶变换**而已；而且之前我们喜欢用 $F(w)$ 以及其中的 ξ ，而不是 $\mathcal{F}[f(x)]$ 以及其中的 x ，这是因为我们之前沿用的是级数的思想，将 $F(w)$ 只认为 $f(x)$ 的**傅里叶积分**的一个系数。

现在 we 不像之前一样，两个积分开始有点独立开来，且地位平权了：原函数(积分)到像函数，对应变换；像函数(积分)到原函数，对应逆变换；并且之后会看到，拉普拉斯变换更加地“复变函数”一些，因为**拉普拉斯逆变换**中，宗量(被积变量)直

接采用复数 p 了，而不像傅里叶积分中，宗量是实数 w 。并且指数部分的 iwx 也将变为 px ， x 前面的东西是纯虚数；同样，拉普拉斯变换对实数 x 积分后，会直接得到一个与宗量 p 有关的纯虚数 $f(p)$ ，它只要没有奇点，就解析；而不需要像傅里叶变换中既含有实数 w ，又有虚单位 i ，的那样积出来的函数，需满足 C-R 条件才能解析；而且有些时候积出来的是复数，如 $\mathcal{F}[a \cdot \sin(w_0 x)] = \frac{a}{2} i [\delta_1(w + w_0) - \delta_1(w - w_0)]$ ，有些时候却是实数，如 $\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$ 、 $\mathcal{F}[A] = A\delta_1(w)$ 、 $\mathcal{F}[\frac{1}{T} \text{rect}(\frac{t}{T})] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{wT}{2})}{\frac{wT}{2}}$ 。

(一).拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换常用于求初值问题，即已知初始时刻 $t=0$ 时 $f(0)$ 值，求出微分方程的解析解，得到它在初始时刻之后的变化情况 $f(t)$ 。因此我们用变量 t 代替之前的 x ，且不关心 $t<0$ 的 $f(t)$ 值——于是我们采用 $H(t) \cdot f(t)$ 来表示之前的 $f(x)$ 。

为了获得更宽的变换条件，构造函数 $g(t) = H(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ ，其中收敛因子 $e^{-\sigma t}$ 中的正实数 σ 取得很大，以保证对于绝大多数的 $f(t)$ (即使是一些 e 指数)， $g(t)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积。【注： σ 、 $e^{-\sigma t}$ 、 t 、 $f(t)$ 都是实(函)数，因此 $g(t)$ 也是】

于是对 $g(t)$ 施行傅里叶变换，有 $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot f(t)] \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma + iw)t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(p)$ 。其中 $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 称为 $H(t) \cdot f(t)$ 的拉普拉斯变换，同时也称为 $H(t) \cdot f(t)$ 的拉普拉斯积分，因为它在形式上没有了 $\frac{1}{2\pi}$ ，与傅里叶积分 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(x)] e^{iwx} dw$ 相像，因此可这么叫(事实上，之前的 $F(w)$ 中的 $\frac{1}{2\pi}$ ，未尝不可提到 $F(w)$ 外，作为 $f(x)$ 的积分系数，在定义上)。【 $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 本该写作 $\int_{-\infty}^{\infty} H(t) f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ ，因此既可以称为 $f(t)$ 的，又可以称为 $H(t) \cdot f(t)$ 的拉普拉斯变换】

再对 $G(w)$ 施行傅里叶积分： $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw$ ，将 $g(t) = H(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ 带入左式，将 $dp = d(\sigma + iw) = i dw$ 、 $G(w) = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(p)$ 带入右式，得到 $H(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{iwt} dw$ ，即有 $H(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$ ，这称为拉普拉斯逆变换，一是因为“拉普拉斯积分”已经被使用了，二是因为该积分含有 $\frac{1}{2\pi i}$ 而与傅里叶变换 $\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iwx} \cdot dx$ 相像，本想称作“拉普拉斯变换”，但也已经被使用了，所以冠名为拉普拉斯逆变换；再说(第三点原因)，无论什么时候将像函数到原函数的变换命名为逆变换都是合情合理的。

将 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw$ 、 $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-iwt} \cdot dt$ 与 $H(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$ 、 $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 【 $\bar{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 】对比； $G(w) = \mathcal{F}[g(t)]$ 、 $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(w)]$ 与 $\bar{f}(p) = \mathcal{L}[H(t) \cdot f(t)]$ 、 $H(t) \cdot f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]$ 对比，其中也有： $H(t) \cdot f(t)$ 称为原函数， $\bar{f}(p)$ 称为像函数。

拉普拉斯变换及其逆变换存在的条件为： $f(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上满足：(1).在任意有限区间只有有限个第一类间断点，且 $f(t)$ 及其导数处处连续；(2).存在 $M>0$ 和 $\sigma \geq 0$ ，使得，对于 $t \in [0, +\infty)$ ，有 $|f(t)| < Me^{\sigma t}$ (即 $|f(t)e^{-\sigma t}|$ 是个有限值)【即仍需要满足 $g(t) = H(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上绝对可积，即使是 $f(t) = e^{st}$ 仍可满足该条件】。——使得(2).成立的 $\{\sigma\}$ 的下界 σ_0 【 σ 要大到一定程度。一般来说不仅仅有 $\sigma \geq 0$ ，更通常的是 $\sigma > 0$ ，因为 $\sigma = 0$ 时，就变回了傅里叶变换了，而大多数函数没法作狭义的傅里叶变换；但即使 $\sigma > 0$ ， σ_0 也=0；正因如此， σ_0 不一定使得 $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立】，称为收敛横标；大多数函数都满足此条件(除非 $f(t) = e^{st}$ 中 $\text{Re } s \geq \text{Re } p = \sigma$ 、或 $f(t)$ 是指数套指数的等=)。

例 1.求 $\mathcal{L}[1]$ 。【其中 1 的该理解为 $H(t) \cdot 1$ ，且原本应写为 $\mathcal{L}[H(t) \cdot 1] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) 1 \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 】

$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} \cdot d(-pt) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\infty})$ ， $e^{-p\infty}$ 中 $p = \sigma + iw$ 是复数， ∞ 为实数， $e^{-p\infty} = e^{-\sigma\infty} \cdot e^{-iw\infty} = \frac{1}{e^{\sigma\infty}} \cdot [\cos(w\infty) - i\sin(w\infty)] = \text{实数 } 0$ 。因此 $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ 。【不过由于积分限 $\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 的指定，或者说 $\int_{-\infty}^{\infty} H(t) 1 \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 中被积函数 $H(t)$ 的限制， $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ 有区间限制： $\text{Re } p \geq 0$ ，即 p 的实部 $\sigma \geq 0$ (其实这些本质上来源于为了 $H(t)$ 所引入的收敛因子 $e^{-\sigma t}$ ：对于当原函数是 $H(t - t_0) \cdot f(t)$ ，已知初值 $f(t_0)$ 的情形，我们完全可以引入不同的收敛因子 $e^{-\sigma(t-m)}$ ，其中的 $m \leq t_0$)；但另一方面，由于 1 本身没法作狭义的傅里叶变换，因此 $\sigma \neq 0$ ；综上， $\sigma > 0$ ，即 $\text{Re } p > 0$ 】

【对于上一段中的黄色字体：对于 $H(t - t_0) \cdot f(t)$ ： $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t)] \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0} \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(p)$ ， $\bar{f}(p) = e^{-iwt_0} \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt$ 比原来的多了个 e^{-iwt_0} ，且积分限不同；对于 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw$ ， $H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{iwt} dw$ ，得 $H(t - t_0) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{iwt_0} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-t_0)} dp = \frac{1}{2\pi} e^{iwt_0} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-t_0)} dp$ ，比原来的 $H(t) \cdot f(t)$ 多了个 e^{iwt_0} ；——此时可以通过定义 $\bar{f}(p) = \frac{G(w)}{\frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0}} = \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt$ ，同时 $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw$ 变为 $H(t - t_0) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-t_0)} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-t_0)} dp$ ，来让 $\mathcal{L}[H(t - t_0) \cdot f(t)]$ 只在积分限上与原来不同，且 $H(t - t_0) \cdot f(t)$ 与原来一模一样。

当 $t_0 > 0$ 时，以上的 $e^{-\sigma(t-t_0)}$ 中的 t_0 可取 0，于是 $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(p)$ ， $\mathcal{L}[H(t - t_0) \cdot f(t)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ ，只在积分限上与原来不同； $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{iwt} dw$ ， $H(t - t_0) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$ ，与原来一模一样。

更一般地，不论 t_0 是否 > 0 ，对于任意 $m \leq t_0$ ，所采用的收敛因子 $e^{-\sigma(t-m)}$ ，有： $G(w) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwm} \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-p(t-m)} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-iwm} \bar{f}(p)$ ， $\mathcal{L}[H(t - t_0) \cdot f(t)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t) \cdot$

$e^{-p(t-m)} \cdot dt = \frac{G(w)}{\frac{1}{2\pi} e^{-iwm}}; H(t-t_0) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwm} e^{iwm} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-m)} dw =$
 $\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{p(t-m)} dp$ 。这并不对于任意有限的 m 值均成立，还是得要求 $m \leq t_0$ ，因为
 衰减因子虽然不需要那么早地衰减，可以在 t_0 之后有限位置处才开始衰减，此时积分
 值仍存在；但 $t_0 \sim m$ 部分的积分与原来不一样了，则整体上的积分值与原来不一样了，
 且 $t_0 \sim m$ 部分的积分对于 $\sigma \rightarrow \infty$ 的极限，会变得不存在(虽然我们只需要采用比 σ_0 稍大
 一点的固定 σ 即可：如果 $\sigma \rightarrow \infty$ 仍不能使得被积函数绝对可积的话，这么做便是徒劳的；
 而如果能使得，则便不必这么做了)。——这与接下来的例 3 不同，例 3 是对 σ 的最小
 值/最大下界有要求，而这里是对 m 值的最大值/最小上界有要求】

例 2.求 $\mathcal{L}[t]$ 。【其中 t 的该理解为 $H(t) \cdot t$ ，且原本应写为 $\mathcal{L}[H(t) \cdot t] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) t \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 】

$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} t \cdot de^{-pt} = -\frac{1}{p} [t \cdot e^{-pt}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot dt]$ ，根据例 1.，
 我们有 $e^{-p\infty} = \frac{1}{e^{\sigma\infty}} [\cos(w\infty) - i\sin(w\infty)]$ ，因此 $t \cdot e^{-pt}|_0^{\infty} = \frac{\infty}{e^{\sigma\infty}} [\cos(w\infty) - i\sin(w\infty)] -$
 $0 \cdot 1 = 0$ ；而减号后的 $\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot dt$ 直接 $= \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ 。于是 $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2} (\text{Re } p > 0)$ 。

例 3.求 $\mathcal{L}[e^{st}]$ ， s 为常数，可为复数。

$\mathcal{L}[e^{st}] = \int_0^{\infty} e^{st} \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{1}{p-s} \int_0^{\infty} de^{-(p-s)t} = \frac{1}{p-s} (1 - e^{-(p-s)\infty})$ ，沿用例 1. 的结论，
 只有在 $\sigma > \text{Re } s$ 时， e^{st} 才能做狭义的傅里叶变换，且此时的 $e^{-(p-s)\infty}$ 才 $= \frac{1}{e^{(\sigma-\text{Re } s)\infty}}$ 。
 $[\cos(w\infty) - i\sin(w\infty)] = 0$ ，因此得到 $= \frac{1}{p-s} (\text{Re } (p-s) > 0)$ ；也就是说，只有在 $\text{Re } p > \text{Re } s$
 s 的半平面上，才能对 e^{st} 做拉普拉斯变换；这里的 $\sigma_0 = \text{Re } s$ 。

例 4.求 $\mathcal{L}[tf(t)]$ ，其中 $f(t)$ 为存在拉氏变换的任意函数。

可以证明， $tf(t)$ 也满足拉普拉斯变换条件。思路：将 $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 的两
 边分别对 p 求导， t 、 $f(t)$ 看作常数，便可多出来一个 t 与 $f(t)$ 相乘： $\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp} = \frac{d\bar{f}(p)}{dp} =$
 $-\int_0^{\infty} tf(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$ ，得到 $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp}$ ，进一步地有：
 $\mathcal{L}[t^n f(t)] = -\frac{d\mathcal{L}[t^{n-1} f(t)]}{dp} = (-1)^2 \frac{d^2 \mathcal{L}[t^{n-2} f(t)]}{dp^2} = \dots = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[t^0 f(t)]}{dp^n} = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f(t)]}{dp^n}$ 。

利用这个关系，再加上例 1.，我们可直接得到例 2.；并且还可继续往下得到
 $\mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[1]}{dp^n} = (-1)^n \frac{d^n (\frac{1}{p})}{dp^n} = \frac{n!}{p^{n+1}} (\text{Re } p > 0)$ 。于是借此还可进一步对例 3. 进行拓展：
 $\mathcal{L}[t^n e^{st}] = \frac{n!}{(p-s)^{n+1}} (\text{Re } p > \text{Re } s)$ 。

(二).拉普拉斯变换的性质

1.像函数的解析性质：

(1). $\bar{f}(p)$ 即 $\mathcal{L}[f(t)]$, 是在 $\text{Re } p > \sigma_0$ 的右半平面上的解析函数:

利用, $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp}$, 于是 $\int_0^\infty \frac{d}{dp} [f(t) \cdot e^{-pt}] \cdot dt = \frac{d}{dp} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$
 $= \frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp} = -\mathcal{L}[tf(t)] = \int_0^\infty -f(t)t \cdot e^{-pt} \cdot dt$, 于是 $\int_0^\infty \left| \frac{d}{dp} [f(t) \cdot e^{-pt}] \right| \cdot dt = \int_0^\infty |f(t)| \cdot |t| \cdot$
 $|e^{-(\sigma+iw)t}| \cdot dt = \int_0^\infty |f(t)| \cdot t \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt$, 根据拉普拉斯变换存在的条件(2). 对于 $t \in [0, +\infty)$, 有 $|f(t)| < Me^{\sigma t}$, 我们取能使该式成立的实数 $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, 于是 $\int_0^\infty |f(t)| \cdot t \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt$
 $< M \int_0^\infty t \cdot e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} \cdot dt = \frac{M}{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)} [t \cdot e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t}]_0^\infty - \int_0^\infty e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} \cdot dt$, 其中
 ①. $e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} = 0$, 因为实数 $\sigma_0 + \varepsilon - \sigma < 0$ (由于 $\sigma > \sigma_0$, 则对于所任取的 σ , 取 $\varepsilon < \sigma - \sigma_0$, 来作为 $\sigma_0 + \varepsilon$ 值, 以使得总有 $\sigma_0 + \varepsilon - \sigma < 0$); 且 ②. $-\int_0^\infty e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} \cdot dt =$
 $-\frac{1}{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)} e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)}$, 于是总的来说 $\int_0^\infty \left| \frac{d}{dp} [f(t) \cdot e^{-pt}] \right| \cdot dt < \frac{M}{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)^2}$.

因此除了 $f(t) \cdot e^{-pt}$ 绝对可积之余, $\frac{d}{dp} [f(t) \cdot e^{-pt}]$ 也绝对可积; 即像函数 $\mathcal{L}[f(t)]$ 一致收敛之余, 其对 p 的导数 $\frac{d\mathcal{L}[f(t)]}{dp} = \int_0^\infty \frac{d}{dp} [f(t) \cdot e^{-pt}] \cdot dt$ 也一致收敛。同样的道理, 可继续操作下去, 便可发现像函数 $\mathcal{L}[f(t)]$ 在 $\text{Re } p > \sigma_0$ 的右半平面上对于 p 而言处处解析。

除了某些奇点, 像函数甚至常常可以解析延拓到全平面上去(表达式就取算出来的 $\bar{f}(p)$)。像函数的解析性质, 在拉普拉斯变换中有重要意义(之后我们会用到)。

(2). 当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, (即 $|p| = |\sigma + iw| \rightarrow \infty$, 或 $p \rightarrow \infty$, 且 $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ 或 $> \frac{3\pi}{2}$), $\mathcal{L}[f(t)]$ 存在, 且 $= 0$ 。

$\left| \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t) \cdot e^{-pt}| \cdot |dt| = \int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-\sigma t} \cdot dt < M \int_0^\infty e^{(\sigma_0 + \varepsilon - \sigma)t} \cdot dt$
 $= -\frac{M}{\sigma_0 + \varepsilon - \sigma} = \frac{M}{\sigma - (\sigma_0 + \varepsilon)}$. 于是此积分, 即 $\mathcal{L}[f(t)]$ 收敛【这一点也可不用证明, 因为拉普拉斯变换的条件就要求了 $\mathcal{L}[f(t)]$ 收敛】。并且 $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f(t)] = 0$ 。

2. 拉普拉斯变换的重要性质

(1). 线性定理 若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = \bar{f}_1(p)$ 、 $\mathcal{L}[f_2(t)] = \bar{f}_2(p)$, 则 $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \bar{f}_1(p) + c_2 \bar{f}_2(p)$ 。

证 说实话我觉得写成这样更一目了然: $\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$ 。直接利用积分的线性性质即可证。

例 5. $\mathcal{L}[\sin wt] = \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{iwt} - e^{-iwt}] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw} \right] = \frac{w}{p^2 + w^2}$ ($\text{Re } p > \text{Re } -iw = 0$, 即 $\text{Re } p > 0$) 【利用了 $\mathcal{L}[e^{st}] = \frac{1}{p-s}$ ($\text{Re } p > \text{Re } s$)】; 同样可得 $\mathcal{L}[\cos wt] = \frac{p}{p^2 + w^2}$ ($\text{Re } p > 0$)。

同样的道理, $\mathcal{L}[\sinh wt] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{wt} - e^{-wt}] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-w} - \frac{1}{p+w} \right] = \frac{w}{p^2 - w^2}$ ($\text{Re } p > \text{Max}\{\text{Re } w, \text{Re } -w\}$, 一般 w 是实数, 则 $\text{Re } p > \text{Re } w = w$); 同样 $\mathcal{L}[\cosh wt] = \frac{p}{p^2 - w^2}$ ($\text{Re } p > w$)。

(2).**导数定理** $\mathcal{L}[f'(t)] = p\bar{f}(p) - f(0)$ 【类比: $\mathcal{F}[f'(x)] = iwF(w)$ 】

证 $\int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot d(f(t)) = e^{-pt}f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \cdot d(e^{-pt}) = -f(0) + p \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = p\bar{f}(p) - f(0)$ 【对比起 $\mathcal{F}[f'(x)] = iwF(w)$ 而言, 无非多了一项 $-f(0)$, 而 iw 与 p 是等价的; $-f(0)$ 来源于积分下限不再是 $-\infty$ 而是 0 】

其中的 $e^{-pt}f(t)$, 由于 $|f(t)| < Me^{(\sigma_0 + \varepsilon)t}$, 导致 $|e^{-pt}f(t)| < Me^{(\sigma_0 + \varepsilon - p)t}$, 则
 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Me^{(\sigma_0 + \varepsilon - p)t} = 0 (\text{Re } p > \sigma_0)$. 【或者说 $f(t) \cdot e^{-pt}$ 绝对可积, 所以极限 $=0$ 】

可推广到高阶导数 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0) = p(p\mathcal{L}[f^{(n-2)}(t)] - f^{(n-2)}(0)) - f^{(n-1)}(0) = \dots = p^n \mathcal{L}[f(t)] - [p^{n-1}f(0) + \dots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)]$

(3).**积分定理** $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau] = \frac{1}{p}\bar{f}(p)$ 【类比: $\mathcal{F}[\int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi] = \frac{1}{iw}F(w)$ 】

证 设 $\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau = g(t)$, $\mathcal{L}[g'(t)] = p\mathcal{L}[g(t)] - g(0)$, 其中 $g(0) = \int_0^0 f(\tau) \cdot d\tau$, 于是
 $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[g'(t)] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p}\bar{f}(p)$. 【这里和 $\int_{x_0}^x f(\xi) \cdot d\xi = g(x)$ 不同, 积分下限不能设为任意值 t_0 , 因为被积函数 $f(\tau)$ 的自变量取值为 $\tau \geq 0$ 】

(4).**相似性定理** $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$ 【类比: $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$ 】

证 $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(at) \cdot e^{-\frac{p}{a}at} \cdot d(at) = \frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$ 【注: $\bar{f}(\frac{p}{a})$ 还可写为 $\mathcal{L}[f(x)]|_{p=\frac{p}{a}}$ 】

(5).**延迟定理** $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-pt_0}\bar{f}(p)$ 【类比: $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = e^{-iw x_0}F(w)$ 】

证 $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-pt_0} \int_0^\infty f(t - t_0) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot d(t - t_0) = e^{-pt_0}\bar{f}(p)$.

【更准确地, 应写为: $\mathcal{L}[H(t - t_0) \cdot f(t - t_0)] = e^{-pt_0} \int_{-\infty}^\infty H(t - t_0) \cdot f(t - t_0) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot d(t - t_0) = e^{-pt_0} \int_{t_0}^\infty f(t - t_0) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot d(t - t_0) = e^{-pt_0} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = e^{-pt_0}\bar{f}(p)$ 】

【这就相当于令 $g(t) = H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t - t_0)$, 于是 $G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t - t_0)] \cdot e^{-iwt} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0} \int_{t_0}^\infty f(t - t_0) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot d(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0}\bar{f}(p)$; 而之前我们的 $g(t) = H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t)$, 所得到的 $\frac{1}{2\pi} e^{-iwt_0} \int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\bar{f}(p)$, 准确地说, 并没有其中的 $e^{-iwt_0} \int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt = \bar{f}(p)$; 也没有 $g(t) = H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t)$ 所得的 $G(w) = \frac{1}{2\pi} e^{-iwm} \int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-m)} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-iwm}\bar{f}(p)$ 中的 $\int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-m)} \cdot dt = \bar{f}(p)$ 。

——因为 $\int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-t_0)} \cdot dt$ 相当于 $\int_0^\infty f(t + t_0) \cdot e^{-pt} \cdot dt$; 而 $\int_{t_0}^\infty f(t) \cdot e^{-p(t-m)} \cdot dt$ 相当于 $\int_{t_0-m}^\infty f(t + m) \cdot e^{-pt} \cdot dt$, 即 $\int_0^\infty f(t + t_0) \cdot e^{-p(t+t_0-m)} \cdot dt$, 它们均和 $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ 不同; 所以我们可以试一下 $g(t) = H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t - t_0)$ 所得的

$\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega m} \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-p(t-m)} \cdot d(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega m} \bar{f}(p)$, 于是 $\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p(t+t_0-m)} \cdot dt$, 这就可以和 $g(t) = H(t - t_0) \cdot e^{-\sigma(t-t_0)} \cdot f(t - t_0)$ 有的一比了】

延迟定理的逆向应用: $\mathcal{L}^{-1}[e^{-pt_0} \bar{f}(p)] = f(t - t_0) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]|_{t=t-t_0}$ 。

(6).**位移定理** $\mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)] = \bar{f}(p - p_0)$ 【类比: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x} f(x)] = F(\omega - \omega_0)$ 】

证 $\mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(p-p_0)t} \cdot dt = \bar{f}(p - p_0)$ 【为了与(5).中的 e^{-pt_0} 对应, 该式同样可写为 $\mathcal{L}[e^{-p_0 t} f(t)] = \bar{f}(p + p_0)$; $\bar{f}(p - p_0)$ 还可写为 $\mathcal{L}[f(x)]|_{p=p-p_0}$; (6).中的 $e^{p_0 t}$ 与(5).中的 e^{-pt_0} 也有三点不同: 符号、 p 、 t 】

(7).**卷积定理** 若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = \bar{f}_1(p)$ 、 $\mathcal{L}[f_2(t)] = \bar{f}_2(p)$, 则 $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) \cdot d\tau] = \int_0^{\infty} [\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) \cdot d\tau] \cdot e^{-pt} \cdot dt = \bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)$ 【可对比 $\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = 2\pi F_1(\omega) F_2(\omega)$ 】

证 交换积分次序 $= \int_0^t f_1(\tau) [\int_0^{\infty} f_2(t - \tau) \cdot e^{-pt} \cdot dt] \cdot d\tau$, 并像(5).一样操作 $= \int_0^{\infty} f_1(\tau) [e^{-p\tau} \int_{\tau}^{\infty} f_2(t - \tau) \cdot e^{-p(t-\tau)} \cdot d(t - \tau)] \cdot d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) [e^{-p\tau} \bar{f}_2(p)] \cdot d\tau = \bar{f}_2(p) \int_0^{\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} \cdot d\tau = \bar{f}_2(p) \bar{f}_1(p)$ 。【注: $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) \cdot d\tau$ 称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积】

卷积定理的逆向利用: $\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1(p)]|_{t=\tau} \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_2(p)]|_{t=t-\tau} \cdot d\tau$, 它也可被写为 $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f_1(t)]]|_{t=\tau} \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f_2(t)]]|_{t=t-\tau} \cdot d\tau$ 。

6.2 拉普拉斯变换的反演

拉普拉斯变换主要用于求解线性微分方程 or 积分方程: 把关于原函数的积分方程, 转换为关于像函数的代数方程, 求出像函数的解, 再对解做逆变换。这第三步通过像函数求原函数的步骤, 就是**拉普拉斯变换的反演**。

【**反演**和**逆变换**二词含义差不多, 不过**反演**处理的**对象**和**步骤**以及**采用的方法**均要略微多一些: 比如 1.在第一种反演方法——有理分式法中, 我们会利用**线性定理**将像函数拆分为几个像函数之和, 然后再分别求对应原函数, 再相加。2.由于求解原函数时, 还要不时地用到**拉普拉斯变换的七个重要性质**, 因此处理的步骤更多些。3.反演包含了三大法, 而逆变换只相当于第三种反演方法: 留数法。】

(一)有理分式反演法

例 1.求 $\bar{f}(p) = \frac{p^3 + 2p^2 - 9p + 36}{p^4 - 81}$ 的原函数。

$\bar{f}(p) = \frac{ap+b}{p^2-9} + \frac{cp+d}{p^2+9}$, 其中 $(ap+b)(p^2+9) + (cp+d)(p^2-9) = p^3 + 2p^2 - 9p + 36$, 得到 $(a+c)p^3 + (b+d)p^2 + (9a-9c)p + (9b-9d) = p^3 + 2p^2 - 9p + 36$, 得到 $a+c=1$ 、 $b+d=2$ 、 $a-c=-1$ 、 $b-d=4$, 四个方程(行)四个未知数(列), 有唯一组解, 这同时也说明我们对 $\frac{ap+b}{p^2-9} + \frac{cp+d}{p^2+9}$ 两个分子的假设是正确的。

解得 $a=0$ 、 $c=1$ 、 $b=3$ 、 $d=-1$ 。因此 $\frac{3}{p^2-9} + \frac{p-1}{p^2+9} = \frac{e}{p-3} + \frac{f}{p+3} + \frac{p-1}{p^2+9}$ 。于是 $(p+3)e + (p-3)f = 3$, 得到 $e+f=0$ 、 $3(e-f)=3$, 因此对分子的假设仍然合理, 且解得 $e=\frac{1}{2}$ 、 $f=-\frac{1}{2}$ 。

于是 $\bar{f}(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{p-1}{p^2+9} = \frac{1}{2} \frac{1}{p-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+3} + \frac{p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2+9}$ 。因此 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-3}\right) - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+9}\right) - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p^2+9}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{3t})) - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-3t})) + \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\cos 3t)) - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\sin 3t)) = \frac{1}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{-3t} + \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t$ 。

【将位移定理的方程左右调换为 $\bar{f}(p-p_0) = \mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)]$, 可得 $\bar{f}(p-3) = \frac{1}{p-3} = \mathcal{L}[e^{3t} \cdot 1]$, 以及 $\bar{f}(p+3) = \frac{1}{p+3} = \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot 1]$; 另外, $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2+w^2} = \frac{p}{p^2+9} = \mathcal{L}[\cos wt] = \mathcal{L}[\cos 3t]$, $\bar{f}(p) = \frac{3}{p^2+9} = \mathcal{L}[\sin 3t]$; 像函数中, 一旦有 p 的加减, 就想到位移定理;】

(二)查表法

例 2. 求 $\bar{f}(p) = \frac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}}$ 的原函数。

由于分子 $e^{-\tau p}$ 可由延迟定理 $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-p t_0} \bar{f}(p)$ 所对应的 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-p t_0} \bar{f}(p)] = f(t-t_0) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]|_{t=t-t_0}$ 得出, 因此暂且不管。查表得 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, 因此 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-p t_0} \bar{f}(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-p \tau} \frac{1}{\sqrt{p}}\right] = f(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}|_{t=t-t_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$ 。【准确地说, 应采用 $\mathcal{L}[\mathbf{H}(t-t_0) \cdot f(t-t_0)] = e^{-p t_0} \bar{f}(p)$, 及其所对应的 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-p t_0} \bar{f}(p)] = \mathbf{H}(t-t_0) \cdot f(t-t_0) = \mathbf{H}(t-\tau) \cdot f(t-\tau) = \mathbf{H}(t-\tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}|_{t=t-t_0} = \mathbf{H}(t-\tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$ 】

你也可以不通过查表得到 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$: 因 $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cdot e^{-px^2} \cdot dx^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-px^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(\sqrt{p}x)^2} \cdot d(\sqrt{p}x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{p}}$ 。

例 3. 求 $\frac{w}{(p+\lambda)^2+w^2}$ 和 $\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+w^2}$ 的原函数。

利用位移定理所对应的 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p-p_0)] = e^{p_0 t} f(t) = e^{p_0 t} \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)]$, 得 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p+\lambda)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w}{(p+\lambda)^2+w^2}\right] = e^{-\lambda t} \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = e^{-\lambda t} \sin wt$ 。同样, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+w^2}\right] = e^{-\lambda t} \cos wt$ 。

例 4. 求 $\bar{f}(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}$ 的原函数。

该题既可以利用**卷积定理** $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \cdot d\tau] = \bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)$ 所对应的 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)] = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1(p)]|_{t=\tau} \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_2(p)]|_{t=t-\tau} \cdot d\tau$, 得 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p}]|_{t=\tau} \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+b)}]|_{t=t-\tau} \cdot d\tau$, 其中根据 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-pt_0} \bar{f}(p)] = H(t-t_0) \cdot f(t-t_0)$, 可得 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p}] = H(t-\alpha)$, 于是 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p}]|_{t=\tau} = H(\tau-\alpha)$; 而根据 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p-p_0)] = e^{p_0 t} f(t)$ 可得 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+b)}] = e^{-bt}$, 于是 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+b)}]|_{t=t-\tau} = e^{-b(t-\tau)}$ 。

因此 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}] = \int_0^t H(\tau-\alpha) e^{-b(t-\tau)} \cdot d\tau = H(t-\alpha) \int_\alpha^t e^{-b(t-\tau)} \cdot d\tau = H(t-\alpha) \frac{1}{b} e^{-b(t-\tau)}|_\alpha^t = H(t-\alpha) \frac{1}{b} [1 - e^{-b(t-\alpha)}]$ 。

该题还可以通过**有理分式反演法**, 来求: $\bar{f}(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)} = \frac{1}{b} (\frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{e^{-\alpha p}}{p+b}) = \frac{1}{b} \frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{1}{b} e^{\alpha b} \frac{e^{-\alpha(p+b)}}{p+b}$, 于是 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}] = \frac{1}{b} \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p}] - \frac{1}{b} e^{\alpha b} \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha(p+b)}}{p+b}] = \frac{1}{b} H(t-\alpha) - \frac{1}{b} e^{\alpha b} \{e^{-bt} \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-\alpha p}}{p}]\} = \frac{1}{b} H(t-\alpha) - \frac{1}{b} e^{\alpha b} e^{-bt} H(t-\alpha) = H(t-\alpha) \frac{1}{b} [1 - e^{-b(t-\alpha)}]$ 。

(三)黎曼-梅林反演公式

这就是拉普拉斯逆变换的定义, 或者说留数法。即利用 $H(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$, 将像函数沿着 p 平面上一条平行于虚轴且 $x > \sigma_0$ 的直线积分。根据像函数的解析性质, $\bar{f}(p)$ 是在 $\text{Re } p > \sigma_0$ 的**右半平面上的解析函数**, 因此 $\bar{f}(p)$ 更将在直线 $x = \sigma$ 上及其右半平面上, 是没有奇点的。

推广的约当引理: 若 1. C_R 为以原点为圆心且在直线 $\text{Re } p = \sigma$ 左侧的优弧, 2. $|p| \rightarrow \infty$ 时, $\bar{f}(p)$ 在 $\text{Re } p = \sigma_0$ 左侧**一致地** $\rightarrow 0$ 。则: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = 0 (t > 0)$ 。

证 设一逆时针绕向的回路 $l =$ 沿着 $\text{Re } p = \sigma$ 向上的一**直线段** $\overrightarrow{EA} +$ **优弧** $C_R \widehat{ABCD} E = \overrightarrow{EA} +$ **劣弧** $\widehat{AB} +$ **半圆弧** $\widehat{BCD} +$ **劣弧** \widehat{DE} , 因此 $\int_{C_R} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = \int_{AB} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp + \int_{BCD} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp + \int_{DE} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp$ 。

①. 我们先考虑**半圆弧**上的积分 $\int_{AB} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp$:

令 $p = iz$, 则 $z = \frac{p}{i} = \frac{R \cdot e^{i\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = R \cdot e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$, 则积分限从对 $p = R \cdot e^{i\varphi}$ 的 $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 所对应的左半圆, 变为 $z = R \cdot e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = R \cdot e^{i\varphi'}$ 的 $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, 所对应的上半圆 C'_R ; 且绕向仍然为逆时针不变。此时 $\int_{AB} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = i \int_{C'_R} \bar{f}(iz) e^{itz} \cdot dz$ 。此时的 $\bar{f}(iz)$ 仍在 $\varphi' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上一致 $\rightarrow 0$ (因为 $\bar{f}(p)$ 在 $\text{Re } p = \sigma_0$ 左侧**一致地** $\rightarrow 0$, 意味着 $\bar{f}(p)$ 在 $\text{Re } p = 0$ 左侧一致 $\rightarrow 0$, 即 $\bar{f}(iz)$ 在上半平面一致 $\rightarrow 0$), 且其中的 $t > 0$; ——将 $i \int_{C'_R} \bar{f}(iz) e^{itz} \cdot dz$ 与之前的**约当引理**中的 $\int_{C_R} F(z) e^{imz} \cdot dz$ 做对比, C'_R 与 C_R 均为上半圆周且逆时针, $\bar{f}(iz)$ 与 $F(z)$ 满足同样的 $\rightarrow 0$ 条件, e^{itz} 与 e^{imz} 中的 t, m 都 > 0 (按理说其实 $t \geq 0$, 即 t 可 $= 0$, 初始条件嘛)。

因此根据约当引理, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \bar{f}(iz) e^{itz} \cdot dz = 0$ 。

②.再考虑 $\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp$:

由于 $\bar{f}(p)$ 在 $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ 左侧一致地 $\rightarrow 0$, 那么转换为数学语言: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 总能取到一个足够大的 R , 使得 $|\bar{f}(p)| < \varepsilon$ 。将 $p = R \cdot e^{i\varphi} = R \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, 以及 $dp = d(R \cdot e^{i\varphi}) = R d(e^{i\varphi}) = i R e^{i\varphi} d\varphi = i p d\varphi$ 代入, 得 $|\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp| = |\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{R \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)t} \cdot i p d\varphi| \leq \int_{\widehat{AB}} |\bar{f}(p)| e^{tR \cdot \cos\varphi} \cdot R d\varphi < \varepsilon \int_{\widehat{AB}} e^{\sigma t} \cdot R d\varphi = \varepsilon e^{\sigma t} R \alpha$, 其中, 在 \widehat{AB} 上 $R \cdot \cos\varphi \leq \sigma$, \widehat{AB} 的弧度为 α ($\alpha \neq 90^\circ - \varphi$, 因为 φ 为一自变量, 而 α 更常量一些, 且只与另一自变量 R 有关); 当 $R \rightarrow \infty$ 时, $\alpha \rightarrow 0$, 二者乘积 $R\alpha \sim R \sin\alpha = \sigma$ 是个有限值, 所以 $\lim_{R \rightarrow \infty} |\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp| < \varepsilon e^{\sigma t} \sigma = 0$, 即有 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = 0$ 。

同样的道理 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{DE}} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = 0$; 于是便证明了 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = 0$ 。

③.这样一来, $\oint_L \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = \int_E^A \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp + \int_{C_R} \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp$, 在 $R \rightarrow \infty$ 时变为 $\int_E^A \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp = \oint_L \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp$, 那么 $H(t) \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \bar{f}(p) e^{pt} \cdot dp = \frac{1}{2\pi i} [2\pi i \sum \operatorname{Res}[\bar{f}(p) e^{pt}]] = \sum \operatorname{Res}[\bar{f}(p) e^{pt}]$ 。【其中的留数是指, $\bar{f}(p) e^{pt}$ 在 L 内, 即 $\operatorname{Re} p < \sigma$ 的左半平面的各奇点的留数和; 但由于 $\bar{f}(p)$ 在右半平面没有奇点, 因而 $\bar{f}(p) e^{pt}$ 在右半平面也没有奇点; 于是该求和也可看作是对 $\bar{f}(p) e^{pt}$ 在整个 p 平面上的所有奇点进行的——这里的 $\bar{f}(p) e^{pt}$, 应该不像类型三中的 $F(z) e^{imz}$ 可能在实轴上有奇点: $\bar{f}(p) e^{pt}$ 在 $\operatorname{Re} p = \sigma$ 这条直线上应该没有奇点, 不然我们又得在这里添加讨论类型四了 = =。】

不得不说, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$ 中的 2π 和 i , 完全就是为了抵消环积分中, 留数和前面的 $2\pi i$ 而存在的; 而它们(分母中的 2π 和 i)是在得到拉普拉斯逆变换表达式时, 分两步分别先后引入的, 这简直是天造地设, 巧夺天工的上帝之举。

当 $\bar{f}(p)$ 是多值函数时, 积分路径 L 应绕过其支点, 以保证积分只在某单值分支上进行, 因为积分运算和留数定理得在不包含支点的区域内进行; ——大多时候(如 $\frac{1}{\sqrt{p}}$)支点在原点——则我们可将 ABCDE 大优弧, 在 C 点处断开, 不经过实轴, 而是在实轴上面、无限贴近实轴、// 实轴地同时往一朝原点直线进发, 然后作一小圆 C_ε , 绕过 O 点, 掉头 360° , 在 x 轴下贴着 x 轴往一进发, 回到 C 点下方, 沿原路到达 D。

6.3 应用例

用拉普拉斯变换求解微分方程、积分方程的步骤: 1. 用拉普拉斯正变换, 并考虑初始条件, 把关于原函数的积分方程, 转换为关于像函数的代数方程; 2. 解出像函数; 3. 再对解出的像函数做反演。

例 1. 求解交流 RL 电路的方程: $L \frac{d}{dt} j + Rj = E_0 \sin \omega t$; 其中 $j(0) = 0$. 【 j 是电流】

①. $\mathcal{L}[Lj'(t) + Rj] = L\mathcal{L}[j'(t)] + R\mathcal{L}[j(t)] = \mathcal{L}[E_0 \sin \omega t] = E_0 \mathcal{L}[\sin \omega t]$, 根据**导数定理**
 $\mathcal{L}[f'(t)] = p\bar{f}(p) - f(0)$, 有 $L\mathcal{L}[j'(t)] + R\mathcal{L}[j(t)] = L[p\bar{j}(p) - j(0)] + R\bar{j}(p) = Lp\bar{j}(p) + R\bar{j}(p) =$
 $E_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, ②. 容易解得 $\bar{j}(p) = \frac{E_0}{Lp + R} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{E_0}{L} \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{E_0}{L} \mathcal{L}[e^{-\frac{R}{L}t}] \mathcal{L}[\sin \omega t]$. 于是
 ③. $j(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{j}(p)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{E_0}{L} \mathcal{L}[e^{-\frac{R}{L}t}] \mathcal{L}[\sin \omega t]] = \frac{E_0}{L} \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[e^{-\frac{R}{L}t}] \mathcal{L}[\sin \omega t]]$, 根据**卷积定理**,
 得到 $\frac{E_0}{L} \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[e^{-\frac{R}{L}\tau}]]|_{t=\tau} \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\sin \omega t]]|_{t=t-\tau} \cdot d\tau = \frac{E_0}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau} \sin \omega(t-\tau) \cdot d\tau$, 但我们最
 好不写成它, 而写成 $\frac{E_0}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \sin \omega \tau \cdot d\tau$, 二个积分均是二者的卷积(可证明两个积
 分值相等).

然后写为 $\frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} \sin \omega \tau \cdot d\tau$, 并随便将 \sin 或 e 指数移入 d 后, 并连续对同
 一个进行两次分部积分: $-\frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} \cdot d(\cos \omega \tau) = -\frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} [e^{\frac{R}{L}\tau} \cos \omega \tau]_0^t -$
 $\frac{R}{L} \int_0^t \cos \omega \tau \cdot e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau = \frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} [1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} d(\sin \omega \tau)] = \frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} [1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t +$
 $\frac{R}{\omega L} \{e^{\frac{R}{L}\tau} \sin \omega \tau|_0^t - \frac{R}{L} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau\}] = \frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} [1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} \{e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t -$
 $\frac{R}{L} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau\}]$.

于是 $\frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} ? = \frac{E_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} [1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} \{e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{R}{L} ?\}]$, 得到 $\omega ? = 1 -$
 $e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} \{e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{R}{L} ?\}$, 于是 $(\omega + \frac{R}{\omega L}) ? = 1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t$, 因此
 $? = \omega L^2 \frac{1 - e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \frac{R}{\omega L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{\omega L^2 + e^{\frac{R}{L}t} (R L \sin \omega t - \omega L^2 \cos \omega t)}{\omega^2 L^2 + R^2}$, 于是解为
 $\frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} ? = \frac{e^{-\frac{R}{L}t} E_0 \omega L + E_0 (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$. 第
 一个部分是振幅不变的振荡, 第二部分是随着时间衰减的。

稳定部分还可改写为三角表示式: $\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \omega t) =$
 $\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \theta)$. 其中 $\theta = \arccos \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \arcsin \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$. 电路原理/电工学中, 复阻
 抗法/相量法/矢量法, 只给出该形式的稳定振荡, 没有考虑振幅随时间衰减部分。

例 2. 除了求解微分方程, 应用**拉普拉斯变换+反演**, 还可求解积分方程(途中需
 应用积分定理), 以及线性微分方程组; 另外, 应用**拉普拉斯变换+反演**, 还可求出诸
 如 $\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2 + 1)} dx$: 仔细观察他们, 可知积分结果是关于 t 的函数, 则令左
 式 $= I(t)$, 于是 $\mathcal{L}[I(t)] = \int_0^\infty \mathcal{L}[\frac{\cos tx}{x^2 + a^2}] dx$, 其中 $\mathcal{L}[\]$ 只作用在 t 的函数身上, 即将被积函数
 $\frac{\cos tx}{x^2 + a^2}$ 视为仅关于 t 的函数! 此时 x 就相当于 ω , 是个常数, 于是 $\mathcal{L}[\frac{\cos tx}{x^2 + a^2}] =$
 $\frac{1}{x^2 + a^2} \mathcal{L}[\cos xt] = \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{p}{p^2 + x^2} = \frac{p}{p^2 - a^2} [\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + p^2}] = \frac{p}{p^2 - a^2} [\frac{1}{a^2} \frac{1}{(\frac{x}{a})^2 + 1} - \frac{1}{p^2} \frac{1}{(\frac{x}{p})^2 + 1}]$, 代入被积函
 数中, 得 $\frac{p}{p^2 - a^2} [\frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{x}{a})^2 + 1} d(\frac{x}{a}) - \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{x}{p})^2 + 1} d(\frac{x}{p})] = \frac{p}{p^2 - a^2} \frac{\pi}{2} [\frac{1}{a} - \frac{1}{p}] = \frac{\pi}{2a(p+a)}$. 再取原函数
 得到 $\frac{\pi}{2a} e^{-at} (Re \ p > -a)$.

第二篇 数学物理方程

第七章 定解问题

我们所学的常微分方程们(非方程组), 都是含一个自变量的, 并且只需给出初始条件就可确定解; 而对于描述既含空间坐标又含时的波、输送、场, 的方程往往是偏微分方程, 叫做数学物理方程, 若不给定解条件, 则数学上称为泛定方程; 并且除了给定初始条件外, 还得给出边界条件, 才能定解, 因此它俩合称为定解条件; 并且对于初始条件, 需要给出每个点的初始情况, 即边界区域内的初始情况。

初始时刻/历史状况: 初始条件; 媒介/场/邻域/环境状况: 边界条件。

7.1 数学物理方程的导出

三种类型: 波动方程、输运方程、稳定场方程。——分别对应双曲型、抛物型、椭圆型偏微分方程。

(一).波动方程

(1).均匀弦的微小横振动 (横=⊥弦; 纵=//弦)

弦是**绷紧**的: 相邻俩小段之间有拉力, 称为弦在该处的**张力**; 弦是**柔软**的: 即**塑性的**, 没有恢复原形状的能力(非弹性的), 则**张力在切线方向**。弦的**重力不计**: 其重力只有张力的几万分之一。

无重力+绷紧=不振动时为直线。取 x 轴//不振动的弦, 建立 x - 0 - y 坐标系。由于作的是横向(y 向)振动, 则弦上各点的位移改变量在 x 轴方向(纵向)的投影=0, 这意味着 a.作用于各点的合力无 x 向分量, b.横向位移 u 只是 x 和 t 的函数, 并且 $u(x,t)=y(x,t)+C$, 当取 x 轴在不振动的弦上时, $C=0$ 。

当弦振动时, 弦上 $[x, x+dx]$ 区间内的一小段 B, 为一倾斜直线段(但曲率仍 $\neq 0$, 否则问题就将近似地以至于失去了问题本身的特点了; 并设左、右两端切线的倾斜角分别为 α_2, α_1 , 该切线的平均倾斜角 or 两端连线的倾角为 α), 无重力、无内弹力, 所以只受邻段 A 和 C 的拉力 T_1, T_2 (A \rightarrow B \rightarrow C 左至右), 且拉力沿线。根据**牛二** $F=ma$ 的 x 、 y 轴向分量形式, 可得 $[T_2 + T_1] \cdot \mathbf{i} = 0$, 即 $T_2 \cos \alpha_2 + T_1 \cos(\alpha_1 \pm \pi) = 0$, 即 $T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0$, 以及 $[T_2 + T_1] \cdot \mathbf{j} = (\rho \cdot ds) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \mathbf{j} = (\rho \cdot ds) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\rho \cdot ds) u_{tt}$ 所对应的 $T_2 \cos(\alpha_2 - \frac{\pi}{2}) + T_1 \cos(\alpha_1 \pm \pi - \frac{\pi}{2}) = T_2 \sin \alpha_2 + T_1 \sin(\alpha_1 \pm \pi) = T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = (\rho \cdot ds) u_{tt}$ 。【注: 其中的 α_2, α_1 均代表 $T_2, -T_1$ 与 \mathbf{i} 的夹角, 并记逆时针为正; $\alpha_2 - \frac{\pi}{2}, \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$ 均代表 $T_2, -T_1$ 与 \mathbf{j} 的夹角, 并记逆时针为正; u_{tt} 以 \mathbf{j} 向为正】

我们只考虑小的振动, 即 α_1, α_2 很小。那么可忽略掉 \sin 、 \cos 中的 α_1^2, α_2^2 等高阶小量, 且 $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx \tan \alpha \approx \alpha \approx 0$ 、 $u_x|_x = \tan \alpha_1 \approx \alpha_1$ 、 $u_x|_{x+\Delta x} = \tan \alpha_2 \approx \alpha_2$; 得到 $T_2 = T_1$, 以及 $T_2 \alpha_2 - T_1 \alpha_1 = (\rho \cdot ds) u_{tt}$; 于是 $T(\alpha_2 - \alpha_1) = (\rho \cdot \sqrt{1 + u_x^2} dx) u_{tt} = \rho \cdot dx \cdot u_{tt}$, 即有 $T(u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x) = \rho \cdot dx \cdot u_{tt}$, 得到 $Tu_{xx} = \rho u_{tt}$ 。【其中的弧微分 ds 得是恒 >0 的, 则本身该写作 $|ds|$ 的, 因此对应的本来应该是 $|dx|$ 的; 不过如果我们保留 ds , 则 $dx > 0$ 意味着末 $x+dx$ 在初 x 的右端, 这与 $u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x$ 中末态的下标在初态的下标右端相符合, 即与我们所建立的物理模型相符合, 因此它俩之商即为 u_{xx} , 而不会 $-u_{xx}$ 】

【 $T_2 = T_1$ 表明弦中张力不随 x 而变; 而每一时刻 t , 任何一处 x 的那段 dx 所对应的 ds , 都 $\approx dx$, 说明该处的 ds 不随时间改变, 所以该处的 T 也不随着时间改变, 所以 T 与 x 、 t 都无关; 是个常量, 因此可以提出来(其实只要与 x 无关就可以提出来了)】

于是运动方程为 $\rho u_{tt} - Tu_{xx} = 0$, 称为**弦振动方程**(B 段、 x 均是任取的, 因此该方程适用于各 x 处)。对于均匀弦, 线密度 $\rho(x)$ 为常数, 方程改写为 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, 其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$ 。质点之间的牵连, 反映在 u_{xx} 项, 并且以后会知道 a 为振动在弦上的传播速度(我们可以先看看量纲: $\frac{T}{\rho} = \frac{N}{kg/m} = \frac{N \cdot m}{kg} = \frac{J}{kg} = v^2$)。

若弦在振动过程中, 单位长度 Δx 所对应的 ds 还受到外加横向力 $F(x, t)$ 的作用[相当于力在 x 方向上的线密度 $=\frac{N}{m}$, 类似于 $\rho(x)$, 仍以向上(\mathbf{j})为正], 则二式将修正为 $T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + F(x, t) dx = (\rho \cdot ds) u_{tt}$, 于是有 $Tu_{xx} + F(x, t) = \rho u_{tt}$, 得到 $\rho u_{tt} - Tu_{xx} = f(x, t)$, 其中 $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho(x)}$ 称为力密度(电动力学中的力密度却指 $\frac{F}{\Delta V}$)。【这便是为什么之前即使方程右边 $=0$, 左边的 u_{tt} 项也要写在前面的原因: 为了使得这里右边的 $f(x, t)$ 是正的】前者我们称为弦的**自由振动方程**, 后者称为弦的**受迫振动方程**。

(2).均匀杆的纵振动

此时各点的位移量 $u(x, t)$ 便// x 轴而非 $\perp x$ 轴了, 称为纵向位移。杆中任一小段有纵向移动, 必然引起它的邻段的压缩或伸长, 而该邻段的压缩或伸长(由于杆的弹性, 压缩 or 伸长将导致有力的存在)将导致或无法阻止该邻段自身的继续纵向移动, 以至

于又引起它的邻段的压缩或伸长…。——可见，**塑性**对应**横波**，**弹性**对应**纵波**，其中的横、纵二字，也分别来源于横振动与纵振动。

同样在//x 轴的柱上取 $[x, x+\Delta x]$ 的一小段 B，B 两端的点相对于各自原平衡位置 x 、 $x+dx$ 的(纵向)位移量，分别记为 $u(x)$ 、 $u(x+dx)$ ，并且像之前的 u 以 \mathbf{j} 向为正一样，这里的 u 以 \mathbf{i} 向为正(：之前的 u 代表横向位移，这里代表纵向位移，且都是相对于 x 轴上某一固定点，即平衡位置)。在横纵振动中， x 、 $x+dx$ 都固定在 x 轴上不动，弦上某点的位移是合成出来的：横振动的 x 处质点合位移： $x\mathbf{i}+u(x,t)\mathbf{j}+C\mathbf{j}=\mathbf{x}+u(x,t)\mathbf{C}$ 、横振动的 $x+dx$ 处质点合位移： $(x+dx)\mathbf{i}+u(x+dx,t)\mathbf{j}+C\mathbf{j}=(\mathbf{x}+d\mathbf{x})+u(x+dx,t)\mathbf{C}$ ；而纵振动中 x 、 $x+dx$ 不动的特征便体现得尤为明显了： (x,C) 处质点的合位移： $\mathbf{x}+u(x,t)\mathbf{C}=x\mathbf{i}+u(x,t)\mathbf{i}+C\mathbf{j}$ 、 $(x+dx,C)$ 处质点的合位移： $(\mathbf{x}+d\mathbf{x})+u(x+dx,t)\mathbf{C}=(x+dx)\mathbf{i}+u(x+dx,t)\mathbf{i}+C\mathbf{j}$ 。

可见 $u(x,t)$ 、 $u(x+dx,t)$ 只是 B 段左右两端点分别相对于各自的平衡位置，所做的相对位移，其绝对位移分别为： $x+u(x,t)$ 以及 $x+dx+u(x+dx,t)$ ，二者之差为 $dx+u(x+dx,t)-u(x,t)=dx+du$ ，这就是拉伸 or 压缩 or 位移后的 B 段长度，而 B 段原长为 dx 。——因此 B 段在原长 dx 的基础上改变了 du ，根据杨氏模量 $E=\frac{F/S}{dL/L}$ ，可见此处的应变 $=\frac{dL}{L}=\frac{du}{dx}=u_x$ ，代入即可得到 $E=\frac{F/S}{u_x}$ ，于是 $F=ESu_x$ ，于是仍根据牛二有 $(\rho \cdot Sdx)u_{tt}=F_2-F_1=ESu_x|_{x+\Delta x}-ESu_x|_x$ ，其中的 ρ 不再是线密度而是**体密度**了。【应力 $=E \cdot$ 应变，叫做**胡克定律**；应力也可分为张应力与压应力，对应拉伸与压缩；应变 $=$ 相对伸长(量)，在这里用 $u_x=\frac{du}{dx}$ 表示】

两边同除以 Sdx ，得到 $\rho u_{tt}=Eu_{xx}$ ，于是 $\rho u_{tt}-Eu_{xx}=0$ ，此即为**杆的纵振动方程**。对于均匀杆， ρ 和 E 都是常数，上式可改写为 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ ，其中 $a=\frac{E}{\rho}$ ，也是纵振动在杆中的传播速度。同样，杆的**受迫纵振动方程**，也是 $\rho u_{tt}-Eu_{xx}=f(x,t)$ 形式，它来源于 $(\rho \cdot Sdx)u_{tt}=F_2-F_1+F(x,t)Sdx=ESu_x|_{x+\Delta x}-ESu_x|_x+F(x,t)Sdx$ ，其中的 $F(x,t)$ 为单位长度单位面积，即单位体积所受纵向外力； $f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho(x)}$ 的单位也是 $\frac{N}{kg}$ ，相当于 $\frac{m^2}{s^2}$ 。

(3).电磁波方程

麦克斯韦电磁波、弱引力场下的(弱场近似的)引力波，是三维的波动方程。它们在形式上，与一维的类似： $u_{tt}-a^2\nabla^2u=0$ ，不过其中的 $u=u(x,y,z,t)$ 。对于电磁波， u 写作 \mathbf{H} 或 \mathbf{E} ，是矢量：

$\mathbf{E}_{tt}-a^2\nabla^2\mathbf{E}=0$ 、 $\mathbf{H}_{tt}-a^2\nabla^2\mathbf{H}=0$ ，且其中的 $a^2=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}=c^2$ ，其中的 ∇^2 可记作 Δ_3 ，表示三维的拉普拉斯算符。

而牛顿引力场下不产生波，是因为它满足的是第三类：稳定场方程。

(二).输运方程

(1).扩散方程

由于浓度 u (单位体积的分子数, 或分子质量) 的不均匀, 物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移, 这种现象叫扩散。扩散现象广泛存在于气体、液体、固体间。

扩散转移方向=高浓度→低浓度=顺浓度梯度(这是高中生物的叫法), 但实际上它是逆浓度的梯度 ∇u 的——因为 ∇u 中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示(末 u -初 u)/(末 x -初 x), 若它为正, 说明 x 增加的方向上 u 是增加的; 若它为负, 则 u 在 $-i$ 方向是增加的。因此 ∇u 的方向总指向 u 增加的方向[且增速最快的方向(单位 dL , du 增加最多的 dL 方向)](一维的也是, $\frac{du}{dx} < 0$ 意味着 x 增加 u 减小, 换句话说 u 在 $-i$ 即 $\frac{du}{dx}$ 方向是增加的; 因而 $\frac{du}{dx}$ 总指向 u 增加的方向)。

高浓度→低浓度, 是浓度 u 减小的方向, 因此同向于扩散转移方向的扩散流强度 \mathbf{q} (单位时间通过单位横截面的粒子数 or 粒子质量), 反向于同向于浓度 u 增加的方向的 ∇u , 因此 $\mathbf{q} = -D\nabla u$ 。其中, $D > 0$, 称作扩散系数(扩散系数与物质和温度有关, 且一般与温度成正相关), 这叫做扩散定律(斐克定律)。

我们来运用扩散定律(相当于之前的胡克定律: 因为二者都是经验总结, 且都引入了比例系数, 一个是 E 一个是 D)和粒子数(质量)守恒定律(相当与之前的牛二: 牛二可不是经验公式, 即使 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 中也有一个系数 m), 导出三维扩散方程: 在 V 内无源(其他物质转化成所考虑的物质)和汇(该物质转化为其他物质)时, 粒子数守恒:

$\frac{d}{dt} \iiint_V u dV = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 $dV = dx dy dz$, $d\mathbf{S}$ 指向小长方体内; 我们仍假设 q_x, q_y, q_z 分别以 i, j, k 为正方向, 于是取极限即有: $\frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = q_x|_x dy dz + q_y|_y dz dx + q_z|_z dx dy - q_x|_{x+\Delta x} dy dz - q_y|_{y+\Delta y} dz dx - q_z|_{z+\Delta z} dx dy$, 得到 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}$ 。
 $\mathbf{q} = -\nabla \cdot (-D\nabla u) = \nabla \cdot (D\nabla u)$, 若 D 不随 x, y, z 的改变而改变, 即物质是各向同性的, 则 $\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$, 即 $u_t - D\nabla^2 u = 0$ 。【其中的 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}$, 还可直接通过 Gauss 公式得来: 不过此时 $d\mathbf{S}$ 指向 V 外: $\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV = \iiint_V -\nabla \cdot \mathbf{q} dV$, 于是被积函数相等: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}$ 】

同样我们也将它写作 $u_t - a^2 \nabla^2 u = 0$, 其中 $a^2 = D$; 如果仅在 x 方向有扩散, 则一维扩散方程: $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 。可见输运方程与波动方程唯一的不同之处在于, 前者方程中是 u_t , 而后的方程中是 u_{tt} 。

①.若 V 内扩散源强度(单位时间单位体积内产生的粒子数) $F(x,y,z,t)$ 与 u 无关, 则粒子数守恒定律被修改为 $\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V F(x,y,z,t) dV$, 于是便有 $u_t - a^2 \nabla^2 u = F(x,y,z,t)$ 。【 F 也可可是 V 内汇的强度】

②.若 F 与 u 成正比, 比如 ^{235}U 原子核链式反应中, 新增中子数浓度随时间变化率 $=b^2 u$; 而放射性衰变中, 原有粒子浓度按指数衰减, $u=u_0 e^{-\lambda t}$, 可将 $\lambda>0$ 用半衰期 τ 表示: $\lambda=\frac{\ln 2}{\tau}$, 即有 $u=u_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t}$ 。则单纯由衰变所导致的那部分——浓度的时间变化率为 $u_t = -\frac{\ln 2}{\tau} u$ 。

对于这两者我们将 F 移到左边, 于是对于前者, $u_t - a^2 \nabla^2 u - b^2 u = 0$; 对于后者, $u_t - a^2 \nabla^2 u + \frac{\ln 2}{\tau} u = 0$ 。

(2).热传导方程

类似地, **热流强度 \mathbf{q}** (单位时间通过单位横截面的热量), 反向于温度 u 增加的方向的 ∇u , 因此 $\mathbf{q} = -k \nabla u$ 。其中, $k>0$, 称作**热传导系数**(扩散系数与物质有关), 这叫做**热传导定律**(傅里叶定律)。

同样运用**热传导定律**和**能量守恒定律**, 导出 V (物)内无**源**和**汇**时的三维扩散方程:
 $\frac{d}{dt} \iiint_V c_p u dV = \iiint_V \frac{\partial(c_p u)}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}$ (注: $c_p u = \frac{J}{C^\circ \cdot kg} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot C^\circ = \frac{J}{m^3}$, 它 $\cdot dV$ 再 $\div dt$ 后, 才变成功率率的单位 J/s , 才与方程右侧 $\frac{J}{m^2 \cdot s} \cdot m^2$ 单位一致), 于是 $\frac{\partial(c_p u)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (k \nabla u) = k \nabla^2 u$ 。得到 $c_p u_t - k \nabla^2 u = 0$, 于是 $u_t - a^2 \nabla^2 u = 0$, 其中 $a^2 = \frac{k}{c_p}$ 。

若物体中存在热源, 则 $\iiint_V \frac{\partial(c_p u)}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V F(x,y,z,t) dV$, 得到 $c_p u_t - k \nabla^2 u = F(x,y,z,t)$, 以及 $u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x,y,z,t)$, 其中 $f(x,y,z,t) = \frac{F(x,y,z,t)}{c_p}$, 表示: 单位质量($1/kg$)单位体积的热容量($1/(\frac{J}{C^\circ \cdot kg} \cdot \frac{1}{m^3})$), 下的热源强度。【其中的 F 可写作 $\frac{dQ}{dt}$ 】

若物体与外界有热交换, 则 $\mathbf{q}_0 = -h(\theta - u)\mathbf{n}$ 不再属于 \mathbf{q} , 而是独立于它(很奇怪), 作为地位上相当于 $\iiint_V F(x,y,z,t) dV$ 的一部分存在: 此时 $\iiint_V \frac{\partial(c_p u)}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} - \oint_S \mathbf{q}_0 \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V F(x,y,z,t) dV$, 即有 $c_p u_t - k \nabla^2 u + \oint_S h(u - \theta) dS = F(x,y,z,t)$, 一般将 $\oint_S dS$ 归于 h , 因此 $c_p u_t - k \nabla^2 u + h(u - \theta) = F(x,y,z,t)$, 得到 $u_t - a^2 \nabla^2 u + \frac{h}{c_p} (u - \theta) = f(x,y,z,t)$ 。【按理说, $\mathbf{q}_0 = -h(\theta - u)\mathbf{n}$ 永远处于边界面上, 而不应出现在方程中, 而是出现在边界条件上。所以这一段的说法还是有点勉强, 为了解释题。不过可能导线很细, 其内每一点, 与外界隔得很近, 每一点的 u , 都会与外界交换热量】

(三).稳定场方程

(1).稳定浓度分布

若扩散源强度不随时间变化, 即 $F(x, y, z, t) = F(x, y, z)$, 且扩散运动持续进行到 $t \rightarrow \infty$, 最终达到稳定状态。此时各点浓度 u 不再随时间 t 变化, $u_t = 0$, $u = u(x, y, z)$ 。于是方程 $u_t - \nabla \cdot (D \nabla u) = F(x, y, z)$ 变为 $\nabla \cdot (D \nabla u) = -F(x, y, z)$ 。若 D 是常数, 则 $\nabla^2 u = -\frac{F(x, y, z)}{D}$, 该方程称为泊松方程。如果没有源, 就变成了拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$ 。

(2).稳定温度分布

若热源强度 $F(x, y, z)$ 不随时间变化, 且热传导持续进行到 $t \rightarrow \infty$, 最终达到稳定状态。各点温度 $u(x, y, z)$ 不再随时间 t 变化, $u_t = 0$ 。于是方程 $c\rho u_t - \nabla \cdot (k \nabla u) = F(x, y, z)$ 变为 $\nabla \cdot (k \nabla u) = -F(x, y, z)$ 。若 k 是常数, 则 $\nabla^2 u = -\frac{F(x, y, z)}{k}$, 为泊松方程。如果没有源, 就变成了拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$ 。

(3).静电场

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

(4).恒定电流场

根据电荷守恒定律下的电荷的连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。其中 $\rho(x, y, z, t)$ 、 $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ 均是体密度。该式对任意变化的电流场均成立。

但恒定情况下, $\rho(x, y, z)$ 、 $\mathbf{J}(x, y, z)$ 均与 t 无关, 因而 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 于是 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 表示没有电流源。由于电流恒定, 产生的磁场也恒定($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$), 根据 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, \mathbf{E} 无旋。于是也存在一标势 φ , 满足 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 。

将 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 代入欧姆定律方程 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, 再将所得结果代入 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 即有 $\nabla \cdot (\sigma(-\nabla \varphi)) = 0$, 即 $-\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0$, 对于均匀的导电介质, σ 为常数, 此时 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。这便是恒定电流势所满足的方程。

当然, 更一般地, 对于 $\nabla \cdot \mathbf{J} = F(x, y, z)$ 【注: $F(x, y, z)$ 并不 $= -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, 因为此时电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 并不成立, 而变为更广义的 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = F(x, y, z)$, 其中 F 为源 or 汇, 此时 \mathbf{J} 有源, 但 \mathbf{E} 仍无旋, 因为源和汇之外的地方, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$ 仍 $= 0$, 电流 \mathbf{J} 仍恒定, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, 仍有标势 φ 】, 有 $-\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = F(x, y, z)$, 即 $\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = -F(x, y, z)$, 得到泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\frac{F(x, y, z)}{\sigma} = -f(x, y, z)$ 。

(5).量子力学/原子物理中, 定态薛定谔方程:

首先, 非自由粒子的薛定谔方程: $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, 其中的 ψ 是含时的。而对于当氢原子中电子能量 E 、电子势能 V 不随时间改变时, 波函数 ψ 可分为 $\psi = u(x, y, z) \cdot f(t)$, 并且可解得其中的时间部分 $f(t)$, 以及推得 u 所满足的方程: $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 u + Vu = Eu$, 这便是定态的薛定谔方程。

7.2 定解条件

(一).初始条件

对于(第三类)稳定场问题, $u(x, y, z)$ 不含 t , 不存在初始条件问题。

对于(第二类)输运过程, 有 u_t 项, 则需给出研究区域内各 (x, y, z) 点处的 $u(x, y, z, t)|_{t=0}$ 值, 这些值们可能构成一个已知函数 $u_0(x, y, z)$, 以至于每一个 (x, y, z) , 都可由 $u_0(x, y, z)$ 来对应/映射得到该点处的 u 值。

对于(第一类)输运过程, 还有 u_{tt} 项, 则除了给出 $u(x, y, z, t)|_{t=0}$ 外, 还需给出研究区域内各 (x, y, z) 点处的 $u_t(x, y, z, t)|_{t=0}$ 值 $u_0(x, y, z)$ 。

没有初始条件的问题: 周期性外源引起的输运问题或周期性外力作用下的振动问题中, 经过很多周期后, 初始条件引起的**自由输运**(仅由于初始浓度不均匀引起的输运)或**自由振动**(仅由于初始位移或初速度引起的振动)衰减到可以认为已消失, 这时的输运或振动完全是周期性外源或外力所引起, 处理这类问题时, 我们完全可以忽略初始条件的影响, 这类问题也就叫做没有初始条件的问题。

(1).比如考虑阻尼作用的振动问题, 阻尼作用体现为方程右边的一个非齐次项, 这样所解得的结果, 在初始条件变化后, 值变化不大。这样的结果对初始条件就不敏感。

(2).再比如宇宙学巧合问题: 爱因斯坦提出了一个标准宇宙学模型来描绘暗物质和暗能量, 对于占据宇宙总物质 70% 的暗能量 d_e (Dark Energy), 有 $\dot{\rho}_\Lambda = 0$, 得到 $\rho_\Lambda = \text{const.}$; 而对于的占据 25% 的暗物质 d_m (Dark Matter), 有 $\dot{\rho}_{dm} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{dm} = 0$, 得到 $\rho_{dm} = \rho_{dm_0} \cdot a^{-3}$ 。现今宇宙的 d_m 、 d_e 居然还在同一数量级上, 这被称为宇宙学巧合问题。——在宇宙最早期, 即使 ρ_Λ 、 ρ_{dm_0} 相差 a^{-10} , 现今的它们也应相差 a^{30} 那么多倍; 也就是说, 该结果(微分方程的解)是对初始条件敏感的。

(二).边界条件

1. 直接规定所研究的 u 在边界上(各点、任意时刻)的数值: $u(x, y, z, t)|_{\Sigma(x, y, z)=0} = u_\Sigma(x, y, z, t)$ 。

2. u 在边界外法向方向上的方向导数数值: $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma = f_\Sigma(x, y, z, t)$ 。

3. u 和 u 在外法向方向的方向导数的线性组合, 在边界上的值: $(u + H \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Sigma} = g_{\Sigma}(x, y, z, t)$ 。

一些具体问题的边界条件实例:

(1).波动方程:

①.弦的横振动: 弦要绷紧, 则我们得将其两端固定, 此时 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的边界条件便是第一类的: $u(x, t)|_{x=0} = 0$ 、 $u(x, t)|_{x=l} = 0$ 。【注: a.弦是一维的, 因此其边界是两个零维的点, 即它的左右两端的端点; b.这两个式子也暗含了不仅空间上两端点处的 u 值=0, 而且时间上, 这两端点的 u 值一直=0, 不随 t 变化; c.因此还对应着有 $u_x|_{x=0} = 0$ 、 $u_x|_{x=l} = 0$ 】

②.杆的纵振动: ①.杆左端 $u(x, t)|_{x=0} = 0$ 仍固定保持不变、右端即 $x=l$ 那端, 自由振动: $u_x|_{x=l} = 0$ 【注: a.自由意味着不受外力 F , 则没有应力 F/S , 根据胡克定律 $dL/L = \frac{F/S}{E}$, 没有应力则没有应变 dL/L , 于是相对伸长量 $\frac{du}{dx} = u_x = 0$ 。b.该式子也是每时每刻都成立】; ②. $x=l$ 端受沿端点(端面)外法线方向外力 $f(t) \cdot \mathbf{i}$ 【a.左端仍固定, 下不赘述 b. $f(t)$ 为负时, 表明外力指向右端面内法线方向, 即朝着 x 轴负半轴, 对应着 $u_x = \frac{du}{dx}$ 为负。】, 根据 $F = f(t) = \frac{dL}{L} \cdot ES = u_x \cdot ES$, 于是有 $u_x|_{x=l} = \frac{f(t)}{ES}$ 【该方程注明了 t 】; 若想要当外力指向左端面的外法向时, $f(t)$ 为正, 即 $f(t) = F \cdot (-\mathbf{i})$, 则 $f(t) \cdot (-\mathbf{i}) = F = \frac{dL}{L} \cdot ES = \frac{d(u\mathbf{i})}{dx} \cdot ES = u_x \mathbf{i} \cdot ES$, 得到 $u_x|_{x=0} = -\frac{f(t)}{ES}$ 【其中 u 仍以 \mathbf{u} 同向于 \mathbf{i} 时为正, 即 $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$ 或者说 $u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}$, 即仍以当前坐标系(\mathbf{i})来量度 \mathbf{u} 】。

③.右端连弹性体后再连固定物: 相当于 $f(t) = -ku$ (此时 F 既是时间又是坐标的函数) 的情形, 此时我们将非齐次的边界条件 $u_x|_{x=l} = \frac{-ku}{ES}$, 转化为齐次的: $(u_x + \frac{ku}{ES})|_{x=l} = 0$, 即 $(u + \frac{ES}{k} u_x)|_{x=l} = 0$ 。【a.该方程也蕴含着每时每刻的边界条件。b.之所以 $F = -ku$, 是因为首先 $F = F\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{u} = u\mathbf{i}$, $x = l$ 端的杆端面若往 x 轴正向伸长 u , 则处于平衡位置的弹簧的伸长量 u 在 \mathbf{i} 的量度下便也是正(往 x 轴正向的), 此时的推力 $F(F)$ 便朝着 $-u(-\mathbf{u})$ 方向, 即伸长量的反方向、 x 轴负向、右端面内法向的; 同样的道理, 若处于原长的弹簧连接在杆的左端, 则杆左端 $x=0$ 的 u 若 >0 , 则仍对应着 $F = -ku$ 朝着 x 轴负向】

(2).输运方程:

①.扩散过程: 对于 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, 给定: 恒定的表面浓度。1 维区域的 0 维边界: $u(x, t)|_{x=0 \text{ or } l} = N_0$, 2 维区域的 1 维边界: $u|_{x=x_0} = u(x_0, y, t) = N_0$, $u|_{y=y_0} = u(x, y_0, t) = N_0$ 等。这比较类似弦的横振动, 下一个热传导类似于弦的纵振动。

②.热传导过程: ①.在 $x=0$ 或 $x=l$ 端, 温度 u 处于恒温 u_0 或 $u=f(t)$, 即温度按 $f(t)$ 变化; ②. $u_x|_{x=0 \text{ or } l} = 0$, 即绝热; ③.若热流 $\mathbf{q}(t) = f(t)\mathbf{i}$ 沿右端点/端面外法线方向, 即 x 方向流出, 对应着 $f(t)$ 取正, 则: $u_x|_{x=l} = -\frac{f(t)}{k}$ (→ 矢量化为 $-\frac{f(t)\mathbf{i}}{k} = -\frac{\mathbf{q}(t)}{k} = \nabla u = u_x \mathbf{i}$), 当

右侧 $f(t)$ 取正时, 方程左右两边的 u_x 都是负值, 意味着 x 向 i 方向增加时, u 减少; 这与 $\mathbf{q}(t)=f(t)\mathbf{i}$ 沿 $-\mathbf{k}\nabla u=-ku_x\mathbf{i}$ 方向, 即 $+i$ 方向流动、流出端面相适应; 若 $u_x|_{x=0}=-\frac{f(t)}{k}$ 保持这个形式不变, 则仍有 $\mathbf{q}(t)$ 朝 $+i$ 方向流动对应着 $\mathbf{q}(t)=f(t)\mathbf{i}$ 中的 $f(t)$ 取正, 不过此时 $+i$ 对应着流入左端面了; 若 $f(t)$ 要以流出左端面取正, 则 $\mathbf{q}(t)=f(t)(-i)$, 于是 $-\mathbf{k}\nabla u=-f(t)\mathbf{i}$, 得到 $ku_x\mathbf{i}=f(t)\mathbf{i}$, 于是 $u_x|_{x=0}=\frac{f(t)}{k}$ 。

④.自由冷却: 虽然我们既不能知道边界上的 u 或 u_x , 但根据牛顿冷却定律, 从杆流出的热流强度($\mathbf{q}=-\mathbf{k}\nabla u=-ku_x\mathbf{i}$)与温差($u|_{x=l}-\theta$)成正比(这不就是热流定律么: $\mathbf{q}=-\mathbf{k}\nabla u$ 与 $\mathbf{q}=-h(\theta-u)\mathbf{i}$ 就是一样的), 得到 $-ku_x|_{x=l}=h(u|_{x=l}-\theta)$, 即 $(u+\frac{k}{h}u_x)|_{x=l}=\theta$ 。其中暗含了外环境是个大热源, 它的这点被所考虑的区域吸走的热量对它来讲并不算多, 以至于贴近边界的外环境热源温度 θ 才能保持不变。若杆与周围介质的热交换系数 $h \gg$ 杆的热传导系数(这对应着杆与介质交换热量非常频繁且交换得多), 则边界条件退化为第一类边界条件。若该杆左端也是自由冷却的, 则 $-ku_x|_{x=0}=-h(u|_{x=0}-\theta)=h(\theta-u|_{x=0})$ 对应着 $(u-\frac{k}{h}u_x)|_{x=0}=\theta$ 。【牛顿冷却定律像是种温度对坐标的一阶导在导体边界处连续的定理?】

更深入的看法: 在三维的情形下, 牛顿冷却定律被描述为 $\mathbf{q}=-h(\theta-u)\mathbf{n}=\mathbf{q}_0$, 其中的 \mathbf{n} 为 $u \rightarrow \theta$ 的界面法向, 由于我们考察的是 u 所对应的物体的温度, 而非 θ 所对应的物体, 所以这里的 \mathbf{n} 亦指包含 u 在面内的界面外法向; 并且我们将 $-h(\theta-u)\mathbf{n}$ 这一整体视为影响和左右边界流出总热流 \mathbf{q} 的众多热流中的一个热流, 一个纯粹因温差所导致的固定热流; 其中的 $\theta(\mathbf{r}_2)$ 和 $u(\mathbf{r}_1)$ 所对应的两处分处于分界面两侧的地点, 其连线 $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ 为 \mathbf{n} 方向, 且距离 $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$ 无限趋近于0。【 $\mathbf{q}=-\mathbf{k}\nabla u$, $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\cdot\mathbf{q}=-k\frac{\partial u}{\partial n}$, 于是, 若 \mathbf{n} 为界面外法向, 且 u 在界面内, 则 $q_{\parallel}=\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\cdot\mathbf{q}_{\parallel}=-\frac{k}{dn}du=-h(\theta-u)$, 即 $\mathbf{q}=\mathbf{q}_{\parallel}\mathbf{n}=-h(\theta-u)\mathbf{n}$ 】

更广义的情形下, 还有热流 \mathbf{q}_1 作为从边界流出的总热流 \mathbf{q} 的一个分支: $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0+\mathbf{q}_1=-h(\theta-u)\mathbf{n}+\mathbf{q}_1$, 两边点乘 \mathbf{n} , 即得 $\mathbf{n}\cdot(-\mathbf{k}\nabla u)=-h(\theta-u)+\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_1$, 即有 $-k\frac{\partial u}{\partial n}=-h(\theta-u)+\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_1$, 于是 $k\frac{\partial u}{\partial n}+hu=h\theta-\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_1$, 这就是第三类边界条件(一、二类的混合)。

(三).衔接条件 (即电动力学中的边值关系)

例如弦振动问题, 当横向力 $F(t)$ 集中作用于 $x=x_0$ 点时, 该点就成为弦的折点/跃变点, 折点斜率 u_x 的左极限与右极限不等, u_x 有跃变($u_x(x_0^-, t) \neq u_x(x_0^+, t)$), 此处二阶导 u_{xx} 无限大/不存在, 因此横振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在这一点没有意义。所以我们得分为两段考虑, 并对应着两个有意义的振动方程, 而且为了求解, 还得引入两个振动方程在此跃变点处所各自还缺的一个边界条件。

两段都在此处缺一个边界条件，总的来说缺两个；对于这道题而言，这两个条件得对称(要么形式上既有左段成分、又有右段成分，要么两个条件分别只含其中一个的成分，且形式相似，以示两者地位均等)，因此其实这两个边界条件既为左段服务，又为右段服务：①. u_x 不连续，但 u 连续： $u(x_0^-, t) = u(x_0^+, t)$ 。②. $F(t)$ 与张力平衡：引用之前的 $[\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1] \cdot \mathbf{j} = T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1$ ，其中的 α_2, α_1 均代表 $\mathbf{T}_2, -\mathbf{T}_1$ 与 \mathbf{i} 的夹角。这里的 $-\mathbf{T}_1$ 与 x 轴夹角 α_1 虽仍 > 0 ，但 \mathbf{T}_2 的倾斜角 α_2 却 < 0 ，即 \mathbf{T}_2 指向四象限；

那么若我们仍设 $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{j}$ ，则 $[\mathbf{F}(t) + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1] \cdot \mathbf{j} = 0$ ，即 $T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = -F(t)$ ，得到 $T_2 u_x(x_0^+, t) - T_1 u_x(x_0^-, t) = -F(t)$ 。这两个条件合称为**衔接条件**，同样的物理问题还有诸如两种物质的界面处的纵振动、热传导问题等。【严格地来说，跃变点也是科学的抽象。实际上存在的是一个小的过渡区，某些物理量的空间变化率很大，但还是连续变动的。我们这么做是为了简化问题，不必考察过渡区上的变化情况。虽然这看上去仍比较复杂，但绝对比不这么做要简单。】

7.3 数学物理方程的分类

这一节很线性代数；椭圆型方程，跟理论力学中的惯量椭球有点 link，二者都是线性代数的管辖范畴。

7.4 达朗贝尔公式 定解问题

常微分方程的常规解法：求出通解、利用初始条件确定积分常数。下面引入偏微分方程的解法：核心思想，是采用变量替换法，将波动方程化为便于积分的齐次二阶偏微分方程。

(一).达朗贝尔公式

(1).从均匀弦的横振动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 出发，用算符来表征之： $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})u = 0$ ，即有 $(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x})u = 0$ 。设 $x = x(\xi, \eta) = a(\xi + \eta)$ ， $t = t(\xi, \eta) = \xi - \eta$ 。那么 $\xi = \xi(x, t)$ 、 $\eta = \eta(x, t)$ 。于是 $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$ ， $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} = -(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x})$ 。那么算符 $(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}$ ，则原偏微分方程变为 $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0$ 。

不过, 我们也可另设 $x = \frac{1}{2a} [a(\xi + \eta)]$, 此时必须要有 $t = \frac{1}{2a} [(\xi - \eta)]$, 即二者都为原来的 $\frac{1}{2a}$, 此时 $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$ 才会均分别变为原来的 $\frac{1}{2a}$: $\frac{1}{2a}(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}), -\frac{1}{2a}(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x})$; 此时虽然 $(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$, 但原方程仍会化简为 $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u = 0$ 。

我们之所以这么做, 是为了使得 $\xi(x, t), \eta(x, t)$ 的表达式更简单: $\xi = x + at, \eta = x - at$; 所以才委屈了 $x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)$ 的表达式, 让它们变得难看了一点。这种好处马上就会见效: 先将 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 左右两边对 η (偏) 积分, $\int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + g_1(\xi) = g_2(\xi)$, 得到 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = g(\xi)$; 两边再对 ξ (偏) 积分: 得到 $\int \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \int g(\xi) d\xi$, 即 $u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$ 。

该通解是两个任意函数, 而不是一个任意常数。这便是(二阶)偏微分方程与常微分方程之间解的区别, 以及我们这么做(化为齐次的二阶偏微分方程、简化 ξ, η) 的好处(所在)。——考察 $f_2(x - at)$ 上的这样一个点: 设 $x - at = \text{某一常数 } M$, 则 $x = M + at$ 这样的一个随时间 t 变化的 x 值, 却对应着 $f_2(x, t)$ 曲线上一个不随时间 t 变化的 y 值: $f_2(M)$, 也就是说, 点 $(M + at, f_2(M))$ 不但恒在 $f_2(x, t)$ 上, 而且该点相对于曲线 $f_2(x, t)$ 上任何一个其他的动点的相对位置不变。

那么此点 $(M + at, f_2(M))$ 的运动, 便可代表整个 $f_2(x, t)$ 随着时间 t 的运动状况: // x 轴地以速度 a 向 x 轴正向运动。此时点 $(M + at, f_2(M))$, 相对于另一个坐标系原点在 O 系描述下的运动规律为 $(N_1 + at, N_2)$ 的 O' 系的坐标为 $(M - N_1, f_2(M) - N_2)$, 该坐标正如 $f_2(x)$ 在 O 系下的描述一样[它可看作 $f_2(x, t)$ 中 t 固定取 0], 不与时间有关, 一个确定的 x 便对应一个确定的点 $(x, f_2(x))$ ——这里也类似, 一个常数 M , 便确定一个 O' 系下的定点 $(M - N_1, f_2(M) - N_2)$ 。所以我们将常数 M 记为变数 X , 于是, 在 O 系描述下为 $(x, f_2(x, t)) = (x, f_2(x - at)) = (X + at, f_2(X))$ 的点, 被以 $(x_0 + at, y_0)$ 为运动规律的 O' 系描述为: $(X - x_0, f_2(X) - y_0)$ 。若取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则 O' 系对 $(x, f_2(x, t))$ 的描述 $(X, f_2(X))$, 将与 $(x, f_2(x))$ 无异。

所以, $f_1(x + at)$ 为向 x 轴负半轴以 $a > 0$ 为速度移动的行波(或者说以 $-a$ 为速度)。所以 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})u = 0$ 的解对应的物理情景是, 以速度 $a > 0$ 沿着 x 轴正负两个方向传播的行波。

(2). 我们假定弦、杆、传输线, 是无限长的。这样就不存在边界条件。设初始条件为 $u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), (-\infty < x < \infty)$ 。将初始条件代入通解(或者这话应该反着说才对) $f_1(x + at) + f_2(x - at)$ 中, 得到 $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$ 。

对后者两端在区间 $[x_0, x]$ 上积分可得 $[f_1(x) - f_2(x)] - [f_1(x_0) - f_2(x_0)] = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \cdot d\xi$, 再将 $f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \cdot d\xi + f_1(x_0) - f_2(x_0)$ 与 $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$ 联立。可得 $f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)], f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) \cdot d\xi - \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)]$ 。

再将 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 带回 $f_1(x+at) + f_2(x-at)$ ，得到 $u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}[\int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) \cdot d\xi] = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 。此即为达朗贝尔公式。

例 1. 设各点的横向初速度 $u_t|_{t=0} = \psi(x) = 0 (-\infty < x < \infty)$ ，初始位移 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 只在 (x_1, x_2) 上不为 0，于 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ 处达到最大值 u_0 ：
$$\varphi(x) = \begin{cases} 2u_0 \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1 < x < \frac{x_1+x_2}{2} \\ 2u_0 \frac{x_2-x}{x_2-x_1}, & \frac{x_1+x_2}{2} \leq x \leq x_2 \\ 0, & x < x_1 \text{ 或 } x > x_2 \end{cases}$$

此时达朗贝尔公式给出 $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$ 。初始时刻的 $u(x,0)$ 的图像是两个 $\frac{1}{2}\varphi(x)$ 之和，是个顶点高 u_0 的三角形小山包。之后随着 t 的增大， $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 与 $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ 关于 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称地分别以 $\pm a$ 为速度，朝远离对称轴的方向离去，它们的函数图像(两个顶点高 $\frac{1}{2}u_0$ 的三角形小山包)的交叠区域的“振动矢量和”，连同非交叠部分各自的轮廓，为总 $u(x,t)$ 随时间 t 变化的图像。

例 2. 设各点的横向初位移 $u|_{t=0} = \varphi(x) = 0 (-\infty < x < \infty)$ ，初速度 $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ 也只在 (x_1, x_2) 上不为 0：
$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

此时达朗贝尔公式给出 $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_0 \cdot d\xi = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{x+at} \psi_0 \cdot d\xi - \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{x-at} \psi_0 \cdot d\xi = \psi(x+at) - \psi(x-at)$ 。其中 $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\psi_0}{2a}(x-x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{\psi_0}{2a}(x_2-x_1), & x \in [x_2, +\infty] \end{cases}$ ，可以画出 $\psi(x)$ 的图像，

将其沿着 x 轴翻折后作为 $-\psi(x-at)$ 的初始时刻图像，然后让 $\psi(x+at)$ 左移、 $-\psi(x-at)$ 右移，并将它们的横向位移相加合成。

在这里的例 2 中，波已通过的地区(x 们)，虽振动已消失，但(横向位移 u)偏离了平衡位置($u \neq 0$)；而在例 1 中，波已通过的地区，振动消失而弦静止在原平衡位置。

(二).端点的反射

1. 半无限长的弦具有一个固定端点 $u|_{x=0} = 0$ ，我们来研究它的自由振动：

微分方程： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < \infty)$ ；初始条件： $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 、 $u_t|_{t=0} = \psi(x) (0 \leq x < \infty)$ ；边界条件： $u|_{x=0} = 0$ 。【 $x=0$ 点处，不仅初速度和初始位移都=0(这对应着初始条件中 $\varphi(0)=\psi(0)=0$)，而且在之后的 $u(0,t)$ 、 $u_t(0,t)$ 、都应=0，这体现在了边界条件中】

当 $t > \frac{x}{a}$ 时，达朗贝尔公式 $u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 中的 $x-at < 0$ ，相关的两项 $\varphi(x-at)$ 、 $\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 失去意义【 $x+at$ 是恒 ≥ 0 的，因为 x 、 t 、

$a \geq 0$ 】。不能直接用 u 的达朗贝尔公式。但我们可用延拓后的无限长弦 $u(x, t)$ 所满足的 **微分方程**： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (-\infty < x < \infty)$ 的解 $\frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 的 $x \geq 0$ 部分，作为 $u(x, t)$ 的解。那么 $u(x, t)$ 的初始条件 $u|_{t=0}$ 、 $u_t|_{t=0}$ 在 $x \geq 0$ 的部分，应与原初始条件 $u|_{t=0}$ 、 $u_t|_{t=0}$ 一致，我们记其**初始条件**为 $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 、 $u_t|_{t=0} = \psi(x) (-\infty \leq x < \infty)$ ，且其中的 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 在 $x \geq 0$ 时分别=原 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ ；且此时的 $u(x, t)$ 也应满足：对于每个 t 均有 $u|_{x=0} = 0$ ，即使这不是它的**边界条件**。于是这就要求 $u(x, t)$ 本身关于 x 是个奇函数，并且在 $t \geq 0$ 时， $u(x, t)$ 对 x 一直都得上是个奇函数！！而 $t=0$ 时 $u(x, t)$ 关于 x 为奇函数，就要求其**初始条件**中的两个函数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 均为奇函数。

【这是因为：由于 $u(x, t) = -u(-x, t)$ ，其通解也应满足 $\frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = -\frac{1}{2} [\varphi(-x+at) + \varphi(-x-at)] - \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(-\xi) \cdot d\xi$ ，假设其中的 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 分别是奇函数，则代入通解可得到 $\varphi(x+at) + \varphi(x-at) = -\varphi(-x+at) - \varphi(-x-at)$ ，以及单独因为是奇函数： $\varphi(x+at) = -\varphi(-x-at)$ ， $\varphi(x-at) = -\varphi(-x+at)$ ，后者相当于前者的**交叉配对**，可见这两者与原假设无矛盾，因此 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 是奇函数。】

【其实上上一段由 $u|_{x=0} = 0$ 得到 $u(x, t)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 为奇函数，有着更 solid 的得来过程，并且以上过程顺序有点反，表象上看， $u|_{x=0} = 0$ 确实一般人会先猜测 $u(x, t)$ 为奇函数、再用 $u(x, t)$ 的解得出 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 是奇函数；其实以下过程才是普遍适用的，要先通过通解应满足端点的边界条件，解得 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的 $x < 0$ 的形式，再求出 $u(x, t)$ ；并且还可以求解诸如 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=0} = A \sin \omega t$ 之类的端点的边界条件下， $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 在 $x < 0$ 时的表达式：

$x \geq 0$ 时：若 $(0 \leq) t \leq \frac{x}{a}$ ，则 $x+at \geq 0$ (当然)、 $x-at \geq 0$ ；若 $t \geq \frac{x}{a}$ ，则 $x+at \geq 0$ (当然)、 $x-at \leq 0$ 。设 $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \in [0, +\infty) \\ \varphi_0(x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ ， $\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \in [0, +\infty) \\ \psi_0(x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ ——则当 $t \leq \frac{x}{a}$ 时， $u = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ ，它虽也得满足 $u|_{x=0} = 0$ ，但这并不能帮助我们得到 $\varphi_0(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 的表达式；而当 $t > \frac{x}{a}$ 时， $u = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi_0(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi_0(\xi) \cdot d\xi$ ，由于对于任意 t 都得满足 $u|_{x=0} = 0$ ，那么 $x \geq 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 的这个 u 解也该满足 $u|_{x=0} = 0$ (虽然这时候 $0 > x-at$ 不能取到 0，但是既然函数是解析的，那就当是连续的，则它的极限应=0)，于是就得到了 $\frac{1}{2} [\varphi(at) + \varphi_0(-at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_{-at}^0 \psi_0(\xi) \cdot d\xi = 0$ ，若令 $\varphi_0(x) = -\varphi(-x)$ ，则 $\frac{1}{2} [\varphi(at) + \varphi_0(-at)] = 0$ ；同样，若令 $\psi_0(x) = -\psi(-x)$ ，则 $\int_{-at}^0 \psi_0(\xi) \cdot d\xi = \int_{-at}^0 -\psi(-\xi) \cdot d\xi = \int_{at}^0 \psi(\xi) \cdot d\xi = -\int_0^{at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ ，于是后两项之和也=0，也就满足了 $x \geq 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 时候的 u 解，在 $x=0$ 时=0，并**仅用这个**就得到了 $\varphi_0(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 的一种可能的表达式；

我们并没有用 $x < 0$ 、 $t \leq \frac{x}{a}$ 或 $x < 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 所对应的 u 解来得到它，因为之后会知道， $x < 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 与这里的 $x \geq 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 的 u 解形式上相同，而 $x < 0$ 、 $t \leq \frac{x}{a}$ 时候的 u 解全是关于

$\varphi_0(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 的函数，不含 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ ，若单独用它则得不到 $\varphi_0(x)$ 与 $\varphi(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 与 $\psi(x)$ 之间的关系；不过或许综合这三个 u 解，能直接确定下来 $\varphi_0(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 的表达式，而排除还有其他可能的表达式的存在。】

则我们相当于将 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 分别奇延拓为 $\varphi(x)=\begin{cases} \varphi(x), x \in [0, +\infty) \\ -\varphi(-x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ 、 $\psi(x)=\begin{cases} \psi(x), x \in [0, +\infty) \\ -\psi(-x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ 。我们将其代入 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ ，得到 $x \in [0, +\infty)$ 时的 u 的表达式(注：由于 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 无论如何都有两段，因而 u 也得有两段)： $u=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi+\int_{x-at}^0-\psi(-\xi)\cdot d\xi], t \geq \frac{x}{a} \end{cases}$ ；
得到 $u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \geq \frac{x}{a} \end{cases}$

其中的条件本该完整地写为： $t \leq \frac{x}{a} \cap t \geq -\frac{x}{a} \cap t \geq 0$ (上)，以及 $t \geq \frac{x}{a} \cap t \geq -\frac{x}{a} \cap t \geq 0$ (下)，其中的 $t \geq -\frac{x}{a}$ 来源于 $x+at \geq 0$ 。能简化成这样，是因为由于 x 恒 ≥ 0 ，导致 $t \geq -\frac{x}{a} \cap t \geq 0 = t \geq 0$ (即 $x+at \geq 0$ 在 $t \geq 0$ 时恒成立，是其必要条件)，以至于(上)变为了 $t \leq \frac{x}{a} \cap t \geq 0$ ，而其中的 $t \geq 0$ 作为大条件可省略不写；而(下)变为了 $t \geq \frac{x}{a} \cap t \geq 0 = t \geq \frac{x}{a}$ (这一步又用到了 $x \geq 0$)。或许你会说我有点刻板，但接下来的问题，只能被这样处理：

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，像之前恒有 $x+at \geq 0$ 一样，此时恒有 $x-at \leq 0$ 。于是我们将通解写为 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 的形式，此时 $u=\begin{cases} \frac{1}{2}[-\varphi(at-x)-\varphi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}-\psi(-\xi)\cdot d\xi, t \leq -\frac{x}{a} \cap t \geq \frac{x}{a} \cap t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi+\int_{x-at}^0-\psi(-\xi)\cdot d\xi], t \geq -\frac{x}{a} \cap t \geq \frac{x}{a} \cap t \geq 0 \end{cases}$ 其中，根据 $x < 0$ 的条件，仍有 $t \geq \frac{x}{a} \cap t \geq 0 = t \geq 0$ ；并且我们对 $t \leq -\frac{x}{a} \cap t \geq 0$ (上)省略掉 $t \geq 0$ ，得 $t \leq -\frac{x}{a}$ ，而对 $t \geq -\frac{x}{a} \cap t \geq 0$ (下)进行运算而不是省略，得 $t \geq -\frac{x}{a}$ ，于是有：
 $u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[-\varphi(at-x)-\varphi(-x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{-x-at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \leq -\frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \geq -\frac{x}{a} \end{cases}$

哈哈，没见过吧，这就像李大钊说的一样：庶民的胜利！——我们得到了 $x < 0$ 时的 $u(x,t)$ 的图像。不过我们常用的是 $x \in [0, +\infty)$ 时的 u 的表达式，并将此时的 u 写为 u ：

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi, t \geq \frac{x}{a} \end{cases}, \text{其中 } x \geq 0.$$

——其实它还可以通过： $x < 0$ 时的 $u(x,t)$ 是将 $-x$ 代入 $x > 0$ 时候的 $u(x,t)$ 并取负：即 $-u(-x,t)$ ，来简单地得到。足可见 $u(x,t)$ 的奇函数性质。【其中 $\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 与 $\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 看似一样，实质上后者的积分限是下大上小的，应写作 $-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{at-x}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 这样下小上大的情形，此时这样看来仍符合 $-u(-x,t)$ ；同样的道理， $\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 与 $\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{-x-at}\psi(\xi)\cdot d\xi$ 也是利用负号调换了积分限的】进一步地，全 x 区间上的 u 应满

足等于两个 $x=0$ 左右两个分区间的 u 的表达式之和(因为没有重叠区域/交集), 即

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \in [0, +\infty) \text{ 时的 } u + x \in (-\infty, 0) \text{ 时的 } u,$$

可发现三个非常有趣的小东西: 当 $t \leq \frac{|x|}{a}$ 时, $\frac{1}{2} \varphi(x-at) = \frac{1}{2} \varphi(x-at) + [-\frac{1}{2} \varphi(at-x)]$, 以及 $\frac{1}{2} \varphi(x+at) = \frac{1}{2} \varphi(x+at) + [-\frac{1}{2} \varphi(-x-at)]$, 以及 $\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{-x-at} \psi(\xi) \cdot d\xi$; 当 $t \geq \frac{|x|}{a}$ 时, $\frac{1}{2} \varphi(x-at) = [-\frac{1}{2} \varphi(at-x)] + [-\frac{1}{2} \varphi(at-x)]$, 以及 $\frac{1}{2} \varphi(x+at) = \frac{1}{2} \varphi(x+at) + \frac{1}{2} \varphi(x+at)$, 以及 $\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 【注意: $t \geq \frac{|x|}{a}$ 的三个结论中的两项的 x 均分属于不同的区间上, 前者是 $x \geq 0$, 后者是 $x < 0$; 当 $x \geq 0$ 时后者为 0, 当 $x < 0$ 时前者为 0; 同样也适用于 $t \leq \frac{|x|}{a}$ 的情况】——以上结论可在推导两个 u 的过程中自然而然发现。

不过我们还是推一下吧。这相当于另一种分类方法, 我们之前也可以先这么给出两个 φ 和一个 ψ 在 $x \geq 0$ 和 < 0 上的表达式, 再给出 u 的。我们进行如下分类, 先对 t 进行分类, 再对 x 分类: 当 $(0 \leq) t \leq \frac{|x|}{a}$ 时

若 $x \geq 0$, 则 $x+at \geq 0$ (当然)、 $x-at \geq 0$
若 $x < 0$, 则 $x+at \leq 0$ 、 $x-at \leq 0$ (当然), 当 $t \geq \frac{|x|}{a}$ 时

若 $x \geq 0$, 则 $x+at \geq 0$ (当然)、 $x-at \leq 0$
若 $x < 0$, 则 $x+at \geq 0$ 、 $x-at \leq 0$ (当然), 此时再将它们应用到

$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \in [0, +\infty) \\ -\varphi(-x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$, $\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \in [0, +\infty) \\ -\psi(-x), x \in (-\infty, 0) \end{cases}$, 得到 $\varphi(x+at) = \begin{cases} \varphi(x+at), x \geq 0 \\ -\varphi(-x-at), x < 0 \end{cases}$, $\varphi(x-at) = \begin{cases} \varphi(x-at), x \geq 0 \\ -\varphi(at-x), x < 0 \end{cases}$; 以及

$\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \begin{cases} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq 0 \\ \int_{at-x}^{-x-at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x < 0 \end{cases}$, $t \leq \frac{|x|}{a}$
 $\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \begin{cases} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq 0 \\ \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x < 0 \end{cases}$, $t \geq \frac{|x|}{a}$ 。【其中的 $\varphi(x+at) =$

$\begin{cases} \varphi(x+at), x \geq 0 \\ \varphi(x+at), x < 0 \end{cases}$, $t \geq \frac{|x|}{a}$ 与 $\varphi(x-at) = \begin{cases} -\varphi(at-x), x \geq 0 \\ -\varphi(at-x), x < 0 \end{cases}$, $t \geq \frac{|x|}{a}$ 并不在各自内部满足 $\varphi(x+at) = -\varphi(-x+at)$ 和 $\varphi(x-at) = -\varphi(-x-at)$, 但它们加起来满足 $\varphi(x+at) + \varphi(x-at) = -\varphi(-x+at) - \varphi(-x-at)$, 这也就是之前我们所说的“交叉配对”, 这并不影响的 u 、 φ 的奇函数性质】

当然, 更完整 or 简洁地, 我们将以上的公式总结成以 x 为条件来判断的样式:

$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq at \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, 0 \leq x \leq at \\ \frac{1}{2} [-\varphi(at-x) - \varphi(-x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{-x-at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \leq -at \\ \frac{1}{2} [-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, -at \leq x < 0 \end{cases}$; $\varphi(x+at) =$

$$\begin{cases} \varphi(x+at), x \geq at \\ -\varphi(-x-at), x \leq -at \\ \varphi(x+at), 0 \leq x \leq at \\ \varphi(x+at), -at \leq x < 0 \end{cases}, \varphi(x-at) = \begin{cases} \varphi(x-at), x \geq at \\ -\varphi(at-x), x \leq -at \\ -\varphi(at-x), 0 \leq x \leq at \\ -\varphi(at-x), -at \leq x < 0 \end{cases}; \text{以及} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi$$

$$d\xi = \begin{cases} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq at \\ \int_{at-x}^{-x-at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \leq -at \\ \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, 0 \leq x \leq at \\ \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, -at \leq x < 0 \end{cases}.$$

在空间的分布。而之前以 t 为判据，容易确定某一固定点 x_0 的波形，随时间的变化。

所描绘的图景：若我们像例 1. 一样，考虑各点初速度 $u_t|_{t=0} = \psi(x) = 0 (-\infty < x < \infty)$

【这来源于 $u_t|_{t=0} = \psi(x) = 0 (0 \leq x < \infty)$ ，加上 $\psi(x)$ 是 $\psi(x)$ 的奇延拓所得来的】，对应全区间上的 $u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]$ 、以及 $x > 0$ 区间上的：

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)], t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(at-x)], t \geq \frac{x}{a} \end{cases}; \text{并设初始位移 } u|_{t=0} = \varphi(x) \text{ 在 } x \geq 0 \text{ 时，即这里}$$

的 $u|_{t=0}$ 所对应的 $\varphi(x)$ ，与之前那里的 $\varphi(x)$ 在 $x \geq 0$ 上的表达式相同。则此时的 $\varphi(x)$ 负半轴的图像由其在正半轴上的图像关于原点中心对称/旋转 180° 得到。——此时若我们将 (x_1, x_2) 的左端点 x_1 取在 x 轴正半轴，则当 $t=0$ 时，由于 $t \leq \frac{x}{a}$ ，对应

$u(x, 0) = \varphi(x) = \varphi(x)|_{x \geq 0}$ ，也就画出了 $\varphi(x)$ 在 $x \geq 0$ 上的图像(一个三角形小山包)，作为 $t=0$ 时刻的 $u(x)$ 的图像。

然后我们还是用 $u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)]$ 这个来考虑吧...，此时 $t=0$ 时刻的 $u(x)$ 的图像为 $\varphi(x)$ 在全区间上的图像，即 (x_1, x_2) 处的 $\varphi(x)$ 和 $(-x_2, -x_1)$ 处的 $-\varphi(-x)$ 。

之后，全区间上的 $u(x, t)$ 图像为 $x > 0$ 的 $\begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)], t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+at) - \varphi(-x+at)], t \geq \frac{x}{a} \end{cases}$ ，以及 $x < 0$ 的

$\begin{cases} \frac{1}{2} [-\varphi(-x+at) - \varphi(-x-at)], t \leq -\frac{x}{a} \\ \frac{1}{2} [-\varphi(-x+at) + \varphi(x+at)], t \geq -\frac{x}{a} \end{cases}$ 。——即 $t \leq \frac{|x_1|}{a}$ 时， $\varphi(x-at) \neq 0$ 的 x (即 $t=0$ 时

$\in (-x_2, -x_1)$ 或 (x_1, x_2) 的 x 们；或者说 $t=t$ 时 $\in (-x_2+at, -x_1+at)$ 或 (x_1-at, x_2-at) 的自变量 $x-at$ 、 $x+at$ 们均满足 $t \leq \frac{|x|}{a}$ ，那么此时， $\frac{1}{2} \varphi(x-at)$ 这个由 $\frac{1}{2} \varphi(x-at)$ 和它的中心对称 $-\frac{1}{2} \varphi(-x+at)$ 两部分组成的波，前者在 x 正半轴向右移，后者在左端向左移，它们均离 $x=0$ 越来越远；而 $\frac{1}{2} \varphi(x+at)$ 这个由 $\frac{1}{2} \varphi(x+at)$ 和 $-\frac{1}{2} \varphi(-x-at)$ 组成的波，前者在右端向左移，后者在左端向右移，它们均离 $x=0$ 越来越近。

而 $\frac{|x_1|}{a} \leq t \leq \frac{|x_2|}{a}$ 时：对于 $\frac{1}{2} \varphi(x+at)$ 而言，原先在 $(-x_2, -at)$ 和 (at, x_2) 上的 x 们，即现在在 $(-x_2+at, 0)$ 和 $(0, x_2-at)$ 的 $x+at$ 、 $x-at$ 们【或者说原先在 $(-\infty, -at)$ 和 $(at, +\infty)$ 上的 x 们，即现在在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 的 $x+at$ 、 $x-at$ 们】，满足 $t \leq \frac{|x|}{a}$ (x 是个

变量， t 为常数)，因而这部分 x 满足 $\frac{1}{2} \varphi(x+at) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi(x+at), x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \varphi(-x-at), x < 0 \end{cases}, \frac{1}{2} \varphi(x-$

$$at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), x < 0 \end{cases}, \text{ 也就是说, 在这一 } t \text{ 时刻(而不是在接下来的一段 } t \in [t, \frac{|x_2|}{a}] \text{ 内), 两个子波的波形分别为: } \frac{1}{2}\varphi(x+at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at), x > at \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x-at), x < -at \end{cases}, \frac{1}{2}\varphi(x-at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), x > at \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), x < -at \end{cases}.$$

其中的 $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ 我们并不关心, 因为它的两个分支已经越跑越远了。但此时 $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 又在 $x > at$ 、 $x < -at$ 上没有值或值=0(除非 (x_1, x_2) 区间长度 $> at$)【其实我们非常希望 $-\frac{1}{2}\varphi(-x-at)$ 能在区间内的】。我们接着看:

而原先在 $[-at, -x_1]$ 和 $(x_1, at]$ 上的 x 们, 即现在在 $[0, -x_1+at]$ 和 $(x_1-at, 0]$ 的 $x+at$ 、 $x-at$ 们【或者说原先在 $[-at, 0]$ 和 $(0, at]$ 上的 x 们, 即现在在 $[0, at]$ 和 $(-at, 0]$ 的 $x+at$ 、 $x-at$ 们】, 满足 $t \geq \frac{|x|}{a}$, \therefore 这部分 x 满足 $\frac{1}{2}\varphi(x+at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at), x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), x < 0 \end{cases}$, $\frac{1}{2}\varphi(x-at) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), x < 0 \end{cases}$, 即 $\frac{1}{2}\varphi(x+at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at), 0 < x < at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), -at \leq x < 0 \end{cases}$, $\frac{1}{2}\varphi(x-at) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), 0 < x < at \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), -at \leq x < 0 \end{cases}$ 。我们同样不关心 $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$, 因为它在 $[-at, at]$ 上没有值, 或者说值=0(除非 $x_1 < 0$); 此时 $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 在 $[-at, at]$ 上的值为 $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 。

我们将四个结果加起来, 得到区间长度 $(x_1, x_2) < at$ 时, $\frac{|x_1|}{a} \leq t \leq \frac{|x_2|}{a}$ 时的解

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), -at < x < at, \text{ 这个结果很奇怪: 它是个奇函数么(因为我们丢去了 } \frac{1}{2}\varphi(x+at) \text{ 的 partner: } -\frac{1}{2}\varphi(-x+at)=0)? \text{ ——估计我们之前的假设有问题, 还漏了这一点东西: } \varphi(x) \text{ 应该是之前全区间上的 } \varphi(x) \text{ 的中心对称图形加上 } \varphi(x) \text{ 自身, 而不仅仅是对 } > 0 \text{ 部分的 } \varphi(x) \text{ 的中心对称加上 } > 0 \text{ 部分的 } \varphi(x), \text{ ——但是这样一来 } \varphi(x) \text{ 就不是函数了(同一 } x \text{ 处有两函数值), 所以我们之前那样初设想是符合逻辑的。不过如果这样的话, 这个问题就能解决。; 取 } x > 0 \text{ 的部分后, 得到 } u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), 0 < x < at \end{cases}.$$

此时要是加一个 $\frac{1}{2}\varphi(x+at) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at), 0 < x < at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), -at \leq x < 0 \end{cases}$, 在 < 0 下的 $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$, $-at \leq x < 0$, 的中心对称: $-\frac{1}{2}\varphi(-x-at), at \geq x > 0$, 就有

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at) - \frac{1}{2}\varphi(-x-at), 0 < x < at \end{cases}, \text{ 这就是 } (x_1, x_2) < at \text{ 且 } \frac{|x_1|}{a} \leq t \leq \frac{|x_2|}{a} \text{ 时的}$$

解 $u(x, t)$ 。由下面的过程可知，也是 $t \geq \frac{|x_2|}{a}$ 时的解。——端点的影响表现为反射波，且反射波的相位与入射波的相反，这就是半波损失。

一般地，有 $u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at), & x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at) - \frac{1}{2}\varphi(-x+at), & -at < x < at, \text{ 只不过当 } \frac{|x_1|}{a} \leq t \leq \frac{|x_2|}{a} \text{ 时且区间长度 } (x_1, x_2) < at \text{ 时, 退化掉了其中的三个: } \frac{1}{2}\varphi(x+at), -\frac{1}{2}\varphi(-x+at) \text{ (第一个)、} -\frac{1}{2}\varphi(-x-at); \text{ 而当 } t \leq \frac{|x_1|}{a} \text{ 时, 只退化了 } -\frac{1}{2}\varphi(-x+at) \text{ 【即 } \frac{1}{2}\varphi(x-at) \text{ 已经跑远了, 在 } [-at, at] \text{ 上没有值】}, \text{ 得到 } u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2}\varphi(x-at), & x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), & -at < x < at \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x-at) - \frac{1}{2}\varphi(-x+at), & x < -at \end{cases}; \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at) \text{ (第一个)、} -\frac{1}{2}\varphi(-x+at) \text{ 仍没有, 而 } (x_1, x_2) \text{ 区间长度 } < at + 2(x_1, x_2) \text{ 时, 即一定有 } \frac{1}{2}\varphi(x+at) \text{ (第一个)、} -\frac{1}{2}\varphi(-x-at) \text{ 均} = 0 \text{ 【即 } \frac{1}{2}\varphi(x+at) \text{ 追不上俩开区间, 在 } x > at, x < -at \text{ 上没有值】}, \text{ 于是 } u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-at), & x > at \\ \frac{1}{2}\varphi(x+at), & -at < x < at \\ -\frac{1}{2}\varphi(-x+at), & x < -at \end{cases}.$

2. 半无限长的杆的自由振动，杆的端点自由，不受力 $u_x|_{x=0}=0$ ：

微分方程： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < \infty)$ ；**初始条件：** $u|_{t=0} = \varphi(x)$ 、 $u_t|_{t=0} = \psi(x) (0 \leq x < \infty)$ ；**边界条件：** $u_x|_{x=0} = 0$ 。【 $x=0$ 点处，只规定了纵向相对伸长量固定 $=0$ （这并没有规定 $x=0$ 处的纵向初速度 $u_t(0, t)|_{t=0} = 0$ ，也就没有要求初始条件中 $\psi(0)=0$ ），并且对各个时刻 $x=0$ 点处的初始纵向位移并没有做规定，所以边界条件也没要求 $\varphi(0)=0$ 】

同样设根无限长杆，拥有相同的微分方程形式 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (-\infty < x < \infty)$ ，以及相同的 $x \geq 0$ 的初始条件和边界条件【这就要求 $u_x|_{x=0} = 0$ ，而能保证该条件的 u ，其对 x 的导函数 u_x 为奇函数，则 u 对于 x 必须与 t 无关地一致为偶函数；因而 u 的微分方程所具有的初始条件 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 除了要在 $x \geq 0$ 上与 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 一致以外，还因 $t=0$ 时刻的 $u(x, 0) = \frac{1}{2}[\varphi(x+0) + \varphi(x-0)] + \frac{1}{2a} \int_{x-0}^{x+0} \psi(\xi) \cdot d\xi$ 也关于 x 为偶函数，即 $u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi_0(x), & x < 0 \end{cases}$ 得是偶函数，而 $\varphi(x)$ 不得不是偶函数[这没法约束 $\psi(x)$]]。

【当然，其实既然 $u(x, t) = u(-x, t)$ ，其通解也应满足 $\frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2}[\varphi(-x+at) + \varphi(-x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{-x+at} \psi(-\xi) \cdot d\xi$ ，而设若 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 分别是偶函数，即可得到 $\varphi(x+at) + \varphi(x-at) = \varphi(-x+at) + \varphi(-x-at)$ ，这与偶函数的假设吻合：交叉配对即可： $\varphi(x+at) = \varphi(-x-at)$ ， $\varphi(x-at) = \varphi(-x+at)$ ；另外，你也可以严格证明 $\varphi_0(x) = \varphi(-x)$ 、 $\psi_0(x) = \psi(-x)$ ，再得出 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 、 u 对 x 是偶函数：

由于对于任意 t 都得满足 $u_x|_{x=0}=0$, 那么 $x \geq 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 的这个 u 解也该满足 $u_x|_{x=0}=0$, 于是就得到了 $\frac{1}{2}[\varphi'(at) + \varphi'_0(-at)] + \frac{1}{2a}\psi(at) - \frac{1}{2a}\psi_0(-at)=0$, 若令 $\varphi_0(x)=\varphi(-x)$, 则 $\varphi'_0(x)=-\varphi'(-x)$, $\varphi'_0(-x)=-\varphi'(x)$, 于是 $\frac{1}{2}[\varphi'(at) + \varphi'_0(-at)]=0$; 同样, 若令 $\psi_0(x)=\psi(-x)$, 则 $\psi_0(-x)=\psi(x)$, 则 $\frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi_0(-at)]=0$, 也就满足了 $x \geq 0$ 、 $t > \frac{x}{a}$ 时候的 u 解对 x 的导数 u_x , 在 $x=0$ 时 $=0$, 并用这个得到了 $\varphi_0(x)$ 、 $\psi_0(x)$ 的一种可能的表达式】

$$\begin{aligned}
 &\text{于是 } \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \geq 0 \\ \varphi(-x), x < 0 \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \geq 0 \\ \psi(-x), x < 0 \end{cases}. \text{ 根据当 } (0 \leq) t \leq \frac{|x|}{a} \text{ 时} \\
 &\begin{cases} \text{若 } x \geq 0, \text{ 则 } x+at \geq 0 \text{ (当然)}, x-at \geq 0 \\ \text{若 } x < 0, \text{ 则 } x+at \leq 0, x-at \leq 0 \text{ (当然)} \end{cases}, \text{ 当 } t \geq \frac{|x|}{a} \text{ 时,} \\
 &\begin{cases} \text{若 } x \geq 0, \text{ 则 } x+at \geq 0 \text{ (当然)}, x-at \leq 0 \\ \text{若 } x < 0, \text{ 则 } x+at \geq 0, x-at \leq 0 \text{ (当然)} \end{cases}, \text{ 可得到 } \varphi(x+at) = \begin{cases} \varphi(x+at), x \geq 0 \\ \varphi(-x-at), x < 0 \end{cases}, t \leq \frac{|x|}{a} \\
 &\varphi(x-at) = \begin{cases} \varphi(x-at), x \geq 0 \\ \varphi(-x+at), x < 0 \end{cases}, t \leq \frac{|x|}{a}; \text{ 以及} \\
 &\varphi(x-at) = \begin{cases} \varphi(x-at), x \geq 0 \\ \varphi(-x+at), x < 0 \end{cases}, t \geq \frac{|x|}{a} \\
 &\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi = \begin{cases} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq 0 \\ -\int_{x-at}^{x+at} \psi(-\xi) \cdot d(-\xi), x < 0 \end{cases}, t \leq \frac{|x|}{a} \\
 &= \begin{cases} \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi - \int_{x-at}^0 \psi(-\xi) \cdot d(-\xi), x \geq 0 \\ \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi - \int_{x-at}^0 \psi(-\xi) \cdot d(-\xi), x < 0 \end{cases}, t \geq \frac{|x|}{a} \\
 &= \begin{cases} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq 0 \\ \int_{-x-at}^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, x < 0 \end{cases}, t \leq \frac{|x|}{a} \\
 &= \begin{cases} \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, x \geq 0 \\ \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, x < 0 \end{cases}, t \geq \frac{|x|}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{于是, } x \geq 0 \text{ 时,} \\
 &u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi, t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(-x+at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, t \geq \frac{x}{a} \end{cases}; \quad x < 0 \\
 &\text{时: } u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(-x-at) + \varphi(-x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x-at}^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, t \leq -\frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(-x+at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(\xi) \cdot d\xi, t \geq -\frac{x}{a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

或者也可统一写成之前那样关于 x 的分类标准。

这也是一种反射波, 不同的是, 反射波的相位跟入射波的相同, 没有半波损失。

(三).定解问题是一个整体

从偏微分方程解出达朗贝尔公式的过程，与常微分方程的求解过程是类似的，即先求出通解，再利用定解条件确定待定函数，继而定解。

但绝大多数偏微分方程很难求得通解。并且即使已经求得通解，通过定解条件确定其中的待定函数，仍然非常困难。——达朗贝尔公式是一类极少的例外，从数学的角度来说，不可能先求偏微分方程的通解，然后再考虑定解条件。——必须同时考虑泛定方程和定解条件，来进行求解。所以说，定解问题是一个整体。

(四).定解问题的适定性

若定解问题来源于实际，则它的解也应有实际意义。所以定解问题必须(1).有解(2).解是唯一的(3).解是稳定的。满足以上三个条件，就称为**适定的**。

关于**解的稳定性**：如果定解条件的数值有细微的改变，则解的数值也应该只作细微的改变。下面举一个伟人犯的错误，它之所以被他称为他所犯过的最严重的错误，并非是因为该错误本身的严重性，而是他针对该错误所进行的下一步行动的错误性。

弱核力、强核力、电磁力、引力，其中只有引力能决定宇宙的演化。因为弱核力和强核力均是短程力，而电磁力因电荷在宏观尺度上等量且均匀分布，也不是决定宇宙演化的决定性因素。只有引力，这个弱得不行的力，却能决定宇宙的演化。

爱因斯坦，在 1916 年提出了一个服务于解释引力的理论——广义相对论后，发现如果不引入一个常数，宇宙若按照广义相对论所描绘物理情景的演化，则最终会塌缩。由于哈勃的工作得在 1929 年之后、加上旧有时空观的限制，爱因斯坦首先否定了宇宙会因引力而塌缩，其次希望从方程中得出宇宙是静态的。为此，爱因斯坦引入了宇宙学常数，并且将其值设置得恰到好处，使得宇宙在他笔下是既不收缩又不膨胀的。

但引入宇宙学常数本身，就相当于引入了斥力。为什么这样的斥力刚刚好与引力相互抵消呢？——若物质差了那么点，引力稍弱，则同样的宇宙学常数下的宇宙，岂不是会(一直?)膨胀下去？而若物质多了那么点，则同样的宇宙学常数，宇宙岂不是会塌缩？同样，正如物质分布以迎合宇宙学常数一样，为什么宇宙学常数被设置得这么恰到好处以至于就是这个值，来迎合物质分布呢。

所以，静态宇宙是不稳定的，所以不会是现实的情景。——但又没有观察到宇宙塌缩，那么爱因斯坦应该立马想到，以及预言，宇宙是膨胀的。——这样的话，13 年后的诺贝尔奖，就指年可待了。当然，爱因斯坦可不是因与奖项失之交臂而后悔，而

是后来他觉得自己的理性理应帮助自己意识到这个问题，而不是继续维护稳态这个压根(反而)不稳定的解。

达朗贝尔解是唯一的，因为我们给出了它的形式。可以证明它也是稳定的。所以它是适定的。这本书中研究的问题，大多都是适定的。

第八章 分离变数法

先求泛定方程的通解的办法只适用于很少数的某些定解问题。这里的分离变数法(又称为傅里叶级数法，因为解的形式是个级数)，却比以达朗贝尔公式为代表的求解过程适用范围广得多，但是仍有适用范围：边界条件得是齐次的。

基本思想为把偏微分方程分解为几个常微分方程，其中有一部分常微分方程带有附加条件而构成本征值问题。这一章仅限于本征函数为三角函数的情形。

8.1 齐次方程的分离变数法

(一).第一类边界问题

(方程齐次，边界条件也齐次，但边界条件不同的两类问题)

先研究两端固定的均匀弦的自由横振动：泛定方程： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l)$ ；初始条件： $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l)$ ；边界(齐次)条件： $\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases} [\varphi(0) = \varphi(l) = 0]$ 。

7.4 已指出端点会引起波的反射(两种形式)。这里研究的弦是有限长的，有两个端点，波就在二者之间往复反射。两列反向行进的同频率的波，形成驻波。这就启发我们尝试类比驻波的解，来设立尝试解。

振幅最大处称为波腹，振幅最小处称为波节。驻波没有波形传播现象，即各点振动相位，并不随着 x 的改变而改变，它们总是同时达到最大 or 最小值(一部分最小一部分最大；以节点为分界点，相邻节点之间间隔为半波长，可以用波动叠加来得到)，不过振幅 X 随 x 而异，且包含正负号；于是 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 。

将该尝试解代入泛定方程, 得到 $X T_{tt} - a^2 X_{xx} T = 0$, 写作 $X T'' - a^2 X'' T = 0$. 分离变量得 $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$, 因此 $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$; 将尝试解代入边界(齐次)条件, 得到 $\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$, 由于 $T(t)$ 不可能对于任意 t 都为 0, 因此 $X(0)=X(l)=0$.

于是得到了关于 X 的常微分方程、齐次条件 $X(0)=X(l)=0$, 以及 T 的常微分方程:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \end{cases}, \begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ \begin{cases} X(x)T(0) = \varphi(x) \\ X(x)T'(0) = \psi(x) \end{cases} \end{cases}$$

先解 X (为了满足齐次条件, 以后将知道其中 λ 为实数且 ≥ 0), 分 $\lambda < 0$ 、 $\lambda = 0$ 、 $\lambda > 0$ 三种情况:

$\lambda < 0$: 常微分方程的解: $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$; 代入齐次条件 $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$, 得到 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$, 从 $C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$ 可得 $C_1 = C_2 = 0$. 于是 $X(x) \equiv 0$, 于是 $u(x, t) \equiv 0$, 无意义, 舍去.

$\lambda = 0$: 常微分方程的解: $X(x) = C_1 x + C_2$; 代入齐次条件 $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$, 得到 $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 l + C_2 = 0 \end{cases}$, 得 $C_1 = C_2 = 0$. 舍去.

$\lambda > 0$: 常微分方程的解: $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$; 代入齐次条件 $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$, 得到 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$, 若 $\sin \sqrt{\lambda}l \neq 0$, 得 $C_1 = C_2 = 0$, 舍去; 所以 $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ 、 $C_2 \neq 0$, 于是 $\sqrt{\lambda}l = n\pi$ (其中 $l > 0$, 因此 $n = 1, 2, 3, \dots$), 得到 $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, 连同 $C_1 = 0$ 带回, 得 $X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l}x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 由于, 方程 $X'' + \lambda X = 0$ 和条件 $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$ 都是线性且齐次的, 因此解的线性组合仍满足方程和边界条件, 于是 $X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.
—— $\sin \frac{n\pi x}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 正是傅里叶正弦级数的基本函数族(它们都是线性无关的).

以上分离变量法所引入的常数 λ , 不能是负数、0、或任意正数, 它必须取特定数值, 对应齐次条件下的方程才能有有意义的解. 常数 λ 的这种特定数值, 叫做本征值. 引入的 λ 所对应的解, 叫做本征函数. 方程与条件所构成的定解问题, 称为本征值问题. ——从另一个角度, 将之前的 $\frac{X''}{X} = -\lambda$ 写作 $-\frac{d^2}{dx^2} X = \lambda X$, 一个算符 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 作用于一个函数 $X =$ 一个常数 λ 与这个函数 X 的乘积, 则这个函数 X 叫做这个算符 \hat{H} 的本征函数, 常数 λ 叫本征值.

这有点像线性代数中的特征值与特征向量: $A\xi = \lambda\xi$, 得到 $(A - \lambda E)\xi = 0$, 解它可得 λ 与对应的 ξ . 这就是离散情况下的、有限维的. 而函数所满足的特征方程, 是连续的、无穷多维的.

代入 λ , T 的方程变为 $T'' + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 T = 0$, 得 $T(t) = A \cos \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} + B \sin \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 t}$, 并且有 $T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})]$ 【虽方程是齐次的之余, 条

件并不是齐次的, 但我们可以使这个线性叠加的解, 整体上去满足那个条件, 而不是每个 n 所对应的 $T_n(x)$ 都满足初始条件】。于是对于 $n=1,2,3,\dots$, $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n \sin \frac{n\pi x}{l} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] = [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \sin \frac{n\pi x}{l}$ 。——因此 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \sin \frac{n\pi x}{l}$ 。

代入初始条件 $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l)$ 而不是 $\begin{cases} X(x)T(0) = \varphi(x) \\ X(x)T'(0) = \psi(x) \end{cases}$, 得

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l), \text{ 利用三角函数族的正交性(只在 } -l \sim l \text{ 上正交, 因此初始条件和 } u \text{ 本身都得奇延拓并取 } -l \sim l \text{ 的积分上下限, 下面就是个 bad example, 虽然结果是对的), 用 } \sin \frac{n\pi x}{l} \text{ 分别乘以两边并对 } x \text{ 积分(可使用之前的公式 } \int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = l; \text{ 并且可看出 } \varphi(x)、\psi(x) \text{ 都是个奇函数(} \times \text{wrong}), \text{ 因而有诸如 } \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \frac{l}{2}, \text{ 和 } \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx, \text{ 得}$$

$$\begin{cases} A_n \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \\ B_n a \frac{n\pi}{l} \frac{l}{2} = \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \end{cases}, \text{ 于是 } \begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \\ B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \end{cases} \text{。【不能说 } \varphi(x)、\psi(x) \text{ 是奇函数: 由于 } \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \text{ 对 } x \text{ 是奇函数, 得将 } \varphi(x) \text{ 也奇延拓成 } \varphi(x), \text{ 再将 } \varphi(x) \text{ 傅里叶展开。】}$$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \sin \frac{n\pi x}{l}$, 即为两端固定的弦上的可能的驻波, 每一个 n 对应于一种驻波(也相当于每一个 λ 对应一种驻波), 这些驻波也叫做两端固定弦的本征振动。——令 $\sin \frac{n\pi x}{l}$ 中 $\frac{n\pi x}{l} = k\pi$, 得 $x = \frac{kl}{n} (k=0,1,\dots,n; 0 < x < l)$, 共 $n+1$ 个点为驻波的节点。而相邻节点之间间隔 $\frac{l}{n}$ 为半波长, 所以波长 $\lambda = \frac{2l}{n}$, 注意这与 $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ 不同; 本征振动的圆频率 ω 为 $\frac{k}{u} = \frac{k}{a} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{a} = \frac{\frac{2\pi}{\frac{2l}{n}}}{a} = \frac{n\pi a}{l}$, 也可通过 $T_n(x)$ 的表达式直接看出, 这进一步说明了 a 是波速, 从而频率 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{na}{2l}$ 。

$n=1$ 的驻波只有俩节点($k=0,1$), 它的波长最长 $=2l$, 频率 $\frac{a}{2l}$ 最低, 这个驻波叫基波; $n>1$ 的各个驻波分别称为 n 次谐波, 波长为基波的 $1/n$, 频率为基波的 n 倍。一般而言, 基波的能量所占比例最大(在求解过程中, 我们把振幅项 $X_n(x)$ 的振幅 C_n 并入了 A_n, B_n 中, 因此对于各个 n , 算出的 A_n, B_n 大小, 矢量合成后再乘上 $\sin \frac{n\pi x}{l}$, 平方后即可得到的 n 次谐波的能量)。

可以发现, A_n, B_n 取决于初始状态, 和材料没关系, 因此如果各种弦乐器的弦的 l 是相同的, 且弦(的材质和形状等)是相同的(即波速 a 是相同的), 那么每个弦乐器的 $u(x,t)$ 应该都相同。但它们的音色仍然不同, 这是因为弦的两端并不是完全固定的, 其两端的振动与周围的材料有关, 且弦乐器的共振箱设计也不同。

(二).第二类齐次边界问题

再研究两端自由棒的自由纵振动：**泛定方程**： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l)$ ；**初始条件**： $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l)$ ；**边界(齐次)条件**： $\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$ 。

将该**尝试解** $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入**泛定方程**，得到 $XT'' - a^2 X''T = 0$ ，分离变量得 $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ ；将**尝试解**代入**边界(齐次)条件**，得到 $\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X'(l)T(t) = 0 \end{cases}$ ，因此 $X'(0)=X'(l)=0$ 。

于是得到了关于 X 的**常微分方程**、**边界(齐次)条件**，以及 T 的常微分方程：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$
、 $T'' + \lambda a^2 T = 0$ 。先解 X (这个本征值问题是 9.4 **施图姆-刘维尔本征值问题**的一种，本征值 λ 为非负实数，这里认为 λ 为实数)，分 $\lambda < 0$ 、 $\lambda = 0$ 、 $\lambda > 0$ 三种情况：

$\lambda < 0$ ：**常微分方程**的解： $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ ；代入**齐次条件** $\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ ，
 得到 $\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_1 - \sqrt{-\lambda}C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$ ，从 $C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$ 可得 $C_1 = C_2 = 0$ 。舍去。

$\lambda = 0$ ：**常微分方程**的解： $X(x) = C_1 x + C_2$ ；代入**齐次条件** $\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ ，得到 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$ ，
 得 $X(x) = C_2$ 。这是对**应本征值** $\lambda = 0$ 的**本征函数** $X(x) = X_0(x) = C_0$ 。

$\lambda > 0$ ：**常微分方程**的解： $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ ；代入**齐次条件** $\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$ ，
 得到 $\begin{cases} -\sqrt{\lambda}C_2 = 0 \\ -\sqrt{\lambda}C_1 \sin \sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}C_2 \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$ ， $\sqrt{\lambda} \neq 0$ ，则 $C_2 = 0$ ，于是 $C_1 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ 。若 $\sin \sqrt{\lambda}l \neq 0$ ，得 $C_1 = C_2 = 0$ ，舍去；所以 $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ 、 $C_1 \neq 0$ ，于是 $\sqrt{\lambda}l = n\pi (n=1,2,3\dots)$ ，得到 $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ ，
 连同 $C_2 = 0$ 带回，得 $X(x) = C_1 \cos \frac{n\pi}{l}x (n=1,2,3\dots)$ ，写作 $X_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi}{l}x$ 。

代入 λ 可取的值之一： $\frac{n^2 \pi^2}{l^2} (n=1,2,3\dots)$ ， T 的方程变为 $T'' + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 T = 0$ ，得 $T(t) = A \cos \frac{n\pi a}{l}t + B \sin \frac{n\pi a}{l}t$ ，写作 $T_n(t) = A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l}) (n=1,2\dots)$ ；而代入 λ 可取的值 0，则 T 的方程变为 $T'' = 0$ ，得 $T(t) = T_0(t) = A_0 + B_0 t$ 。——于是当 $\lambda > 0$ 即 $n > 0$ 时， $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi}{l}x [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] = [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \cos \frac{n\pi x}{l} (n=1,2,3\dots)$ ；当 $\lambda = 0$ 时[即 $n = 0$ 时， λ 可看作 $\frac{n^2 \pi^2}{l^2} (n=0,1,2\dots)$]，
 $u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = C_0 \cdot (A_0 + B_0 t) = A_0 + B_0 t$ 。——因此 $u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \cos \frac{n\pi x}{l}$ 。

代入**初始条件** $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l)$ 得 $\begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \\ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} = \psi(x) \end{cases} (0 < x < l)$ ，利用**三角函数族**的正交性，用 $\cos \frac{n\pi x}{l}$ 分别乘以两边并对 x 积分；或者将 $[0, l]$ 上

的函数 $\varphi(x)$ 偶延拓且周期延拓成 $\varphi(x) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot dx + \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx] \cos \frac{n\pi x}{l}$
 傅里叶余弦级数, 比较系数, 得 $\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot dx \\ A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \end{cases}$ 、同样得:
 $\begin{cases} B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot dx \\ B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \end{cases}$ 有 $\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot dx \\ B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot dx \end{cases}$ $\begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \\ B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx \end{cases}$ 。

其中, $u(x,t)$ 中的 $A_0 + B_0 t$ 部分描写杆的整体移动, 其余部分才描写杆的纵振动。

从 $\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot dx \\ B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot dx \end{cases}$ 可知 A_0, B_0 分别表示平均初始位移, 和平均初始速度。

(三).第一、二类齐次边界条件混合问题

细杆导热问题: 初始时刻, 一端温度=0(之后保持不变), 一端温度为 u_0 (之后与外界绝热, 但不一定温度保持不变), 杆上温度梯度均匀(之后如何不清楚)。泛定方程:

$u_t - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l)$; 初始条件: $u|_{t=0} = \frac{u_0}{l} x (0 < x < l)$; 边界(齐次)条件:
 $\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$ 【梯度在 $t=0$ 对各 x 是常数 $\frac{u_0}{l}$; 绝热意味着无热流, 即 $q = -\nabla u = 0$, 即 $u_x = 0$ 】

泛定方程和边界条件都是齐次的, 因此仍应用分离变数法设 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入得到 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, T' + \lambda a^2 T = 0 (T'' \rightarrow T') \\ X'(l) = 0 \end{cases}$; 仍利用 $X(x)$ 的本征方程求本征值: 实数 $\lambda \leq 0$, 分别对应 e 指数解和一次函数解, 舍去; $\lambda > 0$ 对应三角函数解 $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$, 代入俩边界条件, 得到 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0, C_2 \neq 0 \end{cases}$ 得到 $\sqrt{\lambda} l = (\frac{1}{2} + n)\pi$ ($n=0,1,2,\dots$), 本征值 $\lambda = \frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2}$ ($n=0,1,2,\dots$)。相应本征函数为 $X_n(x) = C_n \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x$, ($n=0,1,2,\dots$)。【还能这么理解本征函数: 若细杆长 $2l$, 且补充边界条件 $u|_{x=2l} = 0$, 则新的两个边界条件 $\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=2l} = 0 \end{cases}$ 导致的 $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(2l) = 0 \end{cases}$ 决定了本征函数为像之前第一类边界问题一样的奇函数 $C_n \sin \frac{n\pi x}{2l}$, 而 $u_x|_{x=l} = 0$ 对应的 $X'(l) = 0$ 却使得 $C_n \sin \frac{n\pi x}{2l}$ 中为 n 奇数 $1 + 2k$ 】

再代入 T 的方程得: $T' + \frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2} a^2 T = 0$, 解得 $T_n(t) = C'_n e^{-\frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2} a^2 \cdot t}$, ($n=0,1,2,\dots$)。得到解 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2} a^2 \cdot t} \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x$ 。代入初始条件 $u|_{t=0} = \frac{u_0}{l} x$, 可得 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x = \frac{u_0}{l} x (0 < x < l)$ 。——这提示我们也应将 $\frac{u_0}{l} x$ 展开为傅里叶正弦级数, 并且其中的基本函数族, 还得是 $\sin \frac{(1+2n)\pi}{2l} x$, 这其实是公共周期为 $4l$ 的基本函数族的

一部分，因此互异的两者也正交；但我们并不需要因此算 $[-2l, 2l]$ 的积分，只需要用它解释“ n 不同的二者正交”这个结论即可。【不对，正交也只是在 $[-2l, 2l]$ 上才正交】

我们还是利用“筛选性”吧，将 $\frac{u_0}{l}x$ 奇延拓后(还是 $\frac{u_0}{l}x$)周期延拓，两边乘以对应的 $\sin \frac{(1+2n)\pi}{2l}x$ 并积分(利用 $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = l$): $C_n 2l = \int_{-2l}^{2l} \frac{u_0}{l}x \cdot \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l}x \cdot dx$, 利用 $x \sin x$ 为偶函数，可将其写为 $C_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} \frac{u_0}{l}x \cdot \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l}x \cdot dx$, 最终得到 $C_n = (-1)^n \frac{2u_0}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}$ 。于是 $u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} e^{-\frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2} a^2 \cdot t} \sin \frac{(1+2n)\pi}{2l}x$ 。

若 $t < 0$ ，则 $T_n(t)$ 或者说 $e^{-\frac{(1+2n)^2 \pi^2}{4l^2} a^2 \cdot t}$ 因级数中 n 的增大而增加，导致级数发散。这意味着末态($t=0$)**无法反推**初态($t < 0$)，有很多种初态($t < 0$)可以到达同一末态($t=0$)

【这与初态($t=0$)→末态($t \rightarrow \infty$)类似；这里的初态是指初始条件 $u(x, < 0)$ 或 $u(x, 0)$ ，末态是指 $u(x, 0)$ 或 $u(x, \infty)$ 】。可以检验 $t > 0$ 时候 $u(x, t)$ 是绝对收敛的。

(四).稳定场问题一

(方程齐次，边界条件不全齐次)

散热片截面为矩形，上边($y=b$)处于高温 U ，其余三边($y=0, x=0, x=a$)均处于冷却介质中，温度保持 u_0 不变。

泛定方程： $u_{xx} + u_{yy} = 0 (0 < x < a, 0 < y < b)$ ；**边界条件**： $\begin{cases} u|_{x=0} = u_0 \\ u|_{x=a} = u_0 \end{cases}, \begin{cases} u|_{y=0} = u_0 \\ u|_{y=b} = U \end{cases}$ 。

拉普拉斯方程至少是二维的，其中的 u_{yy} 相当于取代了 u_{tt} 或 u_t ；稳定场问题没有初始条件，这意味着若它的边界条件全齐次（全为0），则解只有零解（：唯一性定理加上零解是可行解，则零解是唯一解；当然若边界条件是/有法向导数的话那就另说了；或者看下一段中括号部分的解释！）。

我们尽可能将边界条件化为齐次的。常用的办法是： $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ ，然后 v, w 分别满足 $v_{xx} + v_{yy} = 0, \begin{cases} v|_{x=0} = u_0 \\ v|_{x=a} = u_0 \end{cases}, \begin{cases} v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=b} = 0 \end{cases}; w_{xx} + w_{yy} = 0, \begin{cases} w|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=a} = 0 \end{cases}, \begin{cases} w|_{y=0} = u_0 \\ w|_{y=b} = U \end{cases}$ 。其中，一组**非齐次边界条件**就像之前的**初始条件**(比如可将 v 中的 x 视为 t ， v 中的 y 所对应的 Y 视为本征函数；或将 w 中的 y 视为 t ， w 中的 x 所对应的 X 视为本征函数)，而一组**齐次边界条件**即与齐次方程一同构成之前的**本征值问题**(2个齐次的边界条件+1个齐次方程，即可构成本征值问题)，这样我们仍**分离变量**，**先求齐次边界条件的本征函数和本征值**。再代本征值入另一齐次的方程，求解，综合其解和本征函数，**利用非齐次边界确定系数**。【这也是为什么我们说若它的边界条件全齐次，则只有零解：因为它有两组边界条件，其中一组相当于初始条件，若全=0，则 v, w

的那组“初始条件”般的边界条件，便全齐次，这样一来，在最终用函数族的正交性求解系数时，就得到了系数=0】

该例题还有个特殊的简便方法：令四条边的温标零点为 u_0 ，即以新的温标标记场边缘、包括场内的各点温度，那么此时新温标下的新 $u=u-u_0$ （这本质上应理解为：令 $w(x,y)=u_0$ ，则有 $u(x,y)=v(x,y)+u_0$ ，其中的 v 即为 u ），代入原式即有：泛定方程： $u_{xx} + u_{yy}=0(0<x<a, 0<y<b)$ ；边界条件： $\begin{cases} u|_{x=0}=0 \\ u|_{x=a}=0 \end{cases} \begin{cases} u|_{y=0}=0 \\ u|_{y=b}=U-u_0 \end{cases}$ 。【之后我们用 v 表示 u 】

于是分离变量 $v(x,y)=X(x)Y(y)$ ，得到 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$ （之前是 $XT_{tt} - a^2 X_{xx} T = 0$ ， $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ ，而现在是 $XY_{yy} + X_{xx} Y = 0 \rightarrow -\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ ）；对于 X 部分，该本征值问题的解为：本征值 $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} (n=1, 2, \dots)$ ，本征函数 $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{a} (n=1, 2, \dots)$ 。将本征值 λ 代入 Y 部分的方程，由于系数 $-\lambda < 0$ ，于是解为 e 指数的形式： $Y_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y}$ 。此时解 $v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y}) \sin \frac{n\pi x}{a}$ 。

代入剩余的非齐次边界条件： $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi x}{a} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}) \sin \frac{n\pi x}{a} = U - u_0 \end{cases} (0 < x < a)$ ，将 $U - u_0$ 奇延拓并周期延拓，两式的两边乘以 $\sin \frac{n\pi x}{a}$ 并积分（利用 $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = l$ ），得到 $A_n + B_n = 0$ ， $a[A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}] = \int_{-a}^0 -(U - u_0) \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \int_0^a (U - u_0) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = 2 \int_0^a (U - u_0) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2a}{n\pi} (U - u_0) [\cos \frac{n\pi x}{a}]_0^a = \frac{2a}{n\pi} (U - u_0) [1 - (-1)^n]$ ，于是 $A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} (U - u_0), n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 。

于是将 $B_n = -A_n$ 代入得， $A_n = -B_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} (U - u_0) \cdot \frac{1}{e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}}}, n \text{ 为奇数} \\ 0, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，于是得到 $v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} (U - u_0) \frac{1}{e^{\frac{(2k+1)\pi b}{a}} - e^{-\frac{(2k+1)\pi b}{a}}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}$ 。利用 $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ，那么 $u(x,y) = u_0 + \frac{2(U - u_0)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi b}{a}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}$ 。

该题无法：先将 y 的齐次泛定方程和齐次边界条件（因为其边界条件有部分不齐次），组合成本征值问题，通过 y 的方程解出本征值和本征函数 $Y(y)$ ，再解 X 和确定常数。

(五).稳定场问题二

1.极坐标系的分离变数法：带电云与大地之间的电场近似为匀强静电场。但在输电导线附近，由于感应电荷的分布而并非匀强了。若取输电导线这一圆柱的轴为 z 轴，设圆柱无限长，则静电场的 \mathbf{E} 、 φ 与 z 无关，这样的体系并非是轴对称性——在电动力学中，但 u 与 z 无关时，常采用柱坐标系的 laplace 方程 $\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ，并且其通解为 $A_0 + B_0 \cdot \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-n}] \cdot [C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)]$ ，它也可被表述为 $A_0 + B_0 \cdot \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)]$ ，后者的 A_n, B_n 是由前者的 A_n 分别乘以前者的 C_n, D_n 得到的，同理，后者的 C_n, D_n 是由前者的 B_n 分别乘以前者的 C_n, D_n 得到的。

我们的《数学物理与方程》便采用了退化了的 z 轴的柱坐标系 ($\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$)，即平面极坐标系，其下的二维拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ ，来得出了后一种表达方式。解出了通解以后，才继续利用该题的具体信息(在电动力学中，这相当于是利用：柱外无电荷区域的拉普拉斯方程，以及导线表面、无穷远处的边界条件，无边值关系)，确定方程中的各项系数的值。

在此我就不多说了，详情请见电动力学。不过这里想要说的是，电动力学中一些东西在这里的出处：1.这种具体问题中，由于边界条件为 $u|_{x^2+y^2=a^2}=0$ 的缘故，直角坐标系无法分离变量。【 $\because u(x,y)=X(x)Y(y)$ 代入微分方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ，是可以分成两个常微分方程的，正如电动力学中的直角坐标系 laplace 方程求解一样；但是若代入边界条件， $X(x)Y(\sqrt{a^2-x^2})=0$ ，无法再分解为单独关于 $X(x)$ 或 $Y(x)$ 的齐次边界条件，也就无法形成一个由齐次边界条件和对应齐次泛定方程创造的本征值问题】因此我们在电动力学中以及这里， u 被分离为 $u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$ 。

2.电动力学在求解柱坐标系、球坐标系的通解过程中，所分别引入的 n^2 、 $n \cdot (n+1)$ ，就是本征值，即符合某些要求和条件的引入的常数【其实应该说，对于分离变量后所得的 $A=B=\lambda$ ，只有其中的某方程如 $B=\lambda$ ，加上其的某种条件(边界 or 周期条件)，才构成本征值问题，且 $\lambda=n^2$ 也只属于这个问题、方程、本征函数的本征值；与另一个方程 $A=\lambda$ 并无关系】；其中，柱坐标系中的 n^2 ，便来源于分离变数后所得的其中一个方程 $\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda \Phi = 0$ 中： $\Phi(\phi) \begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda} \phi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \phi, \lambda > 0 \\ C_1 + C_2 \phi, \lambda = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} \phi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} \phi}, \lambda < 0 \end{cases}$ 得满足自然的周期条件

$u(r,\phi)=u(r,\phi+2\pi)$ ，即 $\Phi(r,\phi)=\Phi(r,\phi+2\pi)$ ，便有——对于 $\lambda > 0$ ： $\sqrt{\lambda}$ 得是个整数 n ，因此 $\lambda=n^2 (n=1,2,\dots)$ ；对于 $\lambda = 0$ ： $C_2=0$ ；对于 $\lambda < 0$ ： $C_1=C_2=0$ 。【所以总的来说， $\lambda=n^2 (n=0,1,\dots)$ ，对应的本征函数为 $\Phi(\phi)=C_1 \cos n\phi + C_2 \sin n\phi$ ；当 n 取 0 时，对应的 $\Phi(\phi)=C_1$ ，也就包含在其中了】

3. 由于三角函数的正交性, 若一个傅里叶级数=0, 则其中每个傅里叶系数=0。因为每个系数后面的函数彼此线性无关。这种麻烦会因得到了 $A_0 + B_0 \cdot \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]$ 这样的通解, 而出现——在将该通解代入齐次边界条件: 导线表面等势面 $u|_{r=R_0}=0$, 的时候。【导线表面确实等势但其电势不一定=0, 只有当其带电总量/或者说其静电平衡后的外表面带电总量=0 时, 它的电势才与无穷远处的电势一样, =0; 但是这里为了创造齐次的边界条件, 不得不令它=0, 这样一来, 远处的电势 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln r + [\varphi_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{r} \cdot \cos\varphi]$, (x 轴向下, y 轴向右, 所以 $\varphi_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} = \varphi_0 - E_0 r \cdot \cos\varphi$) 中的 φ_0 (原点处的电势) 必须调整来 $=\frac{q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln R_0$, 以使得 $\varphi|_{r=R_0} = -\frac{q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \varphi_0 = 0$; 当然, $r = R_0$ 处的 $-\mathbf{E}_0 \mathbf{r} \cdot \cos\varphi$, 会被感应电荷在柱面产生的电势给抵消掉=0; 且柱面的感应电荷产生的电势应连同上面三项, 一同出现在各点的 φ 值的表达式中】

4. 无穷远处为 \mathbf{E}_0 , 相当于给了电势的法向偏导 $-\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{E}_0$, 也相当于给了电势: $\varphi_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ 。

总结: 齐次边界条件+齐次泛定方程=本征值问题, 几维的问题, 就有几个边界条件对应的方程, 也就有几个本征值。——比如 3 维定态薛定谔方程, 是球坐标下的拉普拉斯方程形式, 有 3 个本征值, 3 个量子数 n, l, m , 这三个字符的引入, 也是由数学物理方法得来的。【第九章就知道了】

而且为什么不是齐次初始条件+齐次泛定方程=本征值问题呢? ——本征值问题是关于空间变量而言的, 时间变量没有本征值问题。之所以这样, 是因为初始条件只能是 $t=0$ (或某个初始时刻) 下的 u 和 u_t , 而没法给出两个 t 值 (两个时间断面) 下的 u , 或两个 t 值下的 u_t ; 但对于边界条件而言, 就可以给出两个空间断面下的 u 或 u_x 。【再说, 齐次初始条件你不觉得有点奇怪么: u, u_t 都=0, 那岂不是完蛋了: 一个特解就是的 $u=0$, 若解唯一, 则完蛋。】

8.2 非齐次方程(振动方程和输运方程)

若将 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入非齐次泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) (0 < x < l)$, 由于 $f(x,t)$ 中的 x, t 不一定可分离的缘故, 我们并不能得出两个单独关于 X 和 T 的常微分方程; 另外, 根据之前的经验, $u(x,t)=X(x)T(t)$, 实质上只是 $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$, 然而最终解 $u(x,t)=\sum u_n(x,t)=\sum X_n(x)T_n(t)$, 无法写作 $X(x)T(t)$ 的形式。

因此, 对于都是齐次的泛定方程和边界条件, 它们虽然没有什么实际意义, 但它们是一种 reminder, 提醒我们不妨将解本身展成符合边界条件和泛定方程的傅里叶级数, 再代入初始条件确定系数。

这一节我们开始研究非齐次的泛定方程，但仍限于齐次的边界条件。这点和之前的稳定场问题恰好相反，那里是泛定方程齐次、边界条件非齐次。

(一).傅里叶级数法

设法找到一组本征函数 $\{X_n(x)\}$ ，只要这组本征函数是完备的(不能多也不能少)，就可以将解 $u(x,t)$ 、非齐次项 $f(x,t)$ 及初始条件 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 均按本征函数展开：
 $u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x)$ 、 $f(x,t)=\sum_n g_n(t)X_n(x)$ 、 $\varphi(x)=\sum_n \varphi_n X_n(x)$ 、 $\psi(x)=\sum_n \psi_n X_n(x)$ 。

其中各展开式的系数， $T_n(t), g_n(t)$ 是仅关于时间 t 的一元函数； φ_n, ψ_n 是常系数，因为初始条件 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 是某一时间断面下的关于空间的函数。当把 $u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x)$ 、 $f(x,t)=\sum_n g_n(t)X_n(x)$ 代入 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ 后，我们会得到 $T_n(t)$ 所满足的常微分方程组(因为 n 很多)，求解它们比求解偏微分方程要简单。

那么本征函数 $X_n(x)$ 要如何选取呢？最简单的做法是选择 $\{X_n(x)\}$ 为相应齐次定解问题的本征函数，即由相应的齐次偏微分方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 分离变量所得的， X 所满足的常微分方程 $X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0$ 和相同的齐次边界条件所得的本征值问题：

(1). 求出相应齐次问题的本征函数 $X_n(x)$ ：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) (0 < x < l) \\ \text{边界条件: } u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \\ \text{初始条件: } u|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) (0 < x < l) \end{array} \right. \quad \text{相应齐次问题, 即}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ \text{边界条件: } u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \\ \text{边界条件: } X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \end{array} \right. \quad \text{的本征函数我们已知: } X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} (n=1,2,\dots), \text{ 常数不需要写了。}$$

(2). 将 $u(x,t)$ 及 $f(x,t)$ 按本征函数 $X_n(x)$ 展开：

$u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x)$ 、 $f(x,t)=\sum_n g_n(t)X_n(x)$ 。【我们这里的 $X_n(x)$ 不一定是(1). 中的三角函数族，所以展开的 $u(x,t)$ 、 $f(x,t)$ 不一定是傅里叶级数；之前的(1). 只是为了给出操作步骤的一个例子； $X_n(x)$ 可以是任何完备的(本征)函数族，但得满足对应的齐次泛定方程和齐次边界条件，特别是后者。这样的话可以看到，我们接下来的步骤完全不用考虑边界条件了】

(3). 导出 $T_n(t)$ 满足的方程和初始条件：

代入泛定方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ 得到 $\sum_n T_n''(t)X_n(x) - a^2 \sum_n T_n(t)X_n''(x) = \sum_n g_n(t)X_n(x)$ 。利用 $X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0$ ，化为 $\sum_n T_n''(t)X_n(x) + a^2 \sum_n \lambda_n T_n(t)X_n(x) =$

$\sum_n g_n(t)X_n(x)$ 。由本征函数 $X_n(x)$ 的正交性，得到 $T_n(t)$ 满足的方程： $T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = g_n(t)$ 。【可见傅里叶级数法，一定要与分离变数法结合，才能得出不含 x 的 $T_n(t)$ 的常微分方程】

将 $u(x,t) = \sum_n T_n(t)X_n(x)$ 代入初始条件，并将 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 展成 $X_n(x)$ 的级数：

$$\begin{cases} \sum_n T_n(0)X_n(x) = \varphi(x) = \sum_n \varphi_n X_n(x) \\ \sum_n T_n'(0)X_n(x) = \psi(x) = \sum_n \psi_n X_n(x) \end{cases}$$
 由本征函数的正交性，得到 $T_n(t)$ 满足的初始条件：
 $T_n(0) = \varphi_n$ 、 $T_n'(0) = \psi_n$ ，其中 φ_n 、 ψ_n 为 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的傅里叶系数；当然你也不需要展开 φ, ψ 它们，利用本征函数的正交性求积分即可。

(4).利用高等数学知识求解各个 $T_n(t)$ 。

8.3 非齐次边界条件的处理

8.2 中，边界条件是齐次的。8.2 之前也是，除了 8.1 的稳定场问题以外。但稳定场问题中的方程，并不像我们这里研究的含时的那么复杂，虽然它的边界条件也是非齐次的(所以这一节也是有存在的必要的)。——但是这里我们仍先研究齐次的泛定方程，不过相比于稳定场方程而言它更复杂。

基本思路是，定解问题是线性的，则可利用叠加原理，把非齐次的边界问题，转化为另一未知函数的齐次边界条件问题。

(一).一般处理方法

$$\begin{cases} \text{泛定方程: } u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ \text{边界条件: } u|_{x=0} = \mu(t) \quad u|_{x=l} = v(t) \\ \text{初始条件: } u|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) (0 < x < l) \end{cases}$$

就像稳定场问题所言，我们

仍设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ ，但之后不同了：

$$\begin{cases} \text{泛定方程: } (w_{tt} - a^2 w_{xx}) + (v_{tt} - a^2 v_{xx}) = 0 \\ \text{边界条件: } w|_{x=0} + v|_{x=0} = \mu(t) \quad w|_{x=l} + v|_{x=l} = v(t) \quad , \text{ 设其中 } v|_{x=0} = \mu(t), \\ \text{初始条件: } w|_{t=0} + v|_{t=0} = \varphi(x) \quad w_t|_{t=0} + v_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$v|_{x=l} = v(t)$ ，则问题转化为了 8.2. 关于 $w(x,t)$ 的齐次边界条件非齐次泛定方程问题：

$$\begin{cases} \text{泛定方程: } w_{tt} - a^2 w_{xx} = -(v_{tt} - a^2 v_{xx}) \\ \text{边界条件: } w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} = 0 \\ \text{初始条件: } w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0} \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0} (0 < x < l) \end{cases}.$$

由于我们只规定了: $v(x, t)$ 的两个空间断面, 随时间的演化。 $x = 0$ 、 $x = l$ 之间的 $v(x, t)$ 并未规定, 这相当于已知空间两点 $(0, \mu(t))$ 、 $(l, v(t))$, 求过这两点的函数; 因此我们不妨设 v 是关于 x 的线性函数: $v(x, t) = A(t)x + B(t) = \frac{v(t) - \mu(t)}{l}x + \mu(t)$ 。代入即有:

$$\begin{cases} \text{泛定方程: } w_{tt} - a^2 w_{xx} = -v_{tt} = \frac{x}{l} [\mu''(t) - v''(t)] - \mu''(t) \\ \text{边界条件: } w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} = 0 \\ \text{初始条件: } w|_{t=0} = \varphi(x) + \frac{x}{l} [\mu(0) - v(0)] - \mu(0) \\ w_t|_{t=0} = \psi(x) + \frac{x}{l} [\mu'(0) - v'(0)] - \mu'(0) \end{cases}.$$

但若 $x = 0$ 、 $x = l$ 两端都是第二类非齐次边界条件 $u_x|_{x=0} = \mu(t)$ $u_x|_{x=l} = v(t)$, 则我们不能取 v 为关于 x 的线性函数 $v(x, t) = A(t)x + B(t)$, 因为代入 $v_x|_{x=0} = \mu(t)$, $v_x|_{x=l} = v(t)$ 会得到 $A(0) = \mu(t)$ 、 $A(l) = v(t)$; 而是最好取 $v(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x$, 这样的话不仅 $B(t) = \mu(t)$ 、 $2A(t)l + B(t) = v(t)$ 即 $B(t) = \mu(t)$ 、 $A(t) = \frac{v(t) - \mu(t)}{2l}$, 而且 $v_{tt} - a^2 v_{xx}$ 中 v_{xx} 部分形式最简单: $v_{xx} = 2A(t) = \frac{v(t) - \mu(t)}{l}$ 。

(二).特殊处理方法(特解法)

弦的一端固定, 另一端受迫谐振 $\begin{cases} \text{泛定方程: } u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l) \\ \text{边界条件: } u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = A \sin \omega t \\ \text{初始条件: } u|_{t=0} = 0 \quad u_t|_{t=0} = 0 (0 < x < l) \end{cases}$, 初始位移和初速度都是 0。用一般的方法, 取的是 $v(x, t) = \frac{v(t) - \mu(t)}{l}x + \mu(t) = \frac{v(t)}{l}x = \frac{A \sin \omega t}{l}x$ 。此时 $(w_{tt} - a^2 w_{xx}) = -v_{tt} = \frac{A \omega^2 x}{l} \sin \omega t$, 非齐次, 得用 8.2 的方法来求解, 有点麻烦。

特殊的方法: 有没有一个边界条件满足: $v|_{x=0} = \mu(t) = 0$, $v|_{x=l} = v(t) = A \sin \omega t$, 但泛定方程满足 $v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$ 的 $v(x, t)$ 呢? 这样, $w(x, t)$ 非齐次泛定方程就会变成齐次的了: $w_{tt} - a^2 w_{xx} = -(v_{tt} - a^2 v_{xx}) = 0$ 【 $w(x, t)$ 的边界条件仍是之前的

$w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} = 0$, 但初始条件不再是: $\begin{cases} w|_{t=0} = -\frac{x}{l} v(0) \\ w_t|_{t=0} = -\frac{x}{l} v'(0) \end{cases}$ 而变为了:

$\begin{cases} w|_{t=0} = -v|_{t=0} \\ w_t|_{t=0} = -v_t|_{t=0} \end{cases}$, 我们并不去限定 w, w_t, v, v_t 长什么样, 所以 $v(x, t)$ 满足的条件相对来说还很宽松: 之前我们的一般方法只限定了 v 的边界条件, 不对微分方程和初始条件有任何限定; 这里的特殊方法相当于又要求了 v 的微分方程, 但我们绝不能再进一步给定 v 的初始条件, 因为一旦这样, v 就与 u 无异了: 它也是个无法处理的齐次泛定方程、非齐次边界条件问题】

我们可以通过物理情景猜出这样的 $v(x, t)$: 这就跟波一样, 其解也应是分离变数的形式, 且时间部分为 $\sin \omega t$, 以让其满足在 $x=l$ 端的谐振动: $v(x, t) = X(x) \sin \omega t$ 。于是

代入 $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=l} = A \sin wt \end{cases}$ 便有: $\begin{cases} X(x) + \frac{a^2}{w^2} X''(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = A \end{cases}$ 。由于 $\frac{a^2}{w^2} > 0$, 解得 $X(x) = C_1 \cos \frac{a}{w} x + C_2 \sin \frac{a}{w} x$ 。代入 **边界条件**, 得到 $X(x) = \frac{A}{\sin \frac{a}{w} l} \sin \frac{a}{w} x$ 。于是 $v(x, t) = \frac{A}{\sin \frac{a}{w} l} \sin \frac{a}{w} x \cdot \sin wt$ 。

于是 $w(x, t)$ 满足: $\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = 0 \quad w_t|_{t=0} = -Aw \frac{\sin \frac{a}{w} x}{\sin \frac{a}{w} l} \end{cases}$, 于是对于这个齐次泛定方程、

齐次边界条件, 可用分离变数法求出, 参照之前**第一类边界问题**的结果:

$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(a \frac{n\pi t}{l}) + B_n \sin(a \frac{n\pi t}{l})] \sin \frac{n\pi x}{l}$ 。再由 w 的**初始条件**确定系数: $A_n = 0$;
 $\frac{n\pi a}{l} B_n \cdot l = \int_{-l}^l -Aw \frac{\sin \frac{a}{w} x}{\sin \frac{a}{w} l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx$; 得到 $B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l -Aw \frac{\sin \frac{a}{w} x}{\sin \frac{a}{w} l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot dx$ 。

8.4 泊松方程

如果将(非齐次的拉普拉斯方程)**泊松方程** $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$, 和其**边界条件**, 中的 y 看作 t 的话, 这就相当于没有初始条件的波动方程(或输运方程)。根据之前 8.1 中的稳定场问题, 我们已经会求拉普拉斯方程(齐次的泊松方程)+非齐次边界条件, 的定解问题了。——不像含时的, 我们从**齐次方程+齐次边界**(第一类、第二类)→**非齐次方程+齐次边界条件**(8.2 级数法、冲量法)→**齐次方程+非齐次边界条件**(一般法、特殊法)→**非齐次方程+非齐次边界条件**(尚未介绍, 但可以推知)。

我们这里, 直接从稳定场问题所对应的: **齐次方程+非齐次边界条件**→**非齐次方程+非齐次边界条件**。其中, **非齐次方程**(泊松方程)仍像之前的特殊法, 或稳定场问题那样, 设 $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, 但其中的 v **不需要满足边界条件**, **只需满足泊松方程**——这与之前我们**不需满足泛定方程**、**只需满足边界条件**; 以及**满足边界条件之余, 再满足齐次泛定方程的特解**不同, 此时的**特解**只需满足**非齐次泛定方程**, **不需满足边界条件**(因为特解代入边界条件后, 移到右边, 自然成了 w 的边界条件中的 c' : 有点像 $w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}$ 这样的**初始条件**)。

因此这相当于**非齐次边界条件**的第三种特解法, 也相当于**非齐次泛定方程**中, 继 8.2 傅立叶级数法、冲量定理法之后的, 第三种解法。——因而它针对波动方程和输运方程, 即含时的泛定方程, 也适用: **比如**将上一**非齐次边界条件**的特殊解法中, **边界条件**中的 $A \sin wt$ 挪到**泛定方程**右边, 此时便可应用这种方法: 即使**边界条件**因 $A \sin wt$ 被挪走而**变成齐次的了**, 我们也不像级数法那样, 同时考虑**边界条件**和**泛定方程**; 而是只考虑**泛定方程**, 使得 v 所满足的**泛定方程** $= A \sin wt$, 找出这样的 v 特解, 代入边界条件成为右边的非齐次项, 然后再解 w 的**非齐次边界条件+齐次泛定方程**, 即上一节 8.3 所引进的方法(若又因 v 的选取使得边界条件变得齐次的同时, 而使得方程

变得非齐次了, 还不是最终要用 8.2 的级数法), 再合成 u ; **当然**, 也可非挪 $A\sin w$ 而是在泛定方程右边额外引入它, 这样方程和边界条件都是非齐次的, 然后找个方程的特解, 记为 v , 代入边界条件, 构成 w 的新的非齐次边界条件, 再用 8.3 的方法解 w (又要将 w 分解为 $w_1 + w_2$); 不过这样的话, 由于双非齐次, 而不能使用级数法了(或者可以是可以, 除非你能看出符合非齐次边界条件的级数的基本函数族是什么。).

例 1: 圆域 $\rho < \rho_0$ 内, 求解
$$\begin{cases} \nabla^2 u = a + b(x^2 - y^2) \\ u|_{\rho=\rho_0} = c \end{cases}.$$

这是不是有点像电动力学的求解区域中包含点电荷+给出边界条件(以 $\phi|_S$ 的形式), 便可根据唯一性定理, 成为一个定解问题! 在那里我们也是先尝试着找泊松方程的一个特解(通常是点电荷电势 ϕ), 再通过泊松方程的特解+对应拉普拉斯方程的通解(后者需要通过边界条件确定系数), 得到 u .

这里也是, 先设法找非齐次稳定场方程的一个特解 v (不需要让其也满足边界条件), 若 v 满足 $\nabla^2 v = a + b(x^2 - y^2)$, 则将 $u = v + w$ 代入, 即有
$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\rho=\rho_0} = c - v|_{\rho=\rho_0} \end{cases},$$
 这便回到了稳定场问题: 齐次泛定方程+非齐次边界条件——当然, 稳定场问题可直接采用各种坐标系下, 用分离变数法求出的 laplace 方程的通解【下一章】, 加上边界条件确定系数, 来直接得到其解。

由于 $\nabla^2 \frac{a}{2} x^2 = a$ 、 $\nabla^2 \frac{a}{2} y^2 = a$, 因此取对称的 $\nabla^2 \frac{a}{4} (x^2 + y^2) = a$; 同样的道理, 由于 $\nabla^2 \frac{b}{12} x^4 = bx^2$ 、 $\nabla^2 -\frac{b}{12} y^4 = -by^2$, 于是我们便找到了一个特解: $v = \frac{a}{4} (x^2 + y^2) + \frac{b}{12} (x^4 - y^4) = \frac{a}{4} \rho^2 + \frac{b}{12} \rho^2 (x^2 - y^2) = \frac{a}{4} \rho^2 + \frac{b}{12} \rho^2 (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) = \frac{a}{4} \rho^2 + \frac{b}{12} \rho^4 \cos 2\varphi$.

于是
$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{\rho=\rho_0} = c - \frac{a}{4} \rho_0^2 - \frac{b}{12} \rho_0^4 \cos 2\varphi \end{cases},$$
 可采用 8.1.(四).稳定场问题二中的极/柱坐标系的 laplace 方程的通解, 辅以边界条件确定系数, 并得到 w , 以及 u .

例 2: 在矩形域内 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ 内, 求解
$$\begin{cases} \nabla^2 u = -2 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = 0 \end{cases}.$$

泊松方程的一个特解为 $v = -x^2 + c_1 x + c_2$ (或 $-y^2 + c_3 y + c_4$), 不过我们想进一步(尽量)为 w 创造一对齐次的边界条件。【即就像上一题, 如果允许的话, 我们也希望 $v|_{\rho=\rho_0} = c$, 这样就能有 $w|_{\rho=\rho_0} = 0$, 以创造出一个本征值问题】于是 $v|_{x=0} = 0, v|_{x=a} = 0$, 解得 $c_2 = 0, c_1 = a$. 于是 $v = -x^2 + ax$. 代入即有
$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0 \\ w|_{y=0} = x^2 - ax, w|_{y=b} = x^2 - ax \end{cases}.$$
 【两个边界条件似乎是不可调谐的, 其中一个为齐次时, 另一个就是非齐次了: 你也可以 $v = -y^2 + c_3 y + c_4$, 这样后者是齐次, 前者是非齐次; 若 $v = \frac{-x^2 + c_1 x + c_2}{2} + \frac{-y^2 + c_3 y + c_4}{2}$, 则俩边界条件都是非齐次的】

于是对于 $\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0 \end{cases}$ ，我们便创造了个本征值问题(方程 $\nabla^2 w = 0$ 分离变量后的一个齐次方程+对应的一对齐次边界条件)；求出分离出来的两个变量(其中一个是本征函数)并合成，根据 8.1.(三).稳定场问题一，直接可借用其结果(\because 边界条件同是关于 x 的齐次边界条件)： $w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}) \sin \frac{n\pi x}{a}$ 。再将其代入 w 关于 y 的两个边界条件(相当于非齐次的初始条件)，并对方程右边也展成以同样的本征函数为基的级数，对比即可得到系数，进而求得 w 、 u 。

第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问

题

上一章的分离变数法只应用在了直角坐标系和平面极坐标系下，出现的本征函数也都为三角函数。这一章考察球坐标系和柱坐标系中的分离变数法所产生的常微分方程，以及相应的本征值问题。【坐标系应根据实际问题的边界形状来选择】

9.1 特殊函数的常微分方程

(一).拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$

(1).球坐标系(θ 是 r 与 z 轴夹角，即方向角； φ 为 x - 0 - y 面的极角)

①.Laplace 方程以球坐标系的三个坐标量 r, θ, φ 来表达即为： $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ 。先将 r 与表空间方位的 θ, φ 分离： $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ，代入并乘 $\frac{r^2}{RY}$ ，即有 $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{1}{Y \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0$ 。移项得 $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{Y \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dY}{d\theta}) - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{d^2 Y}{d\varphi^2}$ ，两边都应是一个常数，该常数记为 $l \cdot (l+1)$ 。

【电动力学为了统一，将这里的 l 以及柱坐标系中的 m ，均写作 n 了 = =】

【此常数 $l \cdot (l+1)$ 还谈不上本征值，一方面是因为找不到对应的方程(有俩；该本征值属于谁？)，另一方面是尚无对应的边界条件 or 周期条件，来进一步限制 $l \cdot (l+1)$ 或者 l 的取值，也就构不成本征值问题；之后我们将看到，是分离变量后的第二个关于 Y 的方程，与其自然的边界条件，一同构成本征值问题，限制 l 为整数】

【 $Y(\theta, \varphi)$ 是定义在半径为 r 的球面上的函数, 即球函数, 它是球面上的一个本征函数, 可构成球面上的一组基(基本函数族), 其他函数可由之展开(比如球对称的函数, 做球面上的傅里叶变换时)。球面上的基本函数族, 不再是三角函数族, 三角函数的积分不再正交: 正如 $\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = 0$ 一样, $\int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} Y(\theta, \varphi) \cdot d\varphi = 0$, 但 $\int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot d\varphi \neq 0$ 】

于是 $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR}{dr}) - l(l+1)R = 0$; $\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0$ 。前一个常微分方程 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ 是欧拉型常微分方程【高等数学: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ①. 常系数型: $p = p_0, q = q_0$ ②. 欧拉型: $p = \frac{p_0}{x}, q = \frac{q_0}{x^2}$ (每一项的系数的次数与阶数相同)】, 其解为 $R = Cr^l + Dr^{-(l+1)}$ 【其中 l 取 ≥ 0 的自然数(0, 1, 2...) 的效果, 与 l 取 < 0 的负整数(-1, -2, ...) 的结果相同; 并且 l 并不一定要取整数】。

②. 后一个偏微分方程叫球函数方程, 若我们进一步分离变量 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$, 代入并乘 $\frac{\sin^2 \theta}{\Theta \Phi}$, 则第二个方程变为 $\frac{\sin \theta}{\Theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + l(l+1) \sin^2 \theta = 0$, 移项得 $\frac{\sin \theta}{\Theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda$ 。【此时的 λ 也谈不上本征值, 只是个自由的常数; 因为尚未结合边界 or 周期条件, 以构成本征值问题(以进一步限制 λ 的取值), 谈不上属于两个方程中的哪个方程、哪个定解条件、哪个本征函数的本征值; 这里对待 $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$ 项的手法与之前①. 中对待 $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR}{dr})$ 的手法不同, 一个是保留在左边, 为正; 另一个是移到右边, 取负。】

于是 $\sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + [l(l+1) \sin^2 \theta - \lambda] \Theta = 0$; $\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0$ 。后一个方程, 加上自然的周期条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, 便构成本征值问题, 借用 8.1.(四). 稳定场问题二的结果, 得到其本征值为 $\lambda = m^2 (m = 0, 1, \dots)$, 且对应的本征函数是 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$ 。

③. 将 $\lambda = m^2$ 代入前一个方程, 并除以 $\sin^2 \theta$ (之前乘以它主要是为了让 $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$ 前面不含 θ 因子), 得 $\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + [l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0$ 。令 $x = \cos \theta$, 则 $dx = -\sin \theta \cdot d\theta$, 代入其中作为分母: $\frac{d}{dx}(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{-dx}) + [l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0$, 于是 $\frac{d}{dx}[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx}] + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0$ 。

该方程 $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0$ 叫做 l 阶连带勒让德方程。当 $m=0$ 时, $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l+1) \Theta = 0$ 叫做 l 阶勒让德方程。它们既不是常系数, 又不是欧拉型常微分方程, 需要用级数法求解(解叫 l 阶连带的勒让德函数 $P_l^m(\cos \theta)$, 原子物理中氢原子波函数处出现过)。并且这两个方程隐含着(/具有/得满足) $x = \pm 1$ (即 $\theta = 0, \pi$) 处的自然的边界条件。方程和边界条件, 构成本征值问题, 使得 l 只能取整数。(电动力学中球坐标系下 laplace 方程中, Φ 是常数, 因而 $m=0$; 且 R, Θ 中的 l 都是用 n 表示的, $P_l^m(\cos \theta)$ 也因 “ m =常数 0、 l 被认为是 n ” 而写作了 $P_n(\cos \theta)$)

【关于自然的周期条件和自然的边界条件：我们以 8.1.(四).稳定场问题二中的 $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0 \end{cases}$ 化为 $\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u|_{\rho=R_0} = 0 \end{cases}$ 为例，一个在平面直角坐标系下能定解的定解问题，为什么在泛定方程和边界条件，均转化为平面极坐标系表示后，不能定解了，以至于需要额外引入“不自然的”“自然的周期条件”呢？

——这来源于信息的丢失：①.平面直角坐标系各分量的取值范围为： $x \in (-\infty, +\infty)$ 、 $y \in (-\infty, +\infty)$ ，并且 (x, y) 与平面上的点一一对应；②.而平面极坐标系为了使得 (ρ, φ) 与平面上的点一一对应，要求 $\rho \geq 0$ [否则 $\rho' < 0$ 可配合 $\varphi' = \varphi + \pi$ 而使得 (ρ', φ') 和 (ρ, φ) 均对应同一个点]，以及 $\varphi \in [0, 2\pi)$ [否则 $(\rho, \varphi + 2k\pi)$ 均对应同一个点]，如此一来， $\rho = 0$ 处的偏导 $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ 便不存在(因为左右导数得存在且相等，然而它没有左导数)，同理 $\varphi = 0$ 处的偏导 $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ 也不存在，如此一来，方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ 的成立(适用)范围就比 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 更窄，它在原点 $\rho = 0$ 和射线 $\varphi = 0$ 上没有意义。

为了弥补这一缺陷，我们人为地为 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u|_{\rho=R_0} = 0 \end{cases}$ 再添加一些边界条件和周期条件：①.添加自然的边界条件 $\begin{cases} u|_{\rho=0} = \text{有限值} \\ u_\rho|_{\rho=0} = \text{有限值} \end{cases}$ ：函数及其一阶导，在原点有界+邻域内表达式存在(非绝对值函数等)=原点的函数值连续、一阶导存在且连续、二阶导存在。如此一来， $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{\partial u}{\partial \rho}$ 便存在了；②.自然的周期条件 $\begin{cases} u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi) \\ u'(\varphi + 2\pi) = u'(\varphi) \end{cases}$ ：那么 $u(0^-) = u(0^- + 2\pi) = u(2\pi^-)$ 、 $u(2\pi) = u(2\pi - 2\pi) = u(0)$ ，于是根据初等函数的连续性， $u(0^-) = u(2\pi^-) = u(2\pi) = u(0)$ ，于是 $\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ 便也存在了[并且由于 φ 的取值范围可规定为 $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ ，所以除了 $u(0 + 2\pi) = u(0)$ 和 $u(0^- + 2\pi) = u(0^-)$ 之外，各 φ 值下的 $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$ 的存在还是有必要的]。【自然的周期条件中的 $\Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi)$ ，或许还将与 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ 一起，使得 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$ 的两个特解线性无关：引用到朗基斯行列式。】

柱坐标系的 z 方向与空间直角坐标系无异，柱函数的 x - 0 - y 方向又与平面极坐标系无异，因此柱函数下的方程所需添加的周期/边界条件，不多不少就是极坐标系所需添加的周期/边界条件；而对于球坐标系，它的 r 像 ρ 一样满足自然的边界条件

$\begin{cases} u|_{r=0} = \text{有限值} \\ u_r|_{r=0} = \text{有限值} \end{cases}$ ，它的 φ 仍满足自然的周期条件 $\begin{cases} u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi) \\ u'(\varphi + 2\pi) = u'(\varphi) \end{cases}$ ，它的 θ 也得满足自然的边界条件 $\begin{cases} u|_{\theta=0, \pi} = \text{有限值} \\ u_\theta|_{\theta=0, \pi} = \text{有限值} \end{cases}$ 】

(2).柱坐标系

①.刚才我们提过它的非 z 部分: $\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 分离变数 $u = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$. 代入并乘以 $\frac{\rho^2}{R\Phi Z}$, 得 $\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$. 移项, 并引入常数: $\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda$ 【这与(1).球坐标系②.中对待 $Y(\theta, \varphi)$ 中的 Φ/φ 项的手法是一样的: 都将其挪到方程右边并取负。——并且它俩其实都来源于 $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$, 以期创造 X 和 Φ 的三角函数解】。

对于 $\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0$, 它与自然的周期条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ 一同构成本征值问题, 于是像之前的(1).②.一样, 我们直接给出其本征值 $\lambda = m^2 (m=0, 1, \dots)$, 以及本征函数 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$.

②.将 $\lambda = m^2$ 代入前一个方程, 并除以 ρ^2 (之前乘它也只是使 $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$ 前面不含 θ 项), 得 $\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{m^2}{\rho^2}$. 移项, 并引入常数: $\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu$ 【这与两次对待 $\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$ 的手法是一样的: 都将其挪到方程右边并取负; 但是这里引入的常数前加了个负号 (否则就将出来两个三角函数解, 所以这里可能需要一个指数解来中和一下 $=$)——more specifically, Z 不像 Φ , 它没有自然的周期条件的限制, 因此 $-\mu$ 不需要像 λ 一样只能取 ≥ 0 (的平方数), 它可 < 0 可 > 0 可 $= 0$, 所以这里有没有负号无所谓, 反正都会讨论三种情况。不过似乎人们喜欢这个负号?】。

于是 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + (\mu - \frac{m^2}{\rho^2}) R = 0$; $\frac{d^2 Z}{dz^2} - \mu Z = 0$. 后一个方程, 加上圆柱区域上下底面的齐次边界条件, 便构成本征值问题, 解得本征值 μ 所可能的取值 (只有在 $\mu < 0$ 的情况下, 才能构成本征值问题); 或者, 前一个方程, 加上圆柱侧面齐次边界条件 (或者自然的边界条件?), 也构成本征值问题, 解得 $\mu - \frac{m^2}{\rho^2}$ 可能的取值, 而因 m 的可能的取值也已确定, μ 所可能的取值也已定下。不过现在我们尚并不打算讨论它们。

③.现仍只考虑 μ 为实数:

a. $\mu = 0$: 对于后一个方程, $Z(z) = C + Dz$ (按 z 的升序排列, 而不是 $ax+b$; 之前 $\lambda=0$ 时, $D=0$ 是因为自然的周期条件); 前一个方程 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} R = 0$ 是欧拉方程, 解为 $\begin{cases} R(\rho) = E + F \cdot \ln \rho (m=0) \\ R(\rho) = E\rho^m + F\rho^{-m} (m \neq 0) \end{cases}$ (电动力学中 Z 是个常数, $\mu=0$; R 以及 Φ 中的 m , 都是用 n 表示的。)。【已经有 $\mu=0$, 不再构成本征值问题】

b. $\mu > 0$: 对于第二个方程, $-\mu < 0$, 对应 e 指数解: $Z(z) = Ce^{\sqrt{\mu}z} + De^{-\sqrt{\mu}z}$; 对于第一个方程, 做代换 $x = \sqrt{\mu}\rho$ (跟用 $x = \cos \theta$ 创造勒让德方程一样, 并非直角坐标), $dx = \sqrt{\mu}d\rho$, $\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + (\mu - \frac{m^2}{x^2}) R = 0$, 得到 $\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + (1 - \frac{m^2}{x^2}) R = 0$, 于是 $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2) R = 0$, 这叫做 m 阶贝赛尔方程。【其中的 $x = \sqrt{\mu}\rho$, 实际上来源于将 $\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\mu\rho^2 - m^2) R = 0$ 中的 $\mu\rho^2 = x^2$; 之后将知道, 贝赛尔方程 $\rho = \rho_0$ 处

的齐次边界条件，构成本征值问题；但关于 $Z(z)$ 的方程，无法与 $z = \pm z_0$ 处的齐次边界条件，构成本征值问题—— $e^{\sqrt{\mu}z}, e^{-\sqrt{\mu}z}$ 不能作为本征函数。】

c. $\mu < 0$: 对于第二个方程， $-\mu > 0$ ，对应三角函数解： $Z(z) = C \cos \sqrt{-\mu}z + D \sin \sqrt{-\mu}z$ 。由于三角函数可使得 Z 成为本征函数，并作为 R 的基本函数族，因此该方程 + $z = z_1, z = z_2$ 处的齐次边界条件，便构成本征值问题。以至于解算出来 $-\mu = v^2$ ，但于是与齐次边界条件，而非与自然的周期条件构成的本征值问题，因此 v 的取值并不是自然数 m ，而是像弦振动问题那样的，形式上大概是 $\frac{n\pi}{z_2}$ 。于是 $Z(z) = C \cos vz + D \sin vz$ ；

对于第一个方程，做代换 $x = \sqrt{-\mu}\rho$ ， $dx = \sqrt{-\mu}d\rho$ ， $\frac{d^2 R}{dx^2 / -\mu} + \frac{1}{x/\sqrt{-\mu}} \frac{dR}{dx/\sqrt{-\mu}} + (\mu - \frac{m^2}{x^2 / -\mu})R = 0$ ，得到 $\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - (1 + \frac{m^2}{x^2})R = 0$ ，于是 $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + m^2)R = 0$ ，这叫作 m 阶虚宗量贝塞尔方程。它可由贝塞尔方程的宗量 x (对于前者而言 x 是实数自变量?) 改作虚数 ix 得到。【其实 $x = \sqrt{\mu}\rho$ 、 $x = \sqrt{-\mu}\rho$ ，中的两个 x 都应因 $\rho > 0$ 而是实数，可能解出来，后者的 x 和 ρ 是虚数? ——若是这样，则虚宗量贝塞尔方程没有对应的本征值问题；这样一来， $\mu > 0, \mu < 0$ 都将有一个方程没有其所对应的本征值问题。】

(二).波动方程 $u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0$

我们考察三维的波动方程(以便应用三维的拉普拉斯算符在各种坐标系下的形式)。分离时间变量 t 和空间变量 \mathbf{r} ， $u(\mathbf{r}, t) = T(t)v(\mathbf{r})$ ，代入波动方程，即有 $T_{tt}v - a^2 T \nabla^2 v = 0$ ，引入常数 $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -k^2$ 【常数前面的负号是为了创造类似 $-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda$ 的局面；其中的 k^2 也对应 $\lambda = m^2$ ，是个本征值(或两个本征值之和)】。

分为两个方程 $T'' + k^2 a^2 T = 0$ 、 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ ；前一个常微分方程因 $k^2 a^2 \geq 0$ 而对应 $\begin{cases} T(t) = C + Dt (k = 0) \\ T(t) = C \cos kat + D \sin kat (k \neq 0) \end{cases}$ 【注： $k > 0$ 的三角函数解还可写作复数形式： $T(t) = C e^{ik at} + D e^{-ik at}$ 】，后一个偏微分方程叫做亥姆霍兹方程【其解我们马上就讨论；而由于初始条件没有两个时间断面，只有 $t = 0$ 时刻的函数 u 和导数 u' 的规定，且大多都是非齐次的——因而无法与方程 $T'' + k^2 a^2 T = 0$ 或解 $T(t) = C \cos kat + D \sin kat (k \neq 0)$ 构成本征值问题；下面我们将看到，是空间变量 v 所对应的亥姆霍兹方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ ，才与其边界条件构成本征值问题，约束 k^2, k 所可能的取值】。

(三).输运方程 $u_t - a^2 \nabla^2 u = 0$

考察三维输运方程。分离时空变量 $u(\mathbf{r}, t) = T(t)v(\mathbf{r})$ ，代入并引入常数： $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -k^2$ 。分为两个方程 $T' + k^2 a^2 T = 0$ 、 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ ；前一个常微分方程解为 $T(t) = C e^{-k^2 a^2 t}$ 【时间方程及其通解，与初始条件一起，构不成本征值问题；况且这里

的函数 $e^{-k^2 a^2 t}$ 不能作为本征函数】。下面我们就来讨论后一个偏微分方程——亥姆霍兹方程：

(四).亥姆霍兹方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$

(1).球坐标系

①.球坐标系下的亥姆霍兹方程： $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0$ 。先将 r 与 θ, φ 分离： $v(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ，代入并乘 $\frac{r^2}{RY}$ ，即有 $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{1}{Y \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 = 0$ 。移项并引入常数： $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + k^2 r^2 = -\frac{1}{Y \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = l(l+1)$ 。

得到 $\frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$ ； $\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0$ ；后者即为之前的球函数方程，进一步分离变量可解得 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$ ，并得到 l 阶连带勒让德方程 $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0$ ，此方程与 $x = \pm 1$ (即 $\theta = 0, \pi$) 处的自然的边界条件构成本征值问题，使得 l 只能取整数。

②.正如之前柱坐标系 laplace 方程③.中， $\frac{d^2 R}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{dR}{dp} + (\mu - \frac{m^2}{p^2})R = 0$ 经 $x = \sqrt{\mu} p$ 代换后得到 m 阶贝赛尔方程 $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0$ 一样；这里的 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$ (即 $\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}]R = 0$) 叫 l 阶球贝赛尔方程，其经 $x = \sqrt{k^2} r = kr$ 、 $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} y(x)$ 代换后，会变为 $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + [x^2 - l(l+1)]R = 0$ ，即 $x^2 [\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{4x^2} y] + 2x [\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y] + [x^2 - l(l+1)]y = 0$ ，于是 $x^2 [\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{4x^2} y] + 2x (\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y) + [x^2 - l(l+1)]y = 0$ ，合并同类项 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + [x^2 - l(l+1)]y - \frac{1}{4} y = 0$ ，得到 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + [x^2 - (l + \frac{1}{2})^2]y = 0$ ，便化为了 $l + \frac{1}{2}$ 阶贝赛尔方程。

当 $k=0$ 时，退化为欧拉型方程 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ ，解就是原来的解 $R = C r^l + D r^{-(l+1)}$ 。且此时整个亥姆霍兹方程与 laplace 方程无异，所有的 R, Φ, Θ 解都沿用 laplace 方程的解。【可见球坐标系也有贝赛尔方程，但柱坐标系没有(连带的)勒让德方程；但柱坐标系有球坐标系的欧拉方程】

亥姆霍兹方程来自波动方程和运输方程；而我们已在 8.3 非齐次边界条件的处理中介绍了如何齐次化波动方程和运输方程的边界条件。因此认为亥姆霍兹方程的边界条件已齐次。此时亥姆霍兹方程 $r=r_0$ 处的齐次边界条件，便构成本征值问题，决定 k 的可能的数值(9.4 将看到本征值 $k^2 \geq 0$ ，以至于 k 得是实数，而非纯虚数)。【可见球坐

标系的亥姆霍兹方程比对应 laplace 方程多一个本征值 k^2 ，前者有 3 个，后者只有 2 个；因此我们的工作量更大，得多确定一个本征值。】

(2).柱坐标系

①.柱坐标系下的亥姆霍兹方程： $\nabla^2 v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0$ 。分离变数 $v = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$ 。代入并乘以 $\frac{\rho^2}{R\Phi Z}$ ，即有 $\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 \rho^2 = 0$ 。移项并引入常数： $\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + k^2 \rho^2 + \frac{\rho^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda$ 。

对于 $\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0$ ，它与自然的周期条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ 一同构成本征值问题，于是其本征值 $\lambda = m^2 (m=0, 1, \dots)$ ，本征函数 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$ 。

②.将 $\lambda = m^2$ 代入前一个方程，并除以 ρ^2 ，得 $\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + k^2 + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{m^2}{\rho^2}$ 。移项，并引入常数： $\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu$ 。

于是 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + (\mu' - \frac{m^2}{\rho^2}) R = 0$ ； $\frac{d^2 Z}{dz^2} - \mu Z = 0$ 。其中的 $\mu' = k^2 + \mu$ ；我们仍认为亥姆霍兹方程的边界条件是齐次的；后一个方程，加上圆柱区域上下底面的齐次边界条件，便构成本征值问题，得到 μ' 所可能的取值 (m 所可能的取值已得)；同时，前一个方程，加上圆柱侧面齐次边界条件，也构成本征值问题，得到 μ 所可能的取值。——二者结合，得到 $k^2 = \mu' - \mu$ 的可能的取值。

③.现仍只考虑 μ 为实数：

a. $\mu = 0$ ：对于后一个方程， $Z(z) = C + Dz$ ；前一个方程 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + (k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}) R = 0$ ，它也属于 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + (\mu' - \frac{m^2}{\rho^2}) R = 0$ 。

b. $\mu > 0$ ：对于第二个方程， $-\mu < 0$ ，对应 e 指数解： $Z(z) = Ce^{\sqrt{\mu}z} + De^{-\sqrt{\mu}z}$ ；它无法与 $z = \pm z_0$ 处的齐次边界条件，构成本征值问题；因而不可能有 $\mu > 0$ ，因为我们需要用 Z 来确定 μ (进而联合贝赛尔方程所确定的 μ' 来确定 k^2)，于是该段不成立。

c. $\mu < 0$ ：对于第二个方程， $-\mu > 0$ ，对应三角函数解： $Z(z) = C \cos \sqrt{-\mu}z + D \sin \sqrt{-\mu}z$ 。设 $-\mu = v^2$ ，于是 $Z(z) = C \cos vz + D \sin vz$ ，可构成本征值问题；

对于第一个方程， $\mu' = k^2 + \mu = k^2 - v^2 \geq 0$ 才能构成本征值问题 (以确定 μ' 的可能值)，做代换 $x = \sqrt{\mu'} \rho$ ，得到 $x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2) R = 0$ ，即 m 阶贝赛尔方程。【之所以 $\mu' \geq 0$ ，是因为若 $\mu' < 0$ ，则前一个方程会做代换 $x = \sqrt{-\mu'} \rho$ 而最终演化为虚宗量贝赛尔方程，该方程没有对应的本征值问题，无法确定 μ' 的值】

【可见柱坐标系下，亥姆霍兹方程也比 laplace 方程多一个本征值 k^2 ，因此我们需要确定 3 个本征值，为此限制了 μ 和 μ' 的值】

当 $\mu=0$ 时, $Z(z)=C+Dz$; 当 $\mu'=0$ 时贝塞尔方程退化为欧拉型方程, 二者是独立的($\mu=0$ 时 $\mu'=k^2$ 可 >0 ; $\mu'=0$ 时 $\mu=-k^2$ 可 <0); 只有当 $\mu=\mu'=0$ 时, 才有 $k=0$ 。

9.2 常点邻域上的级数解法

(一).二阶线性常微分方程的级数解法

考虑带有初始条件(x_0 相当于 t_0 , 且 t_0 不一定 $=0$)的 $y(x)$ 的二阶线性常微分方程:
 $y''+p(x)y'+q(x)y=0, \begin{cases} y(x_0)=C_0 \\ y'(x_0)=C_1 \end{cases}$; 我们接下来讨论更广的, 复变函数 $w(z)$ 的二阶线性常微分方程: $\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0, \begin{cases} w(z_0)=C_0 \\ w'(z_0)=C_1 \end{cases}$ 【 C_0, C_1 为复常数, z_0 为复平面上选定的一点】。

若 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在点 z_0 的邻域内均解析, z_0 称为方程的常点。若 z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点, z_0 称为方程的奇点。【即: $p(z)$ 和 $q(z)$ 的解析区域的交集, 为方程的解析区域; $p(z)$ 和 $q(z)$ 的奇点的并集, 为方程的奇点们; 并且, 方程的常点们, 并不一定是解函数的非奇点。方程的奇点或许对应的解函数在此点也不解析, 但这种情况直接就不作考虑了(定理失效)】

定理: 若 $p(z)$ 和 $q(z)$, 在方程的常点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 则在这个圆中存在唯一的解析解 $w(z)$, 满足初始条件 $\begin{cases} w(z_0)=C_0 \\ w'(z_0)=C_1 \end{cases}$ 。

根据 3.3.泰勒定理: 由于 $w(z)$ 在圆内解析, 可将其在 z_0 邻域内展成泰勒级数 $w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 。其中各个系数 a_k 的确定方法, 见下面的例子:

(二).勒让德方程的级数解

1.在 $x_0=0$ 的邻域上求解 l 阶勒让德方程 $(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0$:

先将其写作标准形式: $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0$ 。系数 $p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}, q(x)=\frac{l(l+1)}{1-x^2}$, 在 $x_0=0$ 处解析, 因此具有级数解 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 。将它, 以及 $y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k, y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$ 代入 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$:

$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - 2x\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$, 其中的三项系数 $1-x^2, -2x, l(l+1)$ 都已是 $x_0=0$ 邻域上的泰勒级数, 无需再展开。对于某一选定的 $x^k(k \geq 2)$, 其中的来源既包含有 $(k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$, 又包含了 $-x^2$ 。

$k(k-1)a_k x^{k-2} = -k(k-1)a_k x^k$, 以及 $-2x \cdot ka_k x^{k-1} = -2ka_k x^k$ 和 $l(l+1)a_k x^k$ 。【对于, $k=1$, 将不包含 $-k(k-1)a_k x^k$, 这个结果与包含它并代入 $k=1$ 无异; 对于 $k=0$, 将不包含 $-k(k-1)a_k x^k$ 和 $-2ka_k x^k$, 这个结果与包含它并代入 $k=0$ 无异, 所以可一并写成如下通式。】

将其系数写在一起便有: $(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + l(l+1)a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2} + [l(l+1) - k(k-1) - 2k]a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2} + [l(l+1) - k(k+1)]a_k$ 。要想 $\sum_{k=2}^{\infty} \{(k+2)(k+1)a_{k+2} + [l(l+1) - k(k+1)]a_k\}x^k + \dots = 0$, 只能是 $(k+2)(k+1)a_{k+2} + [l(l+1) - k(k+1)]a_k = 0$ 。

得到 $a_{k+2} = \frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k = \frac{k^2+k-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k = \frac{(k-l) \cdot [k+l+1]}{(k+2)(k+1)}a_k = -\frac{(l-k) \cdot [l+k+1]}{(k+2)(k+1)}a_k$ 这一递推公式。①. 偶数项 $a_2 = -\frac{l \cdot (l+1)}{2 \cdot 1}a_0$, $a_4 = -\frac{(l-2) \cdot (l+3)}{4 \cdot 3}a_2 = (-1)^2 \frac{(l-2) \cdot (l+3)}{4 \cdot 3} \frac{l \cdot (l+1)}{2 \cdot 1}a_0 = (-1)^2 \frac{(l-2) \cdot (l+1) \cdot (l+3)}{4!}a_0$ 。于是 $a_{2k} = (-1)^k \frac{[l-(2k-2)] \cdot \dots \cdot (l+1) \cdot \dots \cdot (l+2k-2+1)}{(2k)!}a_0 = (-1)^k \frac{(l-2k+2) \cdot \dots \cdot (l+1) \cdot \dots \cdot (l+2k-1)}{(2k)!}a_0$ (其实这里严谨的人偏向于用 a_{2n} , 即 $k=2n$, 而不是 $2k$: 这样之后可直接将 $2n$ 代入 k 中; 但我们之后会用到 n , 这里就不再引入让人迷糊的量了)。【在 l 与 $(l+1)$ 之间分开, l 往左 -2 到 $(l-2k+2)$, $(l+1)$ 往右 $+2$ 到 $(l+2k-1)$ 】

②. 奇数项 $a_3 = -\frac{(l-1) \cdot (l+2)}{3 \cdot 2}a_1$, $a_5 = -\frac{(l-3) \cdot (l+4)}{5 \cdot 4}a_3 = (-1)^2 \frac{(l-3) \cdot (l+4)}{5 \cdot 4} \frac{(l-1) \cdot (l+2)}{3 \cdot 2}a_1 = (-1)^2 \frac{(l-3) \cdot (l-1) \cdot (l+2) \cdot (l+4)}{5!}a_1$ 。于是 $a_{2k+1} = (-1)^k \frac{[l-(2k-1)] \cdot \dots \cdot (l-1) \cdot (l+2) \cdot \dots \cdot (l+2k-1+1)}{(2k+1)!}a_1 = (-1)^k \frac{(l-2k+1) \cdot \dots \cdot (l-1) \cdot (l+2) \cdot \dots \cdot (l+2k)}{(2k+1)!}a_1$ 。【在 $(l-1)$ 与 $(l+2)$ 之间分开, $(l-1)$ 往左 -2 到 $(l-2k+1)$, $(l+2)$ 往右 $+2$ 到 $(l+2k)$ 】

将 a_{2k} 和 a_{2k+1} 全用 a_0, a_1 表示的表达式代入 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+2) \cdot \dots \cdot (l+1) \cdot \dots \cdot (l+2k-1)}{(2k)!} a_0 x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+1) \cdot \dots \cdot (l-1) \cdot (l+2) \cdot \dots \cdot (l+2k)}{(2k+1)!} a_1 x^{2k+1} = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$, 其中 $y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+2) \cdot \dots \cdot (l+1) \cdot \dots \cdot (l+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}$, $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+1) \cdot \dots \cdot (l-1) \cdot (l+2) \cdot \dots \cdot (l+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ 。

级数 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的收敛半径均为 $R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+2}} \right|$, 根据递推公式 $a_{k+2} = -\frac{(l-k) \cdot [l+k+1]}{(k+2)(k+1)}a_k$, $R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+2)(k+1)}{(l-k) \cdot [l+k+1]} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+\frac{2}{k})(1+\frac{1}{k})}{(\frac{l}{k}-1) \cdot (\frac{l}{k}+1+\frac{1}{k})} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(-1) \cdot 1} \right| = 1$ 。于是 $R=1$ 。因此, $y_0(x), y_1(x)$ 以及级数解 $y(x)$ 在 $|x| < 1$ 内是收敛的。且利用高斯判别法 (比比值法更高级) 可以证明 $y_0(x), y_1(x), y(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处发散。

可以看到, l 阶勒让德方程中的 $x = \cos \theta \in [-1, 1]$, 而 x 只在 ± 1 处发散, 对应 θ 只在 $0, \pi$ 上发散, 在 $(0, \pi)$ 上都收敛, 这已是很不错的结果了。但是, 自然的边界条件要求 $y|_{x=\pm 1}$ 为有限值, 这与级数解 $y(x)$ 在 $x = \pm 1$ 发散矛盾。

2. 让 $y(x)$ 在 $x=\pm 1$ 收敛的解决方案: 选取特定的 l 值(非负整数), 使得无穷级数退化成多项式(并不是近似, 而是后无穷个系数=0)。——若取 $l=2n$ (n 为非负整数, l 为非负偶数; 其实, 对称地, 也可以取 $l=-(2n+1)$, 则 $k=n+1$ 时, $l+2k-1=0$), 则

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2n-2k+2) \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}{(2k)!} x^{2k} =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k+2) \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (2n+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}, \text{ 其中的 } \left(\frac{a_{2k}}{a_0}\right) \text{ 中的 } k \text{ 从能取到 } \infty \text{ 到只取到 } n,$$

是因为 $\frac{a_{2n}}{a_0} = (-1)^n \frac{(2n-2n+2) \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (2n+2n-1)}{(2n)!} = (-1)^n \frac{n! \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (4n-1)}{(2n)!}$, 而从下一项开始: $\frac{a_{2(n+1)}}{a_0} = (-1)^{n+1} \frac{0 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (4n-1) \cdot (4n+1)}{[2(n+1)]!} = 0$, $k \geq n+1$ 之后的 a_{2k} 也全为 0; \therefore a_{2k} 只能取到 a_{2n} 即 a_l , 且 $y_0(x)$ 只取到(求和至) x^{2n} 项, 即 x^l 项。

但此时 $y_1(x)$ 仍发散(恰好错开了, 没有一项=0, 而是最接近 0 的两项 $=\pm 1$), 因此需令 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ 中 $a_1 = 0$, 此时 $y(x) = a_0 y_0(x)$ 。进一步地, $y(x) = a_0 y_0(x) = C \cdot \frac{1}{C} a_0 y_0(x) = C \cdot P_l(x)$, $P_l(x)$ 称作 l 阶勒让德多项式。【 $P_l(x)$ 由 $y(x)$ 即 $a_0 y_0(x)$ 退化得到的多项式, 乘以适当常数得到。也就是 a_0 或 a_1 乘以适当常数 $\frac{1}{C}$ (将其看作一个乘积因子, 而不是除以 C), 成为某特定的 a'_0, a'_1 后, 此时 a_l 也成为了特定的 a'_l , 才能称此时的 $a'_0 y_0(x) = \frac{1}{C} a_0 y_0(x)$ 为 $P_l(x)$; 此时通解 $y(x)$ 若用 $P_l(x)$ 表示则应写作 $C \cdot P_l(x)$ 】

同样的道理, 若取 $l=2n+1$ (n 为非负整数, l 为正奇数; 按理说也可以取 $l=-(2n+2)$, 则 $k=n+1$ 时, $l+2k=0$), 则由于 $k=n+1$ 时, $l-2k+1=0$, k 也只能取到 n , a_{2k+1} 只取到 a_{2n+1} 即 a_l 【 $\frac{a_{2n+1}}{a_0} = (-1)^n \frac{2 \cdots 2n \cdot (2n+3) \cdots (4n+1)}{(2n)!}$ 】, 且 $y_1(x)$ 只取到 x^{2n+1} 项, 仍即 x^l 项。此时 $y_0(x)$ 仍发散, 需令 $a_0 = 0$, 此时 $y(x) = a_1 y_1(x)$ 。选取适当的 a_1 , 使得 $a_1 y_1(x) = P_l(x)$, 即也就是 l 阶勒让德多项式。【但若用边界条件确定了 a_1 , 即 $a_1 y_1(x)$ 成为方程的解 $y(x)$ 之后(而不是形式上的通解), 则对应的 $P_l(x)$ 多不是其解 $y(x)$, 要乘以待定系数 C 之后, 通过边界条件确定 $C \cdot P_l(x)$ 中的 C 下来, $C \cdot P_l(x)$ 才是解 $y(x)$ 】

3. 以上, 自然边界条件要求级数解 $y(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处保持有限, 则 l 不能任意取值, 只能取使得级数解退化成多项式的那些非负整数值, 因此自然边界条件和勒让德方程构成本征值问题。本征值是 $l(l+1)$ ($l=0, 1, 2, 3, \dots$), 本征函数是与之对应的 l 阶勒让德多项式 $P_l(x)$, 解为 $y(x) = C \cdot P_l(x)$: 即 l =偶数, 对应 $y(x) = a_0 y_0(x)$; l =奇数, 对应 $y(x) = a_1 y_1(x)$ 。

【我估计之所以不让 l 取负整数值, 是因为否则的话, a_{2n} 和 a_{2n+1} 会被表为 a_{-l-1} , 而不是 a_l , 看上去非常不和谐; 并且氢原子波函数中, l 都是从 0 取到 n , 只有 m_l 才从 $-l$ 取到 l (m_l 在某种意义上更像这里的不规范的 l)。并且那里的 n 与这里的 n 不同, 这里的 $n \leq l$, 且没有上限; 而那里的 n 是主量子数, 其值 $> l$, 且 l 有上限 $n-1$ 】

9.3 正则奇点邻域上的级数解法

(一).奇点邻域上的级数解

考虑复变函数 $w(z)$ 的二阶线性常微分方程: $\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$, 若选定的点 z_0 是方程的奇点[即 z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点], 则一般来说, 解 $w(z)$ 也以 z_0 为奇点。因此就不存在诸如 $\begin{cases} w(z_0) = C_0 \\ w'(z_0) = C_1 \end{cases}$ 的初始条件了。

定理: 若 z_0 是方程的奇点, 则在点 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < R$ 上, 方程存在两个线性无关解, 形式为 $w_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}$, 以及 $w_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}$ 或 $w_2(z) = A w_1(z) \ln(z - z_0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}$ 。

其中, 对于某些问题而言 $w_1(z), w_2(z)$ 的 k 不一定从 $-\infty$ 开始取(即负幂次项有限, 但仍有负幂次项, 即存在 $s + k < 0$); 各个系数 s_1, s_2, A, a_k, b_k 的确定方法, 见下面的例子:

(二).正则奇点邻域上的级数解

正则奇点: 若存在的两个线性独立解, 在方程的奇点 z_0 的邻域上只有有限个负幂项, 称 z_0 为方程的正则奇点。【逻辑很奇怪, 解的负幂项有限, 称系数 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点 z_0 , 为方程的正则奇点 = ? ——解、系数、方程, 全都牵扯进来了; 正则: 是指比较好的情况】

若 $p(z)$ 以 z_0 为不高于一阶的极点, $q(z)$ 以 z_0 为不高于二阶的极点, 即 $p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k (z - z_0)^k$ 【其中 p_{-1}, q_{-2} 等可 = 0】, 则奇点 z_0 为方程的正则奇点。也就是说, 此时两个线性无关解在 z_0 的邻域上只有有限个负幂项: $w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}$, 以及 $w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k} (s_1 - s_2 \neq \text{整数})$ 或 $w_2(z) = A w_1(z) \ln(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k} (s_1 - s_2 = \text{整数}; A \text{ 可} = 0)$ 【 k 都从 0 开始取了, 哪来的负幂次项呢? 别忘了 s 】。——并且此时, 其中的 s_1, s_2 是判定方程 $s(s-1) + s p_{-1} + q_{-2} = 0$ 的两个根, 且 s_2 是较小的那一个根。

证明: 将解和系数以级数形式代入常微分方程: $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s+k}, w'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (s+k) a_k (z - z_0)^{s+k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k+1) a_{k+1} (z - z_0)^{s+k}, w''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} (s+k)(s+k-1) a_k (z - z_0)^{s+k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (s+k+2)(s+k+1) a_{k+2} (z - z_0)^{s+k}$, 以及 $p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k (z - z_0)^k, q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k (z - z_0)^k$, 代入 $\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$, 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s+k+2)(s+k+1)a_{k+2}(z-z_0)^{s+k}+\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}(s+k+1)a_{k+1}(z-z_0)^{s+k}+\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s+k}=0.$$

其中, 最低幂项为 $(z-z_0)^{s-2}$, 它只能由 $q_{-2}(z-z_0)^{-2} \cdot a_0(z-z_0)^s$ 得到, 即 $q_{-2}a_0(z-z_0)^{s-2}$; 幂次第二低的项为 $(z-z_0)^{s-1}$ 它可来源于 $p_{-1}(z-z_0)^{-1} \cdot (s+1)a_1(z-z_0)^s=p_{-1}(s+1)a_1(z-z_0)^{s-1}$ 、 $q_{-2}(z-z_0)^{-2} \cdot a_1(z-z_0)^{s+1}=q_{-2}a_1(z-z_0)^{s-1}$ 和 $q_{-1}(z-z_0)^{-1} \cdot a_0(z-z_0)^s=q_{-1}a_0(z-z_0)^{s-1}$, 于是合并同类项为 $[p_{-1}(s+1)a_1+q_{-2}a_1+q_{-1}a_0](z-z_0)^{s-1}$.

幂次第三低的项 $(z-z_0)^s$ 的系数来源有: $(s+2)(s+1)a_2$ 、 $p_{-1} \cdot (s+2)a_2$ 和 $p_0 \cdot (s+1)a_1$ 、 $q_{-2} \cdot a_2$ 和 $q_{-1} \cdot a_1$ 和 $q_0 \cdot a_0$ 。

【额, 以上过程有问题, 负幂次项往下求导还有次数更低的项, 即应有 $w'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)a_k(z-z_0)^{s+k-1}$ 、 $w''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k-1)a_k(z-z_0)^{s+k-2}$, 因此 $\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$ 变为 $\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k-1)a_k(z-z_0)^{s+k-2}+\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}(s+k)a_k(z-z_0)^{s+k-1}+\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s+k}=0$, 则最低次幂还得加上 $w''(z), w'(z)$ 所单独分出的 $k=0$ 的俩 $s(s-1)a_0, p_{-1}sa_0$, 并变为: $s(s-1)a_0, p_{-1}sa_0, q_{-2}a_0$; 幂次第二低的项还得加上 $w''(z), w'(z)$ 所分别分出的 $k=1, k=0$ 的俩 $(s+1)sa_1, p_0sa_0$, 并变为: $(s+1)sa_1, p_{-1}(s+1)a_1$ 和 $p_0sa_0, q_{-2}a_1$ 和 $q_{-1}a_0$; 幂次第三低的项还得加上 $w'(z)$ 所分出的 $k=0$ 的 p_1sa_0 , 并变为: $(s+2)(s+1)a_2, p_{-1} \cdot (s+2)a_2$ 和 $p_0 \cdot (s+1)a_1$ 和 $p_1sa_0, q_{-2} \cdot a_2$ 和 $q_{-1} \cdot a_1$ 和 $q_0 \cdot a_0$; 幂次第三低以上的项的数目和形式, 需加上 $w'(z)$ 所分出的 $k=0$ 的那个东西。——所以 $\frac{d^2w}{dz^2}, p(z)\frac{dw}{dz}, q(z)w$ 的同次幂项的系数数目, 随考虑的幂的增长 $s-2, s-1, \dots$, 有以下规律: $1(0)+1(-1VS0)+1(-2VS0) \rightarrow 1(1)+2(-1\sim 0VS1\sim 0)+2(-2\sim -1VS1\sim 0) \rightarrow 1(2)+3(-1\sim 1VS2\sim 0)+3(-2\sim 0VS2\sim 0) \rightarrow 1(3)+4(-1\sim 2VS3\sim 0)+4(-2\sim 1VS3\sim 0) \rightarrow \dots$ 括号中的数字代表: 系数 p_k 或 q_k 的 $kVSa_k$ 的; $\frac{d^2w}{dz^2}, p(z)\frac{dw}{dz}, q(z)w$ 的 k 之和分别为: $0, -1, -2 \rightarrow 1, 0, -1 \rightarrow 2, 1, 0 \rightarrow 3, 2, 1$. 第三项(即 $q(z)w$ 的俩) k 之和, 即为幂的次数】

在修正了想法后, 最低次幂项, 对应的系数为: $s(s-1)a_0+p_{-1}sa_0+a_0q_{-2}$. 令它=0, 得到 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$, 这就是判定方程。它的两个根就作为两个解 $w_1(z), w_2(z)$ 的最低幂次。之后将 s_1 代入刚刚求出的那些合并同幂项后的, 各次幂的系数和之中, 并令各幂次的系数为0, 就能得到系数的递推公式, 以从 a_0 求得各 a_k , 这就求出了 $w_1(z)$ 。再将 s_2 代入同样的那些同幂项的系数和之中, 此时通过递推所算出来的 a_k 们, 就是 $w_2(z)$ 中的 b_k 们, 于是这就求出了 $w_2(z)$ 【这里的 $w_2(z)$ 是指它的这个形式: $\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$ 】。

【关于递推公式: $s-2$ 次幂的系数和为: $[s(s-1)+p_{-1}s+q_{-2}]a_0$; $s-1$ 次幂的系数和为: $[(s+1)s+p_{-1}(s+1)+q_{-2}]a_1+[p_0s+q_{-1}]a_0$, $s+0$ 次幂的系数和为: $[(s+2)(s+1)+p_{-1} \cdot (s+2)+q_{-2}]a_2+[p_0 \cdot (s+1)+q_{-1}]a_1+[p_1s+q_0]a_0$; 构成系

数和的数量, 从 $1+2+2$ 和 $1+3+3$ 以及 $1+4+4$, 变为了重新分类(之前按来源分类, 现在按 a_k 分类)后的 $3+2$ 以及 $3+2+2$ 以及 $3+2+2+2$ 。那么 $s+k-2$ 次幂的系数和为:
 $[(s+k)(s+k-1) + p_{-1} \cdot (s+k) + q_{-2}]a_k + [p_0 \cdot (s+k-1) + q_{-1}]a_{k-1} + \dots + [p_{k-1}s + q_{k-2}]a_0$, 令它们=0, 使得 a_k 的递推公式(对于不同的 s 值如 s_1, s_2 , a_k 分别对应 a_k, b_k)。】

但若 $s_1 - s_2 = h$ (h 为 0 或正整数; \because 整数 $+s_2 \leq s_1$ 所致), 递推 b_k 时会发现不对劲:
 若 $h=0$, 则 $s_2=s_1$, $b_k=a_k$, $w_2(z)$ 与 $w_1(z)$ 完全相同; 若 h 为正整数, 则对于 b_k 的递推公式:
 $[(s_2+k)(s_2+k-1) + p_{-1} \cdot (s_2+k) + q_{-2}]b_k + [p_0 \cdot (s_2+k-1) + q_{-1}]b_{k-1} + \dots + [p_{k-1}s_2 + q_{k-2}]b_0 = 0$, 我们考察 b_h 的递推公式, 令 $k=h$, 并由于 $s_2+h=s_1$, 得到
 $[s_1(s_1-1) + p_{-1} \cdot s_1 + q_{-2}]b_h + [p_0 \cdot (s_1-1) + q_{-1}]b_{h-1} + \dots + [p_{h-1}s_2 + q_{h-2}]b_0 = 0$ 。
 再根据 $s_1(s_1-1) + p_{-1} \cdot s_1 + q_{-2} = 0$ 发现: 哇靠, b_h 直接没了; 因而无法继续推知 $k \geq h$ 之后的 b_k 了。

这意味着方程的第二个解 $w_2(z)$, 形式上不能是 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}$; 那它的形式应该是怎样的呢? 这里先介绍朗斯基行列式 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}$:

【根据线性相关的定义, 若 w_1, w_2 线性相关(在某一区域 B 内), 则存在一组不全为 0 的常系数 c_1, c_2 , 使得 $c_1 w_1 + c_2 w_2 = 0$; 又因求导是线性运算, 则 $c_1 w_1' + c_2 w_2' = 0$; 将二者写成矩阵形式即有: $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。也就存在 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 使得区域内 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 恒成立, 而齐次方程有非零解 \Leftrightarrow 系数行列式=0, 即 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = 0$ 。

①. 以上是将方程 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 中的 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 看作 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix}$ 看作系数矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 。则根据克莱姆法则, 若系数行列式 $\neq 0$, 则方程 $c_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix} = 0$ 只有零解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 根据线性无关的定义, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}$ 线性无关; 若系数行列式=0, 则(充要条件为)该齐次方程有非零解, 则根据线性相关的定义, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}$ 线性相关。

②. 或者这么看: 若在某区域 B 内, 对于任意一点总有 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix}$ 满秩, 则 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}$ 线性无关, 即 w_1, w_2 线性无关(在区域 B 内); 若在某区域 B 内, 对于任意一点总有 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \equiv 0$, 则 $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}$ 线性相关, 即 w_1, w_2 线性相关(在区域 B 内)。反之, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_2' \end{pmatrix}$ 线性相关和无关, 也推知 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix}$ 降秩或满秩。

***有些地方说, “某区域 B 内 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \equiv 0$ ” 不能推出 “此区域内 w_1, w_2 线性相关”, 他们举了个例子 $w_1(x)=x$ 、 $w_2(x)=|x|$, 在 $x>0$ 的区间和 $x<0$ 的区间上均有 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = 0$, 然而 $w_1(x), w_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关。——我觉得这是没有深入理解它: 这话本身就有问题, $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \equiv 0$ 只在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上才成立, 它便只能预言 $w_1(x), w_2(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上线性相关。而且这是对的: $(-\infty, 0)$ 上 $x, -x$ 线性相关,

$(0, +\infty)$ 上 x, x 线性相关。——你无法通过 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}$ 来研究 $w_1(x), w_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的线性相关性，因为 $w_2(x)$ 在 $x=0$ 处不可导， w_2' 不存在，判据 $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}$ 则也不存在；而且，你确定能说 x 和 $|x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关吗？】

回到 $\begin{cases} w_1'' + p(z)w_1' + q(z)w_1 = 0 \\ w_2'' + p(z)w_2' + q(z)w_2 = 0 \end{cases}$ ，朗斯基行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = w_1 w_2' - w_2 w_1'$ 也是 z 的函数，记为 $\Delta(z)$ 。我们用 $w_1 \times$ 下一个方程，减去 $w_2 \times$ 上一个方程，得到 $(w_1 w_2'' + p(z)w_1 w_2') - (w_2 w_1'' + p(z)w_2 w_1') = (w_1 w_2'' - w_2 w_1'') + p(z)(w_1 w_2' - w_2 w_1') = ((w_1 w_2')' - (w_2 w_1')') + p(z) \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = \Delta' + p(z)\Delta = 0$ ，这是个常微分方程， $\frac{d\Delta}{\Delta} = -p(z)dz$ ，解得 $\Delta = \Delta_0 e^{-\int p(z)dz}$ 。【 Δ_0 只是与 z 无关，或许与其它变量有关】

在解出了 Δ 后，我们便可利用以下步骤，通过二阶微分方程的一个解 w_1 ，来求得线性独立的第二个解 w_2 ： $\frac{d}{dz} \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = \frac{w_1 w_2' - w_2 w_1'}{w_1^2} = \frac{\Delta}{w_1^2}$ ，于是 $\frac{w_2}{w_1} = \int \frac{\Delta}{w_1^2} dz$ ， $w_2 = w_1 \int \frac{\Delta}{w_1^2} dz = w_1 \int \frac{\Delta_0 e^{-\int p(z)dz}}{w_1^2} dz$ 。于是将 $w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}$ 代入其中，便可得到 $w_2(z)$ 的第二种形式： $A w_1(z) \ln(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}$ ，当 $A=0$ 时，便退化到第一种形式。

(三).贝赛尔方程

(1).在 $x_0=0$ 的邻域上求解 ν 阶贝赛尔方程： $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ ，先考虑其中的 ν 不是整数或半奇数的情形(之前都是 m 阶，不知道这里为啥用 ν 表阶数；或许是因为阶数不是整数的缘故，而 m 一般表整数 =)：

1.写作标准形式： $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$ 。 $x_0=0$ 分别是系数 $p(x)=\frac{1}{x}, q(x)=1 - \frac{\nu^2}{x^2}$ 的一、二阶极点，因此点 $x_0=0$ 是贝赛尔方程的正则奇点。而判定方程 $s(s-1) + p_{-1}s + q_{-2} = s(s-1) + s \cdot 1 - \nu^2 = s^2 - \nu^2 = 0$ ，两根为 $s_1 = \nu, s_2 = -\nu$ (s_2 是较小的那个；为方便讨论，这里先考虑 $\nu > 0$ 的情形， $\nu < 0$ 时，直接令 $s_1 = -\nu, s_2 = \nu$)；由于 ν 不是非负的整数或半奇数，于是 $s_1 - s_2 = 2\nu$ 不是 0 或正整数，因此两个线性无关解取 $w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}$ ，和 $w_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}$ 的形式【但我们的方程写作实数范围内的 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\nu+k}$ ，和 $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\nu+k}$ 】。

利用递推公式： $s - 2$ 次幂的系数和为： $[s(s-1) + p_{-1}s + q_{-2}]a_0$ ； $s - 1$ 次幂的系数和为： $[(s+1)s + p_{-1}(s+1) + q_{-2}]a_1 + [p_0s + q_{-1}]a_0$ ， $s + 0$ 次幂的系数和为： $[(s+2)(s+1) + p_{-1} \cdot (s+2) + q_{-2}]a_2 + [p_0 \cdot (s+1) + q_{-1}]a_1 + [p_1s + q_0]a_0$ ； $s + k - 2$ 次幂的系数和为： $[(s+k)(s+k-1) + p_{-1} \cdot (s+k) + q_{-2}]a_k + [p_0 \cdot (s+k-1) + q_{-1}]a_{k-1} + \dots + [p_{k-1}s + q_{k-2}]a_0$ 。

令 $s - 2$ 次幂的系数和 $[s^2 - \nu^2]a_0 = 0$ ； $s - 1$ 次幂的系数和 $[(s+1)s + (s+1) - \nu^2]a_1 + [0 \cdot s + 0]a_0 = 0$ ； $s + 0$ 次幂的系数和 $[(s+2)(s+1) + (s+2) - \nu^2]a_2 + [0 \cdot$

$(s+1)+0]a_1+[0\cdot s+1]a_0=0\ldots$ ——于是 $s-2$ 次幂的系数和 $[s^2-v^2]a_0=0$; $s-1$ 次幂的系数和 $[(s+1)^2-v^2]a_1=0$; $s+0$ 次幂的系数和 $[(s+2)^2-v^2]a_2+a_0=0$; $s+k-2$ 次幂的系数和 $[(s+k)^2-v^2]a_k+a_{k-2}=0$ 。

约定 $a_0 \neq 0$, 第一个系数仅仅因为判定方程 $s^2-v^2=0$ 而为 0 【注: x_0 不是方程的奇点时, 初始条件可以定出 a_0, a_1 ; 但若 x_0 是方程的奇点, 则因没有初始条件而无法定出 a_0, a_1 ——你可能会问那我们求半天求出来的通解中, 最终结果因 a_0, a_1 的不确定而不确定, 那有什么用? 你这样想, 即使你定下来了 a_0, a_1 , 不是也没用么——反正解在 x_0 处仍发散。所以对于方程的奇点处的解, 我们仅仅关心的是解的形式; 另外, 这里的 $a_0 \neq 0$ 是指 a_0 和 b_0 均 $\neq 0$ 】; 我们将 $s^2-v^2=0$ 所得结果 $s=\pm v$ 代入第二个方程, 即有 $[(\pm v+1)^2-v^2]a_1=0$, 解得 $a_1=0$ 【即无论将 $s_1=v$ 还是 $s_2=-v$ 代入递推公式, 所得的 a_1 和 b_1 都 $=0$ 】。

利用 $[(s+k)^2-v^2]a_k+a_{k-2}=0$ 对应的递推公式 $a_k=\frac{-1}{(s+k)^2-v^2}a_{k-2}=\frac{-1}{(s+k+v)(s+k-v)}a_{k-2}$ 进行递推: 先取 $s=s_1=v$ (即先得到各个 a_k , 再来递推各个 b_k ; 若不这么先带 s 进去的话, 递推公式规律不好找, 也没法简化), 代入得 $a_k=\frac{-1}{k(2v+k)}a_{k-2}$ 。对于 k 为偶数的项 (即 s_1+2k 次项 x^{v+2k}) 的系数: $a_2=(-1)\frac{1}{2(2v+2)}a_0=(-1)\frac{1}{v+1}\frac{1}{2^2}a_0$; $a_4=(-1)\frac{1}{4(2v+4)}a_2=(-1)\frac{1}{2(v+2)}\frac{1}{2^2}a_2=(-1)^2\frac{1}{2!(v+1)(v+2)}\frac{1}{2^4}a_0$; 于是 $a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{k!(v+1)(v+2)\cdots(v+k)}\frac{1}{2^{2k}}a_0=(-1)^k\frac{1}{k!A_{v+k}^v}\frac{1}{2^{2k}}a_0$; 【注: k 为偶数本该写作 $k=2n$ 的, 这里图方便直接沿用 $2k$ 来表示 k 为偶数】对于 k 为奇数的项, $a_3=\frac{-1}{3(2v+3)}a_1=0$, 则 $a_{2k+1}=0$, 即 x^{v+2k+1} 项系数均为 0。

得到 v 阶贝赛尔方程的一个特解 $y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{s_1+k}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{v+2k}=a_0x^v\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!A_{v+k}^v}\frac{1}{2^{2k}}x^{2k}$ 【这里第一个解 $y_1(x)$ 之所以不沿用之前勒让德处的 $y_0(x)$, 是因要对应 $w_1(z), w_2(z)$ 的嘛】。

级数 $y_1(x)$ 的收敛半径为 $R^2=\lim_{k\rightarrow\infty}\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|\cdot\left|\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}\right|=\lim_{k\rightarrow\infty}\left|\frac{a_{k-2}}{a_k}\right|$, 根据递推公式 $a_k=\frac{-1}{k(2v+k)}a_{k-2}$, $R^2=\lim_{k\rightarrow\infty}|-k(2v+k)|=\infty$ 。于是 $R=\infty$ 。因此 $y_1(x)$ 在 x 有限时均是收敛的。通常将 a_0 取作 $a_0=\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$, 这样一来 $y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!A_{v+k}^v\Gamma(v+1)}\frac{1}{2^{v+2k}}x^{v+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!A_{v+k}^v\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}$, 其中 $\Gamma(v+k+1)=(v+k)\Gamma(v+k)=(v+k)(v+k-1)\Gamma(v+k-1)=\cdots=A_{v+k}^v\Gamma(v+1)$, 即实变数 x 的伽马函数。通常将 $y_1(x)$ 记为 $J_v(x)$, 称其为 v 阶贝赛尔函数, 即 $J_v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}$ 。

2. 再取 $s=s_2=-v$: 递推公式 $a_k=\frac{-1}{(s+k+v)(s+k-v)}a_{k-2}$ 变为 $b_k=\frac{-1}{k(-2v+k)}b_{k-2}$, 它相对于 $s=s_1=v$ 的 $a_k=\frac{-1}{k(2v+k)}a_{k-2}$, 相当于只是将 $v\rightarrow-v$, 因此结果自然而然有: $b_{2k}=(-1)^k\frac{1}{k!(-v+1)(-v+2)\cdots(-v+k)}\frac{1}{2^{2k}}b_0=(-1)^k\frac{1}{k!A_{-v+k}^{-v}}\frac{1}{2^{2k}}b_0$, $b_{2k+1}=0$, 且 $y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{s_2+k}=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}x^{-v+2k}=b_0x^{-v}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!A_{-v+k}^{-v}}\frac{1}{2^{2k}}x^{2k}$ 。

$R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k-2}}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |-k(-2\nu + k)| = \infty$, $R = \infty$, 但由于级数存在负幂次项($x^{-\nu}, x^{-\nu+1}$ 等), 因此 x 取有限值且非 0 值(即 $0 < |x| < \infty$), 它就收敛。同样取 $b_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, 则

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}, \text{ 记作 } J_{-\nu}(x), \text{ 称为 } -\nu \text{ 阶贝塞尔函数。}$$

当 $s_1 - s_2 = 2\nu$ 不是 0 或整数时【注: ν 可取负了】, $J_\nu(x), J_{-\nu}(x)$ 线性无关, 此时 ν 阶贝塞尔方程的通解为 $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ 。

(2). 半奇数($l + \frac{1}{2}$)阶贝塞尔方程: $x^2 y'' + xy' + [x^2 - (l + \frac{1}{2})^2]y = 0$, 在 $x_0 = 0$ 的邻域上求解它(相当于 $\nu = l + \frac{1}{2}$, 其中 l 为整数):

1. 先对 $\nu > 0$, 即 $l = 0, 1, 2, \dots$ 的情形做讨论, 并先考虑 $l = 0$ 的情形。写作标准形式:

$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{(\frac{1}{2})^2}{x^2})y = 0$. $x_0 = 0$ 是贝塞尔方程的正则奇点。判定方程两根为 $s_1 = \nu, s_2 = -\nu$, 即 $s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = -\frac{1}{2}$; 由于 $s_1 - s_2 = 2\nu = 1$ 是正整数, 因此两个线性无关解取 $w_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k}$, 和 $w_2(z) = A w_1(z) \ln(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}$ 的形式, 即也就是 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\frac{1}{2}+k}$, $y_2(x) = A y_1(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k}$ 。

对于 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\frac{1}{2}+k}$, 将其代入后仍然以同样的递推公式, 得到 $y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, 这就是 $\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔函数 $J_{\frac{1}{2}}(x)$ 。

但对于 $y_2(x) = A y_1(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k}$, 我们只需关心 $y_2''(x), y_2'(x), y_2(x)$ 中除了 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k}$ 之外, $A y_1(x) \ln x$ 部分所额外引入的各次幂的系数: $A y_1(x) \ln x, [A y_1(x) \ln x]' = A \left[y_1(x) \frac{1}{x} + y_1'(x) \ln x \right], [A y_1(x) \ln x]'' = A \left[-y_1(x) \frac{1}{x^2} + 2y_1'(x) \frac{1}{x} + y_1''(x) \ln x \right]$, 但其中的 $y_1(x)$ 虽可展成级数 $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, 但 $\ln x$ 无法在 $x_0 = 0$ 的邻域展成级数。

所以我们将 $A y_1(x) \ln x$ 们代入 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y$, 得到 $x^2 A [-y_1(x) \frac{1}{x^2} + 2y_1'(x) \frac{1}{x} + y_1''(x) \ln x] + x A [y_1(x) \frac{1}{x} + y_1'(x) \ln x] + (x^2 - \frac{1}{4}) A y_1(x) \ln x$, 于是 $A [-y_1(x) + 2xy_1'(x) + x^2 y_1''(x) \ln x] + A [y_1(x) + xy_1'(x) \ln x] + (x^2 - \frac{1}{4}) A y_1(x) \ln x$ 。合并同类项, 得到 $A [2xy_1'(x)] + A [x^2 y_1''(x) + xy_1'(x) + (x^2 - \frac{1}{4}) y_1(x)] \ln x$, 由于 $y_1(x) = J_{\frac{1}{2}}(x)$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程的一个特解, 则其中的 $[\] = 0$, 只剩下 $A [2xy_1'(x)] = 2Ax \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}} \right]' = 2A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+\frac{1}{2}}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}$ 。然而我们的 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k}$ 在之前却代入的是 $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{x^2})y = 0$ 这个方程, 为了沿用之前的它的各次幂系数, 我们将 $A [2xy_1'(x)]/x^2$, 得到 $2A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+\frac{1}{2}}{(2k+1)!} x^{2k-\frac{3}{2}}$ 。

其 $s_2 - 2$ 次幂的系数为 $0(s_2 = -\frac{1}{2})$; $s_2 - 1$ 次幂的系数为 $2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^0 \frac{1}{(1)!} = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}$;
 $s_2 + 0$ 次幂的系数为 0 ; $s_2 + 1$ 次幂的系数为 $2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^1 \frac{5}{(3)!} = -A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{5}{3!}$; ...; $s_2 + 2n - 2$
 次幂的系数为 0 ; $s_2 + (2n + 1) - 2$ 次幂的系数为 $2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!}$ 。【 $k=2n+1$ 奇数
 才有 $A[2xy_1'(x)]/x^2$ 所分出来的对应系数】

然而 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k}$ 所创造的各次幂的系数为: $s_2 - 2$ 次幂的系数和 $[s_2^2 - v^2]b_0 = 0$;
 $s_2 - 1$ 次幂的系数和 $[(s_2 + 1)^2 - v^2]b_1 = 0$; $s_2 + 0$ 次幂的系数和 $[(s_2 + 2)^2 - v^2]b_2 + b_0 = 0$;
 0 ; $s_2 + k - 2$ 次幂的系数和 $[(s_2 + k)^2 - v^2]b_k + b_{k-2} = 0$ 。

将 $A[2xy_1'(x)]/x^2$ 所创造的系数引入其中, 得到 $s_2 - 2$ 次幂的系数和 $0 \cdot b_0 = 0$; $s_2 - 1$
 次幂的系数和 $0 \cdot b_1 + A\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$; $s_2 + 0$ 次幂的系数和 $[(\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2]b_2 + b_0 = 0$; $s_2 + 1$ 次
 幂的系数和 $[(\frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2]b_3 + b_1 - A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{5}{3!} = 0$; $s_2 + 2n - 2$ 次幂的系数和 $[(2n - \frac{1}{2})^2 -$
 $(\frac{1}{2})^2]b_{2n+2} + b_{2n} = 0$; $s_2 + (2n + 1) - 2$ 次幂的系数和 $[(2n + 1 - \frac{1}{2})^2 -$
 $(\frac{1}{2})^2]b_{2n+3} + b_{2n+1} + 2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} = 0$ 。

于是 b_0 可取任意值; b_1 可取任意值, 且 $A=0$ 。——由于 $A=0$, 则 $y_2(x)$ 中不出现对
 数, 第二种形式退化到第一种形式, 于是 $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\frac{1}{2}+k} = J_{-\frac{1}{2}}(x) =$
 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-v+k+1)} (\frac{x}{2})^{-v+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k+\frac{1}{2})} (\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}+2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} =$
 $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$, 即 $-\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔函数 $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ 。

因此 $\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程的通解为 $y(x) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$ 。

2. 然后我们再考虑一般情况下的, $l=1, 2, \dots$ 时的半奇数 $(l+\frac{1}{2})$ 阶贝塞尔方程: 判定
 方程两根之差 $s_1 - s_2 = 2v = 2(l+\frac{1}{2})$ 是正整数, 因此两个线性无关解中, 大根 $s_1 = v = l+\frac{1}{2}$ 对
 应 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{l+\frac{1}{2}+k}$ 、小根 $s_2 = -v = -(l+\frac{1}{2})$ 对应 $y_2(x) = A y_1(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-(l+\frac{1}{2})+k}$ 。

对于 $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{l+\frac{1}{2}+k}$, 同样有 $y_1(x) = J_v(x) = J_{l+\frac{1}{2}}(x)$; 而将 $y_2(x) = A y_1(x) \ln x +$
 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-(l+\frac{1}{2})+k}$ 代入方程后, 同样得到 $A=0$, 于是 $y_2(x) = J_{-v}(x) = J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)$ 。所以, 半
 奇数 $(l+\frac{1}{2})$ 阶贝塞尔方程的通解(l =整数, 无需正整数)为 $y(x) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)$ 。

3. 我们来算算 $J_v(x)$ 和 $J_{-v}(x)$ 的朗斯基行列式: $\Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_v(x) & J_{-v}(x) \\ J_v'(x) & J_{-v}'(x) \end{vmatrix}$, 其中,
 根据 $\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin \pi v}$, 可得 $\frac{1}{\Gamma(v)} = \frac{\sin \pi v}{\pi} \Gamma(1-v)$, 于是
 $J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(v+k+1)} (\frac{x}{2})^{v+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! A_{v+k} \Gamma(v)} (\frac{x}{2})^{v+2k} =$
 $\frac{\sin \pi v}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1-v)}{A_{v+k}} (\frac{x}{2})^{v+2k}$ 。且 $J_{-v}(x) = -\frac{\sin \pi v}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1+v)}{A_{-v+k}} (\frac{x}{2})^{-v+2k}$ 。于是

$$\Delta = \frac{\sin \pi v}{\pi} \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1-v)}{A_{v+k}^{v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k} & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1+v)}{A_{-v+k}^{-v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{v+k}^{v+1} \Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{-v+k}^{-v+1} \Gamma(-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2k} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\sin \pi v}{\pi} \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{v+k}^{v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{-v+k}^{-v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{v+k}^v} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{-v+k}^{-v}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{vmatrix}.$$

或者使用 $J_v(x) = \frac{x}{2v} [J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)]$, 以及 $\frac{dJ_v(x)}{dx} = \frac{1}{2} [J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)]$,

$$\begin{vmatrix} J_v(x) & J_{-v}(x) \\ J'_v(x) & J'_{-v}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{2v} [J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)] & \frac{x}{2v} [J_{-v-1}(x) + J_{-v+1}(x)] \\ \frac{1}{2} [J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)] & \frac{1}{2} [J_{-v-1}(x) - J_{-v+1}(x)] \end{vmatrix} =$$

$$\frac{x}{4v} \begin{vmatrix} J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) & J_{-v-1}(x) + J_{-v+1}(x) \\ J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x) & J_{-v-1}(x) - J_{-v+1}(x) \end{vmatrix}, \text{ 其中 } J_{v-1}(x) \cdot J_{-v-1}(x), -J_{v+1}(x) \cdot J_{-v+1}(x)$$

两项抵消, 得到 $\frac{x}{2v} [J_{v+1}(x)J_{-v-1}(x) - J_{v-1}(x)J_{-v+1}(x)]$ 。——当然, 你也可以将 $J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v-1}(x)$, 以及 $J_{-v+1}(x) = -\frac{2v}{x} J_{-v}(x) - J_{-v-1}(x)$ 代入, 得到 $[J_v(x) - \frac{x}{2v} J_{v-1}(x)][J_{-v-1}(x) + J_{v-1}(x)J_{-v}(x) + \frac{x}{2v} J_{-v-1}(x)] = J_v(x)J_{-v-1}(x) + J_{v-1}(x)J_{-v}(x)$ 。

额, 看样子从这个角度我无法从中得出李老师的结论: 即 $\Delta = \begin{vmatrix} J_v(x) & J_{-v}(x) \\ J'_v(x) & J'_{-v}(x) \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi x} \sin \pi v$; 即使我们尝试着使用 $\Delta = \Delta_0 e^{-\int p(x)dx} = \Delta_0 e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \Delta_0 \frac{1}{x}$, 也只能得到 $\Delta(x)$ 中的非常数部分: $\frac{1}{x}$, 但相比而言, 我们更需要得到 $\Delta_0 = -\frac{2}{\pi} \sin \pi v$ 这个常数部分(即与 x 无关的部分; 但因 $J_v(x), J_{-v}(x)$ 而与 v 有关)。

其实之前已得到过 $\Delta = \frac{\sin \pi v}{\pi} \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{v+k}^{v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{-v+k}^{-v-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{v+k}^v} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{A_{-v+k}^{-v}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{vmatrix}$,

看样子其中的行列式的值就是 $-\frac{2}{x}$, 但我没法给出证明额。

当 v 为整数时, $\Delta=0$, 此时 $J_v(x), J_{-v}(x)$ 线性相关; 当 v 不是整数时, $\Delta \neq 0$, 此时 $J_v(x), J_{-v}(x)$ 线性无关。如此一来, 我们便可直接判断出之前的半奇数 $(l+\frac{1}{2})$ 阶贝塞尔方程的两特解 $J_{(l+\frac{1}{2})}(x), J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)$ 一定线性无关, 直接线性组合出通解, 也就无需多言了。现在这个 v 是否为整数的条件比 $s_1 - s_2 = 2v$ 是否为整数要更严格了, 则可直接用前者而不用后者了: 只要 v 不是整数, 不管 $2v$ 是否是整数, 均可用线性无关的 $J_v(x), J_{-v}(x)$ 线性组合出通解, 因为此时即使 $2v$ 是整数, $y_2(x)$ 的第二种形式, 最终也会因 $A=0$ 而沦为 $J_{-v}(x)$ 。【但这只限于贝塞尔方程, 即 $s_1 - s_2 = 2v$ 这样的。】

(3). 整数 m 阶贝塞尔方程:

我们来证明一下, 当 v 为整数 m 时, $J_v(x)$ 与 $J_{-v}(x)$ 线性相关。【这并不代表其否命题: “ v 不是整数时, $J_v(x), J_{-v}(x)$ 就线性无关” 成立, 它俩本质上仍需要上一段的 Δ 是否 $=0$ 为充要证明; 不过这里通过证明其的一个分支, 以见端倪】

当 v 为整数 m 时, $\Gamma(m+k+1)=(m+k)!\Gamma(1)=(m+k)!$, 此时
 $J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k! (m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$; 同理, $J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$ 也
 将应用它, 但其中的 $\Gamma(\quad)$ 函数将在 $-m+k+1 \leq 0$ 时, 变得无限大, 因此求和从 $k \geq m$
 开始, 那么即有 $J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k! (-m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$, 令 $l=-m+k \geq -m+m=0$, 即
 从 ≥ 0 开始取, 且 $k=l+m$, 代入即有 $J_{-m}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+m} \frac{1}{(l+m)! (l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m}=$
 $(-1)^m \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{1}{(l+m)! (l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m}=(-1)^m \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k! (m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}=(-1)^m J_m(x)$ 。

因此, 对于整数 m , $J_m(x), J_{-m}(x)$ 二者线性相关, 且有 $J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$ 。我
 们来利用这个结论以及上一节末的结论, 导出另一个与 $J_m(x)$ 线性无关的(特)解:

①.首先, $\frac{1}{\sin \pi v}$ 不含 x , 则 $-\frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x)$ 仍然是贝塞尔方程的一个特解。【不论其
 阶数 v 是何值, $J_v(x)$ 都是它的一个特解, \therefore 与 $J_v(x)$ 线性相关或无关的 $J_{-v}(x)$ 也将是其特
 解之一】

②.其次, $\Delta(J_v(x), -\frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x)) = \begin{vmatrix} J_v(x) & -\frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x) \\ J'_v(x) & -\frac{1}{\sin \pi v} J'_{-v}(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin \pi v} \begin{vmatrix} J_v(x) & J_{-v}(x) \\ J'_v(x) & J'_{-v}(x) \end{vmatrix} =$
 $-\frac{1}{\sin \pi v} \cdot (-\frac{2}{\pi x} \sin \pi v) = \frac{2}{\pi x} \neq 0$, 于是 $J_v(x), -\frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x)$ 线性无关, 无论 v 是不是整数。但
 当 v 为整数时, 其虽满足方程, 但其极限不存在, 因而不能作为(另一个线性无关的)解。
 要想 $-\frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x)$ 极限存在, 必须将其凑成 0 型。

③.为此, 将该特解写为 $C_1 J_v(x) - \frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x)$ 的形式, 它仍保持与 $J_v(x)$ 线性无关;
 此时由于 v 为整数, 满足 $J_{-v}(x)=(-1)^v J_v(x)$, 因此 $C_1 J_v(x) - \frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x) =$
 $(-1)^v C_1 J_v(x) - \frac{1}{\sin \pi v} J_v(x) = [(-1)^v C_1 - \frac{1}{\sin \pi v}] \cdot J_v(x) \neq 0$, 即有 $\frac{(-1)^v C_1 \sin \pi v - 1}{\sin \pi v} \neq 0$, 此
 时 $\sin \pi v = 0$, 要想极限不为 0 , 则必有 $(-1)^v C_1 \cdot \sin \pi v - 1 = 0$, 于是
 $C_1 = \frac{1}{\sin \pi v (-1)^v} = \frac{(-1)^v}{\sin \pi v} = \frac{\cos \pi v}{\sin \pi v}$ 。

代回即有 $\frac{\cos \pi v}{\sin \pi v} J_v(x) - \frac{1}{\sin \pi v} J_{-v}(x) = \frac{\cos \pi v J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}$, 这便是真正意义上的另一个线
 性无关的解: 其对于任意 v , 既满足方程、又与 $J_v(x)$ 线性无关、且极限存在。我们称之
 为 v 阶诺依曼函数, 记为 $N_v(x) = \frac{\cos \pi v J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}$ 。

于是, 不论 v 是不是整数, $y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 N_v(x)$, 不仅是解(满足方程、极限存
 在), 而且是通解(两个线性无关解的组合)。

(4). $x=0$ 处的自然边界条件:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $J_0(x) \rightarrow 1$, $J_v(x) \rightarrow 0$, $J_{-v}(x) \rightarrow \infty$; $N_v(x) \rightarrow \pm \infty$, $N_m(x) \rightarrow -\infty$ 。因此,
 若研究的区域包含 $x=0$ 在内, 那么就得排除掉 $N_m(x), N_v(x), J_{-v}(x)$; 只剩下 $J_v(x), J_m(x),$
 $J_0(x)$ 。称为 $x=0$ 处所具有的自然边界条件。

第十章 球函数

我们在第九章, 对球坐标系下的拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$ 和亥姆霍兹方程 $\nabla^2 v + k^2 v = 0$ 进行分离变数 $R(r)Y(\theta, \varphi)$ 并引入常数 $l \cdot (l+1)$ 后, 得到球函数方程: $\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0$; 球函数方程的解 $Y(\theta, \varphi)$ 称为球函数, 即定义在半径为 r 的球面上的一个关于 (θ, φ) 的函数。

进一步分离变量 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 并引入常数 λ , 可解得 $\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi$, 并得到 l 阶连带勒让德方程 $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0$, 其中 $x = \cos \theta$ 。

10.1 轴对称球函数

先研究 $m=0$ 的特例, 此时 $\Phi(\varphi) = A$, 是个常数, 与 φ 无关; 于是, 球函数 Y 以球坐标系的 z 轴为对称轴。且 Θ 的连带勒让德方程化为勒让德方程 $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + [l(l+1)] \Theta = 0$ 。

(一).勒让德多项式

(1).勒让德多项式的表达式

勒让德方程 $y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{l(l+1)}{1-x^2} y = 0$ 已在 9.2 解出, 有两个线性无关解 $y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+2) \cdots l \cdot (l+1) \cdots (l+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}$, $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{a_1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l-2k+1) \cdots (l-1) \cdot (l+2) \cdots (l+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, 通解为 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ 。

但自然的边界条件(解得在 $x = \pm 1$ 有限)与勒让德方程构成本征值问题, 得到本征值 $l(l+1)$ ($l=0, 1, 2, 3, \dots$), 本征函数为: 由 l 为整数所导致的, 级数解 $y_0(x), y_1(x)$ 退化得到的多项式, 它乘以适当常数后称为 l 阶勒让德多项式, 记作 $P_l(x)$ 。此时, l 为偶数, 对应 $y(x) = a_0 y_0(x) = C \cdot P_l(x)$; l 为奇数, 对应 $y(x) = a_1 y_1(x) = C \cdot P_l(x)$ 。并且此时轴对称的球函数 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = A\Theta(\theta) = Ay(x) = AC \cdot P_l(x)$ 。【注: 多项式 $y_1(x), y_2(x)$ 乘以适当常数, 与多项式 $a_0 y_0(x), a_1 y_1(x)$ 乘以适当常数, 效果一样, 都可凑成 $P_l(x)$, 只是所乘的常数不同而已。并且, 若 a_0 或 a_1 还未因边界条件而确定, 则作为通解的 $a_0 y_0(x)$ 或 $a_1 y_1(x)$, 无需乘以常数就能过渡到 $P_l(x)$: 直接改变待定系数 a_0 或 a_1 即可。——但若 $P_l(x)$ 是因此而得到的, 则 a_0, a_1 便不能再改变了, 那么所得的 $P_l(x)$ 也将多不满足边界条

件。此时若想要用 $P_l(x)$ 来表示问题的解，则应将 $C \cdot P_l(x)$ 结合边界条件确定 C ，以得到 $y(x)=C \cdot P_l(x)$ 】

由于退化为多项式后的 $y_0(x), y_1(x)$ ， k 最多取到 n ，即最多分别只求和到 $l=2n$ 和 $2n+1$ 所对应的 x^{2n}, x^{2n+1} 项，即 x^l 项；对应的系数 a_{2k}, a_{2k+1} 也均只取到 a_l 。那么我们不妨以 a_l 为参照标准/起始系数，往下递推；以期最终将 l 阶勒让德多项式 $P_l(x)$ [不管 l 是 $2n$ 还是 $2n+1$]写作从 l 次幂项 $a_l x^l$ 朝下求和到 $a_1 x^1$ 或 $a_0 x^0$ 的形式。【之所以这样做，是因为形式上更统一：之后 $y(x)$ 可不必表示为 $a_0 y_0(x)$ 或 $a_1 y_1(x)$ ，而是直接用 $P_l(x)$ 表示解： $y(x)=C \cdot P_l(x)$ ；而且正如 a_0, a_1 待定，以期用边界条件确定 a_0 或 a_1 一样，也用边界条件来确定 C 。】

【根据 $\frac{a_{2n}}{a_0} = (-1)^n \frac{2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdots (4n-1)}{(2n)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n! \cdot \frac{(4n)!}{(2n)!}}{(2n)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n! \cdot \frac{(4n)!}{(2n)!}}{[2^n \cdot \frac{(2n)!}{n!}]} = (-1)^n \frac{(4n)! [n!]^2}{[(2n)!]^3}$ ，以及 $\frac{a_{2n+1}}{a_0} = (-1)^n \frac{2 \cdots 2n \cdot (2n+3) \cdots (4n+1)}{(2n)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n! \cdot \frac{(4n+2)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(4n+2)!}{(2n+2)!}}{(2n)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n! \cdot \frac{(4n+2)!}{(2n+2)!} \cdot [2^n \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)!}]}{(2n)!} = (-1)^n \frac{(4n+2)! n! \cdot (n+1)!}{(2n)! (2n+1)! (2n+2)!}$ 。我们利用二者来推导：将它俩写作 $\frac{a_l}{a_0} = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{2 \cdots l \cdot (l+1) \cdots (2l-1)}{l!} = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{(2l)! [\frac{l}{2}]^2}{[l!]^3}$ ，以及 $\frac{a_l}{a_0} = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{2 \cdots (l-1) \cdot (l+2) \cdots (2l-1)}{l!} = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(2l)! \cdot \frac{l-1}{2}! \cdot \frac{l+1}{2}!}{(l-1)! l! (l+1)!}$ 。令其中的 $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$ ，则 $\frac{1}{a_0} \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{(2l)! [\frac{l}{2}]^2}{[l!]^3}$ ，得到 $\frac{1}{a_0} = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{2^l [\frac{l}{2}]^2}{l!}$ ，即有 $a_0 = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{l!}{2^l [\frac{l}{2}]^2}$ 。但这样先推知 a_0 和 a_1 ，再往上递推，并不是我们想要的；所以我们就不再推 a_1 了。我们还得借用原始的递推公式往下递推：】

将之前的 $a_{k+2} = -\frac{(l-k) \cdot [l+k+1]}{(k+2)(k+1)} a_k$ 改写为 $a_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{(l-k) \cdot [l+k+1]} a_{k+2}$ ，或者说有些人更习惯用 $a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(l-k+2) \cdot [l+k-1]} a_k$ ；那么类似 $a_2 = -\frac{l \cdot (l+1)}{2 \cdot 1} a_0$ 地，我们有 $a_{l-2} = -\frac{l \cdot (l-1)}{2 \cdot [2l-1]} a_l$ ；以及 $a_{l-4} = -\frac{(l-2) \cdot (l-3)}{4 \cdot [2l-3]} a_{l-2} = (-1)^2 \frac{(l-2) \cdot (l-3)}{4 \cdot [2l-3]} \frac{l \cdot (l-1)}{2 \cdot [2l-1]} a_l = (-1)^2 \frac{(l-2) \cdot l \cdot (l-1) \cdot (l-3)}{4 \cdot 2 \cdot [2l-1] \cdot [2l-3]} a_l = (-1)^2 \frac{l! / (l-4)!}{2^2 \cdot 2! \cdot [2l-1]!! / [2l-5]!!} a_l$ 。于是 $a_{l-2n} = (-1)^n \frac{[l-(2n-2)] \cdots l \cdot (l-1) \cdots [l-(2n-1)]}{2n \cdots 2 \cdot [2l-1] \cdots [2l-(2n-1)]} a_l = (-1)^n \frac{l! / (l-2n)!}{2^n \cdot n! \cdot [2l-1]!! / [2l-(2n+1)]!!} a_l = (-1)^n \frac{l! / (l-2n)!}{2^n \cdot n! \cdot \frac{[2l]!}{[2l]!!} \cdot \frac{[2l-2n]!}{[2l-2n]!!}} a_l = (-1)^n \frac{l! / (l-2n)! \cdot [2l-2n]!}{2^n \cdot n! \cdot [2l]! \cdot \frac{2^{l-n} [l-n]!}{2^{l-l}} a_l} a_l = (-1)^n \frac{(l!)^2 \cdot [2l-2n]!}{n! \cdot [2l]! \cdot [l-n]! \cdot (l-2n)!} a_l$ ，将 $a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$ 代入即有 $a_{l-2n} = (-1)^n \frac{[2l-2n]!}{n! \cdot 2^l \cdot [l-n]! \cdot (l-2n)!}$ 。【代入 $n=\frac{l}{2}$ 可得， $a_0 = (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{l!}{2^l [\frac{l}{2}]^2}$ ，这与上一段结果一样】

那么 $P_l(x) = \frac{1}{C} a_0 y_0(x)$ 或 $\frac{1}{C} a_1 y_1(x) = \frac{1}{C} a_0 \sum_{k=0}^n \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k}$ 或 $\frac{1}{C} a_1 \sum_{k=0}^n \frac{a_{2k+1}}{a_1} x^{2k+1} = \frac{1}{C} \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} a_{2k} x^{2k}$ 或 $\frac{1}{C} \sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}} a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} (\frac{1}{C} a_{l-2k}) x^{l-2k}$ 或 $\sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}} (\frac{1}{C} a_{l-2k}) x^{l-2k} = \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} a'_{l-2k} x^{l-2k} = \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} (-1)^k \frac{[2l-2k]!}{k! \cdot 2^k \cdot [l-k]! \cdot (l-2k)!} x^{l-2k}$ 。【注：调整常数 $\frac{1}{C}$ ，使得 $a'_l = \frac{1}{C} a_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$ ，可见得 $\frac{1}{C} = \frac{1}{a_l} \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$ ；那么 $a'_{l-2k} = \frac{1}{C} a_{l-2k} = \frac{1}{a_l} \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} a_{l-2k}$ ；另外， $[\frac{l}{2}] = \begin{cases} \frac{l}{2}, & l \text{ 为偶} \\ \frac{l-1}{2}, & l \text{ 为奇} \end{cases}$ 】

我们来好好观察一下 $P_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{[2l-2k]!}{k! \cdot 2^k \cdot [l-k]! (l-2k)!} x^{l-2k}$: 对于某一固定 l 所对应的 l 阶勒让德多项式 $P_l(x)$, 它的最高次项为 $k=0$ 所对应的 l 次项 x^l , 多项式各次幂项以降序排列: $?x^l + ?x^{l-2} + \dots + ?x^1$ 或 $?x^l + ?x^{l-2} + \dots + ?$ 。当 l 为偶数时, $P_l(x)$ 对 x 为偶函数; 当 l 为奇数时, $P_l(x)$ 对 x 为奇函数。

只有当 l 为偶数时, $P_l(x)$ 才含有常数项, 它可以通过 $P_l(0)$ 来计算得到: 那么 $P_l(x) = (-1)^n \frac{[4n-2n]!}{n! \cdot 2^{2n} \cdot [2n-n]! (2n-2n)!} = (-1)^n \frac{[2n]!}{(n! \cdot 2^n)^2} = (-1)^n \frac{[2n]!}{([2n]!!)^2} = (-1)^n \frac{[2n-1]!!}{[2n]!!}$ 。【列举前三个 $P_l(x)$: $P_0(x)=1$; $P_1(x)=x=\cos\theta$; $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$ 】

(2).勒让德多项式的微分表示

罗德里格斯公式: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$ 。

证明: 运用二项式定理, $(x^2-1)^l = \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^k (x^2)^{l-k}$, 其最高次幂为 $2l$, 然后往下减 2 减 2; 凡是幂次 $2l-2k$ 低于 l 次的, 在求 l 次导的过程中全变为 0。所以只留下了 $2l-2k \geq l$, 即 $k \leq \frac{l}{2}$ 的项, 由于 k 为整数, 则 $k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ 。这样一来, $\frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} C_l^k (-1)^k \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} C_l^k (-1)^k [2l-2k] \dots [l-2k+1] x^{l-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} C_l^k (-1)^k \frac{[2l-2k]!}{[l-2k]!} x^{l-2k}$, 代入 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} C_l^k (-1)^k \frac{[2l-2k]!}{[l-2k]!} x^{l-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{1}{2^l} \frac{[2l-2k]!}{k! (l-k)! [l-2k]!} x^{l-2k}$ 。证毕。

(3).勒让德多项式的积分表示

施列夫利积分: $P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint_l \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz$ 。

证明: 根据柯西公式的高阶导数公式: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$ 。即有: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$, 于是 $\frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l = \frac{l!}{2\pi i} \oint_l \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz$, 代入 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!} \frac{l!}{2\pi i} \oint_l \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint_l \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz$ 。【其中的回路 l 与阶数 l 含义不同】

它还可以进一步表示为定积分: 设回路 l 为一个圆周 C , 复常数/圆心 $\alpha=x$ 。半径 ρ 为常实数 $\sqrt{1-x^2} (|x|<1)$, 则 l 上的 $z-\alpha=\rho e^{i\varphi}$, 得到 $z=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$, 于是

$$\begin{aligned} dz &= i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}d\varphi, \text{ 代入 } \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint_l \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz \text{ 即有 } \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint_l \frac{[(x+\rho e^{i\varphi})^2-1]^l}{(\rho e^{i\varphi})^{l+1}} (i\rho e^{i\varphi}d\varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^l l!} \int_0^{2\pi} \frac{[(x+\rho e^{i\varphi})^2-1]^l}{(\rho e^{i\varphi})^l} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(x+\rho e^{i\varphi})^2-1}{2\rho e^{i\varphi}} \right]^l d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{x^2+\rho^2 e^{i2\varphi}+2x\rho e^{i\varphi}-1}{2\rho e^{i\varphi}} \right]^l d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\rho^2}{2\rho e^{i\varphi}} + \frac{1}{2}\rho e^{i\varphi} + x \right]^l d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\rho(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) + x \right]^l d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [i\rho \sin\varphi + x]^l d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [i\rho \cos\varphi + x]^l d\varphi. \quad P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi + x]^l d\varphi \text{ 即为拉普拉斯积分。} \end{aligned}$$

【注: $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\sin\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} f(\sin\varphi) d\varphi - \int_{-\pi}^0 f(\sin\varphi) d(-\varphi) = \int_0^{\pi} f(\sin\varphi) d\varphi - \int_{\pi}^0 f[\sin(-\varphi)] d\varphi = \int_0^{\pi} \{f(\sin\varphi) + f[-\sin\varphi]\} d\varphi$, 但 $f(\sin\varphi) = [i\rho\sin\varphi + x]^l$ 不是关于 $\sin\varphi$ 的偶函数; \therefore 我们采取: $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f[\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})] d(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} f(\cos\varphi) d\varphi - \int_{-\pi}^0 f(\cos\varphi) d(-\varphi) = \int_0^{\pi} f(\cos\varphi) d\varphi - \int_{\pi}^0 f[\cos(-\varphi)] d\varphi = 2 \int_0^{\pi} f(\cos\varphi) d\varphi$, 因此 $\int_0^{2\pi} [i\rho\sin\varphi + x]^l d\varphi = 2 \int_0^{\pi} [i\rho\cos\varphi + x]^l d\varphi$ 】

可见 $P_l(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1^l d\varphi = 1$, 以及 $P_l(-1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-1)^l d\varphi = (-1)^l$; 并且还可验证 $P_l(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [i\cos\varphi]^l d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [i\cos\varphi]^{2n} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-1)^n \cos^{2n}\varphi \cdot d\varphi = (-1)^n \frac{[2n-1]!!}{[2n]!!}$.

代入 $x = \cos\theta$, 得到 $P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos\theta + i\sin\theta \cdot \cos\varphi]^l d\varphi$. 于是 $|P_l(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos\theta + i\sin\theta \cdot \cos\varphi|^l d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos\theta + i\sin\theta \cdot \cos\varphi|^l d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi)^{\frac{l}{2}} d\varphi \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{\frac{l}{2}} d\varphi = 1$. 可见 $|P_l(x)| \leq 1$, $[-1 \leq x \leq 1]$ 【其中 $||$ 代表绝对值】。

(二).第二类勒让德函数

当 l 是非负整数时, $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$, 方程的一个解为 $a_0 y_0(x)$ 或 $a_1 y_1(x)$ 为 $C \cdot P_l(x)$, 另一个解为 $a_1 y_1(x)$ 或 $a_0 y_0(x)$ 为不收敛的无穷级数, 之前我们的操作是: 将其的 a_1 或 a_0 令为 0. 现在我们尝试着求出其第二个线性无关的解。

利用 $w_2 = w_1 \int \frac{\Delta_0 e^{-\int p(z) dz}}{w_1^2} dz$, 即 $Q_l(x) = P_l(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[P_l(x)]^2} dx = P_l(x) \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{[P_l(x)]^2} dx = P_l(x) \int \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2} d(1-x^2)}}{[P_l(x)]^2} dx = P_l(x) \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{[P_l(x)]^2} dx = P_l(x) \int \frac{1}{(1-x^2)[P_l(x)]^2} dx$. 称之为第二类勒让德函数(不称其为多项式?!正如之后索要介绍的连带勒让德函数)。它就像之前用 $-\frac{1}{\sin\pi\nu} J_{-\nu}(x)$ 求出的 $N_{\nu}(x)$, 作为与 ν 阶贝赛尔函数 $J_{\nu}(x)$ 线性无关的 ν 阶贝赛尔方程的第二个解一样。【可以将具体某 l 的 $P_l(x)$ 的表达式带进去, 求出对应的 $Q_l(x)$ 】【之所以不将 $[P_l(x)]^2$ 写作 $P_l^2(x)$, 是因为后者特指连带的勒让德函数; 对 $P_l(x)$ 求二阶导的记号 $P_l^{(2)}(x)$ 就与之没有歧义】

算出来的 $Q_l(x)$ 表达式的第一项均含有对数 $\frac{1}{2} P_l(x) \ln \frac{1+x}{1-x}$, 那么 $Q_l(x)$ 仍均在 $x = \pm 1$ 发散, 像另外那个剩下的 $a_1 y_1(x)$ 或 $a_0 y_0(x)$ 一样。这样一来, 若要求解 $y(x)$ 满足自然的边界条件的话, 则 $y(x) = C_1 P_l(x) + C_2 Q_l(x)$ 中 $C_2 = 0$, 回到我们的 $y(x) = C_1 P_l(x)$ 。

(三).勒让德多项式的正交关系

不同阶数 l 的勒让德多项式 $P_l(x)$ 在 $x \in (-1, +1)$ 上正交: $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}(x)P_{l_1}(x)dx=0 (l_1 \neq l_2)$ 。根据下一节, 它还可被写为 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}(x)P_{l_1}(x)dx=N_l^2 \delta_{l_1 l_2} = \frac{2}{2l_1+1} \delta_{l_1 l_2}$ 。【这是施图姆-刘维尔本征值问题, 的正交关系(性质 3)的特例。其证明见那一节。】

它还可表为 $\int_{\pi}^0 P_{l_2}(\cos\theta)P_{l_1}(\cos\theta)d\cos\theta=0$, 即 $\int_0^{\pi} P_{l_2}(\cos\theta)P_{l_1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0 (l_1 \neq l_2)$, 称为不同本征值 $l_1(l_1+1), l_2(l_2+1)$ 所对应的本征函数 $P_{l_2}(\cos\theta), P_{l_1}(\cos\theta)$ 在区间上带权重 $\sin\theta$ 正交。其中, $\sin\theta$ 为权函数。

可给出一个不错的简要证明: 在之后的例题中, 我们会证明 $l \geq 1$ 时,
 $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x)dx \begin{cases} = 0, 0 \leq n < l \\ \neq 0, n \geq l \end{cases}$ 。那么当 $l_1 \neq l_2$ 时, 不妨设 $l_2 < l_1$, 此时由于 l_2 至少是 0, 则 l_1 至少为 1。但 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}(x)P_{l_1}(x)dx = \int_{-1}^{+1} \sum_{k=0}^{[l_2/2]} (-1)^k \frac{[2l_2-2k]!}{k! \cdot 2^{l_2} \cdot [l_2-k]! (l_2-2k)!} x^{l_2-2k} \cdot P_{l_1}(x)dx$ 中, $P_{l_2}(x)$ 中最高次项为 x^{l_2} , 而 $\int_{-1}^{+1} x^{l_2} P_{l_1}(x)dx$ 中 $l_2 < l_1$, 又 $l_1 \geq 1$ 满足上述定理, 那么该积分值, 连同 $P_{l_2}(x)$ 中所有其他低次项 x^{l_2-2k} 的该积分值, 均=0。于是此时
 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}(x)P_{l_1}(x)dx=0$ 。——该结论具有一般性: 当 $l_1=0$ 时, 只需启用 $l_1 < l_2$ 即可。

(四).勒让德多项式的模

用微分表示来分部积分: $N_l^2 = \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = (\frac{1}{2l!})^2 \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} dx$ 。其中
 $\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} dx = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} \cdot d(x^2-1)^{l(l-1)} = (x^2-1)^{l(l-1)} (x^2-1)^{l(l-1)} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} \cdot d(x^2-1)^{l(l-1)}$ 。根据具有 m 阶零点的函数 $Q(z)$ 可表示为 $Q(z)=(z-z_0)^m q(z)$ (其中 $q(z_0) \neq 0$), 那么 $x=\pm 1$ 是 $(x^2-1)^l=(x+1)^l(x-1)^l$ 的 l 阶零点。对其做 $l-1$ 次求导后, 零点 $x=\pm 1$ 的阶数均降低 $l-1$ 阶, 于是 $x=\pm 1$ 降至 $(x^2-1)^{l(l-1)}$ 的1阶零点。——而1阶零点属于零点(0阶零点就不属于零点, 因为“求导0次后不再是零点”), 代入 $x=\pm 1$ 入 $(x^2-1)^{l(l-1)}$ 后, 均=0。

于是, $\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} dx = - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} \cdot d(x^2-1)^{l(l-1)} = - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} (x^2-1)^{l(l-1)} dx$ 。好好观察等式的最两边, 积分结果为 **一个 $(x^2-1)^{l(l-1)}$ 降一阶, 另一个升一阶, 并引入一个负号**; 因此这么递推下去便有: $\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} dx = (-1)^l \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} (x^2-1)^{l(l-1)} dx = (-1)^l \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l (x^2-1)^{l(2l-1)} dx$ 。

【注: 得到 $-\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} \cdot d(x^2-1)^{l(l-1)}$ 后, 我们并不马上对其使用 $\int u dv = uv - \int v du$, 因为若这样的话, 会变回去。; 而是变成 $-\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} (x^2-1)^{l(l-1)} dx$ 后, 再将前面的那个移入微分算符 d 后面, 变成 $-\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} d(x^2-1)^{l(l-1)}$, 这样才终于构成一个循环。之后再继续之前的操作。并且可以看到, $x=\pm 1$

是 $(x^2 - 1)^{l(l-2)}$ 的, 即(也)是 $(x^2 - 1)^{l(l+1)}(x^2 - 1)^{l(l-2)}$ 的 2 阶零点, 因此此后分部积分出来的这类项(第一项)均=0。】

其中 $(x^2 - 1)^l$ 是 $2l$ 次多项式, 它求 $2l$ 阶导后, 只剩下最高次幂 x^{2l} 前面的系数, 即 $(2l)!$, 于是原式进一步变为 $(-1)^l(2l)! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^l dx$ 。考虑其中的 $\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^l dx$, 将被积函数展为两项之积 $\int_{-1}^{+1} (x+1)^l(x-1)^l dx$ 并再次分部积分(将哪个移入微分符号内均可) $= \frac{1}{l+1} \int_{-1}^{+1} (x-1)^l d(x+1)^{l+1} = \frac{1}{l+1} [(x+1)^{l+1}(x-1)^l]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x+1)^{l+1} d(x-1)^l = -\frac{l}{l+1} \int_{-1}^{+1} (x+1)^{l+1}(x-1)^{l-1} dx$, 对比前后两式, 可知每次分部积分后, 仍然是 $(x+1)$ 幂次升 1, $(x-1)$ 的幂次减 1, 并引入常数 $-\frac{l}{l+1}$ 。【 $\int_{-1}^{+1} (x+1)^{l+1}(x-1)^{l-1} dx$ 之后仍将 $(x+1)^{l+1}$ 移入微分算符内】

于是 $\int_{-1}^{+1} (x+1)^l(x-1)^l dx = (-1)^l \frac{l}{l+1} \cdot \frac{l-1}{l+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{l+l} \int_{-1}^{+1} (x+1)^{l+l}(x-1)^{l-l} dx = (-1)^l \frac{l!}{(2l)!/l!} \int_{-1}^{+1} (x+1)^{2l} dx = (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{1}{2l+1} (x+1)^{2l+1} \Big|_{-1}^{+1} = (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{2^{2l+1}}{2l+1}$ 。然后将两个步骤所产生的系数 $(-1)^l(2l)!$, $(-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{2^{2l+1}}{2l+1}$, 代回 $N_l^2 = \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = (\frac{1}{2^l l!})^2 \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l)} dx$, 得到 $N_l^2 = (\frac{1}{2^l l!})^2 (-1)^l(2l)! (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{2^{2l+1}}{2l+1} = \frac{2}{2l+1}$ 。于是, 勒让德多项式的模 N_l 为 $\sqrt{\frac{2}{2l+1}} (l=0, 1, \dots)$ 。

我们可以稍微来检查一下这个结论: 根据 $|P_l(x)| \leq 1, [-1 \leq x \leq 1]$, 可有 $N_l^2 = \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx \leq \int_{-1}^{+1} \max\{[P_l(x)]^2\} dx = \int_{-1}^{+1} 1 dx = 2$, 而对于 $N_l^2 = \frac{2}{2l+1} (l=0, 1, \dots)$, 它确实只在 $l=0$ 时=2, 其他情形下均有 $N_l^2 < 2$; 另外, 还有个不等式 $|\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx| \leq \int_{-1}^{+1} |P_l(x)| |dx|$, 而由于 $|P_l(x)| \leq 1$, 所以 $\int_{-1}^{+1} |P_l(x)| |dx| \geq \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = N_l^2 = \frac{2}{2l+1}$ 。不过我们不能用这种方法比较 $|\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx|$ 和 $\int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx$ 的大小, 也就没法用 $N_l^2 = \frac{2}{2l+1}$ 来约束 $|\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx|$ 。

(五).广义傅里叶级数

根据施图姆-刘维尔本征值问题的性质 4, 作为其中的一个特例: 由于勒让德多项式 $P_l(x) (l=0, 1, \dots)$ 是完备的(因为 $P_0(x), P_1(x), \dots$ 是一组本征函数族), 所以可作为广义傅里叶级数展开的基。那么定义在 $[-1, 1]$ 上的 $f(x)$, 或定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(\theta)$, 便可以之为基, 展开为广义傅里叶级数(以其他完备本征函数为基的展开也可称为它)。【函数能用三角函数展开为傅里叶级数, 需要满足狄里希利定理; 但是否能展成广义的傅里叶级数似乎没什么额外的限制】

即 $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$, 其中 $\int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) \cdot dx = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \int_{-1}^{+1} P_l(x) \cdot P_k(x) dx = f_k \int_{-1}^{+1} P_k(x) \cdot P_k(x) dx = f_k N_k^2$, 得 $f_k = \frac{1}{N_k^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) \cdot dx = \frac{2^{l+1}}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) \cdot dx$ 。可见

其系数 $f_l = \frac{2^{l+1}}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) \cdot dx$; 也可写为 $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\theta)$,
 $f_l = \frac{2^{l+1}}{2} \int_{-1}^{+1} f(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta$.

【注: ①. 只有 $\sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$ 该求和从 $l=0$ 开始, 且求和到 ∞ , 才能保证基本函数族的完备性, 这样 $f(x)$ 才能 100% 能被该组基展开; ②. 只有定义在 $[-1, 1]$ 上的 $f(x)$ 才能用 $P_l(x)$ 展开, 因为 $P_l(x)$ 们只在 $[-1, 1]$ 上正交和完备. 对于不在 $[-1, 1]$ 上的 $f(x)$, 需通过诸如解析延拓(若它定义域更窄)的方法拓展到其上; ③. 求和到 l 取 ∞ 不发散么? ——这个问题有点意思, 要注意, 这里的无穷大也是无穷大的整数, 那么 $P_l(x)$ 仍保留多项式的形式, 尽管其项数很多. 所以单单对于各个 $P_l(x)$ 而言, 固定 l 的 $P_l(x)$ 并不发散, 何况我们之前得到过这样的结论: $|P_l(x)| \leq 1$; 然而 $\sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$ 包含了两层级数: $P_l(x)$ 本身是个级数(退化为了多项式), 而它又是个以 $P_l(x)$ 为基的级数, 它的收敛不仅要每一项 $[$ 中的 $P_l(x)$ $]$ 都收敛, 还要满足一定的条件, 然而这些条件它都满足, 所以 $P_l(x)$ 和 $\sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$ 均收敛; ④. 对于三角函数, 我们没有刻意地提及它的模, 事实上以前的 $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = l$, 就是以 $\cos \frac{k\pi x}{l}$ 为代表的基本函数族的模的平方 N_l^2 , 因而其 $f_k = \frac{1}{N_l^2} \int_{-1}^{+1} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \frac{1}{l} \int_{-1}^{+1} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$ 】

例 1. 以勒让德多项式为基, 将 $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ 展开为广义傅里叶级数.

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \text{ 其中 } f_l = \frac{2^{l+1}}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) \cdot dx = \frac{2^{l+1}}{2} \int_{-1}^{+1} (2x^3 + 3x + 4) P_l(x) \cdot dx.$$

一. 首先证明 $l \geq 1$ 时, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx \begin{cases} = 0, 0 \leq n < l \\ \neq 0, n \geq l \end{cases}$:

①. $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^n \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$, 考虑其中的: $\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx = \int_{-1}^{+1} x^n d(x^2 - 1)^{l(l-1)} = x^n (x^2 - 1)^{l(l-1)} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-1)} dx^n = -n \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-1)} x^{n-1} dx$, 可见 $\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$ 它最终会 $= (-1)^n n! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-n)} dx = (-1)^n n! \int_{-1}^{+1} d(x^2 - 1)^{l(l-n-1)} = (-1)^n n! (x^2 - 1)^{l(l-n-1)} \Big|_{-1}^{+1}$, 它是否 $= 0$, 取决于 $x = \pm 1$ 是不是 $(x^2 - 1)^{l(l-n-1)}$ 的零点. 【注: 能做到这么狠(将 x^n 求导至 $n!$), 前提是 $(x^2 - 1)^{l(l)}$ 能够降 l 阶导至 $l - n - 1$, 即 $l - n - 1 \geq 0$. 因此以上和以下讨论适用于 $n \leq l - 1$; 且以上 and 一下均建立在 $l \geq 1$ 的前提下, 否则连第一步的凑微分 $\int_{-1}^{+1} x^n d(x^2 - 1)^{l(l-1)}$ 都做不到】

然而我们已经知道, $x = \pm 1$ 是 $(x^2 - 1)^l = (x + 1)^l (x - 1)^l$ 的 l 阶零点. 对其求 $l - n - 1$ 次导后, 零点 $x = \pm 1$ 的阶数均降低 $l - n - 1$ 阶, 于是 $x = \pm 1$ 降至 $(x^2 - 1)^{l(l-n-1)}$ 的 $l - (l - n - 1) = n + 1$ 阶零点.

(1). 当 $0 \leq n \leq l - 1$ 时, $(x^2 - 1)^{l(l-n-1)} \Big|_{-1}^{+1} = 0$; 当 $n = -1$ 时, 对于 $[(x + 1)^l (x - 1)^l]^{(l)} \Big|_{x=+1}$, 将 $(x + 1)^l$ 看作 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z) = \sum_{i=0}^n C_n^i A_m^{m-i} (z - z_0)^{m-i} \cdot \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}} q(z)$ 中的 $q(z)$, 因为 $q(z_0)$ 即 $(1 + 1)^l \neq 0$, 此时 $\frac{d^n}{dz^n} Q(z_0) = n! q(z_0) = l! 2^l$; 对于 $[(x + 1)^l (x - 1)^l]^{(l)} \Big|_{x=-1}$,

将 $(x-1)^l$ 看作 $q(z)$, 此时 $\frac{d^n}{dz^n}Q(z_0)=m!q(z_0)=l!(-2)^l$ 。于是 $(x^2-1)^{l(l-n-1)}|_{-1}^{+1}=l![2^l-(-2)^l]$ 。

当 $n < -1$ 时, $[(x+1)^l(x-1)^l]^{(l-n-1)}|_{-1}^{+1}$ 中的 $l-n-1 > l$, 此时利用 $\frac{d^n}{dz^n}Q(z_0)$
 $=C_n^m m! \cdot \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}q(z_0)$ 。对于 $[(x+1)^l(x-1)^l]^{(l-n-1)}|_{x=+1}$, $l-n-1$ 相当于 n , l 相当于
 m , 且仍将 $(x+1)^l$ 看作 $q(z)$, 于是 $\frac{d^n}{dz^n}Q(z_0)=C_{l-n-1}^l l! \cdot \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}}q(z_0)=C_{l-n-1}^l l! \cdot$
 $\frac{d^{-n-1}}{dx^{-n-1}}(x+1)^l|_{x=+1}$, 当 $-n-1 \leq l$ 时, 其结果为 $C_{l-n-1}^l l! \cdot A_l^{l-(-n-1)}(1+1)^{l-(-n-1)}=$
 $C_{l-n-1}^l l! \cdot A_l^{l+n+1}2^{l+n+1}$, 否则结果为0; 对于 $[(x+1)^l(x-1)^l]^{(l-n-1)}|_{x=-1}$, 仍将
 $(x-1)^l$ 看作 $q(z)$, 于是 $\frac{d^n}{dz^n}Q(z_0)=C_{l-n-1}^l l! \cdot \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}}q(z_0)=C_{l-n-1}^l l! \cdot \frac{d^{-n-1}}{dx^{-n-1}}(x-1)^l|_{x=-1}$,
 当 $-n-1 \leq l$ 时, 其结果为 $C_{l-n-1}^l l! \cdot A_l^{l-(-n-1)}(-1-1)^{l-(-n-1)}=C_{l-n-1}^l l! \cdot$
 $A_l^{l+n+1}(-2)^{l+n+1}$, 否则结果为0。——于是当 $n \geq -1-l$ 时, $(x^2-1)^{l(l-n-1)}|_{-1}^{+1}=C_{l-n-1}^l l! \cdot A_l^{l+n+1}[2^{l+n+1}-(-2)^{l+n+1}]$, 否则结果为0。

综上, 在 $l \geq 1$ 的前提下, 当 $0 \leq n \leq l-1$ 或 $n < -1-l$ 时, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = 0$; 当 $n = -1$ 时,
 $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = \frac{1}{2l!} (-1)^n n! l! [2^l - (-2)^l] = (-1)^n n! [1 - (-1)^l]$; $n < -1$ 时,
 $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = \frac{1}{2l!} (-1)^n n! C_{l-n-1}^l l! \cdot A_l^{l+n+1} [2^{l+n+1} - (-2)^{l+n+1}] = (-1)^n n! C_{l-n-1}^l \cdot$
 $A_l^{l+n+1} [1 - (-1)^{l+n+1}] 2^{n+1}$ 。

我们可进一步整合后两者, 以至于在 $l \geq 1$ 的前提下, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx$ 在 $n \leq -1$ 时,
 $= (-1)^n n! C_{l-n-1}^l \cdot A_l^{l+n+1} [1 - (-1)^{l+n+1}] 2^{n+1}$; 在当 $0 \leq n \leq l-1$ 或 $n < -1-l$ 时, $= 0$ 。

(2).当 $l=0$ 时, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}|_{-1}^{+1}$, 当 $n \geq 0$ 或 $n < -1$ 时, 其值
 为 $\frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$; 当 $n = -1$ 时, 其值为 $\ln|x| |_{-1}^{+1} = 0$ 。——整合后结果均归结于
 $\frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$ 。

——但有问题, 其实 $l \geq 1$ 中的讨论仅适用于 $n \geq 0$; 因为在刚开始, x^n 求导出 $n!$ 只
 建立在 $n \geq 0$ 的情形; 所以 $l \geq 1$ 的讨论中的 $n < 0$ 的情况请不要考虑, $l \geq 1$ 的其他 n 值,
 以及 $l=0$ 的情况下的各类 n 值, 仍然正确。

②.修正: 在 $l \geq 1$ 条件下, 当 $n < 0$ 时, 考虑 $\int_{-1}^{+1} x^{-n} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx = \int_{-1}^{+1} x^{-n} d(x^2-1)^{l(l-1)} = x^{-n} (x^2-1)^{l(l-1)}|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} dx^{-n} = n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-1)} x^{-n-1} dx$, 可
 见 $\int_{-1}^{+1} x^{-n} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx$ 它最终会 $= n(n+1) \dots (n+l-1) \cdot \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-l)} x^{-n-l} dx$
 $= \frac{(l+n-1)!}{(n-1)!} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l x^{-n-l} dx = \frac{(l+n-1)!}{(n-1)!} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^l x^{-n-l} dx$, 这样做相当于仍然在降
 $(x^2-1)^{l(l)}$ 的阶, 以及升 x^{-n} 的阶。但结果中仍然含有 x^{-n-l} , 不好处理(不像非负整数
 n 往下减会到0, 这里的 $-n$ 往下减, 就没底了)。

我们考虑升 $(x^2-1)^{l(l)}$ 的求导阶, 降 x^{-n} 的求导阶数: 考虑 $\int_{-1}^{+1} x^{-n} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx = \frac{1}{-n+1} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l)} dx^{-n+1} = (x^2-1)^{l(l)} x^{-n+1} |_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} x^{-n+1} d(x^2-1)^{l(l)}$, 但其
 中的 $x = \pm 1$ 是 $(x^2-1)^{l(l)}|_{-1}^{+1}$ 的0阶零点, 即不是它的零点, 因此这样的方法再往下走

的话, 会出现的 $(-1) \cdot (x^2 - 1)^{l(l+1)} x^{-n+2} \Big|_{-1}^{+1}$ 等在 $x = \pm 1$ 处均不(一定)=0, 我们也就没法处理到 $(-1)^{n-1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)^{l(l+n-1)} dx$ 或者 $(-1)^n \int_{-1}^{+1} \ln|x| \cdot (x^2 - 1)^{l(l+n)} dx$, 而且处理到它也没用= =: 我们也没法继续处理 $\frac{1}{x}$ 或 $\ln|x|$ (不像非负整数 n 往下减会到0, 这里的 $-n$ 往上升, 升不到0)。

③. 在 $l \geq 1$ 条件下, 当 $n \geq l$ 时, $-n \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-1)} x^{n-1} dx$, 不会最终到达 $(-1)^n n! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-n)} dx$, 它最多只能到达 $(-1)^n A_n^{n-l} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^{l(l-l)} x^{n-l} dx = (-1)^n A_n^{n-l} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^l x^{n-l} dx$, 它仍因含有 x^{n-l} 而无法进行下去(正如②. 中的第一种方法一样)。——并且即使 $n=l$, $(-1)^n n! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^l dx$ 的值也是不好算的。

综上, $l \geq 1$ 条件下, $0 \leq n \leq l-1$ 时, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = 0$; n 为其他值时, 比如 $n < 0$ 或 $n \geq l$, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx$ 的确切值需手动计算, 但多不为0; $l=0$ 条件下, $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$ 。【该结论虽是为该题做铺垫, 但主要目的还是为了证明勒让德多项式的正交性】

二. 由于 $l \geq 1$ 时, 当 $0 \leq n < l$ 时(若仅说 n 的这个取值范围, 则已经有 $l \geq 1$), $\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x) dx = 0$, 因此各 $f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} (2x^3 + 3x + 4) P_l(x) \cdot dx$ 中, $l > 3$ 的 f_l 们=0, 于是 $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x) = \sum_{l=0}^3 f_l P_l(x)$ 。

但其中的 f_l 不需要 $f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) \cdot dx$ 这么求。因为 $f(x)$ 本身就是多项式, $P_l(x)$ 也是多项式, 因而可代入前四个 $P_l(x)$ 的表达式后, 通过比较 $f(x) = \sum_{l=0}^3 f_l P_l(x)$ 两边的同次幂的系数, 来得到 f_0, f_1, f_2, f_3 。

例 2. 以勒让德多项式为基, 在 $[-1, 1]$ 上将 $f(x) = |x|$ 展开为广义傅里叶级数。

$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$, 其中 $f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) \cdot dx = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} |x| P_l(x) \cdot dx$ 。其中, $\int_{-1}^{+1} |x| P_l(x) \cdot dx = \int_{-1}^0 (-x) P_l(x) \cdot dx + \int_0^{+1} x P_l(x) \cdot dx = \int_0^1 x P_l(-x) \cdot d(-x) + \int_0^{+1} x P_l(x) \cdot dx = \int_0^1 x P_l(-x) \cdot dx + \int_0^{+1} x P_l(x) \cdot dx = \int_0^1 x [P_l(-x) + P_l(x)] \cdot dx$ 。

当 l 为奇数时, $P_{2n+1}(x)$ 为奇函数, 所以 $f_{2n+1} = \frac{2l+1}{2} \int_0^1 x [P_{2n+1}(-x) + P_{2n+1}(x)] \cdot dx = 0$ 。当 l 为偶数时, $P_{2n}(x)$ 为偶函数, 于是 $f_{2n} = \frac{2(2n)+1}{2} \int_0^1 x [P_{2n}(-x) + P_{2n}(x)] \cdot dx = (4n+1) \int_0^1 x P_{2n}(x) \cdot dx = (2l+1) \int_0^1 x P_l(x) \cdot dx$ 。

①. 使用微分表达式 $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$, 即有 $f_{2n} = (2l+1) \frac{1}{2^l l!} \int_0^1 x (x^2 - 1)^{l(l)} dx$, 我们关心 $\int_0^1 x (x^2 - 1)^{l(l)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1)^{l(l)} d(x^2 - 1) = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{l(l-1)} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (x^2 - 1)^{l(l-1)} \Big|_{x=0}$ 。沿用之前的**莱布尼兹求导公式** $\frac{d^n}{dz^n} Q(z) = \sum_{i=0}^n C_n^i A_m^{m-i} (z - z_0)^{m-i} \cdot \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}} q(z)$, 这里我们将其改写为 $\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l = \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i A_l^{l-i} (x - 1)^{l-i} \cdot \frac{d^{l-1-i}}{dx^{l-1-i}} (x + 1)^l = \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i A_l^{l-i} (x - 1)^{l-i} \cdot A_l^{1+i} (x + 1)^{1+i}$, 代入 $x=0$, 得到 $\sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i A_l^{l-i} (-1)^{l-i}$ 。

$$A_l^{1+i} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-i} \frac{(l-1)!}{i!(l-1-i)!} \frac{l!}{(l-i)!} \frac{l!}{(1+i)!} = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-i} (l-1)! \frac{l!}{i!(l-i)!} \frac{l!}{(1+i)!} = (l-1)! \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-i} C_l^i C_l^{i+1}.$$

但这样仍很复杂, 不如先对 $(x^2 - 1)^l$ 沿用二项式定理, 展开成多项式之后再求 $l-1$ 阶导: $(x^2 - 1)^l = \sum_{i=0}^l C_l^i (-1)^i x^{2(l-i)}$, 其中只有 $2l - 2i = l - 1$, 即 $i = \frac{l+1}{2}$ 所对应的项 $C_l^{\frac{l+1}{2}} (-1)^{\frac{l+1}{2}} x^{l-1}$, 在经历了次 $l-1$ 求导, 并代入 $x=0$, 后存活下来。得到 $(l-1)! (-1)^{\frac{l+1}{2}} C_l^{\frac{l+1}{2}}$ 。【与之前的结果对比可得一个等式: $\sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-i} C_l^i C_l^{i+1} = (-1)^{\frac{l+1}{2}} C_l^{\frac{l+1}{2}}$, 其中 l 为偶数 $2n$ 。喵喵喵? ——出事了, $\frac{l+1}{2}$ 是半整数, $(-1)^{\frac{l+1}{2}} C_l^{\frac{l+1}{2}}$ 这俩怎么可能存在? ——哇, $-\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{l(l-1)}|_{x=0}$ 居然 $=0$, 因为对次幂都是偶数的各项, 求导了奇数次!】

②.完了完了, 在上上一段一开始就出事了: $\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1)^{l(l)} dx (x^2 - 1) \neq \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{l(l-1)}|_0^1$!! 只有 $\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1)^{l(l)} dx (x^2 - 1) = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{l(l-1)}|_0^1$ 才成立!!! ——不过我有个补救办法: 求导和积分次序调换。从先求 l 次导, 再积一次分, 变为先积一次分, 再求 l 阶导: $\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1)^{l(l)} dx (x^2 - 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 1)^l dx (x^2 - 1)^{(l)}$, 其中定积分先写成不定积分, 积完分后不慌带值, 积完分、求完导后, 再带值: $\frac{1}{l+1} (x^2 - 1)^{l+1(l)}|_0^1 = -\frac{1}{l+1} (x^2 - 1)^{l+1(l)}|_{x=0}$, 如此一来, $(x^2 - 1)^{l+1} = \sum_{i=0}^{l+1} C_{l+1}^i (-1)^i x^{2(l+1-i)}$ 中只有 $2l + 2 - 2i = l$, 即 $i = \frac{l+2}{2} = n + 1$ 所对应的项 $C_{l+1}^{n+1} (-1)^{n+1} x^l$, 在经历了 l 次求导, 并代入 $x=0$, 后存活下来。得到 $C_{l+1}^{n+1} (-1)^{n+1} l!$ 。

则 $f_{2n} = (2l + 1) \frac{1}{2} \frac{1}{l!} (-\frac{1}{l+1}) C_{l+1}^{n+1} (-1)^{n+1} l! = (2l + 1) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{l!}{(n+1)!(l-n)!} (-1)^{n+2} = (4n + 1) \frac{1}{2^{2n}} \frac{2n(2n-1)!}{(n+1)!n!} (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2} \frac{(4n+1)(2n-1)!}{2^{n+1}(n+1)!2^{n-1}(n-1)!}$ 。【额, 这个答案仍然是错的, 因为由下面的过程可知, 求导是对 x 求导, 而积分却是对 $(x^2 - 1)$ 积分, 二者次序不能颠倒...】

③.也可以用原先的方法, 降 $(x^2 - 1)^{l(l)}$ 的求导阶次, 升 x 的求导阶次: $\int_0^1 x(x^2 - 1)^{l(l)} dx = \int_0^1 x dx (x^2 - 1)^{l(l-1)} = x(x^2 - 1)^{l(l-1)}|_0^1 - \int_0^1 (x^2 - 1)^{l(l-1)} dx = -\int_0^1 \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{l(l-2)} dx = -(x^2 - 1)^{l(l-2)}|_0^1 = (x^2 - 1)^{l(l-2)}|_{x=0}$ 。于是 $(x^2 - 1)^l = \sum_{i=0}^l C_l^i (-1)^i x^{2(l-i)}$ 中只有 $2l - 2i = l - 2$, 即 $i = \frac{l+2}{2} = n + 1$ 所对应的项 $C_l^{n+1} (-1)^{n+1} x^{l-2}$, 在经历了 l 次求导, 并代入 $x=0$, 后存活下来。得到 $C_l^{n+1} (-1)^{n+1} (l-2)!$ 。

则 $f_{2n} = (2l + 1) \frac{1}{2} \frac{1}{l!} C_l^{n+1} (-1)^{n+1} (l-2)! = (2l + 1) \frac{1}{2} \frac{(l-2)!}{(n+1)!(l-n-1)!} (-1)^{n+1} = (4n + 1) \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{n+1}(n+1)!2^{n-1}(n-1)!}$ 。它还可进一步写作 $(-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!!(2n-2)!!} = (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-3)!!}{(2n+2)!!} = (-1)^{n+1} \frac{4n+1}{2n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$ (书上说, 它虽非最简形式, 但容易记忆? 我咋觉得它没有它前面那个更容易记忆呢)。

但它不适用于 $l=0$ 即 $n=0$ 的情形(此时 $(2n-2)!$ 或者说 $(2n-1)!!$ 无意义), 此时 $f_0 = (0+1) \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ 。最终结果为 $|x| = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} P_{2n}(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} P_{2n}(x)$ 。

(六).拉普拉斯方程的轴对称定解问题

例 1. 在半径 $r=r_0$ 的球的内部, 求解 $\nabla^2 u=0$, 使得 u 满足边界条件 $u|_{r=r_0} = \cos^2 \theta$ 。

拉普拉斯方程的定解问题, 如果具有对称轴, 自然就取这对称轴为极轴(球坐标系的极轴不再是指平面极坐标系的 ox 轴, 而是指空间球坐标系的 oz 轴; 球坐标系的极角也多指矢径与 oz 轴的夹角, 即方向角之一; 球坐标系中, 方位角才代表平面极坐标系的极角)。这样一来, 问题就与 φ 无关了, 就可采用 $m=0$ 的轴对称球函数 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = A\Theta(\theta) = Ay(x) = AC \cdot P_l(x) = AP_l(\cos \theta)$, 以及同 l 下的 $R(r) = Cr^l + Dr^{-(l+1)}$, 一起凑成 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \cdot P_l(\cos \theta)$ 。

该题已经帮你选取好了 z 轴朝向, 使得边界条件 $u|_{r=r_0} = \cos^2 \theta$ 与 φ 无关了; 若我们老实将 $u = R\Theta\Phi = \sum (A \cos m\varphi + B \sin m\varphi) [Cr^l + Dr^{-(l+1)}] P_l^m(\cos \theta)$ 代入边界条件, 也会因边界条件不含 φ , 而将边界条件展开, 对比系数得 $m=0$ 【否则 Θ 就是连带的勒让德方程的解 $P_l^m(\cos \theta)$ 了】。因此我们直接使用 $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$ 。

因球心处的自然的边界条件 $u|_{r=0}$ 是有限值; 各 $B_l=0$, $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$; 代入边界条件, $\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(x) = x^2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1)+1}{3} = \frac{2 \cdot P_2(x)+1}{3} = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$, 对比得到 $A_0 = \frac{1}{3}$; $A_2 r_0^2 = \frac{2}{3}$, 其他 $A_l=0$ 。于是 $u(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{r_0^2} r^2 P_2(x)$ 。

例 2. 半径为 r_0 的半球, 其球面上温度保持为 $u_0 \cos \theta$, 底面绝热, 试求这个半球里的稳定温度分布。

选取球心为坐标系的极点, 垂直于底面的方向为极轴方向, 问题便与 φ 无关(像题中的边界条件中所选的坐标系来描述边界条件一样)。定解问题为:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \\ u|_{r=r_0} = u_0 \cos \theta, (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}), \text{ 亦即 } \begin{cases} \nabla^2 u = 0 (0 < x \leq 1) \\ u|_{r=r_0} = u_0 x, (0 < x \leq 1). \end{cases} \quad \text{【注: } \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{】} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$; $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 对应 $\cos 0 \geq \cos \theta > \cos \frac{\pi}{2}$, 即 $1 \geq x > 0$ 】

为保证最终得到的勒让德多项式的正交完备性(否则怎么求系数; 况且函数连展都不能展开为以 “[0,1] 上的 $P_l(x)$ ” 为基的级数, 因为它们不完备), 需要将解 $u(r, \theta)$ 延拓到一整个球型区域内, 由于底面为第二类齐次边界条件, 所以对 u 采用偶延拓:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi) \\ u|_{r=r_0} = u_0 |\cos \theta|, (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi) \end{cases}, \text{ 亦即 } \begin{cases} \nabla^2 u = 0, (-1 \leq x \leq 1) \\ u|_{r=r_0} = u_0 |x|, (-1 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad \text{偶延拓后的 } u,$$
 自然满足**第二类齐次边界条件**: $\frac{\partial u}{\partial \theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

解出来 u 后, 它在 $(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$ 上的部分即是所求的上半球的问题的解 u . 由于轴对称性和**自然的边界条件**, 球内区域的拉普拉斯方程的通解为 $u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$, 将它代入**球面上的边界条件**即有: $\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = u_0 |x|$, 根据之前的结果, $|x| = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} P_{2n}(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} P_{2n}(x)$. 代入后进行对比: $\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2} u_0 P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} u_0 P_{2n}(x)$, 得到 $A_{2n+1} = 0, A_0 = \frac{1}{2} u_0, A_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} \frac{u_0}{r_0^{2n}}$.
 于是最终解为 $u(r, \theta) = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} \frac{u_0}{r_0^{2n}} r^{2n} P_{2n}(\cos \theta), (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$.

例 3. 若函数 $F(r, \theta)$ 能够展为 $r=0$ 处的幂级数, 且展开系数(对基我们不做规定)为勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$, 如 $F(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) r^l$, 则称 $F(r, \theta)$ 为**勒让德多项式的母函数(或生成函数)**——很奇怪, 之前都是函数以 $P_l(\cos \theta)$ 为基展开, 而这里却是函数以 r^l 或 $\frac{1}{r^{l+1}}$ 等为基, 却以 $P_l(\cos \theta)$ 为系数; 不过这也不生疏, 上一题的通解不就是这样么。

设在单位球**北极** $(0, 0, 1)$ 置一个带电量 $q = 4\pi\epsilon_0$ 的正电荷(q 在 z 轴上)【**坐标系的原点可在以正电荷为球心、半径为 1 的球面上任意选取**】。一方面, 在我们旧有认知下, 球内任意一点处的静电势为 $u(r, \theta) = \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} (r < 1)$ 。另一方面, 由于球内无电荷, u 在球内遵从拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$, 其满足**自然的边界条件**的轴对称的通解为 $\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), (r < 1)$ 。二者理应相等, 即有 $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$ 。

此时理应使用 $P_l(x)$ 的正交性确定各系数 A_l , 但这里有个简便办法: 令 $\theta = 0$, 于是 $\frac{1}{\sqrt{1-2r+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(1)$, 由于 $r < 1$ 以及 $P_l(1) = 1$, 即有 $\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l$, 将左式展开即有 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l$, 对比可得各 $A_l = 1$ 。因此, $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta)$ 。同样, 将 $r > 1$ 时的通解 $\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$ 与 $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$, 在 $\theta = 0$ 下做对比, 即 $\frac{1}{r-1} = \frac{1}{r} \frac{1}{1-\frac{1}{r}}$ $= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)}, \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l}$, 可得各 $B_l = 1$ 。于是, $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$ 。

据 $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta), r < 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), r > 1 \end{cases}$, 称 $P_l(\cos \theta)$ 为**勒让德多项式的母函数(或生成函数)**。以半径为 R 的球(面)代替单位球(注意: 点电荷仍然在球面上, 且仍以 oz 轴; 这样 $\frac{1}{d}$ 形式不变), 则可进行如下拓展: 将相对矢径 $\frac{r}{R}$ 视为之前的单位半径

$$R=1 \text{ 时的 } r=\frac{r}{1}, \text{ 代入即有 } \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{R}\cos\theta+(\frac{r}{R})^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{r}{R})^l P_l(\cos\theta), \frac{r}{R} < 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{r}{R})^{l+1}} P_l(\cos\theta), \frac{r}{R} > 1 \end{cases}, \text{ 两个方程两边均}$$

$$\text{同时乘以 } \frac{1}{R}, \text{ 得到 } \frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} r^l P_l(\cos\theta), r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} R^l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), r > R \end{cases}.$$

(七).母函数

例 4.现在我们将上一个问题变为：点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 不再是处在球面 $r=a$ 上了，而是在球外；设它与球心相距 $R(R>a)$ 。并且球是个导体球，且接地(之前的球是假想的球面，其内和其外以及其面上，均没有电荷分布且是真空(即非介质))。

若没有导体球存在，则静电势应为 $u(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}$ ；那么由于导体球的存在，感应电荷产生附加电势， $u(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}} + v(r,\theta)$ 。球外区域， $u(r,\theta)$ 满足泊松方程以及两个边界条件(自然；球面)：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{4\pi\epsilon_0 q \delta(r)}{\epsilon_0} = -4\pi q \delta(r) \\ u|_{r=a} = 0 \\ u|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}, \text{ 代入}$$

u ，得到 v 所满足的定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{R^2-2aR\cos\theta+a^2}} \\ v|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}.$$

由于电荷分布在轴对称电场/电势的作用下平衡后，也是轴对称的，那么它单独存在所产生的电势 v 也应是轴对称的。于是，考虑自然的边界条件后， v 的轴对称的通解为 $\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$ 。

代入球面边界条件，即有 $-\frac{q}{\sqrt{R^2-2aR\cos\theta+a^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$ ，将左式中的 $P_l(\cos\theta)$ 的母函数展开：根据 $\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} r^l P_l(\cos\theta), r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} R^l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), r > R \end{cases}$ ，即有

$$-q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} a^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), a < R, \text{ 对比系数即有 } -\frac{q}{R^{l+1}} a^l = B_l a^{-(l+1)}, \text{ 于是 } B_l = -q \frac{a^{2l+1}}{R^{l+1}}.$$

得到 $v(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} -q \frac{a^{2l+1}}{R^{l+1}} r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = -q \frac{a}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{R}\right)^l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$ ，将该级数反向凑成 $P_l(\cos\theta)$ 的母函数：由于该形式符合第二种，且 $r \geq a > \frac{a}{R} a = \frac{a^2}{R}$ ，于是有

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{R}\right)^l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{R}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta + r^2}}, \text{ 那么 } v(r,\theta) = \frac{-\frac{a}{R}q}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{R}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta + r^2}}.$$

可见 $r > a$ 的空间中，(感应电荷的) v 相当于是在 $z = \frac{a^2}{R}$ 处电量为 $-4\pi\epsilon_0 \frac{a}{R}q$ 的点电荷在 $r > a$ 的空间中产生的电势，因此把这个假想的电荷称为原电荷的电像(电动力学中称为像电荷)。

$$\text{得到 } u(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}} + \frac{-\frac{a}{R}q}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{R}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{R}\cos\theta + r^2}}.$$

(八).递推公式

利用母函数还可导出勒让德多项式的递推公式。

将之前的母函数及其展开式中的 $\cos\theta$, 写作 x : $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$ 。两边对 r 求导, 得到 $-\frac{1}{2} \frac{2r-2x}{(1-2rx+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-r}{(1-2rx+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x)$ 。两边同乘以 $(1-2rx+r^2)$, 得到 $(x-r) \frac{1}{(1-2rx+r^2)^{\frac{1}{2}}} = (x-r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1-2rx+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x)$, 比较两边的 r^l 系数得到: $xr^l P_l(x) - r^l P_{l-1}(x) = (l+1)r^l P_{l+1}(x) - 2lr^l x P_l(x) + (l-1)r^l P_{l-1}(x)$ 。合并同类项(此时各项的 r^l 已相同, 同类项是指 $P_{l-1}(x)$ 的阶数, 即角标相同的项), 即有 $(l+1)r^l P_{l+1}(x) - (2l+1)xr^l P_l(x) + lr^l P_{l-1}(x) = 0$, 两边同时除以 r^l , 得到 $(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$ 。

这个式子可以从 $P_{l-1}(x)$ 和 $P_l(x)$ 推出 $P_{l+1}(x)$, 因此称之为勒让德多项式的递推公式; 就像之前正则奇点处的递推公式, 或者说斐波那契数列的递推公式一样。

勒让德多项式的递推公式有很多, 常见的除此之外还有 5 种, 但这 5 种都或多或少, 包含了勒让德多项式的导数项存在。

例 5. 计算定积分 $\int_{-1}^{+1} x P_{l_2}(x) P_{l_1}(x) dx$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l_2+1} \int_{-1}^{+1} [(l_2+1)P_{l_2+1}(x) + l_2 P_{l_2-1}(x)] P_{l_1}(x) dx &= \frac{l_2+1}{2l_2+1} \int_{-1}^{+1} P_{l_2+1}(x) P_{l_1}(x) dx + \\ \frac{l_2}{2l_2+1} \int_{-1}^{+1} P_{l_2-1}(x) P_{l_1}(x) dx &= \frac{l_2+1}{2l_2+1} N_{l_1}^2 \delta_{l_2+1, l_1} + \frac{l_2}{2l_2+1} N_{l_1}^2 \delta_{l_2-1, l_1} = \frac{l_2+1}{2l_2+1} \frac{2}{2l_1+1} \delta_{l_2+1, l_1} + \\ \frac{l_2}{2l_2+1} \frac{2}{2l_1+1} \delta_{l_2-1, l_1} &= \begin{cases} \frac{2(l_2+1)}{(2l_2+1)(2l_1+1)}, l_2+1=l_1 \\ \frac{2l_2}{(2l_2+1)(2l_1+1)}, l_2-1=l_1 \\ 0, l_1, l_2 \text{ 不满足以上关系} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2l_1}{(2l_1-1)(2l_1+1)}, l_2=l_1-1 \\ \frac{2(l_1+1)}{(2l_1+3)(2l_1+1)}, l_2=l_1+1 \\ 0, l_2 \neq l_1-1, l_1+1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2(l_2+1)}{(2l_2+1)(2l_2+3)}, l_1=l_2+1 \\ \frac{2l_2}{(2l_2+1)(2l_2-1)}, l_1=l_2-1 \\ 0, l_1 \neq l_2-1, l_2+1 \end{cases} \end{aligned}$$

10.2 连带勒让德函数

为了得到一般情况下的球函数 Y , 首先要求解 l 阶连带勒让德方程: $(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \Theta = 0$ 。其中 $m=0, 1, 2, \dots$ (但其实自然的周期条件, 只限定 m 是整数, 并没有限定其必须非负; 而且 m 取负值对 l 阶连带勒让德方程及其解, 没有影响), 而 $l(l+1)$ 中 $l=0, 1, 2, \dots$ 。

(一).连带勒让德函数

(1).连带勒让德函数的表达式(而不是多项式)

$x_0=0$ 是连带勒让德方程的常点, 这与 9.2.(二).勒让德方程的级数解类似, 可以用那里的级数解法在 $x_0=0$ 的邻域上求连带勒让德方程的级数解。但是系数的递推公式比较复杂, 难于写出一一般表达式。

因此, 正如球坐标系下的亥姆霍兹方程第一次分离变量后所得的 l 阶球贝赛尔方程 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)]R=0$, 代入 $R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}} y(x)$ 以及 $x=kr$ 后, 会变为 $l + \frac{1}{2}$ 阶贝赛尔方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + [x^2 - (l + \frac{1}{2})^2]y=0$ 一样。

这里也令 $\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} y(x)$ (注: 我们之前已经代入了 $x=\cos\theta$, 使得 $\Theta(\theta)$ 变为了 $\Theta(x)$), 于是 $\frac{d\Theta}{dx}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} y' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} xy$, $\frac{d^2\Theta}{dx^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} y'' - 2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} xy' - [m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} x]'y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y'' - 2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} xy' - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} y + m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2} x^2 y$ 。

将三者代入后, 连带勒让德方程化为 $(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [l(l+1) - m(m+1)]y=0$ 。 $x_0=0$ 仍是这个方程的常点, 用级数解法所得的系数递推公式也不复杂。但有更简单的解法:

将同一 l 的勒让德多项式 $P_l(x)$ 代入勒让德方程 $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y=0$, 并对方程两边求 m 次导, 即有 $[(1-x^2)P'' - 2xP' + l(l+1)P]^{(m)}=0$, 运用莱布尼兹求导法则, 展成 $\sum_{i=0}^m C_m^i (1-x^2)^{(i)} P^{(m-i)} - 2 \sum_{i=0}^m C_m^i x^{(i)} P^{(m-i)} + l(l+1)P^{(m)}=0$ 。第一项的 i 最多取到 2, 第二项的 i 最多取到 1, 于是 $[(1-x^2)P''^{(m)} - m2xP''^{(m-1)} - C_m^2 2P''^{(m-2)}] - 2[xP'^{(m)} + mP'^{(m-1)}] + l(l+1)P^{(m)}=0$ 。其中 $P''^{(m-1)}=P'^{(m)}$ 、 $P''^{(m-2)}=P'^{(m-1)}=P^{(m)}$, 合并同类项, 得到 $(1-x^2)P''^{(m)} - 2(m+1)xP'^{(m)} + [-2C_m^2 - 2m + l(l+1)]P^{(m)}=0$ 。

于是 $(1-x^2)P^{(m)''} - 2(m+1)xP^{(m)'} + [l(l+1) - m(m+1)]P^{(m)}=0$ 。将其与连带勒让德方程 $(1-x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [l(l+1) - m(m+1)]y=0$ 对比, 发现连带勒让德方程的变换式的解 y (而不是连带的勒让德方程的解 $\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} y(x)$), 应是勒让德方程的解 $y=P_l(x)$ 的 m 阶导数, 即有 $y(x)=P_l^{(m)}(x)$ 。

因此 $\Theta(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$, 这叫做连带的勒让德函数(而不是多项式), 记作 $P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$ 。连带的勒让德方程和自然的边界条件也一同构成本征值问题, 本征值为 $l(l+1)$, $l=0,1,2,\dots$, 本征函数为 $P_l^m(x)$ 。——表达式中, $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ 不影响 $P_l^m(x)$ 的奇偶性, 而 $P_l^{(m)}(x)$ 的各项次数为 $P_l(x)$ 的对应各项幂次减 m ,

且像 $P_l(x)$ 一样, 相邻项相差 2 幂次, 那么当最高次幂 $l - m = 2n$ 时($n=0,1,2,\dots$), $P_l^{(m)}(x)$ 为偶函数; 当 $l - m = 2n+1$ 时($n=0,1,2,\dots$), $P_l^{(m)}(x)$ 为奇函数。

由于 $P_l(x)$ 是 l 次多项式, 则最多只能求导 l 次, 否则 $P_l^{(m)}(x)$ 就将变为 0——因此 $l \geq m$ 。因此, 对于确定的 m , $l=m, m+1, \dots$; 而对于确定的 l , $m=0, 1, 2, \dots, l$ 。当 $m=0$ 时, $P_l^{(m)}(x)$ 简化为 $P_l(x)$ 。

(2).连带勒让德多项式的微分表示

由勒让德多项式的微分表示: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$, 代入 $P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$, 即有 $P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$ 。

自然的周期条件并未限制 m 的正负, 且连带的勒让德方程中出现的 m^2 也暗示着 m 可取负整数。——不过在 $P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$ 中我们并不能将 m 替换为 $-m$, 因为对 $P_l(x)$ 求导只能说求非负整数次导(其实, 求 $-m$ 次导相当于对它做 m 次积分)。——但在微分表达式中, 由于 $l \geq m$ 的缘故, $\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}$ 的阶数永远是非负的, 那么我们可以猜想 $P_l^{-m}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l$ 也是连带的勒让德方程的解, 且也满足自然的边界条件(·它也是多项式而非级数)。

但正如勒让德方程一样, 连带的勒让德方程本身, 作为二阶常微分方程, 有两线性无关的解。但自然的边界条件限制解只能有一个, 因此 $P_l^{-m}(x)$ 应与 $P_l^m(x)$ 线性相关。

【不像自然的周期条件, 自然的边界条件一般会去掉另一个解: 比如 $y'' + \lambda y = 0$, 加上 $y|_{y=0}$ 会导致 $y = A \cos \theta + B \sin \theta$ 中 $A \cos \theta$ 项消失; 再比如 $R(r) = C r^l + D r^{-(l+1)}$ 的退化、勒让德多项式的解 $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$, 因 x/θ 所具有的自然边界条件, 而退化为其中一个多项式, 等例子】

$$\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l}{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l} = \frac{(1-x^2)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l}{\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l}$$
, 其分子虽比分母多求了 $2m$ 次导, 但分母又乘上了一个 $2m$ 次多项式。所以右式的分子分母都是同次多项式, 各次幂之比, 都应是同一个常数。为了简单, 我们只关注其最高幂项的系数比:

$$\frac{(-1)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} x^{2l}}{\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} x^{2l}} = (-1)^m \frac{\frac{(2l)!}{(l-m)!}}{\frac{(2l)!}{(l+m)!}} = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}。 于是, P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x)。$$

(3).连带勒让德多项式的积分表示

由勒让德多项式的积分表示: $P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}} dz$, 代入 $P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x)$, 其中的 (m) 是对 $P_l(x)$ 中的 x 求导, 即有 $P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l l!} \oint \frac{d^m}{dx^m} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \oint \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+m+1}} dz。$

(二).连带勒让德函数的正交性

同一 m , 不同 $l(l=m, m+1, \dots)$ 的连带勒让德函数 $P_l^m(x)$ 在 $x \in (-1, +1)$ 上正交:
 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}^m(x) P_{l_1}^m(x) dx = 0 (l_1 \neq l_2)$ 。根据下一节, 它还可被写为 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}(x) P_{l_1}(x) dx =$
 $(N_l^m)^2 \delta_{l_1 l_2} = \frac{2}{2l_1+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l_1 l_2}$ 。【这仍是施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(性质 3)的特例】

它还可表为 $\int_{-1}^{+1} P_{l_2}^m(\cos\theta) P_{l_1}^m(\cos\theta) d\cos\theta = 0$, 即 $\int_0^\pi P_{l_2}(\cos\theta) P_{l_1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0 (l_1 \neq l_2)$, 称为不同本征值 $l_1(l_1+1), l_2(l_2+1)$ 所对应的本征函数 $P_{l_2}^m(\cos\theta), P_{l_1}^m(\cos\theta)$ 在区间上带权重 $\sin\theta$ 正交。

正交关系是对同一组本征值下的一组本征函数而言的: 一个 m 对应一个 l 阶连带勒让德方程 $(1-x^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] \theta = 0$, 而该方程中, m 不是它的本征值, $l(l+1)$ 才是, 于是一个 m 也就对应了一组本征值 $\{l(l+1)\}$, m 不同的两个 $P_l^m(x)$ 所对应的两个本征值根本不属于同一组, 这两 $P_l^m(x)$ 也就根本不是同一组本征函数(它们是两个不同的连带勒让德方程的解), 也就谈不上正交性(无法确定二者是否正交)。

但我们之后会提到, 连同第一次分离变量 RY 所引入的常数 $l(l+1)$ 在内, m^2 也是球函数方程 $\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0$ 的本征值, 因为 m 的变化不会导致球函数方程的变化, 且 m^2 是第二次分离变量所引入的常数, 而球函数方程处在第二次分离变量之前; 但之前的连带勒让德方程与 Φ 的方程, 是第二次分离变量后, 同时产生的两个方程, 因而 m^2 只是 Φ 的方程本征值, 而不是连带勒让德方程的本征值—— m 取整由 Φ 的方程的自然周期条件所确定; 而 l 取整由(连带)勒让德方程的 θ 的自然边界条件所确定。

(三).连带勒让德函数的模

用微分表示来分部积分: $(N_l^m)^2 = \int_{-1}^{+1} [P_l^m(x)]^2 dx = (1-x^2)^m (\frac{1}{2^l l!})^2 (1-x^2)^m \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l+m)^2} dx$, 然而这样没法像以前那样分部积分, 因为有个 $(1-x^2)^m$ 掺和进来了。为了消掉它, 我们采用以下方法, 把其中一个 $P_l^m(x)$ 换为 $P_l^{-m}(x)$, 使得它俩的 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ 与 $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$ 相乘后约掉:

$$\begin{aligned} (N_l^m)^2 &= \int_{-1}^{+1} [P_l^m(x)]^2 dx = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^{-m}(x) dx = \\ &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2^l l!} (x^2-1)^{l(l+m)} \cdot \frac{1}{2^l l!} (x^2-1)^{l(l-m)} dx = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left(\frac{1}{2^l l!}\right)^2 \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l+m)} (x^2-1)^{l(l-m)} dx, \\ &\text{将要降阶的 } (x^2-1)^{l(l+m)} \text{ 放在微分算符里, } \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-m)} d(x^2-1)^{l(l+m-1)} = (x^2-1)^{l(l-m)} (x^2-1)^{l(l+m-1)} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l-m-1)} d(x^2-1)^{l(l+m-1)} \end{aligned}$$

$1)l^{(l+m-1)}(x^2-1)^{l(l-m+1)}dx$, 前者因其中的 $(x^2-1)^{l(l-m)}$ 以 $x_0=\pm 1$ 为 m 阶零点, 而 $m \geq 1$ (若 $m=0$, 则不需要再这样分部积分了, 此时要算的积分就是 $(N_l)^2$ 了), 因此它以及之后的积出来的这部分, 值均=0。

于是, $(N_l^m)^2 = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^{-m}(x) dx = (-1)^{m+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left(\frac{1}{2^{l!}}\right)^2 \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{l(l+m-1)}(x^2-1)^{l(l-m+1)} dx = (-1)^{m+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} P_l^{m-1}(x) P_l^{-m+1}(x) dx = \dots = (-1)^{m+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (N_l)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$, 于是 $N_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}}$ 。

(四).广义傅里叶级数

作为施图姆-刘维尔本征值问题的性质 4 的一个特例: 由于连带勒让德函数 $P_l^m(x)$ ($l=m, m+1, \dots$) 是完备的, 所以可作为广义傅里叶级数展开的基。将定义在 $[-1, 1]$ 上的 $f(x)$, 或定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(\theta)$, 以之为基地, 展开为广义傅里叶级数。

即 $f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l P_l^m(x)$, 而 $\int_{-1}^{+1} f(x) P_k^m(x) \cdot dx = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \int_{-1}^{+1} P_l^m(x) \cdot P_k^m(x) dx = f_k \int_{-1}^{+1} P_k^m(x) \cdot P_k^m(x) dx = f_k (N_l^m)^2$, 得 $f_k = \frac{1}{(N_l^m)^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k^m(x) \cdot dx = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l^m(x) \cdot dx$; 也可写为 $f(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l P_l^m(\cos\theta)$, $f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} f(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta$ 。

将函数以 $m=0$ 的 $P_l^m(x)$ 来展开, 即就相当于将函数用球对称的球函数 $Y(\theta, \varphi) = A\Theta(\theta) = AP_l(x)$ 为基展开; 将函数单独以 $m \neq 0$ 的 $P_l^m(x)$ 来展开, 没有什么物理意义; 但将函数以一般的球函数 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = (A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)P_l^m(x)$ 为基来展开, 倒是挺有用, 将在后面提到。

10.3 一般的球函数

(一).球函数

(1).球函数的表达式

球函数方程 $\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y=0$ 的解 $Y(\theta, \varphi)$ 称为球函数。用分离变量法所得的球函数方程的解为 $Y_l^m(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = P_l^m(x) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots,l \\ l=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$ 。 $\begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix}$ 表示俩函数是线性无关的, 即对于 $\neq 1$ 的每个 m , 球函数方程有两个线性无关的解 $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 、 $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 。【 l 称为球函数的阶】

线性独立的 l 阶球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (l 确定)共有 $2l+1$ 个, 因为当 $m=0$ 时, $\sin m\varphi=0$, 不在 $1, \sin\varphi, \cos\varphi, \dots$ 这些线性独立的三角函数族之中, 此时只有 $Y_l^0(\theta, \varphi)=P_l^0(x) \cdot 1=P_l(x)$ 这一个解; 而 $m=1, 2, \dots, l$ 分别对应两个独立的本征函数 $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 、 $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 。

(2).复数形式的球函数

代入欧拉公式 $\cos m\varphi = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2}$ 、 $\sin m\varphi = \frac{e^{im\varphi} - e^{-im\varphi}}{2i}$, 可将用三角函数表达的 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 全部重新组合为统一用 $e^{im\varphi}$ 表达: $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(x)e^{im\varphi} \left(\begin{matrix} m=-l, \dots, 0, 1, \dots, l \\ l=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)$, 可见独立的 l 阶球函数还是 $2l+1$ 个。其中的 $P_l^{|m|}(x)$ 也可写为 $P_l^m(x)$, 因为当 $m < 0$ 时, $P_l^m(x) = P_l^{-|m|}(x) =$ 之前我们所讨论过的 $m > 0$ 下的 $P_l^{-m}(x)$, 而这与 $P_l^{|m|}(x)$ 即之前 $m > 0$ 的 $P_l^m(x)$, 只相差一个常数因子。

(二).球函数的正交关系

①.任意两个 m, l 不完全相同的球函数, 在球面 $S(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ 上满足:

$$\begin{aligned} \iint_S Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi &= \iint_S P_{l_1}^{m_1}(x) \left\{ \frac{\sin m_1 \varphi}{\cos m_1 \varphi} \right\} P_{l_2}^{m_2}(x) \left\{ \frac{\sin m_2 \varphi}{\cos m_2 \varphi} \right\} \sin\theta d\theta d\varphi = \\ \int_0^\pi P_{l_1}^{m_1}(\cos\theta) P_{l_2}^{m_2}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin m_1 \varphi}{\cos m_1 \varphi} \right\} \left\{ \frac{\sin m_2 \varphi}{\cos m_2 \varphi} \right\} d\varphi &= \\ \int_{-1}^1 P_{l_1}^{m_1}(x) P_{l_2}^{m_2}(x) dx \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin m_1 \varphi}{\cos m_1 \varphi} \right\} \left\{ \frac{\sin m_2 \varphi}{\cos m_2 \varphi} \right\} d\varphi &= 0, \quad (m_1 \neq m_2 \text{ 或 } l_1 \neq l_2). \end{aligned}$$

这是因为, 当 $m_1 \neq m_2$ 时, 三角函数的正交性 $\int_0^{2\pi} \sin m_1 \varphi \cdot \sin m_2 \varphi d\varphi = 0$ 、 $\int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cdot \cos m_2 \varphi d\varphi = 0$, 而此时 $\int_{-1}^1 P_{l_1}^{m_1}(x) P_{l_2}^{m_2}(x) dx$ 不确定(无论是否有 $l_1 = l_2$), 但我们不需要关心。因为它们的乘积=0; 而当 $m_1 = m_2$ 时, 才能讨论 $P_{l_1}^{m_1}(x), P_{l_2}^{m_2}(x)$ 的(在 $[-1, 1]$ 上的)正交性: 若 $l_1 \neq l_2$, 则 $\int_{-1}^1 P_{l_1}^{m_1}(x) P_{l_2}^{m_2}(x) dx = 0$ 。——因此只要满足 $m_1 \neq m_2$ 、 $l_1 \neq l_2$ 其中之一, $Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi), Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)$ 就(在球面上)正交。

②.同样, 两个 m, l 不完全相同的 $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(x)e^{im\varphi}$, 也在球面上正交:

$$\begin{aligned} \iint_S Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) [Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi &= \int_{-1}^1 P_{l_1}^{|m_1|}(x) [P_{l_2}^{|m_2|}(x)]^* dx \int_0^{2\pi} e^{im_1 \varphi} [e^{im_2 \varphi}]^* d\varphi = \\ \int_{-1}^1 P_{l_1}^{|m_1|}(x) P_{l_2}^{|m_2|}(x) dx \int_0^{2\pi} e^{i(m_1 - m_2)\varphi} d\varphi. &\text{ 当 } m_1 \neq m_2 \text{ 时, } \int_0^{2\pi} e^{i(m_1 - m_2)\varphi} d\varphi = 0; \text{ 当 } \\ m_1 = m_2 \text{ 时, } \int_0^{2\pi} e^{i(m_1 - m_2)\varphi} d\varphi &= 2\pi \neq 0. \text{ 此时若 } l_1 \neq l_2, \text{ 则 } \int_{-1}^1 P_{l_1}^{m_1}(x) P_{l_2}^{m_2}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

根据下一节, 它还可被写为 $\iint_S Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) [Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi = (N_l^m)^2 \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$ 。

(三).球函数的模

①. $(N_l^m)^2 = \iint_S [Y_l^m(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \int_{-1}^{+1} [P_l^m(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin^2 m\varphi}{\cos^2 m\varphi} \right\} d\varphi$, 然而 $\int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{m} = N_m^2 = \pi (m = 1, 2, \dots, l)$, 【它可看作 $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \cdot dx = l$ 中 $l = \pi$ 的特例】 $\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \pi(\delta_m + 1)$, 且 $\int_{-1}^{+1} [P_l^m(x)]^2 dx = (N_l^m)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$. 于是球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(x) \left\{ \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right\} \begin{pmatrix} m=0,1,2,\dots,l \\ l=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$ 的模 $N_l^m = \sqrt{\frac{2\pi(\delta_m+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}$. 【当 $m=0$ 时, 该模指的是 $\int_{-1}^{+1} [P_l^0(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} \cos^2 0\varphi d\varphi$ 】

②. 而复数形式的球函数的 $(N_l^m)^2 = \iint_S Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) [Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi = \int_{-1}^{+1} [P_l^{|m|}(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2}{2l+1} \cdot 2\pi$, 所以球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi}$ 的模 $N_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}$.

(四).球面上的函数的广义傅里叶级数

定义在球面 $S(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ 上的函数 $f(\theta, \varphi)$, 可用球函数 $P_l^m(x) \left\{ \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right\}$ 或 $P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi}$ 展开成二重广义傅里叶级数。

①. 先以 $P_l^m(x) \left\{ \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right\}$ 为例, 分两步, 先将 $f(\theta, \varphi)$ 对 φ 展为傅里叶级数 (θ 看做常数, 并出现在系数 A_m 和 B_m 中), $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi]$. 其中, $A_m(\theta) = \frac{1}{\pi(\delta_m+1)} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi$, $B_m(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi$; 然后以 $P_l^m(x)$ 为基, 在 $[-1, 1]$ 上把 $A_m(\theta), B_m(\theta)$ 展开: $A_m(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} A_l^m P_l^m(x)$, $B_m(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} B_l^m P_l^m(x)$. 【系数 A_l^m, B_l^m 相当于 f_l 】 其中, $A_l^m = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} A_m(\theta) P_l^m(x) \cdot dx = \frac{2l+1}{2\pi(\delta_m+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} [\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi] P_l^m(x) \cdot dx$, $B_l^m = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} B_m(\theta) P_l^m(x) \cdot dx = \frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} [\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin m\varphi d\varphi] P_l^m(x) \cdot dx$. 【 A_l^m, B_l^m 的系数部分即为 $\frac{1}{(N_l^m)^2}$ 】

于是, $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [\sum_{l=m}^{\infty} A_l^m P_l^m(x) \cos m\varphi + \sum_{l=m}^{\infty} B_l^m P_l^m(x) \sin m\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(x)$. 两个求和号可以互换, 但由于起点相关, 交换结果为 $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l$. 其中的系数 A_l^m, B_l^m 已经在上一段末开列出来。

②. 若以 $P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi}$ 为基, 则首先 $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\theta) e^{im\varphi}$, 系数 $C_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) [e^{im\varphi}]^* d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi$, 再将 $C_m(\theta)$ 展开为 $C_m(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} C_l^m P_l^{|m|}(x)$, 其中 $C_l^m = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_{-1}^{+1} C_m(\theta) P_l^{|m|}(x) \cdot dx = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_{-1}^{+1} [\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi] P_l^{|m|}(x) \cdot dx$ 【 C_l^m 的系数部分即为 $\frac{1}{(N_l^m)^2}$ 】, 于是 $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} C_l^m P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l^m P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi}$ 【 $|m| \leq l$ 】。

(五).正交归一化的球函数

$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{N_l^m} Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi}$ 。它的正交归一关系为：

$$\iint_S Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) [Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{N_{l_1}^{m_1} N_{l_2}^{m_2}} (N_l^m)^2 \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$$
。球面上的函数 $f(\theta, \varphi)$ 可用 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 展开, $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} C_l^m P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (N_l^m C_l^m) \left(\frac{1}{N_l^m} P_l^{|m|}(x) e^{im\varphi} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 其中
$$C_{lm} = N_l^m C_l^m = N_l^m \frac{1}{(N_l^m)^2} \int_{-1}^{+1} \left[\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \right] P_l^{|m|}(x) \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{N_l^m} P_l^{|m|}(x) e^{-im\varphi} \right] \cdot dx d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \cdot dx d\varphi$$

第十一章 柱函数

第十二章 格林函数法

第七章~第十一章, 主要介绍分离变数法求解各类定解问题。本章介绍另一常用方法: **格林函数方法**。

格林函数, 又叫**点源影响函数**。格林函数=一个点源, 在一定边界条件(初始条件)下产生的场。知道了各个点源的场, 便可用叠加的方法计算任意源产生的场。

之前我们用分离变量法得到的都是级数, 虽其级数和可能收敛到有限值。格林函数对于特定的边界条件, 可以有有限解(即函数形式, 而非级数形式), 意义上更明显。

12.1 泊松方程的格林函数法

对于一个**点源=点电荷**的**泊松方程** $\Delta v = -\frac{\rho(r_0)}{\epsilon_0}$, 其 $\rho(r_0) = q \cdot \delta(r - r_0)$, 若我们进一步令 $q = -\epsilon_0$, 则**泊松方程**变为 $\Delta v = \delta(r - r_0)$, 而一个点电荷(在**无界空间中**)产生的电势 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|r - r_0|}$ 。那么该泊松方程的解(在**没有边界条件限制下**), 便应是 $v = -\frac{1}{4\pi|r - r_0|}$ 。

【但是, 对于其他**点源**或者**边界条件**而言, 其**泊松方程** $\Delta v = \delta(r - r_0)$ 的解不一定是 $\frac{1}{|r - r_0|}$ 的形式, 还可能是诸如 $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|r - r_0|}$, 毕竟 δ 函数有很多, 是**广义的函数**; 求解 $\Delta v = \delta(r - r_0)$ 这样的方程, 同样需要结合**边界条件**。】

格林公式的使用条件：被积函数在边界曲面 Σ 上有连续的一阶偏导数，对应的 V 内二阶偏导数连续。

根据 $\oint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$ ，于是 $\oint_{\Sigma} \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v}) dV = \iiint_V (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \iiint_V \mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} dV + \iiint_V \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dV$ ；同样的道理， $\oint_{\Sigma} \mathbf{v} \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u} dV + \iiint_V \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} dV$ 。这称为**第一格林公式**。

【注：以上过程有瑕疵，不能直接套用格林公式(因为 $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}, \nabla^2 \mathbf{v}$ 在 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ 点发散)，但上述和下述结果仍正确。——从区域 V 中挖去一个小球 V_ε ，对于剩余空间，格林公式成立： $\oint_{\Sigma} \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_\varepsilon} \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V-V_\varepsilon} (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV$ ， $\oint_{\Sigma} \mathbf{v} \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_\varepsilon} \mathbf{v} \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V-V_\varepsilon} (\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV$ ；接下来修正后的步骤请看下一个括号。】

两式相减，得到 $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u}) dV$ 。根据 $\frac{\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$ (电动力学常用)，因此 $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} dS = \oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS$ 。代入即有 $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = \iiint_V (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u}) dV$ ， $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ 表示外法线方向 dS 上的**方向导数**。这称为**第二格林公式**。

【修正为： $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma_\varepsilon} (\mathbf{u} \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V-V_\varepsilon} (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u}) dV$ ；进一步有 $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS + \oint_{\Sigma_\varepsilon} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = \iiint_{V-V_\varepsilon} (\mathbf{u} \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{u}) dV$ 。先不要慌令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，此时右边 $= \iiint_V [\mathbf{u} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} f(\mathbf{r})] dV = - \iiint_V \mathbf{v} f(\mathbf{r}) dV$ ；再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，左边的后一项 $\oint_{\Sigma_\varepsilon} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = \oint_{\Sigma_\varepsilon} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = \oint_{\Sigma_\varepsilon} (-\mathbf{u} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = (-\mathbf{u}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}) 4\pi\varepsilon^2 = -\mathbf{u}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = -\mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$ ，于是仍将有接下来的 $\oint_{\Sigma} (\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}) dS = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) - \iiint_V \mathbf{v} f(\mathbf{r}) dV$ 】**【注：** \mathbf{u} 是连续的， $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$ 是有界的；之后会知道， \mathbf{v} 本身不只由 $-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ 组成，因为有边界条件掺和的关系， $\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{v} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ \mathbf{v}|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 的解会有附加的感应电荷(像电荷)产生的电势项 G_1 ，即 $\mathbf{v} = G_0 + G_1$ ，但其中的 G_1 在点源附近，即 Σ_ε 这个小球面上的值，相比于 $G_0 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \rightarrow \infty$ 而言，太小太小，可以忽略。**】**

1. 设所求的**泊松方程**为 $\nabla^2 \mathbf{u} = f(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \in V)$ ，对应的**边界条件**为 $(\alpha \mathbf{u} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}})|_{\Sigma} = \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$ 。

【之前我们介绍过： $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 为**第一类边界条件**； $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 为**第二类边界条件**； $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 为**第三类边界条件**。**泊松方程**与**第一类边界条件**构成的定解问题，叫**第一边值问题/狄里希利问题**；与**第二类边界条件**构成的定解问题，叫**第二边值问题/诺依曼问题**；与**第三类边界条件**构成的定解问题，叫**第三边值问题**】

我们将尝试着将 $\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = f(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha \mathbf{u} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}})|_{\Sigma} = \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma} \end{cases}$ 这样一个定解问题，转化为“点源配合适当的**边界条件**所产生的场” $\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{v} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha \mathbf{v} + \beta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}})|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 这样更易求解的问题，再将解得的 \mathbf{v} 代入我们接下来得出的公式，得到 \mathbf{u} 。

2. 根据 $\nabla^2 u = f(\mathbf{r})$ 以及 $\nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, 那么 $\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \iiint_V u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV - \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV = u(\mathbf{r}_0) - \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV$, 于是 $\oint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS = u(\mathbf{r}_0) - \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV$. 【注: u 只是 \mathbf{r} 的函数 $u(\mathbf{r})$, 而 v 是 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 的函数 $v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$; 并且 $v(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) = v(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, v 关于 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 的对称性, 来源于 $\nabla^2 v$ 即 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 关于 \mathbf{r}_0, \mathbf{r} 的对称性, 即 δ 函数 $\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases} = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r}| \neq 0 \\ \infty, & |\mathbf{r}| = 0 \end{cases}$ 关心的是/自变量是: 模 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. 所以所有的 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 的显函数, 以及 $\nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ 所有的解 v , 都因含有此部分而具有对称性; 你可以从 $v = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$, $v = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ 中可见一斑.】

得到 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS$, 其中 $f(\mathbf{r})$ 已知, 而 $v, \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma}, v|_{\Sigma}$ “相对已知” (即之后可以推知 or 人为给定), 还需同时知道 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}, u|_{\Sigma}$ 才能求解 $u(\mathbf{r}_0)$. 然而对于三类边值问题, 我们均不可能同时知道 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ 和 $u|_{\Sigma}$ 的值, 最多知道其中一个的值 $= \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$, 或是二者线性组合的值 $= \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$ (但这对于定解已经够了). 【注: $u(\mathbf{r}_0)$ 中的 $\iiint_V v f(\mathbf{r}) dV$ 相当于 V 内电荷在无界空间中产生的场, 而 $\oint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS$ 相当于边界上的感生电荷产生的场】

①. 对于第一边值问题, 我们只知道 $u|_{\Sigma} = \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$, 不知道 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$, 那么只需令 $v|_{\Sigma} = 0$, 这样一来, 不仅方程中消去了 $v \frac{\partial u}{\partial n}$ 项, 变为 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS$; 而且我们也确定了 $\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 该问题的边界条件 (即那个适当的), 以至于可以求解出 v 的具体表达式, 并可进一步得到 $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma}$, 这样一来求解 $u(\mathbf{r}_0)$ 所需的所有钥匙已经凑齐.

满足 $\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ v|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 的解 v 称为泊松方程第一边值问题的格林函数, 用 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 表示. 于是 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS$.

②. 对于第三边值问题, 我们只知 $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Sigma} = \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$, 而 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}, u|_{\Sigma}$ 均不知道. 不过可以令 $(\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = 0$, 于是 $v(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Sigma} - u(\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = \beta (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = v \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$, 得到 $(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = \frac{1}{\beta} v \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$. 代入 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS$, 得到 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} v \varphi(\mathbf{r}) dS$.

满足 $\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 的解 v 称为泊松方程第三边值问题的格林函数, 用 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 表示. 于是 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) dS$.

③. 对于第二边值问题, 我们只知道 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma}$, 不知道 $u|_{\Sigma}$, 那么看上去只需令 $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$, 这样就消去了 $u \frac{\partial v}{\partial n}$ 项, 变为 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V v f(\mathbf{r}) dV - \oint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$, 以至于得到 $u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV - \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) dS$; 但其实 $\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 该定解问题无解, 也就是不存在这样一个 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, 使得 $v = G$ 满足该定解问题. 【可以证明该

边界条件与泛定方程矛盾: $0 = \oint_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial n} dS = \oint_{\Sigma} \nabla v \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla^2 v \cdot dV = \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot dV = 1$ 】

需引入推广的格林函数: $\nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \frac{1}{V} (\mathbf{r} \in V)$ 。后续步骤不做讨论。

3. 先将方程
$$\begin{cases} u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS \\ u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) dS \end{cases}$$
 中的 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 对换, 方程仍成立:
$$\begin{cases} u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f(\mathbf{r}_0) dV + \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial n_0} dS \\ u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f(\mathbf{r}_0) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}_0) dS \end{cases}$$
; 再根据格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 的对称性(即 v 的对称性):
$$\begin{cases} u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) dV + \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dS \\ u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}_0) dS \end{cases}$$

以上便分别是: 第一边值问题解的积分表示式, 以及第三边值问题解的积分表示式。

【之所以 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 对换, 方程仍成立, 应该来源于推导得到该方程的所有过程中的所有方程, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 对换均成立, 也就是原初的几个方程中, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 对换后的方程成立——比如 $\nabla^2 u = f(\mathbf{r})$ 以及 $\nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; 对换后的 $\frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial n}$ 中 n 写作 n_0 , 同时 dV 写作 dV_0 、 dS 写作 dS_0 , 但由于积分区域和积分曲面, 仍然是 V 和 Σ , 因此积分变量是啥就不用管了, 仍是 dV, dS ; 但是 n_0 不能改, 因为这意味着是对 $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ 中的 \mathbf{r}_0 求偏导, 即 Σ 的方程及其法向由 \mathbf{r}_0 描绘】

当然我们也可将
$$\begin{cases} u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV + \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS \\ u(\mathbf{r}_0) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{\beta} \oint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) dS \end{cases}$$
 先积分完, 然后对积分完成后的结果再进行 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 的对换——这样做可能会使得积分过程变得很简单

(因为镜象法中, 若 Σ 是球面, 则产生 G_1 的像电荷的电量 $q = -q_0 \frac{a}{r_0}$, 也就是说 G_1 中会包含 $\frac{1}{r_0}$ 这一项, 再加上 $\frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}$ 中的 \mathbf{r}_1 也因 $\mathbf{r}_1 = \frac{a^2}{r_0}$ 而含有 r_0 , 相当对两项乘积的求导, 求起来比较麻烦; 而若对 $\frac{\partial G_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})}{\partial n}$, 则因对 \mathbf{r} 求导而可以将 $q = -q_0 \frac{a}{r_0}$ 看作常量, 比较方便)。

格林函数法, 在凝结态理论(研究固体材料)中应用较广, 在那里有类似 $\nabla^2 u = f(\mathbf{r})$ 的一维的二阶线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$ 【似乎没有边界条件?】, 该方程在高数上常以常系数 or 齐次的形式出现, 很难对除此以外的它进行操作(之前我们在 9.3 也讨论过它)。然而对它也可用格林函数法来解: $G'' + p(x)G' + q(x) = \delta(x - x_0)$ 【似乎没有边界条件?】, 解出 G 后, $y = \int G(x, x_0) f(x) dx$, 这与上面的 $u(\mathbf{r})$ 的表达式非常像, 以至于 y 就是 u 中的一部分。

12.2 用电像法求格林函数

现考虑第一边值问题。之前说过，满足
$$\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ v|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$
 的解 v 称为泊松方程第一边值问题的格林函数，用 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 表示。现在我们来尝试着求解
$$\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ G|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$
。

之前遇到非齐次的泛定方程，可采用 8.2 的级数解法，或者 8.4 中对泊松方程的第三种特解法：设 $u=v+w$ ，找个只需符合泛定方程的泊松方程的特解 v ，将非齐次方程转换为齐次的，边界条件任其不管，然后采用 8.3 的对非齐次边界条件的处理(可能最终又将归为 8.2 的级数解法，若方程因 v 的选取而变得非齐次了的话)，或者直接采用 laplace 方程的通解，用边界条件确定系数。现在我们采取与 8.4 相同的做法：

(一).无界空间的格林函数 基本解G₀

设 $G=G_0+G_1$ (相当于 $v+w$)，其中的特解 G_0 满足
$$\begin{cases} \nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \text{无边界条件要求} \end{cases}$$
，那么 G_1 便满足
$$\begin{cases} \nabla^2 G_1 = 0 \\ G_1|_{\Sigma} = -G_0|_{\Sigma} \end{cases}$$
，后者(G_1)可用“对应坐标系下的 laplace 方程的通解，用边界条件确定系数”来求解。

由于对 G_0 “无边界条件要求”，因而也之称为“无界区域的格林函数”；该特解 G_0 也被称为基本解【因为 G_0 (的解)不随边界条件变化而变化：比如对于第三边值问题， v 的合适的边界条件取为
$$\begin{cases} \nabla^2 v = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$
，此时 G_1 的边界条件变为 $(\alpha G_1 + \beta \frac{\partial G_1}{\partial n})|_{\Sigma} = -(\alpha G_0 + \beta \frac{\partial G_0}{\partial n})|_{\Sigma}$ ，然而 G_0 的边界条件仍然自由选取】。

下面我们来算一算
$$\begin{cases} \nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \text{无边界条件要求} \end{cases}$$
 这个“定解问题”：

①.若 $\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$ ，则 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ 处， G_0 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 G_0=0$ 。考虑 G_0 是三维的，因区域/边界是无界的，则 G_0 应是球对称的，有
$$\nabla^2 G_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial G_0}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial G_0}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G_0}{\partial \varphi^2} = 0$$
，且其中 G_0 应与 (θ, φ) 无关，于是剩下
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial G_0}{\partial r}) = 0$$
，即 $r^2 \frac{\partial G_0}{\partial r} = C_1$ ，得到 $\frac{\partial G_0}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$ ，即有 $G_0 = -\frac{C_1}{r} + C_2$ 。【该结果你也可以通过令之前 $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{Y \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dY}{d\theta}) - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} = l(l+1)$ ，中的 $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$ 的解： $R = Cr^l + Dr^{-(l+1)}$ 中的 $l=0$ ，来实现。即有 $G_0 = RY = AR = A[Cr^0 + Dr^{-1}] = C + D \frac{1}{r}$ 】

自然的边界条件只约束 $G_0|_{r \rightarrow \infty} = \text{有限值}$, 我们进一步令 $G_0|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 于是 $G_0 = -\frac{C_1}{r}$. 那么对 $\nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r})$ 两边作以 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ 为球心的小球体 V_ε 上的体积分, 方程左边 $\iiint_{V_\varepsilon} \nabla^2 G_0 \cdot dV = \oint_{\Sigma_\varepsilon} \nabla G_0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial n} \cdot dS = \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial r} \cdot r^2 d\Omega = \frac{C_1}{r^2} \cdot r^2 4\pi = 4\pi C_1$; 方程右边 $\iiint_{V_\varepsilon} \delta(\mathbf{r}) \cdot dV = 1$. 于是便得到了 $C_1 = \frac{1}{4\pi}$. 进而有 $G_0 = -\frac{1}{4\pi r}$; 对于 $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$, $G_0 = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$.

②. 现考虑 G_0 是二维的, 看看二维泊松方程的解是什么样: 设 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ 时, 方程 $\nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r})$ 退化为 laplace 方程 $\nabla^2 G_0 = 0$, G_0 与 z 无关, 则应采用柱坐标系, 并且由于 G_0 也是关于过原点的 z 轴呈轴对称的, 因此 $\nabla^2 G_0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial G_0}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2} = 0$ 变为 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial G_0}{\partial \rho}) = 0$, 得到 $\rho \frac{\partial G_0}{\partial \rho} = C_1$, $\frac{\partial G_0}{\partial \rho} = \frac{C_1}{\rho}$, $G_0 = C_1 \ln \rho + C_2$, 令 $C_2 = 0$, 即有 $G_0 = C_1 \ln \rho$.

【也可直接用 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + (\mu - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0$ 中 $\mu = 0, m = 0$ 所对应的解 $R(\rho) = E + F \cdot \ln \rho$ 】

对 $\nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r})$ 两边作以 z 轴为中轴线的单位长的小半径圆柱体 V_ε 上的体积分, 方程左边 $\iiint_{V_\varepsilon} \nabla^2 G_0 \cdot dV = \oint_{\Sigma_\varepsilon} \nabla G_0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial n} \cdot dS = \frac{\partial G_0}{\partial \rho} \cdot 2\pi\rho \cdot 1 = \frac{C_1}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi C_1$; 方程右边 $\iiint_{V_\varepsilon} \delta(\mathbf{r}) \cdot dV = 1$. 于是便得到了 $C_1 = \frac{1}{2\pi}$. 进而有 $G_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \rho = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$; 对于 $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$, $G_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\rho - \rho_0|}$. 【注: 二维平面上的点电荷, 等价于三维空间中的 // z 轴的线电荷。

且二维的必须以三维的眼光来看待(不然你如何对标量使用 stokes 公式, 将面积分转换为线积分?), 即令其厚度为单位 1(而不是一个薄片), 且各 z 值的平面上, G_0 的二维分布情况一致。——我们还可以用高斯定理得到它: $E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$, 得到 $E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$, 则 $U = -\int E \cdot dL = -\int \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \cdot dr = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln r$; 仍令其中 $\lambda = -\varepsilon_0$, 即有 $U = \frac{1}{2\pi} \ln r = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ 】

(二).电像法求格林函数 G_1

我们已解出了 $\begin{cases} \nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \text{无边界条件要求} \end{cases}$ 中的 G_0 , 现在我们尝试着解 $\begin{cases} \nabla^2 G_1 = 0 \\ G_1|_{\Sigma} = -G_0|_{\Sigma} \end{cases}$ 中的 G_1 .

它可通过 laplace 方程的通解+边界条件确定系数, 来得到。但这样得到的是个级数解。我们现采用另一种方法: 电像法(该方法一般只针对第一边值问题而言, 因为需要 $G|_{\Sigma} = 0$ 这样“(合)电势为 0”的边界条件; 且能用该方法求解的该类问题, 也不多, 因此也很有局限性: 大多只能求球面或平面上感应电荷的像电荷)。

首先给出 G_1 的物理含义: 对于第一边值问题而言, 我们将边界条件令为 $\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V) \\ G|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$ 的形式, 不妨将 G 看作 Σ 内电势 u , a. 这样之前解出的 $G_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ 便可看作 Σ 内点电荷 $-\varepsilon_0$ 单独存在于 \mathbf{r}_0 时, 在全空间(Σ 内)产生的电势。b. 此时 G_1 表示 Σ 面上产生的感应电荷, 单独存在时, 在 Σ 内产生的电势。c. 此时 $G|_{\Sigma} = 0$ 表示导体接地, 感应电荷在 Σ 面上产生的电势 $G_1|_{\Sigma}$, 与点电荷在 Σ 面上的电势值 $G_0|_{\Sigma}$ 之和, $G_0|_{\Sigma} + G_1|_{\Sigma} = 0$.

当 Σ 为球面时, 之前我们利用 $P_l(\cos\theta)$ 的母函数, 求过球面上的感应电荷, 在球面外产生的电势 G_1 , 发现它在形式上与一个球内点电荷在球外产生的电势相同。同样的道理, 我们用母函数法, 也可知道这里球面上的感应电荷, 在球内产生的电势, 相当于一个球外点电荷在球内产生的电势。

(1).有了数学基础和预期结果后, 我们便可放心地使用电像法了: 找出这么一个像电荷, 使得其在球内产生的电势 G_1 , 满足
$$\begin{cases} \nabla^2 G_1 = 0 \\ G_1|_{\Sigma} = -G_0|_{\Sigma} \end{cases}$$
以使得 $G = G_0 + G_1$ 满足
$$\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ G|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$
。首先, 很明显这个像电荷不能取在球内, 否则 $\nabla^2 G_1 = 0 (\mathbf{r} \in V)$ 将变成泊松方程(非齐次), 且 $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) (\mathbf{r} \in V)$ 将有两个 δ , 即这样的像电荷的 G_1 不满足定方程。

在将像电荷取在球外以满足了 $\nabla^2 G_1 = 0$ 后, 接下来首先考虑, 位于何处的球外像电荷, 能满足 $G_1|_{\Sigma} = -G_0|_{\Sigma}$: 很明显, 位于 \mathbf{r}_0 的球内点电荷 $-\varepsilon_0$, 在球面上所产生的电势 $G_0|_{\Sigma}$ 是关于 \mathbf{r}_0 成轴对称的, 那么位于球外的像电荷, 在球面上产生的电势 $G_1|_{\Sigma}$, 也必须是以 \mathbf{r}_0 为轴对称的。因而能产生这样的 G_1 的像电荷, 只能也处在 \mathbf{r}_0 所在的轴上。

在搞清了它的位置在空间方向上的限制后, 我们来进一步确定它的位置的远近和带电量大小: 为保证 $G|_{\Sigma} = 0$, 即得有 $G_0|_{\Sigma} + G_1|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|} = 0$, 于是便有 $q = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|}$, 其中 \mathbf{r}_p 为终点在 Σ 上的矢径 \mathbf{r} 。我们便要选择像电荷的合适位置 \mathbf{r}_1 , 使得对于 Σ 上的任何 \mathbf{r}_p , 该比值 $\frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|}$ 恒等于一个常数, 这样的 q 才具有物理意义(与 \mathbf{r}_p 或者说与辐角无关), 并作为像电荷的电量。

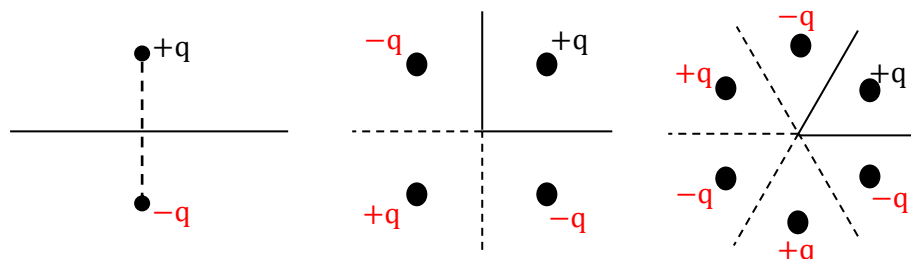
一个可行的方法便是让 $\frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p|} = \frac{|\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}_p|}$, 于是再根据现有的条件, 选用“ $\angle POM_0 = \angle M_1 OP$ 或 $\angle POM_0 = \pi - \angle M_1 OP$ ”中的 $\angle POM_0 = \angle M_1 OP$, 也就是说 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_0 同向而不是反向, 便能以 SAS 创造一对相似三角形(注: $OM_0 = \mathbf{r}_0$, $OP = \mathbf{r}_p$, 夹角为 $\angle POM_0$; $OM_1 = \mathbf{r}_1$, $OP = \mathbf{r}_p$, 的夹角为 $\angle M_1 OP$)。以至于这对等角的俩对边之比 $\frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|} = \text{相似比} = \frac{|\mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_0|}$, 进而得到 $q = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|} = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_0|} = -q_0 \frac{|\mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_0|}$; 并且因 $\frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p|} = \frac{|\mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_0|}$, 而有 $|\mathbf{r}_1| = \frac{|\mathbf{r}_p|^2}{|\mathbf{r}_0|}$ 。

若设导体球半径 $|\mathbf{r}_p| = a$, 则像电荷的电量为 $q = -q_0 \frac{a}{r_0}$, $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$ 。这与母函数处点电荷在球外, 像电荷在球内, 求球外电势 G 的分布, 的所得的 q_1 与 r_1 完全一致。于是

$$G = G_0 + G_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{a}{r_0}}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r_0}\hat{\mathbf{r}}_0|}.$$

(2).下面举例论证电像法的局限性

一般只适用于球面、半球面、平面、呈特定夹角的俩平面(且针对的是第一边值问题): 在多个像电荷的情形, 会有很多组 $\begin{cases} \nabla^2 G_i = 0 \text{ (所求的 } G \text{ 所在的区域)} \\ \sum_i G_i|_{\Sigma} = -G_0|_{\Sigma} \end{cases}$, 我们转而直接关注 $\begin{cases} \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ G|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$, 如何选取各个不在G所在的区域的像电荷(的位置和电量), 使得它们的G帮助 $G|_{\Sigma} = \sum_i G_i|_{\Sigma} = 0$ 。【以下两个导体板(实线)均接地:】



如图所示, 当两平面的夹角分别为 π 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 这些能被 π 整除的角度值时, 便能构造可用电像法求解的题——夹角不能仅仅是能被 2π 整除的角度值, 比如 $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{7}$, 这样它将空间分为 7 个部分, 是奇数。——为什么奇数不行呢, 这是因为 1. 全空间被分为奇数部分, 则上半空间被分为半奇数即非整数部分, 意味着总有一个电荷没有配对, 且处在某个平面的反向延长线上, 它在该平面上创造的电势, 没有反电荷来抵消。2. 奇数个空间对应奇数个电荷本身就很畸形, 没有配对完全, 总有某相邻两个空间的两个电荷是同号的。

原理: 两个半无限大平面, 以任意一个为水平面, 偶数个空间中, 偶数个电荷, 水平面两侧电荷数量为整数且相等。在空间位置上, 两两关于该水平面镜像对称配对, 带电量等大反号。它们两两在这个水平面上各处的电势之和均=0。则该水平面上的半无限大平面的电势, 在多对等量异号镜像对称的像电荷的电势叠加下, 电势之和=0。同理另一半无限大平面。

(3). 我们开始综合来使用 12.1 和 12.2 两节的知识, 求解一些这样的问题

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \in V) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Sigma} &= \varphi(\mathbf{r})|_{\Sigma} \end{aligned}$$

例 1. 在球内求解 laplace 方程的第一边值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$ 。

拉普拉斯方程对应 $f(\mathbf{r})=0$ 。因此积分公式 $u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) dV + \iint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dS$ 中的第一项体积分没了, 只剩下 $u(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} f(\theta, \varphi) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dS$ 。

在 12.2 我们已经通过电像法求出球内区域的 $G = G_0 + G_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r_0} \hat{\mathbf{r}}_0|}$
 $= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{a}{r_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r_0} \hat{\mathbf{r}}_0|} \right]$ (能这么写, 说明极点自然在球心)。我们接下来只需算出 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0}$, 代入积分即可得出 $u(\mathbf{r})$ 。而 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} = \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} + \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) - \right.$

$\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|})$ 。接下来我们先求 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{1}{|r-r_0|})$ 。在这里我们遇上了一个严峻的问题，不知道你发现了没有，题目中的 $f(\theta, \varphi)$ 也太随意了点吧！函数是任意的这没有问题，但是你连坐标系都不给，我怎么知道其中的 θ, φ 是在哪个球坐标系下的参数，这个 $f(\theta, \varphi)$ ，即 u 的角向分布，是在哪个球坐标系下给出的？？。

如果球坐标系的极轴(z 轴)，不选取在 r_0 方向(说实话，如果不用格林函数法解 u ，我们根本不知道这里所言的 r_0 是啥，所以人家的坐标系并不一定依照 r_0 建立，也是有道理的)，那么根据球面三角学的“边的余弦定理”： $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$ ，我们有 $\cos \langle r, r_0 \rangle = \cos \langle r, e_z \rangle \cos \langle r_0, e_z \rangle + \sin \langle r, e_z \rangle \sin \langle r_0, e_z \rangle \cos \langle e_z \times r, e_z \times r_0 \rangle$ ，我们利用所设球坐标系的各坐标量，将其简写为 $\cos \langle r, r_0 \rangle = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ 。若 $\langle r_0, e_z \rangle = 0$ ，即极轴(z 轴)，选取在 r_0 方向，则 $\cos \langle r, r_0 \rangle = \cos \langle r, e_z \rangle = \cos \theta$ 。

1. 为了方便书写，我们假设 $f(\theta, \varphi)$ 是在 z 轴// r_0 方向的球坐标系下描绘的，则 $\langle r, r_0 \rangle = \theta$ 。如果想退化到一般情况，直接将以下过程中的 θ 替换为 $\langle r, r_0 \rangle$ 即可。

2. 一种方法，由于边界是球面，所以 $dS = e_{r_0} dS$ ，因此 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} dS = \nabla G \cdot dS = (\frac{\partial G}{\partial r_0} e_{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial G}{\partial \theta_0} e_{\theta_0} + \frac{1}{r \sin \theta_0} \frac{\partial G}{\partial \varphi_0} e_{\varphi_0}) \cdot e_{r_0} dS = \frac{\partial G}{\partial r_0} dS$ ，可得 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} = \frac{\partial G}{\partial r_0}$ ；当然，根据 Σ 是关于 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 的球面方程，直接用 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} = \frac{\partial G}{\partial r_0}$ 就是了。因此接下来， $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{1}{|r-r_0|})$ 和 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|})$ 中的 $\frac{\partial}{\partial n_0}$ ，我们直接写 $\frac{\partial G}{\partial r_0}$ 。

3. 我们设接下来的 $|r - r_0| = \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2} = d_0$ ， $|r - r_1| = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \theta + r_1^2} = d_1$ 。【 θ 能通用，是因为 r_1 与 r_0 共线， $\langle r, r_1 \rangle = \langle r, r_0 \rangle = \theta$ 】

法一：

①. 首先求 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{1}{|r-r_0|})$ ：先将 $\frac{1}{|r-r_0|}$ 写为母函数的形式： $\frac{1}{|r-r_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2}}$ ，于是

$$\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{1}{|r-r_0|}) = -\frac{1}{2} \frac{2r_0 - 2r \cos \theta}{d_0^3} = \frac{r \cos \theta - r_0}{d_0^3}, \text{ 那么 } \frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{1}{|r-r_0|})|_{r_0=a} = \frac{r \cos \theta - a}{(r^2 - 2ra \cos \theta + a^2)^{3/2}}.$$

②. 再求 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|})$ ：先将 $\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|}$ 写为： $\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|} = \frac{a}{r_0} \frac{1}{|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|} = \frac{a}{r_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{a^2}{r_0} \cos \theta + \frac{a^4}{r_0^2}}} = \frac{a}{r_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ra^2 \cos \theta + a^4}}$ ，于是 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|}) = a \cdot -\frac{1}{2} \frac{2r^2 r_0 - 2ra^2 \cos \theta}{(r^2 r_0^2 - 2ra^2 r_0 \cos \theta + a^4)^{3/2}} = \frac{a}{r_0} \frac{ra^2 \cos \theta - r^2 r_0}{(r^2 r_0^2 - 2ra^2 r_0 \cos \theta + a^4)^{3/2}}$ ，那么 $\frac{\partial}{\partial n_0}(\frac{a}{r_0|r-\frac{a^2}{r_0}\hat{r}_0|})|_{r_0=a} = a \frac{ra^2 \cos \theta - r^2 a}{(r^2 a^2 - 2ra^3 \cos \theta + a^4)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{r \cos \theta - r^2}{(r^2 - 2ra \cos \theta + a^2)^{3/2}}.$

将二者代入 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \Big|_{r_0=a} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) - \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\frac{a^2}{r_0} \mathbf{r}_0|} \right) \right] \Big|_{r_0=a}$, 即有

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \Big|_{r_0=a} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{r \cos \theta - a}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{a} \frac{r \cos \theta - r^2}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}} \right] = -\frac{1}{4\pi} \frac{\frac{r^2}{a} - a}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}}, \text{ 于是}$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \Big|_{r_0=a} = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r^2}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}}, \text{ 代入 } u(\mathbf{r}) = \oint_{\Sigma} f(\theta, \varphi) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dS, \text{ 即有 } u(\mathbf{r}) =$$

$$\oint_{\Sigma} f(\theta, \varphi) \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r^2}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}} dS = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{a^2 - r^2}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}} d\Omega.$$

更一般地, 它应写为 $u(\mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{a^2 - r^2}{(r^2 - 2r \cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \rangle + a^2)^{3/2}} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$.

其中 $\cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \rangle = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

法二:

将 $u(\mathbf{r}_0) = \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS$ 先积分完, 然后对积分完成后的结果再进行 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 的对换: 那么我们要的不是 $\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right)$ 和 $\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right)$, 而是 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right)$ 和 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right)$.

类似 $\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \frac{r \cos \theta - r_0}{d_0^3}$ 地, 有 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \frac{r_0 \cos \theta - r}{d_0^3}$. 利用 $r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = d_0^2$, 有 $2r^2 - 2rr_0 \cos \theta = d_0^2 + r^2 - r_0^2$, 即有 $r - r_0 \cos \theta = \frac{d_0^2 + r^2 - r_0^2}{2r}$, 于是 $r_0 \cos \theta - r = \frac{r_0^2 - d_0^2 - r^2}{2r}$, 代入 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \frac{r - r_0 \cos \theta}{d_0^3} = \frac{r_0^2 - d_0^2 - r^2}{2rd_0^3}$, 那么 $\frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) \Big|_{r=a} = \frac{r_0^2 - d_0^2 - a^2}{2ad_0^3}$.

同理, 类似 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \frac{r_0 \cos \theta - r}{d_0^3}$ 地, 有 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) = \frac{a}{r_0} \frac{r_1 \cos \theta - r}{d_1^3}$. 同样利用 $r^2 - 2rr_1 \cos \theta + r_1^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 = d_1^2$, 有 $r_1 \cos \theta - r = \frac{r_1^2 - d_1^2 - r^2}{2r}$, 代入 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) = \frac{a}{r_0} \frac{r - r_1 \cos \theta}{d_1^3} = \frac{a}{r_0} \frac{r_1^2 - d_1^2 - r^2}{2rd_1^3}$, 于是 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) \Big|_{r=a} = \frac{a}{r_0} \frac{r_1^2 - d_1^2 - a^2}{2ad_1^3} \Big|_{r=a} = \frac{r_1^2 - d_1^2 - a^2}{2r_0 d_1^3} \Big|_{r=a}$. 根据我们之前的认识, $\frac{d_1}{d_0} \Big|_{r=a} = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \Big|_{r=a} = \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|} = \frac{|\mathbf{r}_p|}{|\mathbf{r}_0|} = \frac{a}{r_0}$, 将 $d_1 \Big|_{r=a} = \frac{a}{r_0} d_0$, 以及 $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$ 代入, 则进一步有 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) \Big|_{r=a} = \frac{\left(\frac{a^2}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{a}{r_0} d_0\right)^2 - a^2}{2r_0 \left(\frac{a}{r_0} d_0\right)^3} = \frac{a^2 - d_0^2 - r_0^2}{2ad_0^3}$. 【其实以上有 d_0 存在的地方, 也应加上 $|_{r=a}$ 】

将二者代入 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{a}{r_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) \right] \Big|_{r=a}$, 即有

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{r_0^2 - d_0^2 - a^2}{2ad_0^3} - \frac{a^2 - d_0^2 - r_0^2}{2ad_0^3} \right] = -\frac{1}{4\pi} \frac{2r_0^2 - 2a^2}{2ad_0^3} = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{d_0^3}, \text{ 于是}$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \Big|_{r=a} = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{(r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2)^{3/2}} \Big|_{r=a} = \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{(a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2)^{3/2}}. \text{ 代入 } u(\mathbf{r}_0), \text{ 有:}$$

$$u(\mathbf{r}_0) = \oint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS = \oint_{\Sigma} f(\theta, \varphi) \frac{1}{4\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{(a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2)^{3/2}} dS =$$

$$\frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{a^2 - r_0^2}{(a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2)^{3/2}} d\Omega, \text{ 然后再进行 } \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \text{ 的对换: 同样得到}$$

$$u(\mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{a^2 - r^2}{(r^2 - 2r \cos \theta + a^2)^{3/2}} d\Omega.$$

注意: $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n}$ 与 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0}$ 都指的是所要求的 u 所在的空间边界面的外法向, 它是针对所研究的区域而言的(只不过针对的自变量不同). 比如, 对于 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 (r < a) \\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$ 这个

问题而言, 外法向是指 $\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_{r_0})$ 方向, 因而 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} = \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r_0}$; 若对于 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 (z > 0) \\ u|_{z=0} = f(x, y) \end{cases}$ 这个问题而言, 外法向是指 $-\mathbf{e}_z(-\mathbf{e}_{z_0})$ 方向, 因而 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} = \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial -z_0}$ 。

并且我们还没算过它的 G , 还得先求它。它仍然可用基本解 G_0 +电像法求 G_1 , 再合成得到 G ; 求出 $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial -z_0}$, 并带入积分即可。

例 2.在圆内求解 laplace 方程的第一边值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 (\rho < a) \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$ 。

二维圆形域等价于高 $h=1$ 的三维柱形域。且二维点电荷和像电荷, 均是 \perp x-o-y 面的三维线电荷在 x-o-y 面的投影。积分公式 $u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)dV + \iint_{\Sigma} \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dS$ 被简化为 $u(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma_{\text{底}}} \int_0^1 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)d\Sigma_{\text{底}} dh + \iint_{\Sigma_{\text{侧}}} \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} d\Sigma_{\text{侧}}$
 $= \iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)dxdy + \int_l \int_0^1 \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dLdh = \iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)dxdy + \int_l \varphi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} dL$ 。于是 $u(\rho) = \iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\rho, \rho_0)f(\rho_0)dxdy + \int_l \varphi(\rho_0) \frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n_0} dL$ 。

当泛定方程的求解区域 $\Sigma_{\text{底}}$ 为圆形域, 即 l 为某一圆形域的边界线时, 像电荷的位置 \mathbf{r}_1 , 电量 q 的求法: 正如之前 “ $q = \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|}$, 选择合适的 \mathbf{r}_1 , 使得比值 $\frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|}$ 恒等于一个常数” 这个问题还可以采用特解法一样: 取 \mathbf{r}_p 分别= $a\hat{\mathbf{r}}_0$ 和 $-a\hat{\mathbf{r}}_0$, 则至少应有(必要条件): $\frac{|a\hat{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{r}_1|}{|a\hat{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{r}_0|} = \frac{|-a\hat{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{r}_1|}{|-a\hat{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{r}_0|}$, 若设 \mathbf{r}_1 同向于 \mathbf{r}_0 , 即有 $\frac{r_1 - a}{a - r_0} = \frac{a + r_1}{a + r_0}$, 于是 $a\mathbf{r}_1 - a\mathbf{r}_0 - a^2 + r_0r_1 = a\mathbf{r}_1 - a\mathbf{r}_0 + a^2 - r_0r_1$, 得到 $a^2 = r_0r_1$, 代入 $\frac{a + r_1}{a + r_0} = \frac{a_0 + r_1r_0}{a_0 + r_0^2} = \frac{a_0 + a^2}{a_0 + r_0^2} = \frac{a}{r_0}$, 得 $q = \varepsilon_0 \frac{a}{r_0} = -q_0 \frac{a}{r_0}$ 。

(一).在这里我们也采取特解法: 我们已解出基本解 $G_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\rho - \rho_0|}$, 对于球面, 仍只需设 G_1 为单个像电荷产生的电势, 设其电量 q 与 $q_0 = -\varepsilon_0$ 的比为 c , 则 $G_0|_{\Sigma} + G_1|_{\Sigma} = -\frac{1}{2\pi} (\ln \frac{1}{|\rho_p - \rho_0|} + c \cdot \ln \frac{1}{|\rho_p - \rho_1|}) = -\frac{1}{2\pi} (\ln \frac{1}{|\rho_p - \rho_0|} + c \cdot \ln \frac{1}{|\rho_p - \rho_1|}) = \frac{1}{2\pi} (\ln |\rho_p - \rho_0| + c \cdot \ln |\rho_p - \rho_1|) = 0 = \text{const.}$ 。那么取 ρ_p 分别= $a\hat{\rho}_0$ 和 $-a\hat{\rho}_0$, 即有 $\ln |a\hat{\rho}_0 - \rho_0| + c \cdot \ln |a\hat{\rho}_0 - \rho_1| = \ln |-a\hat{\rho}_0 - \rho_0| + c \cdot \ln |-a\hat{\rho}_0 - \rho_1|$ 。

即有 $\ln \frac{|a\hat{\rho}_0 - \rho_0|}{|-a\hat{\rho}_0 - \rho_0|} = \ln \left(\frac{|-a\hat{\rho}_0 - \rho_1|}{|a\hat{\rho}_0 - \rho_1|} \right)^c$, \ln 是单值函数, 于是 $\frac{|a\hat{\rho}_0 - \rho_0|}{|-a\hat{\rho}_0 - \rho_0|} = \left(\frac{|-a\hat{\rho}_0 - \rho_1|}{|a\hat{\rho}_0 - \rho_1|} \right)^c$ 。若设 ρ_1 同向于 ρ_0 , 则 $\frac{a - \rho_0}{a + \rho_0} = \left(\frac{a + \rho_1}{\rho_1 - a} \right)^c$, 能够这样单电像的必要条件之一为 c 和 ρ_1 至少满足此关系, 那么现选取合适的 c 和 ρ_1 , 使得该等式成立。对于某个 c 或 ρ_1 , 总可解出对应的 ρ_1 或 c 。现取 $c = -1$, 则 $\frac{\rho_1 - a}{a + \rho_1} = \frac{a - \rho_0}{a + \rho_0}$, 即 $\frac{\rho_1 - a}{a - \rho_0} = \frac{a + \rho_1}{a + \rho_0}$, 对比 $\frac{r_1 - a}{a - r_0} = \frac{a + r_1}{a + r_0}$ 的结果 $a^2 = r_0r_1$, 可得 $a^2 = \rho_0\rho_1$ 。

当然, 根据 $\frac{1}{2\pi} (\ln |\rho_p - \rho_0| + c \cdot \ln |\rho_p - \rho_1|) = 0$, 有 $|\rho_p - \rho_0| |\rho_p - \rho_1|^c = 1$, 取 ρ_p 分别= $a\hat{\rho}_0$ 和 $-a\hat{\rho}_0$, 即有 $|a\hat{\rho}_0 - \rho_0| |a\hat{\rho}_0 - \rho_1|^c = 1$, $|-a\hat{\rho}_0 - \rho_0| |-a\hat{\rho}_0 - \rho_1|^c = 1$, 设 ρ_1 同向于 ρ_0 , $(a - \rho_0)(\rho_1 - a)^c = 1$, $(a + \rho_0)(a + \rho_1)^c = 1$ 。这样两个方程确定两个常数,

若可解则定解。解出来，结果便是 $c=-1$ 以及 $a^2=\rho_0\rho_1$ ，你可代入其中一个验证另一个：但经验证你发现 $(a-\rho_0)(\frac{a^2}{\rho_0}-a)^{-1}=\frac{\rho_0}{a}$ ， $(a+\rho_0)(a+\frac{a^2}{\rho_0})^{-1}=\frac{\rho_0}{a}$ ，它们并不=1，咋回事？

其实，若你设 $G_0=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\rho_0|}$ ，以及 $G_1=-\frac{c}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\rho_0|}$ ，根本不可能有解满足 $G_0|_{\Sigma}+G_1|_{\Sigma}=0$ 。最多只能使得 $G_0|_{\Sigma}+G_1|_{\Sigma}=\frac{1}{2\pi}(\ln|\rho_p-\rho_0|+c\cdot\ln|\rho_p-\rho_1|)=\text{const.}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{a}$ ，因此为了将就(着使用)这个结果，以及使得 G_0, G_1 满足 $G_0|_{\Sigma}+G_1|_{\Sigma}=0$ ，那么 $G_0=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\rho_0|}+C_0$ ，以及 $G_1=-\frac{-1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\frac{a^2}{\rho_0}\rho_0|}+C_1$ 。其中 $C_0+C_1=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{a}$ 。也就是说，得 reset G_0, G_1 的电势零点，以满足 $G|_{\Sigma}=0$ 。【若要使得 G_0, G_1 的电势零点位于同一位置 $\rho=\rho_2$ 处，则可通过 $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho_2-\rho_0|}+C_0=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho_2-\frac{a^2}{\rho_0}\rho_0|}+C_1$ ，以及 $C_0+C_1=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{a}$ 定解出 C_0, C_1 。】

综上，仍有 $\rho_1=\frac{a^2}{\rho_0}$ ，但电量 $q=-q_0$ 。由于仍有 $\rho_1=\frac{a^2}{\rho_0}$ ，那么也将因(平面上的)三角形相似而有 $d_1|_{\rho=a}=\frac{a}{\rho_0}d_0|_{\rho=a}$ 。【你可以通过 $d_1|_{\rho=a}=\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\varphi+\rho_1^2}|_{\rho=a}=\sqrt{a^2-2a\frac{a^2}{\rho_0}\cos\varphi+\frac{a^4}{\rho_0^2}}=\frac{a}{\rho_0}\sqrt{\rho_0^2-2a\rho_0\cos\varphi+a^2}=\frac{a}{\rho_0}\sqrt{a^2-2a\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}=\frac{a}{\rho_0}\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}|_{\rho=a}=\frac{a}{\rho_0}d_0|_{\rho=a}$ 来验证之】

(二).但在做题时，我们仍认为 $G_0=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\rho_0|}$ ， $G_1=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\rho-\frac{a^2}{\rho_0}\rho_0|}$ ，即不管其常数 C_0, C_1 部分——因为之后会求 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0}$ 并代入求 $u(r)$ ，常数部分求导求没了。但如果所求方程不是齐次的 laplace 方程，即 $f(r_0)\neq 0$ ，那么因 $\iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\rho, \rho_0)f(\rho_0)dxdy$ 这部分的 remain， G_0, G_1 的常数部分是不能省略的——如果要求的仍是第一边值问题的话， $G_0|_{\Sigma}+G_1|_{\Sigma}=0$ 仍要求 C_0, C_1 的存在。

由于 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n}$ 相对于 $\frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0}$ 的便利，我们采取前者。公式从 $u(\rho)=\iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\rho, \rho_0)f(\rho_0)dxdy + \int_l \varphi(\rho_0)\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n_0}dL$ 变回为 $u(\rho_0)=\iint_{\Sigma_{\text{底}}} G(\rho, \rho_0)f(\rho)dxdy + \int_l \varphi(\rho)\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n}dL$ 。并因 $f(\rho)=0$ 而没有了前半面积分部分，只剩 $u(\rho_0)=\int_l \varphi(\rho)\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n}dL=\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n}ad\varphi$ 。于是 $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \rho}(\ln\frac{1}{|\rho-\rho_0|}-\ln\frac{1}{|\rho-\rho_1|})=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \rho}(\ln|\rho-\rho_0|-\ln|\rho-\rho_1|)$ 。仍设 $|\rho-\rho_0|=d_0$ ， $|\rho-\rho_1|=d_1$ 。

其中 $\frac{\partial}{\partial \rho}\ln|\rho-\rho_0|=\frac{1}{d_0}\frac{\partial}{\partial \rho}\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}=\frac{1}{d_0}\frac{\rho-\rho_0\cos\varphi}{d_0}=\frac{\rho-\rho_0\cos\varphi}{d_0^2}$ 。同理， $\frac{\partial}{\partial \rho}\ln|\rho-\rho_1|=\frac{\rho-\rho_1\cos\varphi}{d_1^2}$ 。【注： $\langle \rho, \rho_0 \rangle$ 与 $\langle \rho, \rho_1 \rangle$ 的夹角都是 φ 】于是 $\frac{\partial}{\partial \rho}\ln|\rho-\rho_0||_{\rho=a}=\frac{\rho-\rho_0\cos\varphi}{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}|_{\rho=a}=\frac{a-\rho_0\cos\varphi}{a^2-2a\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}$ 。以及 $\frac{\partial}{\partial \rho}\ln|\rho-\rho_1||_{\rho=a}=\frac{a-\rho_1\cos\varphi}{d_1^2}|_{\rho=a}$ 。后者代入 $d_1|_{\rho=a}=\frac{a}{\rho_0}d_0$ 以及 $\rho_1=\frac{a^2}{\rho_0}$ ，得到 $\frac{a-\frac{a^2}{\rho_0}\cos\varphi}{(\frac{a}{\rho_0}d_0)^2}|_{\rho=a}=\frac{\frac{\rho_0}{a}-\cos\varphi}{a^2-2a\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}$ 。

于是, $\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\ln|\rho - \rho_0| - \ln|\rho - \rho_1|) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho - \rho_0 \cos \varphi}{d_0^2} - \frac{\rho - \rho_1 \cos \varphi}{d_1^2} \right)$, 而

$\frac{\partial G(\rho, \rho_0)}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a - \rho_0 \cos \varphi}{a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} - \frac{\frac{\rho_0^2}{a} - \rho_0 \cos \varphi}{a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} \right) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} \right)$ 。代入得, $u(\rho_0)$

$= \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} \right) a d\varphi = \frac{a^2 - \rho_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{1}{a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2} d\varphi$ 。但仍由于题目中的 $u|_{r=a} = f(\varphi)$ 没有指定是以哪个极坐标系为标准, 其 x 轴不一定指向 ρ_0 。若我们设 ρ_0 在该极坐标系下的方向为 φ_0 。则应修正为 $\langle \rho, \rho_0 \rangle = \langle \rho, i \rangle - \langle \rho_0, i \rangle = \varphi - \varphi_0$ 。

于是 $u(\rho_0) = \frac{a^2 - \rho_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{1}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} d\varphi$ 。然后再进行 ρ, ρ_0 调换, 得到

$u(\rho) = \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0) \frac{1}{a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho^2} d\varphi_0$ 。