

Salute to 柳艳

物理学有 8 个二级学科，其中一个凝聚态物理，磁学便在它旗下。

目录

第一章 磁性基础.....	7
1.1 基本磁学量.....	7
一.磁矩.....	7
二.磁化强度.....	8
三.磁场强度.....	8
四.磁感应强度.....	8
五.磁化率、磁导率.....	9
1.2 物质磁性的分类.....	9
一.抗磁性.....	9
二.顺磁性.....	10
三.铁磁性.....	10
四.反铁磁性.....	11
五.亚铁磁性.....	11
第二章 磁性起源.....	12
2.1 原子磁矩.....	12
一.一个电子的磁矩(单电子原子的磁矩).....	12

二.原子磁矩(多电子).....	13
三.Fe 磁矩计算.....	13
2.2 过渡族元素的原子磁矩.....	14
一.3d~6d.....	14
二.轨道角动量冻结.....	14
2.3 稀土金属的原子磁矩.....	15
2.4 铁磁性合金的原子磁矩.....	15
一.铁磁性合金.....	15
二.斯莱特-泡利曲线.....	16
2.5 非晶态合金的磁矩.....	17
第三章 自发磁化理论.....	18
3.1 抗磁性——可解释 1.2 中的一.....	18
一.抗磁性的磁化率.....	18
3.2 顺磁性理论——解释 1.2 二.....	19
一.朗之万(langevin)顺磁性理论.....	19
3.3 铁磁性理论——解释 1.2 三.....	24
一.铁磁性物质的基本特征.....	24
二.铁磁性分子场理论.....	24
三. $T > T_C$ ：居里-外斯定律的推导.....	27
3.4 反铁磁性理论——解释 1.2 四.....	28

一.反铁磁性物质的主要特征	28
二.次晶格与定域分子场	28
3.5 亚铁磁理论——解释 1.2 五.	31
一.亚铁磁性物质的特性	31
3.6 直接交换作用——完善 3.3(、3.4).....	36
一.交换作用模型.....	36
3.7 超交换作用——完善 3.4、3.5.....	40
3.8 RKKY 交换作用——完善 2.3.....	42
第四章 铁磁体中的能量	42
4.1 交换能	43
4.2.0 各向异性性能引入	45
4.2 磁晶各向异性性能	46
一.推导磁晶各向异性性能的数学表达式的两个思想基础：	46
二.立方晶体和六角晶体的磁晶各向异性性能：	47
三.2 个 points：	53
四.磁晶各向异性等效场	54
4.3 退磁能(静磁能).....	55
一.特殊形状样品的退磁因子	56
二.几种常见的磁畴分布下的退磁能.....	57
三.总结.....	58

4.4 外场能	58
4.5 DM 相互作用能	59
4.6 磁致伸缩	59
一.分类	59
二.影响因素	59
三.磁致伸缩的计算	60
四.磁弹性能(磁致伸缩能)	61
4.7 应力能	62
第五章 磁畴结构理论	64
5.1 磁畴的成因	64
一.引入	64
二.计算	65
5.2 畴壁的结构	66
一.畴壁的类型	66
二.畴壁厚度和畴壁能	67
5.3 均匀铁磁体中的磁畴结构	71
一.开放型片状磁畴	71
二.闭流型磁畴结构(存在表面磁畴)	71
三.表面磁畴	71
5.4 薄膜的磁畴结构	72

5.5 单畴结构	72
----------------	----

第六章 技术磁化理论 72

6.1 磁化曲线	73
----------------	----

一.磁化曲线	73
--------------	----

二.磁化过程的物理机制	73
-------------------	----

三.起始磁化率	74
---------------	----

6.2 不可逆磁化过程	76
-------------------	----

一.不可逆畴壁移动【可能 link to 三.1.】	76
----------------------------------	----

二.不可逆磁畴转动	77
-----------------	----

6.3 磁滞回线	77
----------------	----

一.几个参数	77
--------------	----

二.硬磁和软磁	78
---------------	----

三.如何提高 H_c	78
--------------------	----

四.影响剩磁 M_r 的因素	78
------------------------	----

五.常见材料的属性	78
-----------------	----

Something scattered about magnetism:

- 1.地球是个大磁体；南极是磁北极；地磁场能使大量高能粒子偏转。
- 2.正负两极相伴出现，磁矩箭头头部为正。
- 3.非磁性物质感受不到磁场。

4.载流螺线管，内部近似均匀磁场——这仍然是一种产生均匀磁场的较好方法，合肥的中科院强磁场中心也采用了这样的设计，最高可创造 90T 的匀强磁场。限制因素主要在于电流的热效应；载流直导线——环形磁场。

5.闪电可令指南针偏转。

6.磁性材料的进步，推动了计算机体积的减小、速度的提高、容量的加大。

7.①.软磁材料：不加磁场时没有磁性。矫顽力小，即磁性(自身产生的磁场)受外磁场影响明显。

②.硬(永)磁材料：不加磁场时，自己也产生磁场。矫顽力大，在相对大范围的外磁场下，自身磁场(自发磁化强度)也不消失。

8.①.内存：多是用半导体制作的，电脑关机后，数据清空，重启 reboot 时，信息导入内存，重新配置一遍；若用磁性材料制作：优点便是，开机时不用配置内存，开机后直接回到 what it used to be 了。

②.硬盘：需要用磁头读取或写入数据——写入：磁头在指定位置施加指定磁场，使得该处最小单元的磁矩反向或保持不变；读取：利用巨磁电阻效应(一种量子力学效应)，当磁头的 NS 与储存单元的 NS 反平行时，巨磁效应显著的电阻 R 值大，否则(顺向时)为低电阻。【对于其中一个磁矩而言，得将另一个磁矩看成外磁场】

9.自旋阀可以用于做磁头，也可以做开关、逻辑器、内存。它由上下两个铁磁层和夹在中间的非铁磁层构成，或者说由四层铁-非铁磁层交替构成，也用到了巨磁电阻效应：当两铁磁层的磁矩为反平行时，材料的电阻最大；平行时，材料电阻最小。

10.似乎 2010 年以后磁记录的最小单元达到 10 多纳米后没法再减小了，信息储存密度没法再提升，已达到极限。达到 T 级别后，似乎增大硬盘容量的唯一办法，就是增大体积了。

因此，现在主要是提出最优化利用空间的模型、改变储存方式，而不是将最小单元做得更小；当然，这也有极限，因此，核心还是在于将储存单元做小，提高记录密度，即使得单位体积能记录的信息更多。

11.FeO 磁记录声音等。

12.电饭锅：利用磁性材料的居里温度：达到居里温度后磁性消失，开关断开。

13.永磁材料离不开稀土(镧系元素和钪、钇共十七种金属元素的总称)，现在已经发展到第三代了， $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ ，钕铁硼本身磁能积最高，较贵。它是烧出来的，可烧制成各种各样的形状；手机的振动功能依赖于它，浑南有个厂子做它：现在已经产业化了；现在围绕着改善第三代的烧制材料配比，以期获得较高性价比或者性能，而不是第四代材料。

14.磁冰箱：Gd 钆，巨磁热效应，加磁后吸热，退磁后放热。好处：不污染空气。

15.科技馆的磁性液体：主要用于密封，如极端环境下的宇航员头盔。这时候就不能用塑料了。

16.飞机舰船的隐身材料是磁性材料的一个分支。

17.磁学方面我们学校大约有 3 人主要从事相关工作，杜安教授、柳艳女士、胡勇先生。主要做计算、动力学理论。

第一章 磁性基础

1.1 基本磁学量

一.磁矩

产生方式不同，则定义不同。有以下几种表达方式：

1.条形磁铁的 NS 两极，可分别看做载荷量为 $+m$ 、 $-m$ 的正、负磁荷。它们形成一对磁偶极子(对于远区而言)，产生磁偶极矩 $\mathbf{j}_m = m \cdot \mathbf{l}$ ，方向为 $-m \rightarrow +m$ ，单位为 $\text{wb} \cdot \text{m}$ ，即 T(特斯拉)。

2. 电子的绕核轨道运动的磁矩 $\mu_m = i \cdot A$ ，方向为 A 、 p_ϕ 的反向（ $\because i = -\frac{e}{T}$ 为负值），单位为 $A \cdot m^2$ 。【在原子物理里常用 μ_l 表示】1. \longleftrightarrow 2. 二者的转换关系为 $j_m = \mu_0 \mu_m$ ，并且 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ 是 $A \cdot m^2$ 过渡到 T 的转换系数。

3. 电子的固有磁矩：自旋磁矩 μ_s 。

常用后两者所组合成的原子磁矩 μ_j 。

二.磁化强度

单位体积的磁矩大小。也有两种表示方法：

1. $J = \frac{\sum j_m}{V}$ ，单位为 $\frac{wb \cdot m}{m^3} = wb/m^2$ 。

2. $M = \frac{\sum \mu_m}{V}$ ，单位为 $\frac{A \cdot m^2}{m^3} = A/m$ ，读作安(每)米，是常用单位，也是国际单位。

由于 $j_m = \mu_0 \mu_m$ ，因此 $J = \mu_0 M$ 。【从单位上看， J 的单位即 $B = \mu_0(H + M)$ 中的 B ， M 的单位即 H 的单位】

三.磁场强度

$H = \frac{F}{m}$ ，即单位磁荷在磁场中的受力大小。【这可不是牛二： m 是磁荷大小】

1. 无限长载流直导线： $H = \frac{I}{2\pi r} e_\phi$ 。

2. 无限长载流螺线管： $H = n \cdot I \cdot e_z$ 。单位为 $\frac{1}{m} \cdot A = A/m$ ，与 M 同单位。

3. 载流环形线圈对圆心： $H = \frac{I}{2r} e_z$ 。

四.磁感应强度

$B = \mu_0(H + M)$ ，单位为 T，也是国际单位。 B 与材料有关： H 变则 M 随之改变，二者影响 B 变。——饱和磁感应强度：(当所考虑的体积)内部所有磁矩都朝同一方向时， M 达到最大，记为 M_s (S: Saturated)。

(国际单位) $1\text{T}=10^4\text{Gs}$ 、 $1\text{Gs}=10\text{Oe}$ 、 $1\text{Oe}=79.6\text{A/m}$ (国际单位)。为什么要引进 Gs(高斯)和 Oe(奥斯特)这个单位呢？——因为头尾两个国际单位都要么过大，要么过小。所以开发了一个中间点的。【有点问题，我觉得 $1\text{T}=10^4\times 79.6\text{A/m}$ 只是数值上的，因为 $\text{T}=\text{wb}/\text{m}^2$ 与不能直接与 A/m 数值上地替换，它们差一个 μ_0 ，或许的 μ_0 数值已经被包含入 79.6×10^4 】

五.磁化率、磁导率

磁化率 $\chi = \frac{M}{H}$ (磁体的磁场随外磁场变化的难易程度)；(绝对)磁导率 $\mu = \frac{B}{H}$ ，相对磁导率 $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$ 。(另一种等效说法；可从下一段中它俩的关系式看出)【在电动力学中，介质的磁化率用 χ_m 表示，以区别于 χ_e ，加粗意味着它是个张量。但这里我们只关心磁，不关心电，而且不考虑那么复杂，因此直接用 χ 表示了】

根据 $B = \mu_0(H + M)$ ，则二者之间的关系为 $\mu_r = 1 + \frac{M}{H} = 1 + \chi$ 。

1.初始磁导率： $\mu_s = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H}$ 。【用 $H \rightarrow 0$ 而非 $M \rightarrow 0$ ，是因为一般而言 H 是因， M 是果， M 受 H 影响： $M = M(H)$ ；而且当 $H \rightarrow 0$ 时， M 并非一定 $\rightarrow 0$ ；另外，下角标 s 应该意味着 start.而非 small.】

2.最大(相对)磁导率： $\mu_{\max} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B}{H} \right)_{\max}$ 。

1.2 物质磁性的分类

一.抗磁性

$\chi < 0$ ； $|\chi| \sim 10^{-6} \sim 10^{-2}$ ； $\chi(T) = \text{const.}$ ； $\chi(H) = \text{const.}$ 。——即磁化率为负、值小、与温度、外磁场无关。

代表物质：惰性气体(He、Ne、Ar 等，完全显示抗磁性)、非金属(如 Si、P、S 等 C 族晶体)、一些金属(Cu、Ge、Ag、Au、Bi 等，抗磁性较弱)、有机物、 H_2 、 H_2O 、NaCl。

抗磁性是**所有物质的基本特征**，即所有元素都有抗磁性的一面。只不过如 Fe 的抗磁性非常小，被其铁磁性超过了。

二.顺磁性

$\chi > 0$; $|\chi| \sim 10^{-6} \sim 10^{-2}$; $\chi(T) = \frac{C}{T}$ 或 $\frac{1}{\chi} = kT$ 是多数, $\chi(T) = \frac{C}{T-T_P}$ 或 $\frac{1}{\chi} = k(T-T_P)$ 更普遍;
 $\chi(H) = \text{const.}$ 。——即磁化率为正、值小、大多与温度呈反比、与外磁场无关。

顺磁性分为两类: (O_2 、 N_2 、 NO)、(Pd 、 Pt)、(Li 、 Na 、 K 、 Rb 、 Ss)、铁族/稀土元素的盐类($FeCl_2$ 、 $GdSO_4$)、他们**永远显示出顺磁性** $\chi = \frac{C}{T}$; 铁磁性物质的温度**超过居里温度时**, 也会显示出顺磁性, 并因此在此之后服从 $\chi = \frac{C}{T-T_P}$ 。

成因: 相邻原子的磁矩之间的相互作用较弱, 温度 T 对应能量 kT , 其所带来的热扰动作用, 比相邻磁矩间的相互作用强, 使得物质内部磁矩方向杂乱无章, 整体显示不出磁场。

kT 的作用(**热扰动**)甚至比磁场对原子磁矩的影响还要大: 在磁场的作用下, 原子磁矩只能部分地转向磁场方向(**其他的因热扰动仍较杂乱无章, 或偏转不完全**), 感生出的 M 虽方向与 H 相同($\because \chi > 0$), 但值相对来说很小($\because \chi = \frac{M}{H}$ 很小)。【**由于, 抗磁性的** $\chi(T) = \text{const.}$, 我们就没法沿用这里的热扰动来解释那里的 $|\chi|$ 很小。】

三.铁磁性

$\chi > 0$; $|\chi| \sim 10^2 \sim 10^5$; 存在转变温度-居里温度 T_C (T_C 与顺磁性居里温度 T_P 有所区别: T_P 是纯粹的 $\frac{1}{\chi} = k(T-T_P)$ 与 x 轴的交点, 而 T_C 是铁磁性物质的 $\frac{1}{\chi}$ 开始向顺磁性转变的起始温度, 而 T_P 是关系转变完成成为反比关系的终了温度, $T_P > T_C$ 。二者一个用于揭示转变点, 另一个用于控制直线截距, 二者互不相关), 在 T_C 之前 $T \nearrow \chi \searrow$, 之后 $\chi(T) = \frac{C}{T-T_P}$; $\chi(H)$ = 非线性 function。——即磁化率为正、值大、在 $T < T_C$ 时 $T \nearrow \chi \searrow$, $T > T_C$ (T_P) 时服从顺磁性的 $\chi(T)$ 、与外磁场相关且关系复杂。【 χ - T 图是个减函数, $\frac{1}{\chi}$ - T 图横增; 且由于 $T_P > 0K$, $\frac{1}{\chi}$ - T 图中 $T > T_P$ 部分的反向延长线交于 x 轴正半轴、 y 轴负半轴】

9 种具有铁磁性的纯元素晶体：3d 族的过渡族元素(Fe、Co、Ni)【三者的 T_C 依次为 1043、1396、631K】，4f 壳层未满的稀土族元素(Gd、Tb、Dy、Ho、Er、Tm)【它们的 T_C 依次为 293、219、89、20、20、32K，Gd 在室温下刚刚转变为顺磁性，它后面的元素在室温下早就顺磁性了，所以有时候也归类到上面一类去】。

成因：当 $T < T_C$ 时，相邻原子的磁矩的相互作用强，排列较为一致(区域性同向)，热扰动无法打乱该作用，在磁场的作用下，原子磁矩较多地转向磁场方向(有一个转动就有一堆跟着它转)，感生出的 \mathbf{M} 方向与 \mathbf{H} 相同($\because \chi > 0$)，且值相对来说很大($\because \chi = \frac{M}{H}$ 很大)，很小的磁场作用，就能使得其饱和； $T > T_C$ 时，热扰动影响力重新占主导。

四.反铁磁性

$|\chi| \sim 10^{-4} \sim 10^{-1}$ ；存在转变温度-奈尔温度 T_N (T_N 与 T_C 相似)，在 T_N 之前 $T \nearrow \chi \nearrow$ ，之后 $\chi(T) = \frac{C}{T + T'_p}$ (T'_p 与 T_p 相似，也与 T_N 不同，比它大，意味着 $\frac{1}{\chi}-T$ 中射线与 x 轴交点 $|-T'_p| > \text{转变温度 } T_N \text{ 到原点的距离}$)。——即磁化率值小、在 $T < T_N$ 时与 $T \nearrow \chi \nearrow$ ， $T > T_N$ 时服从顺磁性的 $\chi(T)$ ，并且其中的 $T'_p > 0K$ (意味着 $\frac{1}{\chi}-T$ 图中 $T > T_N$ 部分的反向延长线交于 x 轴负半轴、 y 轴正半轴)。【 $\chi-T$ 图是个先增后减， $\frac{1}{\chi}-T$ 图先减后增； χ 在 T_N 处存在极大值，且 $\chi-T$ 图中 T_N 左部分 T 越小 χ 越趋向一个定值，即这一段是个凹函数。】

说实在的， T_p 和还有那么点像 T_C ，但 $T'_p(-T'_p)$ 和 T_N 就完全是两码事了。

代表：过渡族元素的盐类及化合物，如 MnO 、 CrO 、 CoO 。

成因：当 $T < T_N$ 时，相邻两个次晶格的自旋反平行排列，每一个次晶格的磁矩，大小相等，方向相反，一共有两套，因此宏观磁性=0，强外磁场 \mathbf{H} 下才能显示出微弱的磁性。

五.亚铁磁性

$|\chi| \sim 10^2 \sim 10^3$ ； $\chi(T) \neq \text{const.}$ ，与 T 有关。——磁化率介于铁磁性物质与反铁磁性物质之间。

代表：铁氧体、重稀土-3d 过渡金属化合物。

成因：两套次晶格的磁矩，大小不等，方向相反。

第二章 磁性起源

物质的磁矩起源于原子具有磁矩。即物质有磁矩→构成它的原子有磁矩；但后者无法推出前者，因为还涉及到物质内部的原子磁矩排列状况。而原子的磁矩又主要来源于电子的轨道磁矩和自旋磁矩(原子核质量太大，忽略其自旋磁矩)，∴研究电子运动产生的磁矩。

2.1 原子磁矩

一. 一个电子的磁矩(单电子原子的磁矩)

电子轨道运动的磁矩：根据 $\mu_l = -\frac{e}{2m} \cdot L$ 、 $\mu_{l_z} = -\frac{e}{2m} \cdot L_z$ ，或者 $\mu_l = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot L$ 、 $\mu_{l_z} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot L_z$ ，代入 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 、 $L_z = m_l \hbar$ ，得到 $\mu_l = \sqrt{l(l+1)} \cdot \mu_B$ 、 $\mu_{l_z} = m_l \cdot \mu_B$ (若以 \hat{L}_z 为单位矢量，则有负号；否则若以 $\hat{\mu}_{l_z}$ 为基矢，读数就是 $m_l \cdot \mu_B$)。

电子的自旋磁矩：根据 $\mu_s = -\frac{e}{m} \cdot p_s$ 、 $\mu_{s_z} = -\frac{e}{m} \cdot p_{s_z}$ ，或者 $\mu_s = -2\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot p_s$ 、 $\mu_{s_z} = -2\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot p_{s_z}$ ，代入 $p_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ 、 $p_{s_z} = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2}\hbar$ ，得到 $\mu_s = 2\sqrt{s(s+1)} \cdot \mu_B = \sqrt{3}\mu_B$ 、 $\mu_{s_z} = 2m_s \cdot \mu_B = \pm \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_{s_z}$ 为基矢的读数)。【 μ_B 就像 \hbar 一样，一个是角动量的量子，一个是磁矩的量子】

电子的总磁矩： (μ_j) 只是 $\mu = \mu_l + \mu_s$ 在 $-\hat{p}_j$ 方向的分量，因而相比于上两式，额外引入了 g) $\mu_j = -g \frac{e}{2m} p_j$ 、 $\mu_j = g \frac{e}{2m} p_j = g \frac{\mu_B}{\hbar} j \cdot \hbar = g j \cdot \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_j$ 为基矢的读数)。其中 $g = 1 + \frac{j^2 - l^2 + s^2}{2j^2}$ 。【 $\mu_{j_z} = g m_j \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_{j_z}$ 为基矢的读数)】

二.原子磁矩(多电子)

LS 耦合：轨道总磁矩： $\mu_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \mathbf{p}_L$ ，代入 $\mathbf{p}_L = \sqrt{L(L+1)}\hbar$ ，得到 $\mu_L = \sqrt{L(L+1)} \cdot \mu_B$ 。【也有 $\mu_{L_z} = m_L \cdot \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_{L_z}$ 为基矢的读数)】

自旋总磁矩： $\mu_S = -2\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \mathbf{p}_S$ ，代入 $\mathbf{p}_S = \sqrt{S(S+1)}\hbar$ ，得到 $\mu_S = 2\sqrt{S(S+1)} \cdot \mu_B$ 。【也有 $\mu_{S_z} = 2m_S \cdot \mu_B = 2(S - S) \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_{S_z}$ 为基矢的读数)】

原子总磁矩： $\mu_J = g \frac{e}{2m} p_J = g J^* \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_J$ 为基矢的读数)。其中 $g = 1 + \frac{J^{*2} - L^{*2} + S^{*2}}{2J^{*2}}$ 。
【 $\mu_{J_H} = g m_J \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_{J_z}$ 为基矢的读数)】——计算总磁矩的时候，旋磁比 $g \frac{q}{2m}$ 比轨道旋磁比 $\frac{q}{2m}$ (热统里的写法) 会多引入一个 g 因子；之后在拉摩尔旋进处我们会用 γ 来表示它。

三.Fe 磁矩计算

$Z=26$: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$ 。确定基态原子态的方法：

①.考虑未充满壳层 $3d^6$ ，有 6 个电子(m_l, m_s)，在 5 个轨道(m_l)上。【要是有两个壳层不满呢？...比如 Cr?】

②.泡利原理(优先占据不同轨道)+能量最低原理： $L = \sum m_l = 2$ 、 $S = \sum m_s = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ 。

③.洪特规则：已组合出来了同科电子 $3d^6$ (6 个 $3d$?) 所能组合出来的 ${}^5D_{4,3,2,1,0}$ 五种原子态，那么其中的那个能级最低的便是我们所要要的基态原子态：而由于价电子 $3d^6$ 所处的 $3d$ 支壳层是 > 半满的，因此倒序： J 越大，能级越低——所以 5D_4 能级最低，它即为 Fe 的基态原子态。

于是将 $J=4$ 代入 $g = 1 + \frac{J^{*2} - L^{*2} + S^{*2}}{2J^{*2}} = 1 + \frac{20 - 6 + 6}{2 \cdot 20} = \frac{3}{2}$ ，得到 $\mu_J = g J^* \mu_B = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} \mu_B = 3\sqrt{5} \mu_B = 6.7 \mu_B$ 。

2.2 过渡族元素的原子磁矩

一.3d~6d

3d 铁族、4d 钼族、5d 铂族、6d 铪族。

Fe 原子：3d⁶， μ_J 算出来=6.7 μ_B ，但测出来只有 2.2 μ_B 。

Fe²⁺离子：3d⁶， μ_J 算出来=6.7 μ_B ，但测出来只有 5.4 μ_B 。

Co²⁺离子：3d⁷， μ_J 算出来=6.63 μ_B ，但测出来只有 4.8 μ_B 。

N²⁺离子：3d⁸， μ_J 算出来=5.59 μ_B ，但测出来只有 3.2 μ_B 。

二.轨道角动量冻结

对于 3d 族的元素，单个原子的磁矩，比做成晶体(微观物质单位排列有序；磁矩也排列有序)后的磁矩大。这说明，原子核与原子核、原子与原子核、原子与原子间或许有相互作用，导致了部分磁矩未能体现。

晶体场：原子受到相邻所有原子的库伦场作用，会造成 d 的 5 个 m_l 能级不再简并(但也不一定完全解除简并，对于有些原子或离子，轨道角动量只是部分地冻结)。对于 Fe 原子，分裂出一个低能级，4 个高能级。只有当 d 中分裂出来的那个最低能级为单态能级时(即只有 1 重简并：只有 1 个 m_l 处于该最低能级)， $\sum L_z = 0$ 。则在算 $\mu_J = gJ^* \mu_B$ 时， g 和 J 中的 $L = \sum m_l = 0$ ，以至于 $J = |0 \pm S| = S$ 、 $g = 1 + \frac{S^{*2} - 0 + S^{*2}}{2S^{*2}} = 2$ ， $\mu_S = \mu_J = gJ^* \mu_B = 2S^* \mu_B$ (以 $\hat{\mu}_J$ 为基矢的读数)，(并且因此导致 $\mathbf{p}_L = \sqrt{L(L+1)} \hbar = 0$ 、 $\mu_L = \sqrt{L(L+1)} \cdot \mu_B = 0$)。——这样算出来是原子的，还要 $\mathbf{M} = \frac{\sum \mu_m}{V}$ 、 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 、 $\chi = \frac{M}{H}$ 、 $\mu_r = 1 + \frac{M}{H}$ ，才是物质的。【我觉得一.中测出来的是物质的，要逆向计算一波，才能得到原子磁矩，虽然在那里说的是“测出来”的，其实是“测+算”出来的：给定 H，测 B，算 M，通过 V，算 $\sum \mu_m$ ，V 乘以数密度得到 V 中个数，再用 $\sum \mu_m$ 除以该个数。】

稀土金属(4f)及离子：晶体场弱，几乎不出现轨道角动量冻结。【因为未满壳层 4f 在内部，外面有 5s、5p、6s 三层罩着】

3d 族元素及离子：晶体场中等，轨道角动量部分冻结。【未满壳层 3d 的外面有 4s 这薄薄一层罩着】

4d、5d、6d 族过渡元素：晶体场强，轨道角动量冻结，甚至出现了低自旋态(自旋角动量都开始冻结了)。【未满壳层 4d、5d、6d 的外面分别只有 5s、6s、7s 这更薄的一层罩着】

元素比较重，万有引力吸引大，靠的近；原子核序数大，带电量，库仑力也大。

2.3 稀土金属的原子磁矩

$4f^1 \sim 4f^{13}$ ，4f 未满的稀土族元素们，离子半径从 Ce 开始减小(镧系收缩)，且无角动量冻结现象。

2.4 铁磁性合金的原子磁矩

一.铁磁性合金

1.由**铁磁性金属**组成的合金(Fe、Co、Ni、Gd)，比如其中两两配对所生成的 6 种，这类合金在**任何情况下**都展现出铁磁性。

2.由**铁磁性金属**与**非铁磁性金属**或**非金属**组成的(如 Fe-Si[变压器的软磁铁]、Co-Cr、Co-Pt、Fe-Si-Al)，在**一定的成分组合**(配比)范围内展现铁磁性。

3.由**非磁性金属**(以及**非金属**)组成的(如 Mn-Si、Mn-Bi、Mn-Cr-Al)，在**较窄的成分范围**内展现铁磁性。

典型的：**哈斯勒合金**则是由 3 种非磁性金属组成，其磁矩与饱和原子磁矩的大小，与成分、热处理的方式等，都有关系。

二.斯莱特-泡利曲线

1.原子序数相邻的两个元素(Cr,Mn,Fe,Co,Ni,Cu)，所组成的合金，其平均磁矩是外层电子数的函数。——比如 Fe-Co 这段 x 轴上的区间，取一点 P，使得 P 到 Fe 所在刻度的距离：P 到 Co 所在刻度的距离=7:3，曲线上以该横坐标为横坐标的点，其纵坐标值，在 Fe-Co 段以及 Cr-Cu 整段上，都是极大值。意味着当 Fe: Co=3:7 时，该相邻元素组成的化合物的磁性最强，其平均磁矩 $2.5\mu_B$ 左右，比纯 Fe 的 $2.2\mu_B$ 还强。

其中还有些曲线如 Co-Cr 是相隔几个原子序数的元素的化合物，该曲线与 x 轴的交点在 Cr 所在刻度的右方，意味着 Co 必须高到一定比例，或者说 Cr 成分必须降低到一定百分比，该合金才开始展现磁性。该曲线以 Co 为顶点，在此交叉点汇入总曲线，属于其中一条分支。

2.用能带模型来解释：

一般 Cr、Mn 经常掺入 Fe、Co、Ni 等，以调节其为亚铁磁性、反铁磁性等。因此，一般而言 Cr、Mn，以及 Cu、Zn 这 x 轴两端的物质多作为附加物，它们混杂入 x 轴中部的 Fe、Co、Ni，后三者是主要成分，而不是前四者。

①.Fe-Co 合金——将 3d 中正自旋(\uparrow): 负自旋(\downarrow)=5:2 的 Co 加入 5:1 的 Fe 中，由于 Fe 的 d 能带的自旋朝 \uparrow 的电子还没饱和，Co 便 5:2 地往 d 能带中输入自旋朝 \uparrow +自旋朝 \downarrow 的两种电子，自旋朝 \uparrow 的电子增加得多，于是 $S=\sum m_s$ 便增大， $J=L+S$ 也增大(大于半满取大 J 能量低)， $g=1 + \frac{J^{*2}-L^{*2}+S^{*2}}{2J^{*2}}$ 便增大，于是 $\mu_J=gJ^*\mu_B$ 便增大了。【没考虑 L 的变化？】

但当合金的 d 能带的自旋朝 \uparrow 的电子饱和后，Co 只能将其自旋朝 \downarrow 的电子汇入 d 能带(它当然还没饱和：原来 5:1 就少，加的 5:2 也加得少)，S 减小， μ_J 减小。这样便能解释 Fe-Co 段曲线达到极值点后的下降。

②.Ni-Co 合金——Ni 的 d 能带的自旋朝 \uparrow 的电子已经饱和，Co 只能将其自旋朝 \downarrow 的电子汇入 d 能带，S 减小， μ_J 减小，Co-Ni 曲线下降。

③.Ni-Cu 合金——每加入一个 Cu 原子 $3d^{10}4s^1$ ，相当于合金中 d 能带增加一个电子 $4s^1$ ，根据能量最低原理，该电子倾向于从 Cu 原子中逃离，跑去补 Ni 原子 $3d^84s^2$ 中的 $3d^8$ ，那么 5+3+1 中的这个 1，与 3 的自旋方向相同，都向下 \downarrow ，因此 S 减小， μ_J 减

④.Ni-Zn 合金——每加入一个 Zn 原子 $3d^{10}4s^2$ ，相当于合金中 d 能带增加 2 个电子，因此当 Zn 浓度(百分比)达到 30%时，合金/Ni 的 μ_i 就会变为 0。

【有个奇怪的想法：该理论是否自相矛盾？——比如一个 a_m 为 x ，另一个为 $(1-x)$ 、且 n 互为相反数的，Co-Ni 和 Ni-Co 合金，分别用 μ_{Co} 和 $\mu_{Ni}=0.6$ 算出来的两个 μ_m ，是否一致？或许存在一定的适用范围限制；抑或是即使算出来不相等也可解释为两元素的原子磁矩受影响后的值不同，而不是合金磁矩不同？】

①.其基本单元的磁矩排列，在短程内是无序的。②.快速冷却形成。③.硼常见于其中。

- 1.过渡族金属(Fe,Co,Ni)与类金属(B,Si,P,C)组合。【如 Fe-Si-B 薄带】
- 2.稀土族与过渡族金属。【薄膜；相比薄带更薄，依附在某基元上】
- 3.过渡族金属+过渡族金属+B。

2.稀土族与过渡族组合形成的非晶态合金，多表现为反磁铁或亚铁磁性。【其中，稀土族和过渡族，各有两套相反磁矩】

[illegible]

第三章 自发磁化理论

3.1 抗磁性——可解释 1.2 中的一.

一.抗磁性的磁化率

1.本质：电子做拉莫尔进动产生的附加磁矩。【 $\mu_j \times \mathbf{B} = \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_j}{dt}$; $\mu_j = -g \frac{e}{2m} \mathbf{p}_j$ 】

μ_j 绕 \mathbf{H} 旋进，则 \mathbf{p}_j 也绕 \mathbf{H} 旋进，则轨道平面也绕 \mathbf{H} 旋进，则在轨道上运动的 e ，总的来说也绕 \mathbf{H} 旋进，产生与 \mathbf{H} 反向的磁矩，即附加磁矩。

2.来自原子物理的微分方程的解： $p_j = \text{const.}$ 、 $p_{j_z} = \text{const.}$ 、 $p_{j_x} = A \cos(\omega t + \phi)$ 、 $p_{j_y} = A \sin(\omega t + \phi)$ ，其中 $\omega = \gamma B$ ， $\gamma = g \frac{e}{2m}$ ， $\frac{e}{2m}$ 为轨道旋磁比 $\frac{\mu_l}{p_l}$ 、 $\frac{\mu_B}{h}$ ，它并不陌生： $\mu_j = g \frac{e}{2m} p_j = \gamma p_j$ 。【可写成矢量式，表明旋进方向： $\omega = \gamma \mathbf{B}$ 】

它也可以这样得到：理论力学中所科普的方法 $g \frac{e}{2m} \mathbf{B} \times \mathbf{p}_j = -g \frac{e}{2m} \mathbf{p}_j \times \mathbf{B} = \mu_j \times \mathbf{B} = \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = \omega \times \mathbf{p}_j$ ，于是得到 $\omega = g \frac{e}{2m} \mathbf{B}$ 。

1).part01.

3.但我们这里不考虑自旋，因此 γ 从 $g \frac{e}{2m}$ 变为 $\frac{e}{2m}$ 即轨道旋磁比 $\frac{\mu_l}{p_l}$ (没有了 g)，因此对于 $\omega = \frac{e}{2m} \mathbf{B}$ ，现将 ω 写作 $\omega_L = (\mu_0 \frac{e}{2m}) \mathbf{H} = \nu_L \mathbf{H}$ 。【 $\mu_r = 1$? 还是 \mathbf{H} 中包含了 μ_r ? ; ν_L 相当于 $j_m = \mu_0 \mu_m$ ，即其单位从 γ 的 $A \cdot m^2 / (j \cdot s)$ 过渡到了 $T / (j \cdot s)$ ，它即相当于单位为 $T / (j \cdot s)$ 的轨道旋磁比】

4. $\Delta p_L = m \omega r^2 = m \omega_L \overline{\rho^2}$ ，其中 $\overline{\rho^2}$ 表示：电子轨道半径在垂直于 \mathbf{H} 的平面上的投影的均方值： $\frac{\sum_{i=1}^n \rho_i^2}{n}$ 。

【可以这么想象：假设电子在轨道上静止，轨道平面先绕着 \mathbf{H} 转一圈回到原方位，过程中电子转了一个正圆；然后再令电子沿着轨迹走一点后停止，接着轨道平面

再绕着 \mathbf{H} 转一圈回到原方位，电子又划了一个正圆...；——所有的(n 个)这样的圆周运动产生的角动量 $\Delta \mathbf{p}_L$ 的平均值，即 $\overline{\Delta \mathbf{p}_L} = \overline{m \omega_L \rho^2} = m \omega_L \overline{\rho^2}$ 】

又根据轨道旋磁比， $\Delta \mu_L = -\mu_0 \frac{e}{2m} \Delta \mathbf{p}_L = -\frac{\mu_0 e}{2} \omega_L \overline{\rho^2} = -\frac{\mu_0 e}{2} \frac{\mu_0 e}{2m} \mathbf{H} \overline{\rho^2} = (-\frac{\mu_0^2 e^2}{4m} \mathbf{H}) \overline{\rho^2}$ 。

【注：本来是 $\Delta \mu_L = -\frac{e}{2m} \Delta \mathbf{p}_L$ ，加了个 μ_0 也是为了使得 $\Delta \mu_L$ 的单位为 $T \cdot m^3$ ，以及之后的 \mathbf{M} 单位与 \mathbf{B} 的单位相同，均为 T】

5. 设原子序数为 Z ，则每个原子有 Z 个电子，也就有 Z 个电子轨道，不同轨道的 $\overline{\rho^2}$ 不同。又单位体积内有 N 个原子，于是 $\mathbf{M} = N \sum_i \Delta \mu_{L_i} = N(-\frac{\mu_0^2 e^2}{4m} \mathbf{H}) \sum_i \overline{\rho_i^2}$ 。那么 $\chi = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} = -N \frac{\mu_0^2 e^2}{4m} \sum_i \overline{\rho_i^2}$ 。

结论：①. χ 始终为负。

②. χ 与温度无关。

③. χ 与 Z ，即核外电子数有关。

④. 抗磁性是一切物质的基本性质(只要有核外电子)。

3.2 顺磁性理论——解释 1.2 二.

一.朗之万(langevin)顺磁性理论

前提假设：1). 原子磁矩之间无相互作用。

2). 在热平衡的状态下，磁矩无规则分布。在外磁场作用下，原子磁矩的角度分布发生变化，沿着外磁场方向择优分布，从而引起顺磁性。

单位体积内有 N 个原子，它们的 $\theta = \langle \mu_j, \mathbf{B} \rangle$ 在 0 到 π 之间，遵循玻尔兹曼统计律(这只是表象，实质是 θ 的函数 $E(\theta)$ 服从统计规律)。

在原子物理里我们用到了 $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ ，现在将其写作：第 i 个原子的能量 $E_i = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{H} = -\mu_j H \cos \theta_i$ ，其中 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 中的 μ_0 放进了 μ_j 中，所以 μ_j 也像 $\Delta \mu_L$ 一样包含了 μ_0 ，单位为 $T \cdot m^3$ ，而可以与 \mathbf{H} 搭配。

当原子磁矩 μ_j 的方向与磁场方向相同时，能量最低。虽然所有原子都因能量最低原理，而想让自己的势能处于最低而努力把自己的 μ_j 偏向 \mathbf{H} ，但由于温度非绝对零度的原因，所有原子(及其 μ_j)都还在振动，总还存在原子的 μ_j 不与 \mathbf{H} 完全重合，并设原子磁矩间没有相互作用，则它们遵循玻尔兹曼统计分布。

【呵呵，2018.10.27 号备考过程中，我无意间发现了这个东西：由于李楠的课刚刚讲到统计物理的 $N=e^{-\alpha Z}$ 、 $Z=\sum_s e^{-\beta \epsilon_s}=\int e^{-\beta \epsilon_s} d\Omega$ 、 $\bar{O}=\frac{1}{Z}\sum_s O_s e^{-\beta \epsilon_s}=\frac{\int O \cdot e^{-\beta \epsilon_s} d\Omega}{\int e^{-\beta \epsilon_s} d\Omega}$ 、 $F=-NkT\ln Z$ 。这下下面的所有疑惑都解释的通了：这些(知识性的)mistakes(错误)和(因之产生的)misunderstanding(误解)，一定是由写那本“小黄书”《磁性物理学》的作者青年时期时期上热统时没有好好听课酿成的=，即使这两个家伙在磁学方面很厉害，也掩盖不了李楠的暗暗冷笑。这也是为什么老孔和其他数学家老是诟病物理学、物理学家们的数学不严谨的证据之一：每个关键的地方不讲明白，那会挫败很多人继续探索下去的积极性，以至于这些本该成为物理学界僧侣的扫地人，大多在青年时期就 turn away 了：

其一. Z 就是个求和/积分，其右上角没有 N ，其 F 中的 N 不是由 \ln 这个“取对数运算”求出来的，而是 F 自带的。

其二.按理说 $\sum_s e^{-\beta \epsilon_s}$ 应该理解为 $\int \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{d\Omega} d\Omega$ ，即上面的 $\int e^{-\beta \epsilon_s} d\Omega$ 中的 $e^{-\beta \epsilon_s}$ ，在物理意义上应理解为单位立体角的 $e^{-\beta \epsilon_s}$ 。其中 $\beta=\frac{1}{kT}$ 。

其三.或许由求和变为积分中的积分是“对立体角积分”，这个 idea 始于 $\theta=\langle \mu_j, \mathbf{B} \rangle$ 的空间取向。

其四.柳老师的一个习题：当 O 是 $\cos\theta$ 时，你可以用 \bar{O} 的公式来求 $\overline{\cos\theta}$ 。

其五.热统 F 中的并不是单位体积内的，而是总的；并且连热统中的 f 都不是单位体积内的，而是单位摩尔的。然而这里的 F 却是自由能体密度。这来源于这里的 N 是单位体积内原子/磁矩数，而在热统中就是粒子数。

其六.翟心哲做题时，发现柳老师给出的推导过程，一半公式是错的，另一半公式没有用...。这就导致了第七点：

其七.柳老师再怎么也是个女人，似乎不怎么问由来：拿来就用，能凑出结果，能知晓物理含义，解释的通就行。哈哈...看来发笑的不仅是李楠，底蕴深厚的男物理学家似乎对此都会会心一笑=，毕竟他们支配了整个物理学大厦的所有基础、复杂的

公式，以供与女人和工程师们拿来就用，这样就相当于随心所欲地支配了顺应他们意志、但同时却又不需要知道他们的意志为何物的女人们。朗道这下可开心了：这下女人般的小磁矩们总是傻乎乎地朝他这个大磁场方向靠和贴合了。】

1. 经典情况：

系统的状态配分函数 $Z(H) = (\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-\frac{E_i}{kT}} \sin\theta_i d\theta_i)^N = [-2\pi \int_0^\pi e^{-\frac{\mu_j H \cos\theta_i}{kT}} d(\cos\theta_i)]^N$
 $= [-2\pi \frac{kT}{\mu_j H} e^{-\frac{\mu_j H \cos\theta_i}{kT}} \Big|_0^\pi]^N = [\frac{2\pi kT}{\mu_j H} (e^{\frac{\mu_j H}{kT}} - e^{-\frac{\mu_j H}{kT}})]^N = [\frac{4\pi kT}{\mu_j H} \sinh(\frac{\mu_j H}{kT})]^N$ 。

(亥姆霍兹)自由能(密度) $F = -kT \ln Z = -kTN \cdot \ln[\frac{4\pi kT}{\mu_j H} \sinh(\frac{\mu_j H}{kT})] = -kTN \cdot \{\ln \frac{4\pi kT}{\mu_j H} + \ln[\sinh(\frac{\mu_j H}{kT})]\}$ 。【关于它的来源：热力学中， $F := U - TS$ ；而统计物理中， $S = k \ln \Omega$ 。因此 $TS = kT \ln \Omega$ 。而我猜 Z 就是 Ω ，即微观状态数。但这样一来， Z 将没有单位；所以我觉 $k \ln Z$ 是单位体积的熵，这样也可得到 $\ln Z$ 的单位。但至于 Z 的单位，这我说不清楚。】

M 与能量(密度) F 的关系(像 $E = -\mu \cdot B$ 一样普适)： $M = -\frac{\partial F}{\partial B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F}{\partial H}$ 。【学完热力学后，才知道这其实来源于磁介质系统(类比 pVT 系统)的 F 的热基方程 $dF = \dots$ 中的一阶偏导关系...；下面的来源都是猜的】

【难道来源于电动力学中的：静磁场的能量密度 $w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$? ——
 $\frac{\partial w}{\partial B} = \frac{B}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$? 我觉得，要么这里的 M 其实是 m 即 μ_j ，即 $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$ 本身就是 $E = -\mu \cdot B$ ；要么这里的 F 不是能量而是能量密度。——而且个人偏向前者，详情参见热力学中，功这一节的“电磁功”部分： $\bar{d}W = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m}$ ；

(之后我们会知道，它的前面应该有个负号的，但热力学中没有这个负号，这不是失误或错误，是因为热力学中的它，以及它中的所有量，均代表着“对系统而言”，正如 $\bar{d}W = -pdV$ 而不是 pdV 一样：对于系统而言， dV 或 $d\mathbf{m}(\mathbf{H})$ 或许是负的？——哦不不不，这是因为 $-\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m}$ 连同 $-\mu \cdot B$ 是体系的势能，而 $\bar{d}W$ 不是指体系的势能变化量，而是外场对体系作的功，它与体系势能变化量之和=0！)

——额，但其实是后者：这里的自由能确实是自由能体密度 $F = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$ ($E = -\mu \cdot B$ 两边除以体积得到)！不要看上去“ $-kT \ln Z$ ”的单位，是 kT 的单位，即焦耳 J：你似乎和我一样觉得 $\ln Z$ 应该像 Z 一样是纯粹的数字(不然如果 Z 有任何单位，求了对数就啥也不是了)，但其实不然，连 Z 都不是纯粹的数字：其括号部分(底)里确实是数字，但其

指数部分 N 不是个数字！！所以求对数后， N 会提到前面来，进而引入了 N 的单位：个/ m^3 。】

【这就很有趣： 2^{4m^3} 是数字(严格说来也不是？正如 Z 可能有单位一样)，且/但 $\ln(2^{4\text{m}^3})$ 不是数字？】

$$\text{于是 } M = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{kTN}{\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial H} \left\{ \ln \frac{4\pi kT}{\mu_j H} + \ln [\sinh(\frac{\mu_j H}{kT})] \right\} = \frac{kTN}{\mu_0} \cdot \left\{ -\frac{\mu_j H}{4\pi kT} \frac{4\pi kT}{\mu_j H^2} + \frac{\mu_j}{kT} \frac{\cosh(\frac{\mu_j H}{kT})}{\sinh(\frac{\mu_j H}{kT})} \right\} = \frac{kTN}{\mu_0} \cdot \left\{ -\frac{1}{H} + \frac{\mu_j}{kT} \coth(\frac{\mu_j H}{kT}) \right\} = \frac{N\mu_j}{\mu_0} \cdot \left\{ \coth(\frac{\mu_j H}{kT}) - \frac{kT}{\mu_j H} \right\}.$$

设 $\alpha = \frac{\mu_j H}{kT}$ ，它也是有物理意义的：分子相当于磁场带来的势能 $-\mu \cdot B$ ，只不过 $\mu_j H$ 即原子磁矩 μ_j 完全靠到了 H 的反向上去了，即 $-\mu \cdot B$ 的最大值；而分母则相当于温度赋予自由磁矩的能量。 α 是它俩之商，表示二者的竞争程度谁大，占自由磁矩所拥有的总能量的份额更多。【你可以这么记 α ： $e^{-\frac{E_i}{kT}}$ 以及 $E_i = -\mu_j \cdot H = -\mu_j H \cos\theta_i$ ，并去掉其中的 $\cos\theta_i$ 即可】

于是原式化简为 $\frac{N\mu_j}{\mu_0} \cdot \left\{ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right\}$ ，现定义 $\mathcal{L}(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}$ ，于是 $M = \frac{1}{\mu_0} N\mu_j \mathcal{L}(\alpha)$ 。【之所以这么单独提出一个 $\frac{1}{\mu_0}$ ，与 $M = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F}{\partial H}$ 的理由一致；现在它的单位为 $\text{A} \cdot \text{m}^2$ 。若没有了 $\frac{1}{\mu_0}$ 或乘以了 μ_0 ，则 M 的单位变为 T 。可以通过单位的方式来记忆它： $N\mu_j$ 便是 M 的单位，剩下的 $\frac{1}{\mu_0}$ 与 $\mathcal{L}(\alpha)$ 是常数】

1). 高温时： $\mu_j H \ll kT$ ， $\alpha \ll 1$ ，此时 $\coth(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{45} + \dots \approx \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3}$ ，于是 $\mathcal{L}(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \approx \frac{\alpha}{3}$ ，于是 $M = \frac{1}{\mu_0} N\mu_j \mathcal{L}(\alpha) \approx \frac{1}{\mu_0} N\mu_j \frac{\alpha}{3}$ ，代入 $\alpha = \frac{\mu_j H}{kT}$ ，得到 $M = \frac{N\mu_j^2 H}{3\mu_0 k T} = C \frac{H}{T}$ 。于是 $\chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T}$ ，这叫做居里定律。其中 $C = \frac{N\mu_j^2}{3\mu_0 k}$ ，叫做居里常数。【 C 即在算 $M = \frac{1}{\mu_0} N\mu_j \mathcal{L}(\alpha)$ 的高温近似时，并凑成 $\chi = \frac{C}{T}$ 的模样，得出来的常数；有些地方也将分子中的 μ_j^2 里的 2 个 μ_0 提出来了，这样 μ_0 就在分子了】

2). 低温/强磁场(主要是强磁场)时： $\mu_j H \gg kT$ ， $\alpha \gg 1$ ，此时 $\coth(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \approx 1$ ，于是 $\mathcal{L}(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{\alpha} \approx 1$ ，于是 $M = \frac{1}{\mu_0} N\mu_j \mathcal{L}(\alpha) \approx \frac{1}{\mu_0} N\mu_j$ ，叫做饱和磁化强度 M_0 (或 M_s)，是材料的基本参数。由于 H 很大时 M 便与 H 无关了，此时就不关心 $\chi = \frac{M}{H}$ 了——之后我们会知道，第六章技术磁化部分，该区域对应着第五区域的水平直线段： H 再怎么增加， M 保持不变，小磁矩偏转完全。

2. 量子化修正：

但自由磁矩 μ_J 并不像上述过程那么“自由”—— $\mu_J(\mu_J = J^* g \mu_B)$ 在外场 H 方向上的投影 μ_{J_z} 的取值 μ_{J_z} 是量子化的，即 $\mu_{J_z} = m_J g \mu_B$ ， $m_J = -J \sim J$ 。【注：有时将 $g \mu_B$ 看做一个整体，它的地位(它之于 μ_{J_z})如 \hbar 之于 $L_z = m_l \hbar$ 和 $L = l^* \hbar$ 一样】

因此对于 $E_i = -\mu_J \cdot H = -\mu_J H \cos \theta_i = -\mu_{J_z} H$ ，其中的 θ_i 也就只能取离散的值，配分函数 Z 的形式便不再是积分而是求和了(这就回到了统计物理中对 Z 的 original 定义了)。用 $E_i = -\mu_{J_z} H$ ，类似地做下去，最终得到 $M = \frac{1}{\mu_0} N \mu_z B_J(\alpha)$ ， $\alpha = \frac{\mu_z H}{kT}$ 中的 μ_J 也变为了 μ_z 。

【其中 $B_J(\alpha) = \frac{2J+1}{2J} \coth(\frac{2J+1}{2J} \alpha) - \frac{1}{2J} \coth(\frac{1}{2J} \alpha)$ ，叫做布里渊函数；它是对经典理论 $M = \frac{1}{\mu_0} N \mu_J \mathcal{L}(\alpha)$ 的量子化修正，注意 $B_J(\alpha)$ 除了是 α 的函数，也还是 J 的函数。】

1). 高温时: $\mu_z H < kT$, $\alpha < 1$, 此时 $B_J(\alpha) \approx \frac{2J+1}{2J} (\frac{1}{\frac{2J+1}{2J} \alpha} + \frac{\frac{2J+1}{2J} \alpha}{3}) - \frac{1}{2J} (\frac{1}{\frac{1}{2J} \alpha} + \frac{\frac{1}{2J} \alpha}{3}) = [(\frac{2J+1}{2J})^2 - (\frac{1}{2J})^2] \frac{\alpha}{3} = \frac{2J+2}{3} \frac{\alpha}{2J} = \frac{J+1}{3J} \alpha$ (也就比之前的 $\mathcal{L}(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}$ 多了个 $\frac{J+1}{J}$)，于是 $M = \frac{1}{\mu_0} N \mu_z \frac{J+1}{3J} \alpha$ ，代入 $\alpha = \frac{\mu_z H}{kT}$ ，得到 $M = \frac{J+1}{J} \frac{N \mu_z^2 H}{3 \mu_0 k T}$ ，令其中的 $\mu_z = m_J g \mu_B$ 取最大值 $\mu_z = J g \mu_B$ ，则 $\frac{J+1}{J} \mu_z^2 = J^2 g^2 \mu_B^2 = \mu_J^2$ ，则 $M = \frac{N \mu_J^2 H}{3 \mu_0 k T} = C \frac{H}{T}$ 。于是 $\chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T}$ 。其中 $C = \frac{N \mu_J^2}{3 \mu_0 k}$ ，公式和常数均较经典而言不变。

2). 低温/强磁场时: $\mu_z H > kT$, $\alpha > 1$, 此时 $\coth(\cdot) \approx 1$ ，于是 $B_J(\alpha) \approx \frac{2J+1}{2J} - \frac{1}{2J} = 1$ ，于是 $M \approx \frac{1}{\mu_0} N \mu_z$ ，也即饱和磁化强度 M_0 ，只不过 μ_z 中的 m_J 也一般取最大值 J 。于是 M 可写为 $M = M_0 B_J(\alpha)$ 。【其中的 μ_J 虽然变成了 μ_z ，但 J 与 J^* 在 J 值较大时，值很接近；或许我们能用 α 即 $\frac{H}{T}$ 为常数时， M 是否为常数，来检验该理论？】

如果原子的总角动量量子数 $J \rightarrow \infty$ ，则意味着 $\mu_z = m_J g \mu_B$ 有非常多的取值， $\frac{\mu_z}{\mu_J} = \frac{m_J}{J^*}$ 近似连续，即原子磁矩的取向是任意的。此时 $B_J(\alpha) \approx \coth(\alpha) - \frac{1}{2J} (\frac{1}{\frac{1}{2J} \alpha} + \frac{\frac{1}{2J} \alpha}{3}) = \coth(\alpha) - [\frac{1}{\alpha} + (\frac{1}{2J})^2 \frac{\alpha}{3}] \approx \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha)$ ， M 的表达式，连同其在高温低温的近似表达式、以及高温时的 χ ，均回归到原来经典的情况。

3.3 铁磁性理论——解释 1.2 三.

一.铁磁性物质的基本特征

1.铁磁性物质内存在着按磁畴分布的自发磁化(M_s)。

2.铁磁性物质的磁化率 χ 很大 $10^4 \sim 10^6$ 。【也就是说，只需要加很小的 H ， M 就增长迅速以至于达到饱和了；这正是因为铁磁性物质内部存在自发磁化的缘故：人家本身就已经磁化好了，只是各个磁畴 M_s (注意：它的右下角是小写的 s (s : self); 与 M_s 不同)的方向不一致而已。小的外场也能轻松调整 M_s 的朝向：牵一发而动全身，调整磁畴中一个磁矩，由于分子场的相互作用，同一磁畴中其余也就跟着转了。】

3.铁磁性物质存在磁滞现象(即使是小范围内，如 ΔH 很小，对应的一个小周期内，也存在磁滞现象；其磁滞回线是一个小的相似图形)。【以 H 为 x 轴， B 或 M 为 y 轴，从 M 达到饱和 M_0 后退磁($H \searrow$)， H 到 0 时， B 和 M 却还 >0 ，这便称因变量相对于自变量 H 的“滞后”；在这里， M 是直接因变量， B 是间接因变量，因为 $B = \mu_0(H + M)$ 。随 H 的变化而改变的，实质上是 M (当然 B 中的 H 也在变，但是是可预测的、形式固定的)。】

4.铁磁性物质存在一个磁性转变温度 T_C ：居里温度。 $T < T_C$ 铁磁性； $T > T_C$ 顺磁性(稍有不同)。居里温度附近(可能是在 $T_C \sim T_p$ 之间)会展现一些新的磁结构和磁性质，是铁磁性竞争和反抗温度的结果。

5.铁磁性物质在磁化过程中表现出磁晶各向异性(有些方向磁化很难)和磁致伸缩(小范围内体积改变，有些材料明显)现象。

二.铁磁性分子场理论

外斯(Weiss)分子场理论：

①.分子场 H_{mf} 假说：导致自发磁化的相互作用力，假设为铁磁物质内部存在分子场(H 的单位与 M 相同)，大小在 $10^9 A/m$ 左右(比 Co 的饱和磁化强度的 10^6 还大)。

②.磁畴 M_s 假说：无外场时，磁畴自发磁化 M_s 到饱和 M_s ，各磁畴的磁化方向有一定分布。

1.分子场理论：

(1).分子场

在居里温度之前，分子场能比温度能量高，展现铁磁性。外斯认为，当 $T=T_C$ 时，由温度造成的能量 kT_C 足以与分子场抗衡，尝试着取代/覆盖它对磁矩的影响，于是有 $kT_C=\mu_J H_{mf}$ ，其中的 μ_J 也包含了 μ_0 。而测得铁的 $T_C=1043K$ ，由此可推算其分子场大小 $H_{mf}=\frac{kT_C}{\mu_J}=\frac{1.38\times 10^{-23}\cdot 1043}{2.2\times 1.165\times 10^{-29}}=5.6\times 10^8 A/m$ 。

【反过来来看，这里有点问题： $T_C=\frac{H_{mf}\mu_J}{k}=\omega\frac{M_s\mu_J}{k}$ ；但之后我们会求得 $T_C=\omega C$ ，但 $C=\frac{N\mu_J^2}{3\mu_0 k}\neq\frac{M_s\mu_J}{k}$ ，即使 $M_s=M_0=\frac{1}{\mu_0}N\mu_z\approx\frac{1}{\mu_0}N\mu_J$ 达到饱和， $\frac{M_s\mu_J}{k}=\frac{N\mu_J^2}{\mu_0 k}$ ，二者之间也相差一个 $\frac{1}{3}$ ，也就是说，这样的关系只是近似，算出来的 T_C 至少是正确理论预言的 $\frac{1}{3}$ 甚至更小，不过二者确实在同一个数量级上。】

外斯假定 $H_{mf}=\omega M_s$ (molecular field)，即分子场 H_{mf} 强度正比于自发磁化强度 M_s (self)，其中 ω 为外斯分子场系数，量值约 $10^4\sim 10^5$ 。【注：之后可看出，本身假定的是 $H_{mf}=\omega M$ ；只是这里 $H=0$ 导致了 $M=M_s$ 】

然后将分子场加到外场中去，得到有效场大小 $H_{eff}=H+H_{mf}$ 。之后我们将用它替代原来在所有公式中出现的外场 H 。

(2).自发磁化强度(主要影响因素为 T ；也有 H ？——否，自发意味着 $H=0$)

首先， $\alpha=\frac{\mu_z H_{eff}}{kT}=\frac{\mu_z (H+H_{mf})}{kT}=\frac{\mu_z (H+\omega M_s)}{kT}$ ，于是 $H+\omega M_s=\frac{\alpha kT}{\mu_z}$ ，则 $M_s=\frac{kT}{\omega\mu_z}\alpha-\frac{H}{\omega}$ ，得到 $\frac{M_s}{M_0}=\frac{kT}{\omega\mu_z M_0}\alpha-\frac{H}{\omega M_0}=\frac{NkT}{\mu_0\omega M_0^2}\alpha-\frac{H}{\omega M_0}$ 【注： $M_0=\frac{1}{\mu_0}N\mu_z$ 】。而另一方面，根据(但是现在有了分子场，磁矩已经不自由了，还能用这个?) $M=\frac{1}{\mu_0}N\mu_z B_J(\alpha)$ ，有 $\frac{M_s}{M_0}=B_J(\alpha)$ 。【 $M_s\in M$ 】

以 α 为横坐标、 $\frac{M_s}{M_0}$ 为纵坐标，画出 $\begin{cases} \frac{M_s}{M_0}=\frac{NkT}{\mu_0\omega M_0^2}\alpha-\frac{H}{\omega M_0} \\ \frac{M_s}{M_0}=B_J(\alpha) \end{cases}$ 一直线一曲线($B_J(\alpha)$ 这个曲

线与我们之后的磁化功曲线，非常相似，它俩实际上本质相同，因为 α 中分子为 H)的交点($\alpha, \frac{M_s}{M_0}$)，即一定磁场强度 H (即一定直线截距 $-\frac{H}{\omega M_0}$)、一定温度 T (即一定直线斜率 $\frac{NkT}{\mu_0\omega M_0^2}$)下(一定的直线位置)的磁化强度 M_s (即交点纵坐标 $\frac{M_s}{M_0}$)。

为了简单地求自发磁化强度 M_s ，令 $H=0$ 【或者更确切地说，既然是“自发的”，且之所以用 M_s ，而不是 M ，就意味着 $H=0$ ；如果方程中的是 M ，则对应着 H 可取 >0 的值。 \therefore 从一开始我们就该用 M ，到这里才引入 M_s 】；此时对于某温度 T ，分析过原点的直线 $\frac{M_s}{M_0} = \frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \alpha$ ，与 $\frac{M_s}{M_0} = B_J(\alpha)$ 的交点 P 的纵坐标值 $\frac{M_s}{M_0}$ ，即可得一定温度 T 下的 M_s 。

①. $T < T_C$ ，铁磁性，以及 $0K$ 时的自发磁化强度： $(H=0$ 时， $\alpha \rightarrow \infty$ 的交点)

现在 $H=0$ 的情况下，使得 $T \rightarrow 0$ ，则过原点的直线斜率 $\frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2}$ 降低，交点 P 的横坐标值 $\alpha \rightarrow \infty$ ，交点在曲线 $\frac{M_s}{M_0} = B_J(\alpha)$ 上的纵坐标值，即 $B_J(\alpha)$ 的值 $=1$ 。于是 $\frac{M_s}{M_0} = 1$ ，得到 $0K$ 时的自发磁化强度 $M_s = M_0 = \frac{1}{\mu_0} N \mu_z$ 。这与低温时候的顺磁理论得到的 M_s 一致。【所以可以看做： M_s 随温度 T 变化的曲线，也是从 M_s 随外场 H 、 α 变化的“磁化功”曲线中得来的】

T 从 $0K$ 升温到 T_C 的这段过程，直线与曲线有两个交点，总取非 $(0,0)$ 的那个交点为 P 。直线斜率从 0 开始增加，交点横坐标左移($\alpha \searrow$)、纵坐标下移($M_s \searrow$)，因此如果要从 $\frac{M_s}{M_0} - \alpha$ 图的分析来画 $M_s - T$ 图的话，纵坐标 M_s 从 $0K$ 时的最大值 M_0 ，随着温度 T 的增加，而以凸函数方式减小，直到 $T = T_C$ 时变为 0 。

而从 $\frac{M_s}{M_0} - \alpha$ 图上来看， $T = T_C$ 时直线与曲线相切于原点， P 点回到 O 点， $M_s = 0$ ；当 $T > T_C$ 时，两曲线没有除 $(0,0)$ 外的第二个交点，意味着 M_s 没有值、铁磁性消失，转变为顺磁性。

②.居里温度 T_C ： $(H=0$ 时， $\alpha \rightarrow 0$ 的交点)

首先， T_C 已经算高温了(何况 $H=0$)，于是 $\mu_z H < kT_C$ ， $\alpha < 1$ ， $B_J(\alpha) \approx \frac{J+1}{3J} \alpha$ 。于是曲线 $\frac{M_s}{M_0} = B_J(\alpha)$ 在原点邻域【即 $(\alpha, \frac{M_s}{M_0}) \approx (0,0)$ 】变为了一条直线 $\frac{M_s}{M_0} = \frac{J+1}{3J} \alpha$ ；而另一条直线现在变为了 $\frac{M_s}{M_0} = \frac{NkT_C}{\mu_0 \omega M_0^2} \alpha$ ，考虑二直线的斜率相等，有 $\frac{NkT_C}{\mu_0 \omega M_0^2} = \frac{J+1}{3J}$ 。得到 $T_C = \frac{\mu_0 \omega M_0^2}{Nk} \frac{J+1}{3J} = \frac{\mu_0 \omega}{3Nk} \frac{J+1}{J} M_0^2$ 。【这里和顺磁性的 M 的高温近似的 $B_J(\alpha) \approx \frac{J+1}{3J} \alpha$ 类似】

根据之前所说的 $\frac{J+1}{J} \mu_z^2 = J^2 g^2 \mu_B^2 = \mu_J^2$ ，有 $\frac{J+1}{J} M_0^2 = \frac{1}{\mu_0^2} N^2 \mu_J^2$ ，代回得到 $T_C = \frac{\mu_0 \omega}{3Nk} \frac{1}{\mu_0^2} N^2 \mu_J^2 = \omega \frac{N \mu_J^2}{3 \mu_0 k}$ ，又根据居里常数 $C = \frac{N \mu_J^2}{3 \mu_0 k}$ ，则 $T_C = \omega C$ 。【这便是为什么 T_C 的下角标是 C 】

三. $T > T_C$: 居里-外斯定律的推导

(注意区别于顺磁性的居里定律 $\chi = \frac{C}{T}$) 【顺磁性就一个公式: $M = \dots B_J(\alpha)$; 而铁磁性加了外斯分子场后, 多了一个线性公式; 联立解 M 】

不同于普通物质的顺磁性, 我们来看看铁磁性在 $T > T_C$ 后, 将呈现出何种顺磁性:

$T > T_C$ 时, 联立两个方程, 没有第二个解, 即没有非零解。要想有非零解, 必须外加磁场 $H > 0$, 此时联立解出 $H + \omega M$ 中的 M 。【此时 $H_{mf} = \omega M$ 而不是 M_s 了, 因为 $H \neq 0$ 】

即使 $H \neq 0$, 由于 $T > T_C$, 也已经算高温。于是 $\mu_z H \ll kT$, $\alpha \ll 1$, $B_J(\alpha) \approx \frac{J+1}{3J} \alpha$ 。既然 $B_J(\alpha)$ 的形式变得简单了, 我们也就可以联立求解了(而不是像之前 $T < T_C$ 那样只能用

图解法):
$$\begin{cases} \frac{M}{M_0} = \frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \alpha - \frac{H}{\omega M_0} \\ \frac{M}{M_0} = \frac{J+1}{3J} \alpha \end{cases}$$
 由于我们为的是解 M , 因此不能就这么把二式左侧等

起来, 这样求的是 α , 求完它后还得带进去再求 M 。为此我们可以将一式的初始版本 $\alpha = \frac{\mu_z(H + \omega M)}{kT}$ 代入二式, 然后将 M 提到左边。【注: 高温时也有分子场, 因为虽然自发磁化强度 M_s 为 0 了, 但磁化强度 M 因 H 的存在(不为 0)而不为 0, 于是只要有磁矩, 即使是在外磁场下感生出来的, 由于各原子的空间位置不变, 它们也将相互作用, 于是分子场仍然存在, 公式仍然可沿用; 同理接下来的定域分子场的 2.2.。】

要不我们还是试一下先 α 后 M 的办法吧, 既然有现成的: $\frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \alpha - \frac{H}{\omega M_0} = \frac{J+1}{3J} \alpha$, 得到 $\alpha = \frac{\frac{H}{\omega M_0}}{\frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \frac{J+1}{3J}}$, 然后再将其代入二式, 得 $M = \frac{J+1}{3J} \frac{\frac{H}{\omega}}{\frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \frac{J+1}{3J}} = \frac{J+1}{3J} \frac{M_0^2 H}{\frac{NkT}{\mu_0} \frac{J+1}{3J}}$, 根据 $\frac{J+1}{J} M_0^2 = \frac{1}{\mu_0} N^2 \mu_J^2$, 有 $M = \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{\mu_0} N^2 \mu_J^2}{\frac{NkT}{\mu_0} \frac{1}{3\mu_0} N^2 \mu_J^2} H = \frac{\frac{1}{\mu_0} N \mu_J^2}{3kT - \frac{1}{\mu_0} N \mu_J^2} H = \frac{\frac{N \mu_J^2}{3\mu_0 k}}{T - \frac{N \mu_J^2}{3\mu_0 k}} H = \frac{C}{T - T_C} H$ 。因此 $\chi = \frac{C}{T - T_C}$ 。

但是, 实际上 $\chi = \frac{C}{T - T_p}$, 且 $T_p > T_C$ 。这是因为, 当 T 稍大于 T_C 时, 铁磁性物质内部仍有磁矩短程有序, 并没有完全无序, 这种 state1 to state2 的转变也是个连续的过程, 不会突变, 图像上也就不会出现尖点, 一阶导/斜率不会突变。所以, 其实应该说: 从 T_C 开始失去铁磁性/开始朝顺磁性过渡, 而到 T_p 时则完全转变为顺磁性/完全失去铁磁性。称 T_p 为顺磁居里温度。【 T_C 是纯粹顺磁性物质的 M 的高温近似处引入的,

称作居里温度；而 T_p 却是铁磁性物质从铁磁性转变到顺磁性后的，却称作顺磁性居里温度】

比如之前所说的 1043K 是铁的 T_c ，而其 T_p 为 1101K。

3.4 反铁磁性理论——解释 1.2 四.

一.反铁磁性物质的主要特征

1.反铁磁性物质存在一个相变温度，奈尔(Neel)温度 T_N 。

$T < T_N$ 时，呈现反铁磁性($T \nearrow \chi \nearrow$ ，磁矩受温度影响更大，方向理应更混乱，改变相同的外场 H ，磁化强度 M 竟然升高更多？即 T 竟然顺便辅助了 H ，使得 H 对 M 的影响更大了)。 $T > T_N$ ，呈现顺磁性。 $T = T_N$ 时，磁化率达到极大值。(而铁磁性随外场改变明显，一不小心就不知道何处达到了最大值——这对应第六章技术磁化曲线的第三区域)

2.反铁磁性物质的原子磁矩呈有序性。

3.包含 Cr 和 Mn 的很多物质都呈现反铁磁性。Cr,Mn 是反铁磁性的特征元素。

【这就是为什么之前说的经常往 Fe,Co,Ni 中掺杂入 Cr,Mn】

二.次晶格与定域分子场

次晶格 A 的最近邻一定是 B 类原子，A 的次近邻一定是 A 自己。仿照 $H_{mf} = \omega M_s$ ，设 H_{Amf} 为 A 原子受到的分子场(即定域分子场)，则由于最近邻之间，磁矩是反平行耦合的，或者说相互作用是反铁磁性的，因此 H_{Amf} 中有一项是 $-\omega_{AB} M_B$ ，且其中恒有 $\omega_{AB} > 0$ ； H_{Amf} 理应还包含一项次近邻的、同类原子之间的相互作用，它们的磁矩应该是正平行的，呈现铁磁性，则理应写作 $+\omega_{AA} M_A$ ，但实际材料中 ω_{AA} 不一定是正的，因此为了统一和之后计算方便，我们仍写作 $-\omega_{AA} M_A$ 的形式，其中 ω_{AA} 也可正可负可 0。

于是 $H_{Amf} = -\omega_{AB} M_B - \omega_{AA} M_A$ ，同样的道理 $H_{Bmf} = -\omega_{BA} M_A - \omega_{BB} M_B$ 。

若进一步假设占有 A 和 B 晶位上的离子，数目、带电量、种类均相同。于是 $\omega_{AB} = \omega_{BA}$ 、 $\omega_{AA} = \omega_{BB} = \omega_{ii}$ 。那么 $\begin{cases} H_{Amf} = -\omega_{AB} M_B - \omega_{ii} M_A \\ H_{Bmf} = -\omega_{AB} M_A - \omega_{ii} M_B \end{cases}$ 。【接下来的推导过程与居里-外斯定律的推导的第二种方案有点像，代入线性式联立求解】

那么 $\begin{cases} M_A = \frac{1}{2} M_0 B_J(\alpha_A) \\ M_B = \frac{1}{2} M_0 B_J(\alpha_B) \end{cases}$ ，其中 $\begin{cases} \alpha_A = \frac{\mu_z H_A}{kT} \\ \alpha_B = \frac{\mu_z H_B}{kT} \end{cases}$ ， $\begin{cases} H_A = H + H_{Amf} \\ H_B = H + H_{Bmf} \end{cases}$ 。注意：(1). M_A, M_B 中的 $\frac{1}{2} M_0$ 均出自 $M_0 = \frac{1}{\mu_0} N \mu_z$ 中的 N 变为了 $\frac{N}{2}$ ，这是因为 N 仍然保留单位体积内的原子数，然而单位体积内的 A、B 原子数，各占总原子数的一半。(2). M_A, M_B 中的 $B_J(\alpha_A)$ 中的 J 、 α_A, α_B 中的 $\mu_z = J g \mu_B$ 中的 J ，均是同一个 J 。这是因为我们假设了 AB 离子除了电性相反之外，其他特征均相同。(3). 正如 $H_{eff} = H + H_{mf}$ ，这里也是 $H_A = H + H_{Amf}$ 等替换了 α 中的 H 。

1. 奈尔温度 T_N 的计算：

正如居里温度 T_C 一样， T_N 已经算高温了、且无外场 H (有点像自发磁化？这么一来便该写作 M_{As}, M_{Bs})，于是 $\mu_z H_A, \mu_z H_B$ 均 $\ll kT_N$ ， $\alpha_A, \alpha_B \ll 1$ ， $B_J(\alpha) \approx \frac{J+1}{3J} \alpha$ 。于是

$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{2} M_0 \frac{J+1}{3J} \alpha_A \\ M_B = \frac{1}{2} M_0 \frac{J+1}{3J} \alpha_B \end{cases}, \text{ 根据 } \frac{J+1}{J} \mu_z^2 = \mu_J^2, M_0 = \frac{1}{\mu_0} N \mu_z, \text{ 代入 } \begin{cases} \alpha_A = \frac{\mu_z H_A}{kT} \\ \alpha_B = \frac{\mu_z H_B}{kT} \end{cases}, \text{ 有}$$

$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{2} M_0 \frac{J+1}{3J} \frac{\mu_z H_A}{kT} = M_0 \frac{\mu_J^2 H_A}{6 \mu_z kT} = \frac{N \mu_J^2 H_A}{6 \mu_0 kT} \\ M_B = \frac{N \mu_J^2 H_B}{6 \mu_0 kT} \end{cases}; \text{ 根据 } C = \frac{N \mu_J^2}{3 \mu_0 k}, \text{ 有 } \begin{cases} M_A = \frac{C}{2T} H_A \\ M_B = \frac{C}{2T} H_B \end{cases}; \text{ 再代入}$$

$$\begin{cases} H_A = H_{Amf} \\ H_B = H_{Bmf} \end{cases}, \text{ 有 } \begin{cases} M_A = \frac{C}{2T} (-\omega_{AB} M_B - \omega_{ii} M_A) \\ M_B = \frac{C}{2T} (-\omega_{AB} M_A - \omega_{ii} M_B) \end{cases}。【这类似之前先 α 后 M 的办法求居里-外斯定律，但实际上它理应与 T_C 的推导过程——“过原点的直线 $\frac{M_s}{M_0} = \frac{NkT}{\mu_0 \omega M_0^2} \alpha$ ，与 $\frac{M_s}{M_0} = B_J(\alpha)$ 相交，并利用 $T = T_C$ 时 $M_s = 0$ 、斜率相等”对应，因为这里目的是求 T_N 】。$$

$$\text{移项合并同类项，整理得 } \begin{cases} (1 + \frac{C}{2T} \omega_{ii}) M_A + \frac{C}{2T} \omega_{AB} M_B = 0 \\ \frac{C}{2T} \omega_{AB} M_A + (1 + \frac{C}{2T} \omega_{ii}) M_B = 0 \end{cases}。——很奇怪，该理论$$

说 $T = T_N$ 时， $M_A, M_B \neq 0$ ，然而铁磁性在 $T = T_C (T_p?)$ 时，自发磁化强度 M_s 降为了 $=0$ 。它俩在之后均展现顺磁性，不知为何在展现顺磁性之前，铁磁性的自发磁化强度降为了 0 ，而反铁磁性的尚未降为 0 。——我估计这种解释只是为了得出合理解而不得不这样解释，亦或者反铁磁性的 M_{As}, M_{Bs} 降为 0 的时候，只比 T_N 稍微晚那么一点点 (即 $T > T_N$ 时)，—— T_N 只是 on the brink of falling to zero，而 $T < T_N$ 时，以上二式都是有解的，意味着这段温度下 $M_{As}, M_{Bs} \neq 0$ 。

代入 T_N ，方程有非零解，因此系数行列式=0(得降秩、否则两个/一组 0 解)，即

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{C}{2T_N} \omega_{ii} & \frac{C}{2T_N} \omega_{AB} \\ \frac{C}{2T_N} \omega_{AB} & 1 + \frac{C}{2T_N} \omega_{ii} \end{vmatrix} = 0, \quad 1 + \frac{C}{T_N} \omega_{ii} + \left(\frac{C}{2T_N}\right)^2 (\omega_{ii}^2 - \omega_{AB}^2) = 0, \quad \text{即 } T_N^2 + C\omega_{ii}T_N + \frac{C^2}{4}(\omega_{ii}^2 - \omega_{AB}^2) = 0, \quad \text{解一元二次方程得 } T_N = \frac{-C\omega_{ii} \pm \sqrt{C^2\omega_{ii}^2 - C^2(\omega_{ii}^2 - \omega_{AB}^2)}}{2} = C \frac{-\omega_{ii} \pm \omega_{AB}}{2}.$$

但由于最近邻的 ω_{AB} 的绝对值，一定比次近邻的 ω_{ii} 的绝对值大(∵距离近=相互作用强)，且 ω_{AB} 恒 > 0、甚至 ω_{ii} 还可能 < 0，因此无论如何 $\omega_{AB} - \omega_{ii} > 0$ ，于是取 $T_N = C \frac{\omega_{AB} - \omega_{ii}}{2}$ ，以使得 $T_N > \text{绝对零度 } 0K$ 。该结论可对比居里温度 $T_C = C\omega$ 。

2. $T > T_N$ 时，反铁磁物质的磁化率(顺磁性时， χ 满足什么关系)：

正如 $T > T_C$ ：居里-外斯定律的推导一样，虽然 $H \neq 0$ ，但 $T > T_N$ 已经算高温了。并且由于定域分子场仍然存在(即使现在相互作用的不是自发磁化强度 M_{As}, M_{Bs} 而是磁化强度 M_A, M_B)，我们沿用上一节 2.1 的结论，但还原了 H_A, H_B 中 $H \neq 0$ 的情形：

$$\text{有} \begin{cases} M_A = \frac{C}{2T} (H - \omega_{AB} M_B - \omega_{ii} M_A) \\ M_B = \frac{C}{2T} (H - \omega_{AB} M_A - \omega_{ii} M_B) \end{cases}, \quad \text{于是 } M = M_A + M_B = \frac{C}{2T} (2H - \omega_{AB} M - \omega_{ii} M).$$

【这仅仅是两个方程对应侧相加】移项合并 M 有关项，得到 $M = \frac{\frac{C}{T}}{1 + \frac{C}{2T}\omega_{AB} + \frac{C}{2T}\omega_{ii}} = \frac{C}{T + \frac{C}{2}(\omega_{AB} + \omega_{ii})} = \frac{C}{T + T'_p}$ ，其中 $T'_p = C \frac{\omega_{AB} + \omega_{ii}}{2}$ 。【在《磁性物理学》里写作 T'_p 】

该定律也叫反铁磁物质的居里-外斯定律。但要注意它与 $\chi = \frac{C}{T - T_p}$ 的区别，这里的 T'_p 与之前的 $T_p > \approx T_C$ ，二者均 > 0，但分母中一加一减，即若我们将它们写成 y 轴为 $\frac{1}{\chi}$ 、 x 轴为 T 的图的形式： $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{C}(T - T_C)$ 、 $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{C}(T - T_p)$ 、 $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{C}(T + T'_p)$ ，可以发现三者的对应的射线的反向延长线，分别于 x 轴相交的点 T_C 、 T_p 、 $-T'_p$ 中， $T_p > T_C > 0 > -T'_p$ 。而且其实真实情况下是没有 $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{C}(T - T_C)$ 的；另外，不仅有 $T_N > 0 > -T'_p$ ，而且 $|T_N| < |-T'_p|$ 。

3. $T < T_N$ 时，反铁磁物质的特性：

$T < T_N$ 时，次晶格内的自发磁化强度不为 0(即 $H = 0$ 时的 $M_A, M_B \neq 0$ ；或者说 $M_{As}, M_{Bs} \neq 0$ ，我们上文 1. 中令系数行列式=0 就是在保证它俩在 $T < T_N$ 时有值，不过既然降阶了，那么 M_{As}, M_{Bs} 的解应该是线性相关的，会用其中一个表示另一个，其实解出来将是 $M_{As} + M_{Bs} = 0$ 的模样。)；但反铁磁中，每个次晶格有规则地反平行排列， $M = M_A + M_B = 0$ ；也就是说，当 $T < T_N$ 时， $M = 0$ 。

3.5 亚铁磁理论——解释 1.2 五

一.亚铁磁性物质的特性

(1).当温度低于铁磁居里温度时，亚铁磁表现出与铁磁性相似的宏观特性，但自发磁化强度较低。

也有两套原子，但 A 类 B 类原子不是同一类。A 位 B 位的原子磁矩不相等 $M_A \neq M_B$ ，有剩磁 $M = |M_A - M_B|$ 。

【之前我们 $M = M_A + M_B$ 中的三者 M, M_A, M_B 都是以同一方向(\mathbf{k})为正方向，度量出的量值：如 $M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{k}, M_A = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{k}$ ；但现在的三者 M, M_A, M_B ，均是指大小：如 $M = |\mathbf{M}|, M_A = |\mathbf{M}_A|$ 】

(2).当温度高于居里温度时，呈现顺磁性。

(3).亚铁磁性物质中典型的材料是铁氧体，故电阻率高，导电性比较差。

(4).常见的铁氧体有 3 种，尖晶石类铁氧体。石榴石类铁氧体。磁铅石类铁氧体。

1.尖晶石类铁氧体：

(1).尖晶石： $MgAl_2O_4$ ；尖晶石类： $M^{2+}Fe_2^{3+}O_4^{2-}$ 。【晶格结构类似尖晶石】

其中 2 价的 M 元素可以是 Co、Fe、Mg、Ni、Mn、Mg、Zn；3 价的 Fe 元素也可被替换为 Al、Cr、Ga。

其一个晶胞有 $56 = 7 \times 8 = (1:2:4) \times 8 = 8:16:32$ 个离子，即 8 个 M 离子、16 个铁离子、32 个氧离子。

三种离子中，氧离子线度最大，因而以它作为面心立方堆积的顶点。以它为骨架，金属离子 M^{2+}, Fe_2^{3+} 填充在 O^{2-} 密堆积的间隙中。它俩主要填充较小的 4 面体空隙 ($1+4 = \text{金刚石骨架}$) 和较大的 8 面体空隙 ($2 \text{ 个四棱锥底面重合/上下 2 个顶点} + \text{中间四边形的 4 个顶点}$)。【这里应该可以用到：欧拉公式之点线面之间的关系~】

①.正型: $(M^{2+})[Fe_2^{3+}]O_4^{2-}$, 纯正型只有 $ZnFe_2O_4$ 一种。【()表示 8 个 A 位, []表示 16 个 B 位】

(8 个) Zn^{2+} 完全填充到四面体间隙(即 8 个 A 位)中(或许是因离子半径 $Zn^{2+} < Fe^{3+}$ 的缘故); (16 个) Fe^{3+} 完全填充到八面体间隙(即 16 个 B 位)中。

②.反型: $(Fe^{3+})[M^{2+}Fe^{3+}]O_4^{2-}$ 。

A 位的 8 个 M^{2+} 与 B 位的 8 个 Fe^{3+} 调换位置。【使得 16 个 Fe^{3+} 一半分布在 A 位、一半分布在 B 位, M^{2+} 全分布在 B 位; 可能是因为 M^{2+} 与 Fe^{3+} 的原子序数、个头毕竟没差多少】

③.混合型: $(M_8^{2+}Fe_{1-\delta}^{3+})[M_{1-\delta}^{2+}Fe_{1+\delta}^{3+}]O_4^{2-}$ 。

若从正型开始说起, 则:

δ : A 位的 M^{2+} 与等量的 B 位中的 Fe^{3+} 调换位置后, 有百分之多少还剩在 A 位;
 $1 - \delta$: 互换了的占 M^{2+} 总数 1 的百分比; $(1 + \delta)/2$: 留在 B 位的 Fe^{3+} 占 Fe^{3+} 总数的百分比。【若从反型开始说起, 则: δ : 互换了的占 M^{2+} 总数的百分比; $1 - \delta$: 剩在 B 位的 M^{2+} 占 M^{2+} 总数的百分比; $(1 + \delta)/2$: 安居 B 位的 Fe^{3+} 占 Fe^{3+} 总数的百分比。——这种“调换”有点像“互斥”: 我来了()你就得从()中走出去、我走出了[]就得有人进[]来】

当 δ 从 1 逐渐减小到 0 的过程中, $1 - \delta$ 从 0 逐渐增大到 1, 意味着从正型开始, A、B 位中的离子相互交换得越来越多, 正型开始逐渐过渡到反型。【但由于绝大多数铁氧体都是反型, 因此人们喜欢说 δ 从 0→1, 对应着从反型开始, A、B 位中的离子交换得越来越多, 反型→正型; 而且这也是 δ 如此定义的理由, 毕竟 $ZnFe_2O_4$ 太特殊, 世界上就它孤零零地最奇怪】

同样的两种 2、3 价的金属元素, 可以实现这个过程, 比如铁氧体的热处理(A-B 交换); 而 2 价或 3 价离子, 单独被替换为其他元素(离子取代), 也可实现这一过程: 金属离子占 A 位和 B 位的倾向是(有点像化学中, 置换反应的金属活动顺序表)—— Zn^{2+} 、 Gd^{2+} 、 Go^{3+} 、 In^{3+} 、 Ge^{4+} 、 Mn^{2+} (0.8)、 V^{3+} 、 Fe^{2+} 、 Mg^{2+} (0.1)、 Li^+ 、 Al^{3+} 、 Cu^{2+} , 靠左的倾向于占 A 位, 靠右的倾向于占 B 位。【但离子取代+占位倾向表, 不就等于取代后再交换=换位么】

(2).磁矩的计算:

由于亚铁磁性，是未被抵消完全的反铁磁性，即 AB 位的两套磁矩相反，因而 $M = |M_A - M_B|$ 。

而又由于同一晶胞内，B 位的数目是 A 位上的两倍，且 B 位上的强磁性离子如 Fe^{3+} 占一半及以上（即大于等于 A 位的 Fe^{3+} 数目，即 $1 + \delta \geq 1 - \delta$ ），那么只有当 2 价离子有磁矩且磁矩大小 > 2 倍的 3 价离子的磁矩大小，且完全正型时， M_A 才可能 > M_B （否则如果 3 价离子有一部分交换到 A 区后，无论 2 价离子磁矩多么小，B 区总磁矩仍然 > A 区）。然而我们知道，完全正型的二价离子只能是 Zn^{2+} ，所以完全正型时 $M_A < M_B$ ；只剩下接近正型时（ $\delta > 0.5$ 时），2 价的磁矩 > 3 价的磁矩 × 2 较多，这也很难做到。【同一晶胞内的磁矩和 = 相同体积内的磁矩和 = 单位体积内的磁矩和 = M 】

因此，理论上 $M = |M_A - M_B| = M_B - M_A$ ， M 的方向为 M_B 的方向。

①.正型：由于 Zn^{2+} 没有磁矩（其内层电子全是满壳层的），且 8 个 Zn^{2+} 全在 A 位，那么有 $M = M_B - M_A = [M_{Fe^{3+}}] - (M_{Zn^{2+}}) = 2M_{Fe^{3+}}^{(0)} - M_{Zn^{2+}}^{(0)} = 2M_{Fe^{3+}}^{(0)}$ 。其中， $M_{Fe^{3+}}^{(0)}$ 、 $M_{Zn^{2+}}^{(0)}$ 规定为与 $M_A = M_A^{(0)}$ 数密度相同的“离子 A”的磁矩之和。

但实际上这是不成立的，因为 $ZnFe_2O_4$ 不满足具有亚铁磁性的条件（但它仍称为正型）：每个次晶格（A 或 B）中必须有足够浓度的磁性离子，以使得另一次晶格的离子磁矩保持（同向）平行排列。——但 $ZnFe_2O_4$ 的 A 次晶格中，磁性离子的浓度为 0（ Zn^{2+} 无磁性），不足以通过“相邻磁矩 NS 磁极相吸引”来使得 B 次晶格中的所有 Fe^{3+} 的磁矩平行排列（同一次晶格内平行地、但相邻次晶格反平行地），以最大程度地降低体系能量。

此时 B 次晶格中各个 Fe^{3+} 的磁矩应该是自由的，（它们离次近邻的有磁矩的同类 B 次晶格，也有相当的距离），为了降低体系能量，它们应该趋向于相邻离子磁矩反平行排列着，而一共有 16 个（偶数个） Fe^{3+} 离子，因此总的来说 8 上 8 下（fifty-fifty）。于是 $M = 2M_{Fe^{3+}}^{(0)} = 0$ 。

因而正型更像反铁磁，而不是铁磁。【但它不属于反铁磁：反铁磁是两套晶格互相反平行，这个是一套晶格内部无磁矩，一套内部一半与另一半反平行相抵】

②.反型： $M = M_B - M_A = [M_{M^{2+}} + M_{Fe^{3+}}] - (M_{Fe^{3+}}) = M_{M^{2+}} = M_{M^{2+}}^{(0)}$ 。

代表：(Cu、Co)NiFe₂O₄，其 $\delta = 0$ ，理论值 $M = 5\mu_B$ ，转变温度 T_M 为 590°C。【磁化强度的单位怎么可能是磁矩的单位：玻尔磁子呢？——可能这里的 M 指的是一个晶格内的磁矩之和，而不是纯粹的单位体积，这一点可以从 5 这个数看出来。】

③.混合型： $M = M_B - M_A = [M_{M^{2+}} + M_{Fe^{3+}}] - (M_{M^{2+}} + M_{Fe^{3+}}) = [(1 - \delta)M_{M^{2+}}^{(0)} + (1 + \delta)M_{Fe^{3+}}^{(0)}] - (\delta M_{M^{2+}}^{(0)} + (1 - \delta)M_{Fe^{3+}}^{(0)}) = (1 - 2\delta)M_{M^{2+}}^{(0)} + 2\delta M_{Fe^{3+}}^{(0)}$ 。

代表： $(Mg)MnFe_2O_4$ 。

2.石榴石类铁氧体：

(1).石榴石： $(FeMn)_3Al_2(SiO_4)_3$ ；石榴石类： $R_3^{3+}Fe_5^{3+}O_{12}^{2-}$ 。【R 相当于 FeMn， Fe_5^{3+} 相当于 Al_2Si_3 】

R 为 Y(钇, 无磁性)或稀土元素(有磁矩)，一个晶胞有 $R_3^{3+}Fe_5^{3+}O_{12}^{2-} \times 8 = 24$ 个 R、40 个 Fe。与尖晶石类铁氧体类似，也是 R、Fe 填 O 的空隙，只不过除了四&八外，还填十二。【这两类铁氧体的每个晶胞的离子数似乎都是化学式 $\times 8$ ？】

四面体中心位置称为 d 位置，八面体中心即 a 位，十二面体中心=c 位。由于它不像尖晶石类铁氧体，不分那么多型，其每一类次晶格中只有 1 种离子：40 个 Fe^{3+} 分别以 24 个占满了所有 d 位(四面体中心；即原 A 位())；有点像之前的反型- -)，16 个占满了所有 a 位(八面体中心；即原 B 位[]；比之前反型的 B 位还纯粹- -)；而 24 个 R^{3+} 占满了所有 c 位(十二面体中心；{ })。即 $\{R_3^{3+}\}[Fe_5^{3+}](Fe_3^{3+})O_{12}^{2-}$ 。——这就很有意思了，这就是石榴石的比例啊： $(FeMn)_3Al_2(SiO_4)_3$ 之 $FeMn:Al:Si=3:2:3$ 。

即，石榴石铁氧体不像尖晶石铁氧体，不存在反型或混合型，即不存在 A-B 交换即 24c-16a 交换或 24c-24d 交换的情况；但可以有离子取代发生，即 24c 中的 R 可以由 Y 和稀土元素共同组成，而 16a 和 24d 中的 Fe 也可分别由 Fe 和 M(如 Al 等)共同组成，但 R 类与 Fe 类之间不能互换。

(2).磁矩的计算：

无论 24c 位是否引入磁性稀土离子，16a 位和 24d 位两种次晶格的磁矩均反向平行。且若引入的是磁性离子，则磁性离子的磁矩也应与相邻的次晶格的反平行(但有的不是)。也就是说， $24d-16a-24c = \uparrow-\downarrow-\downarrow$ 。因此 $M = |M_{24d} - M_{16a} \pm M_{24c}|$ 。

【虽然看上去若引入的是 Y 这种无磁性的离子的话，按照上一次的逻辑，其相邻次晶格 16a 理应是内部一半 \uparrow + 一半 \downarrow 的，但不要忘了其相邻次晶格 16a 两旁另一个方向还有一个有磁性的相邻次晶格 24d。——注：默认邻近顺序为(24d-16a-24c)-(24d-16a-24c) = ($\uparrow-\downarrow-\downarrow$)-($\downarrow-\uparrow-\downarrow$)，或($\uparrow-\downarrow-\downarrow$)-($\uparrow-\downarrow-\downarrow$)等，而且是三维的，理应更复杂，比如是环形围绕的，而不是带状的】

①.如果 $R=Y$ ，则 $M=(M_{24d}) - [M_{16a}] \pm \{M_{24c}\} = 3M_{Fe^{3+}}^{(0)} - 2M_{Fe^{3+}}^{(0)} \pm 3M_{R^{3+}}^{(0)} = M_{Fe^{3+}}^{(0)} = 5\mu_B$ 。【其中， $M_{Fe^{3+}}^{(0)}$ 、 $M_{R^{3+}}^{(0)}$ 规定为相同晶胞内，数量为 8 的“离子 A”的磁矩之和 $M_A = M_A^{(0)}$ 。】

②.如果 $R=\text{稀土}$ ，则 $M=|(M_{24d}) - [M_{16a}] \pm \{M_{24c}\}| = |3M_{Fe^{3+}}^{(0)} - 2M_{Fe^{3+}}^{(0)} \pm 3M_{R^{3+}}^{(0)}| = |M_{Fe^{3+}}^{(0)} \pm 3M_{R^{3+}}^{(0)}|$ 。由于实际上有可能是减 $3M_{R^{3+}}^{(0)}$ ，且 $3M_{R^{3+}}^{(0)}$ 可能比 $M_{Fe^{3+}}^{(0)}$ 大(即使铁离子磁性很强，但三倍的稀土磁性，可能超过它)，因此得取绝对值。

3.磁铅石类铁氧体：

(1).磁铅石： $Pb(Fe_{7.5}M_{3.5}Al_{0.5}Ti_{0.5})O_{19}$ ；磁铅石类： $M^{2+}B_{12}^{3+}O_{19}^{2-}$ 。【M 相当于 Pb，B 相当于下角标之和=12 的 4 种三价金属离子 $Fe_{7.5}M_{3.5}Al_{0.5}Ti_{0.5}$ 】

M 可以是 Ba、Sr、Pb；B 可以是 Fe^{3+} 、 Al^{3+} 、 Cr^{3+} 、 Ga^{3+} 等，一个晶胞有 $M^{2+}B_{12}^{3+}O_{19}^{2-} \times 2 = 2$ 个 M、24 个 B、38 个 O。由于重金属离子 Ba^{2+} 、 Sr^{2+} 、 Pb^{2+} 半径接近 O^{2-} 半径，因此与尖晶石类铁氧体稍有不同，只有 Fe 填 O^{2-} 的空隙，而 M 无法进入空隙，只好占据骨架上的一些 O^{2-} 的位置，共同参与密堆积。【这下是 $\times 2$ 而不是 $\times 8$ 了】

①.对于钡铁氧体 $Ba^{2+}Fe_{12}^{3+}O_{19}^{2-}$ ：

X-射线分析得，在六角晶轴(c 轴)方向，一个晶胞有 10 个 O^{2-} 层，原本每层 4 个 O^{2-} ，共 40 个。但每隔 4 个 O^{2-} 层，就有 1 层中的某个 O^{2-} 被 Ba^{2+} 占据，因此对于层种类来说，分为 1,4,1,4；对于骨架来说，对应层的 O^{2-} 个数为 3,16,3,16，对应层的 Ba^{2+} 个数为 1,0,1,0。

每个 4 层无 Ba^{2+} 的晶块，称为尖晶石块。它只包含 O^{2-} 骨架和 9 个填充物 Fe^{3+} ，其中的 Fe^{3+} 所占的 A,B 位比例为 2:7。

每个 Ba^{2+} 层，含有 3 个 O^{2-} 、3 个 Fe^{3+} ，且后者所占的 A,B 位比例为 2:1。【可知 12×2 个 Fe^{3+} 在 10 层之间不是均分的：3,9,3,9=(1,3,1,3)*3≠(1,4,1,4)*?】

因此，一个晶胞中 Fe^{3+} 的 A:B=2:7+2:1=4:8，而 A,B 位(上的 Fe^{3+})磁矩相反，净剩 4 个 Fe^{3+} 的 $M=20\mu_B$ 。

3.6 直接交换作用——完善 3.3(、3.4)

分子场理论成功地解释了铁磁体内存在自发磁化 M_s ，以及依赖于温度的关系。但分子场理论并未提及和阐述外斯分子场 H_{mf} 的来源和本质。只有量子力学建立起来后，才认识到：铁磁性自发磁化 M_s 起源于电子间的静电相互作用。

一.交换作用模型

1.氢分子体系：

考虑氢分子 H_2 中，两个电子 e 间的相互作用：两个原子核 A, B ，分别拥有一个电子 a, b 。

$\varphi_A(a) = \varphi_A(x_a, y_a, z_a)$ 为 A 原子中电子 a 的波函数，同理 $\varphi_B(b)$ 。于是氢分子系统的波函数，可能会被经典地认为 $\varphi_0(x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b) = \varphi_A(a)\varphi_B(b)$ ，它能不能归一化我们暂且不说(适当系数理应可以)。

1).在量子力学中，由于电子具有完全相同的内禀属性(e, q, s, μ, τ 等)，称其为一种全同粒子。在全同粒子组成的体系中，任何可观测量，如哈密顿量(能量量纲；以及概率密度)，对于任何两个粒子的交换，是不变的。那么体系的薛定谔方程是不变的，那么解出来的波函数也将是同一个/同一些。

也就是说，描绘体系的量子态的波函数应满足：当任何两个粒子的全部坐标(空间坐标与自旋坐标)的同类量对应交换后，体系的波函数或者相同，或者相反(异号)，以保证其模的平方，即概率密度(这个可观测量)不变。

所以，全同粒子体系的交换对称性，给了波函数极强的限制，即要求体系的波函数对于任意两个粒子的交换，或者对称，或者反对称。

【电子是无属性的，它不“属于”哪个原子核，当它跑到电子云的交叠区域时，它本身并不知道属于谁，因而可能就跟着别的主人跑了，同时另外某个电子也经过交叠区域填补“空穴”，发生交换。】

2).若 φ_0 是体系的波函数，则它应该满足 $|\varphi_1(x_b, y_b, z_b; x_a, y_a, z_a)|^2 = |\varphi_A(b)\varphi_B(a)|^2 = |\varphi_0|^2$ 。但 $|\varphi_A(b)\varphi_B(a)| \neq |\varphi_A(a)\varphi_B(b)|$ ，因此 $|\varphi_1| \neq |\varphi_0|$ ，所以 φ_0 不能是体系的波函数，同理 φ_1 也不能是。

但它们的线性组合 $\psi_S = \varphi_A(a)\varphi_B(b) + \varphi_A(b)\varphi_B(a)$ 、 $\psi_A = \varphi_A(a)\varphi_B(b) - \varphi_A(b)\varphi_B(a)$ 可以是。 ψ_S 称为对称函数，对应两个 e 的反平行自旋态($S=S_a+S_b=0$)； ψ_A 称为反对称函数，对应两个 e 的平行自旋态($S=1$)。【S: Simultaneous? A: Anti-?】

3).只考虑轨道与轨道之间的库伦静电相互作用(忽略轨-轨、旋-轨和旋-旋的磁相互作用)，则体系的哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_b = (-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla_a^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_a}) + (-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla_b^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_b}) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\nabla_a^2 + \nabla_b^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b})$ ，这只是两个单独原子的 H 的简单叠加。

再考虑相互作用的话，A,B,a,b 四者间理应有 $C_4^2=6$ 个势能项，其上只包含了其中的两种库伦引力势能 A-a 和 B-b，还需要补上 A-b、B-a 两个引力势能项 $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{Ab}}$ 、 $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{Ba}}$ ，以及 B-A、b-a 两个斥力势能项 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ 、 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 。

于是， $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\nabla_a^2 + \nabla_b^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{Ab}} - \frac{1}{r_{Ba}})$ 。代入定态的薛定谔方程 $Hu = Eu$ ，解得本征函数 ψ_S 或者说对称态($S=0$)，所对应的本征值/本征能量 $E_S = 2E_0 + \frac{e^2}{R} + K + A$ ；反对称态($S=1$)所对应的本征函数 ψ_A ，所对应的本征能量 $E_A = 2E_0 + \frac{e^2}{R} + K - A$ 。【不知道 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 哪里去了，量纲上有点问题；这里的 E_S, E_A 是轨道波函数 ψ_S, ψ_A 对应的能量，是总波函数 ψ_A (\neq 轨道的 ψ_A)的能量 E 的两种可能的取值(但其实 E 的推导中我们并未考虑电子的自旋)；奇怪的是，对称=反平行，平行=反对称；这可能是因为对称指的是轨道 or 自旋 or 总波函数的线性组合中，符号为正，二者之和；而平行指的是自旋波函数的线性组合中，下角标代表的自旋方向相同，它在反对称的单态中、对称的三重态中，均有存在(见下一页)；而要想总波函数是反对称的，则轨道对称时，自旋一定是反对称的！而自旋的反对称就一、一对应了自旋反平行这一单态！——所以当轨道对称时，自旋一定反平行；而轨道反对称时，自旋一定平行！】

【——考虑 4).后算得 $K + A$ 和 $K - A$ 下面还有个分母： $\frac{K+A}{1+\Delta^2}$ 、 $\frac{K-A}{1-\Delta^2}$ ，而 Δ 中就包含氢原子 A,B 的总波函数 ψ_A 们，是它们的重叠积分。而原子(总)的 ψ_A 中包含轨道和自旋之积，因此这样才算考虑了自旋；不过可忽略为不含 Δ 的形式，比如假设 Δ 中的两个原子的总波函数正交。】

其中 K 为静电能； A 是交换电子引入的能量， $A = \iint \varphi_A^*(a) \varphi_B^*(b) \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r_a} - \frac{e^2}{r_b} \right) \varphi_A(b) \varphi_B(a) dV = \iint \varphi_A^*(a) \varphi_B(a) \varphi_B^*(b) \varphi_A(b) \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r_a} - \frac{e^2}{r_b} \right) d\tau_1 d\tau_2$ ，称为交换积分。

【这有点像量子力学里才学的 $\langle f(x) \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) f(x) \psi(x) dx = \langle \psi(x) | f(x) | \psi(x) \rangle$ 哈】

4). 目前为止我们只考虑了轨道波函数的 ψ_S, ψ_A ，还需考虑自旋波函数 ψ_S, ψ_A ，并合成(相乘)出总波函数。

正如 a 可以处在 A 的电子云中： $\varphi_A(a)$ ，或处在 B 的电子云中： $\varphi_B(a)$ 一样； a 可处在上自旋态： $\varphi_{\frac{1}{2}}(S_a)$ ，或者下自旋态： $\varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a)$ 。总的来说也有共 4 种 belong 从属关系：括号内的坐标 $\in \varphi$ 的下角标。【可见自旋坐标 S_a 也是一种坐标，并列于空间坐标 x_a, y_a, z_a ，与之共同描绘电子的属性】

因此正如 $\varphi_0(x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b) = \varphi_A(a) \varphi_B(b)$ 、 $\varphi_1 = \varphi_A(b) \varphi_B(a)$ ，也有诸如 $\varphi_{00}(S_a; S_b) = \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b)$ 、 $\varphi_{01}(S_a; S_b) = \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b)$ 、 $\varphi_{10}(S_a; S_b) = \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b)$ 、 $\varphi_{11}(S_a; S_b) = \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b)$ 。【前者二，后者四的原因是， a 处在 B 时， b 一定被排斥着处在 A ， a, b 的空间位置上的从属关系并不相互独立；但 a, b 的自旋坐标是相互独立的，谁取 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 都可，自由选取。】

其中 φ_{00} 、 φ_{11} 已满足对称性要求，但 φ_{01} 、 φ_{10} 不满足对称性要求，因此也需要凑出对称和反对称函数，其中对称函数有三种： $\psi_S = \begin{cases} \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b) \\ \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) \\ \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b) \end{cases}$ ，它们所对应的 S 均=1(不知道为什么不是 0 或 1)，但其 S_z 分别对应=1, -1, 0【这与之前的轨道 ψ_S 对应 $S=0$ 不同，但均是为了之后总的和谐：总的 S 对应 $S=0$ 】；反对称函数只有一个， $\psi_A = \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) - \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b)$ ， $S=0$ ， $S_z=0$ 。【这也与之前的轨道 ψ_A 对应 $S=1$ 相反】

5). 电子是费米子(自旋为 \hbar 的半奇数倍)，包括轨道波函数和自旋波函数的总波函数，必须取反对称的形式。因此总波函数 $\psi_A =$ 轨道对称波函数 $\psi_S \times$ 自旋反对称波函数 $\psi_A = [\varphi_A(a) \varphi_B(b) + \varphi_A(b) \varphi_B(a)] \times [\varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) - \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b)]$ ，或者 $\psi_A =$ 轨道反对称波函数 $\psi_A \times$ 自旋对称波函数 $\psi_S = [\varphi_A(a) \varphi_B(b) - \varphi_A(b) \varphi_B(a)] \times \begin{cases} \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b) \\ \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) \\ \varphi_{\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_b) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(S_a) \varphi_{\frac{1}{2}}(S_b) \end{cases}$ 。

因此，总波函数 ψ_A 对应的能量 E ，可能取轨道对称波函数 ψ_S 所对应的 E_S ，它是单重态，旗下只有 $S=0$ 、 $S_z=0$ ；也可能取轨道反对称波函数 ψ_A 所对应的 E_A ，它是三重简并态，对应 $S=1$ 、 $S_z=1, -1, 0$ 。【可能是因为总能量里面轨道能量贡献得多，因而总能量的符号 E_S 便对应轨道的 E_S ，而不是自旋所引入的能量 E_A 。】

6).因 S^2 的本征值为 $S(S+1)$ 、 S_a^2, S_b^2 的本征值均为 $s(s+1)=\frac{3}{4}$ 【这或许来源于数学物理方法之球函数方程】；而 $S=S_a+S_b$ ，因此 $S_a^2+S_b^2+2S_aS_b=(S_a+S_b)^2=S^2$ 的本征值为 $S(S+1)$ ， $\therefore 2S_aS_b$ 的本征值为 $S(S+1)-\frac{3}{2}$ 。于是，当 $S=0$ 时， $2S_aS_b$ 的本征值为 $-\frac{3}{2}$ ；当 $S=1$ 时， $2S_aS_b$ 的本征值为 $\frac{1}{2}$ 。【注：由于 $2S_aS_b$ 要么平行要么反平行，所以 $2S_aS_b=2S_a \cdot S_b$ ，也可写作后者；本质上我们不能说 $2S_aS_b=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ ，只能说它的本征值是 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ ，设函数 $\&()$ 为“取本征值”，则 $\&(2S_aS_b)=\begin{cases} -\frac{3}{2}, S=0 \\ \frac{1}{2}, S=1 \end{cases}$ 】

则 $-\left[\frac{1}{2} + \&(2S_aS_b)\right]=\begin{cases} 1, S=0 \\ -1, S=1 \end{cases}$ 。于是之前的 $E=\begin{cases} E_S, S=0 \\ E_A, S=1 \end{cases}$ ，可被合成为一个统一的式子 $E=2E_0 + \frac{e^2}{R} + K - \left[\frac{1}{2} + \&(2S_aS_b)\right]A=2E_0 + \frac{e^2}{R} + K - \frac{1}{2}A - \&(2S_aS_b)A$ 。我们定义 $-\&(2S_aS_b)A$ 为交换能 E_{ex} (ex: exchange)。

它可推广到多电子的原子系统中去： $E_{ex}=-2 \sum_{i<j}^{\text{近邻}} A_{ij}S_iS_j$ ，其中 A_{ij} 表示第 i 个原子与第 j 个原子可能非同类； $i<j$ 表示同样两个原子只算一次；“近邻”表示不要求高精度的情况下，只考虑最近邻的一对对原子，组成的集合。【这是海森堡的交换模型，需满足两点假设，1.每个原子仅有 1 个电子对铁磁性有贡献；2.不存在两个这样的电子同处在一个原子中】

从 E 的统一形式来看，氢分子的基态能量 E 与两个电子的自旋相对取向有关，自旋单重态(氢分子) $S=0$ 和自旋三重态 $S=1$ ，分别对应 E 的分裂形式到底是 $+A$ (且 $A<0$ ，以使能量最低) 还是 $-A$ (且 $A>0$ ，以使能量最低)。【这话得反过来说，先是算出 A 的正负，再用自发的能量最小值，来决定 E 的分裂形式该选哪个使得体系能量最低，判断是 $+A$ 还是 $-A$ ，再看自旋是平行还是反平行——说到底 A 直接决定了 S 】

2.总结:

1).反铁磁类物质中 $A<0$ ， E_S 低，根据能量最低原理， $E=E_S$ ， $\therefore S=0$ ，自旋反平行 为基态，有反铁磁性自发磁化；铁磁性物质中 $A>0$ ， E_A 低，根据能量最低原理， $E=E_A$ ， $\therefore S=1$ ，自旋平行为基态，有铁磁性自发磁化。【简而言之： $A>0$ 时，最近邻原子的磁矩取向相同，从而产生(铁磁性)自发磁化】

2).若没有电子云交叠，则没有自发磁化。即使有原子磁矩，但之间没有相互作用，随机排布，因而总的呈磁性。

3d 族(4d、5d、6d)元素 d 轨道的 l 较大，轨道非常椭圆，并且在外层，可以与其他离子/原子的 3d 轨道交叠/伸手握手；而虽然 4f 更加狭长、扁，但它们已经属于内层电子了，不会与另外原子内层的 4f 相互作用。

3).铁磁性条件：①.原子具有磁矩(必要条件)；②. $A > 0$ 。(1).电子波函数(的模)在核附近的值较小，在两个原子中间区域值较大。(2).两核之间的间距 a ，适当地大于电子轨道半径，但不能过大，也不能过小。【其实峰值在 $1/2$ 原子核-原子核间距附近，已经暗示这点：半径在 $1/2 \sim 1$ 倍间距之间】

若画出 3d 族元素的 $r_{ij}-A$ 图，随着横坐标两原子核间距 r_{ij} (其实是晶格常数 a /电子平均轨道半径； a 即最近邻原子间距 R)从 0 开始的增大，交换积分 A 先从负值升到正值，到达最高点后，下降并逐渐趋于 0。

Mn 的 r_{ij} 较小，对应的 A 为负值，因此相邻原子呈自旋反平行(对于多电子体系，这里应该是指核外未充满壳层电子的总自旋情况)，宏观上呈现反铁磁性；Fe 与 Co 分居曲线最高点左侧、右侧，且 Co 的 A 值比 Fe 的更大，它俩都呈现铁磁性，且 Co 因更高而更铁磁性一些；Ni 的 r_{ij} 比 Co 更大， A 值比 Fe 更小。

3.7 超交换作用——完善 3.4、3.5

主要解释反铁磁和亚铁磁的自发磁化 M_s 由来。【直接交换作用主要解释铁磁，也以 $A < 0$ 解释了点反铁磁？】

反铁磁性物质(如 MnO、CrO、CoO)属于立方晶系，磁性离子 M^{2+} 与非磁性离子 O^{2-} 相间排列，每两个 M^{2+} 间总有隔着一个大颗粒 O^{2-} 。因此反铁磁(以及之后的亚铁磁——铁氧体中也有 O^{2-} 隔着)晶体内的自发磁化 M_s ，不能用直接交换作用模型解释。

$M^{2+}-O^{2-}-M^{2+}$ 存在两种键角， 180° 或者 90° ；考虑 180° 的 $Mn^{2+}-O^{2-}-Mn^{2+}$ (因为该键角成 90° 时，电子迁移概率最小， 180° 时迁移概率最大)：基态时 Mn^{2+} 的未充满壳层的电子组态为 $3d^5$ ，5 个电子自旋向上；基态 O^{2-} 的最外层电子组态为 $2p^6$ ，后者的旋、轨角动量均为 0，没有净的自旋磁矩，没有磁性。

但考虑 O^{2-} 与其旁边的某一个 Mn^{2+} ，二者电子云交叠， O^{2-} 的 2p 电子便可能迁移到 Mn^{2+} 的 3d 轨道上，使得整个体系变成含有 Mn^{1+} 和 O^{1-} 的激发态。但若 O^{2-} 给 Mn^{2+} 一个自旋朝上的电子，则原有 5 个上的 Mn 的能量会升(得更)高；因此一般更有利于自旋朝下的电子从 O^{2-} 中到 Mn^{2+} 中去(配对成 $5\uparrow 1\downarrow$)。

当 MnO 处于激发态时， O^{1-} 最外层电子组态为 $2p^5$ ，未满，有磁矩，便可能与另一个 Mn^{2+} 的 $3d^5$ 中的电子，发生直接交换作用。其交换积分 $A < 0$ ， O^{1-} 与 Mn^{2+} 的自旋反平行。而得到电子的那个 Mn^{1+} 的 $3d^6(5\uparrow 1\downarrow)$ 与 O^{1-} 的 $2p^5(3\uparrow 2\downarrow)$ 自旋平行(我猜的)，因此 O^{1-} 两端的 Mn^{2+} 与 Mn^{1+} 自旋反平行，最终 MnO 呈反铁磁性。【在这里我没有考虑 O^{1-} 的磁矩，我觉得相比于两个铁磁性离子 M^{2+} 和 M^{1+} ，它的磁矩的值应该不大；但 O^{1-} 的磁矩理应帮助 M^{2+} 和 M^{1+} 其中较弱的之一，与另一个较强的抵消，形成反铁磁而不是亚铁磁】

更一般地，根据洪特规则以及超交换作用原理，对于其他化合物的铁族金属离子的 $3d^n$ 层电子数 n：

若 $n > 5$ ，2p 激发到 3d 的电子与原 3d 层电子自旋方向相反(洪特规则)，但因此 O^{1-} 与 M^{1+} 自旋方向相同。若 O^{1-} 与 M^{2+} 的 $A < 0$ ，对应反铁磁； $A > 0$ ，对应铁磁。

【这里的 A 均指的是 O^{1-} 与 M^{2+} 而非 M^{1+} 的交换积分】

【在 $n \geq 5$ 时，我觉得 O^{1-} 与 M^{1+} 是永远自旋平行的 $[(5\uparrow(1+m)\downarrow)=\uparrow$ 与 $(3\uparrow 2\downarrow)=\uparrow, m \geq 0$ ，而且 M^{1+} 比磁性 M^{2+} 弱]，无论M是什么具体元素，以至于其所导致 A 的正负如何，均有： $A < 0$ 导致 O^{1-} 与 M^{2+} 反平行+ $n \geq 5$ 导致 O^{1-} 与 Mn^{1+} 平行= M^{2+} 与 Mn^{1+} 反平行=反铁磁；同理 $A > 0$ ，反铁+反铁=铁磁】

若 $n < 5$ ，2p 激发到 3d 的电子与原 3d 层电子自旋方向相同，但因此 O^{1-} 与 M^{1+} 自旋方向相反。若 O^{1-} 与 M^{2+} 的 $A < 0$ ，对应铁磁； $A > 0$ ，对应反铁磁。【在 $n < 5$ 时，我觉得 O^{1-} 与 M^{1+} 是永远自旋反平行的 $[(5-m)\uparrow)=\uparrow$ 与 $(2\uparrow 3\downarrow)=\downarrow, m \geq 0$ ，而且 M^{2+} 比磁性 M^{1+} 弱]；这样 $A < 0$ 时，才负负得正、 $A > 0$ 时，才负正得负】

比如：铁→铁磁性；四氧化三铁→反铁磁性。【这样一来，我们似乎得用自己的理论拯救一个反铁磁性物质了：CrO。——这家伙不像 Mn 或 Fe 或 Co，它的 $n < 5$ ，那么为了使得这家伙呈现反铁磁性，必须有 O^{1-} 与 Cr^{2+} 的 $A > 0$ 。而不像 $n \geq 5$ 的反铁磁性物质中的元素们与 O^{1-} 的 $A < 0$ 。】

解释亚铁磁：氧离子两边的 AB 位离子不同，不都是两个 M 离子了，而是一个 N 离子、另一个 M 离子。剩余的解释差不多一样。

3.8 RKKY 交换作用——完善 2.3

主要解释稀土族元素金属的磁性由来。因为它们并不能参与直接交换作用(甚至没法像 3.7 那样间接地参与：即使通过氧原子，其自身也得有伸出手这个过程，然而它不能伸手)。原子间距大，加上 4f 是内层电子，外面还有 5s5p5d6s 电子屏蔽。【很奇怪，查阅资料《凝聚态磁性物理》，居然稀土族 $5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$ 中还有 $5d^1$ 的存在...明明 $4f < 5d$...而 4f 或 5d 也没有半满...那是咋回事?】

A 原子的 4f 电子影响了其 6s 电子自旋，其 6s 电子作为媒介，作为传导电子四处游动，与近邻的 B 原子的 4f 电子发生交换作用（或许 A 的 6s 来 B 之前，B 的 6s 已经走了，以至于甚至都没有谁属于谁的说法了...），将 A 原子的 4f 电子的自旋状态传递和影响到 B 原子的 4f 电子；而 B 原子的 6s 电子也游动到 A 原子，使得 B 原子的 4f 电子的自旋状态影响 A 原子的 4f 电子。

传递的不是电子的电荷属性，而是它的自旋属性。自旋电子学，许多电子器件的基础，很大的发展方向。

第四章 铁磁体中的能量

从热力学的观点看，铁磁体磁畴结构的形成、磁化曲线/磁滞回线上每一点，都代表铁磁体的平衡状态。在平衡状态下，系统的总自由能 $F = F_{\text{ex}} + F_{\text{k}} + F_{\text{σ}} + F_{\text{H}} + F_{\text{d}}$ ，总等于极小值——而找出 F 达到极小值的条件，就能知道此时的磁畴结构、磁化过程【或者这里的 F 更是指单位体积的自由能，即自由能密度】。【当 $T \ll T_c$ 时，T 不大，固体(而且还是晶体)的 S 也不高，TS 的值及其变化量均不大，因此也可有 $F = U - TS \approx U = U_{\text{ex}} + U_{\text{k}} + U_{\text{σ}} + U_{\text{H}} + U_{\text{d}}$ 。不过《凝聚态磁性物理》一书中均用的是 F，而这里我们用的 E，或许它就是 U 或者 F 吧。】

4.1 交换能

经典理论下(连续形式)，总交换能 $E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} S_i S_j \cos \phi_{ij}$ ，总交换能变化量为 $\Delta E_{\text{ex}} = 2 A s^2 a^2 \sum_i [(\nabla \alpha_{i1})^2 + (\nabla \alpha_{i2})^2 + (\nabla \alpha_{i3})^2]$ 【A的单位是 J， a^2 的单位 m^2 与后面的 $(\nabla)^2$ 的单位约掉；注意没有负号】，不同晶格(ζ)的单位体积的交换能变化量 $\frac{d\Delta E_{\text{ex}}}{dV} = \frac{\zeta A s^2}{a} [(\nabla \alpha_1)^2 + (\nabla \alpha_2)^2 + (\nabla \alpha_3)^2]$ 。【 $\Delta V = a^3$ ；而 d 则相当于将 ΔE_{ex} 表达式中的求和符号 \sum_i 去掉了； $2 \rightarrow \zeta$ 是因不同晶格类型计算过程/结果不同】

其中 A 为对应空间坐标处的交换积分，s 即 $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$ 的大小 s_i, s_j ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为原子磁矩在 x, y, z 轴 3 个方向的方向余弦(球坐标系表示)：

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \alpha_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \alpha_3 = \cos \theta \end{cases}$$

a 为晶格边长(晶格

常数)， $\zeta = \begin{cases} 1, \text{简单立方} \\ 2, \text{体心立方(Fe)} \\ 4, \text{面心立方(Ni)} \\ 2\sqrt{2}, \text{六方晶系(Co)} \end{cases}$ ， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ 。

如果原子磁矩都朝向同一个方向，则 $(\nabla \alpha_1)^2 + (\nabla \alpha_2)^2 + (\nabla \alpha_3)^2 = 0$ ，则 $\frac{d\Delta E_{\text{ex}}}{dV} = 0$ ， $\Delta E_{\text{ex}} = \int d\Delta E_{\text{ex}} = \int \frac{d\Delta E_{\text{ex}}}{dV} \cdot dV = 0$ 。此时交换能 $E_{\text{ex}} = E_{\text{ex}0}$ 是各向同性的：它只强调磁矩与磁矩之间同向，它们具体(同向地)朝向哪个方向无所谓。

交换能 E_{ex} 、 $E_{\text{ex}0}$ 是铁磁材料固有的能量。

【关于交换能微分形式的由来：铁磁晶体中，一个磁畴内部原子磁矩并非完全一致(自旋不完全平行所引起的 ΔE_{ex} 项)，但邻近格点间电子自旋的夹角一般非常小，近似认为电子自旋取向随格点连续变化。——这样的话，我们计算交换能时，不需

$E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} S_i S_j \cos \phi_{ij}$ ，而是 $E_{\text{ex}} = E_{\text{ex}0} + \Delta E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} S_i S_j + \int \frac{d\Delta E_{\text{ex}}}{dV} \cdot dV$ ：

也就是说，由于 $E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$ 需遍及所有不重复的一对对相邻原子，这无法做到。然而我们又想精确地确定“磁矩不完全平行”所导致的这一部分 $\int \Delta E_{\text{ex}}$ ，所以我们需要知道 ΔE_{ex} 的表达式：

以体心立方为例，电子 i 的自旋矩 α_i 的方向余弦 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，所以 $\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$ ；i 的近邻电子 j 有 8 个(配位数为 8)，其 $\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3})$ 中的三者可分别由 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ 展

开——因为以 α_{j1} 为例 $\alpha_{j1}=\alpha_{j1}(x,y,z)$ 、 $\alpha_{i1}=\alpha_{j1}(x_0,y_0,z_0)=\alpha_{j1}(x_i,y_i,z_i)$ ，所以根据电动力学中的三元函数的泰勒展开 $f(\mathbf{R})=f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+[(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\nabla]f(\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2!}[(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\nabla]^2f(\mathbf{x}_0)+\dots$ ，并设 $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0=(x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i)=(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$ ，有：

$$\begin{aligned}\alpha_{j1} &= \alpha_{j1}(x_0, y_0, z_0) + [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla] \alpha_{j1}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2!} [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla]^2 \alpha_{j1}(x_0, y_0, z_0) \\ &+ \dots = \alpha_{i1} + [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla] \alpha_{i1} + \frac{1}{2!} [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla]^2 \alpha_{i1} + \dots, \text{同理, 有} \\ \alpha_{j2} &= \alpha_{i2} + [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla] \alpha_{i2} + \frac{1}{2!} [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla]^2 \alpha_{i2} + \dots, \alpha_{j3} = \alpha_{i3} + [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla] \alpha_{i3} + \\ &\frac{1}{2!} [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla]^2 \alpha_{i3} + \dots, \text{其中 8 个位于正方体顶点的 } j \text{ 均满足 } |x_{ji}| = |y_{ji}| = |z_{ji}| = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

于是 $E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} s_i s_j \cos \phi_{ij} = -2 A s^2 \sum_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \cdot \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$ ，其中 $\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \cdot \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} = \alpha_{i1} \alpha_{j1} + \alpha_{i2} \alpha_{j2} + \alpha_{i3} \alpha_{j3}$ ， $\Delta E_{\text{ex}} = E_{\text{ex}} - E_{\text{ex}0}$ (减去常数项 $E_{\text{ex}0}$) $= 8 \cdot [\alpha_{i1} \frac{1}{2!} (x_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + z_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i1} + \alpha_{i2} \frac{1}{2!} (x_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + z_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i2} + \alpha_{i3} \frac{1}{2!} (x_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + z_{ji}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i3}]$ (考虑 8 个 j 电子的对称性 (这里的对称性或许指的是：8 个原子的磁矩相对于体心原子的磁矩，在各个方向上的小振动概率相等，因此只剩下二次项中的平方项)，一次项和二次项中的交叉项消失) $= 8 \cdot \frac{1}{2!} (\frac{a}{2})^2 [\alpha_{i1} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i1} + \alpha_{i2} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i2} + \alpha_{i3} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \alpha_{i3}] = a^2 [\alpha_{i1} \nabla^2 \alpha_{i1} + \alpha_{i2} \nabla^2 \alpha_{i2} + \alpha_{i3} \nabla^2 \alpha_{i3}] = a^2 \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \cdot \nabla^2 \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$ ，利用 $\nabla^2 (\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2) = \nabla^2 (\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \cdot \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}) = \nabla^2 1 = 0$ ，有 $\nabla \cdot \nabla (\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2) = \nabla \cdot [2\alpha_{i1} \nabla \alpha_{i1} + 2\alpha_{i2} \nabla \alpha_{i2} + 2\alpha_{i3} \nabla \alpha_{i3}] = 2[(\alpha_{i1} \nabla^2 \alpha_{i1} + \nabla \alpha_{i1} \cdot \nabla \alpha_{i1}) + (\alpha_{i2} \nabla^2 \alpha_{i2} + \nabla \alpha_{i2} \cdot \nabla \alpha_{i2}) + (\alpha_{i3} \nabla^2 \alpha_{i3} + \nabla \alpha_{i3} \cdot \nabla \alpha_{i3})]$ ，得到 $\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} \cdot \nabla^2 \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} = \alpha_{i1} \nabla^2 \alpha_{i1} + \alpha_{i2} \nabla^2 \alpha_{i2} + \alpha_{i3} \nabla^2 \alpha_{i3} = -[(\nabla \alpha_{i1})^2 + (\nabla \alpha_{i2})^2 + (\nabla \alpha_{i3})^2]$ ，于是 $\Delta E_{\text{ex}} = 2 A s^2 a^2 \sum_i [(\nabla \alpha_{i1})^2 + (\nabla \alpha_{i2})^2 + (\nabla \alpha_{i3})^2] = \sum_i \frac{2 A s^2}{a} [(\nabla \alpha_{i1})^2 + (\nabla \alpha_{i2})^2 + (\nabla \alpha_{i3})^2] \cdot \Delta V = \int \frac{d \Delta E_{\text{ex}}}{\Delta V} \cdot \Delta V = \int d \Delta E_{\text{ex}}$ ，注意，这里每一个 i，既对应一个处于体心的原子，又对应一个体心立方晶胞，即对应体积 $\Delta V = a^3$ 。【这样只取体心的原子，周围 8 个不算，然后再隔 4 个围成的正方形平面，又取最近的第二个体心原子，以及取这样的体积，而不是 $\Delta V = \frac{1}{8} a^3$ 或有重叠的 a^3 等，就是为了一对对的相互作用计数不重复：所有与体心原子已经相互作用过了的原子，不再计入体心原子。】

因此每一个小晶格的交换能变化量 $d \Delta E_{\text{ex}} = \Delta E_{\text{ex}i} = z A s^2 a^2 [(\nabla \alpha_{i1})^2 + (\nabla \alpha_{i2})^2 + (\nabla \alpha_{i3})^2]$ ，单位体积的交换能变化量 $\frac{d \Delta E_{\text{ex}}}{\Delta V} = \frac{z A s^2}{a} [(\nabla \alpha_1)^2 + (\nabla \alpha_2)^2 + (\nabla \alpha_3)^2]$ ，对于体心立方而言， $z=2$ ；简单立方 $z=1$ ；面心立方 $z=4$ 。公式的形式与晶格结构类型无关，不仅适用于立方晶系，也适用于六角晶系。】

4.2.0 各向异性引入

磁各向异性：铁磁体沿不同晶轴方向磁化时，磁化难易程度不同/磁化曲线不同。

磁各向异性(能)类型：包括**磁晶各向异性(能)**、**形状各向异性(能)**——退磁能(4.3)、**磁致伸缩——磁弹性能、磁应力能**等。

1. Fe 和 Ni 均是立方结构，有三个晶轴：(1,0,0)代表 x 轴方向(或 y, z 方向；即晶胞边长方向)；(1,1,0)代表面对角线方向；(1,1,1)代表体对角线方向，对应的各向异性称为**立方各向异性**；Co 属于六角晶系，(0,0,0,1)代表 z 轴方向，(1,0,1,0)代表横向(//底面的方向)，其各向异性称为**单轴各向异性**。

①. 对 Fe 而言：

在 H-M 图中，当横坐标 $H=0$ 时，沿着三根轴方向的纵坐标 $M(\mathbf{M} \text{ 分量}) \neq 0$ ，且互不相同——这意味着 Fe 的自发磁化方向，并不与三轴中任意一轴完全重合(否则就不是磁化曲线，而是 $M=M_s$ 这条直线了)，也不与任意一轴完全垂直(否则初始纵坐标 $M=0$)。

之后随着 H 的增加， \mathbf{M} 在(1,0,0)轴方向的投影，增长最快，很快达到 M_s ，并在之后保持水平；当 \mathbf{M} 加在(1,1,0)轴方向时，曲线在同一横坐标处，其纵坐标比之前的曲线略低，意味着如果在这附近取相同的积分限(M 为横坐标， H 为纵坐标；得沿着 $y=x$ 翻转 180° 来看)， $\int H dM$ 的值更大，磁化相同的程度，所花费的能量更多；当 \mathbf{M} 加在(1,1,1)轴方向时，曲线最低，磁化过程最难。

所以对于 Fe 而言，(1,0,0)是易磁化轴，简称易轴，沿着这轴能快速磁化到饱和；相应地，体对角线(1,1,1)为难轴。

②. 对 Ni 而言：

对于 Ni 而言，情况正好相反：(1,0,0)是难轴，(1,1,1)为易轴。【但区别并不明显，因此磁化曲线都靠得比较近】

③. 对 Co 而言：

(0,0,0,1)是易轴(单轴)，(1,0,1,0)是难平面。

2.磁晶各向异性大小/强弱：铁磁体在沿着不同方向(从 0;即 $\mathbf{M} \perp \mathbf{H}$ ，或者说磁畴取向初始随机?)磁化(到饱和;即 $\mathbf{M} // \mathbf{H}$)时，因方向不同而存在的能量差值。用磁晶各向异性常数 K 表示。

磁晶各向异性常数 K ：立方晶系 $K = \frac{1}{V} (\int_0^{M_s} H dM - \int_{0[1,1,1]}^{M_s} H dM - \int_{0[1,0,0]}^{M_s} H dM)$ ，Fe 的 $K > 0$ ，Ni 的 $K < 0$ ；单轴晶系 $K = \frac{1}{V} (\int_0^{M_s} H dM - \int_{0[1,0,1,0]}^{M_s} H dM - \int_{0[0,0,0,1]}^{M_s} H dM)$ ，Co 的 $K > 0$ 。【或者我们该更准确地写为 $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ ，以示 \mathbf{M} 到 \mathbf{H} 的投影 M_z 的变化量 dM_z ，乘上 \mathbf{H} 的值： $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = H dM_z$ 】

【其中的 $\frac{1}{V}$ 应该只作用于 \mathbf{H} ，因为 \mathbf{M} 中已经有 $\frac{1}{V}$ 了；这里的下角标 0 指引我认为初始状况是 $\mathbf{M} \perp \mathbf{H}$ ，因 \mathbf{M} 的投影为 0；但实际上这里并不是指 \mathbf{M} ，而是 $\mathbf{H}-\mathbf{M}$ 图中的 $\mathbf{H}=0$ 所对应的初始 \mathbf{M} (不一定=0)，即从退磁状态磁化到饱和所作的功；若磁体是非晶的，则 K 叫做磁各向异性常数】

【这里或许有 2 点问题， $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ 的单位本身就是能量密度了——正如热力学中的 $dW = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m}$ ，为什么还要在前面加一个 $\frac{1}{V}$ ？没有 μ_0 可以理解，单位制的问题；但没有负号是什么意思：在之后有出现外场能和等效场 $-\mu_0 \mathbf{H}_k \cdot d\mathbf{M}$ ，它是它么？但从磁化曲线的角度上，它代表的是面积，面积又恒正，没有矛盾——额，我知道是哪里出问题了：之后的俩是体系的势能(带负号的)，这个是外场对体系做的功，二者本身之和就=0...当然是相反数...；这里的 $\int_0^{M_s} \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ 即“磁化功”，而不是体系的势能。】

4.2 磁晶各向异性能

一.推导磁晶各向异性能的数学表达式的两个思想基础：

其一，磁晶各向异性能依赖于自发磁化强度矢量 $\mathbf{M}_s = M_s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ 【注：这不是指 M_s 是...的函数，而是 M_s 作为幅值去乘上该矢量】对 n 条晶轴的方向(方向余弦)，则单位体积内的磁晶各向异性能 F_K (我们暂且写作 E_K)也应是 α_i 的函数，即有 $F_K = F_K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ ；其二，利用特定晶体的对应对称性。比如当某些 α_i 取相反数时，新 \mathbf{M}_s 方向上的 F_K 与原来旧 \mathbf{M}_s 方向上的 F_K 可能会相同；或者 x, y, z 坐标系沿着 $(1, 1, 1)$ 旋转 120° 后，由新坐标系下的新 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ 们所表示的 F_K 仍然值不变。

二.立方晶体和六角晶体的磁晶各向异性能：

1.立方晶体的磁晶各向异性能

(1).对理想的(共顶点的三边与直角坐标系三坐标轴重合)立方晶系而言,

$F_K = F_K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = B_0 + B_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + B_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 + \dots$, 很奇怪对吧, 《磁性物理学》中是这么解释的: $\alpha_i < 1$, 所以可将其展开为级数。可能你会觉得 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 或许足足有 3 这么大, 哪里还能按它展开呢? 最多只能按某个 α_i 而不是所有 α_i 之和, 为自变量来展开呀...

其实它的意思不是这样, 我们来看看三元函数的泰勒展开: 认为 α_{i2}, α_{j2} 即 α_2 是 (x, y, z) 的函数, 则 $\alpha_{j2} = \alpha_{i2} + [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla] \alpha_{i2} + \frac{1}{2!} [(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}) \cdot \nabla]^2 \alpha_{i2} + \dots$, 类似地, 这里的 F_K 是 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的函数, 于是 $F_K = F_{K0} + [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \nabla] F_{K0} + \frac{1}{2!} [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \nabla]^2 F_{K0} + \dots = B_0 + B_1[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (1, 1, 1)] + B_2[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (1, 1, 1)]^2 + \dots$ ——即可以认为 $B_0 = \alpha_{i2}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相当于 x_{ji}, y_{ji}, z_{ji} ; 而 $\frac{\partial F_{K0}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F_{K0}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial F_{K0}}{\partial \alpha_3}$, 提到中括号前面去作为 B_1 , $\frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_1^2} = \frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_2^2} = \frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_3^2} = \frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_1 \alpha_2} = \frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_2 \alpha_1} = \frac{\partial^2 F_{K0}}{\partial \alpha_3 \alpha_1}$ 作为相同系数, 提到二次项的中括号前面, 与 $\frac{1}{2!}$ 相乘, 一起作为系数 B_2 。——所以, 事实上这是一个三元函数的泰勒展开, 而 $x_{ji} = \alpha_1 < 1$, $y_{ji} = \alpha_2 < 1$, $z_{ji} = \alpha_3 < 1$, 正是《磁性物理学》所想暗示的“自变量的微小变化量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ”。

在阐述了该式的合理性后, 展开时我们同样按照一次、二次、三次项的方式归类, 即有 $F_K = B_0 + B_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + [B_2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) + B_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)] + \dots$ 。
【其中的 B 们不再是之前的 B 们了】。

(2).根据立方晶体的对称性, 无论 x, y, z 三个坐标轴中哪个方向取反(朝其现有方向的反方向)[比如 x 轴取反(基底 $\mathbf{i} \rightarrow -\mathbf{i}$; 此时虽然不构成右手系了), 对应 $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$]; 还是其中任意两个坐标轴互换[比如 x 轴 $\leftrightarrow y$ 轴, 对应 $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$], F_K 的值均应保持不变。【这是因为, 无论用怎样的坐标系, 其所表示的方向是同一个方向($\frac{\mathbf{M}_s}{M_s}$ 的方向), F_K 应该是同一个 F_K 。——<所以按理说还应有更强的限制在里面, 如按照特定方式旋转坐标系(基基过渡、正交变换?), F_K 的值也应保持不变...??>】

也就是说, 数学上该函数应满足 $F_K(\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3) = \dots = F_K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $F_K(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3) = \dots = F_K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 。——于是, 前者就要求 F_K 单独对于每个均 α_i 是偶函

数，而后者则要求 F_K 具有轮换性，即不能缺斤少两：有 $\alpha_1^2\alpha_2^2$ 就必须有 $\alpha_1^2\alpha_3^2$ 和 $\alpha_2^2\alpha_3^2$ ，以保证多项式(以单项式为元素的集合)对于轮换操作是封闭的。

这样的话，抛弃所有不满足要求的单项式，如全部的一次项、二次项中的交叉项、所有的三次项、四次项中的非 $\alpha_1^2\alpha_2^2$ 型的交叉项(一个原则：任何一个出现的字母，其自己首先必须是偶数次方的，所以“三次方中的3”、“四次方中的211、31”、“五次方中的11111、2111、221、311、32、41、5”均含奇数次方而均不满足)....，就剩下了 $F_K=B_0+B_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+B_5(\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4)+B_6(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)+...$ 。

【 B_4 是所有3次方的系数； B_6 之于 B_5 正如 B_4 之于 B_3 一样，同次项往后顺延就是了】

因 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ ， $B_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)=B_3$ 可归于 B_1 ；因 $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)^2=\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4+\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2=1$ ，可知 $B_5(\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4)=B_5-B_5(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)$ ，一部分(B_5)可归入 B_0 ，另一部分 $-B_5(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)$ 可并入 $B_6(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)...$ 。

因此最终形式为 $F_K=K_0+K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)+K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)+...$ ，六次方项来源于原六次方项(还有 $A_3^2=6$ 个42和 A_3^3 个6?)，取到它已经足够精确(暗含它是同次方中最大的了?)。其中 K_0 是与方向无关的常数，它或许可以合并到 F_{ex} 中的 F_{ex0} 里去，而可以不在这里考虑它，这样的话， $\Delta F_K=F_K-K_0=K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)+K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)$ ，但常常直接用 F_K 表示 ΔF_K 。

K_1, K_2 也像之前的 K 一样称为磁晶各向异性常数，它们的单位均为 J/m^3 ，即能量密度的单位(所以这里的 F_K 也是自由能密度)。但 K_1, K_2 的表达式并不像 K 那样(有表达式但长得都不一样)，需要通过实验算出来(虽然 K 有表达式但也要通过实验得出...)。

【题外话： F_K 既可看做与 K 有关的能量(密度)，又可看做是 K (即 K_1, K_2)的函数】

(3).立方晶体的磁晶各向异性能(注意， F_K 在含义上是 ΔF_K)的计算：

①.沿[100]方向磁化：其实[100]可直接看做 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(1, 0, 0)=\mathbf{i}$ ，代入各 α_i 即有 $F_K=K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)+K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)=K_1(1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1)+K_2(1\cdot 0\cdot 0)=0$ 。

【也可由传统表达式写为 $F_K^{[100]}=K_0$ 】

②.沿[110]方向磁化： $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\frac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|}=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ， $F_K=K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)=F_K=K_1\alpha_1^2\alpha_2^2=\frac{1}{4}K_1$ 。【也可由传统表达式写为 $F_K^{[110]}-F_K^{[100]}=\frac{1}{4}K_1$ 】

③.沿[111]方向磁化： $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\frac{(1,1,1)}{|(1,1,1)|}=(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ， $F_K=K_1(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9})+K_2(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3})=\frac{1}{3}K_1+\frac{1}{27}K_2$ 。【也可由传统表达式写为 $F_K^{[111]}-F_K^{[100]}=\frac{1}{3}K_1+\frac{1}{27}K_2$ 】

谢 尘竹的一月半之游：2018/09/04~10/18

铁的易磁化轴为[100]，根据“平衡状态下，系统的总自由能 $F = F_{\text{ex}} + F_k + F_{\sigma} + F_H + F_d$ ，总等于极小值”，在其它自由能(密度)不变的情况下， F 会拉扯着 F_k 往下达到它的最小值，此时对应着铁磁体中的自发磁化矢量 \mathbf{M}_s 和磁畴取向，总是趋向于偏转到各个易磁化轴上(其上 $\Delta F_k = 0$)，使得 F_k 最小，以使得系统稳定(F 最小)。【“易”意味着平常就处于此状态，所以相对最“稳定”】

因此 $F_K^{[110]} - F_K^{[100]} > 0$ 【[110]的 F 比[100]的 F 大】，得到 $K_1 > 0$ 。同样的道理，Ni 因 $F_K^{[110]}$ 比 $F_K^{[100]}$ 更小，而 $K_1 < 0$ 。可见 K_1 的正负反映了[110]和[100]方向哪个是相对的易轴；而 $\frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{27}K_2$ 的正负反映了[111]和[100]方向哪个是相对的易轴；③.减去②.，得到的 $F_K^{[111]} - F_K^{[110]} = \frac{1}{12}K_1 + \frac{1}{27}K_2$ 的正负，可反映[111]与[110]哪个是相对的易磁化轴。

更准确地说， $K_1 > 0$ ，则[100]比[110]易； $\frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{27}K_2 > 0$ 即 $K_2 > -9K_1$ ，则[100]比[111]易； $\frac{1}{12}K_1 + \frac{1}{27}K_2 > 0$ 即 $K_2 > -\frac{9}{4}K_1$ ，则[110]比[111]易。如果列表表示的话：

立方晶系各向异性与 K_1, K_2 的关系

K_1	+	+	+	-	-	-
K_2	$(+\infty, -\frac{9}{4}K_1)$	$(-\frac{9}{4}K_1, -9K_1)$	$(-9K_1, -\infty)$	$(-\infty, -\frac{9}{4}K_1)$	$(-\frac{9}{4}K_1, -9K_1)$	$(-9K_1, +\infty)$
易	[100]	[100]	[111]	[111]	[110]	[110]
中	[110]	[111]	[100]	[110]	[111]	[100]
难	[111]	[110]	[110]	[100]	[100]	[111]

这个表的 K_2 一行的前三个有点“不数学”，但这是为了 K_2 的前三个区间与后三个区间，在数值上平移对称；而 $K_1 > 0$ 的三个红轴与 $K_1 < 0$ 的三个红轴沿 K_1 的 +- 分界线镜像对称、 $K_1 > 0$ 的三根绿轴 & 三根黄轴分别与 $K_1 < 0$ 的三根黄轴 & 三根绿轴沿 K_1 的 +- 分界线镜像对称； $K_1 > 0$ 的 3 个根绿轴与 3 根黄轴之间沿 \perp 纸面的轴旋转 180° 对称。

(4).磁晶各向异性常数的确定：

容易反解得 $K_0 = F_K^{[100]}$ 、 $K_1 = 4(F_K^{[110]} - F_K^{[100]})$ 、 $K_2 = 27(F_K^{[111]} - F_K^{[100]}) - 9K_1 = 27(F_K^{[111]} - F_K^{[100]}) - 36(F_K^{[110]} - F_K^{[100]})$ 。因此，可以通过实验测定 $F_K^{[100]}$ 、 $F_K^{[110]}$ 、 $F_K^{[111]}$ 并代入算出 K_0, K_1, K_2 。《磁性物理学》说，各 F_K 即为不同晶轴方向的磁化功 $W = \int_0^{M_s} H dM_z$ ，比如 $W^{[100]} = F_K^{[100]} = \int_{0[100]}^{M_s} H dM_z$ 等等。

不过这样一来， F_K 的单位就是 J 了，不再是自由能密度了(额，也是密度，而不是双重密度=)；不过这样便与 E_{ex} 的单位对应上了；并且与原 K 的表达式对应上了(只不过相差了一个因子 $\frac{1}{V}$)。

(5).在确定 K_0, K_1, K_2 后，可以将 $F_K = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)$ 随着方向 $\frac{\mathbf{M}_s}{M_s} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的变化，画出三维的矢量图来；或者用两个二维面上的矢量图合成之(如一个 x-o-y 面、一个 y-o-z 面)。

2.六角晶体的磁晶各向异性

(1).设 θ 为 $\frac{\mathbf{M}_s}{M_s} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 相对于易轴[0001]的夹角，则：【常数用 A 表示暗示着书上是把六角/单轴放在立方之前的，但老师之所以选择在这里讲，可能是因为 sin 不像方向余弦的缘故，第一印象不好】

①. $F_K^{[0]} = F_K(\theta) = F_K(\sin\theta) = A_0 + A_1\sin\theta + A_2\sin^2\theta + \dots$ 的关于 $\sin\theta$ 的幂级数形式，符合“思想基础”中的第一点： $F_K = F_K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ；因为对 z 轴，设 $\cos\theta = \alpha_3$ ，则 $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) = \alpha_1\cos\varphi = \alpha_2\sin\varphi$ ，其中 φ 为 $\frac{\mathbf{M}_s}{M_s}$ 到 x-o-y 面的投影，与 x 轴的夹角。可见 $90^\circ - \theta$ 即是 $\frac{\mathbf{M}_s}{M_s}$ 到难轴/难面[1010]的夹角，则 $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ 相当于另一种意义上的 α ，只不过是与面的方向余弦罢了；——之所以这么取面而不是 z 轴的方向余弦，是为了：

②.更重要的是， $F_K(\sin\theta)$ 也满足“思想基础”中的第二点：易轴[0001]是两个方向，而不是一个。那么 F_K 理应在 $\theta=0$ 和 $\theta=180^\circ$ 这两个方向上均达到最小值、在 $\theta=90^\circ$ 方向上达到最大值(对应难轴)。然而 $\sin\theta$ 本身就是个这样的函数。因此 $F_K(\sin\theta)$ 作为一个关于 $\sin\theta$ 的增函数(如果 k 都>0+升幂级数)，也将是这样的函数。【更准确地说，当 z 轴取反、使得 $\theta=180^\circ - \theta$ 时， F_K 的值必须保持不变，所以选用了 $\sin\theta$ 】

进一步地，由于 $F_K(\sin\theta) = A_0 + A_1\sin\theta + A_2\sin^2\theta + \dots$ 还得满足当 $\theta = -\theta$ 时，值不变(这个我就不太理解了，在数学上，球坐标系下，无论 $\mathbf{r}(\theta, \varphi, r)$ 是否关于 z 轴对称，即是否有 $\varphi = \varphi \pm 180^\circ$ ，均有 $\theta = \theta \in [0, 180^\circ] > 0$)，于是 $F_K(\sin\theta) = A_0 + A_2\sin^2\theta + A_4\sin^4\theta + \dots$ 。我们写作 $F_K = K_0 + K_1\sin^2\theta + K_2\sin^4\theta + K'_3\sin^6\theta + K_3\sin^6\theta\cos 6\varphi$ 。 $\cos 6\varphi$ 的出现意味着六角晶体在//[1010]方向上稍有不同，但也沿着某(x)轴对称。

一般我们只取到 $\sin^4\theta$ 项就已足够精确，于是 $F_K = K_0 + K_1\sin^2\theta + K_2\sin^4\theta$ ；同样有些地方或者有些人士，用 F_K 代表 $\Delta F_K = F_K - K_0 = K_1\sin^2\theta + K_2\sin^4\theta$ ，即省略掉 K_0 。

(2).易轴的确定：

并非所有晶体都像 Co 一样，[0001]为易轴；如**钴钡铁氧体**($\text{Co}_2\text{Ba}_3\text{Fe}_{24}\text{O}_{41}$ ；高频软磁材料)，它的易轴在[1010]这个面上，轴上却较难(是不是最难还不好说)；同样，甚至有些材料的易轴，既不在 $\theta=0^\circ$ 或 180° 上，又不在 $\theta=90^\circ$ 上，而是在该区间内的一个锥面上。——这说明， A_i 们不全是正值，否则最小值将在 $\theta=0^\circ$ 或 180° 时取得。

①.为此，假设，将 F_K 对 θ 求导，得到 $F'_K=2\sin\theta\cos\theta[K_1+2K_2\sin^2\theta]$ 。如若像我们之前那样认为 K_1, K_2 均 >0 ，则 $[K_1+2K_2\sin^2\theta]$ 部分在 $\theta\in[0, 90^\circ]$ 上都 >0 ，因子 $\cos\theta$ 使得 F'_K 在 $\theta\in[0, 90^\circ]$ 上 >0 ，在 $\theta\in[90^\circ, 180^\circ]$ 上 <0 。因此在 $\theta=90^\circ$ 时， $F'_K=0$ ，在此极值点处达到 F_K 的极大值，因而难轴在[1010]上。——而由于 $F_K(\sin 0^\circ)=F_K(\sin 180^\circ)=0$ ，因此这两极(polar)同样易，都是易轴。【其中的 F_K 指的是 ΔF_K ；在极大值和极小值之间， $\Delta F_K > 0$ ；极大值 >0 】

但若我们只需要在两极($\theta=0^\circ$)易、而至于是否在正中间($\theta=90^\circ$)难，我们并不关心。即极大值点不一定需要在 $\theta=90^\circ$ 处，而是在 $(0, 180^\circ)$ 上均可——而且极大值点也不需要非得只有一个。总的来说，我们只需要保证曲线从 $\theta=0^\circ$ 开始增加，经历上升下降上升下降等等过程，期间与 x 轴永不相交，直到 $\theta=180^\circ$ 再第二次与 x 轴相交。

它的条件为： $F_K=K_1\sin^2\theta+K_2\sin^4\theta$ 在 $(0, 180^\circ)$ 上恒 >0 ，对其导数不作要求。因此两边同时除以 $\sin^2\theta$ (\because 它恒 >0)，得到 $K_1+K_2\sin^2\theta>0$ ，其最大的必要条件是 $K_1>0$ 、 $K_1+K_2>0$ ，【这是个线性规划问题，这两个边界不等式直线上方所夹区域，是斜率变化的直线 $K_1+K_2\cdot(0\sim 1)>0$ 的永久覆盖区域】而之前提到的 K_1, K_2 均 >0 只是它的一个子集(这个条件尚小)。

这称为**主轴型**——即[0001]为易轴。其必要条件为 $K_1>0$ 、 $K_1+K_2>0$ 。

②.a.如果在 $\theta\in[0, 90^\circ]$ 上，均有 $[K_1+2K_2\sin^2\theta]<0$ ，即也就是说 $K_1<0$ 、 $K_1+2K_2<0$ 【这两个边界不等式直线下方所夹区域，是 $K_1+2K_2\cdot(0\sim 1)<0$ 的必要条件】，则 F'_K 在 $\theta\in[0, 90^\circ]$ 上 <0 ，在 $\theta\in[90^\circ, 180^\circ]$ 上 >0 。此时极值点 $\theta=90^\circ$ 处为极小值，易轴在[1010]上。——而由于 $F_K(\sin 0^\circ)=F_K(\sin 180^\circ)=0$ ，因此这两极(polar)同样难，都是难轴。【在极大值和极小值之间， $F_K<0$ ；极小值 <0 】

b.还有一种情况，即我们并不需要难轴全在两极，即使难轴在其它地方也可(这样 F'_K 在其它地方也可 $=0$ ，而且对应极大值)；但需要保证当 $\theta=90^\circ$ 时， $F_K<0$ ，即小于两级的 $F_K=0$ ，因此 $F_K(\sin 90^\circ)=K_1+K_2<0$ ；并且其余所有地方的(包括其它极值处的) F_K

均比此处的 F_K 大；且在 90° 附近， F'_K 先 <0 ，后 >0 ，即需要 $K_1 + 2K_2 < 0$ ，以保证它是个极小值点，而不是非极值点或极大值点。

但我们还差一点未证实：该极小值可能不是最小值，其它地方可能有的比它还小（那么这些比它还小的，只可能是其它地方的极小值）。柳艳老师给出的附加条件为 $K_1 > 0$ ，根据之后③.的知识，它能保证在 $\sin^2\theta$ 取极限 $\rightarrow 0$ 时，即 $\theta \rightarrow 0$ 或 180° 时，存在 $F_K > 0$ 。那么既然有两个 >0 的值，又有 $\theta = 90^\circ$ 时的 <0 的（极小）值，它们中间肯定有零点。而两个左右零点分别与左右区间端点零点间，又肯定分别存在两个极大值。——那么只需要证明该条件下，在 $(0, 180^\circ)$ 区间中， $F_K = 0$ 最多只有两个零点，或者 F'_K 最多只有3个零点，即不存在更多的零点，即可证明该极小值就是最小值。

哈哈，巧了， $F_K = 0$ ，即 $K_1 + K_2 \sin^2\theta = 0$ ，确实只有2个 θ 解；或者说 $F'_K = 0$ 包含其中 $\cos\theta = 0$ 的一个解，还剩的 $K_1 + 2K_2 \sin^2\theta = 0$ 也只有两个解了，一共也只有3个解。——因此当 $K_1 + K_2 < 0$ 、 $K_1 + 2K_2 < 0$ 、 $K_1 > 0$ 时， $\theta = 90^\circ$ 时的极小值，就是三个极值中的最小值（另两个是极大值）。——现在将3个条件合并为2个： $K_1 + K_2 < 0$ 、 $K_1 > 0$ ，即可！

这称为平面型——即 $[1010]$ 面为易轴。其必要条件为 $K_1 < 0$ 、 $K_1 + 2K_2 < 0$ ；或者 $K_1 > 0$ 、 $K_1 + K_2 < 0$ 。

③.对①.取反：如果 $K_1 < 0$ 、 $K_1 + K_2 < 0$ ，则 $K_1 + K_2 \cdot (0 \sim 1) < 0$ ，即 $F_K = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta$ 在 $(0, 180^\circ)$ 上恒 < 0 。那么根据中值定理，易轴一定在 $(0, 180^\circ)$ 上取到。但我们不希望它在 $\theta = 90^\circ$ 时取到，因为这是②.所包含的情况。因此还需要加上 $K_1 + 2K_2 > 0$ ，以免 $K_1 < 0$ 与 $K_1 + 2K_2 < 0$ 共同构成②.的条件。

那么 $K_1 < 0$ 、 $K_1 + K_2 < 0$ 、 $K_1 + 2K_2 > 0$ 三个条件，即 $K_1 + K_2 < 0$ 、 $K_1 + 2K_2 > 0$ 这两个条件，将导致易轴一定在 $(0, 180^\circ)$ 上取到、易轴不是 90° 、难轴一定为 0 和 180° 。但我们不需要第三者限制：我们允许在 $(0, 180^\circ)$ 上有 $F_K > 0$ 的存在。

因此只需要保证“ $F_K = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta$ 在 $(0, 180^\circ)$ 上存在（而不是所有）值 < 0 ”即可，也就是说存在 $\theta \in (0, 180^\circ)$ ，使得 $F_K = K_1 + K_2 \sin^2\theta < 0$ （在该区间上除以了 $\sin^2\theta$ 得来的），这太容易了，要想 $K_1 + K_2 \cdot (0 \sim 1) < 0$ ，即使是最悲观的情况 $K_2 > 0$ ，我们也只需要令 $K_1 < 0$ 即可，因为即使对 $\sin^2\theta$ 取极限 $\rightarrow 0$ ，此时 $K_1 + K_2 \cdot 0 < 0$ 。因此原先的三个条件，要想只需要创造前两种限制，则第二个条件 $K_1 + K_2 < 0$ 不是必须。

这称为**锥面型**——即易轴与[0001]成一定角度。其必要条件为 $K_1 < 0$ 、 $K_1 + 2K_2 > 0$ 。

总结后列表如下：

六角晶系的磁晶各向异性类型

K_1	+	+	-	-	K_1
$K_1 + K_2$	+	-	-	+	$K_1 + 2K_2$
类型	主轴型	平面型	平面型	锥面型	类型

三.2 个 points:

1. **磁晶各向异性与温度的关系**：温度升高时，Fe、Co、Ni 的磁晶各向异性常数 $|K_1|$ 、 $|K_2|$ 趋势均为减小，以致 $\rightarrow 0$ 。

2. **磁晶各向异性的来源**：

(1).受到近邻原子的静电场的作用，3d 电子轨道角动量冻结，电子轨道失去了自由状态时，在空间的各向同性，变得固定下来。而 3d 本身因 l 大，又很椭圆。——总的来说，从**主轴朝各个方向的几率均等的椭圆**(电子云虽非球对称，但总的效果又是球对称的) \rightarrow **不动/固定的椭圆**(电子云和总效果均非球对称)。

(2).S-L 旋轨相互(耦合)作用，使得**不动的椭圆**(它由轨道方面参数 l 、 m_l 控制)，的方向变得与自旋取向相关，朝向随着自旋取向而转动。

(3). \mathbf{M}_s (电子自旋取向、原子磁矩方向) \perp 原子所排列的直线时，相邻原子的电子云交叠区域大，交换作用强，交换相互作用能(可能属于 E_{ex} 的一部分?)大；反之若 \parallel ，则交换作用弱。——从而导致了磁晶各向异性。

可见，相当于电子自旋属性通过 S-L 相互作用，间接通过控制旋转轨道，来服务于它自己！——扩大交叠区域，方便自己与近邻原子的电子进行交换作用。坏坏的。

【那到底是先有鸡还是先有蛋呢？即先是已经处在交叠下，S-S 交换作用发生了，再自旋 S 控制轨道 L 旋转；还是 S 控制 L 来使得交叠区域扩大，加强 S-S 交换呢？我觉得二者是同时进行的，因为电子云不像轨道那样有确切边界。】

四.磁晶各向异性等效场

易轴可等效于某磁场 \mathbf{H} 所在的方向。—— \mathbf{M}_s 在不受外磁场作用时，总趋向于停留在易磁化轴的方向。这与在该方向施加一个磁场，产生力矩 $\mathbf{M}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$ ，使磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 转动，或者说创造势能差 $E=-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$ ，来使得它朝它靠拢以使得势能降低一样。

这一等效磁场，就叫做磁晶各向异性等效场 \mathbf{H}_k 。

1.单轴磁晶各向异性等效场(\mathbf{M}_s 刚开始贴合于易轴上)

一方面， $F_K=K_1\sin^2\theta$ (即省去了常数的 ΔF_K ；且只取到平方项)；另一方面， $F_K=-\mathbf{M}_s\cdot\mathbf{B}=-\mu_0\mathbf{M}_s\cdot\mathbf{H}_k$ (对比 $E=-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$ ，可知这是单位体积的能量；而且 μ_0 没放 \mathbf{M}_s 里；这是外场能的公式；也像之前的 $\mathbf{M}=-\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}=-\mu_0\mathbf{M}_s\mathbf{H}_k\cos\theta\Rightarrow\mu_0\mathbf{M}_s\mathbf{H}_k(1-\cos\theta)$ (为了将零点统一起来；正如 F_K 中省去了常数 K_0 ，这里也加入了常数)。

二者相等，即有 $K_1\sin^2\theta=\mu_0\mathbf{M}_s\mathbf{H}_k(1-\cos\theta)$ ，得到 $\mathbf{H}_k=\frac{K_1\sin^2\theta}{\mu_0\mathbf{M}_s2\sin^2(\frac{\theta}{2})}$
 $\xrightarrow{\theta\text{ 较小(否则 } \mathbf{H}_k\text{ 将与 } \theta\text{ 有关)}} \frac{K_1\theta^2}{2\mu_0\mathbf{M}_s(\frac{\theta}{2})^2}=\frac{2K_1}{\mu_0\mathbf{M}_s}$ 。【可见 $\mu_0\mathbf{M}_s\mathbf{H}_k=2K_1$ 两端都是能量密度的单位】

2.立方各向异性等效场

(1). \mathbf{M}_s 沿 [100] z 轴方向 (θ 较小) 时：

设将 $\begin{cases} \alpha_1 = \sin\theta\cos\varphi \approx \theta\cos\varphi \\ \alpha_2 = \sin\theta\sin\varphi \approx \theta\sin\varphi \\ \alpha_3 = \cos\theta \approx 1 - 2(\frac{\theta}{2})^2 = 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$ ，代入 $F_K=K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)$ 中 (ΔF_K 的意思；也忽略了高阶项)，即有 $F_K=K_1[\theta^4\cos\varphi\sin\varphi+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\alpha_3^2]=K_1[\theta^4\cos\varphi\sin\varphi+\theta^2(1-\frac{\theta^2}{2})^2]$ ，忽略其中 θ 的 4 次、6 次项，得到 $F_K=K_1\theta^2$ 。与之前的 $F_K=K_1\sin^2\theta$ 无异。

【 φ 随着 θ 在 0 附近扰动而在 360° 方向上波动，我们即使取其 \cos 和 \sin 的最大值作为平均值，它也不会使得第一项有多大，毕竟 θ^4 】

因此结果与之前相同， $\mathbf{H}_k=\frac{2K_1}{\mu_0\mathbf{M}_s}$ 。

(2). \mathbf{M}_s 沿[111]方向(朝 θ 方向偏离小角 δ)时：【可调整立方晶体的 K_1, K_2 可使得[111]为易轴】

$$\text{设将} \begin{cases} \alpha_1 = \sin(\theta_0 + \delta) \cos \varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta_0 + \delta) \\ \alpha_2 = \sin(\theta_0 + \delta) \sin \varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta_0 + \delta) \\ \alpha_3 = \cos(\theta_0 + \delta) \end{cases} \quad \text{【注：即使}\mathbf{M}_s\text{朝}\varphi\text{方向也有波动，} \quad \text{即}\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi, \text{也只是前两者的第一个等号变为约等号，并不影响结论】，代入}$$

$F_K = K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2)$ 中，即有 $F_K = K_1[\frac{1}{4} \sin^4(\theta_0 + \delta) + 2[1 - \sin^2(\theta_0 + \delta)] \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0 + \delta)] = K_1[\sin^2(\theta_0 + \delta) - \frac{3}{4} \sin^4(\theta_0 + \delta)]$ ，其中，在 $\delta=0$ 的邻域上泰勒展开： $\sin^2(\theta_0 + \delta) = \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0 \cdot \delta + \cos 2\theta_0 \cdot \delta^2 = \frac{2}{3} + 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \delta + (\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) \cdot \delta^2 = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \delta - \frac{1}{3} \delta^2$ ；而 $\frac{3}{4} \sin^4(\theta_0 + \delta) = \frac{3}{4} \sin^4 \theta_0 + 3 \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \delta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta_0 (2 \cos 2\theta_0 + 1) \delta^2 = \frac{3}{4} + 3 \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta + \frac{3}{2} [2(-\frac{1}{3}) + 1] \delta^2 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \delta + \frac{1}{3} \delta^2$ ，于是 $F_K = K_1[\sin^2(\theta_0 + \delta) - \frac{3}{4} \sin^4(\theta_0 + \delta)] = K_1[\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \delta^2]$ ，忽略其中的常数项，得到 $F_K = -\frac{2}{3} K_1 \delta^2$ 。对比之前的 $F_K = K_1 \theta^2$ ，乘上了 $-\frac{2}{3}$ 。

因此结果比之前的多(乘)了 $-\frac{2}{3}$ ，即 $H_k = -\frac{2}{3} \frac{2K_1}{\mu_0 \mathbf{M}_s} = -\frac{4}{3} \frac{K_1}{\mu_0 \mathbf{M}_s}$ 。

4.3 退磁能(静磁能)

4.1 直接交换作用：导致磁畴中的各 μ 均朝着同一个方向，产生定向的自发磁化 \mathbf{M}_s ；4.2.磁晶各向异性：进一步约束磁畴中的各 μ 和 \mathbf{M}_s 所朝的同个方向，为易轴方向。——但为什么磁畴与磁畴之间的方向，又各不相同呢？

退磁能 F_d 是由(1).表面净磁荷产生的大(区域;长程)退磁场 \mathbf{H}_d 【类似于电动力学中的极化/束缚电荷面密度 σ_p 、电极化强度 \mathbf{P} 等；只存在于表面，且位置固定】；(2).内部出现的非磁性杂质，形成的局部小退磁场 \mathbf{H}_d ，产生的。

它有两个特点：(1).长程，跟每个原子都作用；(2).与 \mathbf{M} 、 F_{ex} 、 F_K 方向大致相反。

当磁体是由均匀材料制成的单相椭球样品时，它在均匀外磁场中的磁化，才是均匀的。此时没有体磁荷，只有面磁荷且均匀分布，则面磁荷产生的退磁场 \mathbf{H}_d 也是均匀的： $\mathbf{H}_d = -N\mathbf{M}$ ； N 叫退磁因子，只取决于形状和坐标，一般它是个二阶张量(正如理论力学中的惯量张量)；当选取的坐标轴与样品的椭球主轴(正如理论力学中的惯量主

轴)重合时, N 被对角化。此时退磁场的三个分量为 $\begin{cases} (H_d)_x = -N_x M_x \\ (H_d)_y = -N_y M_y, \text{ 并且} \\ (H_d)_z = -N_z M_z \end{cases}$

$N_x + N_y + N_z = 1$ (MKSA 单位制)。那么

$$\mathbf{H}_d = ((H_d)_x, (H_d)_y, (H_d)_z) = (-N_x M_x, -N_y M_y, -N_z M_z).$$

——某方向上, 若两端面间的距离越短, 则该方向上的 2 个端面表面积越大, 净磁荷越多, H_d 场越大, 该方向的 N 分量就越大; 同理, 越长的方向上的 N 越小。

在这样的样品中, $F_d = \int -d\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = \int -\mu_0 \mathbf{H}_d \cdot d\mathbf{M} = \int \mu_0 N \mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \frac{1}{2} \mu_0 N M^2 = \frac{1}{2} \mu_0 (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2)$, 从另一个方面也可导出它: $\int -\mu_0 \mathbf{H}_d \cdot d\mathbf{M} = \int \mu_0 (N_x M_x, -N_y M_y, -N_z M_z) \cdot d(M_x, M_y, M_z) = \frac{1}{2} \mu_0 (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2)$ 。它和外场能为负值不一样, 它是个正值, 其绝对值得越小越好。

【单位体积的自由能, 是自由能密度; 但 $d\mathbf{M}$ 中的 d 不是对体积/空间的微分, 而是对 \mathbf{M} 本身的微分; 单位体积是 \mathbf{M} 里自带的。——这么说结果中有 \mathbf{M} 的平方而在单位上多了个“单位体积”? : 其实 H 与 \mathbf{M} 单位是一样的, 从 $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 中可看出, 而 H 与磁矩 μ 相乘是能量的单位, 与 \mathbf{M} 相乘即能量密度。】

【这也可以理解为磁化功 $\int_V \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ 的负值: 势能——或者说单位体积内的 $dW = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{m}$ 的积分的负值; 亦或者理解为: 对比 $\mathbf{E} = -\mu \cdot \mathbf{B}$, 其中 $d\mathbf{M}$ 并不是 μ , 而是单位体积内的 $d\mu$, 即单位体积内 μ 的改变量。这么算 F_d 也是一种势能。】

一.特殊形状样品的退磁因子

①. **椭球体**: $N_x + N_y + N_z = 1$ 。

球体: $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$ 。

②. **无限长圆柱体**: $N_x = N_y = \frac{1}{2}$, $N_z = 0$ (太长)。【 $N_x = N_y$ 其实是由 $N_z = 0$ 导出来的】

$F_d = \frac{1}{2} \mu_0 (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2) = \frac{1}{4} \mu_0 (M_x^2 + M_y^2)$ 。【 z 方向很长、端面面积很小、近乎无磁荷, 所以该方向无退磁能贡献】

③. **无限大薄片**: $N_x = N_y = 0$ (太大)、 $N_z = 1$; 【 N_z 其实是由 $N_x = N_y = 0$ 导出来的】

$F_d = \frac{1}{2} \mu_0 M_z^2$ 。【退磁能密度】

$$\mathbf{H}_d = (0, 0, -M_z) = -\mathbf{M}_z。$$

二.几种常见的磁畴分布下的退磁能

①.片状畴：层状结构，相邻层间磁矩相反。 $F_d = 0.8521 \times 10^{-7} M_s^2 D$ 。【单位面积的退磁能，这里的单位面积是指视线平行于磁矩方向所看到的面，即垂直于磁矩 \mathbf{M}_s 的面；MKSA 单位制】

【D 为层的厚度；对于一般的 D 值，它比所有层均朝同一个方向的 $\frac{1}{2} \mu_0 = 2\pi \times 10^{-7}$ 要小】

②.棋盘状畴：条状结构，最近邻条间磁矩相反； $F_d = 0.53 \times 10^{-7} M_s^2 D$ 。【这里所说的都是单纯的退磁能，还没包括畴壁能等其他能量。并不是退磁能更小就更趋近于它，而是总能量；因而畴壁在这里都是没有厚度的，它只是磁荷的载体而已，就跟爬山虎、壁虎和墙的关系一样】

【D 为条的横截面边长；看样子它的值比上一个更小，所以自然界的磁畴分布都倾向于棋盘状？——不，它并不一定常见。因为它的畴壁比上一个更多、占比更大，能量反而可能会因此抬升。——除非 D 丌，以减小畴壁面积所占体积的比例(所以可能棋盘状的 D 比片状的 D 更大)。(这也是为什么大尺寸物体的退磁能比较低，因为它们表面占比低)】

③.圆阵式磁化区域：以同向磁矩的材料为基底，其间间隔着插入磁矩与之相反的圆柱形长条； $F_d = 0.37 \times 10^{-7} M_s^2 D$ 。

④.杂质处的退磁能：

1).一个磁畴内部的空泡：空泡两端面磁化电荷产生的 \mathbf{H}_d ，一定同向于磁畴的 \mathbf{M}_s (即同向于空泡四周已经同向的 μ)。其 $(F_d)_{\text{球}} = \frac{1}{4} \mu_0 M_s^2 V$ 。【这里的 F_d 表示能量而非能量密度】

可见在同向的一个磁畴中，每沿着其 \mathbf{M}_s 方向分割一次，分割间隙(该空间类比于球泡)内部的退磁能就减小为原来磁性物质填充时的一半。【难道是任意小体积的空泡，都能造成整个磁畴的退磁能密度减小为原来的一半？】

2).畴壁上/相邻两个磁畴之间的空泡：空泡上下两端面磁化电荷产生的 \mathbf{H}_d ，左端面同向于一个磁畴的 \mathbf{M}_s ，右端面同向于另一个磁畴的 \mathbf{M}_s 。其 $F_d=0.46(F_d)_{\text{球}}$ 。【这里的 F_d 表示能量而非能量密度】

三.总结

①.退磁能是磁畴存在的原因。交换能+各向异性能=磁畴内部+磁畴之间同向。

②.交换能 F_{ex} 、退磁能 F_d ，对任何材料必需考虑；而只需考虑存在各向异性的材料的各向异性能 F_K (好的软磁体各方向磁化率相同)。

③.退磁能消耗计算资源的 70%~80%，因为它是长程的，每个原子磁矩都要与其余所有原子磁矩作用。——不像交换能(只算相邻的)和各向异性能(已知 K_1, K_2 的话，代入方向余弦即可，就像利用矢量图)，只需各算一遍即可。

4.4 外场能

$F_z = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$ ，是外场能密度； $F_z = -\int \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \cdot dV$ 即外场能。【其中 $\mu_0 \mathbf{M}$ 也可写作 \mathbf{J} ；也可用 F_H 表示】

——为什么它的形式不像退磁能中的 $\mathbf{H}_d \cdot d\mathbf{M}$ 呢？这么解释，单个原子在外磁场中的势能为 $E_i = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}$ ，那么许多原子的势能即 $F_z = \sum_i -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 (\sum_i \boldsymbol{\mu}_i) \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 (\int \mathbf{M} dV) \cdot \mathbf{H} = -\int \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dV$ ，其间用到了 \mathbf{H} 是个定场。

【而之前 $\int \mathbf{H}_d \cdot d\mathbf{M}$ 那么做，是因为 \mathbf{H}_d 与 \mathbf{M} 有关；而这里的 \mathbf{H} 与 \mathbf{M} 无关，因此这里的 $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{H} \cdot \int d\mathbf{M} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$ ，即也就是 $F_z = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$ 、 $F_z = -\int \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \cdot dV$ 中 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$ 的由来。——所以其实 $F_z = -\int \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \cdot dV$ 本身是双重积分的： $F_z = -\int \mu_0 \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \cdot dV$ ，哈哈，这就看你能不能看懂了；这可能来源于电动力学中，静磁场能量密度，在线性和非线性介质中的不同情况。】

4.5 DM 相互作用能

与交换能类似，是近程相互作用。(但与 E_{ex} 仍有不同):

交换能：磁矩平行时能量最低，而 **DM 能**：相邻磁矩垂直时能量最低。有 Neel 型、Bloch 型磁畴，分别对应：磁畴中，与 A 相邻的 B 原子的磁矩 \mathbf{m}_B ，朝着 $\mathbf{m}_A \times \mathbf{r}_{AB}$ 、 $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{m}_A$ 方向。其 $E_{DM} = -D\mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_j)$ ，微分形式为 $E_{DM} = -D\mathbf{m}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{m}_j)$ 。

当晶体内部非对称时，或者两个不同材料的接触面上，就有 E_{DM} 存在。

4.6 磁致伸缩

【这部分我已经没有时间详细推导数学过程了，只记了 points 和一些来源；课时安排非常不合理，老师讲得很快。我不能浪费更多的时间在这上面。】

一.分类

1.线性磁滞伸缩

(1).纵向磁致伸缩

形状的变化与外磁场方向一致： $\lambda = \frac{\Delta L}{L}$ 。

(2).横向磁致伸缩

在垂直于外场方向发生了尺寸改变。

2.体积磁致伸缩

二.影响因素

1.与磁化有关(磁场强度)。【 λ -H 曲线：H 增大时， $|\lambda|$ 缓缓增加至饱和值 λ_s 。此时 ΔL 达到了它的最大值，磁致伸缩达到饱和。】

2.与材料有关。

3.与成分有关。【一组： λ_{111} -Ni(%)曲线从 Ni 的 30%含量出发，先从 $\lambda=20$ 上升，在 40 左右达到极值，之后一直下降； λ_{100} -Ni(%)曲线：先从(30%,0)出发，下降上升下降。二者在 Ni 达到 100%后，都降到-40以下；另一组：含 Co、Ga 的化合物，磁致伸缩大($|\lambda_{100}|$ 很大)。】

4.与温度有关。

5.与自发磁化有关。【几十纳米的单畴态的磁致伸缩：即使在 $T > T_c$ 的顺磁性区间，也会出现磁致伸缩，只不过是体积磁致伸缩。】

三.磁致伸缩的计算

1.两个晶轴上的磁致伸缩系数：

(1).当 M 沿[1,0,0]方向磁化到饱和时， λ_s 记为 λ_{100} ，其值可表示为 $-\frac{2a_1}{3(c_{11}-c_{12})}$ 。

【其中，a 为磁弹耦合(磁化与形变相互作用)系数；c 为杨氏模量，是个四维二阶张量，有 16 个分量】

(2).沿[1,1,1]方向磁化到饱和时， $\lambda_{111} = -\frac{a_2}{3c_{44}}$ 。

【它们的来源】

设晶体磁化(矢量)**M**方向为原来的 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ，而(测量)线性磁致伸缩的方向为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ，它们之间的夹角为 θ 。则：

$\lambda_{\beta_i} = -\frac{a_1}{c_{11}-c_{12}}(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 - \frac{1}{3}) - \frac{a_2}{c_{44}}(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 + \alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1) - \frac{a_1}{3(c_{11}+2c_{12})}$ ，第三项为常数项，与方向无关，前两项的系数，称为**磁致伸缩系数**；如果测量方向 β_i 与**M**方向 α_i 一致，则 $\lambda_{\beta_i=\alpha_i} = -\frac{a_1}{c_{11}-c_{12}}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 - \frac{1}{3}) - \frac{a_2}{c_{44}}(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2)$ 【忽略常数项】，代入 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(1,0,0)$ ，则 $\lambda_{100} = -\frac{a_1}{c_{11}-c_{12}}(1 - \frac{1}{3}) = -\frac{2a_1}{3(c_{11}-c_{12})}$ ；代入 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(1,1,1)$ ，则 $\lambda_{111} = -\frac{a_2}{c_{44}}(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}) = -\frac{a_2}{3c_{44}}$ 。

于是上式改写为 $\lambda_{\beta_i} = \frac{3}{2}\lambda_{100}(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 - \frac{1}{3}) + 3\lambda_{111}(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 + \alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1)$ 。【第二项为啥不写成 $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ 呢？】

注：以上各个公式只适用于饱和磁化的一个单晶体(整块晶体由一颗晶粒组成)、或一个磁畴内部。【即非饱和磁化时，各原子磁矩也均都在一个方向上的物质】

2.饱和磁致伸缩系数

(1).单晶体: $\lambda_{\beta_i} = \lambda_0 = \frac{3}{2} \lambda_s (\cos^2 \theta - \frac{1}{3})$ 。其中 $\lambda_s = \lambda_{100} = \lambda_{111} = \lambda_{\alpha_i}$ 。

【来源】

如果晶体沿不同方向磁致伸缩系数相差不大，则 $\lambda_{100} \approx \lambda_{111} = \lambda_s$ ，代入 λ_{β_i} 的表达式，得到 $\frac{3}{2} \lambda_s [(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3}) + (2\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 + 2\alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 + 2\alpha_3 \beta_3 \alpha_1 \beta_1)] = \frac{3}{2} \lambda_s [(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)^2 - \frac{1}{3}] = \frac{3}{2} \lambda_s [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3)]^2 - \frac{1}{3}] = \frac{3}{2} \lambda_s [\cos^2 \theta - \frac{1}{3}]$ 。

(2).多晶体: $\lambda_{\beta_i} = \frac{3}{2} \bar{\lambda}_0 (\cos^2 \theta - \frac{1}{3})$ 。其中 $\bar{\lambda}_0 = \frac{1}{5} (2\lambda_{100} + 3\lambda_{111})$ 。

【来源】

多晶体在某一方向的磁致伸缩，可看做各个晶粒在各个方向的磁致伸缩，在这个方向的平均值。如果没有“结晶结构”，即各个晶粒的晶轴方向在空间均匀分布，于是多晶体的磁致伸缩是各向同性的(各方向磁致伸缩系数相差不大)。

既然是各向同性，则又回到了同样各向同性的单晶体的 $\lambda_s = \lambda_{\alpha_i}$ 了，于是直接沿用它的数学表达式即可。其中 λ_s 换为 $\bar{\lambda}_0 = \frac{1}{5} (2\lambda_{100} + 3\lambda_{111})$ ，它可由统计方法得到。

四.磁弹性能(磁致伸缩能)

这一节本该安排在三.之前，即与它调换一下位置。因为那里的公式，出处在此。对于立方晶系：

1.无形变时，单纯磁晶各向异性能: $F_K^0 = K_0 + K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + K_2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2)$ 。

2.有形变时，单纯形变能: $F_{\text{弹性}} = \frac{1}{2} c_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2} c_{44}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) + c_{12}(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx})$ 。【将铁磁晶体看做无磁性的单纯形变体， $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ 为形变张量的 6 个分量，前三个是长度应变，后三个为切应变】

3.磁弹作用能: $F_{\text{磁弹性}} = F_K - F_K^0 = \sum_{i \geq j} \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} e_{ij} + \dots$ 。

晶体不但是弹性体，同时又是磁性体。对于一定的形变，不但有弹性形变产生的弹性能，还有因形变引起的磁性变化所产生的磁弹性能。这部分能量是通过磁晶各向异性性能 F_K 推广出来的，其常数项作为单纯的磁晶各向异性性能 F_K^0 ，线性项 $\sum_{i \geq j} \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} e_{ij}$ (第二项及其以后各项)作为磁弹性能。

【它也是各向异性的，也与方向余弦有关。如 $\frac{\partial F}{\partial e_{xx}} = a_1 \alpha_1^2$ 、 $\frac{\partial F}{\partial e_{yy}} = a_1 \alpha_2^2$ 、 $\frac{\partial F}{\partial e_{zz}} = a_1 \alpha_3^2$ ； $\frac{\partial F}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial F}{\partial e_{12}} = a_2 \alpha_1 \alpha_2$ 、 $\frac{\partial F}{\partial e_{yz}} = a_2 \alpha_2 \alpha_3$ 、 $\frac{\partial F}{\partial e_{zx}} = a_2 \alpha_3 \alpha_1$ 等。其中两组组内系数全一样，是因为立方晶体之于3个“长度应变”和“切应变”的对称性】

合并3部分能量，总自由能 $F = (F_K^0 + F_{\text{磁弹性}}) + F_{\text{弹性}} = F_K + F_{\text{弹性}} = (K + \Delta K)(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + \text{高次项}$ ，其中 ΔK 是包含 $a_1, a_2, c_{11}, c_{12}, c_{44}$ 的附加能量，即磁弹性能常数，它比 K 小1~3个数量级。【该总自由能 F 应该说是替代原先的 F_K 的能量；即往 F_K 里面添加了 $F_{\text{弹性}}$ 和 $F_{\text{磁弹性}}$ 后的NEW新 F_K 】

计入磁致伸缩后，若对形变张量 e_{ij} 只取线性项，则磁晶各向异性性能 F_K 的形式没有发生变化，只是各向异性常数从 K 变化为了 $K + \Delta K$ 。

4.7 应力能

磁化导致磁致伸缩；反过来改变体积也能影响磁化。【上上一节研究的是磁化→磁致伸缩；上一节研究的是磁化→磁致伸缩→伸缩又影响磁化；这一节只着重关注伸缩→磁化。——或者说，上一节 and 上上一节只关心内应力，这一节只关心外应力】

同样设晶体磁化(矢量) \mathbf{M} 方向为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ，而应力 $\sigma = \frac{F}{S}$ 方向为 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ，它们之间的夹角为 θ 。则其中与方向有关的部分为：【第一项括号内没有了 $-\frac{1}{3}$ 、两项符号均变成正的了、且均多乘了个应力 σ 、 β 替换为 γ 。—— $\alpha\beta\gamma$ 一家族轮着用。】

$F_\sigma = \frac{a_1 \sigma}{c_{11} - c_{12}} (\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2) + \frac{a_2 \sigma}{c_{44}} (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3 \alpha_1 \gamma_3 \gamma_1)$ ；代入 $\lambda_{100} = -\frac{2a_1}{3(c_{11} - c_{12})}$ 、 $\lambda_{111} = -\frac{a_2}{3c_{44}}$ ，即有 $F_\sigma = -\frac{3}{2} \lambda_{100} \sigma (\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_2^2 \gamma_2^2 + \alpha_3^2 \gamma_3^2) - 3\lambda_{111} \sigma (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3 \alpha_1 \gamma_3 \gamma_1)$ 。【正是由于等式右端添加了应力 $\sigma = \frac{F}{S}$ ，将无单位的相对长度 $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \lambda$ ，转换为了压强的单位，而压强的单位与能量密度的单位一

当磁致伸缩各向等值时, $\lambda_{100}=\lambda_{111}=\lambda_S=\lambda_{\alpha_i}$, 上式(最好说上上式)化为 $F_\sigma=-\frac{3}{2}\lambda_S\sigma\cos^2\theta$ 。其中的 $\lambda_S=\lambda_{\alpha_i}$ 不分方向, 对各向磁致伸缩等值的立方、单轴晶体均适用; $\theta=\langle\sigma,\mathbf{M}\rangle$ 、 $\cos\theta=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3$ 。【相比于之前的 $\frac{3}{2}\lambda_S(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$, 多了个负号和 σ , 少了个 $-\frac{1}{3}$ 】

1. 可见, 当 $\lambda_s \sigma > 0$ 时, $\theta = 0$ 或 180° 时能量 F_0 最低(为负的最大值), 此时 \mathbf{M} 倾向于与 σ 平行(不能说同向, 因为 σ 、 \mathbf{F} 、 $\Delta \mathbf{L}$ 在材料两端的方向是相反的); 当 $\lambda_s \sigma < 0$ 时, $\mathbf{M} \perp \sigma$, 才能使得应力能最小(为 0)。

2.对于张力/拉力 F , 因 $\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$ 中 $\Delta L > 0$, 而 σ 取正值; 而对于材料而言, 若是压力, 则 σ 应取负值。

3. 应力能 F_{σ} 比弹性能 $F_{\text{弹性}} + F_{\text{磁弹性}}$ 大得多，计算时经常用到该式。

4. **应力能与磁弹性能的区别**：①. 磁弹性能与应力能都是形变所导致的磁矩变化，所对应的磁能增减。但应力能的形变，是外力施加的，形变量较大。而磁弹性能的形变，是诸如磁化过程中，磁矩方向偏转所导致的体积伸缩，所引起的形变，形变量较小。②. 而且，从描述中可见，磁弹性能关注的是弹性能与磁各向异性能的竞争，和相互转化，并不是单向的，它是一种反馈调节：磁能→弹性能→反作用于磁能。然而应力能却是单向的：弹性能→磁能。

5.如果要 F_σ 纳入磁晶各向异性的话(因它也是各向异性的,与方向余弦有关),新的 F_K 应该被写作 $F_K = F_K^0 + F_{\text{磁弹性}} + F_{\text{弹性}} + F_\sigma$ 。【但是,由于 $F = F_{\text{ex}} + F_k + F_\sigma + F_H + F_d$; 其中已经含有 F_σ , 因此其中的 F_k 里只包含 $F_K^0 + F_{\text{磁弹性}} + F_{\text{弹性}}$; 而且 F_σ 数值较大, 理应独立出来, 与 F_k 地位平等】

[illegible]

总结：

1. 交换能 F_{ex} ：本征能量，无法改变相邻原子的电子云重叠状况。
2. 退磁能 F_{d} ：可通过改变形状。
3. 各项异性能 F_{k} ：可通过制作工艺进行改变。
4. DM 相互作用能 E_{DM} ：晶格结构本征；界面类，可调节接触面及两种材料改变。
5. 外场能 F_{H} ：这俩是外加的。
6. 应力能 F_{σ} ：这俩是外加的。

所有能量竞争的结果。什么时候总能量(密度) $F = F_{\text{ex}} + F_{\text{k}} + F_{\sigma} + F_{\text{H}} + F_{\text{d}} + E_{\text{DM}}$ 最低，此时解出来的取极值的条件，便是材料的各项属性值的具体值。

第五章 磁畴结构理论

外斯分子场第二个假设预言磁畴存在；Landau 朗道发展了它。

5.1 磁畴的成因

一.引入

设有以下横截面相同，且均为矩形的铁磁体；且其中各磁畴的 \mathbf{M}_s 全平行于易轴(平行或反平行矩形的宽；多个磁畴时，相邻磁畴磁矩反向，以 fit ①. 片状畴的低能状态)，使得交换能与各项异性能已经均分别处于最低能量状态，总能量只取决于退磁能。

a. 假设框里没有磁畴存在，或者说只有一个大磁畴存在。则总能量 F 的极小值，大致取决于退磁能 F_{d} 达到极小值。

b.若从中间切一刀，分两个磁畴，则总能量 F 的极小值，大致取决于 $\frac{1}{2}F_d + F_w$ 。其中 F_w 叫畴壁能，在这里是指两个磁畴接触面所具有的能量。

c.若再将两个磁畴各切一刀，总共分为 4 个磁畴：则总能量 F 的极小值，取决于 $\frac{1}{4}F_d + 3F_w$ 。

d.n 个磁畴， F 的极小值取决于 $\frac{1}{n}F_d + (n-1)F_w \approx \frac{1}{n}F_d + nF_w$ 。【其中的 F_d 指的是原同体积但只有 1 个磁畴时的总 F_d ； $\frac{1}{n}F_d$ 为 n 个磁畴时的 F_d ；同理 nF_w 为 n 个磁畴时的 F_w 】

可见，磁畴越多， F_d 下降越多，一般单个畴壁的 $F_w < \frac{1}{2}F_d$ ，因而 $\frac{1}{2}F_d + F_w < F_d$ ，于是 a 倾向于过渡到 b；同样， $2F_w < \frac{1}{4}F_d$ ，于是 $\frac{1}{4}F_d + 3F_w < \frac{1}{2}F_d + F_w$ ，于是 b 也倾向于过渡到 c；然而，但无论单个畴壁的 F_w 有多小，随着畴壁数目和面积的增多，总有 $n(n-1)F_w > F_d$ ，即 $\frac{1}{n(n-1)}F_d = (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})F_d < F_w$ 的时候，此时 $\frac{1}{n}F_d + nF_w > \frac{1}{n-1}F_d + (n-1)F_w$ 。

如果畴与畴之间，即畴壁中的磁矩 μ 不是连续过渡的，相邻 M_s 直接从 \uparrow 过渡到 \downarrow ，则 F_w 中只存在交换能(反向但仍//易轴，没有各向异性能)，且交换积分 $A < 0$ (以对应相邻的自旋反平行态、对称态)；若连续过渡，则存在各向异性能。

二.计算

设有以上 a.矩形为截面(前面)的薄片(那里的矩形的宽即这里的高，很窄)，以及以上 d.矩形为截面的铁磁体：设两薄片的长、宽均为 1，高/厚 $L \ll 1$ ，是个单位面积的薄片：

那么对于 a.薄片(类比无限大薄片)而言，其退磁能体密度为 $F_d = \frac{1}{2}\mu_0 M_s^2 = \frac{1}{2}\mu_0 M_s^2$ ，于是其面密度(//上/下底面的面)为 $\frac{1}{2}\mu_0 M_s^2 L$ ，其总能量为 $E = E_d = \frac{1}{2}\mu_0 M_s^2 L \times (1 \times 1) = \frac{1}{2}\mu_0 M_s^2 L$ 。【其中的 1 有单位，是矩形(前截面)和薄片长】

而一个片状磁畴的退磁能(上/下底)面密度 $= 0.8521 \times 10^{-7} M_s^2 D$ ，上底面+下底面(1m×1m)的总退磁化能 $= 2 \times 0.8521 \times 10^{-7} M_s^2 D \times (1m \times 1m) = 1.7 \times 10^{-7} M_s^2 D$ ；设 γ_w 为单个畴壁的畴壁能，则畴壁能(左/右侧看去)总面密度 $= \gamma_w \times \frac{1m}{D}$ ， $\frac{1m}{D}$ 个侧面(1m×L)的总畴壁能为 $\gamma_w \times \frac{1m}{D} \times (1m \times L) = \gamma_w \frac{L}{D}$ 。于是总能量(而非能量密度) $E = E_d + E_w = 1.7 \times 10^{-7} M_s^2 D + \gamma_w \frac{L}{D}$ 。

【其中 $\frac{1m}{D}$ 表示横截面的长方向，有多少个 D，即有多少个片状磁畴，和多少个畴壁；注意：前/后面没有能量可言，我们已经计算了两个上面和所有侧面($\frac{1m}{D}$ 个)的能量，这就相当于所有腔室不重复计算的表面积能量之和了】

为了求 D 所导致的 E 的极值， $\frac{dE}{dD} = 1.7 \times 10^{-7} M_s^2 - \gamma_w \frac{L}{D^2} = 0$ ，得到 $D = \frac{10^4}{M_s} \sqrt{\frac{\gamma_w L}{17}}$ ，代入其中，即有 $E = 1.7 \times 10^{-3} M_s \sqrt{\frac{\gamma_w L}{17}} + 10^{-4} M_s \sqrt{17 \gamma_w L}$ 。

以 Fe 为例，代入其 $M_s = 1.7 \times 10^6 \text{ A/m}$ 、 $\gamma_w = 1.59 \times 10^{-3} \text{ J/m}^2$ ，取 $L = 10^{-2} \text{ m}$ ，得到其 $D = 5.7 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、 $E = 5.6 \text{ J/m}^2$ 。

可见一般不会出现磁畴宽度 D 在 μm 数量级以下，而且其下限一般比 $1\mu\text{m}$ 大；而对比铁的 $E = \frac{1}{2} \mu_0 M_s^2 L = 1.8 \times 10^4 \text{ J/m}^2$ ，可知磁畴/畴壁的形成极大地降低了总系统的退磁能+畴壁能=E 为 5.6 J/m^2 ，变为了原先只含退磁能的 $\frac{5.6}{18000} = \frac{1}{3200}$ 。如果不形成磁畴，则 $E = E_d + E_w = E_d$ 很大。

5.2 畴壁的结构

一.畴壁的类型

(两种划分方法；但两个集合中的元素并不一一对应，比如有 180° 布洛赫壁，也有 180° 尼耳壁。其实看二者的定义就知道，两种互不相关：一个关心的是畴壁两侧的磁矩，一个是畴壁中)

1. 畴壁两侧的磁矩的方向：

①. 180° 壁(畴)——比如 5.1 中的那些【以及多数六角晶体】；②. 90° 壁(畴)——比如矩形的两个对角线所分隔的四个区域里的头尾相接的 M_s ，或者像 DM 相互作用那样的垂直方式。【多数立方晶体】

2. 畴壁中磁矩的过渡方式：

①. Bloch 布洛赫壁：在过渡时，磁矩只上过渡轴(并绕着它)旋转。

②. Neel 尼耳壁：在过渡时，磁矩只在起-终两个磁矩所确定的平面上旋转。

二.畴壁厚度和畴壁能

1.对于 180°布洛赫壁：

180°意味着壁外两旁的磁矩反向平行，我们记其中一个朝向为 x 轴；⊥壁的两宽面且指向过渡方向的轴，为过渡轴 z 轴； $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$ 的方向为 y 轴。过渡轴上的磁矩们，从壁的一侧的宽面(左端面)，初始方向朝向 x 轴，过渡到壁的另一侧宽面(右端面)，最终方向朝着 -x 轴。我们设磁矩与 y 轴的夹角为 θ ，这样 θ 便很对称地从 $\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ (磁矩在 x-o-y 面逆时针旋转，且逆时针对应着 θ 减小)。

设壁的两个端面上的两个磁矩，它们的起点在过渡轴 z 轴上，且调整 z 轴的单位，使得这两个反平行的磁矩起点，一个作为起点，在 $z = -\infty$ 处，对应的 $\theta(-\infty) = \frac{\pi}{2}$ ；另一个作为将过渡去的终点，在 $z = +\infty$ 处，对应的 $\theta(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$ 。而 $z = 0$ 对应 $\theta(0) = 0$ ，以示过渡过程 $\theta(z)$ 的对称性。

①.交换能面密度：

$E_{\text{ex}} = -2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} A_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \cos \theta_{ij}$ ，现将其写作 $E_{\text{ex}} = -2 A s^2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} \cos(\Delta \theta)$ ，其中 $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j = \theta(z + \Delta z) - \theta(z) = \Delta \theta$ 。为了将 $\theta_{ij} = \Delta \theta = 0$ 所对应的 E_{ex} 设定为 0，为 E_{ex} 加上一个常数，将两个原子间的 E_{ex} 改写为 $= 2 A s^2 [1 - \cos(\Delta \theta)] = 2 A s^2 [2 \sin^2(\frac{\Delta \theta}{2})] \approx 2 A s^2 [2 (\frac{\Delta \theta}{2})^2] = A s^2 (\Delta \theta)^2$ 。其中， $\Delta \theta$ 并不是无限微小的量 $d\theta$ ，它因相邻原子磁矩的不连续分布而离散： $\Delta \theta = \frac{d\theta}{dz} \cdot a$ ， a 为晶格常数。

于是壁中相邻原子间的 $E_{\text{ex}} = A s^2 a^2 (\frac{d\theta}{dz})^2$ ，该能量 E_{ex} 所对应的空间大小为 a^3 (两个磁矩起点间的距离，相当于两个原子核的距离)，那么 E_{ex} 的体密度 $= \frac{A s^2}{a} (\frac{d\theta}{dz})^2 = A_1 (\frac{d\theta}{dz})^2$ 。 A_1 称为交换常数，它常常被当做交换能(密度) E_{ex} 使用，甚至还比它重要。不过准确地说， $A_1 := \frac{\zeta A s^2}{a}$ ，它在 $\frac{\zeta A s^2}{a}$ 出现之初——交换能改变量的微分形式处，就该露面的。

于是，壁中所有邻近原子对的交换能之和： $E_{\text{ex}} = 2 A s^2 \sum_{i < j}^{\text{近邻}} [1 - \cos(\Delta \theta)] = A s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta \theta)^2 = A s^2 a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{d\theta}{dz})^2$ ，这让人感到很别扭： $\Delta \theta$ 是 z 的函数，但没有 dz 出现。事实上这是因为， a 就是其中的 dz ，而不再是无限小量，也不是个可变的量。所以不能这么积分，最多写成 $E_{\text{ex}} = A s^2 a^2 \sum_{i=0}^{\frac{z_1 - z_0}{a} - 1} (\frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=z_0 + ia})^2$ 的形式。

要写成积分形式，得以能量密度的观点，而且线积分出来的不是能量，而是能量面密度： $\gamma_{ex} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{As^2}{a} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \cdot dz = \frac{As^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \cdot dz = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \cdot dz$ 。

②.各向异性能面密度： $\gamma_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \cdot dz$ ，其中 $g(\theta)$ =立方晶体的各向异性能体密度 $F_K = K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)$ ；或 $g(\theta)$ =六角晶体的各向异性能体密度 $F_K = K_1\sin^2\theta + K_2\sin^4\theta$ 。

③.畴壁能面密度： $\gamma_w = \gamma_{ex} + \gamma_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + g(\theta)] \cdot dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot dz$ ，记 $\frac{d\theta}{dz} = \theta_z$ ，可见 γ_w 是 (θ, θ_z) 的函数。求其极值，有 $\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_z} \right) = 0$ ，得到 $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{d}{dz} (2A_1\theta_z) = 2A_1 \frac{d^2\theta}{dz^2}$ 。两边同时乘以 $\frac{d\theta}{dz}$ 并 $\times dz$ 变上限积分到某一位置，得到 $g|_z - g|_{-\infty} = \int_{-\infty}^z \frac{\partial g}{\partial z} \cdot dz = \int_{-\infty}^z 2A_1 \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{d\theta}{dz} \cdot dz = \int_{-\infty}^z A_1 d\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \int_{-\infty}^z A_1 d\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = A_1 \left[\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \Big|_z - \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \Big|_{-\infty} \right]$ 。

其中，由于 $g(\theta) = F_K$ 零点的设定， $g|_{z=-\infty} = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ ，同时也从物理意义上规定 $\frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=-\infty} = \frac{d\theta}{dz} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ ，于是 $g|_z = A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \Big|_z$ ，即 $g(\theta) = A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2$ =交换能体密度。所以各向异性能面密度 γ_w 达到极小值的条件就是：交换能体密度 $E_{ex} = A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2$ =各向异性能体密度 $g(\theta) = F_K$ 。

要想畴壁每个位置的 γ_w 都最低，则各向异性能大的地方(与过渡轴 z 轴的夹角 θ 大)，对应的交换能也得大(θ 的变化率 θ_z 也得大)。【这是因为在 y 轴//易轴的前提下，对于六方晶体而言， θ 大则 $g(\theta)$ 大，因而 θ_z 大??? ——但因我们坐标系建立在 x 轴// M_s 的前提下，而通常的 M_s //易轴，因此 x 轴才是//易轴的，因此这里的与 y 轴的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2} -$ 各向异性中的与易轴/ x 轴的夹角 θ ，因而当这里与 y 轴的夹角 θ 增大时， $g(\theta) = G(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 减小，因而 $A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2$ 减小。——而当这句话反过来说，就将是柳艳老师的意思了：她是指，当与 x 轴/易轴的夹角 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 增大时， $G(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 增大，因而 $A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2$ 增大。即各向异性能变大时，体系会让这种增大是个昙花一现的短程过程。】

于是 $dz = \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta$ ，代回 $\gamma_w = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + g(\theta)] \cdot dz = 2A_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{A_1}{g}} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 d\theta$ ，再利用 $\frac{dz}{d\theta} = \sqrt{\frac{A_1}{g}}$ ，得到 $\gamma_w = 2A_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g}{A_1}} d\theta = 2\sqrt{A_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{g(\theta)} d\theta$ 。【为啥变量代换后的积分上下限不是 $-\frac{\pi}{2} \rightarrow +\frac{\pi}{2}$?】

④.畴壁厚度：当然，我们也可通过 $dz = \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta$ 得到任何一个 θ 所对应的 z 值：根据 $\theta(0) = 0$ ，有 $z(0) = 0$ ，于是 $z(\theta) = z(\theta) - z(0) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta$ 。【同样你也可求出

$\theta(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{g}{A_1}} dz$ ，每个 z 处的 θ 都能被具象化，似乎更容易帮你在头脑里绘出物理图像，但我们不常用，反而是用 $z(\theta)$ 来用 θ 的限制以定义出畴壁厚度，有点像反解】

a. 六角(单轴)晶体的畴壁厚度：

六角晶体的各向异性能体密度 $G(\theta) = F_K = K_1 \sin^2 \theta$ ，现在我们要将其用“磁矩与 y 轴夹角的 θ ”表示，于是 $g(\theta) = G(\frac{\pi}{2} - \theta) = K_1 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \theta) = K_1 \cos^2 \theta$ 。代入 $z(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta$
 $= \int_0^\theta \sqrt{\frac{A_1}{K_1 \cos^2 \theta}} d\theta = \sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \ln[\tan \theta + \sec \theta] - 0 = \sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \ln[\tan \theta + \sec \theta]$ ，而其中 $\tan \theta +$
 $\sec \theta = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2}{(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})} = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\tan \frac{\theta}{2} + 1}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{\tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\pi}{4}} = \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$ ，
 代入得 $z(\theta) = \sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \ln[\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})]$ 。

以 (z, θ) 画出图来[虽然函数关系是 $\theta(z)$]，可见 $|z| \rightarrow 0$ ， $\frac{d\theta}{dz}$ 越大，这符合我们的预期。我们不妨用 $\theta = \frac{d\theta}{dz} \big|_{z=0} \cdot z$ 这条过 $(0, 0)$ 的直线，与上下两条直线 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 的两个交点，的横坐标 z 之差，来定义畴壁宽度 δ 。——当然，我觉得更好的描述是用 $z(\theta)$ 所对应的 (θ, z) 图： $z = \frac{dz}{d\theta} \big|_{\theta=0} \cdot \theta$ 这条过 $(0, 0)$ 的直线与左右两直线 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 的两个交点，的纵坐标 z 之差，来定义畴壁宽度 δ ：根据 $\frac{\delta}{2} / \frac{\pi}{2} = \frac{dz}{d\theta} \big|_{\theta=0}$ ，利用 $dz = \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta$ ，得到 $\frac{dz}{d\theta} \big|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{A_1}{g}} \big|_{\theta=0}$
 $= \sqrt{\frac{A_1}{G(\theta)}} \big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{A_1}{K_1}}$ ，于是 $\delta = \pi \sqrt{\frac{A_1}{K_1}}$ 。

其中， $A_1 = \frac{As^2}{a}$ 为交换常数，量级为 $10^{-11} \sim 10^{-12} \text{ J/m}$ ， K_1 为各向异性常数，量级为 10^{-4} J/m^3 ；二者之商单位为长度单位 m ，量级为 $10^{-7} \sim 10^{-8} \text{ m}$ ，比磁畴的 10^{-6} m 要小 1~2 个数量级，我觉得这比例作为现实中的容器与容器壁，都非常合理。【上帝巧夺天工的创造啊。说不定蜂窝结构也能这么算出来：最少材料+最大空间，也是极值问题】

对于更小的尺寸的壁 ($< 10^{-8}$) 或磁畴 ($< 10^{-6}$)，则这套理论就不适用了，不能用这两个数学表达式计算磁畴或畴壁尺寸。【这很有意思，设定的可 $\pm \infty$ 的 z ，畴壁的 Δz 却是个小小的有限值，其相对大小还恰到好处】

b. 六角晶体的畴壁能面密度：既然我们从 a. 中得到了 $g(\theta) = K_1 \cos^2 \theta$ ，于是

$$\gamma_w = 2\sqrt{A_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{g(\theta)} d\theta = 2\sqrt{A_1 K_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 4\sqrt{A_1 K_1}.$$

同样，因 $A_1=10^{-11}\sim 10^{-12}\text{J/m}$ 、 $K_1=10^{-4}\text{J/m}^3$ ，于是 γ_w 在 $10^{-3}\sim 10^{-4}\text{J/m}^2$ 左右。巧的是，单位也恰到好处。

2.对于 90°布洛赫壁：

同样记开始过渡时的磁矩朝向为 x 轴，则过渡完成时的磁矩//y 轴(朝向 y 轴)。

稍有不同但又非常相似： $\theta(-\infty)=\frac{\pi}{2}$ 、 $\theta(+\infty)=0$ 、 $\theta(0)=\frac{\pi}{4}$ 。—— $z=\pm\infty$ 处的磁矩方向只偏转了 90°，而非 180°，对应畴壁两端面的磁矩方向垂直，即两邻畴的 \mathbf{M}_s 垂直。

【为什么 z 轴中间，即壁的中间，非得是 $\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{4}$ 呢？我想，这种对称性的理由，来源于“没有理由不对称”——如果真的不对称，你找不到任何理由解释它；但若对称，则似乎不需要任何理由就能自然成立。两畴和畴壁材质相同，最终结果将只能这样】

④.a.立方晶体的畴壁厚度：

既然两端面的磁矩都朝向立方晶体的易轴，以 Fe 为例，(1,0,0)是易磁化轴。于是 $z=\pm\infty$ 处的磁矩分别朝向 $(1,0,0)=\mathbf{i}$ ，和 $(0,1,0)=\mathbf{j}$ ，即 x,y 轴也都因同向于磁矩的设定而与易轴重合了。因此可以直接沿用当时对晶体的易轴的三个方向余弦，到这里的对所设坐标轴的三个方向余弦上，其中仍设磁矩与 y 轴的夹角为 θ ： $\alpha_1=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ 、 $\alpha_2=\cos\theta$ 、 $\alpha_3=\cos\frac{\pi}{2}=0$ 。那么， $g(\theta)=K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2)=K_1(\sin^2\theta\cos^2\theta+0+0)=K_1\sin^2\theta\cos^2\theta$ 。

$$\text{代入(注意积分下限的改变)} z(\theta)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \sqrt{\frac{A_1}{g}} d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} d\theta=2\sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{1}{\sin 2\theta} d\theta \\ =\sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \ln[\tan\theta] - 0 = \sqrt{\frac{A_1}{K_1}} \ln[\tan\theta].$$

于是 $\frac{\delta}{2}/\frac{\pi}{4}=\frac{dz}{d\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$ ，利用 $dz=\sqrt{\frac{A_1}{g}}d\theta$ ，得到 $\frac{dz}{d\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{A_1}{g}}|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{A_1}{K_1/4}}=2\sqrt{\frac{A_1}{K_1}}$ ，于是仍有 $\delta=\pi\sqrt{\frac{A_1}{K_1}}$ 。

可见， K_1 大时候 δ 小，畴壁宽度比较窄，迫使其内的 θ 随 z 变化快；而 K_1 小时，各向异性也大。因此各向异性又与 θ_z 挂钩了。

b.立方晶体的畴壁能面密度： $g(\theta)$ 代入畴壁能面密度 γ_w (注意积分下限的改变)，即有 $\gamma_w=2\sqrt{A_1}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\sqrt{g(\theta)}d\theta=\sqrt{A_1K_1}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}|\sin 2\theta|\cdot d\theta=\frac{1}{2}\sqrt{A_1K_1}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d2\theta= \\ \frac{1}{2}\sqrt{A_1K_1}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\sqrt{A_1K_1}$ 。

δ 与六角晶体一样，而 γ_w 差个4。

5.3 均匀铁磁体中的磁畴结构

里面没有杂质，没有缺陷(空泡)。

一.开放型片状磁畴

厚度比较大的晶体中易出现。 $E = E_d + E_w = 1.7 \times 10^{-3} M_s \sqrt{\frac{\gamma_w L}{17}} + 10^{-4} M_s \sqrt{17 \gamma_w L}$;
 $D = \frac{10^4}{M_s} \sqrt{\frac{\gamma_w L}{17}}$ 。

二.闭流型磁畴结构(存在表面磁畴)

a.立方.Fe 为例： $E_{\text{片}} = 19.94 \text{ J/m}^2 > E_{\text{闭}} = 0.127 \text{ J/m}^2$ ； $D_{\text{片}} = 1.59 \times 10^{-6} \text{ m}$ <
 $D_{\text{闭}} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ 。

$K_1 > 0$ ，表面磁畴的 M_s 所朝的横向100方向也是易轴方向，各向异性不变，但表面退磁能被抵消了很多，闭流的能量低于片状，更容易形成闭流。

b.六角型：两种都可能出现，因为闭流型的面上各项异性比较大(磁矩 \perp 易轴)。

三.表面磁畴

a.圆锥形：主要出现在六角晶体。降低退磁能。

b.树枝状：若在内部，则倾向于移动到杂质处；就像空泡喜欢呆在畴壁中，而非磁畴中一样。

5.4 薄膜的磁畴结构

当 $\delta \gg L$ ，即 L 很薄时， $N = \frac{\delta}{L+\delta} = 1$ ，退磁能很大。

对 Fe 而言，当 $L = 5 \times 10^{-7} \text{m}$ 时， $\frac{\delta}{\delta_{\text{块}}} = 0.21$ ， $\frac{\gamma}{\gamma_{\text{块}}} = 3.6$ 。【块是指 L 不薄时】

此时将出现布洛赫线：畴壁中的畴壁——另一个方向上、更小区域中的快速连续过渡。

达到临界厚度 30~40nm 时，出现 Neel 型畴壁，磁畴的 \mathbf{M}_s //大面取向，畴壁中的磁矩不再上过渡轴旋转，而在平面内转，∴否则将在大表面上产生多的净磁荷和大的退磁能 E_d 。

5.5 单畴结构

临界尺寸：

	球形(radius)	圆柱形(length)
Fe	18nm	11.4nm
Ni	41nm	26nm

Ni 的 \mathbf{M}_s 小，(N 同时，退磁场小，)退磁能小，所以其端面面积可大一点，对应尺寸/体积可大一点。

第六章 技术磁化理论

加准静态磁场时探索所得的规律。

6.1 磁化曲线

一.磁化曲线

1.起始磁化区域

$M = \chi_i H$, χ_i 为起始(initial)磁化率。可逆磁化：若从 0 开始增加的场 H 终没有高于 1 区高度，则撤掉磁场后 M 会沿着曲线自动复原回 0。

2.瑞利区域

$M = \chi_i H + b H^2$, χ_i 为起始磁化率, $\chi = \chi_i + b H$ 。

3.陡峻区域

χ 很大，曲线陡，最大磁化率 χ_{\max} 落在这里。不可逆磁化。

4.趋于饱和的磁化区域

χ 变小，曲线平缓。 M 达到饱和 M_s 时的 H ： H_s 。

二.磁化过程的物理机制

1.畴壁移动

①.考虑 180 度畴，若所加磁场平行于自发磁化，则 M_s 同向于 H 的磁畴能量更低，倾向于宽度拓宽，对应着畴壁的移动。

【畴壁的移动，实际上是那些 M_s 反向于 H 的磁畴中的一个磁矩，排着队先后通过畴壁逐渐过渡到 M_s 顺着 H 的磁畴中去，导致 M_s 顺 H 的磁畴内磁矩数目变多， M_s 逆 H 的磁畴内的磁矩数目变少；畴壁扫过了多少体积，其中的所有磁矩便完成了方向的转变、所属集合/身份的转变、从磁位能高的状态过渡到了低磁位能的状态。——畴壁的移动，就像波的传播一样，小磁针(类比质点的 x)本身是待在原地不动的，只是转动；而转动状态(类比 y 向振动)的传播，就是畴壁的移动。】

②.理想晶体的畴壁移动永远可逆。不可逆的畴壁移动，是因为过程中越过了一些缺陷：**a.内应力起伏分布，有些地方比较紧凑；b.铁磁体组成成分的起伏分布，如杂质、气孔、非磁性物质等。**

③.以上只适用于体积大、多畴态的晶体。【正如畴壁厚度处所言，不能用这套理论算更小的】

2.磁畴转动

- ①.起始磁化区域：可逆畴壁移动。
- ②.瑞利区域：畴壁移动快速增加。
- ③.陡峻区域：不可逆畴壁移动，磁畴转动。
- ④.趋于饱和的磁化区域：磁畴转动。

3.获得高起始磁化率的条件

(可逆移动更快，对应高 χ_i ；磁畴转动也影响起始磁化率，要求也是这几点；软磁材料就需求随外场响应快)

- ①.高饱和磁化强度 M_S 。
- ②. K_1 和磁致伸缩系数 λ_S 小。
- ③.结构要完整均匀，晶格变形/错位小。【这或许与 λ_S 、应力 σ 起伏分布有关】
- ④.材料成分要纯，杂质浓度小。

三.起始磁化率

1.由畴壁移动所决定的起始磁化率：【对应于二.1.②.中的两点】

1).应力理论

180°畴壁位移并不构成阻力，畴壁能密度的改变仅依赖于内应力 $\sigma(x)$ 。将应力 $\sigma(x)$ 看做随坐标正弦变化，极小值对应畴壁位置，可推得 $\chi_{i-180^\circ} = \frac{2}{3\pi^2} \frac{\mu_0 M_S^2}{\lambda_S \Delta \sigma} \cdot \frac{l\alpha}{\delta^\circ}$

$\Delta\sigma$: 内应力起伏变化的 2 倍振幅大小，峰峰值。

l : 内应力起伏变化的波长。

δ : 畴壁厚度。

α : 充实因子=实际畴壁数/ $\sigma(x)$ 的极小值数。【一种修正：实际上每个极小值处并非都有 180° 畴壁】

2).材料成分的起伏

	不含杂	含球杂
χ_{i-180°	$\frac{2\mu_0 M_S^2 a \alpha}{\pi \gamma_{\parallel}}$	$\frac{\mu_0 M_S^2 \alpha}{K_1 \frac{\delta_{\parallel}}{d} \beta^3}$
χ_{i-90°	$\frac{1\mu_0 M_S^2 a \alpha}{\pi \gamma_{\perp}}$	$\frac{\mu_0 M_S^2 \alpha}{K_1 \frac{\delta_{\perp}}{d} \beta^3}$

d : 杂质球体直径; α : 杂质与杂质的距离; β : 杂质占整个体积的比例。

可见 χ_i 都与 M_S^2 成正比。

2.磁畴转动决定的起始磁化率:

1).各向异性决定

转动过程是个准静态过程，其上各点的近似平衡态，于是各项异性能、外场能之和 $F=F_K + F_H$ ，需保证在各个 θ 处均取极小值。由于转动的时候是整个磁畴一起转动，交换能不变，所以不考虑其入 F 中。【磁畴整个转动，体积、面积和形状应该没怎么变，退磁能也大约不变嘛】

①.六角晶体(单轴各向异性)

比如 H 从零开始加在 \perp 易轴 k 的方向，则单位体积的各向异性能 $F_K=K_1 \sin^2 \theta$ ，外场能 $F_H=-\mu_0 M_S \cdot H \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)=-\mu_0 M_S \cdot H \sin \theta$ 。【如果各向异性能数学形式不变，则外场能得改变；否则反之】

$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial (F_K + F_H)}{\partial \theta} = 2K_1 \sin \theta \cos \theta - \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H} \cos \theta = 0$, 得到 $2K_1 \sin \theta = \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H}$, 于是 $H = \frac{2K_1 \sin \theta}{\mu_0 \mathbf{M}_s}$, 而 $\mathbf{M}_H = \mathbf{M}_s \cdot \sin \theta$, 于是 $\chi_i = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_H}{\partial H} \right)_{H \rightarrow 0} = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_H}{\partial \theta} \right)_{\theta \rightarrow 0} / \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_{\theta \rightarrow 0} = \mathbf{M}_s / \frac{2K_1}{\mu_0 \mathbf{M}_s} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_s^2}{2K_1}$.
 【 $\chi_i = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_H}{\partial H} \right)_{H \rightarrow 0}$ 与我们之前的“磁晶各向异性常数 K ”、磁化功的引入不谋而合】

②.立方晶体

设 θ 为 \mathbf{H} 与某易轴如 x 轴 $[100]$ 的夹角, \mathbf{H} 与 \mathbf{M}_s 在 $\perp z$ 轴 $[001]$ 的平面 (001) 上。
 $F = F_K + F_H = K_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H} \cos(\theta - \varphi)$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{K_1}{2} \sin 4\varphi - \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H} \sin(\theta - \varphi) = 0$, 得 $H_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{K_1 \sin 4\varphi}{2\mu_0 \mathbf{M}_s \sin(\theta - \varphi)}_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{K_1 4\varphi}{2\mu_0 \mathbf{M}_s \sin \theta} = \frac{2\varphi K_1}{\mu_0 \mathbf{M}_s \sin \theta}$, 而 $\mathbf{M}_H = \mathbf{M}_s \cdot \cos(\theta - \varphi)$, 得 $\chi_i = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_H}{\partial \varphi} \right)_{\varphi \rightarrow 0} / \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)_{\varphi \rightarrow 0} = \mathbf{M}_s \sin \theta / \frac{2K_1}{\mu_0 \mathbf{M}_s \sin \theta} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_s^2}{2K_1} \sin^2 \theta$. 【单位很合适, 分子分母都是能量密度, 得出的磁化率也是无单位】

对于多晶体, $\sin^2 \theta$ 的统计平均值 $\overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3}$, 于是 $\chi_i = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_s^2}{3K_1}$, 跟接下来的应力结果差不多。【这个在 $\bar{\lambda}_0$ 处遇到过?】。

2).应力决定

$\lambda_s \sigma \gg K_1$ 即磁晶各向异性性能较弱时, 若外磁场从 0 开始往 $\perp \sigma$ 方向加, $\theta = \langle \sigma, \mathbf{M}_s \rangle$, 则在这个过程中 $F = F_\sigma + F_H = -\frac{3}{2} \lambda_s \sigma \cos^2 \theta - \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H} \sin \theta$,
 $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 3\lambda_s \sigma \sin \theta \cos \theta - \mu_0 \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H} \cos \theta = 0$, 得 $H = \frac{3\lambda_s \sigma \sin \theta}{\mu_0 \mathbf{M}_s}$, 而 $\mathbf{M}_H = \mathbf{M}_s \cdot \sin \theta$, 得 $\chi_i = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_H}{\partial \theta} \right)_{\theta \rightarrow 0} / \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_{\theta \rightarrow 0} = \mathbf{M}_s \cdot \sin \theta / \frac{3\lambda_s \sigma \sin \theta}{\mu_0 \mathbf{M}_s} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_s^2}{3\lambda_s \sigma}$. 【单位很合适, 分子分母都是能量密度, 得出的磁化率也是无单位】

从这些表达式中也可看出, 要想获得高磁化率 χ_i , 需增大 \mathbf{M}_s 和 λ_s 、 K_1 (以及内/外应力 σ)。

6.2 不可逆磁化过程

一.不可逆畴壁移动【可能 link to 三.1.】

180°畴壁的位移磁化方程: $2\mu_0 \mathbf{M}_s H = \frac{\partial \gamma}{\partial x}$. 随着 H 的增大, 刚开始 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 可以附和它连续地增大, 以使得等式成立, 此时随着 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 的连续增大, x 也是连续增大的。但之后 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 的继

续连续增大，将导致 x 的不连续增大，即巴格豪森跳跃。【单位很合适，右边的分子/分母=面密度/长度=体密度，而左边的类似磁化功，也都是能量密度】

这是由于以 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 为纵轴，以 x 为横轴的，从 x 小到 x 大的小山峰一个比一个高，这样在保证从下往上的 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 连续变化时， x 在刚开始的连续之后，变得一次次跳到下一个山峰的向阳/迎风坡。这就解释了：

①. H 较小时，使得 x 处于 $x < a$ 区间，是可逆磁化。

②. H 较大迫使 $x > a$ 后，畴壁去了第二个山峰就无法自发地回到第一个山峰(降 H 时 $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ 下降，畴壁从山峰的迎风坡下来，遇到前一个山峰的背风坡过不去)；而去了第三个就无法自发地回到第二个，此乃不可逆磁化。

二.不可逆磁畴转动

立方：场把磁畴拉过 $> 45^\circ$ 度，则可能自发回到另一个易轴。

单轴：拉过 $> 90^\circ$ 度。回到同轴的反向。

6.3 磁滞回线

一.几个参数

①. H_S 到 $-H_S$ 再回到 H_S ，得到饱和磁滞回线。

②. 交流场，磁滞回线。交流场变大，每一周一个磁滞回线。连端点，得磁化曲线。

③. 面积代表不可逆磁化的程度。

与纵轴的交点： M_r 剩余磁化强度； B_r 剩余磁感应强度。

与横轴的交点： H_c 矫顽力。【 M_r, H_c 一对； M_S, H_S 一对】

二.硬磁和软磁

硬磁： H_c 大。 M_r 大，比较接近 1(倍的 M_s)。最理想的状态是个矩形+两个外沿，单畴态就是这样。

软磁： H_c 小，几乎没有磁滞。且磁导率 μ 磁化率 χ 高，倾斜程度高，对外场敏感。

三.如何提高 H_c

①.增强对**畴转磁化**的阻滞：形成单畴颗粒、增加各项异性($K_1 \nearrow$)。

②.提高**畴壁位移**的阻力：增加材料的内应力 σ ，和掺杂的不均匀性。提高材料磁致伸缩系数($\lambda_s \nearrow$ ；也属于增加各项异性)。

看上去增大 H_c 的因素，与降低 χ 和 χ_i 的因素相同——这就可联系我们之前的 χ_i 公式了。

四.影响剩磁 M_r 的因素

①.**应力**作用：

应力分布均匀，且强度较大，容易得到高剩磁， M_r 接近于 M_s 。

应力分布混乱时， M_r 接近于 $0.5M_s$ 。

②.**杂质气孔**的影响：

形成退磁场， M_r 降低。【减小了本身的整体的 M ，则 M_r 跟着降】

③.材料**织构**强，提高剩磁。

五.常见材料的属性

永磁材料： M_s 高， M_r 接近 M_s ， H_c 大。

磁记录材料： M_s 低， M_r 接近 1。 H_c 不要求，但最好小。【以便不加磁场时保持，而加了后易改变】

磁头： M_r 小。