What is light? 2

从十七世纪上半叶到十八世纪末，通过“实验现象 → ‘合理’揣测 → 建模解释”的方式，人们探究和争论着光的本质。

- 笛卡尔（1596）、格里马第（1618）、波义耳（1627）、惠更斯（1629）、胡克（1635）、牛顿（1643）. . .
- 拉普拉斯（1749）、托马斯·杨（1773）、马吕斯（1775）、布儒斯特（1781）、泊松（1781）、阿拉戈（1786）、夫琅禾费（1787）、菲涅尔（1788）、柯西（1789）. . .

可惜大江东去，浪淘尽千古风流人物，将近两个世纪的螺旋上升的历史，埋葬了无数观察棋局落子规则的先辈们，连同他们模型中深深浅浅的揣测和尝试，如相对于粒子学说占优的波动学说，将光波比作声波，认为光波是纵波；认为光波是机械波，需要介质传递，而介质被称为以太 . . . 然而光波既不是纵波，也不需要媒介承载，以太也不存在 . . . 因此细节再丰富的经验公式，也无法掩盖这个时期的人们对光规律的认识，仍只停留在启蒙阶段。

从十八世纪下半叶到十九世纪末，并行的第二条线程上，反倒是另一支研究电磁现象的队伍，异军突起、弯道超车，精确地将光波纳入电磁波的集合，给出了波动学派梦寐以求的，光波的数学形式。——光波的本质，就是电磁场波动方程的解析解。

- 库伦（1736）、J.B. 毕奥（1774）、安培（1775）、奥斯特（1777）、F. 萨伐尔（1791）、法拉第（1791）. . .
- 斯托克斯（1819）、麦克斯韦（1831）、莫雷（1838）、迈克尔逊（1852）、J.J. 汤姆森（1856）、赫兹（1857）. . .

二十世纪初，黑体辐射（ε）、光电效应（ν）、康普顿 X 射线散射（p）、光压（p）的存在，光波有最小能量单元，该单元也有相应的动量，于是光的粒子性呈现出来。

同一时期，二次电子发射机制，光电倍增管，单光子探测器，如约而至。

- 普朗克（1858）、爱因斯坦（1879）、康普顿（1892）. . .

二十世纪下半叶，电子的双缝衍射，证实德布罗意关系在实物体系也成立，稳固了非实物体系——光的波粒二象性的认识。

同一时期，激光的发明，诞生了与黑体内最杂乱无章的热辐射相对应的，最井然有序的辐射，自此人类终于追梦到了两个几乎像南极北极一样绝对纯净但又绝对对立的理想之国[6]。

6: 《统计物理》邂逅了《激光原理》。

- 乔治·汤姆森（1892）、梅曼（1927）. . .

二十一世纪初，单光子源出现，人类在可以探测单光子的同时，也可以制造和发射单光子了[7]。

7: 一般而言，在历史上的同一时间截面，检测精度总是高于加工精度、同一精度下检测难度低于制造难度。

波粒二象性、实物与辐射，两对四个概念，正因其最现实，所以也最魔幻；正因其既现实又魔幻，因此也最吸引人。

而最物质和最不物质的东西，都需要用最严密的数学来描述，因为只有第三种极致，配得上这两种极致。

2.1 Electromagnetic wave

这条世界线的宇宙也诞生于一场大爆炸，不过这次 Big Bang 确定是人为引发的。

这条世界线的盘古名为“麦克斯韦”，他所创生的天地，被后世称为《电动力学》。

《经典电动力学》又发祥于“麦氏方程组的微分形式”。由之导出定态波动方程这样一个不含时的泛定方程，即亥姆霍兹方程，再结合边界条件，便可解出泛定方程系数待定的解，如行波，驻波，但更多情况下的解既不是在三个维度上的行波，也不是三个维度上的驻波，而是在开放和半开放的维度和方向上是行波 [8]，而在两端封闭的维度上为驻波，并且在两端封闭的方向上，振幅随空间的起伏的空间周期、波长、波矢、本征值的取值均是分立的，取值不同的本征值对应不同本征模式的本征函数（子波），而这些子波的线性叠加，便构筑出了相应边界条件下的可能存在的解。若再给定初始条件，还可以解出解中的各项待定系数，确定初始时间断面之后的波的时空演化轨迹。于是便可通过《数学物理方法》上经典的波动形式，描绘光 [9]。

8: 对导体上下表面单向封闭的是如此；但对无侧面的开腔间的稳态场分布问题，在开放方向上却不是行波而是稳态横模，这是因为该方向的行波都出射或衍射掉了，剩下的稳态场不再分布于腔镜外缘，不再被衍射。

9: 《电动力学》全反射波导内两端封闭的两个维度上的 TEW 和 TMW、《激光原理》一维封闭腔镜中稳定光场分布的纵模，连同《量子力学》中的“一维无限深势阱势下的定态薛定谔方程的解”、封闭空间导致粒子与波的动量波矢均分立取值等等，其源头理应均可追溯到《数学物理方法》中“边界条件、泛定方程均齐次的分离变数法/傅里叶级数法”中的“两端固定的一维弦的横振动”这个“第一类边界问题”，这也是一切“驻波条件”的来源。

落实到《电动力学》中的具体场景，在一个维度半封闭、两个维度自由的导体内表面下，可解出导体内电场为一沿着几乎平行于界面内法线向导体内部传播，并随着深入距离的增加而振幅指数衰减的行波、折射波（无论入射波方向如何）；而在一个维度全封闭、两个维度自由的谐振腔内...；两个维度封闭、单维度自由的波导内...；或三个维度上均有边界的封闭空间中...。

激光是电动力学所解出的平面电磁波集全有序时的极端情形，另一个情形是热辐射，此时的电磁波、电磁场用统计物理、量子电动力学来解释则更为漂亮。因此麦克斯韦所开辟的经典电动力学是万物之母，所解出的行波、驻波们，往下平行地分化了两个分支，一是井然有序的激光场及其横模纵模，二是极度无序的统计物理中的光子气体。这便找到了我们在宗谱上的绝对位置，以及追溯到了我们的兄弟和父母。

2.1.1 无源介质中电磁场波动方程

可以证明 [10]，普遍形式的微分形式的麦氏方程组，其四个方程均仍适用于非均匀、各向异性，甚至非线性的电磁介质，并且适用于非稳恒电磁场。以 SI 单位制写为：

10: 其来源可查看一份由 Docear 绘制的思维导图。

定理 2.1.1 (Maxwell 方程组 - 微分形式)

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \tilde{\mathscr{D}} = \tilde{\varrho}_f \\
\nabla \cdot \tilde{\mathscr{B}} = 0 \\
\nabla \times \tilde{\mathscr{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathscr{B}}}{\partial t} \\
\nabla \times \tilde{\mathscr{H}} = \tilde{\mathscr{J}}_f + \frac{\partial \tilde{\mathscr{D}}}{\partial t}
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

定理 2.1.1 注释

- ★ 各物理量头上腭化符代表时变
- ★ 花体代表相应物理量的数学表达式是实的，虚部为零
- ★ 这里不考虑将 $\tilde{\mathscr{J}}_f$ 和 $\boldsymbol{v}$ 扩展为满足洛伦兹协变的四维矢量；因为暂不需将 Maxwell 方程组拓展为描绘相对性的高速带电粒子所激发的统一电磁场的协变形式。

其中，$\tilde{\mathscr{D}},\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\mathscr{E}},\tilde{\mathscr{H}}$ 都是实的、具有物理意义的，复色场、时变场。这体现了 Maxwell 方程组包罗万象、无一例外的普适性。

考虑如下理想电介质，其自由电荷体密度 $\tilde{\varrho}_f = 0$，传导电流面密度 $\tilde{\mathscr{J}}_f = \tilde{\varrho}_f \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ [11]，则四号方程右侧只剩极化电流与位移电流之和 $\partial\tilde{\mathscr{D}}/\partial t$；将考虑上述条件下的四号方程，代入经 $\nabla\times$ 作用后的三号方程中，得：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{E}}\right) &= \nabla\times\left(-\frac{\partial\tilde{\mathscr{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{B}}\right) \\
&\xrightarrow[\tilde{\mathscr{B}}=\mu_0(\tilde{\mathscr{H}}+\tilde{\mathscr{M}})]{\text{四号方程}} -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tilde{\mathscr{D}}}{\partial t}+\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right) \\
&= -\mu_0\left[\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{D}}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right)\right] \\
&\xrightarrow[c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}]{\tilde{\mathscr{D}}=\varepsilon_0\tilde{\mathscr{E}}+\tilde{\mathscr{P}}} -\frac{1}{c^2\cdot\mu_0\varepsilon_0}\cdot\mu_0\left[\frac{\partial^2\left(\varepsilon_0\tilde{\mathscr{E}}+\tilde{\mathscr{P}}\right)}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{E}}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2\cdot\varepsilon_0}\left[\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{P}}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

便有无源非线性电磁介质中，电场波动方程的最普遍形式：

推论 2.1.2 (无源非线性电磁介质 - 电场波动方程的最普遍形式)

$$
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{E}}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{E}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{P}}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right)\right] \tag{2.4}
$$

同理，通过类似的步骤，可得无源非线性电磁介质中，磁场波动方程的最普遍形式：

推论 2.1.3 (无源非线性电磁介质 - 磁场波动方程的最普遍形式)

$$
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{H}}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{H}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{M}}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{P}}\right) \tag{2.5}
$$

上述一组方程 [12]，还可分别写作另两种形式：

$$
\begin{cases}
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{E}}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{D}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right) \\
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{H}}\right)+\frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{B}}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{P}}\right)
\end{cases} \tag{2.6}
$$

$$
\begin{cases}
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{D}}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{D}}}{\partial t^2} = \nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{P}}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right) \\
\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{B}}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathscr{B}}}{\partial t^2} = \mu_0\left[\nabla\times\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{M}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\tilde{\mathscr{P}}\right)\right]
\end{cases} \tag{2.7}
$$

但一般不采用这两种形式，因为二者含有过多的、关于电磁场的非线性函数的物理量们，不便于求解。

2.1.2 复色场的单色化

特殊函数的齐次常微分方程, 如拉普拉斯方程、亥姆霍兹方程、波动方程、输运方程，在具有不同对称性的坐标系下的通解，将引出不同的基本函数族。复色场可以由具有与之相同对称性的基本函数族，在具有相应对称性的坐标系下展开。

11: 在导体中，当电磁波周期大于材料固有的特征时间 τ，即电磁波频率不太高（偏红），且导体电导率较大的良导体条件下，良导体内部自由电荷分布以指数衰减，自由电荷只能分布于导体表面。但导体内部的传导电流却可能不为零，这相当于导体内部 $\tilde{\varrho}_f \to 0$ 虽趋近于零, 但 $|\boldsymbol{v}|$ 仍较大, 以至于 $\tilde{\mathscr{J}}_f = \tilde{\varrho}_f \cdot \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$。

（PS：以上结论可通过解下述方程组查看：

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\tilde{\mathscr{D}} = \tilde{\varrho}_f \\
\nabla\cdot\tilde{\mathscr{J}}_f + \frac{\partial\tilde{\varrho}_f}{\partial t} = 0 \\
\tilde{\mathscr{J}}_f = \sigma\tilde{\mathscr{E}}
\end{cases} \tag{2.2}
$$

这种良导体自身体内电荷衰减快、只有表面可分布电荷、很容易达到静电平衡的内禀属性，配合高电导率所导致的大传导电流，将导致良导体内折射单色电磁波几乎均沿界面法线传播（全反射的折射波却平行于界面传播），且良导体表面下几个穿透深度处的电磁场趋近于零（全反射时也是），则良导体/金属面或涂银、镀金的腔镜可认为是将复色场振幅在边界处骤降至零的边界条件，以至于两端为零则可以使用驻波条件。

对良导体而言，其表面的反射波的电场的平行、垂直分量的反射系数均接近于 1，意味着两个正交方向的入-反射波的电场振幅接近，反射波的偏振态与入射波几乎相同；而电磁场边值关系约束反射波的相位、频率在边界上与入射波相同，且波矢满足 snell 定律。则良导体表面的反射波近乎理想（无损耗、无偏振态改变、无相位跃变或附加相移）的镜面反射。但理想反射不应理解为光粒撞上后弹回。两电介质交界面、全反射、良导体，三种情形下的反射波、折射波，均应理解为由交界面上位移电流作为次波波源，同时产生并发出的一对交变电磁场。

12: 注意到上述六大物理量 $\tilde{\mathscr{E}}, \tilde{\mathscr{P}}, \tilde{\mathscr{D}}, \tilde{\mathscr{H}}, \tilde{\mathscr{M}}, \tilde{\mathscr{B}}$ 都是叠加场。这些叠加场所构成的波动方程多无法直接求解。一个办法是只考虑具有相同频率的场们所构成的方程，即将方程单色化。为此首先需将六大物理量单色化，这样它们才可在频率上统一，并与方程同频。

此后便可使用分量变量法，将波动方程定态化，并给出解的空间部分。可见，场的单色化，是求解波动方程的充分条件之一、是一个可求出解的有效途径；同时，场的单色化，也是引入电磁非线性效应的必要条件。而引入电磁非线性效应，将与场的单色化一起，共同构成波动方程单色化、定态化、给出解的充分条件。

在数学物理方法中，波动方程和输运方程在分离变量之后，空间部分方程均为亥姆霍兹方程，

那么在物理[13]上，所有可空间周期性延拓的复色场，其单色光波场便可用三角函数族表示；同时也可用三角函数族的复数形式表示，这是因为数学物理方法上，实数形式的傅里叶级数可推导出复数形式的傅里叶级数。

在数学物理方法中，周期函数 $g(x)$[14] 的实数和复数形式的傅里叶级数分别为：

定理 2.1.4 (Mathematics - 实数 & 复数形式的傅里叶级数)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \mathscr{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\mathscr{a}_i \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} i \cdot x\right) + \mathscr{b}_i \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} i \cdot x\right)\right] (\mathscr{a}, \mathscr{b} \in \mathbb{R}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{c}_i \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} i \cdot x - \varphi_i\right) (\mathscr{c} \in \mathbb{R};\ \varphi_0 = 0, \mathscr{a}_i = \mathscr{c}_i \cos\varphi_i, \mathscr{b}_i = \mathscr{c}_i \sin\varphi_i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{i\frac{2\pi}{\Lambda} \cdot x} \left(c \in \mathbb{C};\ c_0 = \mathscr{a}_0, c_+ = \frac{\mathscr{a}_i - i\mathscr{b}_i}{2}, c_- = \frac{\mathscr{a}_i + i\mathscr{b}_i}{2}\right) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathscr{g}_i e^{i\left(\frac{2\pi}{\Lambda} i \cdot x - \varphi_i\right)} \left[\mathscr{g}_0 = \mathscr{c}_0, \mathscr{g}_i = \frac{\mathscr{c}_{|i|}}{2}\ (i \neq 0)\right]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

在物理上，对周期性延拓后的矢量场的傅里叶展开，同样也有实数和复数形式 ：

推论 2.1.5 (Physics - 实数 & 复数形式的傅里叶级数)

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}, t) &= \mathscr{A}_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\mathscr{A}_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} i\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r} - \frac{2\pi}{T} i \cdot t\right) + \mathscr{B}_i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} i\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r} - \frac{2\pi}{T} i \cdot t\right)\right]^{I} \\
&= \mathscr{A}_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\mathscr{A}_i \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t) + \mathscr{B}_i \sin(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)\right]^{II} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{C}_i \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t - \varphi_i)^{III} \\
&\quad (|\mathscr{A}|, |\mathscr{B}|, |\mathscr{C}| \in \mathbb{R};\ \varphi_0 = 0, \mathscr{A}_i = \mathscr{C}_i \cos\varphi_i, \mathscr{B}_i = \mathscr{C}_i \sin\varphi_i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{C}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)} \\
&\quad \left(|\boldsymbol{C}| \in \mathbb{C};\ \boldsymbol{C}_0 = \mathscr{A}_0, \boldsymbol{C}_+ = \frac{\mathscr{A}_i - i\mathscr{B}_i}{2}, \boldsymbol{C}_- = \frac{\mathscr{A}_i + i\mathscr{B}_i}{2}\right) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t - \varphi_i)} \left[\mathscr{E}_0 = \mathscr{C}_0, \mathscr{E}_i = \frac{\mathscr{C}_{|i|}}{2}\ (i \neq 0)\right]
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

I 由点波源时域 & 驻波场空域合成的，行波场时空域。

i 基本行波族在空域中存在周期的方向上的正交性，可由每一时间断面上，不含时

13: 在统计物理中，对单体系统的自由粒子的波函数、多体系统中无相互作用的理想气体的波函数，如有限空间中的热辐射系统（相对论性理想玻色气体），均喜欢采用箱归一化边界条件——一方面这是在八卦限动量空间中解释体系态密度的由来的要求（尽管这可用相格解释说法来代替）；另一方面，在热统中，甚至可以说在理论物理学家眼中，人们并不关心体系的边界条件；当然，由于热力学极限下所有边界条件都收敛到同一个结果，则对大量粒子体系，加有平移对称性的周期性边界条件，将最大程度简化计算过程。在固体物理中，对有限长一维原子链的集体振动（格波），也采取箱归一化即 B-K 周期性边界条件。

14: 在数学物理方法中，将定义在有限区间上的非周期函数 $f(x)$，延拓为另一周期函数 $g(x)$，对新周期函数 $g(x)$ 做傅里叶展开后，用级数在和在原有限区间上的值，代表原非周期函数 $f(x)$。——这便允许物理学家将非周期的复色场，改造为周期复色场，然后傅里叶展开为单色平面（行）波场。

推论 2.1.5 注释

为方便表示，认为 $\mathscr{A}_i \parallel \mathscr{B}_i \parallel \mathscr{C}_i$，此时叠加场 $\tilde{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}, t)$ 是单向的；但由于任何一个实际的复色多向场，仍可看做多个单向叠加场构成，所以此处的假设是合理的。

推论 2.1.5 另一种不推荐的写法

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}, t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{C}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)} \\
&= \sum_i{}' \boldsymbol{C}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)} + \text{c.c.} \\
&= \sum_i{}' \left[\boldsymbol{C}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)} + \text{c.c.}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mathscr{C}_i \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t - \varphi_i) + \text{c.c.}\right] \\
&= \sum_i{}' \left[\mathscr{C}_i e^{(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t - \varphi_i)} + \text{c.c.}\right]
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

基本函数族的正交性给定：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Lambda \cos\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t\right)\cdot\sin\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}-\omega_j t\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad (i,j\in\mathbb{N})\\
=&\int_\Lambda \left[\cos\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\cos\left(\omega_i t\right)+\sin\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\sin\left(\omega_i t\right)\right]\cdot\\
&\quad\left[\sin\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}\right)\cos\left(\omega_j t\right)-\cos\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}\right)\sin\left(\omega_j t\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\overset{i\neq j}{=\!=}0\\
\overset{i=j}{=\!=}&\int_\Lambda\left[\sin^2\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\sin\left(\omega_i t\right)\cos\left(\omega_i t\right)-\cos^2\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\cos\left(\omega_i t\right)\sin\left(\omega_i t\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right]\\
=-&\int_\Lambda\cos\left(2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\cos\left(\omega_i t\right)\sin\left(\omega_i t\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

基本行波族在空域上的正交性，与时间无关：

$$
\begin{cases}
\int_\Lambda \cos\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t\right)\cdot\cos\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}-\omega_j t\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0\quad (i\neq j;\ i,j\in\mathbb{N})\\
\int_\Lambda \sin\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t\right)\cdot\sin\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}-\omega_j t\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0\quad (i\neq j;\ i,j\in\mathbb{N}^+)\\
\int_\Lambda \cos\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t\right)\cdot\sin\left(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}-\omega_j t\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0\quad (i,j\in\mathbb{N})
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

ii 任何时变复色场都可写为行波场的加和（即其傅里叶级数、傅里叶逆变换成立的原因），是因对于其级数中任何一个子波系数，都存在一个傅里叶（正）变换，以给出其值（完备性）：

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\mathscr{A}_0=\frac{1}{\Omega}\iiint_\Omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
\mathscr{A}_i=\frac{2}{\Omega}\iiint_\Omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\cos\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad (\boldsymbol{k}_i,i\neq\boldsymbol{0})\\
\mathscr{B}_i=\frac{2}{\Omega}\iiint_\Omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\sin\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{cases}\\
&\begin{cases}
\mathscr{C}_i=\sqrt{\mathscr{A}_i^2+\mathscr{B}_i^2}\\
\varphi_i=\arctan\frac{\mathscr{B}_i}{\mathscr{A}_i}
\end{cases}\\
&C_i=\frac{1}{\Omega}\iiint_\Omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t)\cdot e^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r})}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&\mathcal{E}_0=\mathscr{C}_0,\mathcal{E}_i=\frac{\mathscr{C}_{|i|}}{2}\,(i\neq 0)\\
&(where\ \ \Omega=\lambda_x\lambda_y\lambda_z;\iiint_\Omega=\int_0^{\lambda_x}\int_0^{\lambda_y}\int_0^{\lambda_z})
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

II 若 ω_i 与 $\boldsymbol{k}_i$ 的下标 i 都指代某条单色光，则 i 不相同的 ω_i 或 $\boldsymbol{k}_i$ 可以相同。否则若二者的下标表示某频率的单色光，则要求对于任意 $i\in\mathbb{N}$，均有 $\omega_i=\frac{2\pi}{T}i$、$\boldsymbol{k}_i=\frac{2\pi}{\lambda}i\widehat{\boldsymbol{k}_i}$

III 这里的初始相位 φ、$\boldsymbol{r}$ 和 t 的值，均参照为量度复色场的时空演化，所选取的时空坐标系以给定；复色场 $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t)$ 须是空间周期延拓后的；且该坐标系下的它且最好还同时是空间上的偶函数场，以便实现 $\varphi_i=0$、$|\boldsymbol{C}|\in\mathbb{R}$ 以简化单色平面波的形式

物理学家对单色场的数学表达式、复色场的傅里叶展开式，常采用复数形式；但同时又希望各单色子波的振幅是实的。

对此，最合适的一种方法，是采用 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{E}}_i e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t-\varphi_i)}$ 此种形式的展开式。此时，单色场的表达式[15] 为：$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_i(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\mathcal{E}}_i e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t-\varphi_i)}$。

但有一些"撇脚"的物理学家，他们在这两个条件的基础上，还有第三个条件，那就是要求将各个单色场的初相 φ_i 置零，即令上述展开式中的各单色子波的 $\varphi_i=0$；或令另一复式展开[16] $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{C}_i e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}$ 中的各 $|\boldsymbol{C}_i|\in\mathbb{R}$。

一般来说，在没有好好解释一番之前，是不能这么做的。但数学上确实可以做到，或者说给予善后般的解释。

回到本节最初，任何一个抽象出的单色场[17]，均来源于某个实际的复色场；而时变复色场要想傅里叶展开为行波形式的单色场，首先至少须是空间上的周期函数；但任何一个实际的复色场几乎都不是周期性函数。这就要求，在傅里叶展开之前、在分解和抽象出行波式的单色场之前，必须对实际的复色场进行周期延拓。

15: 单色场的表达式，来源且仅来源于复色场的展开式，别无其他出处；这也是上文讨论各种形式的傅里叶级数的原因。

16: 该展开式本身初相即为零，然而其振幅不一定是实的。为满足三个条件，只需 redefine 其下所有单色场的振幅。该操作的效果，等价于对另一复数形式展开式的每个单色场的初相置零。

17: 单色场表达式因复色场展开式的不同而异，因此单色场只可能是抽象出来的。不同的展开方法可抽象出不同形式的单色场，但只有当子波振幅是实的时，抽象出来的单色场才具有物理意义。——比如，可以抽象出不具有物理意义的单色场，如 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{C}_i e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}$；也可以抽象出不止一种具有物理意义的单色场表达式，如实数和复数形式的三种其他傅里叶展开式。

既然必须要进行周期延拓，不如选择偶周期延拓，并采用合适的坐标系和坐标原点，使得原时变复色场（类比 $f(x)$ ）所延拓成的 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$（类比 $g(x)$ ）是个空间上的偶周期场 [18]。

此时 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的实数形式傅里叶级数展开式中，各 $\mathscr{B}_i = \mathbf{0}$ 、$\varphi_i = 0$ ，即 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$ 被展成了傅里叶余弦级数；同时，$\tilde{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r},t)$ 的复数形式傅里叶级数展开式中，$\boldsymbol{C}_0 = \mathscr{A}_0$ 、$\boldsymbol{C}_i = \frac{\mathscr{A}_{|i|}}{2}\ (i \neq 0)$ ，以至于实现了 $|\boldsymbol{C}| \in \mathbb{R}$ 。

物理上，对于某一有限封闭空间、半无限长时间区间内的复色场，不管其具体形状如何，首先，总可以实现空间上的周期延拓。——因为不论其边界条件如何，总可以在其边界之外，套一个长宽高均不小于该复色场区域各维最长径的长方形箱子，继而总可以 [19] 对闭系复色场的箱子，施加周期性边界条件（箱归一化条件）。

其次，对任意三维封闭的复色场，总可以实现偶延拓。——因为总可将坐标系坐标原点选在箱子的某一角，三轴分别贴合共点的三条箱边，再分别沿 $x-o-y$，$y-o-z$，$z-o-x$ 三个面，生成该箱子内的场的镜面对称像，之后再以这 $2^3 = 8$ 个场为单位，进行空间三个方向的周期延拓。

因此，对任一封闭空间内的时变复色场，总可以实现偶周期延拓；继而总可展开为初相为零、实振幅的，实数或复数形式的，平面单色行波场的线性组合（即傅里叶级数）。

18: 复色场关于 t 既无需为偶函数也不需具有周期性。因为基本行波族的正交性和完备性只要求待分解的复色场在空间上具有周期性。——当然，不仅无需，也没法实现；因为在时间这一维度是只有起点、无终点，即单端点且单边无界的，是一条射线，以至于时间维度的非周期函数，就只能展为傅里叶积分了；同时基本函数族从分立变得连续，失去了“单色子波”这一最小单元，其子波系数也无法成为一个实数。

19: 正因“万场皆可箱归一化”，则大多数复色场均可以用三角函数族展开，至于可否用、是否更适合用其他基本函数族展开，需要看其边界形状是否特殊，如条状平行平面腔、方形镜共焦腔、圆形镜共焦腔所最终产生的自再现稳定横模，分别可用更合适的基本函数族描绘。

In the future I plan to add more options to set the paragraph formatting (justified or ragged) and the position of the margins (inner or outer in twoside mode, left or right in oneside mode).[20]

20: As of now, paragraphs are justified, formatted with `\singlespacing` (from the `setspace` package) and `\frenchspacing`.

I take this opportunity to renew the call for help: everyone is encouraged to add features or reimplement existing ones, and to send me the results. You can find the GitHub repository at `https://github.com/fmarotta/kaobook`.

To Do

实现 `justify` 和 `margin` 选项。为了与 KOMA-Script 样式保持一致，它们应该接受一个简单开关作为参数，其中简单开关应该是 `true` 或 `false`，或者 KOMA-Script 支持的简单开关的其他标准值之一。有关更多信息，请参阅 KOMA-Script 文档。

The above box is an example of a `kaobox`, which will be discussed more thoroughly in 第 7 章 (数学及盒子) 第 31 页. Throughout the book I shall use these boxes to remarks what still needs to be done.

2.2 菊次郎小车车的春天

A bunch of packages are already loaded in the class because they are needed for the implementation. These include:

- etoolbox
- calc
- xifthen
- xkeyval
- xparse