

Salute to 易光宇 & 马大中

目录

第一章 静电场 恒定电流场	6
1.静电的基本现象和基本规律	6
1.1 两种电荷	6
1.2 电荷守恒定律	6
1.3 导体、绝缘体、半导体	7
1.4 物质的电结构	7
1.5 库伦定律	8
2.电场 电场强度	8
2.1 电场	8
2.2 电场强度矢量 E	9
2.3 带电体在电场中的受力	10
3.高斯定理	10
3.1 电通量	10
3.2 高斯定理	10
3.3 球对称的电场	11
3.4 轴对称的电场	12
3.5 无限大带电平面的电场	12
3.6 从高斯定理看电场线的性质	13
4.电势及其梯度	13
4.1 电势与电势差	13

4.2 电势叠加原理.....	14
4.3 等势面.....	15
4.4 电势的梯度.....	15
5. 静电场中的导体	16
5.1 导体的平衡条件	16
5.2 导体上的电荷分布	16
5.3 导体壳(腔内无带电体)	17
6. 静电能.....	18
6.1 点电荷之间的相互作用能	18

第四章 电磁介质.....19

1. 电介质.....	19
1.1 电介质的极化.....	19
1.2 极化的微观机制	19
1.3 极化强度矢量 P	20
1.4 极化率.....	21
1.5 电位移矢量 D 有介质时的高斯定理 介电常数	21
7. 电容和电容器.....	22
7.1 电容.....	22
7.2 电容器储能(电能).....	24
9. 恒定电流场	25
9.1 电流密度矢量.....	25
9.2 欧姆定律的微分形式.....	25
9.3 电流的连续方程	25

9.4 两种导体/两种电介质分界面上的边界条件	26
9.5 电流线在导体/介质分界面上的折射	27

第二章 恒磁场.....28

2.磁感应强度 毕奥-萨法尔定律	28
2.1 磁感应强度 毕奥-萨法尔定律	28
2.2 载流直导线的磁场	29
2.3 载流圆线圈轴线上的磁场	29
3.安培环路定理.....	30
3.1 安培环路定理	30
3.2 安培环路定理应用举例.....	31
4.磁场的“高斯定理” 磁矢势	32
4.1 磁场的“高斯定理”	32
4.2 磁矢势.....	32
5.磁场对载流导线的作用.....	32
5.1 安培力.....	32
5.2 矩形载流线圈在均匀磁场中所受力矩	33
5.3 磁聚焦.....	34
5.4 霍尔效应	34

第三章 电磁感应 电磁场的相对论变换34

1.电磁感应定律.....	34
1.1 电磁感应现象	34
1.2 楞次定律	35

1.3 涡流.....	35
2.动生电动势和感生电动势	35
2.1 动生电动势	35
2.2 感生电动势	36
5.互感和自感	37
5.1 互感.....	37
5.2 自感.....	38
5.4 两个串联线圈的自感系数	39
第四章 电磁介质.....	40
2.磁介质——分子电流观点	41
2.1 磁介质的磁化.....	41
2.2 抗磁质的磁化.....	42
2.3 铁磁质的磁化.....	43
3.电磁场能	43
4.两种磁介质分界面上的边界条件.....	44
第五章 电路	44
1.恒定电路中的电源	44
1.1 电源的电动势、内阻和路端电压.....	44
2.各种导体的导电机制	45
2.1 金属导电的经典电子论.....	45
3.恒定电路的计算	47
3.1 电阻的串联和并联	47

3.2 简单电路举例.....	47
3.3 基尔霍夫定律.....	48
4.暂态过程	48
4.1 LR 电路的暂态过程.....	48
4.2 RC 电路的暂态过程	49
4.3 积分电路	49
第六章 麦克斯韦电磁理论 电磁波	50
1.麦克斯韦电磁理论	50
1.1 位移电流 麦克斯韦方程组	50
1.2 麦克斯韦方程组	51
1.3 边界条件	52
2.电磁波理论	53
2.1 平面电磁波的解	53
2.2 平面电磁波的性质	54
3.电磁场的能流密度和动量	55
3.1 电磁场的能流密度	55
3.4 电磁场的动量 光压	55
4.电磁波的产生.....	55
4.1 从电磁振荡到电磁波.....	55

第一章 静电场 恒定电流场

1.静电的基本现象和基本规律

1.1 两种电荷

1.物体具有吸引轻小物体的性质，即指物体带了电，或有了电荷。带电的物体叫带电体。

2.使物体带电叫起电。用摩擦的方法使物体带电叫摩擦起电，摩擦起电的一个重要特点是：相互摩擦的两个物体总是同时带电的，并且所带电荷等量异号；另一种重要的起电方法为静电感应。

3.人为规定，丝绸和玻璃棒摩擦后，丝绸带负电，玻璃棒带正电；根据毛皮摩擦过的橡胶棒与丝绸摩擦过的玻璃棒互相吸引，可知两棒上的电荷不同；因此毛皮与橡胶棒摩擦后，毛皮带了正电，橡胶棒带了负电。

4.物体所带电荷数量的多少，叫电荷量，简称电量。测量电量的最简单的仪器是验电器。它利用金属杆下端的铝箔张角来定性测量从金属球传导下来的电荷量的大小。若想定量测量，还可用静电计——但静电计实质上是测量电势的仪器，为了定量测量电量，需要在静电计的金属杆上接一金属圆筒(称为法拉第圆筒)——要测量的电荷与圆筒内表面接触，测量原理为导体壳的静电平衡。

5.电场可以由电荷激发、也可以由磁场来产生感应电场。静电场是指由静止的电荷激发的电场。

1.2 电荷守恒定律

电荷守恒定律：电荷既不能被创造也不能被消灭，它们只能从一个物体转移到另一个物体，或者从一个物体的一部分转移到另一部分；即在任何物理过程中，电荷

的代数和是守恒的。其在一切宏观过程和一切微观过程中均成立，是物理学中普遍的基本定律之一。

1.3 导体、绝缘体、半导体

1.带电体同玻璃棒的某个地方接触，玻璃棒的那个地方就会带上电荷，但是别的地方仍旧不带电；同样的操作下，金属物体的别的地方却也会带电；再如，用两玻璃棒支架分别支撑一个导体做静电感应实验时，当 A、B 两导体感应出电荷后，将它们分开，此时感应出的电荷并不会沿着玻璃支柱跑掉，而重新接触时，两边的电荷却能跑到一起中和掉。

2.按照电荷在其中是否容易转移或传导，把物体大致分为两类：(1).电荷能够从产生的地方迅速转移或传导到其他部分的物体，叫导体；(2).电荷几乎只能停留在产生的地方的物体，叫绝缘体，又叫电介质。——金属、石墨、电解质溶液(金属离子、酸根离子...)、熔融 NaCl、人体、大地、电离了的气体等，都是导体；玻璃、橡胶、丝绸、琥珀、松香、硫磺、瓷器、油类、未电离的气体等，都是绝缘体。

(3).这种分类不是绝对的，导体和绝缘体之间没有明确的、严格的界限。一定条件下物体转移或传导电荷的能力(导电能力)将发生变化，例如绝缘体在强电力作用下将被击穿而成为导体。另外还有许多被称为半导体的物质，它们的导电能力介于导体和绝缘体之间，而且对温度、光照、杂质、压力、电磁场等外界条件极为敏感。

1.4 物质的电结构

1.在金属导体中，原子里的最外层电子(价电子)可以摆脱原子的束缚，在整个导体中自由运动，这类电子叫做自由电子。原子中除价电子之外的其余部分叫原子实。在固态金属中，原子实排列成整齐的点阵，称为晶格或晶体点阵。自由电子在其间跑来跑去，像气体的分子那样做无规则运动，并不时地彼此碰撞和与点阵上的原子实碰撞。这就是金属微观结构的经典图像。

2.(1).导体之所以能够导电，是因为它们内部存在着可以自由移动的电荷，这种电荷叫自由电荷。金属中的自由电荷是自由电子、电解质溶液中的自由电荷是溶解在其中的溶质分子电离出的正负离子、电离的气体中自由电荷也是正负离子(不过负离子往往是电子)；

(2).绝缘体中，绝大部分电荷都只能在一个原子或分子的范围内作微小的位移。这种电荷叫**束缚电荷**。由于绝缘体中的自由电子很少，所以它们的导电性能很差。

(3).半导体中的**导电粒子(载流子)**，有带**负电的电子**，也有带**正电的“空穴”**。当半导体中**多数载流子为电子**时，称为**N型半导体**；当**多数载流子为“空穴”**时，称为**P型半导体**。——将N、P型半导体结合起来，可以制成各种半导体器件，如晶体二极管、晶体三极管等。

3.电荷的量子性：电荷的量值有个基本单元，即一个质子或者电子所带电量的绝对值 e 。任何微观和宏观的物体所带电量只能是这一基本单位的整数倍。这个常量由实验测定为： $e=1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ 。C(库仑)是电量的单位，它的定义将在后文阐述。不过我们可知： $\frac{1\text{C}}{1.602 \times 10^{-19} \text{C}}=6.24 \times 10^{18}$ ，即1C的电量是 e 的 6.24×10^{18} 倍。

1.5 库伦定律

1.在 MKSA 单位制中，电量的单位为 C， $1\text{C}=1\text{A}\cdot\text{s}$ ；在 MKSA 单位制中，库伦定律里的电量单位用 C，距离单位用 m，力的单位用 N，比例系数 $k=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=8.99 \times 10^9 \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ ，其中 $\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ ，此时**库伦定律**表示为： $\mathbf{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12}$ 。其中 $\hat{\mathbf{r}}_{12}=\frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$ ，表示**1号点电荷**指向**2号点电荷**的**单位矢径**；其中若 $q_1 q_2$ 同号，则 \mathbf{F}_{12} 与 $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ 方向相同，异号则反向。

2.电场 电场强度

2.1 电场

电场是物质，或者说是物质的一种形态，具有能量动量质量。在哲学上，物质是不以人的意志为转移而客观存在的。科学实验可以证明电磁场可以完全脱离电荷和电流而独立存在，它具有自己的运动规律。电磁场的物质性只有在它处于迅速变化的情况下，才能更加明显地表现出来。——不过本章研究的是相对于观察者静止的电荷在其周围空间产生的电场，即静电场。

2.2 电场强度矢量 E

1.电场的一个重要性质是它对电荷施加作用力。为了研究这个性质，我们需要在电场中引入一试探电荷 q_0 ——(1).试探电荷的电量 q_0 必须充分小，不然它会改变原有的电荷分布，进而改变原有的电场分布。(2).为确定空间各点的电场性质， q_0 的几何线度也要充分小。

2.可以发现，对于电场中的固定点来说， q_0 在电场中的受力 F 与 q_0 的比值 $\frac{F}{q_0}$ ，这个矢量在大小和方向上均与试探电荷无关，因此它是反映电场本身性质的。我们将其定义为电场强度 E ，记为 $E = \frac{F}{q_0}$ 。其单位为 N/C 或 V/m。

3.(1).单独场源电荷 Q_0 产生的电场中各点的场强 $E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_0}{r^2} \cdot \hat{r}$ 。

(2).电场叠加原理：根据力的叠加原理，加上电场强度 E 的定义式，离散状态下，多个场源电荷 Q_i 在试探电荷 q_0 处产生的场强 $E = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{r}_i$ 。

(3).电荷连续分布时， $E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \hat{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \hat{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \cdot \hat{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dL}{r^2} \cdot \hat{r}$ 。

电荷连续分布的 2 个场强计算问题：

①.圆环对其中轴上一点的场强：任取一对关于圆心对称的元弧 dL ，它们对于轴上某点的合场强在 \perp 轴方向上的分量都=0；或者说，由于圆环的绕轴旋转理应对应着轴上任意一点的总场强方向不改变——因此圆环对轴上任意一点的合场强在 \perp 轴方向上的分量=0。因此我们不用考虑任意单个元弧 dL 对轴上一点的场强在 \perp 轴方向上的分量。

因此 $E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \hat{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot \hat{i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \hat{i}$ ，求导可知 E 最大的位置为： $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$ 。

②.有限长均匀带电细棒中垂面上的场强分布，棒长为 $2L$ ，带电总量为 q 。选取细棒中点为坐标原点 O ，取 z 轴沿细棒向上。则细棒中垂面过 O ，取其上一点 P ，将细棒分割为关于 OP 对称的一对一对的线元 dz ，它们对 P 点的场强在 $\perp OP$ 的方向上仍然互相抵消。因而合场强沿着 OP (我们把它叫做 r 方向) 方向，因而不用考虑任意单个元弧 dz 对 P 点的场强在 $\perp OP$ 方向上的分量。设 $\tan\alpha = \frac{z}{r}$ ，则 $\sec^2\alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{r} \cdot dz$ ，则 $dz \cdot \cos\alpha = r \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot d\alpha = r \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}} \cdot d\alpha$ ；并且 $\sin\alpha = \pm \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \pm \sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 1}}$ ：

因此 $\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{q}{2L}dz}{r^2+z^2} \cdot \cos\alpha \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{q}{2L}r \cdot \sqrt{1+\frac{z^2}{r^2}}d\alpha}{r^2+z^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{q}{2L} \cdot \frac{1}{r} \sqrt{1+\frac{z^2}{r^2}}d\alpha}{1+\frac{z^2}{r^2}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$

$\hat{\mathbf{r}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{q}{2L} \cdot \frac{1}{r} d\alpha}{\sqrt{1+\frac{z^2}{r^2}}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2L} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2L} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha \Big|_{\tan^{-1}(-\frac{L}{r})}^{\tan^{-1}(\frac{L}{r})} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2L} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2 \sqrt{\frac{(\frac{L}{r})^2}{(\frac{L}{r})^2+1}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r\sqrt{L^2+r^2}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, 你也可以把其中的 $\frac{q}{2L}$ 用个符号代替: $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.

若 $L \rightarrow \infty$, 则 $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.

2.3 带电体在电场中的受力

电偶极子在均匀电场中的受力: 设 \mathbf{L} 为 $-q \rightarrow +q$ 的矢量, \mathbf{L} 与匀强电场 \mathbf{E} 的夹角为 θ . \mathbf{M} (合力矩) $= \frac{L}{2} \times \mathbf{F}_+ + (-\frac{L}{2}) \times \mathbf{F}_- = \mathbf{L} \times \mathbf{F}_+ = q \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E}$, 若我们将 $q \cdot \mathbf{L}$ 定义为电偶极矩/电矩 \mathbf{p} , 则 \mathbf{M} (合力矩) $= \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. 【通常 \mathbf{p} 用小写表示, 不然会和之后的电极化强度矢量冲突; \mathbf{L} 其实也同时代表着角动量, 但这里的 \mathbf{L} 并不.】

3.高斯定理

3.1 电通量

1.引入面元矢量 $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, 其中 \mathbf{n} 为面元的法线方向上的单位矢量(若 dS 是闭合面上取的面元, 则我们通常对应的 \mathbf{n} 为面元的外法线方向的单位矢量, 即两个单位矢量中指向曲面外部空间的那个).

2.通过面元 $d\mathbf{S}$ 的电通量 $d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot dS \cdot \mathbf{n} = E \cdot dS \cdot \cos\theta$, 其中 θ 为 \mathbf{E} 与面元(外)法线 \mathbf{n} 方向之间的夹角. 其积分形式为: $\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint E \cdot dS \cdot \cos\theta$.

3.2 高斯定理

1.静电场的一个最重要的定理——高斯定理: 通过一个任意闭合曲面 S 的电通量 Φ_E , 等于该面所包围的所有电量的代数和 $\sum_{S \text{ 内}} Q$ 除以 ϵ_0 , 与闭合面外的电荷无关.

以公式来表达即为: $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \cdot dS \cdot \cos\theta = \frac{\sum_{S \text{ 内}} Q}{\epsilon_0}$.

*证明: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\text{内}} \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{S} +$
 $\sum_{\text{外}} \oint_S \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{S}}{r_i^2} = \sum_{\text{内}} \oint_S \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pm dS_{\perp i}}{r_i^2} + \sum_{\text{外}} \oint_S \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi \cdot \frac{\pm dS_{\perp i}}{4\pi r_i^2} = \sum_{\text{内}} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi + 0 = \frac{\sum_{\text{内}} Q_i}{\epsilon_0}$
 【其中 $d\Omega = \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{S}}{r_i^2} = 4\pi \cdot \frac{\pm dS_{\perp i}}{4\pi r_i^2} = 4\pi \cdot \frac{\pm dS_{\perp i}}{S_{\text{球面}i}}$, 叫做立体角】

*式中左边的 \mathbf{E} 是带点体系中所有电荷(高斯面内和外)产生的总场强, 而右边的 $\sum_{\text{内}} Q$ 只是对高斯面内的电荷求和。——高斯面外的 Q_i 只是对总的电通量 Φ_E 没有贡献, 但对总场强 \mathbf{E} 仍然有贡献。

3.3 球对称的电场

(1).均匀带电球壳的场强分布:

作一与带电球壳同心的半径为 r 的球壳状高斯面, 球面上一点 $P(r, \theta, \varphi)$ 的场强 \mathbf{E} 理应有 \mathbf{E}_r 、 \mathbf{E}_θ 、 \mathbf{E}_φ 三个分量。然而带电球壳围绕任意一直径旋转后, 电荷在空间中的分布状况并不改变, 因此高斯面上任何一指定点 P 的场强不因球壳旋转而改变大小和方向; 另一方面, 与带电球壳朝相同方向旋转了相同角度的参考点, 在旋转前和旋转后都是相对于球壳静止的, 这两个前后在空间上有着不同绝对位置的参考点, 理应也有相同的相对于球壳的场强; 若 \mathbf{E}_θ 、 \mathbf{E}_φ 这两个分量任意一个不为 0 的话, 比如 \mathbf{E}_θ 不为 0, 则将带电球壳沿着 OP 轴旋转, \mathbf{E}_θ 跟着 P 点, P 点跟着带电球壳旋转了(有相同的角位移), 由橘黄色字体可知, 先后的 \mathbf{E}_θ 分别在没旋转和旋转了的坐标系下示数相同而在绝对参考系下不同; 然而旋转后的 P 点与旋转前的 P 点位置重合, 由蓝色字体可知, 同一点的先后的 \mathbf{E}_θ 应该相同, 这就推出了矛盾。

那么 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r$, 并且由于上一段中的橘黄色字体, 所有等 r 的点处 $|\mathbf{E}_r| = E_r$ 相等。根据高斯定理, 当 $r > R$ 时, $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E_r \cdot dS = E_r \cdot \oint_S dS = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum_{\text{内}} Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 于是 $E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 得到 $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 因此 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r = E_r \cdot \mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{e}_r$; 当 $r < R$ 时, $E_r = 0$, 因此 $\mathbf{E} = 0$ 。

(2).均匀带电球体的场强分布:

当 $r > R$ 时, $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E_r \cdot dS = E_r \cdot \oint_S dS = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum_{\text{内}} Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 于是 $E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 得到 $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 因此 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r = E_r \cdot \mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{e}_r$; 当 $r < R$ 时, $E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q \cdot r^3}{R^3}$, 因此 $\mathbf{E} = \frac{Q \cdot r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \mathbf{e}_r$ 。

(3).非均匀带电球体的场强分布($\rho=kr$):

$$\text{当 } r>R \text{ 时, } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum_{S \text{ 内}} Q}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_{\epsilon_0} dQ}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_{\epsilon_0} \rho \cdot dV}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^R kr \cdot d(\frac{4}{3}\pi r^3)}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^R kr \cdot 4\pi r^2 \cdot dr}{\epsilon_0} = \frac{\pi k r^4 \Big|_0^R}{\epsilon_0} = \frac{\pi k R^4}{\epsilon_0},$$

$$\text{于是 } E = \frac{k R^4}{4\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{e}_r; \text{ 当 } r<R \text{ 时, } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k r^4 \Big|_0^r}{\epsilon_0}, \text{ 因此, } E = \frac{k r^2}{4\epsilon_0} \cdot \mathbf{e}_r.$$

3.4 轴对称的电场

(1).均匀无限长细棒的场强分布:

作一以细棒为轴的无限长圆柱面, 设其上一点 P 场强为 \mathbf{E} , 它的三个分量为 \mathbf{E}_r 、 \mathbf{E}_ϕ 、 \mathbf{E}_z 。现将细棒绕着 P 朝细棒做的垂线翻转 180° , 那么 P 点处的 \mathbf{E}_z 理应反向; 又因细棒翻转后, 电荷的空间分布状况没改变, 因此 P 点处的 \mathbf{E}_z 应保持原状。那么 $\mathbf{E}_z=0$ 。同样的道理(甚至同样的操作), $\mathbf{E}_\phi=0$ 。因此 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_r$ 。作一以细棒为轴的封闭圆柱面高斯面:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_{\text{底}}} 0 \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}, \text{ 得到 } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \mathbf{e}_r.$$

(2).同样, 均匀无限长圆柱的内、外场强分布均也具有相同的表达式(:若仍以线密度 λ 来计量 Q 的话)。

3.5 无限大带电平面的电场

(1).单个无限大带电平面的电场:

作一两个底面平行于平面且夹其在中间的圆柱面为高斯面, 设 x 轴为圆柱面的中轴, 设其侧面上一点 P 场强为 \mathbf{E} , 它的三个分量为 \mathbf{E}_x 、 \mathbf{E}_y 、 \mathbf{E}_z 。现将平面绕着 P 朝平面做的垂线为轴旋转 α° , 那么 P 点处的 \mathbf{E}_z 也应旋转 α° ; 又因细棒翻转后, 电荷的空间分布状况没改变, 因此 P 点处的 \mathbf{E}_z 应保持原状。那么 $\mathbf{E}_z=0$ 。同样的道理(甚至同样的操作), $\mathbf{E}_y=0$ 。因此 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_r$:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{S} = 2 \cdot E \cdot S_{\text{底}} = \frac{\sigma \cdot S_{\text{底}}}{\epsilon_0}, \text{ 得到 } E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \mathbf{e}_r.$$

(2).一对带等量异号电荷的无限大带电平面之间的电场: $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \mathbf{e}_{+ \rightarrow -}.$

3.6 从高斯定理看电场线的性质

1. 电场线稀疏的地方场强小：

电场管能够比电场线更确切地描述连续分布的电场；由一束电场线围成的管状区域，叫电场管。由于电场线总平行于电场管侧壁，因而没有电通量穿过侧壁。取电场管的任意两个截面 ΔS_1 和 ΔS_2 ，它们与电场管的侧壁组成一个闭合的高斯面。假设这段电场管中没有电荷，并且电场线从 ΔS_1 穿入，从 ΔS_2 穿出，此时 $\Phi_E = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = -E_1 \cdot \Delta S_{11} + E_2 \cdot \Delta S_{12} = 0$ ，于是 $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta S_{12}}{\Delta S_{11}}$ ，即沿电场管的场强反比于电场管在该处的横截面积。即在电场管收缩的地方，电场比较强；电场管膨胀的地方，电场比较弱。

2. 电场线起于正电荷或无穷远，止于负电荷或无穷远：

若作小闭合面分别将电场线的起点或终点包围起来，则必然有电通量从前者穿出、从后者穿入。根据高斯定理，在前者之内必有正电荷，在后者之内必有负电荷。这就是说，电场线不会在没有电荷的地方中断。同样的道理，有孤立电荷的地方必有电场线穿过。

因此通过高斯定理可以有如下理解：正电荷 q 均发出的含通量 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 的电场管，并且总有 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 的电场管终止于负电荷 $-q$ 。

若带电体系有等量的正电荷和负电荷，则电场线就从正电荷出发，到负电荷终止；如果正电荷多于负电荷，则多余的电场线只能延伸到无穷远；反之，若负电荷多于正电荷，则终止于负电荷上的多余的电场线只能来自于无穷远。

电场线在空间各点的切线方向即为该点的场强方向，所以两根电场线是不会相交的，否则在交点处的场强就会有两个不同的方向——这是不可能的，除非场强为0。因此，电场线的交点场强为0。

4. 电势及其梯度

4.1 电势与电势差

设将试探电荷 q_0 从P点移动到Q点，电场力所做的功为 W_{PQ} ，则 $W_{PQ} = -\Delta A = -(A_Q - A_P) = A_P - A_Q = A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 若是单个点电荷产生的电场，则继续

$=q_0 \int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot (d\mathbf{L} \cdot \cos\theta) = q_0 \int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, 这说明有心力场所做的功与路径无关(这种无关与 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的具体函数无关), 因此我们无需指明积分路径。【其中 A 表示空间某点处的电势能, ΔA 表示电势能的增量, 即末位置 Q 的电势能减去初位置 P 的电势能 $A_Q - A_P$, 即 A_{QP} ; 而 $A_{PQ} = A_P - A_Q = \text{初-末} = \text{负的增量} = \text{电势能增量的负值} = \text{电势能的减少量}$ 】

我们发现 $\frac{W_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 与试探电荷无关, 反映了电场本身在 P 、 Q 两点的性质。这个量定义为 P 、 Q 两点间的电势差, 或称为电势降(落), 用 U_{PQ} 表示; 它同时也叫做单位正电荷的电势能差, 或者说, 移动单位正电荷时电场力所做的功。即有:

$$U_{PQ} = \frac{W_{PQ}}{q_0} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}.$$

令参考点的电势为 0 , 则其他各点与此参考点之间的电势差定义为该点的电势值。通常选取无限远处为电势的参考点的位置, 并令其电势 $=0$ 。由于 $U_P - U_\infty = U_{P\infty} = \frac{W_{P\infty}}{q_0} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, 且 $U_\infty = 0$, 则 $U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$; 则 $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_Q^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = U_P - U_Q$, 即有 P 、 Q 两点间的电势差 $=P$ 点的电势减去 Q 点的电势。【一般只有孤立带电体系才以无穷远处为电势零点; 而一般的求 P 点电势, 要从 P 点积分到所设定的电势零点(Q); 即 $V_r = V_r - 0 = V_r - V_{\infty} = U_{r\infty} = \int_r^\infty \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ 】

从定义式可看出, 电势差和电势的单位均为: J/C , 我们定义 $1V = 1J/C$ 。其中 V , 叫做伏特, 简称伏。—电子伏特 $= 1eV = 1V \cdot 1.60 \times 10^{-19}C = 1.60 \times 10^{-19}J$ 。

$$(1). \text{单个点电荷产生的电场中的各点的电势: } U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_P^\infty E \cdot dr = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_P^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_P}$$

$$(2). \text{均匀带电球壳产生的电场中电势的分布: } U_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad r > R; \quad U_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}, \quad r < R;$$

4.2 电势叠加原理

任意带电体系可看作是点电荷组。因此 $U_P = \sum_{i=1}^n U_i(P) = \sum_{i=1}^n \int_P^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i}$, 其中 $U_i(P)$ 表示点电荷 q_i 单独存在时, P 点的电势。

(1). 电偶极子在相当远的地方任意一点的电势:

$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{L \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

同时也有 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{L \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, 之后我们会利用后者来计算电偶极子的场强分布。

4.3 等势面

电势相等的点所组成的面叫做等势面。

1.等势面与电场线处处正交：

电荷沿着等势面移动时， $W_{PQ}=A_{PQ}=q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}=q_0(U_P - U_Q)=0$ ，即电场力不会做功，所以 $A_{PQ}=q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}=q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \cdot \cos\theta=0$ ，然而 q_0 、 \mathbf{E} 、 $d\mathbf{L}$ 均不为 0，因此 $\cos\theta=0$ ，即 \mathbf{E} 与 $d\mathbf{L}$ 垂直，因此电场线与等势面处处正交。

2.等势面密集的地方场强大：

由于之前提及过： $-\Delta A=q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ ，因此 $-\Delta U=\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ ，若电场线与等势面 U 、 $U+\Delta U$ 的两个交点 P 、 Q 彼此很接近[路径 $L(d\mathbf{L})$ 从 P 指向 Q]，且 \mathbf{E} 接近 \perp 两个等势面[或者说接近//路径 $L(d\mathbf{L})$]，则积分式子变为 $-dU=\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}=E \cdot dL$ ，即有 $E=-\frac{dU}{dL}$ 。

若仅看 E 的大小，可知当 dU 相同时， dL 大的地方场强小。

4.4 电势的梯度

由 4.3 便可知 $E=-\frac{dU}{dL}$ ，进一步地我们有矢量式： $\mathbf{E}=-\nabla U$ ，进一步地我们用方向导数来表示，空间各点在各个方向的场强： $E_L=-\frac{\partial U}{\partial L}$ 。【 ∇U 指 $\nabla \cdot U$ 】

(1).电偶极子在偶极距方向上的场强分布：

之前我们得到了 $U=\frac{q \cdot L \cdot x}{4\pi\epsilon_0 r^3}=\frac{q \cdot L \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，现在对它求它对 x 的偏导数，再取负：
 则 $E=-\frac{\partial}{\partial x} \frac{q \cdot L \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{y=0} = -\frac{q \cdot L}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{|x|^3} = -\frac{q \cdot L}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2} = \frac{q \cdot L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cdot p}{x^3}$ 。

(2).电偶极子在中垂面方向上的场强分布：

$E=-\frac{\partial}{\partial x} \frac{q \cdot L \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{x=0} = -\frac{q \cdot L}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} \Big|_{x=0} = -\frac{q \cdot L}{4\pi\epsilon_0} \frac{|y^3|}{y^6} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{|y^3|}$ 。
 【我们用的是非精确的 U ，算出来的却是精确的 E ？】

5.静电场中的导体

5.1 导体的平衡条件

1.导体的静电平衡条件：质料均匀、温度均匀的导体，静电平衡时，体内场强处处为 0。【若不为 0，则在 \mathbf{E} 不为 0 的地方，自由电荷会移动，则导体未静电平衡】

(1).导体是个等势体。 \Leftrightarrow 导体内部 $\mathbf{E}=0$ 。

(2).导体表面是个等势面。 \Leftrightarrow 导体外部 \mathbf{E} \perp 导体表面。【这是因为，之前说过，电场线处处与等势面正交】

5.2 导体上的电荷分布

导体达到静电平衡时：

(1).体内处处没有未抵消的净电荷(即电荷的体密度 $\rho_e=0$)，电荷只分布在导体表面。【利用高斯定理】

(2).导体表面外附近空间的场强 $\mathbf{E}=\frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$ 。

做一上底面在导体表面之外附近空间、下底面在导体内表面附近空间的圆柱高斯面；两个底面均非常小，使得 σ_e 认为是均匀的；柱非常短，使得两底面可以认为与柱侧面与导体表面的交线所围成的 ΔS 平行并无限靠近它，因而它们的面积均为 ΔS ——此时高斯定理左边对圆柱侧面、下底面的电通量积分值=0，只有上底面有电通量穿过，因此场强为单个无限大带电平面的 2 倍。

(3).表面曲率越大的地方，电荷越密集。【尖端放电】

导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷比较密集， σ_e 较大；表面较为平坦的地方(曲率较小)， σ_e 较小；表面凹进去的地方(曲率为负)， σ_e 更小。但是，孤立导体表面的电荷密度 σ_e 与曲率之间并不存在单一的函数关系。

5.3 导体壳(腔内无带电体)

a.腔内无带电体的导体壳达到静电平衡时:

(1).导体壳内表面上处处无电荷(即电荷的面密度 $\sigma_e=0$), 电荷只分布在导体外表面。

在导体内、外表面之间取一闭合曲面 S , 紧贴内表面地围起来(和内表面稍有间隔)。该高斯面 S 完全处于导体内部, 根据平衡条件, 其上场强处处为 0, 因此没有电通量穿过它, 根据高斯定理, S 内部电荷代数和为 0(腔内有带电体时也有此结论, 因此导体内表面会带有与腔内带电体等量异号的电荷)。由于空腔内(内表面之内)没有电荷, 因此, 内表面(与 S 之间)的电荷代数和为 0。

不仅如此, 由于空腔内没有电荷, 内表面 $\sigma_e>0$ 的地方发出的电场线, 不会在腔内中断, 只能终止于在内表面上的某个 $\sigma_e<0$ 的地方; 这样一来, 电场沿着其中一个电场线的积分 $\neq 0$, 即电场线的两端有电势差; 但电场线的两端在导体中, 而导体是个等势体, 与平衡条件相违背。——因此导体内表面 σ_e 处处=0。

(2).空腔内没有电场(空腔内电势处处相等)。

正如之前所推导的: 导体外表面外附近空间的场强 $\mathbf{E}=\frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$, 同样, 导体内表面内附近空间的场强 $\mathbf{E}=\frac{\sigma_e}{\epsilon_0}=0$, 因此电场线不可能穿过这层没有电场的区域; 而电场线又不可能在腔内有端点或形成闭合线, 所以腔内不可能存在电场线和电场。【腔内无其他带电体的导体壳和实心导体球一样, 内部没有电场; 因而不管导体本身带不带电、处不处于外界电场中, 均能使得导体壳包围的区域内不受导体壳外表面上的电荷 or 外界电场的影响——这个现象称为静电屏蔽】

b.静电平衡下导体壳内表面处处无电荷的应用:

像法拉第圆筒一样, 将带电导体与导体内表面接触时, 带电导体的表面称为导体壳内表面的一部分, 带电导体上电荷会全部转移到导体壳的外表面上去。这是一个从带电导体上吸取全部电荷的有效办法。——为了测量电量, 在静电计上安装法拉第圆筒, 并将带电体接触圆筒的内表面, 以期获得带电导体的全部电荷, 及对应偏角。

c.库仑平方反比律的精确验证:

库仑平方反比律→高斯定理→电荷只分布在导体外表面, 那么如果点电荷之间的相互作用力违背了平方反比律, 则导体上的电荷也将不完全只分布在导体外表面上。

6.静电能

6.1 点电荷之间的相互作用能

1.静电能本身的数值是相对的。要谈一个带电体系所包含的全部静电能有多少,必须说明相对于何种状态而言。——设带电体系中的电荷可以无限分割为许多小部分,当这些小部分最初都分散在彼此相距无限远的位置上时,这种状态下的带电体的静电能设为0。—— W_e =各部分电荷从这种状态聚集为现有带电体系时,抵抗静电力所做的全部功=各部分电荷从现有带电体系分散为这种状态时,静电力所做的全部功。

$W_e = W_{\text{互}} + W_{\text{自}}$; 相互作用能= $W_{\text{互}}$ =把每个带电体看为不可分割的整体,将各个带电体从无限远移到现在位置所做的功; 自能= $W_{\text{自}}$ =把每个带电体上各个部分的电荷从无限分散的状态聚集起来时所作的功。

(1).两个点电荷的情形:

先搬运 q_1 时,体系中还没有其它电荷和电场,因而不需要做功。搬运 q_2 时,它已经处在 q_1 的电场中,因而需要抵抗静电力 $F_{12}=q_2 E_{12}$ 做功= $\int_{\infty}^{P_2} -F_{12} \cdot dL = \int_{P_2}^{\infty} F_{12} \cdot dL$ =反过来先将 q_2 自由释放,被 q_1 的电场产生的静电力作用到无穷远之后,再释放 q_1 时,无其他电荷、电场而没有静电力做功了。

此时 $\int_{P_2}^{\infty} F_{12} \cdot dL = q_2 \int_{P_2}^{\infty} E_{12} \cdot dL = q_2 U_{12}$,以后我们将 U_{12} 写作 U_2 ,表示其余所有电荷产生的电场在 q_2 处的电势之和。容易发现: $W_{\text{互}} = q_2 U_{12} = q_1 U_{21} = \frac{1}{2} \cdot (q_1 U_{21} + q_2 U_{12})$ 。【或者写成 $W_{\text{互}} = q_2 U_2 = q_1 U_1 = \frac{1}{2} \cdot (q_1 U_1 + q_2 U_2)$ 】

(2).多个点电荷的情形:

容易得出: $W_{\text{互}} = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} \cdot (q_i U_{ji} + q_j U_{ij}) = \frac{1}{2} \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_j U_{ij}] = \frac{1}{2} \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n q_j U_{ij}] = \frac{1}{2} \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n q_i U_{ji}] = \frac{1}{2} \cdot [\sum_{j=1}^{n-1} q_n U_{jn} + \sum_{i=1}^{n-1} [\sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} + \sum_{j=i+1}^n q_i U_{ji}]] = \frac{1}{2} \cdot [\sum_{j=1}^{n-1} q_n U_{jn} + \sum_{i=1}^{n-1} [\sum_{j=1(j \neq i)}^n q_i U_{ji}]] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1(j \neq i)}^n q_i U_{ji}] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n q_i U_i$ 【这里有个有意思的结论: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j \neq i)}^n q_i U_{ji}$ 】

6.2 电荷连续分布时的情形:

由于带电体已经被无限分割了，因而我们得到的已经不仅是相互作用能 $W_{\text{互}}$ 了，而是包括自能 $W_{\text{自}}$ 在内的总静电能 W_e 了，因此 $W_e = \frac{1}{2} \iiint U \cdot \rho_e \cdot dV = \frac{1}{2} \iint U \cdot \sigma_e \cdot dS = \frac{1}{2} \int U \cdot \lambda_e \cdot dL$ 。如果这个带电体系只有一个带电体，则此时算出的 W_e 是其 $W_{\text{自}}$ 。

$$* \text{均匀带电球壳的自能} = \frac{1}{2} \iint U \cdot \sigma_e \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \iint \sigma_e \cdot dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R}$$

第四章 电磁介质

1.电介质

1.1 电介质的极化

电容器极板之间的原场强 $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ ；插入导体板或插入(充入)均匀(各向同性)电介质后，板间总场强 $E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\epsilon_r} (= \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon})$ ，其中 E' 为极化电荷产生的附加场/退极化场。

1.2 极化的微观机制

正负电荷在分子中都不是集中于一点的。但是在离开分子的距离比分子的线度大得多的地方，分子中全部负电荷对于这些地方的影响等效于一个单独的负点电荷。这个等效负点电荷的位置称为这个分子的负电荷“重心”。

电介质可以分为两类：一类是，当外场不存在时，电介质分子的正负电荷的“重心”重合，这类分子叫做无极分子；另一类是，虽然分子中正负电荷的代数和仍然=0(因为是分子嘛)，但是等量的正负电荷“重心”互相错开，形成一定的电偶极矩(这称为分子的固有电矩)，这类分子叫有极分子。

(1).无极分子的位移极化

当外场存在时，每一无极分子的正负电荷“重心”错开，形成一个个电偶极子。分子电偶极矩的方向沿外场方向。这种在外场下产生的电偶极矩称为感生电矩。我们以后在图中用小箭头表示分子的电偶极矩，始端为负电荷重心，末端为正电荷重心。各个偶极子沿外场方向排列成一条链，链上相邻的偶极子间正、负电荷互相靠近，因而对于均匀电介质来说，其内部各处仍然是电中性的。但是在垂直于外场的两个端面上，会出现极化电荷，一端为正，另一端为负。极化电荷 Q' 与导体中的自由电荷 Q_0 不同，它们不能离开电介质而转移到其他带电体上，也不能在电介质内部自由移动。

由于电子质量比原子核小得多，所以在外场作用下，主要是电子位移；因此无极分子的极化机制常常称为电子位移极化。

(2).有极分子的取向极化

当外场不存在时，每一有极分子的固有电矩会因分子的不规则运动而总体来说相互抵消，使得所有分子的固有电矩矢量和为 0；当外场存在时，由于分子的不规则运动，分子固有电矩的方向将不完全地转向外电场方向（外场强度越强，排列愈整齐），此时对于整个电介质来说，在垂直于外场的两端也会产生极化电荷。

这种极化机制称为取向极化。

另外——电子的位移极化效应在有极分子中也存在，但分子的取向极化由有极分子独有；不过由有极分子构成的电介质中，取向极化的效应比位移极化强的多（大约一个数量级），因此取向极化是主要的；在很高频的电场下，分子惯性较大，取向极化跟不上外电场的变化，而惯性小的电子能紧跟上，这时两种电介质只剩下电子位移极化仍起作用。

1.3 极化强度矢量 \mathbf{P}

(1).定义：

当电介质处于极化状态时，电介质的任一宏观小体积元 ΔV 内所有分子的电矩矢量和 $\sum \mathbf{p}_{\text{分子}}$ 不为 0，而是 ΔV 的某两个端面上会有极化电荷存在而内部无；当介质没有被极化时，各 ΔV 内 $\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$ 。——于是定义单位体积内的电矩矢量和 $\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$ ；如果在电介质中各点的极化强度矢量 \mathbf{P} 的大小和方向均相同（即任意微小体积元 ΔV 内， $\sum \mathbf{p}_i$ 的方向相同， $\frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$ 的大小相同），则称该极化是均匀的。【注意大写的 \mathbf{P} 和小写的 \mathbf{p} 所表示的物理含义的不同】

(2).极化电荷的分布与极化强度矢量的关系:

对于电介质有极化电荷的两端面中的某一带负极化电荷的端面, 单位面积的电荷量为 σ' , 对该端面上某一 ΔS 沿着外场方向对 $\mathbf{p}_{\text{分子}}$ 求和至另一端面时, $\sum \mathbf{p}_i = \sum \sum \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{L}_i = \sum (\sum \mathbf{q}_i) \cdot \mathbf{L}_i = \sum (-\sigma' \cdot \Delta S) \cdot \mathbf{L}_i = (-\sigma' \cdot \Delta S) \cdot \sum \mathbf{L}_i = -\sigma' \cdot \Delta S \cdot \mathbf{L}$; 若两平行端面的 \mathbf{d} 满足 $\mathbf{d} = \mathbf{L} \cdot \cos\theta$, 则这段求和路径所对应的斜柱体体积 $\Delta V = \Delta S \cdot \mathbf{d} = \Delta S \cdot \mathbf{L} \cdot \cos\theta$; 则这段斜柱体的平均极化强度 $\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} = \frac{-\sigma' \cdot \Delta S \cdot \mathbf{L}}{\Delta S \cdot \mathbf{L} \cdot \cos\theta}$, 两边取模, 即有 $P = \frac{-\sigma' \cdot \Delta S \cdot L}{\Delta S \cdot L \cdot \cos\theta}$, $P = \frac{\sigma'}{-\cos\theta}$, 即 $\sigma' = P \cdot \cos(\pi - \theta) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. 其中, $\pi - \theta$ 为 σ' 所对应的面元的外法线方向的单位矢量 \mathbf{n} 与 \mathbf{P} (或外场 \mathbf{E}_0)的夹角; θ 为面元的内法线方向与 \mathbf{P} 的夹角。——其中的内外法线, 针对的是电介质的表面这个闭合曲面。

1.4 极化率

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$, 则 $\mathbf{E}' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_0$, 即 $\frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$, 因此 $\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \sigma_0$; 一方面它可以导出 $Q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot Q_0$; 另一方面利用 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, 有 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot (\epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot (\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E}) = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$; 由于我们用到的公式 $\mathbf{E}' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ 、 $\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ 暗示这里 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}$, 因此有 $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$, 且 $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ 。——我们记其中的 $\epsilon_r - 1 = \chi_e$, 称为极化率, 与场强 \mathbf{E} 无关, 是介质材料的属性。

1.5 电位移矢量 D 有介质时的高斯定理 介电常数

两块平行板间充入了电介质, 将电介质和某板的分界面穿过高斯面, 高斯面的一面置于这块板内, 另一面置于电介质中, 高斯面包围的电荷为 Q_0 和 $-Q'$ 。此时根据高斯定理, $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_0 - Q'}{\epsilon_0} = \frac{Q_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q_0}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon}$, 于是 $\oint_S (\epsilon \cdot \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = Q_0$, 我们记 $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$, 则有有介质时的高斯定理: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0$, 其中某位置上的电位移矢量 \mathbf{D} 与该位置上的 \mathbf{E} 和 ϵ_r 均有关; 一般地, ϵ 是个二阶张量。

可见等式右边与极化电荷无关, 只与高斯面内包围的自由电荷有关。由于 $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$, 电位移矢量 \mathbf{D} 还可以被写作: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 。

一道例题:

两层同心金属球壳(或者内球壳→实心球体; 外球壳→有厚度的薄球壳)间由内而外地充入了两层同心电介质球壳, 内球壳带电量为 Q 。由于 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0$, 可得 $\epsilon_r \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}$, 得到 $\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0 r^2}$; 此时可知 $\mathbf{P}_1 = (\epsilon_{r1} - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_1$, 进而可得到 $\sigma_{1内} = \sigma_{R1+} = -\mathbf{P}_1$ 、 $\sigma_{1外} = \sigma_{R2-} = \mathbf{P}_1$ 。

同理 $\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0 r^2}$ 、 $\mathbf{P}_2 = (\epsilon_{r2} - 1) \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_2$ 、 $\sigma_{2内} = \sigma_{R2+} = -\mathbf{P}_2$ 、 $\sigma_{2外} = \sigma_{R3-} = \mathbf{P}_2$ 。

7.电容和电容器

7.1 电容

(1).**孤立导体的电容**: 孤立导体的 V 将随着 Q 成比例地增加, 我们将其比值 $\frac{Q}{V}$ 定义为电容 C , 它是一个与 Q 、 V 无关, 仅与导体的尺寸与形状有关的常量。它表示导体每升高单位电势所需的电量。——定义 $C = \frac{Q}{V}$, 其中 V 为孤立导体相对于无穷远的电势(先假设带电, 再用定义式计算其电容)。

$$\text{球体/球壳的电容: } C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}} = 4\pi \epsilon_0 R.$$

(2).**电容器及其电容**: 若一个导体旁还有其它导体, 则导体自身的电荷 Q 会使得邻近导体表面产生感应电荷, 它们将影响空间上的电势分布, 以及每个导体的电势。这时导体的 V 不仅与自身的 Q 有关, 此时便没法再用一个常量 C 来反映 Q 与 V 的依赖关系。——为了消除其它导体的影响, 可以采用静电屏蔽的方法:

用一个封闭的导体壳 B 把导体 A 包围起来, 并将 B 接地。此时壳外导体不会影响 A 的电势。当导体 A 带电 Q 时, 导体壳 B 内表面带电 $-Q$, Q 增大时 $U = V_A - V_B = V_A$ 仍按比例增大; B 也可不接地, 此时 C 与 A 和 B 均有关, 因为 V_A 与 V_B 此时均与外界导体有关, 不过其电势差 $U = V_A - V_B$ 仍不受影响, 且正比于 Q , 比值不变。

像这种用导体壳 B 和其腔内的 A 组成的导体系统, 叫做电容器, 比值 $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_A - V_B}$ 叫做它的电容。实际中对电容器的屏蔽性要求并不那么苛刻, 一对面积很大、靠的很近的平行平面便可以被看成(平行板)电容器。

一些例题:

(1). 平行板电容器两板间充入了 ϵ_r 的电介质, 此时根据有介质时的高斯定理, $D \cdot \Delta S = \sigma_0 \cdot \Delta S$, 得到 $\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E = \sigma_0$, 即有 $E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}$ 。根据电容的定义式, $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 \cdot S}{E \cdot d} = \frac{\sigma_0 \cdot S}{\frac{\sigma_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot d} = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot S}{d}$, 这便是它的电容。【这里同 3.5 无限大带电平面的电场一起, 要在一个概念上做一下区分: 再算及单个无限大带电平板的场强时, 高斯定理中, 等式右边的 σ_0 , 表示的是: 被认为无厚度的无限大平面的面密度, 抑或者是, 有厚度的无限大平板的單位上下底面积的柱体中(包含了两个面)的所有电荷——这是因为, 真实情况下的单板是有厚度的, 因此其上的电荷分布不会是 Q 全部集中于一个面、另一个面上没有电荷, 而是两个面上均有略小于 $Q/2$ 的电荷量。此时, 为求其左右场强所选的高斯面, 其内的电量的面密度, 在当时的公式中, 不应是单面的面密度, 而是(所对应的柱体中的)两个面的面密度之和 σ_0 。】

【然而与之不同的是, 电容器这个两板体系的每个板上的带电情况并不和单板时一致, 可以给出的结论是, 通常意义下的平行板电容器, 是指带等量异号电荷的两平板, 即原先两个单独的带有等量异号电荷的单板, 相互靠近所形成的体系; 在它们靠拢之前, 两板的两面间均有等量的 $Q/2$ 的电荷量, 对应的四个面的面密度均为 $\sigma_0/2$ (不考虑正负); 而当它们组成了体系后, 利用如下结论: “对于两个无限大的平行平面带电导体板——相向的两面上, 总有 σ_e 等大异号, 相背的两面, 总是 σ_e 等大同号”可解算出, 此时两个导体板的相向一面均带有等量异号的电荷 Q , 电荷面密度 σ_0 , 而相背的两面电荷量为 0, 电荷面密度也为 0。】

【因此我们才能够不加论述地给出诸如 $D \cdot \Delta S = \sigma_0 \cdot \Delta S$ 、 $E \cdot \Delta S = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cdot \Delta S$ 这样的高斯定理, 其高斯面的选取和单板的不同(单板的高斯面穿过了整个板, 而双板的高斯面一个底面在板内, 一个底面在介质中/两板间), 而其高斯面内实际的某板的相向那面的 σ_e 确实就是所用的 σ_0 。——当平行板电容器, 不是指带等量异号电荷的两平板时, 利用结论 “对于两个无限大的平行平面带电导体板——相向的两面上, 总有 σ_e 等大异号, 相背的两面, 总是 σ_e 等大同号” 会得出迥异的电荷分布, 此时解算所用的 σ_e , 不再是 σ_0 了。——所以本身来讲, 平行板间的场强不应该用两个单独的板的场强叠加而成, 因为组成一个系统后, 单独的板的电荷分布都改变了。不过由于 σ_e 的等效, 还是可行的。】

(2). $D \cdot S_{\text{侧}} = \lambda \cdot L$, 得到 $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_r \cdot \epsilon_0}$ 。对它在两管壁间积分, 即有: $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0 r} \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 。然后单位长度的电容 $C_L = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda}{U} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \epsilon_r \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ 。

(3). 利用上一插入的章节中的课后题, 计算其电容:
 $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0 r^2} dr} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0} (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) + \frac{1}{4\pi \epsilon_{r2} \epsilon_0} (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3})}$, 可见总电容满足以下等

式: $\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$, 我们将其写作 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, 这被称为**电容器串联公式**, 其中 $C_1 = \frac{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$, 甚至 C_1 本身也可被看作通过串联得到的 $\frac{1}{C_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.
 $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_2}$, 其中 $\frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_2} + \frac{1}{C_1}$ 中的 $4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_2$ 和 $4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 R_1$ 是填充了介质 ϵ_{r1} 的、半无限大的孤立导体壳的电容。

$$(4). \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot S}{x}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 \cdot S}{d-t-x}}, \text{ 得到 } C = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d-t}.$$

7.2 电容器储能(电能)

$$W_e = \int_0^Q u \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2, \text{ 这便是电容器的储能公式。}$$

我们同样可以通过“充电”过程得到: $W_e = \int_0^Q (U - u) \cdot dq = QU - \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq$.
 $dq = QU - \frac{Q^2}{2C} = QU - \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} QU$. 【发现这里的 $\frac{1}{2} QU$ 与之前的 $\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n q_i U_i$ 有点像】

另外, 也可以通过之前引入的 $W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n q_i U_i$ 和 $W_e = \frac{1}{2} \iint U \cdot \sigma_e \cdot dS$ 来得到:
 $W_e = \frac{1}{2} \iint U \cdot \sigma_e \cdot dS = \frac{1}{2} U_1 \cdot \iint_{S_1} \sigma_e \cdot dS + \frac{1}{2} U_2 \cdot \iint_{S_2} (-\sigma_e) \cdot dS$ 【其中 U_1 为 S_1 板和 S_2 板对 S_1 板上的 $\sigma_e \cdot dS$ 电荷的合场强从 S_1 板的该处朝某个方向积分到无穷远的值, 即 S_1 板和 S_2 板各自产生的电场在 S_1 板上的 $\sigma_e \cdot dS$ 电荷所处位置的电势的叠加; 同理 U_2 为 S_1 板和 S_2 板对 S_2 板上的 $\sigma_e \cdot dS$ 电荷的合场强从 S_2 板的该处朝相同方向积分到无穷远的值; U_1 、 U_2 对于两板上各处的 $\sigma_e \cdot dS$ 来说, 均是常值, 因此可以提出来。】

$$\text{可知 } W_e = \frac{1}{2} U_1 \cdot Q - \frac{1}{2} U_2 \cdot Q = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) Q = \frac{1}{2} QU.$$

6'. 静电能的另一种计算方法

对于平行板电容器, 电场能 $W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} C(E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot S}{d} E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot (S \cdot d) = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot V$; 那么定义**电场能密度** $w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$.

一些例题:

(1). 同心球壳体系的静电能: $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$, 于是
 $W_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{4\pi r^2}{r^4} \cdot dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, 这与
 $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}}$ 所得结果相同。

(2). 两电容器串联, 极板电荷量相同, W_e 反比于电容 C ; 两电容器并联, 板间电压相同, W_e 正比于电容 C 。

9. 恒定电流场

9.1 电流密度矢量

1. 电流的微观表达式: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{(S_{\perp} \cdot v_d \cdot dt) \cdot n \cdot e}{dt} = env_d S_{\perp}$; 其中表示载流子的漂移速度 v_d ; 电场传导速度快, 电子漂移速度慢。

2. 假设有这么个量 \mathbf{j} , 使得 $dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, 则 $I = \int dI = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 。又因 $dI = env_d dS_{\perp}$, 则 $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = env_d dS_{\perp}$, 即有 $\mathbf{j} = env_d$, 进而有 $\mathbf{j} = env_d$ 。【若 \mathbf{j} 表示电流密度矢量, 则 e 是正值, 仅表大小/带电量】

9.2 欧姆定律的微分形式

1. 由一束电流线围成的管状区域叫做电流管; 像电通量和电场管的关系一样, 可以证明, 在恒定条件下, 通过同一电流管各横截面的电流(即电流密度 \mathbf{j} 的通量)都相等。通常的电路由导线联成, 电流线沿着导线分布, 导线本身就是一个电流管。

2. 由于 $R = \rho \cdot \frac{L}{S}$, 因此电导 $G = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{L} = \sigma \cdot \frac{S}{L}$, 对于各处的电导 $G = \sigma \cdot \frac{dS}{dL}$; 又由恒定电路的基本定律: 欧姆定律 $I = \frac{U}{R} = G \cdot U$, 因此 $dI = G \cdot dU = \sigma \cdot \frac{dS}{dL} \cdot dU = \sigma \cdot dS \cdot \frac{dU}{dL} = \sigma \cdot dS \cdot E$; 又因 $dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_{\perp}$, 联立即有 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, 可进一步写作 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ 。

9.3 电流的连续方程

1. 若取 S 面的外法线, 则单位时间里流出 S 面的电量(减去单位时间里流入 S 面的电量) $= \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, 它等于单位时间内 S 面内的电量增量 dq_{in} 的负值, 即单位时间内 S 面内的电量减少量: $-\frac{dq}{dt}$ 。这便是电流的连续方程(积分形式): $\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{in}}{dt}$ 。

2. 恒定电流场指电流场不随时间变化, 这就要求电荷的分布不随时间变化, 因而这样的电荷产生的电场是恒定电场, 即静电场。在恒定条件下, 对于任意闭合曲面 S , 面内电量不随时间变化, 即 $\frac{dq_{in}}{dt} = 0$, 于是 $\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{in}}{dt} = 0$ 。它表明, 通过 S 面

一侧流入的电量等于从另一侧流出的电量。即电流线连续地穿过闭合曲面所包围的体积/空间。恒定电流的电流线不会在任何地方中断。

与 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 等同的, 还有如下两种形式: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 、 $\sum_i I_i = 0$ (I_i 从节点流出记为正, 流入为负; 因为流出节点的 \mathbf{j} 才与 $d\mathbf{S}$ 夹角为锐角)。

9.4 两种导体/两种电介质分界面上的边界条件

(1). 导体中电流密度矢量 \mathbf{j} 法向分量的连续性:

取一扁柱面闭合曲面(没理由叫其为高斯面), 其上下底面分别处于导体 2 和导体 1 中, 并无限贴近分界面, 则根据恒定电流场中的电流的连续方程: $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$$d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} \mathbf{j}_2 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} j_{2n} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{\text{下}}} j_{1n} \cdot d\mathbf{S} = j_{2n} \cdot S_{\text{上}} - j_{1n} \cdot S_{\text{下}} = 0, \text{ (期间假设了 } \mathbf{j} \text{ 从 } S_{\text{下}} \text{ (导体 1) 穿入, 从 } S_{\text{上}} \text{ (导体 2) 穿出)}$$

得到 $j_{2n} - j_{1n} = 0$; 即 $(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

【注: $\iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_{\text{下}}} j_{1n} \cdot d\mathbf{S}$ 中等式右边的 j_{1n} 所依赖的 \mathbf{n} 为与 j_{2n} 相同的、朝向介质 2 的界面(单位)法向量, 而等式左边的 $d\mathbf{S}$ 的 \mathbf{n} 为朝向介质 1 的分界面法向量, 以下关于 D_{1n} 和 E_{1t} 的都相同。】

(2). 介质中电位移矢量 \mathbf{D} 法向分量的连续性:

取一扁柱面高斯面, 其上下底面分别处于介质 2 和介质 1 中, 并无限贴近分界面, 则根据有介质时的高斯定理: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{侧}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$$d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{下}}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\text{上}}} D_{2n} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{\text{下}}} D_{1n} \cdot d\mathbf{S} = D_{2n} \cdot S_{\text{上}} - D_{1n} \cdot S_{\text{下}} = \sigma_0 \cdot S = 0, \text{ (期间假设了 } \mathbf{D} \text{ 从 } S_{\text{下}} \text{ (导体 1) 穿入, 从 } S_{\text{上}} \text{ (导体 2) 穿出; 两介质分界面处自由电荷面密度 } \sigma_0 = 0 \text{)}$$

得到 $D_{2n} - D_{1n} = 0$; 即 $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

(3). 导体/介质中电场强度矢量 \mathbf{E} 切向分量的连续性:

取一矩形闭合回路 ABCD, 其上下边 AB、CD 分别处于导体 2 和导体 1 中, 并无限贴近分界面, 则根据静电场的环路定理(\mathbf{E} 沿闭合回路的线积分=0): $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B E_{2t} \cdot d\mathbf{L} + \int_C^D E_{1t} \cdot d\mathbf{L} = E_{2t} \cdot AB - E_{1t} \cdot CD = 0, \text{ (期间假设了 } \mathbf{E} \text{ 从 DA (且导体 1) 穿入, 从 BC (且导体 2) 穿出)}$

得到 $E_{2t} - E_{1t} = 0$; 即 $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$ 。

【在对坐标的曲线积分(第二型曲线积分)中, $\int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 中的 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 是个负值, 因而转换为标积时, 标积整体也应是负值; 然而 $\int_C^D E_{1t} \cdot d\mathbf{L}$ 中由积分限所确定的 $d\mathbf{L}$ 已经是负值了(\because 所选的 x 轴同向于 $A \rightarrow B$ 方向, 则反向于 $C \rightarrow D$ 方向, 那么从 C 到 D 的一段段小 $d\mathbf{L}$, 便是负的), 而 E_{1t} 和 E_{2t} 在这样的 x 轴向下, 均为正值; 因此 $E_{1t} \cdot d\mathbf{L}$ 是负的, 符合标积整体为负的要求, 不必另添负号。——在求其值时, 才有负号的出现:

$\int_C^D E_{1t} \cdot d\mathbf{L} = -E_{1t} \cdot CD$, 其中 $\int_C^D d\mathbf{L} = -CD$, $d\mathbf{L}$ 可换成 dx 】

$$\left[\int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(C(x) + i \cdot \frac{D(x)-C(x)}{n}) \cdot \frac{D(x)-C(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(D(x) - i \cdot \frac{-CD}{n}) \cdot \frac{-CD}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^1 \mathbf{E}(D(x) + i \cdot \frac{CD}{n}) \cdot \frac{-CD}{n} \right]$$

9.5 电流线在导体/介质分界面上的折射

(1).**导体分界面上的折射**: 由于 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, 可见 \mathbf{j} 与 \mathbf{E} 的方向相同, 则假设 \mathbf{j} 、 \mathbf{E} 从导体 1 入射分界面时的入射角(与分界面的法线方向 \mathbf{n} 的夹角)共同均为 θ_1 , 折射角为 θ_2 。则根据 $j_{2n} - j_{1n} = 0$, 我们有 $j_1 \cdot \cos\theta_1 = j_2 \cdot \cos\theta_2$; 同理 $E_{2t} - E_{1t} = 0$, $E_1 \cdot \sin\theta_1 = E_2 \cdot \sin\theta_2$; 于是 $\frac{E_1}{j_1} \cdot \tan\theta_1 = \frac{E_2}{j_2} \cdot \tan\theta_2$, 又因 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ 所导致的 $j_1 = \sigma_1 \cdot E_1$ 、 $j_2 = \sigma_2 \cdot E_2$, 于是有: $\frac{\tan\theta_1}{\sigma_1} = \frac{\tan\theta_2}{\sigma_2}$, 推出 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 。

若导体 1 为不良导体或绝缘体, 其电导率 σ_1 较小, 则 θ_1 较小, 这时在不良导体一侧电流线和电场线都几乎与界面垂直。而在良导体一侧, 电流线和电场线几乎与界面平行, 从而非常密集。这样, 高电导率的物质就把电流集中到自己的内部。

(2).**介质分界面上的折射**: 由于 $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$, 可见 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的方向相同, 则假设 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 从导体 1 入射分界面时的入射角(与分界面的法线方向 \mathbf{n} 的夹角)共同均为 θ_1 , 折射角为 θ_2 。则根据 $D_{2n} - D_{1n} = 0$, 我们有 $D_1 \cdot \cos\theta_1 = D_2 \cdot \cos\theta_2$; 同理 $E_{2t} - E_{1t} = 0$, $E_1 \cdot \sin\theta_1 = E_2 \cdot \sin\theta_2$; 于是 $\frac{E_1}{D_1} \cdot \tan\theta_1 = \frac{E_2}{D_2} \cdot \tan\theta_2$, 又因 $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ 所导致的 $D_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \cdot E_1$ 、 $D_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \cdot E_2$, 于是有: $\frac{\tan\theta_1}{\epsilon_{r1} \epsilon_0} = \frac{\tan\theta_2}{\epsilon_{r2} \epsilon_0}$, 推出 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$ 。

即电位移矢量和电场强度矢量朝着导电性好的(ϵ_r 小的)偏折。

球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的半径为 R_2 的导体球壳构成, 其间充满一种介电常量为 ϵ_1 的电介质, 另一种为介电常量为 ϵ_2 的电介质。——分别讨论当两种电介质分别是同心嵌套的两层薄球壳时和接触面为一个圆环带(各占据 R_1 导体球的某一部分上方天空)时, 的电容。

方法一：前者利用有电介质时的(电场的)高斯定理，或者直接利用**介质中电位移矢量 \mathbf{D} 法向分量的连续性**，可以得到两层介质分界面两侧的电场强度 \mathbf{E} 的比值，进而得到 P 的比值，进而得到界面两面电荷面密度之比。——同样，后者可以利用静电平衡条件得到导体球表面和导体球壳均为等电势面(则电势差相等，导致仍然沿径向分布的 \mathbf{E} 对 $d\mathbf{L}$ 的积分相等，而 L 等，因而(各处的) \mathbf{E} 等)，或者直接利用**介质中电场强度矢量 \mathbf{E} 切向分量的连续性**，得到圆环带这个分界面上两侧电场强度 \mathbf{E} 方向相同且大小相等(此时对于介质分界面来说的 \mathbf{E} 的切向分量，就是 \mathbf{E} 本身，并且对于导体球和球壳而言，是法向的)，进而利用 $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_1 R_1^2}$ 、 $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2 R_1^2}$ 得到 R_1 导体球表面与两种介质接壤处的自由电荷量 Q_1 、 Q_2 之比。

进而通过 $Q = \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{2}$ ，并用 Q_2 表示 Q_1 ，得到用 Q_1 表示的 Q 。此时再利用 $C = \frac{Q}{U}$ ，其中 Q 用 Q_1 表示， $U = U_2 = U_1$ ，因此 $C = \frac{f(Q_1)}{U_1} = k \cdot \frac{Q_1}{U_1} = k \cdot C_1$ 。

方法二：将电容器并联公式应用于前者；串联公式应用于后者。

第二章 恒磁场

2.磁感应强度 毕奥-萨法尔定律

2.1 磁感应强度 毕奥-萨法尔定律

在磁场中，与**静电库伦定律**相当的基本规律为**安培定律**，现将其拆写成两部分： $d\mathbf{F}_{12} = I_2 \cdot d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_{12}$ (下角标 12 表示 1 号对 2 号的，而在**互感**一节处， M 的下标 12 却表示 2 号对 1 号的)，其中 $d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^2}$ 。则 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_L \frac{I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^2}$ 称为**毕奥-萨法尔定律**。

【为什么该定律一定要是环积分呢- -】

2.2 载流直导线的磁场

假设一电流沿 z 轴正向的载流直导线, \hat{r} 与 z 轴正向夹角为 θ , 参考点 P 作导线垂线, 垂足为 O , OP 为 r_0 。则 $z = -r_0 \cdot \cot\theta$ 、 $r = \frac{r_0}{\sin\theta}$; 则 $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_L \frac{I \cdot d\mathbf{L} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot$

$\oint_L \frac{I \cdot dz \cdot \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \cdot r_0 \cdot \csc^2\theta \cdot \sin\theta}{r_0^2 \cdot \csc^2\theta} = \frac{I \cdot \mu_0}{4\pi r_0} \cdot \oint_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta = \frac{I \cdot \mu_0}{4\pi r_0} \cdot (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ 【这里就不太该用环积分负号三】

于是无限长直导线周围的磁感应强度 $B = \frac{I \cdot \mu_0}{2\pi r_0}$; 半个无限长的 $B = \frac{I \cdot \mu_0}{4\pi r_0}$ 。

2.3 载流圆线圈轴线上的磁场

分析时, 一对对关于线圈圆心 O 点对称的 $I \cdot d\mathbf{L}$ 在 P 点 \perp 轴向的 B 分量抵消, 且轴向方向的 B 分量同向。因此 $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_L \frac{I \cdot d\mathbf{L} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_L \frac{I \cdot d\mathbf{L}}{r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot 2\pi R}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$
 $= \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$; 这和我们之前得到的带电圆环对轴线上的场强: $E = \frac{Q \cdot x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$ 在形式上差不多。

(1). 线圈密绕 N 匝时: 近似地有 $B = \frac{\mu_0 NI R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

(2). 线圈两边磁感应强度 B 方向相同。

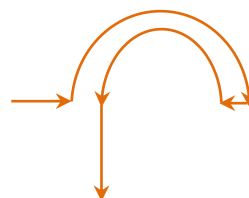
(3). $x=0$ 时, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ 。并且进一步地有: 残缺圆环的 $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\theta}{2\pi}$ 。

(4). $x \gg R$ 时, $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I \cdot S}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}$, 于是 $B = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}$, 其中 $m = I \cdot S$, 称为磁矩。

一道例题:

如图所示的载流导线组, 若以 \odot 为正, 则圆心处的 B 为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{I \cdot \mu_0}{4\pi R_1}$$



3. 安培环路定理

3.1 安培环路定理

磁感应强度 \mathbf{B} 沿任何闭合环路 L 的线积分，等于穿过这条环路所有电流的代数和的 μ_0 倍。对于无限长载流直导线： $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{L} \cdot \cos\theta) = \oint \frac{I \cdot \mu_0}{2\pi r} \cdot (r \cdot d\varphi) = I \cdot \mu_0 \oint \frac{d\varphi}{2\pi} = \pm I \cdot \mu_0$ ，其中的正负由 \mathbf{L} 、 φ 的绕向相对于 I 是否构成右手螺旋定则决定。

它的完整的证明需要用到以下过程：一个闭合载流线圈 L_1 ，对坐标为 \mathbf{r}_2 的场点 P 产生的磁感应强度为： $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$ ，其中 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 。假设场点 P 有一微小移动 $d\mathbf{L}_2$ ，则相当于场点 P 不动而线圈 L_1 有一反方向微小移动 $-d\mathbf{L}_2$ ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \cdot (-d\mathbf{L}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{(d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{r}_{12}) \cdot (-d\mathbf{L}_2)}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{((-d\mathbf{L}_2) \times d\mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint d\omega = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \omega$ ，其中 $\oint \frac{((-d\mathbf{L}_2) \times d\mathbf{L}_1) \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \omega$ ，表示线圈 L_1 移动 $-d\mathbf{L}_2$ 过程中扫过的环形窄带 m 对 P 所张成的立体角。进一步假设有一以 L_1 为边界的有向曲面 S (与 $(-d\mathbf{L}_2) \times d\mathbf{L}_1$ 同向外 or 向内)， L_1 位移 $-d\mathbf{L}_2$ 后变成 S' ， S 、 S' 、 m 组成一个闭合面。由于 S 面可以任意弯曲，总可以做到在 L_1 位移过程中 S 面没有扫过 P 点。那么上述闭合面对 P 点所张立体角 $= \Omega - \Omega' + \omega = 0$ 。我们进一步将其写作 $\omega = \Omega' - \Omega = (-d\mathbf{L}_2) \cdot \nabla \Omega$ ，即将 ω 视为 L_1 做平移 $-d\mathbf{L}_2$ 所导致的立体角 Ω 的增量，并将 Ω 看作是 \mathbf{r}_2 的函数，对其做全微分。【 $\nabla \Omega$ 表示 $\nabla \cdot \Omega$ 】

于是 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \cdot (-d\mathbf{L}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \omega = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot (-d\mathbf{L}_2) \cdot \nabla \Omega$ ，于是 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \nabla \Omega$ ，即闭合载流线圈产生的磁场正比于线圈回路对场点 P 所张的立体角的梯度。——假设闭合回路 L (这里的 L 是回路而不是线圈了) 正向穿过一载流线圈 (只穿过一次)，在 L 穿以过载流线圈为边界的 S 的附近两侧各取一个非常靠近的点 P_1 、 P_2 ，此时 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot d\mathbf{L} \cdot \nabla \Omega + \int_{P_2}^{P_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot d\mathbf{L} \cdot \nabla \Omega = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \omega + \int_{P_2}^{P_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \omega = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot (\Omega'_1 - \Omega_1) + \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot (\Omega'_2 - \Omega_2)$ ，其中一个积分中的 $\Omega'_2 - \Omega_2 = 0$ ，而 $\Omega'_1 - \Omega_1 = 4\pi$ 。【这里的 $d\mathbf{L} \cdot \nabla \Omega$ ，中的 $d\mathbf{L}$ 与之前的 $-d\mathbf{L}_2$ 方向相反 (与 $d\mathbf{L}_2$ 相同)，但是这里 Ω 的变化方向也和之前的 Ω 相反，因此这里的 $d\mathbf{L} \cdot \nabla \Omega =$ 之前的 $(-d\mathbf{L}_2) \cdot \nabla \Omega = \Omega' - \Omega = \omega$ 】因此有： $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = I \cdot \mu_0$ 。

在 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \cdot \sum_i I_i$ 中，像高斯定理一样， \mathbf{B} 为所有穿过和没穿过环路 L 所对应的 S 面的电流 I_i 对环路 L 施加的总的磁感应强度 \mathbf{B} ；而 I_i 却只 count 穿过 S 的。


3.2 安培环路定理应用举例

(1). **无限长密绕螺线管**: 设螺线管内部磁感应强度为 \mathbf{B} , 上下边 PQ、NM 紧贴管壁外和管壁内地, 作一矩形闭合回路 PQNM, 由于螺线管外部可视为 $\mathbf{B}=0$, 于是

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_N^M \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{NM} = B \cdot NM = \mu_0 \cdot \sum_i I_i = \mu_0 \cdot n \cdot NM \cdot I, \text{ 因此 } B = \mu_0 \cdot n \cdot I.$$

【同样, 若 I_i (为正) 与 \mathbf{L} 所设的绕向构成左手螺旋而等式左边取负了, 则表明 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ 为负, 即 \mathbf{B} 与所设的 \mathbf{L} 绕向相反】

(2). **非无限长密绕螺线管**: 利用 2.3 载流圆线圈轴线上的磁场中单匝线圈对轴线上 x 处的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$, 以及如图所示的 β 角来替代 x 和 dx : $x = R \cdot \cot \beta$ 、

$dx = -R \csc^2 \beta \cdot d\beta$, , 于是有 $B = \int \frac{\mu_0 \cdot (\frac{N}{L} dx) \cdot I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I R^3 \cdot \csc^2 \beta}{2 \cdot R^3 \cdot (1 + \cot^2 \beta)^{3/2}} \cdot d\beta$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \csc^2 \beta}{2 \cdot \csc^3 \beta} \cdot d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2 \cdot \csc \beta} \cdot d\beta = -\frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \cdot d\beta = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1).$$

【其中的 $(\frac{N}{L} dx) \cdot I$ 也可写作 $(\frac{dx}{L}) \cdot NI$, 其中 $\frac{N}{L} = n$ 】

当其中的 $\beta_1 = \pi$ 、 $\beta_2 = 0$ 时, 即有(1).中的 $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$ 。【积分上下限中 β 从小积到大, 对应着 dx 从小 x 处移动到大 x 处, 是正的, 这样的 B 才是正的。】

(3). **密绕螺绕环**: 其环内 \mathbf{B} 线为同心圆, 环外 \mathbf{B} 为 0; 为了使得 \mathbf{B} 能够从公式中提出来, 我们也作一个同心圆状的闭合环状回路。于是 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot I$, 于是 $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{2\pi r} \cdot I = \mu_0 \cdot n \cdot I$ 。

(4). **无限长载流圆柱体**: $r > R$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; $r < R$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi r^2}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi R^2}$ 。

(5). **无限长载流圆柱面**: $r > R$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; $r < R$, $B = 0$ 。

(6). **无限大载流平面**: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{CD} = 2 \cdot B \cdot L = \mu_0 j \cdot L$, 得到 $B = \frac{\mu_0 j}{2}$ 。

4.磁场的“高斯定理” 磁矢势

4.1 磁场的“高斯定理”

由载流导线产生的磁感应线是无始无终的闭合曲线，那么从某个闭合曲面 S 穿入的磁感应线一定从另一处穿出。则 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。其证明如下：由于磁感应管呈严格的环状，其横截面面积处处相等，因此某段电流源产生的某个磁感应管在穿入处的 $d\Phi_{B1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\mathbf{L} \cdot \sin\theta}{r^2} \cdot (dS_1 \cdot \cos\theta_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\mathbf{L} \cdot \sin\theta}{r^2} \cdot (dS_1 \cdot \cos\theta_1) = -d\Phi_{B2}$ ，因此 $d\Phi_{B1} + d\Phi_{B2} = 0$ 。【其中的 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 、 Φ_{B1} 、 Φ_{B2} 相当于形式上与电势 ϕ_e 所对应的磁势 ϕ_m 】

4.2 磁矢势

$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{外}} + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{外}} = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{外}} - \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{内}} = 0$ ，因此有 $\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{外}} = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{内}}$ ，即有 $\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{B方向}} = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{\text{B方向}}$ ，令它 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ ，其中 \mathbf{L} 绕向与 \mathbf{B} 方向成右手螺旋，且 L 为 S_1 、 S_2 、 S 的公共边界。其中 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ， \mathbf{A} 就叫做 \mathbf{B} 所对应的磁矢势。【为了与 $\mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{U}$ 相对应而引出的概念吧；而要求 \mathbf{A} 怕是要做类似“积分”的工作吧】

5.磁场对载流导线的作用

5.1 安培力

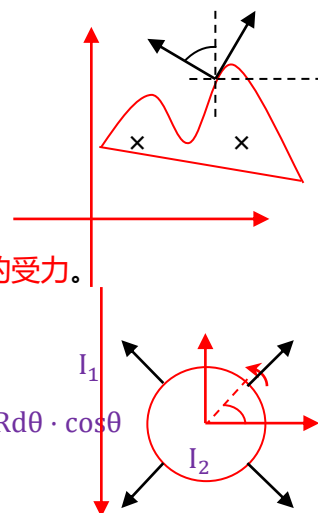
由电流的微观表达式： $I = env_d S_{\perp}$ ，以及正电荷所受洛伦兹力的大小： $F_m = ev_d B \cdot \sin\theta$ ，我们有 $d\mathbf{F} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}_m = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\perp} \cdot d\mathbf{L}) \cdot ev_d B \cdot \sin\theta = I \cdot d\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \cdot \sin\theta = I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ 。——或者利用叉积来推导： $d\mathbf{F} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}_m = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\perp} \cdot d\mathbf{L}) \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ 【 \mathbf{v} 与 $d\mathbf{L}$ 方向相同】。

可以发现，安培力像库仑力一样，均满足牛三定律： $dF_2 = B_1 I_2 dL_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dL_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2 I_1 dL_1}{2\pi d} = B_2 I_1 dL_1 = dF_1$ 。于是我们可以定义： $\frac{dF_2}{dL_2} = \frac{dF_1}{dL_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$ ，即相距 1m 的俩导线，每单位长度上的吸引力为 $2 \cdot 10^{-7} \text{N/m}$ 时，这时两导线上的电流为 1A ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$)。

两道例题：

(1).如图所示： $d\mathbf{F}_x = I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \cdot \sin\theta = I \cdot dy \cdot \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{i})$;并且有 $d\mathbf{F}_y = I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \cdot \cos\theta = I \cdot dx \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{j}$ 。因此 $\mathbf{F}_y = BIL_x \cdot \mathbf{j}$;同理 $\mathbf{F}_x = BIL_y \cdot (-\mathbf{i})$ 。这便是任意平面载流导线在均匀磁场中的受力。(2).设 $R < d$ ，求如图所示的通电线圈的受力情况。

$$F_x = \int_0^{2\pi} dF \cdot \cos\theta = \int_0^{2\pi} BI_2 dL \cdot \cos\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+R\cos\theta)} I_2 \cdot Rd\theta \cdot \cos\theta$$



5.2 矩形载流线圈在均匀磁场中所受力矩

$$\mathbf{M} = \frac{b}{2} \times (\mathbf{Ia} \times \mathbf{B}) + \frac{-b}{2} \times \mathbf{I}(-\mathbf{a}) \times \mathbf{B} = \mathbf{b} \times (\mathbf{Ia} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{B})\mathbf{Ia} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{Ia})\mathbf{B} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{B})\mathbf{Ia} = (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\mathbf{Iab} = (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\mathbf{IS} = \mathbf{IS} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \text{ 其中 } \mathbf{m} = \mathbf{IS}, \text{ 称作磁矩。}$$

圆形载流线圈在均匀磁场中所受力矩：

$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})Id\mathbf{L} - (\mathbf{r} \cdot Id\mathbf{L})\mathbf{B} = ((\mathbf{R} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{B})Id\mathbf{L} - ((\mathbf{R} - \mathbf{z}) \cdot Id\mathbf{L})\mathbf{B}$
 $= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B})Id\mathbf{L} - ((-\mathbf{z}) \cdot Id\mathbf{L})\mathbf{B} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})Id\mathbf{L} + (\mathbf{z} \cdot Id\mathbf{L})\mathbf{B}$ ，其中 $d\mathbf{L} = d\theta \times \mathbf{R}$ 。对它在圆环上积分一周时，发现 $(\mathbf{z} \cdot Id\mathbf{L})\mathbf{B}$ 该项=0；于是仅剩对它 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})Id\mathbf{L}$ 积分一周，即对 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \cdot Id\mathbf{L}$ 积分一周；由于 $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\perp z}$ 关于 x 是个偶函数 $f(x)=f(-x)$ (这里的 x 轴同 $\perp z$ 的坐标轴对正负的示数等价)；而 $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\parallel z}$ 关于 x 是个奇函数。【实际上， $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\perp z}$ 关于 z 也是个偶函数 $f(z)=f(-z)$ ；而 $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\parallel z}$ 关于 z 也是个奇函数；这是因为：当 $x(\perp z)$ 异号时，对应的 $d\mathbf{L}_{\perp z}$ 也异号，对应的 $d\mathbf{L}_{\parallel z}$ 符号不变；而当 z 异号时，对应的 $d\mathbf{L}_{\perp z}$ 符号不变，对应的 $d\mathbf{L}_{\parallel z}$ 异号。——可以推知 $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\perp z}$ 、 $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{L}_{\parallel z}$ 关于原点对称时，符号均不改变】——因此对 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \cdot Id\mathbf{L}$ 积分一周相当于只对 $2\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \cdot Id\mathbf{L}_{\perp z}$ 积分(被 z 轴分割的)半周。

其中 $x=r \cdot \cos\beta$ 、 $r=R \cdot \sin\theta$ 、 $dL_{\perp z}=dL \cdot \sin\theta$ 、 $dL=R \cdot d\theta$ (其中， θ 是矢径 R 与 z 轴正半轴的夹角； β 是线圈平面与 xOz 面的夹角，或者说是 90° -线圈 \mathbf{m} 与 \mathbf{B} 的夹角)；现在取 $\beta=0$ ，则 $x=r=R \cdot \sin\theta$ ，可以积分得到力矩： $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = I\pi R^2 \cdot \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{j}) \times \mathbf{i} = I\pi R^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{k}$ 。【类比电偶极子在电场中所受力矩 $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ ， $\mathbf{p}=q\mathbf{L}$ ， $\mathbf{m}=\mathbf{IS}$ 】

5.3 磁聚焦

$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; $v_{\parallel} = v \cdot \cos\theta \approx v$; $R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \cdot \sin\theta}{qB} \approx \frac{mv \cdot \theta}{qB}$; $T = \frac{2\pi m}{qB}$; 螺距: 旋转一周往前走了多少距离 $= v_{\parallel} \cdot T = v \cdot \cos\theta \cdot \frac{2\pi m}{qB} \approx \frac{2\pi m v}{qB}$ 。

5.4 霍尔效应

$qE = qv_d B$, 得到 $E = v_d B$, 得到 $U = E \cdot b = v_d B \cdot b$, 其中 b 为 E 方向上的宽度。又因 $I = qnv_d S_{\perp} = qnv_d bd$, 则 $U = v_d B \cdot b = \frac{BI}{qnd} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{BI}{d} = K \cdot \frac{BI}{d}$ 。——用途 1: 利用 K 的正负测定半导体的 N 型还是 P 型; 用途 2: 测磁感应强度 B 。

第三章 电磁感应 电磁场的相对论变换

1.电磁感应定律

1.1 电磁感应现象

穿过回路所围曲面的磁通量 Φ_B 发生变化时 (\mathbf{B} 变, 回路形状或者方位变), 回路上 (甚至是假想回路, 甚至回路不闭合) 产生感应电动势。——这种现象叫电磁感应现象。【关于左动右发:】

$E_i = - \frac{N \cdot d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}$, 其中 Ψ 叫磁链 or 磁通匝数。里面的负号表示: E_i 的绕向 (负极指向正极) 与 [$d\Phi$ 作为大拇指指向, 在右手法则下所对应的回路绕向] 相反。比如: 向下的 Φ 在减少, 则 Φ 在向上增加, 即增量 $d\Phi$ 向上, 即 $d\Phi$ 所对应的回路, 俯视下为逆时针, 则 E_i 的绕向为俯视下的顺时针。【若用 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 来描述 E_i 的话, 由于 E_i 产生的 \mathbf{j} 从其负极指向正极, 同向于 E_i 的绕向, 而 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, 因此 \mathbf{E} 也同向于 E_i 的绕向; 若所选回路 L , 恒与 $\frac{d\Psi}{dt}$ 构成右手螺旋关系, 则 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ 值为负值, 即 \mathbf{E} 的绕向与回路 L 的绕向恒相反, 即 \mathbf{E}

的绕向与 $\frac{d\Psi}{dt}$ 构成左手螺旋关系，而恒与 $-\frac{d\Psi}{dt}$ 构成右手螺旋关系；所以说，在这里，有旋电场 \mathbf{E} 比 \mathbf{E}_i 在方向的描述上更好】

设 R 为一匝线圈的电阻， $I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ ， $q = \int_{t_1}^{t_2} I_i \cdot dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$ 。正弦交流电： $t=0$ 时刻，线圈的 \mathbf{e}_n 与 \mathbf{B} 方向相同，则 $\Psi = NBS \cdot \cos\theta$ ，则 $\mathbf{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{NBSd\cos\omega t}{dt} = NBS\omega \sin\omega t = E_{\max} \cdot \sin\theta$ 。对应地， $I_i = I_{\max} \cdot \sin\theta$ 。

1.2 楞次定律

1.3 涡流

2.动生电动势和感生电动势

磁通量变化有两种原因，一种是 $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 中， \mathbf{B} 与 \mathbf{S} 的夹角或 \mathbf{S} 的大小发生改变——动生电动势，另一种是 \mathbf{B} 的大小发生改变——感生电动势。

2.1 动生电动势

假设磁场方向向里，导体棒向右运动，根据 $\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，其中 \mathbf{v} 为正电荷或负电荷的运动速度， q 为研究对象对应的电量；那么对于电子来说， $q = -e$ ，则 $\mathbf{F} = -e \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，即电子受洛伦兹力方向朝下；而假想的正电荷也向右运动，则 $\mathbf{F} = e \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，受力方向向上；洛伦兹力将一个个正电荷从电源负极(向上)移到正极，导体棒本身变成了电源。非静电力将单位正电荷从电源负极移到正极所做的功定义为电动势 $\epsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_{\text{非}}}{q} \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_{\text{洛}}}{q} \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \frac{q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{q} \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ ，这便是动生电动势的算法。其中， \mathbf{E}_k 称为非静电场强，在这里它 $= \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。【注意，这里洛伦兹力仍然是没有做功，因为这一段中所考虑的洛伦兹力只是总洛伦兹力的一个分量，因为其所涉及的速度 \mathbf{v} 只是电子的合速度 $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ 的一个分量，其中 \mathbf{u} 为电子相对于导体的速度。】

若 $d\mathbf{L}$ 、 \mathbf{L} 的取向与 $\mathbf{F}_{\text{非}} = \mathbf{F}_{\text{洛}}$ 相同或成锐角关系，则算出的动生电动势 ϵ 为正，即此时该段 \mathbf{L} 所对应的电源，其负极在 \mathbf{L} 的起始端，正极在的 \mathbf{L} 末端；并且像 \mathbf{L} 的始端指向末

端一样，动生电动势 \mathcal{E} 的负极指向正极。否则 \mathcal{E} 的**负极到正极的指向**，异于有向线段 \mathbf{L} 的**始端到终端的指向**。【所以一般我们取 $\mathcal{E} = \int_{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向始端}}^{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向末端}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ ，这样算出来的 \mathcal{E} 总是正的，并且电动势的**负极到正极的指向**同向于**同向于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的 \mathbf{L}** 】

安培力： $\mathbf{F} = \int \mathbf{I} \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \int \frac{\int_{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向始端}}^{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向末端}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}}{R} \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}}{R} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B}$ ，由于其中 \mathbf{L} 的方向同向于 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向。因此 $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ 的方向同向于 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ 的方向，即 $-\mathbf{v}$ 的方向，且 $\mathbf{B} \times \mathbf{L}$ 同向于 \mathbf{v} 的方向。则 $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\frac{B^2 L^2}{R} \cdot \mathbf{v}$ 。——那么我们可以根据牛二定律进行如下计算： $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{B^2 L^2}{R} \cdot \mathbf{v}$ ，解得 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$ 。

1. 磁场向里，一根在 $\perp \mathbf{B}$ 方向的平面内绕某一端点 O 以角速度 ω 顺时针匀速旋转的棒子： $\mathcal{E} = \int_{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向始端}}^{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向末端}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^P (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^P (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^P (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{L^2}{2}$ 。【 \mathbf{L} 是个变量】

2. 磁场向上，一根末端在一根与 \mathbf{B} 平行的轴上，径向与 \mathbf{B} 成 θ 角的导体棒，俯视图下以角速度 ω 逆时针旋转： $\mathcal{E} = \int_{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向始端}}^{E_k=\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ 的指向末端}} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^P (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$
 $d\mathbf{L} = \int_0^P (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}) \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^P (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{L} \cdot d\mathbf{L} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \cos\theta) (\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L} \cdot \cos\theta) = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \sin^2 \theta$ 。【 \mathbf{L} 是个变量】

这道题同样可以这样解：过 P 点作轴线的垂线，垂足为 Q ，穿过 $Rt\triangle RQO$ 所围面积的磁通量恒 $=0$ ，不随时间 or 旋转变化的，则根据 $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，回路的感应电动势 $=0$ ；又由于 $Q \rightarrow O$ 段不切割磁感线($\mathbf{v}=0$ 因而 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}=0$)，因此 $\mathcal{E}_{OP} + \mathcal{E}_{PQ} = 0$ ，即 $\mathcal{E}_{OP} = \mathcal{E}_{QP}$ 。

2.2 感生电动势

由于 $\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ ，因此 $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})}{dt} = -\iint_S \frac{d(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})}{dt} = -\iint_S \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{B} \cdot \frac{dd\mathbf{S}}{dt} \right) = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$ ，其中我们假设了 $d\mathbf{S}$ 的大小和方向均不发生改变，这对应着宏观层面上的曲面 S 的**边界回路 L 不扩张或收缩，且回路绕向不变**。

之前在求动生电动势的过程中，我们用到了电动势的定义式 $\mathcal{E} = \int_{E_k \text{ 的指向始端}}^{E_k \text{ 的指向末端}} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L}$ ，其中的非静电场强 \mathbf{E}_k 是确实确实存在的 $=\frac{\mathbf{F}_{非}}{q} = \frac{\mathbf{F}_{洛}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ；然而在感生电动势中，虽然这个式子仍然成立，但是其中的 \mathbf{E}_k 没有实指，于是麦克斯韦假设这里的**非静电场 \mathbf{E}_k**

叫**感应电场**(对应的力叫**感应电场力**, 正如之前的 \mathbf{E}_k 对应着洛伦兹力), 是**闭合的**, 是个**涡旋电场**, 是**无源有旋场**。——并且从另一个角度: $\mathbf{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})}{dt} =$

$$-\frac{d(\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L})}{dt} = -\oint_L \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = \varepsilon, \text{ 于是这里 } \mathbf{E}_k = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad [\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}]$$

于是, $\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$, 这和**安培环路定理**和**静电场中的环路定理**相似, 不过它俩等号右边一个是 $\pm I \cdot \mu_0$, 一个是**0**, 而这里却是 $-\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$ 。**要注意**, 其中的**L**是**S**的边界, 并且它们的关系服从**右手法则**。

圆形区域内有向纸内的磁感应强度 \mathbf{B} , 导体棒 ab 的两端放置在圆形区域的边界上。问导体棒 ab 的电动势:

由于圆形范围内均匀变化的磁场所产生的**涡旋电场的电场强度** \mathbf{E}_k 反比于**圆心距离**。连接 Oa 、 Ob , 与 ab 一同构成一个假想回路 oba , 这样回路绕向 \mathbf{L} 与 \mathbf{B} 服从**右手法则**, 那么同样与 \mathbf{L} 遵循右手法则关系的 \mathbf{S} 便与 \mathbf{B} 同向(\mathbf{B} 与 $d\mathbf{S}$ 的夹角为锐角)了【而 $d\mathbf{B}$ 又以 \mathbf{B} 为正向】, 此时根据 $\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi}{dt}$, 或者 $\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$, 可以得到 $\int_a^0 \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} + \int_0^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} + \int_b^a \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dB}{dt} \cdot \iint_S d\mathbf{S}$, 因此 $0+0+\int_b^a \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} = -\frac{dB}{dt} \cdot S$, 即 $\varepsilon_{ba} = -\frac{dB}{dt} \cdot S \triangle$ 。其中 $d\mathbf{B}$ 参照 \mathbf{B} 的方向(纸内)为**正方向**。【回路 \mathbf{L} 的选择一般让对应的 \mathbf{S} 与 \mathbf{B} 同向; 不过其实无论怎么选择, 都是正确的】

5.互感和自感

5.1 互感

由于 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{\mathbf{I} \cdot d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, 可以看出 1 号线圈在空间上任意一个指定点所激发的磁感应强度大小 \mathbf{B} , 正比于 I_1 ; 那么 1 号线圈产生的磁感应强度, 沿着被看作回路的二号线圈所围成的曲面进行积分时, 磁通量 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 也正比于 I_1 。可见 $\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1$ 。其中 M_{21} 表示 1 号线圈的电流 I_1 对二号线圈的磁通贡献 Φ_{21} 的比例常数。同样 $\Phi_{12} = M_{12} \cdot I_2$ 。

$$\begin{aligned} \text{可以严格证明: } M_{12} &= \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}}{I_2} = \frac{\iint_{S_1} (\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{\mathbf{I}_2 \cdot d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}) \cdot d\mathbf{S}}{I_2} = \frac{\iint_{S_2} (\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{\mathbf{I}_1 \cdot d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}) \cdot d\mathbf{S}}{I_1} = \\ &= \frac{\iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = M_{21} = M \quad \text{【利用了: 先将 } \oint_{L_2} \frac{\mathbf{I}_2 \cdot d\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ 转换成 } \oint_{L_2} (P, Q, R) \cdot d\mathbf{L} \text{ 即 } \oint_{L_2} (P, Q, R) \cdot \end{aligned}$$

(dx, dy, dz)的形式, 再转化成 $\iint_{S_2} \nabla \times (P, Q, R) \cdot d\mathbf{S}$ 的面积分】。于是, $E_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$
 $= -M \cdot \frac{di_2}{dt}$; 并且 $E_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt}$, 因此也可这样表示 $M = -\frac{E_{12}}{(\frac{di_2}{dt})} = -\frac{E_{21}}{(\frac{di_1}{dt})}$ 。

如何求M: 先假设一个 I_2 , 再算出 Φ_{12} , 再 $\frac{\Phi_{12}}{I_2}$ 。这和求电容 $C = \frac{Q}{U}$ 非常类似: 先假设Q, 再求U, 最后求比值。——也可以先假设 I_1 , 这取决于哪个好算和能算。

长度为L, 半径为 r_1 、 r_2 ($r_1 < r_2$), 匝数 N_1 、 N_2 为的同轴长直密绕螺线管, 求互感M。

$$\frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N_2}{L} \cdot I_2 \cdot \pi r_1^2}{I_2} = \mu_0 \cdot \pi r_1^2 \cdot \frac{N_1 N_2}{L} = \mu_0 \cdot \pi r_1^2 \cdot n_1 n_2 L = \mu_0 \cdot n_1 n_2 \cdot V_1。$$

5.2 自感

在互感一节的第一段, 1号线圈在各指定点产生的磁感应强度, 正比于 I_1 , 它沿着同时被看作回路的一号线圈所围成的曲面进行积分时, 磁通量 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, 也正比于 I_1 。因此 $\Phi_{11} = L \cdot I_1$ 。 $L = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{N \cdot \Phi_{11}}{I_1}$ 。 $E = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d(L \cdot I_1)}{dt} = -\frac{dL}{dt} I_1 - L \frac{dI_1}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}$ 。

求密绕螺线管的自感L: $L = \frac{\Psi}{I_1} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot S = \mu_0 \cdot n^2 \cdot SL = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$ 【可见互感 $M = \mu_0 \cdot n_1 n_2 \cdot V_1 \leq \sqrt{(\mu_0 \cdot n_1^2 \cdot V_1) \cdot (\mu_0 \cdot n_2^2 \cdot V_2)}$ 】

5.3.1 自感磁能

$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$, 则 $\varepsilon \cdot dt - L \cdot dI = IR \cdot dt$, 于是 $\varepsilon \cdot I \cdot dt - L \cdot I \cdot dI = I^2 R \cdot dt$, 于是
 $\int \varepsilon \cdot I \cdot dt - \int L \cdot I \cdot dI = \int I^2 R \cdot dt$, 得到 $\int \varepsilon \cdot I \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \int I^2 R \cdot dt$ 。可见 $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ 。

之前我们给出了这样一个式子: $L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V$ 。因此 $\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\frac{1}{2} L \cdot I^2}{V} \cdot \mu_0 \cdot n^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}$, 更一般地, 我们有 $\omega_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu}$; 由于 $B = \mu \cdot H$, 因此 $\omega_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \mu H^2$ 。

5.3.2 互感磁能

两个相邻线圈在建立电流的过程中, 电源的电动势除了供给线圈中产生的焦耳热的能量和抵抗自感电动势做功外, 还要抵抗互感电动势做功: $A = A_{21} + A_{12} = -\int_0^\infty E_{21} i_2 \cdot dt - \int_0^\infty E_{12} i_1 \cdot dt = \int_0^\infty M \cdot di_1 i_2 + \int_0^\infty M \cdot di_2 i_1 = M \int_0^\infty (di_2 i_1 + di_1 i_2) = M \int_0^{I_2 I_1} d(i_2 i_1) = M I_2 I_1$ 。自感磁能不会是负的, 互感磁能则可能。

那么两个相邻的载流线圈储存的总磁能为： $W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M I_1 I_2 = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + \frac{1}{2} \cdot M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} \cdot M_{21} I_2 I_1$ 。

进一步地，对于 k 个线圈， $W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k L_i \cdot I_i^2 + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k L_i \cdot I_i^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^k \sum_{i=1(i \neq j)}^k M_{ij} I_i I_j$ 。

5.4 两个串联线圈的自感系数

顺接： $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{22}}{I} = L_1 + 2M + L_2$ ；反接：总的感应电动势为 $E = E_{11} - E_{21} - E_{12} + E_{22} = -(L_1 - 2M + L_2) \frac{dI}{dt}$ ，因此此时 $L = L_1 - 2M + L_2$ 。【这里的 I 为同时流经 L_1 和 L_2 的电流】

互感系数与自感系数的联系： $M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$ ，即 $M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{21}}{I_1}$ ，而 $L_1 = \frac{N_1 \cdot \Phi_{11}}{I_1}$ ， $L_2 = \frac{N_2 \cdot \Phi_{22}}{I_2}$ ；由于 $\Phi_{21} \leq \Phi_{11}$ 、 $\Phi_{12} \leq \Phi_{22}$ ，而当两个线圈并缠密绕时，可以做到取等。这种情形下， $M^2 = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_2} \cdot \frac{N_1 \cdot \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{22}}{I_2} \cdot \frac{N_1 \cdot \Phi_{11}}{I_1} = L_2 L_1$ ，于是 $M = \sqrt{L_2 L_1}$ 。有漏磁时， $M < \sqrt{L_2 L_1}$ 。

5.5.与《电路原理》相通的地方：

在电路原理中，拓展了线圈“串联”和“顺接”的图景， L_1 和 L_2 的相对位置可以不再紧邻，而是以“同名端”的定义来标记：从线圈 L_1 的同名端流入(出)的电流 I_1 ，在线圈 L_2 内部产生的磁通 Φ_{21} ，其方向等同于同样从线圈 L_2 的同名端流入(出)的电流 I_2 ，在自己内部产生的磁通 Φ_{22} 的方向。——而又因电路原理中，在 L_1 和 L_2 都采取 u 与 i 的关联参考方向，即 $\frac{d\Phi}{dt} = u = L \cdot \frac{dI}{dt}$ 时，

此时从线圈 L_1 的同名端流入(出)的电流变化量 dI_1 ，在线圈 L_2 内部产生的磁通变化量 $d\Phi_{21}$ ，其方向等同于同样从线圈 L_2 的同名端流入(出)的电流变化量 dI_2 ，在自己内部产生的磁通变化量 $d\Phi_{22}$ 的方向。而在关联参考方向下 $\frac{d\Phi_{22}}{dt} = U_{22} = L \cdot \frac{dI_2}{dt}$ ，由于 dI_1 产生的 $d\Phi_{21}$ 的方向，同向于同样从同名端流入(出)的 dI_2 产生的 $d\Phi_{22}$ 的方向，则若 U_{21} 仍像假想的 U_{22} 一样，以在相对于同名端的流向上，与 I_1 相同的，假想的 I_2 的流向，为电势由高到低的降落方向，这样的关联参考方向下，就会有： $\frac{d\Phi_{21}}{dt} = U_{21} = M \cdot \frac{dI_1}{dt}$ 。否则，若 U_{21} 与假想的 U_{22} 在电势降方向上相反，则 $U_{21} = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}$ 。

对于 $i = i_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ， $i = i_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[i_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot (i_m \cdot e^{j\varphi})] = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot \dot{I}]$ ，其中的 $\dot{I} = i_m \cdot e^{j\varphi}$ ，为正弦量的相量形式。对于电感， $u = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega L \cdot i_m \cdot \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot \dot{U}]$ ，对比可见 $\dot{U} = \omega L \cdot i_m \cdot e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega L \cdot i_m \cdot e^{j\varphi} = j\omega L \cdot \dot{I} =$

$jX_L \cdot \dot{I}$, 因此在诸如 $U_1 = R_1 i_1 + U_{11} + U_{12} = R_1 i_1 + \frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = R_1 i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$ 中, $\frac{di_1}{dt}$ 、 $\frac{di_2}{dt}$ 还可以被 $j\omega \cdot \dot{I}_1$ 、 $j\omega \cdot \dot{I}_2$ 代替。【注: 其中的相量 $\dot{I} = i_m \cdot e^{j\varphi}$ 又叫做复振幅 \dot{I}_m , 与 φ 有关而与 t 无关, 在光学的 $A_0 \cdot \cos(k\delta - \omega t) = \text{Re}[A_0 \cdot e^{j(k\delta - \omega t)}]$ 中也会用到】

【同样, $U = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot \dot{U}]$, $\dot{U} = U_m \cdot e^{j\varphi}$; 对于电容, $i = C \cdot \frac{du}{dt} = \omega C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot j\omega C \cdot \dot{U}] = \text{Im}[e^{j\omega t} \cdot \dot{I}]$, 对比得 $\dot{I} = j\omega C \cdot \dot{U}$.
 $\dot{U} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = -jX_C \dot{I}$ 】

第四章 电磁介质

Review 复习一下:

对于一个电介质中的一个假想的闭合曲面(而不是电介质有极化电荷的端面, 假想的曲面在其内), 由于电介质的表面这个闭合曲面上的 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, 那么因极化而到达该曲面上的总的束缚电荷总量 $= \oint_S \sigma' \cdot dS = \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$, 而对于该曲面内表面以内的一个(贴近内表面的)假想曲面而言, 根据电荷守恒定律, $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ 等于因极化而穿出此面 S' 的束缚电荷总量, 即面 S' 内剩余的极化电荷的负值。即有 $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\sum_{S' \text{ 内}} q'$, 由于 S' 很贴近 S , 于是 $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\sum_{S \text{ 内}} q'$ 。

由高斯定理: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0} = \frac{q_0 + q'}{\epsilon_0}$ 。则 $\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - q' = q_0$, 即有: $\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = q_0$, 即 $\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q_0$ 。令 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 且 $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$, 于是 $\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}$, 令 $1 + \chi_e = \epsilon_r$, 于是就有 $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$ 。

平行板电容器内部充入两层介质, 厚度分别为 d_1 、 d_2 , 作一个两底面分处于一个板内部、某个介质中, 的圆柱形高斯面, 则 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sigma_0 \cdot S$, 可见两个介质中的电位移矢量相等, 均为 $\mathbf{D} = \sigma_0$ 。这一点也可以通过电位移矢量 \mathbf{D} 法向分量的连续性 $D_{2n} = D_{1n}$ 得到。于是 $E_1 = \frac{D}{\epsilon_{r1} \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1} \epsilon_0}$ 、 $E_2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2} \epsilon_0}$, $U = U_1 + U_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1} \epsilon_0} \cdot d_1 + \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} \cdot d_2$, $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 \cdot S}{\frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1} \epsilon_0} \cdot d_1 + \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} \cdot d_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2} \epsilon_0 S}}$, 也可通过 $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$ 和电容器串联公式得到。——通过 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 以及 $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$, 可得到 $\sigma' = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$, 将对应的 ϵ_r 和 \mathbf{E} 代入, 即可有诸如 $\sigma' = (\epsilon_{r1} - 1) \epsilon_0 \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1} \epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \sigma_0$ 。也可直接使用 $\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0$ 。

2.磁介质——分子电流观点

2.1 磁介质的磁化

有关磁介质的磁化理论，有两种不同的观点，一种是分子电流假说，一种是磁荷假说，我们用主流观点——分子电流观点来介绍。

核磁矩、电子的自旋磁矩 \mathbf{m}_s (s:spin), 在尺度上均太小，因而我们主要考虑电子轨道角动量对应的磁矩 \mathbf{m}_L 。定义当 $\mathbf{m}=\mathbf{m}_L+\mathbf{m}_s \neq 0$ 时，对应的磁介质为顺磁质，其对激励 \mathbf{B}_0 所产生的 $\mathbf{B}'>0$ ；当 $\mathbf{m}=\mathbf{m}_L+\mathbf{m}_s=0$ 时，对应的磁介质为抗磁质，其对激励 \mathbf{B}_0 所产生的 $\mathbf{B}'<0$ ；若对激励 \mathbf{B}_0 所产生的 $\mathbf{B}'>0$ ，则对应的磁介质称为铁磁质。【 \therefore 不同于 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0-\mathbf{E}'$ ， $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}'$ ，其中 \mathbf{E}' 总是正的，方向总是与 \mathbf{E}_0 相反；而 \mathbf{B}' 可正可负，方向可与 \mathbf{B}_0 相同 or 相反】

对顺磁质来说，在未附加 \mathbf{B}_0 时，其内部的环形分子电流所对应的磁矩 \mathbf{m} 取向杂乱无章，在附加了 \mathbf{B}_0 后，变得趋于同向于 \mathbf{B}_0 地有序排列了；对铁磁质来说，即使在未附加 \mathbf{B}_0 时，也有自发的有序排列。

磁化的微观机制与宏观效果

对于各向同性的均匀的磁介质来说，加了 \mathbf{B}_0 后，由于分子环流的回绕方向一致，介质内部任何两个相邻的分子环流中相邻的那一对电流元方向总是相反，而彼此抵消。只有在横截面边缘上各段电流元未被抵消。宏观看起来，这横截面内所有分子环流的总体与沿截面边缘的一个大环形电流等效，在各个截面的边缘上出现的这类环形电流组成了一个紧贴螺线管内表面的“螺线管”。

磁化强度矢量 有介质时的安培环路定理

设沿轴线方向单位长度的磁化电流 $I_s=\frac{i_s}{L}$ ，根据磁矩的定义， $\mathbf{m}_i=I_i\mathbf{S}_i$ ，对于某一体积内的磁矩求和，得 $\sum \mathbf{m}_i=\sum \sum I_i\mathbf{S}_i=\sum (\sum I_i)\mathbf{S}_i=\sum I_s\mathbf{S}_i=I_s \sum \mathbf{S}_i=I_s\mathbf{S}$ 。于是磁化强度矢量 $\mathbf{M}=\frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V}=\frac{I_s\mathbf{S}}{LS}=I_s \cdot \mathbf{e}_n$ 。应用安培环路定理， $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}=\mu_0 \cdot \sum_i I_i=\mu_0 \cdot (NI+I_sL)$ ，其中 $I_sL=M L=\int_{\text{内部直线段}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L}=\oint_{\text{矩形回路}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L}$ ，于是 $\oint (\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}) \cdot d\mathbf{L}=\sum_{\text{实际电流}} I_i$ ，令 $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}$ ，且 $\mathbf{M}=\chi_m \mathbf{H}$ 【 $\mathbf{P}=\chi_e \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ 】，于是 $\mathbf{B}=(1+\chi_m)\mu_0 \mathbf{H}$ ，令 $1+\chi_m=\mu_r$ 【 $\epsilon_r-1=\chi_e$ 】，于是就有 $\mathbf{B}=\mu_r \mu_0 \mathbf{H}=\mu \mathbf{H}$ 。【注：即使 $\mathbf{B}=\mu \mathbf{H}$ ，磁场的“高斯定理” $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}=0$ 仍成立；

其中 $\mu_r = \frac{B}{B_0}$, 不像 $E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\epsilon_r}$, $B = B_0 + B' = \mu_r B_0$, 因此当 χ_m 稍 >0 时, $\mu_r > 1$, $B > B_0$, $B' > 0$, 顺磁质; 当 $\chi_m \leq 0$ 时, $\mu_r \leq 1$, 抗磁质; 当 $\chi_m \gg 0$ 时, $\mu_r \gg 1$, 铁磁质】

关于磁化电流的分布与磁化强度的关系: 在上一段中提到的 $i_s = \oint_{\text{矩形回路}} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L}$, 可以这么来理解: 正如极化强度矢量 \mathbf{P} 与极化电荷 q' 之间有一定关系一样, 磁化强度矢量 \mathbf{M} 也与磁化电流 i_s 有一定关系。设某一宏观体积元内, 平均分子磁矩为 $\mathbf{m}_i = I_i \mathbf{S}_i$ (其中 I_i 、 \mathbf{S}_i 也是平均量, 因而也是相同的), 则介质中的磁化强度 \mathbf{M} 为 $n\mathbf{m}_i = nI_i \mathbf{S}_i$ (n 为单位体积内的分子环流数)。现考虑一环路 L 所对应的面 S , 介质中的分子环流, 一类与 S 不相交, 一类方向相反地与 S 相交两次, 只有被 L 穿过的分子环流与 S 相交一次, 因此 $\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L n\mathbf{m}_i \cdot d\mathbf{L} = \oint_L nI_i \mathbf{S}_i \cdot d\mathbf{L} = n(\oint_L \mathbf{S}_i \cdot d\mathbf{L}) I_i = \sum_{\text{穿过 } L \text{ 所围的面 } S} I'$ 。——据此, 可得到介质表面磁化电流密度与磁化强度的关系: 选择一个穿过磁介质表面的矩形线框, 两条长边分处于介质内外, 且长边 $L // \mathbf{M}$; 此时由于只有内部有 \mathbf{M} , 即只有长方形的一条长边上有 \mathbf{M} , 因此 $\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = M \cdot L = I_s \cdot L$, 即有 $M = I_s$, 若考虑到方向, $\mathbf{M} \perp \mathbf{I}_s$, \mathbf{M} 、 \mathbf{I}_s 均沿着磁介质表面, 因此 $\mathbf{I}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$, \mathbf{n} 为磁介质表面的外法向单位矢量。【这与之前的 $\mathbf{M} = I_s \cdot \mathbf{e}_n$ 相照应; 含 I_s 的相当于微分形式; $\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = i_s$, $M = I_s$, $I_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ 】

\mathbf{H} 和 \mathbf{D} 均是辅助量; 在有介质时的安培环路定理 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_{\text{内}} I_i$ 中, \mathbf{H} 有点像 \mathbf{D} , 而在 $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ 中, 却是 \mathbf{B} 有点像 \mathbf{D} 。这源于 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 且 $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, 且 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ 。【式中, χ_m 叫磁化率, μ 叫磁导率 (像极化率和电导率), I_i 为真实存在的传导电流】

一道例题: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H \cdot 2\pi r = \sum_{\text{内}} I_i = I$, 于是 $H = \frac{I}{2\pi r}$, 即 $\frac{B}{\mu_r \mu_0} = \frac{I}{2\pi r}$, 即有 $B = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r}$ 。

2.2 抗磁质的磁化

其本身的 \mathbf{m}_s 、 \mathbf{m}_L 均不为 0, 但 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_L + \mathbf{m}_s = 0$ 。用经典观点来描述, 未附加 \mathbf{B}_0 时, 只有库仑力提供核外电子绕核运动的向心力, 加了 \mathbf{B}_0 后, 附加了洛伦兹力 $q\mathbf{v}\mathbf{B}_0$ 提供向心力 or 离心力, 不论是指向核还是向外指向, 均产生与 \mathbf{B}_0 相反的 $\Delta \mathbf{m}' (>0)$ 。

当考虑顺、抗磁质时, 其 μ_r 稍 ≥ 1 或 ≤ 1 , 可近似地看作一个常数。则 $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ 对应的 \mathbf{H} - \mathbf{o} - \mathbf{B} 曲线为一条过原点的直线 (自变量为外部施加的 \mathbf{H})。

2.3 铁磁质的磁化

铁磁质中，每个小区域内有取向大致相同的磁矩，但是一个个小区域取向不同，总的对外不显磁性。摔它(动能)、加热(到一定温度)，均可以改变磁畴的排列，继而使得获得的磁性消失。——若是通过热能消磁的，则这个温度叫对应材料的居里温度。

当考虑铁磁质时，其 μ_r 随着 H 变化。在外场(H)的作用下(随着 H 的增大)，受到外场作用的磁畴开始接二连三地响应着激励而偏转， μ_r (应该说是斜率? $\because \mu_r$ 并不是斜率)从小变大；之后该转向的磁畴都已经转向完全了，没多少剩余的未偏转 or 正在偏转的了， μ_r 又从大到小。当 B 增大到饱和磁感应强度 B_s 时， H 的增大已无法增大 B 。这第一个阶段在 H - B 图上相当于一条有一个拐点的 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 正弦曲线，只不过起点移到了原点。

之后随着 H 的减小， B 的变化滞后于 H ，即 B 减小的没有 H 那么多和快，这体现在当 H 减小至 0 时， B 才减小至剩余磁感应强度 $B_r > 0$ 处，而当 H 继续负向增加(正向减小)至矫顽力 $-H_c$ 时， B 才减小至 0(不过此时斜率最大)。当 H 继续负向增加时， B 斜率减小地负向增加至饱和磁感应强度 $-B_s$ 。这第二个阶段在 H - B 图上相当于一条有一个拐点的 $[-\pi, 0]$ 余弦曲线，只不过起点移到了 B_s 点。

第三个阶段的图形和第二个阶段关于原点中心对称。后两条曲线叫做磁滞回线。

铁磁质的磁化过程要消耗能量，此能量称为磁损耗，与磁滞回线所围面积成正比(由于 $\omega_m = \frac{1}{2} \cdot BH$ ，可见该面积的单位是能量密度的单位)，与 H_c 的大小密切相关。因此，对于软磁材料(如变压器铁芯)而言， μ_r 大， H_c 小，磁滞回线窄，便于反复磁化，磁损耗小。而硬磁体(如永磁体)磁滞回线较宽，矩磁材料的磁滞回线接近矩形，可用于信息转换、记录、存储等处理。

3.电磁场能

之前我们在 5.3.1 自感磁能中给出了磁场的能量密度 $\omega_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \mu H^2$ 以及(自感的)磁场能 $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ ，利用它们我们可以求出体系的自感 L 。正如我们可以利用 $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$ 和电场能 $W_e = \frac{1}{2} CU^2$ 来求出 C 一样。——同样，像 $C = \frac{Q}{U}$ 和 $L = \frac{\Phi}{I}$ 中，可以假设 U 、 I ，创造 Q 、 Φ 后再相除，得到 C 和 L 一样，这里也可以这么做，创造了 I 和 Q 后，求出 B 、 E ，再通过 ω_m 、 ω_e 求出 W_m 、 W_e ，再利用 $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ 、 $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 来得到想要的 L 和 C 。

4.两种磁介质分界面上的边界条件

(1).介质中磁感应强度矢量 \mathbf{B} 法向分量的连续性:

同样, 利用一个第二型曲面积分, 即磁场的“高斯定理”(注: 即使在介质中, 即 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, 磁场的“高斯定理” $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}=0$ 仍成立), 可以得到 $B_{2n}=B_{1n}$; 即 $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}=0$ 。——所有第二型曲面积分对应的(得到的)都是法向分量的连续。

(2).介质中磁场强度矢量 \mathbf{H} 切向分量的连续性:

同样, 利用一个第二型曲线积分, 即有介质时的安培环路定理 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}=I_0=0$, 可以得到 $H_{2t}=H_{1t}$; 即 $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n}=0$ 。【有意思的是, 光学中的法向也像电磁学一样, 用 \mathbf{n} 表示, 而切向 \mathbf{t} 会进一步细分为下角标 s 和 p , 表示切面中的两个平行和垂直分量】——所有第二型曲线积分对应的(得到的)都是切向分量的连续。

第五章 电路

1.恒定电路中的电源

1.1 电源的电动势、内阻和路端电压

当把一负载 R 接到电源的两极上构成闭合回路时, 电源内部的电流 I 从负极到正极, 电源放电。当把一电动势更大的电源正极接正极地接到该电源上时, 电源内部的电流 I 从正极到负极, 电源充电。

不论以上哪种情况, 电流方向由导体中总场强决定(决定=使其一致/同向于之)(当然你也可以说总场强决定了电势差, 而电势差决定了电流方向), 若在电源内部, 则其总场强为非静电力与静电力的合力比上 q , 即 $\mathbf{K} + \mathbf{E}$, 它使得电流的方向与之相同, 因此它同向于电流方向。

于是根据电路原理有关知识, 利用在关联参考方向下的欧姆定律形式 $U_r = Ir$ (其中 U_r 为电源内阻两端电压), 以及电压(电势差/电势降落)的定义式 $U_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, 则有:

$$\int_{\text{电流方向}} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = U_r = Ir.$$

当电流方向在电源内部体现为从负极到正极时, 上式变为: $\int_{\text{电流方向}} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = Ir$, 根据在第三章 2.1 动生电动势中介绍的电动势的定义(非静电力把单位正电荷从电源负极移到正极所做的功): $\varepsilon = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_{\text{非}}}{q} \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L}$, 以及路端电压的定义(静电力把单位正电荷从正极移到负极所做的功): $U_{+-} = \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, 此时原式变为: $\int_{-}^{+} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} - \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \varepsilon - U_{+-} = Ir$, 即有 $U_{+-} = \varepsilon - Ir$ 。

当电流方向在电源内部体现为从正极到负极时, 上式变为: $\int_{\text{电流方向}} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = \int_{+}^{-} (\mathbf{K} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{L} = -\int_{+}^{-} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{L} + \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\varepsilon + U_{+-} = Ir$, 即有 $\varepsilon = U_{+-} - Ir$ 。【这两个式子也可以由基尔霍夫电压定律得到, 其中 U_{+-} 就相当于放电的大电源两端的电压或者纯粹的导线的路端电压】

2.各种导体的导电机制

2.1 金属导电的经典电子论

导体内没有电场时, 金属的自由电子如同气体中的分子一样, 总是在不停地作无规则热运动: 没有外场或其他原因(温度梯度)的情况下, 它们朝着任何方向运动的概率都一样, 因此在任意一段时间内, 从两边穿过金属的任一横截面的电子数相等, 因此从宏观角度上看, 自由电子的无规则热运动没有集体定向的效果, 即没有形成电流。

自由电子在做热运动的同时, 还不时地与晶体点阵上的原子实碰撞, 每个自由电子的轨迹是一条拐了很多次的折线。

若金属导体中加了电场, 每个自由电子的折线轨迹均朝着电场方向发生平移。此时可认为自由电子的总速度是由它的热运动速度和因电场产生的附加定向速度两部分组成, 前者的矢量平均为 0, 后者的平均叫做漂移速度 \mathbf{u} 。

自由电子在电场中获得的加速度为 $\mathbf{a} = -\frac{e}{m} \cdot \mathbf{E}$ ，由于与晶体点阵的碰撞，自由电子定向速度的增加受到了限制：电子与晶体点阵碰撞后沿着各方向散射的概率相等，因此总的来说此时 \mathbf{u} 变成 0，然后又从静止开始加速。

将气体动理论应用到经典电子论中，利用平均自由程 $\bar{\lambda} = \frac{\text{平均速度}}{\text{平均碰撞频率}} = \frac{\bar{v}}{Z}$ ，我们有：

平均自由飞行时间 $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \frac{1}{Z}$ ，因此 $\bar{\mathbf{u}} = \frac{0 + \mathbf{a}\bar{\tau}}{2} = \frac{-\frac{e}{m} \mathbf{E} \bar{\lambda}}{2} = -\frac{e}{2m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \cdot \mathbf{E}$ 。又因电流密度矢量【其中 e 仍代表电量，是正值，负号表示对象为电子时运动方向与正电荷移动方向 \mathbf{u} 相反】

$\mathbf{j} = -ne\mathbf{u}$ ，以及 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ ，联立它们即有： $-ne\mathbf{u} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ ，得到 $\sigma = -ne \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{E}} = -ne \frac{-\frac{e}{2m} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \mathbf{E}}{\mathbf{E}} = \frac{ne^2}{2m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$ 。

这就得到了电导率 σ 与微观平均量的关系：其中由于 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ ，可见 \bar{v} 正比于 \sqrt{T} ，因此 σ 反比于 \sqrt{T} ，而电阻率 ρ 正比于 \sqrt{T} ，这就说明了随着温度的升高，电阻的电阻率增加。【此处的推导假设了 $\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$ 中每个电子的 τ 、 $\bar{\lambda}$ 均相等，实际上可能会有一定的分布，比如电子的自由程可能服从泊松分布，此时 $\sigma = \frac{ne^2}{2m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}}$ 会有乘上一个系数(泊松对应 2)，不过不影响数量级。】——不过经典电子论导出的此结果只能定性地说金属导电的规律，以此计算出来的结果与实际结果相去甚远：对大多数金属来说， ρ 近似地与 T 成正比。这些困难需要用量子理论重新解释。

电流的热效应：金属导体里，自由电子在电场力的推动下做定向移动形成电流。电场力对自由电子做功，使电子定向移动运动动能增大，同时自由电子又在不断地和晶体点阵上的原子实碰撞，碰撞时把定向运动能量传递给了原子实，使它的热振动加剧，因而导体温度升高。——综上，从金属经典理论来看，“电阻”所反映的是自由电子与晶体点阵上的原子实碰撞所造成的对电子定向运动的破坏作用，所以电阻便是电阻元件中产生焦耳热的原因，及其背后的原因。

利用 $\mathbf{j} = -ne\mathbf{u}$ ，我们可以大致地算出自由电子做定向运动的漂移速率的数量级约 10^{-4}m/s 。而平均热运动速率约 10^5m/s 。金属导线中各处都有自由电子，未接通电键时，导线处于静电平衡态，体内无电场，自由电子未定向移动，导线中无电流。电键一旦连通，电场把场源变化的信息很快传播出去，电路各处的导线里很快建立了电场，推动当地的自由电子定向移动，形成电流。——而并不是电键接通后，电子才从电源出发，等其到达负载后，那里才有电流。

3. 恒定电路的计算

3.1 电阻的串联和并联

3.2 简单电路举例

(1).**平衡电桥**：电桥简称**桥式电路**，主要用于精确地测量电阻。四个电阻构成一个四边形的四条边，每条边叫做电桥的一个臂。四边形的一组对角 A、C 间接上直流电源；另一组对角 B、D 间连上检流计 G，桥就是指的 G 所在的这根导线，利用它来直接比较这两点的电势。当这两点电势相等时，称电桥达到了平衡。G 便用于检查电桥是否平衡。

当电桥平衡时，没有电流通过 G，G 两侧对角点 B、D 的电势相等，(设 B、D 处于上下位)于是**基尔霍夫电压定律**(应用于 ABD、BDC 两网孔)→“**上下等电压**”(即 $U_{AB}=U_{AD}$ & $U_{BC}=U_{DC}$)、**基尔霍夫电流定律**(应用于 B、D 两节点)→“**左右等电流**”(即 $I_{AB}=I_{BC}$ & $I_{AD}=I_{DC}$)，每对邻边总有个量相等(且相间相等)，于是左右电压之比=上端的左右电阻比=下端的左右电阻比，于是便得到了电阻比例关系式(即电桥的平衡条件)。

滑线电桥：四个电阻中，AB、BC 这上端的两边的电阻被替换为了一个已知电阻和一个未知阻值的电阻；下端的 AD、DC 两个电阻变成了一段均匀的**滑线电阻**，D 为**滑头**处。——当滑头滑到一定位置，G 不偏转，通过此时下端的滑线电阻所显示的比例关系，应用于 ABC 段两个电阻之比，即可求出未知电阻。

(2).**电势差计**：

伏特计只能粗略地测量电源电动势，因其测出的只是路端电压，而并非电动势。因任何电源或多或少有内阻 r ，只要有 I 流经它，内阻上就会有电势降 Ir ，此时端压便不等于电动势。——要想准确地测一个电源的电动势，必须在没有任何电流通过该电源的情况下测定它的路端电压。

补偿法可解决这一问题：用一**可调且可知**电动势的电源，与待测电源通过检流计 G **反接(正极接正极)**在一起。调节可调电源，使得 G 读数为 0，此时两个电源电动势相等。

滑线电势差计：为了准确、稳定、连续地调节可调电动势的电源，将一不可调电动势的电源与制流电阻 R (可调)、滑线电阻 AB 串联，做成辅助回路来代替可调电动势的电源。——若 A 到 B 的电势逐点下降，则待测电源正极连接 A 点，负极连接 G 后连接滑片 C ， C 在 AB 间滑动(这段支路叫补偿回路)。调整 R 使得滑线电阻两端电压 $U_{AB} >$ 待测电源电动势，则滑动滑头 C 时，必有一个位置使得检流计 G 指针不偏转。

3.3 基尔霍夫定律

(1).基尔霍夫第一方程组又称节点电流方程组。它的理论基础是 9.3 电流的连续方程中的恒定条件：恒定电流场/静电场(电荷的分布不随时间变化)。作一闭合曲面包围电路的节点，一般流出节点的电流记为正，则根据恒定条件：从节点流出的电流=0。

(2).基尔霍夫第二方程组又称回路电压方程组。它的理论基础是静电场的环路定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ 。作一回路环绕一周回到出发点，一般记电势降落(高到低)方向为正，则根据环路定理：总电势降=0。

4.暂态过程

电路原理中先介绍 RC 电路的一阶电路零输入响应→一阶 RL 电路零输入响应→一阶 RC 电路零状态响应→一阶 RL 电路零状态响应。这样的安排下，时间因子 τ (从 RC 到 L/R) 和表达式(从 e 的负指数到 $1-e$ 的负指数)的复杂度是由易到难的；且零输入响应归为一类、零状态响应归为一类。

而电磁学中却先介绍 LR(用 LR 而不用 RL 了)，再介绍 RC，分类标准依照 LR 归为一类、RC 归为一类；且每一类中先介绍零状态，再介绍零输入。这样的好处在于，LR 所对应的物理过程更形象、易理解，所以放在前；并且讲 LR 则先讲充电，再讲放电，对应没充电何来放电的物理现实。

4.1 LR 电路的暂态过程

一种方法利用欧姆定律 $\epsilon + (-L \frac{di}{dt}) = i \cdot R$ ，其中等式左边均代表电动势，电流从 ϵ 正极流出，在内部由其负极(低电势)流向正极(高电势)，沿着电流方向(电势降的回路参考方向)电势升，在等式右边取负(依右边来列基尔霍夫电压方程)，移左后取正；

第二种方法：若将它俩移到等式右边，即变成了基尔霍夫电压定律的形式：

$0 = -\varepsilon + L \frac{di}{dt} + i \cdot R$ ——因此，在电路原理中，我们所说的 $U_L = L \frac{di}{dt}$ 与电磁学所说的 $E_L = -L \frac{di}{dt}$ 并无矛盾。因为 U_L 是指关联参考方向(沿着 ε 所创造的 i 方向，即电势正到负/从电感线圈正极到负极)下的，(正极到负极的)电势差，而 E_L 是从负极指向正极的这个方向上的电势差； i 是指原先流过 L 的电流，而不是它创造的反电动势所制造的那部分电流；当然， E_L 你也可以只理解为有旋电场的环积分这个意义上的。

利用 $L \frac{di}{dt} + i \cdot R = \varepsilon$ 或 0 ，我们可分别得到零状态响应和零输入响应的 $i_L(t)$ ，具体步骤分别如下： $L \frac{di}{dt} = \varepsilon - i \cdot R$ ； $L \frac{di}{dt} = -i \cdot R \rightarrow \frac{di}{\varepsilon - i \cdot R} = \frac{1}{L} \cdot dt$ ； $\frac{di}{-i \cdot R} = \frac{1}{L} \cdot dt \rightarrow \frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \frac{R}{L} \cdot dt$ ； $\frac{di}{-i} = \frac{R}{L} \cdot dt \rightarrow \frac{d(\frac{\varepsilon}{R} - i)}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = -\frac{R}{L} \cdot dt$ ； $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \cdot dt \rightarrow \ln(\frac{\varepsilon}{R} - i)|_{i_0=0}^i = -\frac{R}{L} \cdot t$ ； $\ln(i)|_{i_0}^i = -\frac{R}{L} \cdot t \rightarrow 1 - \frac{R}{\varepsilon} i = e^{-\frac{R}{L} t}$ ； $\frac{i}{i_0} = e^{-\frac{R}{L} t} \rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$ ； $i = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$ 。其中 R 包含电源内阻 r 。若对于零状态响应来说，并不是零状态 $i_0 = 0$ ，那么此时 $\ln(\frac{\varepsilon}{R} - i)|_{i_0}^i = -\frac{R}{L} \cdot t \rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - i = (\frac{\varepsilon}{R} - i_0) e^{-\frac{R}{L} t}$ ，于是 $i = \frac{\varepsilon}{R} - (\frac{\varepsilon}{R} - i_0) e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) + i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$ ，即变为了电路原理中的一阶电路全响应问题。其中，更广义地， i_0 可被替换为 $i_L(0_+)$ ，而 $\frac{\varepsilon}{R}$ 可被替换为 $i_L(\infty)$ 。在充放电的过程中，充电的 $i_L(\infty) = \text{放电的 } i_L(0_+)$ 。

从中我们可看出 $\frac{R}{L} \cdot t$ 量纲为 1，分子分母同乘以 L^2 即可。为此我们引出时间常数 τ 的概念 $1 \cdot \tau = 1 \cdot \frac{L}{R}$ ，当 $t = \tau$ 时，零状态响应中的 $i_L(\tau) = i_L(\infty)(1 - e^{-1}) = 0.63 i_L(\infty)$ 。

4.2 RC 电路的暂态过程

用同样的方法处理 $U + i \cdot R = \varepsilon$ 或 0 所导致的 $U + C \frac{du}{dt} \cdot R = \varepsilon$ 或 0 或者 $\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} \cdot R = \varepsilon$ 或 0 ，便可得到同样类似的两个关于 $U_C(t)$ 的或者关于 $q_C(t)$ 的暂态过程方程，后者=前者 $\cdot C$ 。之后可以用 $C \frac{du}{dt}$ ，也可以用 $\frac{dq}{dt}$ 来求 $i_C(t)$ 。此时 $\tau = RC$ 。并且仍然有一阶电路全响应： $f(\infty) - (f(\infty) - f(0_+)) e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

4.3 积分电路

类似于 $L \frac{di}{dt} + i \cdot R = \varepsilon$ 或 0 和 $\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} \cdot R = \varepsilon$ 或 0 地，在二阶电路中，有 $L \frac{di}{dt} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$ 或 0 。——即 $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$ 或 0 。该方程的解的形式取决于阻尼度 $\lambda = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 。当 λ 分别 >1 、 $=1$ 和 <1 时，分别称为过阻尼、临界阻尼、负阻尼/阻尼振荡。

第六章 麦克斯韦电磁理论 电磁波

1.麦克斯韦电磁理论

1.1 位移电流 麦克斯韦方程组

(一).有介质时的高斯定理： $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$ 。

(二).静电场的环路定理 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ ，若将其中的静电场 \mathbf{E} ，拓展为静电场+感生电场，则根据之前在 2.2 感生电动势所介绍的， $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{感}}) d\mathbf{L} = 0 + \oint \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{L} = \text{感生电动势} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})}{dt} = -\oint_S \frac{d(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})}{dt} = -\oint_S (\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{B} \cdot \frac{d d\mathbf{S}}{dt}) = -\oint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$ 。——于是我们将其写作 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 。

(三).磁场的“高斯定理”： $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

(四).有介质时的安培环路定理： $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_{\text{内}} I_i = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 。该式要想恒成立，至少意味着该式右边，穿过以 L 为边界的任意曲面 S 的传导电流都相等，即 $\oint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 。但若将其运用到非恒定条件下，比如电容器的充放电电路中，让 S_1 与导线相交， S_2 穿过电容器两板之间的空间，可见 $\oint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \text{传导电流 } I_0$ ，而 $\oint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

所以为了得到一个适用范围更广的式子，我们得将 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_{\text{内}} I_i$ ，式子右端的 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 进行更改。——根据 9.3 电流的连续方程处所介绍的， $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{\text{in}}}{dt}$ (其中 $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 以穿/流出闭合曲面为正， $\frac{dq_{\text{in}}}{dt}$ 以进入闭合曲面为正；所以两者异号)，而其中利用 (一). $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{in}}$ ，因此 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{dt} = -\oint_S \frac{d(\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S})}{dt} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ ，因此 $\oint_S (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，用它来替代 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 所对应的 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 为恒量。于是 $\oint_{S_1} (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$ ——因此，不像 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 一样，对于相同的边界 L、不同的 S， $\oint_S (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$ 都相等，即 $\oint_S (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$ 这个量永远是连续的。

——所以我们将式改为 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\text{内}} I_i + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 。令通过某一曲面的电位移通量 $\Phi_D = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ ，则 $\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ ，麦克斯韦将 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 称为位移电流，将 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 称为位移电流(面)密度。传导电流 $I_c = \sum_{\text{内}} I_i = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 与位移电流 I_d 合称为全电流。——全电流 $I_s = I_d + I_c$ 在任何情形下是连续的。【在电容器两板之间，极板上变化的电量，产生变化的电场，所激发的磁场，与导线上的传导电流 I_c 激发的磁场，效果一样(因此，位移电流 I_c 的方向，与 \mathbf{H} 的方向构成右手螺旋关系，也同向于 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 的方向[\mathbf{L} 的绕向与 $d\mathbf{S}$ 构成右手螺旋关系，而等式左右两端点积的正负，表明 \mathbf{H} 相对于 \mathbf{L} 、 \mathbf{j} 相对于 $d\mathbf{S}$ 方向相同还是相反，并且它们总是同时取负 or 取正])；因此位移电流本身与“电荷的流动”无关，本质上是电场的变化率；1.位移电流在产生磁场方面与传导电流等效 2.传导电流产生焦耳热，位移电流不产生。】

1.2 麦克斯韦方程组

1.2.1 麦克斯韦方程组的积分形式

$$(一). \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0, \text{ 或 } \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho_{e0} \cdot dV.$$

$$(二). \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \text{ 或 } \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

$$(三). \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \text{ 或 } \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0.$$

$$(四). \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_c + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \text{ 或 } \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}.$$

1.2.2 麦克斯韦方程组的微分形式

$$(一). \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{e0}. (\because \text{积分形式对任何体积 } V \text{ 都成立, 除非是被积函数本身相等})$$

$$(二). \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$(三). \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

$$(四). \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. (\text{假定传导电流是体分布的, 面密度为 } \mathbf{j})$$

1.2.3 麦克斯韦方程组的最基本形式

对于各向同性线性介质来说， $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ (欧姆定律的微分形式)或者 $\mathbf{j} = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 、 $\mathbf{j} = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{K})$ 。

$$(一). \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{e0}}{\epsilon}.$$

$$(二). \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$(三). \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

$$(四). \nabla \times \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{j} + \epsilon \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

此方程组中只包含 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ，其中 ρ_{e0} 和 \mathbf{j} 代表所有电荷和电流的密度。(我不太理解 $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ 为什么没有带入进去，它用在了哪里？)

1.3 边界条件

在解麦克斯韦方程组的时候，得已知边界条件，才能唯一地确定方程组的解。于是我们来完善完善 9.4 两种导体/两种电介质分界面上的边界条件。

(1). 导体界面上的边界条件：

1. 根据 $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{in}}{dt}$ ，我们将当时的(1). 改写为 $\mathbf{j}_{2n} - \mathbf{j}_{1n} = -\frac{dq_{in}/S}{dt} = -\frac{\sigma_{in}}{dt}$ ，或 $(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{n} = -\frac{\sigma_{in}}{dt}$ 。在电流恒定下，即得到之前的结果。

2. 当时的(2). 只介绍了介质中电位移矢量 \mathbf{D} 法向分量的连续性，而未介绍导体中的。考虑到导体表面会有自由电荷的累积，因此根据 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$ ，便有 $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = q_0/S = \sigma_0$ ；即 $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_0$ 。以上两点在非恒定下均成立，以下所述也均如此。

3. 沿用(3). 的结果： $\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$ ；即 $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$ 。这第三点是非恒定态 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 下也适用，等下将解释。

4. 沿用两种磁介质分界面上的边界条件中的(1). $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，则有 $\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$ ；即 $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

5. 在高频下，由于趋肤效应，电流、电场和磁场都将分布在导体表面附近一薄层内。对于理想导体($\sigma \rightarrow \infty$)，趋肤深度 $\rightarrow 0$ 。此时 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_c + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \approx I_c$ ，此时 $\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = I_c$ ；即 $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = I_c$ 。等下将解释为什么有“ \approx ”。

(2). 电介质界面上的边界条件：

1. 一般两介质分界面上没有自由电荷，则 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，沿用(2). 的 $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = 0$ ；即 $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

2. 沿用(3). 的结果： $\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$ ；即 $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$ 。在非恒定态 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 下也适用，等下将解释。

(3).磁介质界面上的边界条件:

1.沿用两种磁介质分界面上的边界条件中的(1). $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}=0$, 则有 $B_{2n}=B_{1n}$; 即 $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}=0$.

2.考虑到两介质分界面上没有传导电流(的面分布), 即 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}=I_0=0$, 则有 $H_{2t}=H_{1t}$; 即 $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n}=0$. 在非恒定态 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}=I_c + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 下也适用, 等下将解释。

非恒定态相对于恒定态, 只有两点不同: 在 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 中, $\frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 正比于回路面积 S ; 而在 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_c + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 中, $\frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 也正比于回路面积 S 。——而这两个 S 都是狭长矩形回路的面积, 趋近于零。

2.电磁波理论

2.1 平面电磁波的解

将自由空间中的麦克斯韦方程(一). $\nabla \cdot \mathbf{E}=0$. (二). $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$. (三). $\nabla \cdot \mathbf{H}=0$.

(四). $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 写为直角坐标系中的分量形式(1,3,3,1 共 8 个方程):

(一). $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ (二). $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$, $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$, $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$ (三). $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ (四). $\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$, $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$. 设平面波沿着 +z 轴传播, 则波面垂直于 z 轴。根据波面的定义, 波面上各点相位相同, 即相位与 x、y 无关。若进一步假设振幅也与 x、y 无关, 则上式中所有对 x、y 的偏微商, 即黄色字体全=0。于是对于第 1,4,5,8 个方程, 便有 $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$, $\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$, $\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$, $\frac{\partial E_z}{\partial t}=0$ 。对于(二). (三). 中的前两个方程, 即第 2,3,6,7 个方程, 便有 $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$, $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$, $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$ 。

现在令 \mathbf{E} 只有 x 分量, 即有 $E_y=0$, 即 E_y 是个与时空变量无关的常量: $\frac{\partial E_y}{\partial z}=0$, $\frac{\partial E_y}{\partial t}=0$; 于是头尾两个方程中 $\frac{\partial H_x}{\partial z}=0$, $\frac{\partial H_x}{\partial t}=0$ 。——可见此时 H_x 也是个与时空变量无关的常量, 设它为 0, 则 $E_y=0$ 对应着 $H_x=0$ ——可见若 \mathbf{E} 沿 x 方向, 则 \mathbf{H} 沿 y 方向, 彼此垂直; 并且它们都 $\perp \mathbf{k}$ (z 轴正向/传播方向)。

此时只剩下中间两个方程 $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$, $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$ 。其中前一个式子表示的是法拉第电磁感应定律, 反映磁场的变化激发涡旋电场: $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$, 与(二). $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

很像；后一个式子右端为位移电流，反映着电场的变化(位移电流)激发磁场(涡旋磁场)：

$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\partial D_x}{\partial t}$ ，与(四) $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 很像。—— \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 相互感生、相互激发，同时并存。

将 $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$ 两边对 t 求偏导，并将其左边代入 $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$ 两边对 z 求偏导后的式子的右边，即可得到 $\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\epsilon(-\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}) = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$ ，同样的道理，有 $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ 。这两个偏微分方程具有相同的形式；它们的解具有波动形式，因而这类偏微分方程叫做波动方程。

设 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z)$ ， $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$ ，将其代入 $\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$ ，以及 $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$ ，便可得到 $k_1^2 = \epsilon\mu \omega_1^2$ ，于是由 $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$ ，得 $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ，同理 $v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v_1$ ，而 $\omega_1 = \omega_2$ 应相同，因而 $k_1 = k_2$ 也相同。——将其代入 $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$ ，可得 $k_1 \mathbf{E}_0 = -\mu \omega_2 \mathbf{H}_0$ 、 $k_2 \mathbf{H}_0 = -\epsilon \omega_1 \mathbf{E}_0$ ，即有 $k \mathbf{E}_0 = -\mu \omega \mathbf{H}_0$ 、 $k \mathbf{H}_0 = -\epsilon \omega \mathbf{E}_0$ 。于是两个方程异侧相乘，便有 $-\epsilon \omega \mathbf{E}_0 k \mathbf{E}_0 = -\mu \omega \mathbf{H}_0 k \mathbf{H}_0$ ，即有 $\epsilon \mathbf{E}_0^2 = \mu \mathbf{H}_0^2$ ，即有 $\sqrt{\epsilon} \mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu} \mathbf{H}_0$ 。【可以通过能量密度相等来记忆： $\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}_0^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}_0^2$ ， $\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$ 】

由于我们是按右旋(手)坐标系来标定 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{k} (z 轴正向/传播方向)三个矢量的取向的，则 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 的方程在此坐标系下，永远同号。

2.2 平面电磁波的性质

(1).电磁波是横波： $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ， $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ 。(该点可合并至/归于(3).)

(2).电矢量与磁矢量垂直 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ 。

(3). \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 同相位，并且在任何时间和地点，均有 $\mathbf{E} \times \mathbf{H} // \mathbf{k}$ 。

(4).幅值成比例： $\sqrt{\epsilon} \mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu} \mathbf{H}_0$ 。

(5).电磁波的传播速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 。

电磁波具有波的共性，在介质分界面处有反射和折射，也有干涉衍射。

3.电磁场的能流密度和动量

3.1 电磁场的能流密度

能流：单位时间内垂直通过某一面的能量。

能流密度：单位面积的(平均)能流。

电磁波的能量密度： $\omega = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ ，(注意：其中的 E 和 H 是含时含空间的)则
电磁波的能流密度 $S = \frac{\omega \cdot (dS \cdot v dt)}{dt \cdot dS} = v \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left(\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \right)$ ，利用 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ ，则
 $S = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mu H^2 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} H^2 = \frac{\sqrt{\epsilon}E}{\sqrt{\epsilon}} H = EH$ ，于是进一步地，由于 $E \times H // k$ ，即 $E \times H // v$ ，而 $S = v \cdot \omega$ ，
 所以 $E \times H // S$ ，所以 $S = E \times H$ ，称为**坡印亭矢量**。

电磁波的强度 $I = \text{平均能流密度} \bar{S} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} S \cdot dt = \frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} S \cdot dz =$
 $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0 H_0 \cos^2(\omega_1 t - k_1 z) \cdot dt = \frac{1}{2} E_0 H_0$ ，(可以仿照求交流电平均功率的办法来计算；
 或者数学上的结论)，其中 $\sqrt{\epsilon}E_0 = \sqrt{\mu}H_0$ ，可发现**电磁波的平均能流密度** $= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} H_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} E_0^2$ ，
 正比于 E_0^2 或 H_0^2 。——同样的操作， $\bar{E^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 z) \cdot dt = \frac{1}{2} E_0^2$ ，于是
 $\sqrt{\bar{E^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0$ ，同样 $\sqrt{\bar{H^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0$ 。于是还可以用**方均根值**来表示 $I = \bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \sqrt{\bar{E^2}} \sqrt{\bar{H^2}}$ 。

3.4 电磁场的动量 光压

4.电磁波的产生

4.1 从电磁振荡到电磁波

给 LCR 电路中的电容器充电后，电荷 q 满足微分方程 $L \frac{di}{dt} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ ，在电阻 R 较小时，解为阻尼振荡的形式： $q = q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ，其中 $\alpha = \frac{R}{2L}$ ， $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。由于在电路中没有持续不断的能量补给，且在电阻 R 上有能量损耗，振荡是逐渐衰减的。为了产生持续的电磁振荡，必须把 LCR 电路接在电子管或晶体管上，组成振荡器。靠电路中的直流电源不断补给能量。

任何 LC 振荡电路原则上都可以作为发射电磁波的振源，但要想有效地把电路中的电磁能发射出去，除了电路中必须有不断的能量补给之外，还需具备以下条件：

(1).频率必须足够高。

振荡电荷的位移正比于 $\cos \omega t$ ，加速度 a 正比于 $\omega^2 \cos \omega t$ ，则能流密度 S 正比于角频率的四次方。由于 $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，要想提高 ω_0 ，必须减小 L 和 C ，而 $C = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot S}{d}$ ，即要使得电容器极板面积越来越小，两板间距离越来越大，自感线圈匝数越来越少。

(2).电路必须开放。

LC 振荡电路是集中性元件的电路，即电场和电能都集中在电容元件中，磁场和磁能都集中在自感线圈中。为了把电磁场和电磁能发射出去，需要将电路加以改造，以便电场和磁场能分散到空间里。——根据(1).振荡电路最后完全退化为一根直导线，电流在其中往复振荡，两端出现正负交替的等量异号电荷。这样的电路叫做振荡偶极子(偶极振子)。