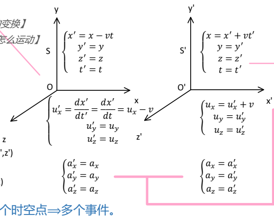
I.Introduction

2019年9月16日 14:33

- （伽利略/力学）相对性原理：同一力学规律在所有惯性系中有相同的数学表达式。

【即：所有惯性参考系（在力学规律上）平权。】
——这被称为约束/生成定律的定律。
【这句话说得不要太妙，狭义相对论就是再外加一个光速不变假设，就能一生二、二生三，三生万物中的“万物”。】

伽利略·时空变换式
【事件的时空坐标在惯性系间的变换】
【不论事件的过程如何，不论主语怎么运动】



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = u_x - v \\ u_y' = u_y \\ u_z' = u_z \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = u_x' + v \\ u_y = u_y' \\ u_z = u_z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z' \end{cases}$$

同一个事件，
在两个系下的两套时空属性/参数
【这充分说明了两个事件的时空坐标(t,r)可以相同】

- 这里用的是predict型的，即相应坐标系下的坐标在等式右边，而不是左边。

【等号：右边代表真实，左边代表预测。】

- x轴总可以选定在相对运动方向，不是吗？

【所以这是普适的，而不是一时的意淫。】

$\begin{cases} \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \end{cases}$，再已知$\begin{cases} m' = m \\ m = m' \end{cases}$、$\begin{cases} \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' \end{cases}$、$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$，得$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m'\boldsymbol{a}'$

一个更普遍的写法：
【结论是一样的】

$$\begin{cases} x' = x - x_0 - v(t - t_0) \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

此时：t_0时刻S′系相对于S系的时空坐标为(t_0, x_0, y_0, z_0)

- 结论：$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$在惯性系中表示形式不变。

【在其他惯性系[注1]中，只是变为了$\boldsymbol{F}' = m'\boldsymbol{a}'$而已】
——也就是说，若牛顿力学规律（三条）对一个惯性系成立，则对另一个惯性系也成立。
——这称为牛顿力学三定律对“伽利略时空变换”的协变性，也即（力学）相对性原理。

- 事件：占据空间一个小区域，持续一小段时间。

模型化的事件：发生在空间的一点和时间上的一瞬(x,t)的事件。
【以后常用这种表述，且默认“事件”为这种表述下的含义。】

- 一个事件⇒一个时空点；一个时空点⇒多个事件。

【即一个抽象的事件肯定同时具有x,t两点属性，有时间戳和所到之处（即飞行日志）；但若只说一个时空数组，这没有意义，因你没有给出其归属者owner/主语。】
【但这么看来，“一对多”又让人觉得有点绝对时空的感觉= =...】

- [example]：一个时间t，同时发生了两件事，是否意味着这两件事的x必须有所不同呢？

【答：显然，任何一个学过追及问题或相遇问题的同学，都不会赞同这种观点。】

- 时空：全体事件的集合。

【看上去这种“集合”也可解释为“并集”：“每个事件各自的时空属性，分别对时、空求并集，分别合成出一条1-D时间轴和整个3-D空间；然后再1-D+3-D来求个并集，合成4-D”——其中的“事件”沿用的是旧含义上的“事件”之意。】
【这句话还在暗示时空和物质是相辅相成、相伴相生的，因为事件是个过程，过程=主谓(宾)，则过程中含有“主语”，则事件需要“物质”这个必要成分作为其属性之一；而主语+谓语，似乎也暗示着“运动是绝对的”。】

注1：

i. 在狭义相对论和牛顿时空观中，有特殊参考系，且特殊参考系=惯性系。【力学问题会在非惯性系中引入惯性力，同一力学问题在不同非惯性系中的惯性力还不一样；所以非惯性系与惯性系间、非惯性系之间，都不等价】
ii. 到广义相对论中，无特殊参考系（则惯性系不再是特殊参考系、特殊参考系也不再是惯性系），且没有惯性系。

- 一朵乌云 | 矛盾

- 麦克斯韦方程组$\begin{cases} \nabla \cdot \mathrm{E}(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}\text{（真空、非稳恒）} \\ \nabla \times \mathrm{E}(\chi) = -\frac{\partial \mathrm{B}(\chi)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathrm{B}(\chi) = 0 \\ \nabla \times \mathrm{B}(\chi) = \mu_0[\mathrm{J}(\chi) + \mathrm{J_D}(\chi)] = \mu_0[\mathrm{J}(\chi) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}(\chi)}{\partial t}]\text{（真空、非稳恒）} \end{cases}$，在伽利略时空变换下，无法回到该最初的简单形式，即其数学形式会改变。

——这意味着（伽利略）相对性原理，只适用于力学，而不适用于电动力学。
——即麦克斯韦方程组对“伽利略时空变换”不是协变的。

- 发人深省的可能（的解释）们：

1. 可能之一：如果除了“伽利略时空变换”外，找不到另一种（对惯性系的）变换操作，使得麦克斯韦方程组对其是协变的，（即假设：力学规律能够对于“某生成定律的定律”协变，而电磁规律没有这样的“生成定律的定律”的主子）
   那么麦克斯韦方程组即使正确，也只能正确于某一特殊的惯性系中（因为没有一个另外的协议，使得麦克斯韦方程组能成立于其他惯性系），即只能成立于所有特殊参考系中的那个最/更特殊的参考系中。
2. 可能之二：如果“伽利略时空变换”理应适用于除了力学规律外的所有规律，包括电磁规律——即“真正正确的麦克斯韦方程组”对“伽利略时空变换”是协变，（而由于“伽利略时空变换”已经将脚步伸入了电磁规律，那么“正确的麦克斯韦方程组”必须服从该“管定律的定律”）
   那么这个麦克斯韦方程组由于不服从“伽利略时空变换”，而是“假的、不正确的麦克斯韦方程组”，以至于其对“伽利略时空变换”不协变的原因，在于其数学形式上错了。
3. 可能之三：如果“伽利略时空变换”与“此麦克斯韦方程组”均正确，（该命题是可能的，但最终证明是不正确的：伽利略变换是错误的，即使作为洛伦兹变换的低速极限【在力学规律上是对的，但在电磁规律上仍错了】）
   那么“伽利略时空变换”与“此麦克斯韦方程组”无关，而后者是关于另一个“其他时空变换”操作/协议/规范定律的定律，而协变的；且“其他时空变换式”与“伽利略时空变换式”完全独立不兼容。（前者单独只适用于电磁规律、后者只单独适用于力学规律，分属两套“创造规律的规律”）。
4. 可能之四：如果“伽利略时空变换式”是某个“新时空变换式”的子集/特殊情况/极限，而不是两相独立的变换协议，（比起力学和电磁学规律的统一，我们更希望“约束力学规律的规律”和“约束电磁规律的规律”的统一，即“相对性原理”是普适的：力学规律和电磁规律均协变于同一套“生成定律的定律”）
   那么可以做到：“此麦克斯韦方程组”对“新时空变换式”协变的同时，“新时空变换式”又可过渡到“伽利略时空变换式”。

- 解释的精炼化，及其相应solution：

1. 可能之一：“伽利略时空变换”正确但只适用于力学规律+没有任何其它的时空变换适用于电磁规律=“麦克斯韦方程组”正确但只正确于“以太”这一更特殊的惯性系中，或者错误。
   实验：迈克尔逊干涉
   推测：干涉条纹理应移动、光速在各惯性系中速度应该不同、找“以太”的存在；
   结果：干涉条纹没有移动，光速于各个惯性系相同，“以太”不存在；
   结论：“麦克斯韦方程组”正确，（且不止正确于“以太”这一惯性系），正确于所有惯性系，（没有“以太”这一特殊的惯性系），因此存在一个不同于“伽利略时空变换”的时空变换，使得“麦克斯韦方程组”协变于之；同时，“可能之一”被否定。
2. 可能之二：“伽利略时空变换”正确理且适用于除了力学规律外的所有规律，包括电磁规律=“麦克斯韦方程组”的数学形式错了，不是对“伽利略时空变换”协变的“真正正确的麦克斯韦方程组”。
   结论：光速确实于各惯性系中不变，而光速不变是“麦氏方程组”的推论，因此很有可能“麦氏方程组”是对的（除非有另一形式的麦氏方程组也导出光速不变），那么“伽利略时空变换”确实不适用于电磁规律，必须另谋高就；同时，“可能之二”被否定。
3. 可能之三：“伽利略时空变换”正确但只适用于力学规律+“麦克斯韦方程组”正确且协变于“其他时空变换”=“其他时空变换”与“伽利略时空变换”不兼容，前者不适用于力学规律，但适用于电磁规律（以及可能的其他规律）。
   结论：我们只有一个时空，怎会有两套或两套以上的“时空变换”？以服务于不同学科 Subject的规律，使得它们分别协变于各套“时空变换”？因此，“可能之三”被否定。
4. 可能之四：“伽利略时空变换式”错误且是某“新时空变换式”的某极限情况且在该极限情况下“勉强”正确+“麦克斯韦方程组”正确且协变于“新时空变换式”。
   结论：“伽利略时空变换”对力学规律适用，对电磁规律不适用+一个时空只能有一种时空变换式普适于所有物理规律+“新时空变换式”要既对力学规律适用，又对电磁规律适用=“新时空变换式”与“伽利略时空变换”在数学形式上不同（否则怎么对电磁规律适用？）+
   在力学规律上在某个方向的极限下能过渡到“伽利略变换”（而不是二者分别适用于力学规律，而无法互相过渡、非 cover关系or没有交集，否则一个时空有两种“时空变换式”；而且在经验上，在力学规律上，伽是对的）+在电磁规律上可用于“麦克斯韦方程组”的协变。

II.狭义相对论（Special Relativity / S.R.）

2019年9月16日 14:34

两条基本假设

- 框架性假设——（狭义相对论的）相对性原理：不止力学规律，任意某个指定的物理规律，其数学形式在任何惯性系中均相同；即这些rules均对某同一个“时空变换式rulesmd.ini”协变，在同一个协约下跨系不变。
  【“任意一个物理规律”，在这里，主要是指电磁规律（和力学规律）；在推导狭义相对论时，主要是指力学规律；在应用狭义相对论时，主要是指电磁规律】
- 约束性假设——光速不变原理：真空下，任何惯性系，对任何一束电磁波的速度的测量，大小均为c。
  【这是麦克斯韦方程组的推论，满足它的“时空协变式”虽然不一定能使得麦氏方程组协变于该“时空协变式”，但不满足它的一定不能使得麦氏方程组协变于该“时空协变式”；何况满足这两假设的时空变换，不会有很多，只有一个】

III.张量分析

2019年9月19日　　16:10

一. S.R.中的张量

1. 坐标微分的变换规则

1) S.R.：平直的4-D闵氏时空

2) 对应的时空变换（属于坐标变换$x'_\mu|P=x'_\mu(x'_1,x'_2,\dots,x'_n|P)$，$\mu=1,2,3,4$）是线性变换

3) 坐标变换对应的坐标微分变换：$dx'_\mu=a_{\mu\alpha}dx_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\alpha}\,dx_\alpha$（$\mu=1,2,3,4$）

- 四个方程
- 其中$a_{\mu\alpha}$是零维张量：数
- 而x'_μ和x_α为同一事件分别在新、老4维坐标系中的4个坐标值之一。【S.R.中一般用“一瞥”来表示新坐标系下的有关物理量】
- 之所以不用ν而用α，是因为在正变换中，μ(miu),ν(niu)一般为某特定值；而α,β为将要取遍的求和指标；而逆变换反之。

4) 逆变换：$dx_\alpha=(a^{-1})_{\alpha\mu}dx'_\mu$

- 省略了α的四个取值，仍是四个方程；省略了求和符号，即默认应用了爱因斯坦约定：相乘的因子若有相同角标，则对该项自动求和。
- 实际上这里本该写作$\left(A^{-1}\right)_{\alpha\mu}$的？不不不，正是因为$a_{\mu\alpha}$是4阶矩阵A的$(\mu,\alpha)$处的元素。那么对称地，仿照之，$\left(a^{-1}\right)_{\alpha\mu}:=A^{-1}$的$(\alpha,\mu)$处的元素。
  其中$A^{-1}A=I$（或E），对应$\left(a^{-1}\right)_{\alpha\mu}a_{\mu\beta}=\sum_{\mu=1}^{4}\left(a^{-1}\right)_{\alpha\mu}a_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta}$。或$AA^{-1}=I$，对应$a_{\alpha\mu}\left(a^{-1}\right)_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta}$。
  【逆变换中，右侧的$\alpha\mu$、$\alpha\mu\mu\beta$中的μ，在地位上都是被求和的对象】

2. 张量的三点属性：几阶、几维、符合何种坐标变换

1) 0阶张量=标量，有n^0个分量：U'=U，或详细地写作$U'(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=U(x_1,x_2,\dots,x_n)$、$U'(x'|p)=U(x|p)$

【U也是电势用的符号，所以是标量场？；x'=x'(x)、x=x(x')、U'(x')=U(x)，可见$(U')^{-1}[U(x)]=x'=x^{-1}(x)$；或者将U'(x')=U(x)理解为不变量，该坐标变换的不变量本质上与坐标变换如出一辙（分号后面这句话倒是对的，只不过应该写作U'(x'|P)=U(x|P)，下面的这一段中的x、x'们也得改成点而不是某个点的某个坐标，不过关于不变量的说法倒是正确的；不过若将x、x'理解为对P点坐标的简写，那倒是对的）】

【线元是不变量的一种，除非x和x'都变成dx、dx'，则这里的U'、U也可以代表线元；不过还是将其理解为不变量罢，其中x'与x为同一点分别在S'、S坐标系中的坐标值，而U'、U为这同一点的某个属性，U'(x')与U(x)为这同一点的该属性在两个系中的量度下的值，因都反映了该属性而相等——比如一个特例：x'=x'(x)，其中可以认为U'(·)=·、U(·)=x'(·)，类似的还有坐标（间隔）x、dx'、dx、时间间隔dt'、dt、时空间隔ds'²、ds²等】

【以上同样式的错误之处在于：即使是0阶张量，也可能处于n维时空中，那么即使是标量场，也是n维的标量场，场和坐标系的空间坐标分量均有n个。所以不该直接写x和x'，除非指明了它们分别代表新旧n维坐标系下对同一点p的表示方法$(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$、$(x_1,x_2,\dots,x_n)$】

- 当P点的坐标由$(x_1,x_2,\dots,x_n)$来描述时，该点的某个属性用U来描述；
  当同一点P的坐标由另一个坐标系下的$(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$来描述时，
  该点同样的那个属性需要用另一个函数关系式U'来描述，才能使得：

  当$(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)\neq(x_1,x_2,\dots,x_n)$时，恰因$U'(\cdot)\neq U(\cdot)$，
  而能有$U'(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=U(x_1,x_2,\dots,x_n)$

2) 1阶张量=矢量，有n^1个分量：$V'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu$，或详细地写作$V'_\mu(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=a_{\mu\nu}V_\nu(x_1,x_2,\dots,x_n)$、$V'_\mu(x'|P)=a_{\mu\nu}V_\nu(x|P)$，μ,ν={1,2,...,n}

【V means Vector？；你可以刚开始认为$V'_\mu=V'_\mu(V_1,V_2,\dots,V_n)$、$dV'_\mu=a_{\mu\nu}dV_\nu$，μ,ν={1,2,...,n}】

- 对于一阶张量，$V'_\mu(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=V_\mu(x_1,x_2,\dots,x_n)$已经不够了；但要怎么拓展才合理呢？

  答：仿照坐标微分变换。因为这种数学上已经存在的变换——坐标微分变换，实际上就是以某点为原点，空间上该点的某邻近点的坐标变换！这种（高一阶的）第二阶段的坐标变换，理应就是一阶张量的变换所应满足的数学形式。

  因此仿照标量（0阶张量）x的坐标微分变换，便有一阶张量的变换。
  【或是因为：坐标微分变换有点像矢量场，这样一阶张量场同样作为矢量场，其变换法则，应该与坐标微分变换采取相同数学形式】

3) 2阶张量，有n^2个分量：$T'_{\mu\nu}=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}$，或详细地写作$T'_{\mu\nu}(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}(x_1,x_2,\dots,x_n)$、$T'_{\mu\nu}(x'|P)=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}(x|P)$，μ,ν,α,β={1,2,...,n}

【T means transfer？；Wrong Fantacy again：$T'_{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}(T_{11},T_{12},T_{21},\dots,T_{nn})$、$dT'_{\mu\nu}=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}dT_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}dT_{\alpha\beta}$，μ,ν,α,β={1,2,...,n}——这种想法是基于熟悉的数学表达式，让人联想：A坐标系下的每个分量，都是B坐标系下的每个分量的函数，反之亦然（逆变换），那么其的微分就很容易写出来了，其中的$a_{\mu\nu}$、$a_{\mu\alpha}$、$a_{\nu\beta}$应该都是一阶偏导；且可以理解为某系某坐标轴上某一短向量，=其在另一个坐标系的各个坐标轴上的投影之和。】

【但事实上，$T_{\alpha\beta}$、V_ν、U，既是函数也是张量（分量），即它们既同时是关于空间上某点（如P）or某一个坐标$(x_1,x_2,\dots,x_n)$的函数，又分别是是关于$(T_{11},T_{12},T_{21},\dots,T_{nn})$、$(V_1,V_2,\dots,V_n)$、x的函数，同时也分别是张量T、V、U的$n^2$、n、1个分量们之一，在地位上它们都是标量，即在地位上有$x_?=U=V_\nu=T_{\alpha\beta}$，但我们仍不能把它们当作标量、坐标看待，至少不能等同于$x_1,x_2,\dots,x_n$们，但可以像它们：因为对于T而言，$T_{\alpha\beta}$也只是最细枝末节的分量、标量们；但对于$x_1,x_2,\dots,x_n$们$T_{\alpha\beta}$却是它们的函数：$T_{\alpha\beta}(x_1,x_2,\dots,x_n)$】

- 一.2.这一块只是为了沿用S.R.中的符号，但在变换规则上又引入了张量的运算规则。

  这种衔接确实有点不伦不类。不过要知道，它们由于满足这样的运算规则，而已经算是逆变张量了。

  只是现在还没有引入逆变指标和（表示新系的）波浪号，而仍沿用下标以及（表示新系的）一瞥表示罢了。
  【衔接不要来得太猛；但事实上来得猛点似乎更好，正如俞允强的那本书一样】

- 三级标题下面的注释，多是在解释张量所符合的坐标变换与（标量x）的坐标微分变换，有多么地不同。

  但黄色的这些框框内的注释，多是在解释张量所满足的坐标变换，就是出自（标量x）的坐标微分变换。
  【这是在看了俞老的书后，才发现他们是多么地相同。】

二. G.R.中的张量

- 由于标量（零阶张量）是定义在某一空间点（标量场点）上的，其值大小因场点选取而异，因此张量也是定义在某一空间点上的。

1. 坐标微分的变换规则

1) S.R.：4-D闵氏时空

2) 对应的时空变换/坐标变换：$\tilde{x}^\mu=\tilde{x}^\mu(x^1,x^2,x^3,x^4)$、

3) 坐标微分变换：$d\tilde{x}^\mu=a_{\mu\alpha}dx^\alpha=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$（$\mu=1,2,3,4$）

- 现在用上角标表示逆变指标，之前出于以往的数学习惯而用的下角标，现在规范了它们。
- x^α：4维一阶逆变张量。

- 即使坐标变换、坐标微分变换不是线性的，相应的坐标微分变换也将是线性的（足可见坐标微分变换与张量变换的区别）：但系数or变换矩阵随不同点而不同。
- 因此若也类似地定义张量所满足的变换，则张量的变换也得是定义在某一空间点（标量场点）上的。
  【这不能说张量的坐标变换？而得说张量变换；因为若在x标量场下看这个问题，则张量所满足的变换是：随着坐标变换而进行的变换，因为此时张量各分量更偏向于一种函数关系，要比x高一级；
  但若在张量所在的矢量场中来看这个问题，则其实可以说成张量的坐标变换，因为此时张量各分量更偏向于张量场中的各坐标，之间是同级的。】

4) 逆变换：$dx^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}d\tilde{x}^\mu$（$\alpha=1,2,3,4$）

- 设$\det\left|\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right|$代表以$\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$为第$(\mu,\alpha)$号矩阵元，所对应的变换矩阵，的行列式值，则若$\det\left|\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right|\neq0$，
  意味着存在$\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$对应的变换矩阵所对应的逆矩阵（以后在必要时，我们直接视$\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$为矩阵）。
  则相应的逆变换也存在：$dx^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}d\tilde{x}^\mu$（$\alpha=1,2,3,4$）。

5) 利用逆变换导出的一个推论：$\delta^\mu{}_\nu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}$

- 将逆变换换个写法，用ν表示μ，得到$dx^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}d\tilde{x}^\nu$，两边分别同乘以正变换$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$，两边约掉$dx^\alpha$，得$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}d\tilde{x}^\nu\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}d\tilde{x}^\nu=d\tilde{x}^\mu+\sum_{\nu\neq\mu}^{n}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}d\tilde{x}^\nu$，得到$\sum_{\nu\neq\mu}^{n}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}d\tilde{x}^\nu=0$、$\sum_{\nu\neq\mu}^{n}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}=0$，理应各项$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}$分别=0（$\nu\neq\mu$），而又因$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}=1$（$\nu=\mu$），于是便有$\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}=\delta(\mu,\nu)=\delta^\mu{}_\nu$（最后这个等号还没有给出定义，之后才能给出），它的逆矩阵为$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}$。

2. 仿射空间中的逆变张量

1) 0阶逆变张量=标量：$\tilde{T}(\tilde{x})=T(x)$【详细写法为$\tilde{T}(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n|P)=T(x^1,x^2,\dots,x^n|P)$；但以后均简记为之】

【不知道为什么U变成了T，且以后均又全用T了；注意，T既是张量分量（对总张量T而言；最低级），又是函数关系（对P点的坐标分量们而言；稍高一级）。】

【这里也不再强调或出现甚至轻微一提$x=\tilde{x}(x)$了，因为我们并没有在讨论坐标变换，而是在讨论同一点所对应的除了坐标外的其他的某个属性的变换。】

2) 1阶逆变张量=逆变矢量=(1,0)型张量：$\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}T^\alpha$，μ,α={1,2,...,n}

【实际上，我们最好应该标记为$\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}T^\alpha$，因为一般会先给出左边，这样的话这种“主动式标记”会很容易help写出右边的分子；而被动的分母和T^α的标记至于是什么，我们并不关心，因为对于每一个/组主动式标记μ，它都会取遍1~n】

【这里也不出现$\tilde{T}(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)=T(x^1,x^2,\dots,x^n)$、$\tilde{x}^\mu=\tilde{x}^\mu(x^1,x^2,\dots,x^n)$了，因为我们没有讨论这个问题！！】

【$\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}T^\alpha$不是坐标微分变换！它的右侧是求和！$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$（类似二.1.的开始）才是坐标微分变换！它的右侧只有一项！】

【如果$\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}T^\alpha$，则$d\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dT^\alpha$；再加上$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$，得到$\frac{d\tilde{x}^\mu}{dx^\alpha}=\frac{d\tilde{T}^\mu}{dT^\alpha}$；若加上$d\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{T}^\mu}{\partial T^\alpha}dT^\alpha$，则$\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial\tilde{T}^\mu}{\partial T^\alpha}$？】

【这里同一点（在新老坐标系下的坐标分别为$\tilde{x}^\mu,x^\mu$），都有其某属性T，其在新老坐标系的各坐标轴上的投影分别为$\tilde{T}^\mu,T^\mu$。——x是标量，但它的坐标$\{x^\mu\}$们却构成了一个从原点指向场点的矢量$(x^1,x^2,\dots,x^n)$，但它仍然是个标量，因为该矢量起点是原点，而终点只是个坐标；而T可以是高阶张量：当它是1阶张量时，这个“矢量”就与0阶张量的那种矢量不同了：它是个起点在0阶张量的终点$(x^1,x^2,\dots,x^n)$、终点在坐标系$T^1-T^2-\dots-T^n-O$(该坐标系的起点O也是0阶向量的终点)下的矢量，其起点连同其T系原点在x系下平移+其方向在T系下旋转+其大小在T系下拉伸——也就是说，如果说x是x系下的矢量，但x是T系下的标量、一阶张量T却是T系下的矢量：一阶张量T的起点在T系原点、在x系的任何一点开了花；其终点可以是T系下的任意一点，而0阶张量x的终点只能是T系的原点。】

3) 2阶逆变张量=(2,0)型张量：$\tilde{T}^{\mu\nu}=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}$，μ,ν,α,β={1,2,...,n}

【0阶张量的起点和终点在T系下都只能是T系原点；1阶张量T的终点可以是n维的T系下任何一点；2阶张量T的终点是n²维的T系下的任何一点；同理m阶张量。】

【m阶张量T的起点=其T系的原点，均是x系下某坐标矢量的终点$(x^1,x^2,\dots,x^n)$——m阶张量是在n维标量场$(x^1,x^2,\dots,x^n)$中盛开的一朵n^m维的花：标量场中盛开的一朵的张量场。】

- 0阶张量最特殊，它不随坐标变换而变。
- 不像1阶张量，1阶张量作为整体是不随坐标变换而变的，但（这就要求）它的每个分量（标量）都随着参考系的不同、随着坐标变换而变，可从其类似坐标微分变换的变换式看出。
- 0阶张量没有上指标or下指标，因为它只有自己这一个分量。而没有上下指标，意味着它没有逆变与协变的差别，即没有逆变指标or协变指标。
- 标量x是特殊的0阶张量，那么它应该没有任何指标、没有逆变指标、没有协变指标。——但$x^1,x^2,\dots,x^n$这又是怎么回事？...这是逆变指标？？
  ——不，我觉得是这样的，应该说这些有角标的分量们，单个分量作为整体，是没有角标的，是标量；而场点x，是矢量，是一阶张量，但不属于T类一阶张量，而是x类的一阶张量。
  ——所以T应该是个矢量函数，关于一个矢量场x的张量场。

- 0阶到1阶的张量的扩张，是仿照坐标1阶微分变换实现的，则1阶到2阶张量的扩张，应该仿照坐标2阶微分变换实现，即其系数理应来源于诸如$d(d\tilde{x}^\mu)=d(\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}d\tilde{x}^\mu)$?
  【之后我们会给出真正正确的来源】

- 张量是个数组。
- 而数组是否构成张量，得看数组中各个数，随着坐标变换的变换方式，是否与张量的定义长得一样。

3. 协变张量

1) 1阶协变张量=(0,1)型张量：$\tilde{T}_\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}T_\alpha$

【其T分量用的是1阶逆变张量的坐标变换顺序（但上标变为了下标）；而系数用的是坐标微分变换的逆变换的系数！】

【协变张量的系数与坐标微分变换的逆变换的系数相同；逆变张量的系数与坐标微分变换的系数相同（这或许就是为什么我们之前将逆变张量的变换与坐标微分变换错误地联系起来了）。】

【虽然T分量用的是下标（协变指标），但x仍用的是上标（逆变指标），为什么？——见下下条注释。】

【G.R.中坐标微分变换都用的是逆变指标、标量场也都用逆变指标，是不是说明只有逆变张量，or张量的逆变指标部分，才有物理意义，才称得上“物理量”？】

2) 2阶协变张量=(0,2)型张量：$\tilde{T}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha\beta}$

【协变张量所满足的变换，连同逆变张量的变换法则，对比起来，充分说明了，协变与逆变的所满足的变换式，均只是两种互补的定义而已，是定义，仿照坐标微分变换式的定义。】

【我知道那帮人为什么要定义协变指标在下、逆变指标在上了：因为在张量所满足的变换中，拥有协变指标的偏导数，处在分母的位置，在“下面”；所以满足这样的变换的指标，应该作为下标；所以协变指标在下方】

3) 2阶协变张量的逆变换：$T_{\alpha\beta}=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}\tilde{T}_{\mu\nu}$，你只需要将T认为是新系下的张量即可！因为新旧系是平权的，或者说在等式左边的就是新系，不需带撇！

【注：这与坐标微分变换的逆变换不同！那里的等号右侧是单项，而这里是求和，∴那里可以认为是两边同时乘or除以一个偏微分，而这里不行】

【同理逆变张量的逆变换、甚至混合型张量的逆变换也类似】

【协变张量的逆变换，与同阶逆变张量的正变换，系数相同，但含义完全不同：一个是对下指标求和，一个是对上指标求和。同理逆变张量的逆变换。】

4. 混合型张量

1) (1,1)型张量：$\tilde{T}^\mu{}_\nu$
   【最简单的混合型张量】

2) (p,q)阶张量=(p,q)型张量：$\tilde{T}^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$（共p个逆变指标、q个协变指标）

【共m个逆变指标$\mu,\dots,\alpha$、n个协变指标$\nu,\dots,\beta$。】

3) $\tilde{T}^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$的变换规则：$\tilde{T}^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}=(\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{p}}{\partial x^{\alpha_p}})(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\tilde{x}^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial\tilde{x}^{\nu_q}})T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\cdots\beta_q}$

【位于任何一个等式的右侧的：与等式左侧的逆变指标相同的指标，总与新系的x̃（注意不一定是x̃，这取决于T̃是否单独在左边）绑定，且总在分子上面；与等式左侧的协变指标相同的指标，也总与新系的x̃绑定，且总在分母下面】

一个例子：$\tilde{\delta}^{\mu}{}_{\nu}=\frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}\tilde{\delta}^{\alpha}{}_{\beta}=\frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\tilde{x}^{\nu}}=\delta^{\mu}{}_{\nu}$

三. 张量运算

前提：同点。

1. 加减（2个张量必须同阶）：$A^{\mu}{}_{\nu}\pm B^{\mu}{}_{\nu}=C^{\mu}{}_{\nu}$
2. 外乘：$A^{\mu}{}_{\alpha}\cdot B^{\nu}\xrightarrow{\text{升阶}}C^{\mu\nu}{}_{\lambda}$
3. 缩并：$\begin{cases}C^{\mu\lambda}{}_{\lambda}=C^{\mu}\\C^{\lambda\mu}{}_{\lambda}=D^{\mu}\end{cases}$、$\begin{cases}C^{\lambda}{}_{\lambda}=C\\C^{\lambda}{}_{\lambda}=D\end{cases}$【同一个张量中某对上下指标相同】
4. 商定理：若张量A^{μ}、$B^{\mu}{}_{\nu}$满足关系式$A^{\mu}=B^{\mu}{}_{\nu}C^{\nu}$，则$C^{\nu}$也是个张量。【可能只可能从定义上去证明它】

四. 张量的对称性

1. 从二阶开始谈起

1) $T^{\mu\nu}$关于一对逆变指标μν对称，即$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$

- 对二阶而言，即关于主对角线对称的元素相同。
- 对主对角线上的元素没有限制。
- 独立分量个数降为$C_n^1+C_n^2=\frac{1}{2}n(n+1)$个。
- 省略了坐标，加上坐标后才是完整版：$T^{\mu\nu}(x^1,x^2,\dots,x^n)=-T^{\mu\nu}(x^1,x^2,\dots,x^n)$。

2) $T^{\mu\nu}$关于一对逆变指标μν反对称，即$T^{\nu\mu}=-T^{\mu\nu}$

- 对二阶而言，则关于主对角线上的元素全是0。
- 主对角线上的元素全是0。
- 独立分量个数降为$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$个。
- 省略了坐标，这意味着只要提及张量是对称or反对称的，则它在空间上任意位置，都是对称/反对称的。
- “张量的对称性与坐标无关”只适用于逆变/协变张量，但不适用于混合张量。

3) 一般型/不对称（2,0）型逆变张量的分解：

- $T^{\mu\nu}=(\frac{1}{2}T^{\mu\nu}+\frac{1}{2}T^{\mu\nu})+(\frac{1}{2}T^{\nu\mu}-\frac{1}{2}T^{\nu\mu})=\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}+T^{\nu\mu})+\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T^{\nu\mu})=S^{\mu\nu}+A^{\mu\nu}=T^{(\mu\nu)}+T^{[\mu\nu]}$
  【S：symmetry，对称部分：$S^{\mu\nu}=S^{\nu\mu}$；A：antisymmetry，反(对)称部分$A^{\mu\nu}=-A^{\nu\mu}$】
  【圆括号表示张量关于该对指标对称；方括号表示反对称组合】
  【对一个指标说对称没有意义，对3个及以上的指标说对称，应默认张量对于这些指标中任意一对都对称】
- “将张量分解为协变部分和非协变部分两部分”这适用于逆变/协变张量，也适用于混合张量，但只适用于混合张量的一对同在上or同在下的指标。
  【对单独一个上标和单独一个下标说对称性，是没有意义的，因为此时这种对称性在坐标变换下无法保持】

2. 对称张量的性质（协变or逆变张量）

1) n维空间中m阶对称张量的独立分量个数

(1) 减法算法

- 举例说明：比如10维8阶张量，其同上or同下的角标有8个，取其10^8个分量中的一个，其角标假设是59933314，我将其记为$3_3 9_2 5_1 4_1 1_1$型。
- 由于相同数字间的调换（如9与9 or 3与3调换）无法生成新的排列（也就无法“线性组合出”/“线性表示出”新的同阶分量），所以并不能减少独立分量个数（from总数10^8）；而不同数字间的调换（如5与9、9与3调换），便能确定拥有这些调换后的排列的角标，所对应的张量分量的值（相当于59933314号分量），那么这些分量都能由这一个分量线表；
- 则独立分量个数会减少所有可能的、因相异数字之间的调换所生成的，排列个数，即减少$\frac{8!}{3!2!1!1!1!}-1$个（减一可以理解为将59933314号分量除外，或理解为者将这些分量合并生成为单独的一个$3_3 9_2 5_1 4_1 1_1$型独立分量）。
- 从更上一级分类而言，对于$3_3 9_2 5_1 4_1 1_1$型的角标，它还有同类，诸如$9_3 3_2 5_1 4_1 1_1$型，它们同属于32111这一大类型（最顶级top的分类级别class）。仿照第一条的写法，32111型又可写为$1_3 3_1 2_1$型。
- 而仿照第三条的调换方法，可见每个top大类（如$1_3 3_1 2_1$型/32111型、$2_2 3_1 1_1$型/3221型；通式$\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots=\prod_{i=1}^{l}\alpha_{i_{\beta_i}}$（严格地说不能写作相乘）的公有特点是的$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\beta_i$=阶数m、$\alpha_i\neq0$；$\beta_i$可以是零，$l$表示非零$\beta_i$的个数）下（以32111型为例），一共有$\frac{5!}{3!1!1!}$（通式：$\frac{(\sum_{i=1}^{l}\beta_i)!}{\prod_{i=1}^{l}(\beta_i!)}$）个子类（如$a_3b_2c_1d_1e_1$、$a_3c_2b_1d_1e_1$）；而每个子类（以$a_3b_2c_1d_1e_1$为例；通式$(\gamma_{11_{\alpha_{11}}}\gamma_{12_{\alpha_{12}}}\cdots\gamma_{1\beta_{1_{\alpha_{1\beta_1}}}})\cdots(\gamma_{l1_{\alpha_{l1}}}\gamma_{l2_{\alpha_{l2}}}\cdots\gamma_{l\beta_{l_{\alpha_{l\beta_l}}}})=\prod_{i=1}^{l}\gamma_{i1_{\alpha_{i1}}}\gamma_{i2_{\alpha_{i2}}}\cdots\gamma_{i\beta_{i_{\alpha_{i\beta_i}}}}=\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\beta_i}\gamma_{ij_{\alpha_{ij}}}$的特点：角标$\alpha_{ij}$的值=上一级本体$\alpha_i$的值，角标（及本体）$\alpha_{ij}$的个数=上一级角标$\beta_i$的值）又有$\frac{8!}{3!2!1!1!1!}$（通式：$\frac{(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\beta_i)!}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\beta_i}\alpha_{ij}!}=\frac{m!}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\beta_i}\alpha_{ij}!}$）个子子类（如aaabbcde、aababcde）；而每个子子类（如aaabbcde），又有C_n^8个子子子类。
  【同理$2_2 3_1 1_1$型下共有$\frac{4!}{2!1!1!}\cdot\frac{8!}{3!2!2!1!}\cdot C_n^8$个子子子类。】
- 我在研究多项式定理时，曾经设计过一个程序，能够help count：对于任意一个m阶张量，其拥有的，满足的$m=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\beta_i$且$\alpha_i\neq0$的top大类$\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots$，的种类数，即所有不同的$\{\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots\}$即$\{1_{\beta_1}2_{\beta_2}3_{\beta_3}\cdots\}$即$\{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\}$的（排列）数目；并且能细化到，对于每一个可能的$\sum_{i=1}^{l}\beta_i$（$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i$或$\sum_i\beta_i$，后者表示对非零的各个$\beta_i$的求和），都可确定$\sum_{i=1}^{l}\beta_i$值相同的top大类，的种类数。
  ——注：由于每一级的$\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots$、$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\beta_i}\gamma_{ij_{\alpha_{ij}}}$型表示法，均表示：角标代表本体的重复次数，而本体绝不重复，且本体不为0；角标可以为0。——因此，本体可以直接从正整数集合里，从1取到无穷大，只需要配合较大本体的角标为0即可。——即均可分别写为$\{1_{\beta_1}2_{\beta_2}3_{\beta_3}\cdots\}$（或写作$\prod_{i=1}^{+\infty}i_{\beta_i}=\prod_{i=1}^{m}i_{\beta_i}=\prod_i i_{\beta_i}$；这个式子需要考虑的是，需要分别选定数目不定的哪些i，及其对应的下标β_i的合适的值，以使得$\prod_{i=1}i\beta_i=m$）、$\prod_{k=1}^{+\infty}\gamma_{k_{\alpha_i}}$（这个式子需要考虑的是，对于之前上一级所选取的$l$个不同的$i$，所对应的$\alpha_i$值，每个$\alpha_i$应有$\beta_i$个，这一共$\sum_i\beta_i$个下标$\alpha_i$（如32111），需要分别选定哪$\sum_i\beta_i$（如5）个互不相同的字母$\gamma_k$，作为其本体、主子；而其它$\gamma_k$的下标全是0）的样子）。
- 按照这种思路，我们可通过做减法来得到对称张量的独立分量个数：
  比如对于n维2阶，只有2、11型分量，所以相应的独立分量数目为$n^2-[C_n^1\cdot(\frac{2!}{2!}-1)\cdot\frac{1!}{1!}+C_n^2\cdot(\frac{2!}{1!1!}-1)\cdot\frac{2!}{2!}]$个。
  比如对于n维3阶，只有3、21、111型分量，所以相应的独立分量数目为$n^3-[C_n^1\cdot(\frac{3!}{3!}-1)\cdot\frac{1!}{1!}+C_n^2\cdot(\frac{3!}{2!1!}-1)\cdot\frac{2!}{1!1!}+C_n^3\cdot(\frac{3!}{1!1!1!}-1)\cdot\frac{3!}{3!}]$个。
  比如对于n维4阶，只有4、31、22、211、1111型分量，所以相应的独立分量数目为$n^4-[C_n^1\cdot(\frac{4!}{4!}-1)\cdot\frac{1!}{1!}+C_n^2\cdot(\frac{4!}{3!1!}-1)\cdot\frac{2!}{1!1!}+C_n^2\cdot(\frac{4!}{2!2!}-1)\cdot\frac{2!}{2!}+C_n^3\cdot(\frac{4!}{2!1!1!}-1)\cdot\frac{3!}{1!2!}+C_n^4\cdot(\frac{4!}{1!1!1!1!}-1)\cdot\frac{4!}{4!}]$个。
  【同一子类（2级）下的所有子子类（3级）合为一体；而每个子子子类（4级）、每个子类（2级）、每个大类（1级）都全算上】
- 所以可以看出，由于太复杂，用减法算独立分量个数并不合适。

(2) 加法算法

- 从数学的角度，若利用多项式定理：$n^m=\sum_{k=1}^{num(\{\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots\}|\sum_i\alpha_i\beta_i=m)}\frac{(\sum_{i=1}^{l_k}\beta_{ik})!}{\prod_{i=1}^{l_k}(\beta_{ik}!)}\cdot\frac{m!}{\prod_{i=1}^{l_k}\prod_{j=1}^{\beta_{ik}}\alpha_{ijk}!}\cdot C_n^{\sum_{i=1}^{l_k}\beta_{ik}}$，或写作$n^m=\sum_{k=1}^{num(\{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\}|\sum_i i\beta_i=m)}\frac{(\sum_i\beta_{ik})!}{\prod_i(\beta_{ik}!)}\cdot\frac{m!}{\prod_i(\alpha_{ik}!)^{\beta_{ik}}}\cdot C_n^{\sum_i\beta_{ik}}$，（其中$i$有$l_k$个取值，但$i$可以是跳着取的整数）可得到$n^4=C_n^1\cdot\frac{4!}{4!}\cdot\frac{1!}{1!}+C_n^2\cdot\frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{2!}{1!1!}+C_n^2\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{2!}{2!}+C_n^3\cdot\frac{4!}{2!1!1!}\cdot\frac{3!}{1!2!}+C_n^4\cdot\frac{4!}{1!1!1!1!}\cdot\frac{4!}{4!}$【公式是从大类数→子子子类一级一级往下/小了写的，而这里顺序看上去是大类数→子子子类数→子子类数→子类数】；或者从物理角度，只关注角标排列，所属的子类，的型号/种类，以至于其旗下的所有子子类合而为一，只算作/贡献/折合成同一个独立分量，所以很简单地可以给出：n维4阶张量的独立分量个数为$C_n^1\cdot\frac{1!}{1!}+C_n^2\cdot\frac{2!}{1!1!}+C_n^2\cdot\frac{2!}{2!}+C_n^3\cdot\frac{3!}{1!2!}+C_n^4\cdot\frac{4!}{4!}$。
- 通式：$\sum_{k=1}^{num(\{\alpha_{1_{\beta_1}}\alpha_{2_{\beta_2}}\alpha_{3_{\beta_3}}\cdots\}|\sum_i\alpha_i\beta_i=m)}\frac{(\sum_{i=1}^{l_k}\beta_{ik})!}{\prod_{i=1}^{l_k}(\beta_{ik}!)}\cdot C_n^{\sum_{i=1}^{l_k}\beta_{ik}}=\sum_{k=1}^{num(\{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\}|\sum_i i\beta_i=m)}\frac{(\sum_i\beta_{ik})!}{\prod_i(\beta_{ik}!)}\cdot C_n^{\sum_i\beta_{ik}}$。其中，$num(\{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\}|\sum_i i\beta_i=m)$及$\{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\}|\sum_i i\beta_i=m$可以用我的程序之“多项式定理中的计组合数问题”计算出来；而单独计算num也可以用“法拉第布鲁诺”这个程序算出来。——这直接证明了这俩是有联系的，以及直接给出了它们的联系。

3. 反对称张量的性质

1) 对于某一分量，只要其所有上or下角标中，存在任何一对相同的指标，则该分量值=0。

- 这意味着反对称张量的独立分量，（在大类上）只可能是（/属于）11111...型即1_m型（此即条件$\prod_{i=1}^{m}i\beta_i=m$中$\beta_1=m$，而其它$\beta_{i\neq1}=0$）。

2) n维空间中m阶反对称张量的独立分量个数

- 沿用通式的第二个表达式可算得，n维m阶的反对称张量的独立分量个数$=\sum_{k=1}^{1}\frac{(\sum_i\beta_{ik})!}{\prod_i(\beta_{ik}!)}\cdot C_n^{\sum_i\beta_{ik}}=\frac{(\sum_i\beta_i)!}{\prod_i(\beta_i!)}\cdot C_n^{\sum_i\beta_i}=\frac{\beta_1!}{\beta_1!}\cdot C_n^{\beta_1}=C_n^m$。

4. 一些变换法则

1) (m,0)型张量的对称性

- 仿照(2,0)型张量的对称部分和反称部分$\begin{cases}T^{(\mu\nu)}:=\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}+T^{\nu\mu})\\T^{[\mu\nu]}:=\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T^{\nu\mu})\end{cases}$，有$(m,0)$型张量的对称部分和反称部分：$\begin{cases}T^{(a_1\cdots a_m)}:=\frac{1}{m!}\sum_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}\\T^{[a_1\cdots a_m]}:=\frac{1}{m!}\sum_\pi\delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}\end{cases}$。
  ——其中π代表1...m的某种排列，如563m87...；$\sum_\pi$□代表取遍所有排列并将相应项求和；$\delta_\pi=\begin{cases}1,\pi\text{为偶排列}\\-1,\pi\text{为奇排列}\end{cases}$；奇排列：排列123...m中任意两个数字交换奇数次位置所产生的序列们的集合{132456...}中的一个；$\pi(i)$表示该π序列下的（从左往右数的）第i个数字。
  【注：排列的集合写为{132456...}，并不是{1,3,2,4,5,6,...}，后者是正整数集，而前者代表的是由序列构成的集合{132456...,123456...,124356...,......}】
  【这样的定义至少在符号上是对的：即能使得$T^{(a_1a_2\cdots a_m)}=T^{(a_2a_1\cdots a_m)}$、$T^{[a_1a_2\cdots a_m]}=-T^{[a_2a_1\cdots a_m]}$，因为左边每switch一对指标，右边所有项就会跟着switch一对指标，这样就改变了右边每一项的排列的奇偶性，可算得其和，恰好就是相反数or相等；系数$\frac{1}{m!}$来源于展开项的个数=角标的全排列个数=m!，应将其抵消掉以使等号两边都是一个分量】
- 若$T^{a_1\cdots a_m}=T^{(a_1\cdots a_m)}$，则称T是全对称的，或者说就是对称的（∵对称则默认全对称），此时$T^{[a_1\cdots a_m]}=0$；若$T^{a_1\cdots a_m}=T^{[a_1\cdots a_m]}$，则称T为全反称的，此时$T^{(a_1\cdots a_m)}=0$。
- 任意一个(2,0)型张量（的分量），都可表为其对称和反称部分之和；但对于3阶及以上的张量（的分量），一般$T^{a_1\cdots a_m}=T^{(a_1\cdots a_m)}+T^{[a_1\cdots a_m]}=\frac{2}{m!}\sum_\pi\delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}$不成立（因为不能保证所有偶排列所对应的张量分量们满足$(m!-2)T^{a_1\cdots a_m}=2\sum_{\pi\neq1\cdots m}\delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}$？），除非其反称部分或对称部分中任意一个为0（之后会证

明）。

【$\delta_\pi=\begin{cases}1,\pi\text{为偶排列}\\0,\pi\text{为奇排列}\end{cases}$】

2) 定理

(1) 若$T^{a_1\cdots a_m}=T^{(a_1\cdots a_m)}$，则$T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}=T^{(a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)})}=T^{(a_1\cdots a_m)}=T^{a_1\cdots a_m}$

【这进一步也验证了“全对称=对称（默认）”，即全对称张量拥有对称张量所拥有的性质；之前我们就用这个性质检验了对称和反称部分的数学表达式的正确性。】

(2) 若$T^{a_1\cdots a_m}=T^{[a_1\cdots a_m]}$，则$T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}=T^{[a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}]}=\delta_\pi T^{[a_1\cdots a_m]}=\delta_\pi T^{a_1\cdots a_m}$、$T^{a_1\cdots a_m}=\delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}$

【这进一步也验证了“全反称=反称（默认）”，即全反称张量拥有反称张量所拥有的性质】

a. 缩并时，括号具有传染性：$T^{(a_1\cdots a_m)}S_{a_1\cdots a_m}=T^{(a_1\cdots a_m)}S_{(a_1\cdots a_m)}=T^{a_1\cdots a_m}S_{(a_1\cdots a_m)}$

证明（unfinished）：

$T^{(a_1\cdots a_m)}S_{a_1\cdots a_m}=[\frac{1}{m!}\sum_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}]S_{a_1\cdots a_m}=[\frac{1}{m!}\sum_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}S_{a_1\cdots a_m}]=?$

$T^{[a_1\cdots a_m]}S_{a_1\cdots a_m}=[\frac{1}{m!}\sum_\pi \delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}]S_{a_1\cdots a_m}=[\frac{1}{m!}\sum_\pi \delta_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}S_{a_1\cdots a_m}]=?$

【我之前在证明的时候居然写出了$T^{(a_1\cdots a_m)}S_{a_1\cdots a_m}=[\frac{1}{m!}\sum_\pi T^{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}]S_{a_1\cdots a_m}\neq[\frac{1}{m!}\sum_\pi T^{a_1\cdots a_m}]S_{a_1\cdots a_m}$（因为没有说是T是对称的）$=\frac{1}{m!}\sum_\pi[T^{a_1\cdots a_m}S_{a_1\cdots a_m}]=[\frac{1}{m!}\sum_\pi S_{a_1\cdots a_m}]T^{a_1\cdots a_m}\neq[\frac{1}{m!}\sum_\pi S_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(m)}}]T^{a_1\cdots a_m}$（因为没有说是S是对称的）$=S_{a_1\cdots a_m}T^{a_1\cdots a_m}$。】

b. 括号内同种子括号可随意删减：$T^{[[ab]c]}=\frac{1}{2}(T^{[abc]}-T^{[bac]})=\frac{1}{2}(T^{[abc]}+T^{[abc]})=T^{[abc]}$

c. 有异种子括号：$T^{[(ab)cd]}=T^{[a(bcd)]}=T^{[abc]}S_{(abc)}=0$

【协变指标同理】

证明最后一个等式：

【以（3维）2阶为例，将$T^{[ab]}$、$S_{(ab)}$分别视为两个3×3的矩阵的，第a行第b列的元素；接着，若想创造一种矩阵乘法的感觉，则必须采用$T^{[ab]}S_{(ba)}$的形式，这里不必担心诸如$S_{(ba)}=S_{(ab)}$是否成立（当然成立了，只不过不成立也无所谓）的事情，因为这里的意思是指$S_{(ab)}\coloneqq S_{ba}$，以至于仍可以使用$T^{[ab]}S_{(ab)}=T^{ab}S_{ba}$】

【注意，$T^{[ab]}$、$S_{(ba)}$不可能是m×n(m≠n)的矩阵，因为对称、反对称已经要求了m=n的了（n可以是维数，但m不是阶数；m、n只代表a、b的取值个数上限）】

灵感来源：$T^{[ab]}S_{(ab)}=\sum_a\sum_b T^{[ab]}S_{(ab)}=\sum_a[\sum_b T^{[ab]}S_{(ab)}]=\sum_a[\sum_b T^{[ab]}S_{(ba)}]=\dots$

具体实现方法——regroup（重新分组/配对）：$T^{[ab]}S_{(ab)}=\sum_a\sum_b T^{[ab]}S_{(ab)}=\sum_a\sum_{b(a\neq b)}T^{[ab]}S_{(ba)}$（因为$T^{[aa]}=0$）$=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n}T^{[ab]}S_{(ba)}+\sum_{a=2}^{n}\sum_{b=1}^{a-1}T^{[ab]}S_{(ba)}$，其中后者可$=\sum_{b=1}^{n-1}\sum_{a=b+1}^{n}T^{[ab]}S_{(ba)}=\sum_{b=1}^{n-1}\sum_{a=b+1}^{n}-T^{[ba]}S_{(ab)}=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n}-T^{[ab]}S_{(ba)}$，于是代入得$T^{[ab]}S_{(ab)}=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{b=a+1}^{n}\{T^{[ab]}S_{(ba)}-T^{[ab]}S_{(ba)}\}=0$。

五. （矢量/1阶张量的）平移和（仿射）联络

1. 张量的平移：

1) 定义一种操作，在保证该张量性质不变的同时，将P点的（如一阶协变）张量$A_\mu(P)$移到Q点去，成为$A_\mu(P\to Q)$。

【以一阶张量为例】

◇ 也可以将$A_\mu(P\to Q)$写成$A_\mu(Q)$，只不过前者更有“平移不变”的意味。

◇ 将P点坐标写作$(x^1,x^2,\dots)$、Q点坐标写作$(x^1+dx^1,x^2+dx^2,\dots)$，有点不方便，分别写作$\{x^\mu\}$、$\{x^\mu+dx^\mu\}$。

【按理说严格地应写作$(\{x^\mu\})$、$(\{x^\mu+dx^\mu\})$？】

(1) $\{x^\mu\}$平移$\{dx^\mu\}$的变化过程，所对应的δA_μ应分别与$A_\mu(P)$、dx^μ有关；

【这里应该说对于特定的μ，其δA_μ分别与$\{A_\mu(P)\}$们、$\{dx^\mu\}$们有关，这确实更general且逻辑更严密：某分量下的物理量一般不会只与同一角标的量相关；下一点b.中会提到，它与每一对乘积$\{A_\mu(P)\cdot dx^\mu\}$均有关；moreover甚至，与所有交叉项$A_\lambda(P)\cdot dx^\nu$均相关】

(2) 而作为线性的理论，这种关系应均为“∝”，即（某一个）$\delta A_\mu\propto A_\mu(P),dx^\mu$（每一个），即$\delta A_\mu\propto A_\lambda(P)\cdot dx^\nu$（实际上右边虽然写成了乘积，但还没有重复指标，也还没有自动求和），因此有$\delta A_\mu=\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu$（这里右边便有自动求和了，分别对两个指标λ、ν求和两层）。

【这里用两次指标（λ、ν的）缩并，既保留了$A_\mu(P)$、dx^μ的形式）（上下指标），又符合法则地得到了δA_μ（看上去像是张量的缩并？但之后会知道系数是仿射联络，而不是张量，因此这里不是张量的缩并，而只能算作、且本身就算作：对重复指标求和）】

(3) $A_\mu(P\to Q)=A_\mu(P)+\delta A_\mu$应仍是个协变矢量，即同一矢量在Q点仍须满足一阶协变矢量的定义之$\tilde{T}_\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}T_\alpha$，因此有$\tilde{A}_\mu(Q)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)A_\alpha(Q)$，该定义将作为约束。

(4) 类似地，在新坐标系下，对于同一个P→Q的过程（$\{\tilde{x}^\mu\}\to\{\tilde{x}^\mu+d\tilde{x}^\mu\}$），有$\tilde{A}_\mu(Q)=\tilde{A}_\mu(P)+\delta\tilde{A}_\mu=\tilde{A}_\mu(P)+\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$。

【新坐标系下的张量平移等式，其右侧也是对重复指标求和】

(5) 将$A_\alpha(Q)=A_\alpha(P)+\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu$与$\tilde{A}_\mu(Q)=\tilde{A}_\mu(P)+\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$，均代入约束$\tilde{A}_\mu(Q)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)A_\alpha(Q)$，得到$\tilde{A}_\mu(P)+\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)[A_\alpha(P)+\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu]=[\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu][A_\alpha(P)+\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu]$。

【注意，这里是将两个两层求和，分别代入c.中的一层求和的左右两边！准确地说，c.中的左边是单项，代入后出现了一项双层求和项$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$；而c.的右侧的单层求和内每一项，因代入了含有双层求和项的张量平移变换，而出现了一项三层求和项$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu$（以及一层单层求和项$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)A_\alpha(P)$）！若再将$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)$拆成(1+2)层求和项，则0+2=(1+2)(0+2)——其实也可以用幂函数来表达这种关系：$e^0+e^2=(e^1+e^2)(e^0+e^2)$，虽然这样表述更准确，但我们仍采用简化的写法】

(6) 根据P点的一阶协变矢量的定义，有$\tilde{A}_\mu(P)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)A_\alpha(P)$，代入并消去$\tilde{A}_\mu(P)$，得到$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu[A_\alpha(P)+\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu]$。略去二次项$d\tilde{x}^\nu dx^\nu$，得到$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot dx^\nu+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)A_\alpha(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$

*【对于0+2=(1+2)(0+2)，约去左边的0与右边的1*0→1+0=1，以及二次项2*2→2+2=4，得到2=(1+2)+(2+0)=3+2；即最终得到：双层求和项=三层求和项+双层求和项】*

(7) 其中右边两项中，第一项里的$dx^\nu=\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu$（这没有增加求和层数？才怪！这是坐标微分变换的逆变换！只不过系数里分子分母的指标相同，或者两个微分量的指标相同而已，相比于original的式子$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$）；

★ *【这东西把我给整到了，以至于这是最不起眼的bug，到最后我才发现这个导致我的推导与最终结论不重合的bug之所在。——这也是有原因的，即它也有责任：它的新旧坐标系物理量的两组指标是一样的，全都是ν...，以至于让人觉得这仅仅只是一个系数，殊不知它的右边TM的仍然是求和！并且右边对新坐标系物理量$d\tilde{x}^\nu$的指标ν的求和，不受旧坐标系指标ν的限制。即即使左边给定了ν，右边分母和微分量的ν仍均取遍1~n，两个ν没有关联——这意味着原先$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$与$dx^\nu$所共同关联的求和指标ν，现在变成了只有$\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu$的分子中的ν与$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$的ν随变，其分母$\partial\tilde{x}^\nu$与$d\tilde{x}^\nu$中的ν不参与此层求和，它们有自己独立的下一层/最底层求和。（认清这点很重要）】*

而由于上下指标相同代表求和，因此相同指标是啥无所谓（或者从缩并的角度？），因此还有第二项的$\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)A_\alpha(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)A_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$（注：这里二阶混偏整体的上标与A的下标一起被替换，从求和的角度理解好理解，但从缩并的角度不好理解...（虽然本来就不是缩并）？？但必须这么做，否则结果中最末项最左因子的上标会不是λ而是α...；也没有改变求和层数）；

【我知道为什么了，问题的答案出在e.中（或者说问题本身来源于e.）：约束的右侧$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}A_\alpha(Q)$是对重复指标求和（左侧只有缩并、没有求和，即使有重复指标！因为这来源于约束这个等式本身），且每一项中均含有$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}$。那么在之后将每一项中的$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}$被分解为$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu$时，其分子中所有的α都会随着项的不同而不同，而不是每一项中的部分α（或者说用“这一项作为整体是个单层求和项”来理解）】

【而且从数学上，$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu$中的$\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$本就不该写作$\frac{\partial x^\alpha\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$，因为只有分母是平方，分子是两次微分，$\frac{\partial x^\alpha\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$与$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\nu}(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu})$二者在数学上完全不同！！这帮人要么数学上不严谨，要么就是为了追求美以至于即使误导了青年也在所不辞。——而且只要澄清/承认了这一点，改回这样的数学形式，那么上一个中括号中的问题就不算是问题了。真是的，这些理论工作者为什么就不能尽职尽责呢，哦，或许他们是倒确实在尽善尽美的道路上达到巅峰了。】

同样将左边先换为$\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\alpha(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$，再代$\tilde{A}_\alpha(P)=\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}(P)A_\lambda(P)$到左边（求和层数变为了3层，即从λ,ν变为了α,ν,λ；因此代入这三者后，两边将成为3=4+2）。

(8) 于是$\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}(P)A_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}A_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu+\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)A_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$，移项整理得$[\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}(P)-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}-\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)]\cdot A_\lambda(P)d\tilde{x}^\nu=0$（λ与ν是三个求和项们，所共有的两层求和指标，所以我们将3=4+2写为了(1-2-0)*2=0），由于$A_\lambda(P)$、$d\tilde{x}^\nu$的任意性，可得每个系数$\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}(P)-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}-\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)=0$，于是$\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}+\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$（此即1(α)=2(α,ν)+0），这可怎么办？左边的求和拆不开，也不能两边同时乘以$\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}$来消去它——要知道左边tm的仍是求和，右边也是求和。

(9) 回档：所以在g.中第三步不应是先换成$\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\alpha(P)\cdot d\tilde{x}^\nu$，再将$\tilde{A}_\alpha(P)=\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\alpha}(P)A_\lambda(P)$代入左边；而是将右边的所有$A_\lambda(P)$先变为$A_\sigma(P)$（当然相应的诸如$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$、$\frac{\partial x^\lambda\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$也得换为$\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}$、$\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}$——这相当于g.中的第二步就不需要换成λ了，直接换成σ），然后再将协变矢量的逆变换$A_\sigma(P)=\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}(P)\tilde{A}_\lambda(P)$代入其中，得到$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda(P)\cdot d\tilde{x}^\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}[\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}(P)\tilde{A}_\lambda(P)]\cdot d\tilde{x}^\nu+\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}(P)[\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}(P)\tilde{A}_\lambda(P)]\cdot d\tilde{x}^\nu$。

*【求和层数分析：从2=3+2变为了2=3*1*1+2*1=4+3，即2=5+3】*

(10) 移项整理得$[\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}-\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}]\cdot\tilde{A}_\lambda(P)d\tilde{x}^\nu=0$，即有$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu}+\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$。

【求和层数分析：0-3-1=0、0=3+1；从这里可看出来，可以“调整来”使得$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$、$\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}$、$\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}$共用一个$d\tilde{x}^\nu$和ν】

(11) 出于仿照（0,2）型张量所满足的变换$\tilde{T}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha\beta}$，有（1,2）型的变换：$\tilde{T}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}T^\sigma{}_{\alpha\beta}$。那么将结果的右边仿照着修改一下，即将ν(而不是ν)改成β，得到：$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}-\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$，然后再将颜色调整一下，得到$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$。

*【求和层数分析：0=3+1；最好理解为$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial^2x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$，它的求和层数可理解为0=(2+0)*1，其中1=1(σ)代表对右侧一起对σ求和】*

——这就是仿射联络的变换式。若仿射联络$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$真是个（1,2）型的张量$T^\lambda{}_{\mu\nu}$，则其变换式$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})$理应与（1,2）型张量的变换法$\tilde{T}^\lambda{}_{\mu\nu}(T^\lambda{}_{\mu\nu})$则相同，但它的表达式里多出来了一项$\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$。

2) 正如张量$T=T\{x^\mu\}$在每一点上都有，空间每一点上也都有仿射联络$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\{x^\mu\}$（这表达不太好），所以有张量场，也有联络场。

2. “张量的平移+张量变换”四边形：

1) 因新坐标系下的张量场$\tilde{A}_\mu(P)$由旧坐标系下的张量场$A_\mu(P)$，通过同一点的张量变换$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(P)$得到。

2) 所以新坐标系下的联络场$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$，也通过旧坐标系下的联络场$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$经同一点的联络变换$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$得到（联络变换的形式是由张量变换的形式决定的）。

3) 只需要旧坐标系下的联络$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$，就能将旧坐标系下的某张量$A_\mu(P)$移到另一场点$A_\mu(Q)$；同理新系下的张量$\tilde{A}_\mu(P)$通过新联络$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$得到$\tilde{A}_\mu(Q)$。

4) 旧系下的张量$A_\mu(P)$，先通过旧联络$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$平移到Q点$A_\mu(Q)$，再利用Q点的张量变换$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}$(Q)变换到$\tilde{A}_\mu(Q)$；结果与先在P点进行张量变换到$\tilde{A}_\mu(P)$，再通过新联络$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}(P)$平移到Q点的结果相同，都是$\tilde{A}_\mu(Q)$。

——利用PQ两点的新老坐标系间的张量变换，以及P点下，新老坐标系之间的联络变换，我们构造并发现了一个平行四边形定则。

3. 逆变矢量的联络变换式，及其对应的平移公式：

1) 之前我们是事先定义好了协变矢量的平移变换式，包括$A_\mu(P\to Q)=A_\mu(P)+\delta A_\mu(P)$、$\delta A_\mu=\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda(P)dx^\nu$；然后将新老坐标系下的它们代入新老坐标系之间的同点变换式$\tilde{A}_\mu(Q)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(Q)A_\alpha(Q)$，（之后还用到了新老坐标的逆变换式$A_\sigma(P)=\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}(P)\tilde{A}_\lambda(P)$），来得到的新老坐标系下的同点联络变换式$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$。

2) 同样我们可以通过定义的$A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P)+\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}A^\lambda(P)dx^\nu$、$\tilde{A}^\mu(P\to Q)=\tilde{A}^\mu(P)+\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\nu}\tilde{A}^\lambda(P)dx^\nu$以及新老坐标系之间的同点变换$\tilde{A}^\mu(Q)=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}(Q)A_\alpha(Q)$（同样是正变换，但与协变的系数不同），来得到新老坐标系下的同点联络变换式——按理说它所得到的联络变换式，必须与同阶协变矢量所导出的(1,2)型联络的变换式形式相同（只是μ、λ交换了一下位置），即理应推出$\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\lambda\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}$。

3) 但若这样定义逆变矢量的平移变换式，则推不出它。只有$A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P)+\delta A^\mu(P)$、$\delta A^\mu=-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}A^\lambda(P)dx^\nu$这么定义，即$A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P)-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}A^\lambda(P)dx^\nu$这么定义，才能得出与协变矢量所推出的联络变换式，所不相矛盾的结果。

——当然你也可以这么定义它：$A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P)-\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}A^\nu(P)dx^\lambda$，这无伤大雅。

【但它退化到坐标微分变换时，会不会多一个负号（毕竟坐标微分变换是它的子集，属于0阶逆变张量）？或者我们可以设定两个系数的值，来抵消这个负号？】

在4.中沿用了3.中的角标，复制粘贴的，emm懒的搞改了，毕竟这对逆变张量适用的联络，作为纯联络而言可以继续使用，4.中没有涉及到逆变or协变张量的事情。

4. 联络的性质：

1) 同一（仿射）空间中的两种联络，如$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$与$\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\nu}$，二者之差为(1,2)阶张量，即$\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\nu}-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=T^\mu{}_{\lambda\nu}$，即二者之差满足$\tilde{T}^\mu{}_{\lambda\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}T^\sigma{}_{\alpha\beta}$。

◇ 也许可以这么证明：设${}_2^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$、${}_1^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$都是不同的"新坐标系"下的同一点的联络，都可由同一点的"旧坐标系"下的联络$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$表示出来，即是两种不同的$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$，那么${}_2^{\square}\Gamma^{\mu_2}{}_{\lambda_2\nu_2}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^{\lambda_2}}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^{\nu_2}}\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_2}}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^{\lambda_2}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^{\nu_2}}\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_2}}{\partial x^\sigma}$、${}_1^{\square}\Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda_1\nu_1}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^{\lambda_1}}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^{\nu_1}}\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^{\lambda_1}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^{\nu_1}}\frac{\partial\tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^\sigma}$？不不不，它们应写作${}_2^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}$、${}_1^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}$，${}_2^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}-{}_1^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma})\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}$，然后...我证不下去了，也没空证了】

【这里所进行的修正，旨在提示，区别不该是像$\tilde{x}^{\nu_2}$与$\tilde{x}^{\nu_1}$一样，在意的是因指标的可能的不同，而对应同一个坐标系下的不同的坐标轴；而是在于$\tilde{x}^\lambda$与$\tilde{x}^\lambda$之间，即使指标相同，因不是同一个坐标系，而也不是同一个坐标轴；早在之前张量的加减法运算时，就该介绍的：虽然两个张量指标一样，但相同指标背后并不代表坐标轴方向是一样的，只是不同坐标系下的，序列号相同的坐标轴，所对应的张量、坐标；这在$dx^\nu=\frac{\partial x^\nu}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)d\tilde{x}^\nu$处也略有点这个意思。】

2) 若（1,2）阶联络关于其一对下指标不对称，即$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\neq\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$，则对${}_1^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$调换下指标，所生成的${}_2^{\square}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$，也是一种联络，即仍满足联络的变换式。

3) 联络$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$的对称组合$\Gamma^\mu{}_{(\lambda\nu)}=\frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda})$也是一种联络，即满足....。

4) 联络的反称组合$\Gamma^\mu{}_{[\lambda\nu]}=\frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}-\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda})$是一个张量，且该张量对其下标反称。它是/叫对应的/同一个仿射空间（仿射坐标系？）的挠率张量，即满足....。

5) 任意一个（1,2）阶联络可表示为某一对称联络（它的对称部分）与相应空间（相应坐标系？）的挠率张量之和，即$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}=\Gamma^\mu{}_{(\lambda\nu)}+\Gamma^\mu{}_{[\lambda\nu]}$。

【比如：若挠率张量为0，则联络是对称的】

六. 张量的协变微商

1. 对标量场而言，其（对下标的）普通导数/普通微商（微商是先微分后作商，不同于微分）记作$T_{,\nu}$，并定义为

$T_{,\nu}:=\lim_{Q\to P}\frac{T(Q)-T(P)}{\vartriangle x^\nu}=\lim_{\vartriangle x^\nu\to 0}\frac{T(\{x^\mu\};x^\nu+\vartriangle x^\nu)-T(\{x^\mu\};x^\nu)}{\vartriangle x^\nu}=\frac{\partial T}{\partial x^\nu}(P)$

1) 类似坐标微分变换$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$，新老坐标系下的标量场，分别对拥有同一个指标的新老坐标的普通微商，之间的变换，也有相同的形式，即：$\tilde{T}_{,\nu}=\tilde{T}_{,\nu}(\tilde{x}^\mu|P)=\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)\xrightarrow{\tilde{T}(\tilde{x}^\mu|P)=T(x^\mu|P)}\frac{\partial T}{\partial\tilde{x}^\nu}(P)=\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}$(有求和)$=T_{,\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}$。

◇ 它应来源于数学上的普适的链式法则$\frac{\partial}{\partial ?}=\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial ?}$，其中坐标？与坐标$x^\alpha$得是分属两个不同坐标系下的两套坐标中的某个。

◇ 该链式法则与$d=\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$的区别在于：后者似乎只能作用于坐标，而前者可作用于任何一个张量；不过我觉得他俩应该同属于同一个family。

【只需要将$\frac{\partial}{\partial ?}=\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial ?}$中标红的部分去掉，基本就和$d=\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$长得差不多了】

2) 由于$T_{,\alpha}$与$\tilde{T}_{,\alpha}$之间的变换，具有与坐标微分变换一样的链式法则属性；而张量变换也具有这样的属性；因此标量的一阶普通导数，具有一阶张量的性质，即对0阶张量求1阶普通导数，竟得到了一阶张量！所以求导=升阶。

◇ 而且对比1阶协变张量的变换式$\tilde{T}_\mu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}T_\alpha$，可见这里对下标进行求导（逗号在下标处），所得的$T_{,\nu}$是个协变矢量；它与$\tilde{T}_\mu$对应；$T_{,\alpha}$、$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}$分别与$T_\alpha$、$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}$对应。

2. 对张量，不能讨论普通导数(之后会看到数学法则禁止了它)，转而讨论的是（对下标的）"协变导数/协变微商"、（对上标的）"逆变微商"；——先以（协变）矢量场T_μ为例，其协变微商（对下标的微商）记作$T_{\mu;\nu}$，定义为$T_{\mu;\nu}:=\lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q)-T_\mu(P\to Q)}{\vartriangle x^\nu}=\lim_{\vartriangle x^\nu\to 0}\frac{T_\mu(\{x^\mu\};x^\nu+\vartriangle x^\nu)-T_\mu(\{x^\mu\};x^\nu\to x^\nu+\vartriangle x^\nu)}{\vartriangle x^\nu}$。

◇ 根据张量运算的前提条件，不同点的张量之间不能运算，所以一般来说定义张量的普通导数为$T_{\mu,\nu}:=\lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q)-T_\mu(P)}{\vartriangle x^\nu}$没有意义；除非该张量是个0阶张量，此时$T_\mu(P\to Q)=T_\mu(P)+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}T_\mu(P)dx^\nu$，才$=T_\mu(P)$，此时标量的协变微商即其普通微商，此时谈普通导数才有意义。

【我从这里看出来了一点，高阶张量的变换式，应该来源于偏导的链式法则变换式$\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial A}{\partial\tilde{x}^\nu}=\sum_\alpha\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\sum_\beta\frac{\partial A}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}=\sum_\alpha\sum_\beta[(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu})(\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A}{\partial x^\beta})]$其中$\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial A}{\partial x^\nu}$和$\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A}{\partial x^\beta}$就相当于$\tilde{T}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha\beta}$中的$\tilde{T}_{\mu\nu}$和$T_{\alpha\beta}$，其中$A$为同一空间中的某零阶张量；这两个式子连系数都长得一样，都是$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}$】

【连坐标微分变换式的效果都没有它好：$dAdA=\sum_\alpha\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}dx^\alpha\sum_\beta\frac{\partial A}{\partial x^\beta}dx^\beta=\sum_\alpha\sum_\beta[(dx^\alpha dx^\beta)(\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial A}{\partial x^\beta})]$，这家伙只能显示$T_{\alpha\beta}$，不能显示$\tilde{T}_{\mu\nu}$和系数$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}$；之前的以为的$d(dA)$、$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A=\frac{\partial(\frac{\partial A}{\partial x^\nu})}{\partial x^\mu}$就更别提了，方法都是错的。】

【$\frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial A}{\partial x^\nu}$也充分暗示了一点：电动力学中的"并矢"即张量】

1) $T_{\mu;\nu}:=\lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q)-T_\mu(P\to Q)}{\vartriangle x^\nu}=\lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q)-T_\mu(P)-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}T_\lambda(P)dx^\nu}{\vartriangle x^\nu}=T_{\mu,\nu}(P)-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}T_\lambda(P)$。

【但其实$T_{\mu,\nu}(P)$没有意义，它没有值、值也不可算，更不是个张量；$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}T_\lambda(P)$也不是个张量；倒是两个的差成为了张量，即$T_{\mu;\nu}(P)$是个张量，怎么证？直接证明它是个二阶协变张量】

◇ 这里应用了协变张量的平移变换式：$A_\mu(Q)=A_\mu(P)+\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A_\lambda(P)dx^\nu$。

◇ 同样有$\tilde{T}_{\mu;\nu}=\tilde{T}_{\mu,\nu}(P)-\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{T}_\lambda(P)$，那是否有$\tilde{T}_{\mu;\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha;\beta}$，即$\tilde{T}_{\mu,\nu}(P)-\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\tilde{T}_\lambda(P)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}[T_{\alpha,\beta}(P)-\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}T_\sigma(P)]$？先看看左边，将$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}$、协变矢量变换式$\tilde{T}_\lambda=\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\lambda}T_\sigma$代入左边，有$\tilde{T}_{\mu,\nu}(P)-[\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\frac{\partial\tilde{x}^\lambda}{\partial x^\sigma}][\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\lambda}T_\sigma]=\tilde{T}_{\mu,\nu}(P)-[\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}T_\sigma+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma]=[\tilde{T}_{\mu,\nu}(P)-\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma]-\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}T_\sigma$，其中后一项已经得到，还差证明前一项$\tilde{T}_{\mu,\nu}-\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha,\beta}$，即$\tilde{T}_{\mu,\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha,\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma$

◇ 法1：$\tilde{T}_{\mu,\nu}=(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\alpha)_{,\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma=(\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{T}_\mu)_{,\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma=\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{T}_{\mu,\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma=...$

——$\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma$不能写作$\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{T}_\mu$；但我也不确定$\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha,\beta}$是否可写作$(\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{T}_\mu)_{,\beta}$、$\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{T}_{\mu,\beta}$，怕的是，β会对偏导求导。

◇ 法2：$\tilde{T}_{\mu,\nu}=(\tilde{T}_\mu)_{,\nu}=(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}T_\alpha)_{,\nu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}T_{\alpha,\nu}+(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu})_{,\nu}T_\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial T_\alpha}{\partial\tilde{x}^\nu}+\frac{\partial(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu})}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}(\frac{\partial T_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu})+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}T_\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha,\beta}+\frac{\partial^2x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tilde{x}^\nu}T_{\alpha,\beta}+\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\tilde{x}^\nu}T_\sigma$，成了；并且佛了！什么jb $\partial x^\sigma\partial x^\sigma$，明明就是$\partial^2x^\sigma$，我说吧，这些"大家"们不仅会犯错误，还会犯很严重的错误，或者"主动地故意犯错误"？呵呵。

◇ 结论：$\tilde{T}_{\mu;\nu}$是张量，且属于二阶协变张量$\tilde{T}_{\mu\nu}$。

2) 对逆变张量、混合张量，也可以求协变微商；以逆变矢量为例，其协变微商的求法：

◇ 技巧1：根据标量（不是标量场!）的协变微商=0，以及莱布尼兹法则（类似d(uv)=udv+vdu的法则仍然适用于协变微商，甚至微商），有$(A^\mu B_\mu)_{;\nu}=A^\mu{}_{;\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu;\nu}=0$。于是$A^\mu{}_{;\nu}=-A^\mu B_{\mu;\nu}/B_\mu$。

再根据1).中的$B_{\mu;\nu}=B_{\mu,\nu}-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}B_\lambda$，代入得$A^\mu{}_{;\nu}=-A^\mu B_{\mu;\nu}/B_\mu=-A^\mu[B_{\mu,\nu}-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}B_\lambda]/B_\mu$，得到$A^\mu{}_{;\nu}=-\frac{B_{\mu,\nu}}{B_\mu}A^\mu+\frac{B_\lambda}{B_\mu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}A^\mu$。但这里居然还有$\frac{B_{\mu,\nu}}{B_\mu}$、$\frac{B_\lambda}{B_\mu}$，理应与他们无关，或者说$\frac{B_{\mu,\nu}}{B_\mu}$、$\frac{B_\lambda}{B_\mu}$与B无关?

◇ 技巧2：d(uv)=udv+vdu的法则仍适用于普通微商，而标量的普通微商也=0，于是有$(A^\mu B_\mu)_{;\nu}=A^\mu{}_{;\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu;\nu}=0=A^\mu{}_{,\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu,\nu}=(A^\mu B_\mu)_{,\nu}$，因此$A^\mu{}_{;\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu;\nu}=A^\mu{}_{,\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu,\nu}$，得到$A^\mu{}_{;\nu}=(A^\mu{}_{,\nu}B_\mu+A^\mu B_{\mu,\nu}-A^\mu B_{\mu;\nu})/B_\mu$（除过来并没有什么不妥，左边的$A^\mu{}_{;\nu}B_\mu$虽有重复指标，但并不是求和？难道说缩并属于求和？）。

代入$B_{\mu;\nu}=B_{\mu,\nu}-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}B_\lambda$，抵消掉$A^\mu B_{\mu,\nu}$，于是有$A^\mu{}_{;\nu}=(A^\mu{}_{,\nu}B_\mu+A^\mu\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}B_\lambda)/B_\mu\xrightarrow{\text{联络项的两个求和指标}\lambda\text{、}\mu\text{交换位置}}(A^\mu{}_{,\nu}B_\mu+A^\lambda\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}B_\mu)/B_\mu=A^\mu{}_{,\nu}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}A^\lambda$。

【可见逆变矢量的协变微商，中的联络项是正的】

◇ 结论：$T^\mu{}_{;\nu}=T^\mu{}_{,\nu}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}T^\lambda$。

3) (1,1)型张量$T^\mu{}_\nu$的协变微商：

◇ 仍用添加张量以凑/构造标量的办法：$(T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu)_{;\lambda}=(T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu)_{,\lambda}$；左右均拆成3项，且其中两项是已知的：$T^\mu{}_{\nu;\lambda}A_\mu B^\nu+T^\mu{}_\nu A_{\mu;\lambda}B^\nu+T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu{}_{;\lambda}=T^\mu{}_{\nu,\lambda}A_\mu B^\nu+T^\mu{}_\nu A_{\mu,\lambda}B^\nu+T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu{}_{,\lambda}$。

然后代入已知的2个协变微商变换式$A_{\mu;\lambda}=A_{\mu,\lambda}-\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}A_\nu$、$B^\nu{}_{;\lambda}=B^\nu{}_{,\lambda}+\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}B^\mu$，约去$T^\mu{}_\nu A_{\mu,\lambda}B^\nu+T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu{}_{,\lambda}$，得到$T^\mu{}_{\nu;\lambda}A_\mu B^\nu-T^\mu{}_\nu\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}A_\nu B^\nu+T^\mu{}_\nu A_\mu\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}B^\mu=T^\mu{}_{\nu,\lambda}A_\mu B^\nu$，规范冲突角标$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}A_\nu$为$\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}A_\mu$以及将$B^\mu$改为$B^\nu$，得到：$T^\mu{}_{\nu;\lambda}A_\mu B^\nu-T^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}A_\mu B^\nu+T^\mu{}_\alpha A_\mu\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}B^\nu=T^\mu{}_{\nu,\lambda}A_\mu B^\nu$。提出$B^\nu$以及$A_\mu$，对于任意$B^\nu$、$A_\mu$均成立，则$T^\mu{}_{\nu;\lambda}-T^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}+T^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}=T^\mu{}_{\nu,\lambda}$，于是有$T^\mu{}_{\nu;\lambda}=T^\mu{}_{\nu,\lambda}+T^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}-T^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}$。

◇ 结论：$T^\mu{}_{\nu;\lambda}=T^\mu{}_{\nu,\lambda}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}T^\alpha{}_\nu-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T^\mu{}_\alpha$。

——其中$\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}T^\alpha{}_\nu$很像逆变矢量的协变微商中的第二项$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}T^\lambda$，它可视为对$T^\mu{}_{;\lambda}$的第二项的$T^\alpha$加个协变角标$\nu$得来；$-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T^\mu{}_\alpha$很像协变矢量的协变微商中的第二项$-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}T_\lambda$，它可视为对$T_{\nu;\lambda}$的第二项的$T_\alpha$加个逆变指标$\mu$得来；而$T^\mu{}_{\nu,\lambda}$可视为$T^\mu{}_{,\nu}$、$T_{\mu,\nu}$的综合。

【规律：对每个上标，新建一个以其为逆变指标的逆变矢量的协变微商，取其第二项，加入表达式；对每个下标，新建一个以其为协变指标的协变矢量的协变微商，取其第二项，加入表达式。】

(1) 特殊地：

◇ $\delta^\mu{}_{\nu;\lambda}=\delta^\mu{}_{\nu,\lambda}+\delta^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}-\delta^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}=\delta^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}-\delta^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}=\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}-\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=0$，其中$\delta^\mu{}_\nu$、$\delta^\alpha{}_\nu$、$\delta^\mu{}_\alpha$均等于标量0或标量1。

4) (0,2)型张量$T_{\mu\nu}$的协变微商：

◇ 规律/归纳法：对于$T_{\mu\nu;\lambda}$，首先肯定有$T_{\mu\nu,\lambda}$这一项"公有项"；其次考虑$T_{\mu;\lambda}$的第二项，应为$-\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}T_\alpha$，然后由于$T_{\mu\nu}$中$\nu$在下标位置且在$\mu$后面，所以要在$T_\alpha$下标α后面加上一个$\nu$，于是肯定有$-\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}T_{\alpha\nu}$这一项；同理参照$T_{\nu;\lambda}$的第二项$-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T_\alpha$，以及originally，$T_{\mu\nu}$中$\mu$在下标处且在$\nu$前面，则肯定有$-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T_{\mu\alpha}$这一项。

◇ 结论：$T_{\mu\nu;\lambda}=T_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}T_{\alpha\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T_{\mu\alpha}$。

IV.测地线方程

2019年9月28日 14:31

一. 测地线方程

1. 测地线（条件）

1) 3-D中的测地线是直线，而一条三维的直线，在三维生物眼里的一个特点是，曲线的切矢量互相平行。

2) n-D中的测地线，也继承了这一特点，且成为了它的定义：方程组$x^\mu=x^\mu(\lambda)$（$\mu=1,\dots,n$）所约束而成的曲线($\{x^\mu(\lambda)\}$)，每点切矢量($\{\frac{dx^\mu}{d\lambda}(\lambda)\}$)互相平行。

- ◇ 曲线是由参数方程（组）表示的，则曲线的切矢量也是由参数方程（组）表示的，选取其中的一个参数方程$\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{dx^\mu}{d\lambda}(\lambda)$，我们来看看它是不是个逆变张量：
- ◇ 由于坐标微分变换满足$d\tilde{x}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$，两边同时除以$d\lambda$，即有$\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda}=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}$，对比一阶逆变张量所满足的定义$\tilde{T}^\mu=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}T^\alpha$，可见$\tilde{T}^\mu=\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda}$、$T^\mu=\frac{dx^\mu}{d\lambda}$毫无违和感，即$\frac{dx^\mu}{d\lambda}$的变换满足逆变矢量变换式，是个逆变矢量$A^\mu$。

【这一点充分说明了坐标微分变换与张量变换的联系，如系数的相同等，印证了张量的延拓就是从坐标微分变换等这些先辈们借鉴来的】

【可惜的是俞的书就一句话带过了，张量分析的时候也是；完全不适合初学者接触】

3) 测地线：若对于曲线上任意两相邻点P,Q，所有（切）矢量$A^\mu(P\to Q)$,$A^\mu(Q)$（$\mu=1,\dots,n$），均满足$A^\mu(P\to Q)//A^\mu(Q)$，则这样的曲线叫测地线。

【既然任意相邻两点的切矢量都平行，则任意两个不相邻的切矢量，也平行；因为你可以慢慢慢慢地找平行的邻居从一端找到另一端；这么定义是为了能用上之前的张量的平移变换式】

【这就相当于一个小伙伴stiff了的男人在空间中平移，他的小伙伴的根部就是标量场点，他的小伙伴就是那个随着根部的平移，保持方向不变的切矢量（在三维空间中，小伙伴的朝向当然不是其根部划过的轨迹的切矢量；但在高维空间中，就不一定了）】

【这有点像空间中具有拓扑结构的自旋磁矩小箭头群，虽然看上去空间中任意两点的小箭头方向很少有一致的，但总呈现某种轮廓，或者说旋涡式的秩序？——
a.这是由于，若选定一个场点，考虑其相邻的所有场点（邻域内）的小箭头们，将它们的朝向与该点处的小箭头进行compare，首先，它们的朝向一定是不突变的，即邻域内的小箭头的朝向，当场点取靠近指定点的极限时，方向都//该指定点的小箭头朝向；
b.其次，在全空间上，总存在这么一些点，每一个点的邻域内，总存在一些点、一些方向(场点变化方向)上的点，其上的小箭头方向与该点的完全一致，即在这么多小箭头方向"不怎么变化"的场点变化方向上，存在一些小箭头方向"真的不变化"的场点变化方向；
c.并且这些点可串起来，即不是离散分布的，是连续分布的；尽管不是连点成面，至少也成线，低2个维度而已。】

- ◇ 测地线条件还可写为：$A^\mu(Q)=k(\lambda;d\lambda)\cdot A^\mu(P\to Q)=[1+f(\lambda)d\lambda]\cdot A^\mu(P\to Q)$。

【在之前，我们所确定的联络场，只保证了张量可以在空间中进行平移，而不改变/保持张量的属性，这样某点的张量能拓展到整个空间形成张量场，且新老坐标系对其的描述符合张量变换；——但当时并没有保证张量的方向（可能只有1维张量才有"方向"这一说）这一更具体/细节的属性（而不是最基本的"张量"属性）在平移过程中保持不变】

【对比例系数做了泰勒展开】

2. 测地线方程

1) 将逆变矢量的平移公式$A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P)-\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}A^\lambda(P)dx^\nu$（红色角标需要改）代入右边，将$A^\mu(Q)=A^\mu(P)+dA^\mu(P)$代入左边，得到$A^\mu(P)+dA^\mu(P)=[1+f(\lambda)d\lambda][A^\mu(P)-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha(P)dx^\beta]$，约去$A^\mu(P)$，略去2阶小量，得到$dA^\mu(P)=f(\lambda)d\lambda A^\mu(P)-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\alpha(P)dx^\beta$。

【之前$A_\mu(P\to Q)=A_\mu(P)+\delta A_\mu(P)$与$A_\mu(P)$之间差的是$\delta A_\mu(P)$，这里却是$A_\mu(Q)$与$A_\mu(P)$之间差$dA_\mu(P)$；没问题，标量、标量场都可以求微分，且微分也是这么定义的：$dA_\mu(P)\coloneqq A_\mu(Q)-A_\mu(P)$】

2) 代入$A^\mu(P)=\frac{dx^\mu}{d\lambda}(P)$，得到$d\frac{dx^\mu}{d\lambda}=f(\lambda)d\lambda\frac{dx^\mu}{d\lambda}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}dx^\beta$，两边除以$d\lambda$并移项，得到$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}=f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\lambda}$。

3) 若引入放射参数σ，并选择合适的函数关系$\lambda=\lambda(\sigma)$，还可以将测地线方程用最底层变量σ表示，并在形式上进一步简化：

- ◇ 将$\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\lambda}$、$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2+\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}$代入其中，得到$[\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2+\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}]+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2=f(\lambda)\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\lambda}$，移项得$[\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}]\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2=\frac{dx^\mu}{d\sigma}[\frac{d\sigma}{d\lambda}f(\lambda)-\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}]$。
- ◇ 对于任意$f(\lambda)$，均可以选择合适的$\lambda(\sigma)$，使得$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}=\frac{d\sigma}{d\lambda}f(\lambda)$，则此时方程右侧=0，于是$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}=0$；并且此时再对比普遍性的结论$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}=f(\sigma)\frac{dx^\mu}{d\sigma}$，可知此时$f(\sigma)=0$，同时此时$A^\mu(Q)=[1+f(\sigma)d\sigma]\cdot A^\mu(P\to Q)=A^\mu(P\to Q)$，以及$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}=\frac{d\sigma}{d\lambda}f(\lambda)=0$。

【存在其他仿射参量，且其他仿射参量$\tilde{\sigma}$也应满足诸如$\frac{d^2\tilde{\sigma}}{d\lambda^2}=0$的结论，可见仿射参量$\sigma(\lambda)$对$\lambda$的函数，或对另一个仿射参量$\tilde{\sigma}$的变换$\sigma(\tilde{\sigma})$，只能是线性的（$\lambda$本身就可看做第二个仿射参量$\tilde{\sigma}$，因为它本身就很不"基本"，所以有$\frac{d^2\sigma}{d\tilde{\sigma}^2}=0$）】

二. 曲率、挠率及其意义

1. 曲率和挠率：

1) 我们之前已经证明了：

(1) "0阶张量的1阶协变微商=0阶张量的1阶普通微商=1阶协变张量"、

(2) "1阶协变张量的1阶协变微商=2阶协变张量"，那么自然而然将有：

(3) "2阶协变张量的1阶协变微商=3阶协变张量"等，但现在我们想关注的是：

(4) "1阶协变张量的2阶协变微商=3阶协变张量"，理所当然它也是成立的，不过我们将从中得到更多东西，而不是只为了验证其正确性。

- ◇ 若先算内层则在之后算外层的时候会出现一个不可调和的因子：$A_{\lambda;\mu;\nu}=(A_{\lambda;\mu})_{;\nu}=(A_{\lambda,\mu}-\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}A_\rho)_{;\nu}=(A_{\lambda,\mu})_{;\nu}-[(\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu})_{;\nu}A_\rho+\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}(A_\rho)_{;\nu}]=[A_{\lambda,\mu,\nu}-\Gamma^\rho{}_{(\lambda,\mu)\nu}A_\rho]-[\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu;\nu}A_\rho+\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}A_{\rho;\nu}]=\dots$，
  ——该因子$\Gamma^\rho{}_{(\lambda,\mu)\nu}$的不可调和，应该来源于$(A_{\lambda,\mu})_{;\nu}$的不可计算——怎么能够对非张量$A_{\lambda,\mu}$求协变微商呢；同样，其中对联络的协变微商$\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu;\nu}$也是不可计算的，也不能依二阶协变张量的1阶协变微商来处理。
- ◇ 所以需要先算外层：利用二阶协变张量的1阶协变微商$T_{\mu\nu;\lambda}=T_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}T_{\alpha\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}T_{\mu\alpha}$，将$A_{\lambda;\mu}$视为2阶协变张量$A_{\lambda\mu}$，则$A_{\lambda\mu;\nu}=A_{\lambda\mu,\nu}-\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}A_{\alpha\mu}-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}A_{\lambda\alpha}$；但毕竟

$A_{\lambda;\mu}$不是$A_{\lambda\mu}$，于是再将其中的$\lambda\mu$、$\alpha\mu$、$\lambda\alpha$替换为$\lambda;\mu$、$\alpha;\mu$、$\lambda;\alpha$，有$A_{\lambda;\mu;\nu}=(A_{\lambda;\mu})_{;\nu}=A_{\lambda;\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}A_{\rho;\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}$。

——不知道为什么联络下角标$\lambda\nu$、$\mu\nu$中没有分号，倒是完美地避开了这一点；最可能是2阶协变张量的协变微商是由数学归纳法得来的...而数学归纳法先是沿用了1阶协变张量$A_{\lambda;\nu}$的协变微商的第二项$\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}A_{\rho}$，然后再补上$A_{\lambda;\mu}$中除了λ所缺的$;\mu$而成为$\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}A_{\rho;\mu}$。

- 然后将$A_{\lambda;\mu}$、$A_{\rho;\mu}$展开（$A_{\lambda;\rho}$不展开为$A_{\lambda,\rho}-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\rho}A_{\sigma}$），得到$A_{\lambda;\mu;\nu}=(A_{\lambda,\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}A_{\rho})_{,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}(A_{\rho,\mu}-\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}A_{\sigma})-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}=(A_{\lambda,\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}A_{\rho})-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}(A_{\rho,\mu}-\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}A_{\sigma})-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}\xrightarrow{\text{按指标}\mu,\nu\text{的轮换/交换对称性分类}}(A_{\lambda,\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}A_{\rho})-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}(A_{\rho,\mu}-\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}A_{\sigma})-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}=A_{\lambda,\mu,\nu}-\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}A_{\rho,\mu}\right)-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}A_{\rho}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}A_{\sigma}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}=A_{\lambda,\mu,\nu}-\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}A_{\rho,\mu}\right)+(-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu})A_{\rho}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}$，4个项合并为前3个指标对称项。

  ——在这3+2+1=(1+2)+(2+1)=7项中，第3项多出来一个含联络的普通导数$\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}$的项，一般的张量是（可求协变微商，而）不可求普通导数的，而所有联络又是不可求协变微商的，那联络可否求普通导数呢？？应该是可以的，不然所有方法都告罄、宣告失败了。

2) 交换2阶协变微商的微商顺序，作差并÷2，得到$A_{\lambda;\mu;\nu}$关于μ,ν的反称组合$A_{\lambda;[\mu;\nu]}$：

【我也不知道为什么不写作$A_{\lambda[;\mu;\nu]}$，按理说将$;\mu$、$;\nu$分别看成一对，成对交换多好...】

- $A_{\lambda;\mu;\nu}-A_{\lambda;\nu;\mu}=\left[(-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu})A_{\rho}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}\right]-[(-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu,\mu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu})A_{\rho}-\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}A_{\lambda;\rho}]=[(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu,\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu})+(\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu})]A_{\rho}-(\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu})A_{\lambda;\rho}=R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}A_{\rho}-2\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}A_{\lambda;\rho}$，其中，指标对称项都消去了，只剩下$A_{\lambda;\mu;\nu}$、$A_{\lambda;\nu;\mu}$的指标反称项相减。

  ——其中$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}=(-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu}+\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu,\mu})+(-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu})$。

  【前一个括号倒是可以写为$-2\Gamma^{\rho}{}_{\lambda(\mu,\nu)}$，但后一个就没办法了】

- 于是$A_{\lambda;[\mu;\nu]}=\frac{1}{2}(A_{\lambda;\mu;\nu}-A_{\lambda;\nu;\mu})=\frac{1}{2}(R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}A_{\rho}-2\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}A_{\lambda;\rho})$。

3) $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$是个张量：

- $A_{\lambda;\mu;\nu}$是1阶协变张量的2阶协变微商=3阶协变张量，所以$A_{\lambda;[\mu;\nu]}=\frac{1}{2}(A_{\lambda;\mu;\nu}-A_{\lambda;\nu;\mu})$也是个张量；
- $A_{\lambda;\rho}$是1阶协变张量的1阶协变微商=2阶协变张量，所以$A_{\lambda;\rho}$是个张量。
- 联络的反称组合$\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}$是一个张量，叫挠率(torsion)张量，且该张量对其下标反称。
- 所以$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}A_{\rho}=2A_{\lambda;[\mu;\nu]}+2\Gamma^{\rho}{}_{[\mu\nu]}A_{\lambda;\rho}$是个张量
- 而又因A_{ρ}是1阶协变张量，则根据张量运算的商定理，有$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$是个张量，称为曲率(curvature)张量；它由2个联络的普通导数项+2个联络的平方项构成。

4) $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$的性质：

2. 曲率和挠率的意义：

1) 曲率的意义：
2) 挠率的意义：

广相倒数第三、二节课

2019年10月25日　10:40

史瓦西时空，静态球对称，有两个奇点，r=0，r=2GM，但前者是内秉奇异性，后者是坐标奇异性，即可以通过坐标变换消除这两个分区之间的隔阂。

无限红移面r=2GM/c^2。坐标时与固有时的关系式，取倒数，频率的变换式，代入无限红移面的r，得到频率等于0。

法（向）矢量长度为零，但本身不为零，如切面上的线：既是超曲面的法向矢量，又是它的切矢量（类光矢量）——这就是零超曲面。
长度＞0：法矢量类空：落在光锥外。
长度<0：法矢量类时：落在光锥外。

事件视界event horizon：保有该时空的对称性的，特殊的零超曲面。——一般可简称为horizon视界。——也叫单向膜（只进不出）。

零超曲面，对应的类光矢量长度：g11·偏偏=g11nn=0，得到g11=0，得到r=无限红移面的r。

算出来事件视界与无限红移面重合。

从黑洞外到黑洞内，光锥转了90度，是因为r-t前面的系数符号取反了，相当于r-t互换了，则外部是静态球对称，内部是动态坐标了——且因此洞内r相等的面成为了等时面，而又因为时间进程是任何物质结构无法抗拒地单向向前，因此于是当然会成为单向膜，且落入黑洞的物质，都将与时俱进，奔向R=0。此时R=0不是球心，是时间的一个端点。

越靠近无限红一面，光锥越瘦 。

a=J/M
纽曼解/黑洞：带电Q
克尔解：轴对称——旋转
纽曼-克尔解：既带电，又转。——并且无限红移面有两个。（之前是奇点有两个，但无限红移面只有一个）

上下四方曰宇（空间）
古往今来曰宙（时间）