Salute to 朱林

目录

- 电动力学：Electro|dynamics|，Electro 代表 electromagnet，dynamics 代表“(动)力学”(比如四大力学的英文名基本都含有 dynamics)，它是一门研究电磁现象的动力学理论。
- 推导并不只是(为了)给出定理的合理性，其本身的存在意义还在于逻辑的升华：从感性到理性的认知过程。该过程很难通过非数学手段和板书之外的方式传达。
- 一条规律在多种情形下可能存在不同的(表现)形式。比如 Maxwell 方程组，在金属导体中、介质中、分界面上等，均有不同的数学形式。

数学基础一

✧ (1).标量场的梯度：$\nabla\phi=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

是矢量，方向与等值面的法向一致；大小$|\nabla\phi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}$；可用于确定场沿着某一方向 d$\mathbf{L}$ 的变化速度$=\mathrm{d}\mathbf{L}\cdot\nabla\phi$。

✧ (2).矢量场的散度：$\nabla\cdot\mathbf{f}=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k})=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}$

✧ (3).矢量场的旋度：$\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}$

✧ (4).积分变换式：

①.Gauss 定理：$\oiint_S \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{f}\cdot\mathrm{d}V$

②.Stokes 定理：$\oint_l \mathbf{f}\cdot d\mathbf{L}=\iint_S \nabla\times\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$

✧ (5).性质：

①.标量场的梯度必为无旋场：$\nabla\times\nabla\phi\equiv\mathbf{0}$。【注：这儿的 **0** 是矢量】

证明：将(1).代入(3).，即可得$\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x}&\frac{\partial\phi}{\partial y}&\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$。

②.矢量场的旋度必为无源场：$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{f}\equiv 0$。

证明：将(3).代入(2).，即可得$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{f}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f_y&f_z\end{vmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial x}\\ f_z&f_x\end{vmatrix}+\frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ f_x&f_y\end{vmatrix}=0$。

③.无旋场$\mathbf{f}$必可表示为某标量场ϕ的梯度：若$\nabla\times\mathbf{f}=\mathbf{0}$，则$\mathbf{f}=\nabla\phi$。

④.无源场$\mathbf{f}$必可表示为某矢量场$\mathbf{A}$的旋度：若$\nabla\cdot\mathbf{f}=0$，则$\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{A}$。

【①.③.相照应、②.④.相照应；若将$\nabla\times\nabla\phi$看作$\nabla\times\nabla\cdot\phi$的话，则$\nabla\times\nabla\cdot\phi$与$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{f}$相当于点乘与叉乘符号交换了位置，这样记忆起来更方便】

数学基础二

✧ (1).$\nabla\cdot\mathbf{f}\neq\mathbf{f}\cdot\nabla=f_x\frac{\partial}{\partial x}+f_y\frac{\partial}{\partial y}+f_z\frac{\partial}{\partial z}$

✧ (2).Laplace 算符：$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

∇^2对标量的作用：$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$；$\nabla^2$对矢量的作用：$\nabla^2\mathbf{f}=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})(f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k})=(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2})\mathbf{i}+(\frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2})\mathbf{j}+(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2})\mathbf{k}$ $=\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\mathbf{k}$。——可不能写成这样，因为$\frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}$不一定是 0，正如 P(x,y)和 Q(x,y)一样，f_x是 x,y,z 的函数：$f_x(x,y,z)$。因此$\nabla^2\mathbf{f}=\nabla^2 f_x\mathbf{i}+\nabla^2 f_y\mathbf{j}+\nabla^2 f_z\mathbf{k}$。

✧ (3).若ϕ(x,y,z)=ϕ(u(x,y,z))=ϕ(u($\mathbf{r}$))、$\mathbf{f}(\mathbf{r})=\mathbf{f}(u(\mathbf{r}))$，则：

①.$\nabla\phi(u)=\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi(u)}{\partial z}\mathbf{k}=\frac{d\phi}{du}(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})=\frac{d\phi}{du}\nabla u$

②.$\nabla\cdot\mathbf{f}(u)=\frac{\partial f_x(u)}{\partial x}+\frac{\partial f_y(u)}{\partial y}+\frac{\partial f_z(u)}{\partial z}=\frac{df_x}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{df_y}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{df_z}{du}\frac{\partial u}{\partial z}=(\frac{df_x}{du}\mathbf{i}+\frac{df_y}{du}\mathbf{j}+\frac{df_z}{du}\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})=\frac{d}{du}(f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k})\cdot\nabla u=\frac{d\mathbf{f}}{du}\cdot\nabla u$

③.$\nabla\times\mathbf{f}(u)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f_x(u)&f_y(u)&f_z(u)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{d}{du}&\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{d}{du}&\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{d}{du}\\ f_x(u)&f_y(u)&f_z(u)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{df_x}{du}&\frac{df_y}{du}&\frac{df_z}{du}\end{vmatrix}=(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\times(\frac{df_x}{du}\mathbf{i}+\frac{df_y}{du}\mathbf{j}+\frac{df_z}{du}\mathbf{k})=(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\times\frac{d}{du}(f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k})=\nabla u\times\frac{d\mathbf{f}}{du}$

✧ (4).设 Q 点在参考系 A 中的矢径(向径)为χ，参考系 A′的原点在参考系 A 中的矢径为χ'，则参考系 A′的原点指向 Q 点的向径 $\mathbf{r}=\chi-\chi'$。【可见 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\chi,\chi')$】

【这设定有点反人类：一般我们用 **r** 代表 Q(以及其他点)在 A 系中的坐标，用 **r**′来代表 Q(以及其他点)在 A′系的坐标，以此表示 A′系与 A 系在衡量/度量 Q 上的平权，是相对论所倡导的；而现在不仅不用 **r** 而用χ了，而且打一撇的χ'竟用来表示 A 到 A′的向径了，奇奇怪怪。——但其合理之处便在于：这样的坐标变换充分考虑了 A′系的感受：**r**=…(一切都为了数学形式在 A′系中的简洁而服务，A′系似乎地位略高于 A 系；这有点经典思想：非相对论的)，并且等号右边是"同类的"：χ,χ'】

其中χ=x**i**+y**j**+z**k**=(x,y,z)，χ'=(x′,y′,z′)，因此 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$、**r**=(x-x′,y-y′,z-z′)。

①.标量 r(x,y,z)的梯度：$\nabla r=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=\frac{(x-x')\mathbf{i}+(y-y')\mathbf{j}+(z-z')\mathbf{k}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{\mathbf{r}}{r}$

①′.标量 r(x′,y′,z′)的梯度：$\nabla' r=(\frac{\partial}{\partial x'}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y'}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z'}\mathbf{k})r=\frac{(x'-x)\mathbf{i}+(y'-y)\mathbf{j}+(z'-z)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=-\frac{\mathbf{r}}{r}$，因此$\nabla r=-\nabla' r$。

【这儿有个有趣的认识：不论 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$还是$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$，只要 **r**=(x-x′,y-y′,z-z′)，就恒有$\nabla' r=-\frac{\mathbf{r}}{r}$；而若定义 **r**=(x′-x,y′-y,z′-z)，则会像之前的$\nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r}$一样，有$\nabla' r=\frac{\mathbf{r}}{r}$；并且此时却变成了$\nabla r=-\frac{\mathbf{r}}{r}$；此时仍有$\nabla r=-\nabla' r$成立】

②.矢量 **r** 的散度：$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{\partial(x-x')}{\partial x}+\frac{\partial(y-y')}{\partial y}+\frac{\partial(z-z')}{\partial z}=3$。

****

③.标量$\frac{1}{r(x,y,z)}$的梯度：$\nabla\frac{1}{r}=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})r=-\frac{1}{r^2}\cdot\nabla r=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$。

③′.标量$\frac{1}{r(x',y',z')}$的梯度：$\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\cdot(\frac{\partial}{\partial x'}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y'}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z'}\mathbf{k})r=-\frac{1}{r^2}\cdot-\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，同样有$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}$。

④.矢量$\frac{\mathbf{r}}{r^3}$的散度：$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y'}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{r^3}$，其中$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{r^3}=\frac{r^3-(x-x')\cdot 3r^2\cdot\frac{(x-x')}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3(x-x')^2}{r^5}$，三者相加便有$\frac{3r^2-3r^2}{r^5}=0$；因此$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0$。同样有$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0(\because\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\nabla\cdot\nabla'\frac{1}{r}=\nabla'\cdot\nabla\frac{1}{r}=\nabla'\cdot-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3})$。注：该结论只在 $r\neq0$ 下成立！【相当于对$\frac{1}{r}$的梯度$\nabla\frac{1}{r}$再求散度】

⑤.根据$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，以及$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0(r\neq0)$，于是不论 r 是否=0，均有$\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla\cdot-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}$。当 $r\neq0$ 时，额外有$\nabla^2\frac{1}{r}=0$。

【当然，我们还可使用矢量分析公式之一的$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{f})=\nabla\varphi\cdot\mathbf{f}+\varphi\nabla\cdot\mathbf{f}$，来处理它：$\nabla\cdot(\frac{1}{r^3}\mathbf{r})=\nabla\frac{1}{r^3}\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\mathbf{r}=-3\frac{1}{r^4}\nabla r\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{r^3}3=-3\frac{1}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{1}{r^3}3=-3\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}3=0$】

引言

一.研究对象

1.电磁场的基本属性及运动规律

2.电磁场与带电物质的相互作用

二.电磁场是物质存在的一种形式

1.电磁场对带电物质作用

2.电磁场像实物粒子一样具有能量，动量和质量

3.电磁场可以和带电粒子相互作用，交换能量动量和质量

三.电磁场是一种特殊的物质

不像实物粒子具有一定的体积和形状，而弥漫于整个空间。具有波动性和叠加性，可以发生干涉和衍射等。

四.学习的意义

1.电磁现象广泛存在，根源在于电磁场的运动。所以对于认识自然具有重要意义。

2.光也是电磁波。同时电磁场也是光学的基础。

3.电磁场理论也是许多应用科学的基础。

五.发展过程与研究形式

1.实践，认识，理论，实践。

2.奥斯特——电流的磁效应;

法拉第——电磁感应;

麦克斯韦——总结为麦克斯韦方程。

六.主要研究内容

1.宏观电动力学(1 到 5 章):

(1).电磁现象的普遍规律 1

(2).稳恒电磁场的普遍规律 23

(3).电磁波的传播与辐射 45

2.狭义相对论(6 章):

介绍新时空观.相对论情况下的电动力学。【这前两个内容是重要的】

3.微观电动力学。

第一章 电磁现象的普遍规律

概况

1.目的与方法

1.1 将电磁现象的实验规律分析总结提炼为电磁现象的普遍规律。

1.2 电磁运动的基本规律——麦克斯韦方程组。

2.场的概念

2.1 一个物理量在全部或部分空间中的每个点，都有一个确定的值。

2.2 随时间变化的场，为不稳定场。否则稳定场。

2.3 研究方法：

引入电场 E(x,y,z,t),磁场 B(x,y,z,t)描述电磁场的属性。E,B 所满足的方程即为电磁场的运动规律。

3.主要内容

3.1 静电场(库伦定律)，静磁场(毕奥萨伐尔定律)的实验规律：两种场的基本特征及实验规律

3.2 变化电磁场的实验规律:

(1).法拉第电磁感应：B→E

(2).麦克斯韦位移电流：E→B

3.3 电磁场的基本规律

(1).麦克斯韦方程

(2).洛伦兹力公式

正文

1.1 电荷与电场

一.库仑定律

1.真空中静止点电荷 Q'对另一静止点电荷 Q 的作用力 F=$\frac{Q'Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$

场源电荷用 Q'表示，对应矢径为χ'；场点电荷用 Q 表示，对应矢径为χ。

2.点电荷：极限的概念

带电体的线度远远 < 带电体间的距离。

3.库仑力的物理本质

(1).直接的超距作用

(2).作用力通过场来传递

*对于静电荷来说没有区别，而对于迅变的电荷(电荷量与运动状况)，则是第二个。

4.不规则带电体的作用

(1).点电荷(场点)与带电体(场源)

带电体(场源)对观察者的坐标用χ'表示，点电荷场点用χ表示，则 d$\mathbf{F}$=$\frac{dQ'\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$=$\frac{\rho(\chi')dV'\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0|\chi-\chi'|^3}(\chi-\chi')$。

(2).带电体(场点)与带电体(场源)

带电体(场源)对观察者的坐标用χ_1表示，点电荷场点用χ_2表示，则 d$\mathbf{F}=\frac{Q_1\cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}$ $=\frac{\rho(\chi_1)dV_1\cdot\rho(\chi_2)dV_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}$。$\mathbf{F}=\iiint_{V_1}\iiint_{V_2}d\mathbf{F}$。【一个六重积分= =；这样表示不方便，以后我们有时候可能用$\int_V$ 来表示$\iiint_V$ ，物理学家比较懒，再加上不像数学家那么严谨】

二.静电场

1.假设电荷周围空间存在一种特殊物质，称为电场。

特征：对场内电荷有作用力。

2.电场强度

根据电荷在电场中的受力特点，$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}(x,y,z)}{q_0}$。

大小：单位电荷在该点的受力大小。

方向：正电荷在该点的受力方向。

3.电场强度的计算

(1).点电荷激发电场

$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\chi-\chi')}{|\chi-\chi'|^3}$；其中 Q 为场源电荷，$q_0$为场点电荷。

(2).点电荷系在 P 点激发场强

$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q_0}=\sum_i\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}=\sum_i\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\chi-\chi_i')}{|\chi-\chi_i'|^3}$；其中$Q_i$为场源电荷们。

(3).带电体激发场强

$\mathbf{E}_p=\iiint_{V'}\frac{\rho(\chi')dV'}{4\pi\varepsilon_0|\chi-\chi'|^3}(\chi-\chi')$；其中$\rho(\chi')dV'$可替换为$\sigma(\chi')dS'$、$\lambda(\chi')dL'$。

(4).带电体在电场中受力

带电体元在电场中受力：d$\mathbf{F}=\rho(\chi)dV\cdot\mathbf{E}$

带电体在电场中受力: $\mathbf{F}=\iiint_V\rho(\chi)dV\cdot\mathbf{E}$

单位体元带电体受力(力的体密度,描述带电体受力的分布情况)：$\mathbf{F}_0=\frac{d\mathbf{F}}{dV}=\rho(\chi)\mathbf{E}(\chi)$【虽然带电体的$\chi$处带电荷，但是场点，所以用$\chi$】

三.高斯定理

1.电通量.电场强度的通量

面元 d**S** 电通量 $d\Phi$=**E**·d**S**

2.真空中的高斯定理

通过任意闭合曲面的电通量=该曲面所包围的总电荷量代数和的 $1/\varepsilon_0$倍：

$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$；其中的$Q_i$的 Q 表示场源电荷；i 表示 inner，而不是第 i 个。【当然，为了方便，有些时候也喜欢用$\oint_S$　　表示$\oint\!\!\!\oint_S$　　】

连续分布电荷时，∑变成∫。

3.从高斯定理看静电场的特点

(1).库仑定律的局限性：适用于点电荷.分布电荷.均匀介质.稳恒电场.

高斯定理的普遍性：适用于点电荷.分布电荷.非均匀介质.非稳恒电场.

(2).静电场是有源场：

Q>0，$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}>0$，Q 为电通量之源。

Q=0，$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=0$，无电通量在面内剩余 or 丢失，电力线不中断。

Q<0，$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}<0$，Q 为电通量之尾(漏)。

4.高斯定理的微分形式

(1).导出

将闭合曲面缩小缩小但一直包含电荷：$\lim\limits_{S\to 0}\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\lim\limits_{V'\to 0}\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\chi')dV'=\frac{\rho(\chi_p')}{\varepsilon_0}\cdot\lim\limits_{V'\to 0}V'$。【由于$Q_i$为场源电荷，因而采用 $dQ_i=\rho(\chi')dV'$】

于是$\lim_{V'\to 0}\frac{\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}{V'}=\frac{\rho(\chi'_p)}{\varepsilon_0}$；根据散度的定义：div$\mathbf{f}=\lim_{\triangle V\to 0}\frac{\oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}}{\triangle V}=\nabla\cdot\mathbf{f}$，于是有$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi_P)=\frac{\rho(\chi'_p)}{\varepsilon_0}$。【注：由于$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\chi)$，因此其散度符号用的是$\nabla$，而不是$\nabla'$；之后我们所将介绍的$\mathbf{B}$也作为场(点)，而非场源，也满足$\mathbf{B}=\mathbf{B}(\chi)$】由于$V'$是以$S$为边界面的，二者相互关联，因此当$V'\to 0$时，$\rho=\rho(\chi')=\rho(\chi)$，$\therefore\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi')}{\varepsilon_0}$中的$\rho(\chi')$可写作$\rho(\chi)$。

当然也可以利用 Gauss 公式：$\iiint_{V'}\nabla\cdot\mathbf{E}\cdot dV'=\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\chi')dV'$。

(2).电场散度的意义

a.电荷与电场作用的局域性：χ'_p点处电场的空间变化率。

b.ρ只激发邻近的场，使开处附近的场增加或减少，无电荷无电场。

c.远处的场非电荷直接产生，是传播过去的。

四.静电场的旋度

1.静电场的环流定理

$\mathbf{E}$在l上的环积分，即$\mathbf{E}$的环量$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}\equiv 0$。可以通过保守场做功来理解和推导它。

2.静电场的旋度

(1).根据旋度的定义，$[\nabla\times\mathbf{E}(\chi)]_n=\lim_{\triangle S\to 0}\frac{\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}{\triangle S}\equiv\mathbf{0}$。

其中 **n** 同向于△ S的方向，与l构成右手螺旋。由于△ S方向任取，因此可去掉下标n，得到$\nabla\times\mathbf{E}(\chi)=\mathbf{0}$。【**0** 也是任意方向】

(2).当然也可以利用 Stokes 公式：$\oiint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}\equiv 0=\oiint_S \mathbf{0}\cdot d\mathbf{S}$。

这里的$\mathbf{E}(\chi)$中也用场点的χ，不像之前散度部分，高斯面内包含的电荷$\rho(\chi')$，是场源；这里的场景是静电场空间中任意地点取的，是场点。

五.静电场的基本特征与基本方程

1.基本特征：有源无旋

基本方程：$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$、$\nabla\times\mathbf{E}(\chi)=\mathbf{0}$。

2.适用范围

散度：静电场，时变场。

旋度：静电场适用，时变场不适用。

1.2 电流与磁场

一.稳恒电流的基本性质

1.电流强度

$I=\frac{dq_\perp}{dt}$单位时间内通过导体横截面的电量。

2.电流密度(精确描述导体内)

$\mathbf{J}(\chi',t)=\lim\limits_{\triangle S\to 0}\frac{\triangle I}{\triangle S_n}\cdot\mathbf{i}_0$；电流中的载流子本身相当于场源，因此用$\chi'$而非场点$\chi$。

大小：给定点垂直电流方向的单位面积的电流。

方向：$\mathbf{i}_0$方向，即电流方向。

通过面元的电流：$dI=\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=J\cdot dS\cdot\cos\theta=J\cdot dS_J$。

通过曲面的电流：$I=\iint_S\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$。

3.电流(面)密度与电荷(体)密度

令χ'处带电粒子 n 个/立方米，每个粒子带电量为 q，一秒通过$\triangle S_n$面的电量 $dI=d\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}nq=dS_n\cdot vnq$。【其中$\mathbf{v}=v\cdot\mathbf{i}_0$】

于是$\mathbf{J}(\chi',t)=\frac{dI}{dS_n}\cdot\mathbf{i}_0=vnq\cdot\mathbf{i}_0=\mathbf{v}nq=n(\chi',t)q\cdot\mathbf{v}(\chi',t)=\rho(\chi',t)\cdot\mathbf{v}(\chi',t)$。多种带电粒子的$\mathbf{J}(\chi',t)=\sum_i\rho_i\mathbf{v}_i$

4.面电流I_s与面电流(线)密度α_s (面电流(线)密度α_s可不是电流面密度J)

I_s：存在于导体表面薄层内，垂直通过横截线(母线)的电流;

【这里的下角标 s 应该是小写的，表示一段弧长 s；而之前的 I 都是面上的(体电流)，其如果有下标的话，才应用大 S 表示；这里的I_s相当于线上的(面电流)；当然也有可能这里为I_S，而之前的为I_V；不过可以确定的是，与I_s对应的$\boldsymbol{\alpha}_s$一定是小 s，因为与 I 对应的是 $\mathbf{J}$，而 $\mathbf{J}$ 不可能表示为$\mathbf{J}_V$，而应是$\mathbf{J}_S$】

$\boldsymbol{\alpha}_s$：垂直通过单位横截线上的I_s。

【正如之前的 I 是标量，$\mathbf{J}$ 是矢量，且二者满足 $I=\iint_S\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$一样；设$d\mathbf{S}=\mathbf{dh}\times d\mathbf{L}$，且其法向为$\mathbf{t}_1$，$I_s\cdot dh=I=\iint_S\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_L\boldsymbol{\alpha}_s\cdot(\mathbf{dh}\times d\mathbf{L})=\int_L(\boldsymbol{\alpha}_s\times\mathbf{dh})\cdot d\mathbf{L}=\int_L(\alpha_s\cdot dh)\cdot dL\cdot\cos<\boldsymbol{\alpha}_s\times\mathbf{dh},d\mathbf{L}>$，其中$<\boldsymbol{\alpha}_s\times\mathbf{dh},d\mathbf{L}>=<\boldsymbol{\alpha}_s,\mathbf{dh}\times d\mathbf{L}>=<\boldsymbol{\alpha}_s,\mathbf{t}_1>$，则$\alpha_s\cdot\cos<\boldsymbol{\alpha}_s\times\mathbf{dh},d\mathbf{L}>=\boldsymbol{\alpha}_s\cdot\mathbf{t}_1$，于是$I_s\cdot dh=\int_L(\boldsymbol{\alpha}_s\cdot dh)\cdot dL\cdot\mathbf{t}_1$，得到$I_s=\int_L\boldsymbol{\alpha}_s\cdot\mathbf{t}_1\cdot dL$】

5.稳恒电流所产生的电场、静电场、稳恒电场三者之间的关系

①.稳恒电流的电荷分布与时间无关，与静电场一样只是坐标的函数，因而其所产生的电场与静电场无异，都是稳恒电场($\frac{\partial E}{\partial t}=0$)；反过来说，稳恒电场只要求电荷分布不随时间变化，允许导体中存在不随时间变化的电流。

静电场所遵从的基本规律(高斯定理和安培环路定理等)在稳恒电场(包括稳恒电流产生的电场)中仍然成立。

②.区别 1：静电场电荷不流动，没有电流，不产生磁场；而稳恒电流产生静磁场(稳恒磁场)。

③.区别 2：静电场中导体内部场强处处为零,导体的电位处处相等，且在导体表面外附近，电场同导体表面垂直；但，稳恒电场中导体内部的电场强度可以不为零：$\mathbf{J}$

$=\sigma\mathbf{E}$，导体内两点之间可以有电位差，且在导体表面外附近，电场同导体表面一般不垂直。

为了维持稳恒电流$\mathbf{J}$，需要非静电力的作用。提供非静电力的装置是电源，它把其他形式的能量转换为电能以维持电荷的稳恒流动。

在电源内部，非静电力克服电场力的反作用，将正电荷由电源的负极移动到正极，消耗电源所贮存的能量,提高电荷的电势能；而在电源外的电路中,电场力的作用使正电荷由正极回到负极,其电势能降低,转化为电路中耗散的热和其他形式的能量。在整个路程中，电流形成闭合循环。

二.电荷守恒定律

1.电荷守恒定律

(1).无论经历何种变化，系统总的电荷量不变。

(2).封闭系统内增加 or 减小的电荷量，等于流入 or 流出系统电荷量。

积分形式：单位时间流出的电荷量$=\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{dQ_i}{dt}=-\frac{d\iiint_{V'}\rho(\chi',t)dV'}{dt}=-\iiint_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV'$；其中的$\rho$也表示 inner 的$\rho_i$。【我有点好奇为什么在此之前的 V 用 V′表示时，S 却不用 S′表示；或许是因为空间 V 中包含了场源们，而边界面 S 上无；另一种可能：之前的$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$用$\mathbf{S}$因为人家$\mathbf{E}$本身就$=\mathbf{E}(\chi)$，只有这里的$\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$的$\mathbf{J}$像$\rho(\chi')$一样是$\chi'$的函数：$\mathbf{J}(\chi')$，这里才应该用 S′】

上式中，若 V′为全空间，无穷远界面$S(S')$上电流为 0(边界面$S(S')$上$\mathbf{J}$最多只有切向分量，没有法向分量)，则$\frac{dQ_i}{dt}=\iiint_{V'}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV'=0$。

2.电荷守恒定律的微分形式

微分形式：应用 Gauss 定理，$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_{V'}\nabla\cdot\mathbf{J}dV'$，因此$\nabla\cdot\mathbf{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$。于是$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。【事实上，由于$\mathbf{J}=\mathbf{J}(\chi',t)$，从$\iiint_{V'}\nabla\cdot\mathbf{J}dV'$开始，$\nabla$也就应被相应地写为$\nabla'$，因而有$\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$；其中的$\rho$也是$\chi'$的函数：$\rho(\chi')$；$\mathbf{J}$、$\rho$就像兄弟，电流电荷嘛，都是场源；若$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 这么写的话，$\mathbf{J}$、ρ都必须是关于χ的函数。】

3.稳恒电流的条件

(1).稳恒电流：电流密度分布不随时间改变：$\mathbf{J}(\chi',t)=\mathbf{J}(\chi')$

(2).电流稳恒条件：$\frac{\partial \mathbf{J}(\chi',t)}{\partial t}=0$

而$\mathbf{J}(\chi',t)=\rho(\chi',t)\cdot\mathbf{v}(\chi',t)$，那么$\frac{\partial \mathbf{J}(\chi',t)}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot\mathbf{v}+\rho\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=0$。又因为在恒定电流时有$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=0$，因此$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$。将其代入电荷守恒的微分形式$\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$中去，可得到$\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')=0$，即$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)=0$。【当然，恒定电流事实上直接对应着$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}=0$、$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$、$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=0$，就不需要这么多推导了】

$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)=0[\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')=0]$表示稳恒电流分布无源，其流线必为闭合曲线。

三.Biot-savart 定律

1.磁场，是存在于电流周围的真实物质，由电流激发。

(1).电流元$=Id\mathbf{L}=\mathbf{J}dV$；其中$\mathbf{J}=\mathbf{J}(\chi',t)$、$I=I(\chi',t)$。

(2).磁力.电流与电流之间 or 电流与磁场之间的作用力.称为安培力。

(3).静磁场.磁场分布与时间无关，由**稳恒电流**激发。

2.磁场的描述

(1).磁场的特点

①.对电流元有力的作用。

②.对载流线圈有力矩的作用。

③.对运动电荷有力的作用。

(2).实验总结电流元 **j**dV 在磁场中受力

$d\mathbf{F}=\mathbf{J}(\chi',t)\cdot dV\times\mathbf{B}(\chi,t)$，其中源(场源)J用$\chi'$表示，场(场点)B 用$\chi$表示。

(3).磁感应强度的定义

B 的大小：$B=\frac{dF_{max}}{IdL}=\frac{dF_{max}}{JdV}$

B 的方向：d**F**×Id**L** 或 d**F**×**J**dV 的方向

3.毕奥萨伐尔定律

实验表明，**稳恒电流**源产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{L}\times\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')dV'\times\mathbf{r}}{r^3}$。【$\mathbf{r}$里面有$\chi$，因此“左边用($\chi$)，右边用($\chi'$)”并非不和谐】

四.稳恒磁场的环量与旋度

1.安培定理(磁场环路定理)

磁感应强度沿闭合曲线的环量与通过闭合曲面的电流成正比：$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_0\sum I_i=\mu_0\iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$。【其中的$I_i$的 I、**J**表示场源，用$\chi'$表示；i 也表示 inner；但这里的$\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$中的S是以L为边界线的，因此原本是$\mathbf{S}'$的$\mathbf{S}$也可就取$\mathbf{S}$，且因此$\mathbf{J}$也可取$\mathbf{J}(\chi)$】

2.稳恒磁场的旋度

Stokes：$\iint_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_0\iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$，得到$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi')$。【这里像 $d\mathbf{B}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')dV'\times\mathbf{r}}{r^3}$一样，左边是场点($\chi$)，右边是场源($\chi'$)；但由于S以L为边界线、且环形区域S趋近于一个点，因此χ'也可写作χ】于是$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$。

磁场是有旋场。

五.稳恒磁场的通量与散度

1.磁通量

$d\phi_m=\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$；$\phi_m=\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$

【m 意味着 magnetic，正如$\Phi=\phi_e$中的 e 意味着 electronic 一样；这里的$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$像之前的$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$一样，都用的$\mathbf{S}$而不是$\mathbf{S}'$；它们和稳恒电流处的$\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$中本该是$\mathbf{S}'$的$\mathbf{S}$不同】

2.磁场高斯定理

$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$

这是由于：磁力线在任何地方不中断。

3.磁场散度

根据 Stokes 定理，$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\cdot dV=\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$，因此$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$。【当然也可以用定义：$\nabla\cdot\mathbf{B}=\lim\limits_{V\to 0}\frac{\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}}{V}=0$】

4.稳恒磁场的基本特征与基本方程

(1).基本特征：无源有旋

基本方程：$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$、$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$。

(2).适用范围

散度部分：普遍适用。

旋度部分：静磁场适用，时变场不适用。

六.用 BS 定律来推导磁场的旋度与散度

基于$\mathbf{B}(\chi)=\iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')dV'\times\mathbf{r}}{r^3}$，有：

1.如果矢量场可表示为某一另矢量的旋度

即$\mathbf{B}(\chi)=\nabla\times\mathbf{A}(\chi)$，那么$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}(\chi)=0$就能很容易得出了，我们来找找看$\mathbf{A}(\chi)$是什么形式：

✓ (1).根据$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，有：$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}[\mathbf{J}(\chi')\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}]dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}[\mathbf{J}(\chi')\times(-\nabla\frac{1}{r})]dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}[\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{J}(\chi')]dV'$

✓ (2).仿照$\nabla\times(\phi\mathbf{f})=\nabla\phi\times\mathbf{f}+\phi\nabla\times\mathbf{f}$，有$\nabla\times(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))=\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{J}(\chi')+\frac{1}{r}\nabla\times\mathbf{J}(\chi')$，然而其后一项中的$\nabla\times\mathbf{J}(\chi')=0$，因为场源$\mathbf{J}(\chi')$只是$\chi'$的函数，而$\nabla$是对$\chi$中的 x,y,z 作用。因此$\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{J}(\chi')=\nabla\times(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))$；将其代入(1).末式，即有：

✓ (3).$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}[\nabla\times(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))]dV'=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'=\nabla\times\mathbf{A}(\chi)$，其中$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'$

2.再利用已推得的$\mathbf{A}(\chi)$，来推知$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$

✓ (1).$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}(\chi))=(\nabla\cdot\mathbf{A}(\chi))\nabla-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}(\chi)$

✓ (2).①.$\nabla\cdot\mathbf{A}(\chi)=\nabla\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'$

②.仿照$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f})=\nabla\phi\cdot\mathbf{f}+\phi\nabla\cdot\mathbf{f}$，有$\nabla\cdot(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))=\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')+\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi')$，同样的道理，$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi')=0$，因此$\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}=\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')$

③.代入①.后再利用$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}$，得$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')\cdot dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla'\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')\cdot dV'$

④.再仿照$\nabla'\cdot(\phi\mathbf{f})=\nabla'\phi\cdot\mathbf{f}+\phi\nabla'\cdot\mathbf{f}$，有$\nabla'\cdot(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))=\nabla'\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')$，根据静磁场必然是由稳恒电流创造的，而稳恒电流条件下，$\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')=0$，因此后一项仍=0，于是$\nabla'\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')=\nabla'\cdot(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))$。

⑤.代入③.后利用 Gauss 定理：$-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla'\cdot(\frac{1}{r}\mathbf{J}(\chi'))\cdot dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot d\mathbf{S}'$，仍然像稳恒电流上面的电荷守恒定律所示，由于积分区域V'包含所有电流J在内，没有电流流出dS'，因此该积分值=0。

所以$\nabla\cdot\mathbf{A}(\chi)=0$，于是$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}(\chi)$。【其实看$(\nabla\cdot\mathbf{A}(\chi))\nabla-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}(\chi)$这个结构就知道，前面一项要是不为 0，世界就乱套了】

✓ (3).①.$\nabla^2\mathbf{A}(\chi)=\nabla^2\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla^2\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}\cdot dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\mathbf{J}(\chi')\cdot\nabla^2\frac{1}{r}\cdot dV'$

②.根据$\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}$(不论 r 是否=0)，变为$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\mathbf{J}(\chi')\cdot\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot dV'$，当 r≠0 时，由于$\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0$，该式恒=0。

所以要想它不为零，必须有 r=0，即$\mathbf{r}=(\chi-\chi')=\mathbf{0}$，即$\chi=\chi'$。这意味着被积函数只可能在$\chi'=\chi$点上不为 0；因此体积分只需要对包围$\chi$点的小球体内积分，且$\mathbf{J}(\chi')=\mathbf{J}(\chi)$。

③.将$\mathbf{J}(\chi)$替换$\mathbf{J}(\chi')$后提出来：$\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\chi)\iiint_{V'}\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\chi)\oiint_{S'}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{S}'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\chi)\oiint_{S}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{S}=-\mu_0\mathbf{J}(\chi)$【$\mathbf{r}$的始点由于在$\mathbf{S}'$内部而也在$\mathbf{S}$内部，因此$\oiint_{S}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{S}=4\pi$】【而至于为嘛$d\mathbf{S}'=-d\mathbf{S}$：$\mathbf{r}$是源点$\chi'$指向场点$\chi$的，而$d\mathbf{S}'$是从场点$\chi'$向外指向的，$d\mathbf{S}$是

从χ向外指向的= =，虽然这么一解释，看上去好像$\oiint_{S'}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{S}'=4\pi$才对；可能是$\mathbf{J}(\chi)$上的 problem？】

因此$\nabla^2\mathbf{A}(\chi)=-\mu_0\mathbf{J}(\chi)$，于是$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=-\nabla^2\mathbf{A}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$。

****

例.I 均匀分布于半径为 a 的无限长直导线内，求空间各点的 B，并计算旋度。

(1).$\mathbf{B}_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\phi$(r>a)，$\mathbf{B}_{内}=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\phi=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\mathbf{e}_\phi$(r<a)。

(2).柱坐标系下的$\nabla\times\mathbf{f}=(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\phi}-\frac{\partial f_\phi}{\partial z})\mathbf{e}_r+(\frac{\partial f_r}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial r})\mathbf{e}_\phi+[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot f_\phi-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\phi})]\mathbf{e}_z$

因此$\nabla\times\mathbf{B}_{外}=\mathbf{0}$；$\nabla\times\mathbf{B}_{内}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2})\mathbf{e}_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\mu_0 Ir^2}{2\pi a^2})\mathbf{e}_z=\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}=\mu_0 J\mathbf{e}_z=\mu_0\mathbf{J}$。可以看出，旋度也有局域性，没有电流的地方就没有旋度；另外它也检验了$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$。

1.3 Maxwell 方程组

总结之前 1.1 和 1.2 的结论如下：

- $\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$
- $\nabla\times\mathbf{E}(\chi)=\mathbf{0}$（待修正）
- $\nabla\cdot\mathbf{B}(\chi)=0$
- $\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$（待修正）

这四条总的来说适用于真空、稳恒的情形(虽然其中的第一、三这两个散度方程普遍适用，但由于木桶效应，要一起用它们的话，必须将就最严条件)。

为了从**特殊**向**普遍**过渡，我们需要去掉真空、稳恒这两个限制。我们先从稳恒上下手。——并且先从待修正的第二、四方程中的二号下手。

一.电场和磁场是统一的整体

实验发现：电荷激发电场，电流产生磁场；变化的电磁场可互相激发。

因此电场和磁场是统一的整体：电磁场。

二.变化电磁场的新规律

(1).变化磁场激发激发电场(法拉第电磁感应→楞次定律)

(2).变化的电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假说)

三.电磁感应定律

1.$\varepsilon=-\frac{d\phi_m}{dt}$

大小：闭合线圈感应电动势与磁通量的变化率成正比。

方向：与磁通量的变化方向相反。

2.推广的电磁感应定律 楞次定律

非静电场中，$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$不再恒=0，而是有$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\varepsilon=-\frac{d\phi_m}{dt}$；得到$\iint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=-\frac{d\phi_m}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=-\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$。【积分是对坐标积分的，求导是对时间求导的，二者相互独立，因此可把求导符号放在积分符号里面/下面】

于是$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$。

四.位移电流

1.非稳恒场下的矛盾

对四号方程$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$两边对$\chi$取散度：得$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)$，方程左边=0，得到$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)=0$。这恰好是稳恒电流条件(or 结果)。

然而非稳恒电流时，电荷守恒定律的普遍形式(微分形式)为：$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，因此$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)=-\frac{\partial\rho(\chi)}{\partial t}$。为了得到它，四号方程右边不能只是$\mu_0\mathbf{J}(\chi)$，我们考虑从$\mathbf{J}(\chi)$下手。

2.位移电流$\mathbf{J}_D$的引入 (D：displacement)

(1).既然对$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0\mathbf{J}(\chi)$取散度，得到的$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi)=0$是稳恒条件下的，

那么我们对右式加了一项后的方程$\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0[\mathbf{J}(\chi)+\mathbf{J}_D(\chi)]$取散度，看看能不能通过$\nabla\cdot[\mathbf{J}(\chi)+\mathbf{J}_D(\chi)]=0$得到普遍形式$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。

(2).确定$\mathbf{J}_D$

很容易通过对比(1).的后两个方程，得到$\nabla\cdot\mathbf{J}_D(\chi)=\frac{\partial\rho(\chi)}{\partial t}$。又因麦克斯韦方程组的一号：$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$，在变化的电场下仍然成立，因此$\nabla\cdot\mathbf{J}_D(\chi)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\nabla\cdot\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$。于是$\mathbf{J}_D(\chi)=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$。【同样是对坐标的积分，对时间的求导，二者相互独立】

【在我们修正完了这里的稳恒，以及之后的真空后，这里所引用的$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$在介质中会被写为$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$，即$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$；那么在修正完真空后，理应再回到这里，对$\mathbf{J}_D$进一步做修正的：$\nabla\cdot\mathbf{J}_D=\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，以至于$\mathbf{J}_D=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$；之所以没有，我估计有俩原因：主要原因是：$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\approx\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$，因为$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$中的$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\approx0$；第二个原因是 imaginary 的：或许为了保证理论整体的自洽，不能够循环引用之后修正的东西来修正之前的东西：A 推出 B，之后若我们通过其他途径修正了 A，则还得将修正后的 A 代入之前的“A→B”中，以得到修正后的 B；但若在修正 A 的过程中引用了 B，那这就似乎变成了个贪吃蛇 or 吃豆豆：自己咬自己尾巴，的循环。——不过幸运的是，我们在得到$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$的一路上，均没有用到$\mathbf{J}_D(\chi)=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$，以及其所对应的真空下的方程四；所以$\mathbf{J}_D=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$是最终的正确答案。

——但其实之后在介质情况下的 Maxwell 方程组的第四个方程中，$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$会被表示为$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P$，也就是说，之后我们也是考虑了$\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$以外的成分的，只不过仍延续之前的认识：$\mathbf{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$，用的是$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P$而不是统一地用$\mathbf{J}_D$来表示$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$：后者中$\mathbf{J}_D$与$\mathbf{J}_P$是包含关系，而前者是并列关系；本质上应该是包含关系，但科学的发展有时候也不科学- -，所以应用$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P$并列来表示$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$这个曾经的$\mathbf{J}_D$，即那个曾经与$\mathbf{J}_f$构成一个连续量的它。(如果保持$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0$的话，确实是$\mathbf{J}_f$与$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$构成一个闭合量，即与这里所误言的$\mathbf{J}_D$构成一个闭合量；或者说与之后正确的$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$构成一个闭合量，详情请见下一段：)

——呃呃呃，事实上之后是对的，这里在认知上出了点幺蛾子= =：$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$在介质中被写为$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$后，不要再写为$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$！，因为我们不该再沿用这里真空时候的$\nabla\cdot\mathbf{J}_D=\frac{\partial\rho_f}{\partial t}$，而是应该对应地写为：$\nabla\cdot\mathbf{J}_D=\frac{\partial(\rho_f+\rho_P)}{\partial t}$，以及介质中的连续性方程$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial(\rho_f+\rho_P)}{\partial t}=0$！因此$\mathbf{J}_D$仍$=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$！！！那么$\mathbf{J}_f$之后仍将只与$\mathbf{J}_D$一起构成连续闭合量，只不过$\mathbf{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}$中的$\mathbf{E}(\chi)$在含义上更广了——它包含了$\rho_P$作为场源所激发的那部分电场：$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$】

(3).$\mathbf{J}_D$的本质

变化的电场$\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}(=\mathbf{J}_D)$与传导电流$\mathbf{J}(\chi)$构成闭合量。

(4).安培环路定理

由于我们的J已经拓展为了$\mathbf{J}+\mathbf{J}_D$；因此我们需要将其由来也进行更正：$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_0\sum I_i=\mu_0\iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$会变为$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L}=\mu_0\sum[I+I_D]=\mu_0\iint_S [\mathbf{J}+\mathbf{J}_D]\cdot d\mathbf{S}$。

五.麦克斯韦方程组

1.总结三.和四.的结论如下：

- $\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}(\chi)=0$
- $\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0[\mathbf{J}(\chi)+\mathbf{J}_D(\chi)]=\mu_0[\mathbf{J}(\chi)+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}]$

2.麦克斯韦方程组的意义

(1).电磁场最基本最普遍的方程组，概括了电磁学所有的规律。

(2).反映了一般情况下，电荷产生电场，电流产生磁场的规律，以及电磁场内部电场和磁场相互激发的规律，运动的规律。

(3).无电荷区和无电流区，电场磁场可以存在，电场磁场互相激发，形成统一的电磁场，并导致电磁场的传播。

(4).揭示了电磁场的相互作用是其存在与运动的原因。电荷电流仅以一定的形式作用于电磁场。

六.洛伦兹力公式

库仑力：$d\mathbf{f}_c=\rho dV\mathbf{E}$；【c：库伦】

安培力：$d\mathbf{f}_m=\mathbf{J}dV\times\mathbf{B}$；【m：magnetic】

总的受力：$d\mathbf{f}=d\mathbf{f}_c+d\mathbf{f}_m=(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B})dV$；

力密度：$\mathbf{f}_0=\frac{d\mathbf{f}}{dV}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\rho\mathbf{E}+\rho\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\rho(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$；【1.2 中：$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$】

带电量为 q 的带电粒子受电磁力：$\mathbf{f}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$，适用于任何速度带电粒子。

七.电磁现象的基本规律，电动力学的基础

麦克斯韦方程组

洛伦兹力公式

电荷守恒定律【就是那个J唯独用$\mathbf{J}(\chi')$来表示的那一节，气不气】

1.4 介质的电磁性质

总结之前 1.3 的结论如下：

- $\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$（待修正）
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}(\chi)=0$
- $\nabla\times\mathbf{B}(\chi)=\mu_0[\mathbf{J}(\chi)+\mathbf{J}_D(\chi)]=\mu_0[\mathbf{J}(\chi)+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\chi)}{\partial t}]$（待修正）

为了从**特殊**向**普遍**过渡，我们在去掉了稳恒后，接下来就要去掉真空。我们先从待修正的第一、四方程中的一号下手。

一.电磁介质

1.电磁介质：与电磁场能够发生作用的物质统称为电磁介质

电介质：绝缘介质，导体介质，半导体介质

磁介质：顺磁体，抗磁体，铁磁体。

2.介质是带电的粒子系统

(1).介质组成：分子原子——原子核电子——带电粒子系统。

(2).介质电荷：自由电荷：可以自由宏观运动的电荷；束缚电荷：不能...

之前$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$中的ρ，就是自由电荷。以后我们会对其加个角标f：$\rho_f$，以表示free。

(3).介质的微观电磁场. 不予考虑

宏观物理量：微观上相当大，宏观上相当小的体积内，微观物理量的统计平均值。

3.介质与电磁场的相互作用

介质(电荷,电流)+电磁场($\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$)，相互作用：

(1).极化现象：介质内的**正负电荷分开** or **电矩取向变化**引起的附加场$\mathbf{E}'$，$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'$

(2).磁化现象：介质内**分子电流取向改变**，产生宏观磁矩，引起附加场$\mathbf{B}'$。

(3).导电现象：引起**电荷宏观定向移动**，形成电流。

作用过程：动态→稳态

介质加$\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$——使介质内电荷,电流变化，产生附加场$\mathbf{E}'$+附加场$\mathbf{B}'$+形成电流 **J** ——附加场反作用于$\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$以及电荷,电流。——最终电荷,电流以及$\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$停止变化。

二.介质的极化

1.极化现象

电介质分类：

有极分子(极性分子)：+ −(正负电中心不重合)，**p**=q**L**，如NO,CO。

无极分子：±(正负电中心重合)，**p**=0，如N_2,H_2,CO_2。

无电场下的有极分子,无极分子，均呈电中性。电场作用时介质边缘出现电荷分布。

2.极化强度与极化电荷

(1).(电)极化强度：描述极化程度的宏观物理量 **P** = 单位体积内的电矩矢量和$\frac{\sum_i \mathbf{p}}{\triangle V}$

(2).极化电荷：介质内部由极化产生的非自由电荷(束缚电荷)Q_P【P:电极化强度 **P**】

(3).极化电荷密度ρ_P：

介质内，某曲面 S 上的面元 d**S**；介质极化后，一些分子电偶极子跨过 d**S**(正负电荷连线被 d**S** 所分隔)。当偶极子的负电荷处于体积△V=**L**·d**S** 的平行六面体元内(图中△V 以 d**S** 为一个底面，且 **L**·d**S**>0，各偶极子的电矩方向 **L** 与 d**S** 夹角<90°)时，同一偶极子的正电荷必定在 d**S** 端面另一侧，即六面体元外部(因为该体积元的各棱长 or 母线恰好是 **L**，且各偶极子 **p**=q**L** 中负电荷指向正电荷的 **L** 均//且同向于该体积元的棱)，即穿出了 d**S** 面。

那么 **L**·d**S** 内通过界面 d**S** 穿出的正电荷$\mathrm{d}_{Q_{出}}$=(n·**L**·d**S**)·q=n·**p**·d**S**=**P**·d**S**【可见$\sigma_P=\frac{\mathrm{d}Q_{Q_{出}}}{\mathrm{d}S}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$】，因此穿出△V 的 Q 也$=\mathrm{d}_{Q_{出}}=\iint_{\mathrm{d}S}\mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oiint_S\ \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$，其中$S$为六面体元△V 的表面($S$也是微观的)。【该式子也适用于穿出宏观体积 V 对应的宏观面S的正电荷$=Q_{出}=\oiint_S\ \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$——因为在介质内部取定一个高斯面，则正负电荷都在面内的电偶极子们对该区域的 **P**or 束缚电荷的贡献为 0，只看被所选高斯面拦腰截断的 **p**=q**L** 们；不过接下来的推导其实停留在微观的$\oiint_S\ \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$更好】

由于介质的电中性，V 内/S 面内净剩余的负电荷，即面内的极化电荷/束缚电荷Q_p便满足：$\iiint_V\ \rho_P\mathrm{d}V=Q_P=-Q_{出}=-\oiint_S\ \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V\ -\nabla\cdot\mathbf{P}\mathrm{d}V$。于是$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$。

(4).极化电荷面密度σ_P：

定义：分界面两侧单位面积内，一定厚度薄层内出现的电荷。

将之前△V=**L**·d**S** 的平行六面体元的 d**S** 设为分界面，其对面与之平行的表面(下表面)设为$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$，d**S** 指向$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$的方向，为$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$的法向，即$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$对△V 的外法线方向，于是有$\mathrm{d}\mathbf{S}_1=-$d**S**；不过这里的棱长不一定是 **L**，可以任意短；再将一个上表面$\mathrm{d}\mathbf{S}_2$//且同向于 d**S**，下表面为 d**S**，其余属性与之前的平行六面体元(作为分界面之下的薄层)相同的平行六面体元，d**S** 贴 d**S** 地放置在一起，作为 d**S** 这个分界面上面的薄层。——这样一来，$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$和$\mathrm{d}\mathbf{S}_2$就成为了这个“双层薄层”的上下外表面。

此时，穿出的$\mathrm{d}\mathbf{S}_2$面正电荷$=\mathbf{P}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_2=\mathbf{P}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$；穿出的$\mathrm{d}\mathbf{S}_1$面正电荷$=\mathbf{P}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_1=-\mathbf{P}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$；于是留在薄层内的总(负)电荷$\sigma_P\cdot\mathrm{d}S=-(\mathbf{P}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_2+\mathbf{P}_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_1)=-(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$；因此面内的束缚电荷面密度$\sigma_P=-(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)\cdot\mathbf{e}_n$。【其实极化/束缚电荷$Q_P,\sigma_P$并不一定是负电荷；并且即使是面内的，束缚电荷$Q_P,\sigma_P$也不一定是带负电的；我们喜欢$\mathbf{P}_2$在前面，因为总是“初-$\mathbf{P}_1$”指向“末-$\mathbf{P}_2$”，以后的物理情景也喜欢 1 号指向→2 号】

3.极化电流

(1).产生：当外电场发生变化时，偶极子发生了变化，极化强度也发生了变化，这种变化产生的电流，叫极化电流I_P。【**E** 变成了时间的函数 **E**(t)→**P**(t)→$\frac{dQ_P}{dt}$≠0】

(2).大小：

①.穿出 S 面的极化电荷$Q_P=\iint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}$。

【这里的束缚电荷Q_P不像之前留在面内的Q_P一样了，反而就是$Q_{出}$($Q_{出}$也属于束缚电荷，也是Q_p的一种)；另外，这里又不是封闭曲面，何来内外之分= =；并且，这里考虑的是量值，而$Q_{出}$一般为正，所以常用$Q_{出}$来计算穿出面 S 的极化电荷Q_P的量】

S 面外的极化电荷面密度$\sigma_P=\frac{dQ_P}{dS}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$；可见$\iint_S \sigma_P\cdot dS+\iiint_V \rho_P dV=\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}-\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}=0$，即穿出闭合曲面的束缚电荷总量，与面内束缚电荷总量等值异号。——这说明极化过程遵循电荷守恒。【若进一步地极化电荷分布有球对称性的话($\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$在面 S 上各处相等、$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$只是 r 的函数)，则它们在球外的电场相互抵消，只剩总自由电荷$\rho_f=\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\rho_P$集中于球心产生的外场(由于$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$只是 r 的函数，则根据$\rho_f=\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\rho_P$，自由电荷$\rho_f$的分布也只与 r 有关，也球对称分布)。】

②.(穿出)S 面的极化电流$\iint_S \mathbf{J}_P\cdot d\mathbf{S}=I_P=\frac{dQ_P}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$，因此极化电流面密度$\mathbf{J}_P=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$。【$I_P$中的 **P** 是大写的，因为极化电流是宏观的，对应宏观的 **P** 而非微观的单个电偶极子的 **p**，同样的道理也适用于$\mathbf{J}_P,Q_P,\sigma_P$；以及接下来要介绍的与 **M** 有关的量们】

4.有介质的电场的散度

现在我们来修正一号方程的右边$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$，其中原来的ρ记为$\rho_f$，表示自由电荷体密度：$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f(\chi)+\rho_P(\chi))$，而$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$，因此$\nabla\cdot[\varepsilon_0\mathbf{E}(\chi)+\mathbf{P}(\chi)]=\rho_f(\chi)$，令**电位移矢量**$\mathbf{D}(\chi)=\varepsilon_0\mathbf{E}(\chi)+\mathbf{P}(\chi)$，即有$\nabla\cdot\mathbf{D}(\chi)=\rho_f(\chi)$。【从这里可看出，为什么$\rho_P$在含义上也得是面内的：因为为了要和$\rho_f$相同属性($\rho_f$就是面内的)，才能在整体上合并为对$\rho_f$的拓展：ρ；所以这样意义下的(面内的)$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$、$\sigma_P=(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\cdot\mathbf{e}_n$，均多了个负号】

【$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f(\chi)+\rho_P(\chi))$其中的$\rho_P$是面内靠近面的，若取的面是闭合的(高斯面)，则对方程两边进行高斯面内体积分，实质上对于$\rho_P(\chi)$而言，我们只在高斯面表面内进行；那么在转化为面积分后，$Q_P=\iiint_V \rho_P dV=\iiint_V -\nabla\cdot\mathbf{P}dV=-\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}$，其

中的$\mathbf{P}$也是靠近所取高斯面的；因此在$\nabla\cdot\mathbf{D}(\chi)=\rho_f(\chi)$的积分形式$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\rho_f$中，$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$只需考虑积分曲面 S 附近的$\mathbf{E}$和$\mathbf{P}$，即$\mathbf{D}$本身在含义上指的是 S 附近的$\mathbf{D}$；因此$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$中的$\varepsilon$也是积分曲面 S 附近的】

【在实际问题中，ρ_f易测定，而ρ_P较难，这也是为什么要将其从方程右边消去，以另一种形式(存在于)撤到方程左边的一个原因；除了数学上的简洁外】

5.D,E,P 三者的关系

各项同性的线性介质中，P,E成线性关系：$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$。因此$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}=\varepsilon\mathbf{E}$。其中，$\varepsilon_r=1+\chi_e$，称为相对介电常数；而$\chi_e$称为介质的极化率。【根据线性均匀介质中$\chi_e$为常数，用$\nabla\cdot$作用于$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$两边，可得$\nabla\cdot\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\nabla\cdot\mathbf{E}$，于是$-\rho_P=\varepsilon_0\chi_e\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f+\rho_P)$，可得$-\rho_P=(\varepsilon_r-1)(\rho_f+\rho_P)$，即$\rho_P=(\frac{1}{\varepsilon_r}-1)\rho_f$，以及$\rho_f=\frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\rho_P$(可见$\rho_f,\rho_p$二者是异号的，这对应着这里的$\rho_p$是$\rho_f$邻近的极化电荷，而不是远处端面上的)；当然你也可以用$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}=\varepsilon\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f+\rho_P)=\varepsilon_r(\rho_f+\rho_P)=\rho_f$等来得到它】

三.介质的磁化

1.磁化现象

(1).分子电流与分子磁矩 **m**

分子电流的各种运动形成电流总和。

分子磁矩 i**a**=**m**【**a** 为面元矢量】

(2).介质磁化

无外场 $\mathbf{B}_0=0$ $\sum\mathbf{m}_i=\mathbf{0}$ 不显磁性

有磁场 $\mathbf{B}_0\neq0$ $\sum\mathbf{m}_i\neq\mathbf{0}$ 显磁性

(3).磁化强度 **M**

$\mathbf{M}=\frac{\sum_i\mathbf{m}_i}{\Delta V}$

2.磁化电流J_M

设 S 为介质内部的一个曲面，将其边界线 L 放置在纸面上，设该曲面边界线 L 的绕向为逆时针，则曲面正向(正面)朝着纸面外。介质中的环形电流所在平面并非一定要⊥纸面，其以及其面元矢量 **a**，在空间中的取向，均任意；

现在我们考虑从 S 背面穿出(而非从正面穿进 S)的总磁化电流I_M(M 大写)——若分子电流环 L′的面元 S′被 L 所穿过，则其 i 便对I_M有贡献(是正是负不一定)；其他空间位置上的分子电流，要么根本不穿过 S，要么穿过 S 两次，一次进一次出，均对I_M无贡献。因此通过 S 的总的磁化电流I_M=**S 的边界 L 所链环着的分子数目**乘以每个分子的电流 i。

现假设在外场$\mathbf{B}_0$作用下，各个分子电流取向趋于一致，面元矢量 **a** 的取向一致，则以 S 的边界 L 上各个点为圆心，在⊥ **a** 的平面上，做与分子电流环 L′等大同向(线圈平面和面法向平行于 L′们的平面和 S′的法向的圆环们(但不管其绕向)，这些圆环构成绕 L 一周的斜连通(其实并不连通)圆柱管道——于是，只有圆心在该 pipe 内的分子电流，才被 S 的边界 L 所穿过，才对I_M有贡献；并且在这些 pipe 内的分子电流中，只有 **a** 与 d**L** 夹角<90°，即 L′的绕向与 d**L** 成右手螺旋关系的分子电流，才对I_M有正的贡献。【这有点像平均碰撞频率的推导过程】

单位体积内的分子电流个数=n·dV=n**a**·d**L**，则单位体积内对I_M的贡献为dI_M=n**a**·d**L**i=n·**m**·d**L**=**M**·d**L**；则穿出 S 面磁化电流I_M=**S 的边界 L 所链环着的分子电流**=$\oint_L \mathbf{M}\cdot d\mathbf{L}=\iint_S \nabla\times\mathbf{M}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{J}_M\cdot d\mathbf{S}$。

于是$\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}$。【由于$\mathbf{M}$只在 **S 的边界 L** 上存在(被 **L** 链环着)，因此$\mathbf{M}$只存在于 **S 的边界**附近，那么$\mathbf{J}_M$也应只存在于 **S 的边界**，而不会在内部；只不过积分曲面$\mathbf{S}$包括了内部而已，$\mathbf{J}_M$在那些地方(的积分)应该=0】

3.磁场强度 H

介质总电流：传导电流$\mathbf{J}_f$(这就是我们之前的$\mathbf{J}$)，位移电流$\mathbf{J}_D$，诱导电流(包含了极化电流$\mathbf{J}_P$与磁化电流$\mathbf{J}_M$)

于是第四个方程$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\mathbf{J}_D)$将被改写为：$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}_f+\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P+\mathbf{J}_M)$。其中的$\mathbf{J}_P,\mathbf{J}_M$像之前的$\rho_P$一样，没法直接从实验中测定，因此我们尝试着消去它们：

对于$\mathbf{J}_P=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$，它可以直接在方程右边和$\mathbf{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$合并：$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P=\frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$。

对于$\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}$，像$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}$一样将其移到方程左边：$\nabla\times(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M})=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，定义$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}=\mathbf{H}$，于是$\nabla\times\mathbf{H}=(\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t})$。

4.**H**,**B**,**M** 三者的关系：

$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$(像$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$)，于是根据$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}$，得$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})=\mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}=\mu_0\mu_r\mathbf{H}=\mu\mathbf{H}$。其中，也有$\mu_r=1+\chi_m$，称为(介质的)相对磁导率；$\chi_m$称为介质的磁化率。【注：$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$很像$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$】

四.介质中的麦克斯韦方程组

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

——我有点好奇：二号方程$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$，只在第一次大修(稳恒)中变动过，之后没变动过；一号方程只在第二次大修(真空)中动过；四号方程在两次大修中均动过；而三号方程从一开始就没变动过，两次大修都没它的事！

——从另一个分类角度(标准)，在提出了初始的 Maxwell 方程后，第一次大修(稳恒)中动摇了二、四号方程；第二次大修(真空)中动摇了一、四号方程。

五.介质的电磁性质

1.各向同性介质(=线性、均匀)

实验总结：$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$、$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$；——适用于静电场、静磁场、缓变场【$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$适用于静电场、静磁场(静磁场可看作恒定电流场，电荷分布、电场分布，均与静电场相同)；$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$不仅适用于静电场(静电场中电荷静止，没有电流，没有磁场)，也用于静磁场；$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$适用于静磁场(恒定电流产生的场)】，此时的它们才是每时每刻同向的、且其幅值才每时每刻都按照此比例关系。

迅变场：$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$变化快，**P**,**M** 跟不上，时间滞后——比如若$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(wt)$,$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0\cos(wt)$[这里面的$\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$并不是外场而是有向幅值的意思，不过二者都是恒定矢量哈]，则原来的$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$和 $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$，就会滞后为$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}_0\cos(wt-\theta)$和 $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}_0\cos(wt-$

θ)，并且其中的χ_e,χ_m，也将变得和w有关：$\chi_e(w),\chi_m(w)$，且因$\varepsilon_r=1+\chi_e,\mu_r=1+\chi_m$，$\varepsilon,\mu$也都将变得与w有关：$\varepsilon(w),\mu(w)$。

2.各向异性线性介质(包括线性、不均匀，以及非线性)

线性、不均匀：Take "$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$" for example，在之前我们将$\chi_e$认为为一个标量，但形式上却对其加粗表示了，这已经说明它是个**张量**了——只不过之前只是**三维的 0 阶张量**：有$3^0=1$个分量。

不同方向磁化率极化率不同：我们将$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$写成张量形式，其中$\mathbf{P},\mathbf{E}$是 3×1 的矩阵，是一阶张量，有$3^1=3$个分量，即也就是矢量；而$\chi_e$是个 3×3 的矩阵，是二阶张量$\chi_{ij}$，其分量的下角标为两个数字的序列，有$3^2=9$个分量，形式上便是个矩阵——$\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\\\mathbf{P}_2\\\mathbf{P}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_{11}&\chi_{12}&\chi_{13}\\\chi_{21}&\chi_{22}&\chi_{23}\\\chi_{31}&\chi_{32}&\chi_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\\mathbf{E}_2\\\mathbf{E}_3\end{pmatrix}$，当然，因此便有$\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1\\\mathbf{D}_2\\\mathbf{D}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_1\\\mathbf{E}_2\\\mathbf{E}_3\end{pmatrix}$，其中的$\varepsilon_{ij}$也是个二阶张量。

非线性：更一般地，在强场下，线性的各项异性介质、线性的各向同性介质，都可能呈现非线性(此时均表现出不均匀、各向异性)的特征，此时$\mathbf{D}$、$\mathbf{E}$的关系式中将会出现诸如$\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{E}_j(\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j?)$等的高次项。

1.5 电磁场的边值关系

一.电磁场量在两介质分界面两侧的突变

在场的作用下，介质分界面出现束缚电荷和电流分布使界面两侧的场发生跃变。

1.电场在介质两侧的突变

外电场作用下，介质分界面上的束缚电荷使两侧的电场突变。

我们在极化电荷面密度σ_P处时，讲到面内的束缚电荷面密度$\sigma_P=(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\cdot\mathbf{e}_n$，而根据$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$，则若介质 1 的$|\chi_{e1}|>|\chi_{e2}|$，则$|\mathbf{P}_1|>|\mathbf{P}_2|$，于是$\sigma_P>0$。这意味着，当外场$\mathbf{E}_0$的方向从介质 1 穿过分界面到介质 2 时，分界面在介质 1 那侧感应出来的正电荷，要比其在介质 2 那侧感应出来的负电荷多(这样才能导致$\sigma_P>0$)；并且介质 1 内部的总场强$\mathbf{E}$要比介质 2 的$\mathbf{E}$大，何以见得呢?

——既然分界面在介质 1 那侧感应出来的极化电荷比在介质 1 侧感应出来的多，则其产生的附加场$\mathbf{E}'$也就更大，而两介质中的$\mathbf{E}_0$相同，产生的$\mathbf{E}'$与外场$\mathbf{E}_0$方向相反，根据$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'$，自然合场强就更小了——所以介质 2 中的$\mathbf{E}$更大一些，电场线也就越密集一些【这种理解下，介质 1 和介质 2 中的附加场，是同向的，且均各自由分界面两侧的各自的极化电荷激发；另一种理解是介质 1 和介质 2 中的附加场$\mathbf{E}'$均由两侧极化电荷合成后的σ_P创造，这样所得结果也一致，但似乎更正确一些= =】。

当然，利用这一节的二.1.电位移矢量 **D** 的法向边值关系：$\mathbf{D}_{2n}-\mathbf{D}_{1n}=\sigma_f=0$，可以直接得到这一结果：$\mathbf{D}_n$相同，$\chi_e$大的$\varepsilon$大，$\mathbf{E}_n$小；或者直接用其推论：$\varepsilon_0(\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{E}_{1n})=\sigma_f+\sigma_P=\sigma_P>0$ 来解释。

2.磁场在界面两侧的突变

设外场$\mathbf{B}_0$均穿过介质 1,介质 2，且方向//分界面；由于$\mathbf{J}_M=\nabla\times\mathbf{M}$，而 $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$，则若设$|\chi_{m1}|>|\chi_{m2}|$，则$|\mathbf{M}_1|>|\mathbf{M}_2|$，则$|\mathbf{J}_{M1}|>|\mathbf{J}_{M2}|$。这意味着，如果分界面偏向介质 1 的那侧的分子电流(们)朝着纸面内的话(介质 1 内部的分子电流取向与$\mathbf{B}_0$差不多一致，电流环⊥$\mathbf{B}_0$且⊥纸面，邻边反向而抵消了)，则分界面偏向介质 2 那侧的分子电流(们)虽向内插入纸面，但强度没介质 1 的那侧的大，总的来讲同向于介质 1 的朝向纸面内。

这可以用三.3.的 $\mathbf{n}\times(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_M=\mathbf{J}_M\cdot\triangle h=(\mathbf{J}_{M1}+\mathbf{J}_{M2})\cdot\triangle h$ 朝纸面内来解释：$\mathbf{n}$ 朝向介质 2，$\mathbf{M}_2$、$\mathbf{M}_1$均朝向$\mathbf{B}_0$方向；由于$|\mathbf{M}_1|>|\mathbf{M}_2|$，则$\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1$朝向$-\mathbf{B}_0$方向，于是 $\mathbf{n}\times(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)$同向于$\mathbf{B}_0\times\mathbf{n}$，即朝着纸面内——因此$\boldsymbol{\alpha}_M$朝纸面内，即$\mathbf{J}_{M1}+\mathbf{J}_{M2}$同向于$\mathbf{J}_{M1}$，朝纸面内。

3.边值关系

边界处场量发生跃变，微分形式的 Maxwell 方程组不再适用，以积分形式导出不同介质分界面两侧场的关系式(∵积分形式的 Maxwell 方程组可以应用于不连续分布的电荷电流所激发的场)。

二.电磁场量法向边值关系

1.电位移矢量 D 的法向边值关系 (引用到了 Maxwell 一号方程)

同样假设电场$\mathbf{E}_0$从介质 1 穿过分界面到介质 2，且假设$\triangle\mathbf{S}$指向介质 2。作一个包围$\triangle\mathbf{S}$的薄的圆柱高斯面($\triangle$h→0)，$\triangle\mathbf{S}_2$的单位法向量$\mathbf{n}_2$同向于$\triangle\mathbf{S}$以及其法向量 **n**，$\triangle\mathbf{S}_1$的单位法向量$\mathbf{n}_1$反向于 **n** 且指向介质 1。

将$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$写成积分形式：$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{D}\cdot dV=\iiint_V \rho_f\cdot dV=\oiint_S \sigma_f\cdot dS$，于是方程左侧$=\mathbf{D}_1\cdot\triangle\mathbf{S}_1+\mathbf{D}_2\cdot\triangle\mathbf{S}_2+\mathbf{D}_{侧}\cdot\triangle\mathbf{S}_{侧}\approx\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{n}_1\cdot\triangle S_1+\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{n}_2\cdot\triangle S_2=(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}\cdot\triangle S$。方程右侧$=\sigma_f\cdot\triangle S$；于是便得到了$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$，即$\mathbf{D}_{2n}-\mathbf{D}_{1n}=\sigma_f$。

再根据$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，我们便可得到$\varepsilon_0(\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{E}_{1n})+(\mathbf{P}_{2n}-\mathbf{P}_{1n})=\sigma_f$，又因$\sigma_P=(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\cdot\mathbf{e}_n=\mathbf{P}_{1n}-\mathbf{P}_{2n}$，因此$\varepsilon_0(\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{E}_{1n})=\sigma_f+\sigma_P$。

这意味着：$\mathbf{D}_n$的跃变只与自由电荷面密度σ_f有关，$\mathbf{P}_n$的跃变只与极化电荷面密度σ_P有关，而$\mathbf{E}_n$的跃变却与总的电荷面密度$\sigma_f+\sigma_P$有关。

【另外，我们还可利用之后的知识，加上这里的$\varepsilon_0(\mathbf{E}_{2n}-\mathbf{E}_{1n})=\sigma_f+\sigma_P$，得到$\sigma_P=\varepsilon_0\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)-\sigma_f=\varepsilon_0\mathbf{n}\cdot(-\nabla\varphi_2+\nabla\varphi_1)-\sigma_f=\varepsilon_0(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial n})-\sigma_f$，即极化电荷面密度$\sigma_P$的表达式；如果考虑介质分界面上的$\sigma_P$，此时由于其上的$\sigma_f=0$，可得$\sigma_P=\varepsilon_0(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial n})$】

2.磁感应强度 B 的法向边值关系 (引用到了 Maxwell 三号方程)

同样，电场$\mathbf{B}_0$从介质 1 穿过分界面到介质 2，$\triangle\mathbf{S}$指向介质 2。作一个包围$\triangle\mathbf{S}$的薄的圆柱高斯面($\triangle$h→0)，$\triangle\mathbf{S}_2$的单位法向量$\mathbf{n}_2$同向于$\triangle\mathbf{S}$以及其法向量 **n**，$\triangle\mathbf{S}_1$的单位法向量$\mathbf{n}_1$反向于 **n** 且指向介质 1。

将$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$写成积分形式：$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\cdot dV=0$，于是$\mathbf{B}_1\cdot\triangle\mathbf{S}_1+\mathbf{B}_2\cdot\triangle\mathbf{S}_2+\mathbf{B}_{侧}\cdot\triangle\mathbf{S}_{侧}\approx\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n}_1\cdot\triangle S_1+\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}_2\cdot\triangle S_2=(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{n}\cdot\triangle S=0$，得到$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$。即有$\mathbf{B}_{2n}=\mathbf{B}_{1n}$。

3.电荷守恒定律的边界体现

根据电荷守恒定律的积分形式：$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=-\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot dV$，方程左边=$\mathbf{J}_1\cdot\triangle\mathbf{S}_1+\mathbf{J}_2\cdot\triangle\mathbf{S}_2+\mathbf{J}_{侧}\cdot\triangle\mathbf{S}_{侧}\approx\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{n}_1\cdot\triangle S_1+\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{n}_2\cdot\triangle S_2=(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)\cdot\mathbf{n}\cdot\triangle S$，方程右边=$-\iint_S \frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot dS=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cdot\triangle S$，于是 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}$。

三.电磁场切向分量边值关系

1.电场 E 的切向边值关系 (引用到了 Maxwell 二号方程)

这里直接引用这一节的三.3.中的描述，只需修改其第一句话：外电场$\mathbf{E}_0$从介质 1 穿过分界面到介质 2；以及相应地将之后的两处“$\mathbf{B}_0$”替换成“$\mathbf{E}_0$”即可。【即使$\mathbf{E}_0$不像$\mathbf{B}_0$那样一定要//分界面，约束更宽(实际那里的$\mathbf{B}_0$也与这里的$\mathbf{E}_0$在方向上同样自由)，但“⊥$\mathbf{E}_0$+//分界面”以及“//$\mathbf{E}_0$且⊥分界面”仍能唯一确定视线方向和视图方向】

将$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$写成积分形式：$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=-\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$；方程左侧变为：$\mathbf{E}_1\cdot\triangle L_1+\mathbf{E}_2\cdot\triangle L_2+\mathbf{E}\cdot\triangle h_1+\mathbf{E}\cdot\triangle h_2\approx(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\triangle\mathbf{L}=(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L$，方程右侧变为：$-\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle S)=-\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h\cdot\triangle L)\approx 0$，联立得$(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L=0$，即$(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{t}_1)=[(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}_1=0$，由于$\mathbf{t}_1$的取向具有任意性(因为我们的视线不一定要⊥$\mathbf{E}_0$(但仍要//分界面)，因而视图和其上的狭长回路取向，即$\mathbf{t}_1$就不同(相对于$\mathbf{E}_0$或者说$\mathbf{E}_1$))，得到 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$，即$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$。【当然我们也可通过$(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L=0$ 中$\mathbf{t}_2$的任意性，直接得出$\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2//\mathbf{n}$ 的结论——其中，$\mathbf{t}_1$任意，加上$\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2$之间的束缚关系，则$\mathbf{t}_2$也任意】

2.磁场 H 的切向边值关系 (引用到了 Maxwell 四号方程)

直接引用这一节的三.1.中的描述，将两处“$\mathbf{E}_0$”替换成“$\mathbf{H}_0$”即可。

将$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$写成积分形式：$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}=\iint_S (\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t})\cdot d\mathbf{S}$；方程左侧变为：$\mathbf{H}_1\cdot\triangle L_1+\mathbf{H}_2\cdot\triangle L_2+\mathbf{H}\cdot\triangle h_1+\mathbf{H}\cdot\triangle h_2\approx(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\cdot\triangle\mathbf{L}=(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L$，方程右侧变为：$\mathbf{J}_f\cdot\triangle\mathbf{S}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot\triangle\mathbf{S}\approx I_f+0=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot\triangle L\cdot\mathbf{t}_1$【注：$\mathbf{J}_f\cdot\triangle\mathbf{S}=\mathbf{J}_f\cdot\triangle h\cdot\triangle L\cdot\mathbf{t}_1=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot\triangle L\cdot\mathbf{t}_1$，其中$\boldsymbol{\alpha}_f=\mathbf{J}_f\cdot\triangle h$】，联立得$(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\cdot\mathbf{t}_2=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot\mathbf{t}_1$，即$(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{t}_1)=[(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}_1=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot\mathbf{t}_1$，得到 $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$。

额外思考：

①.1.与 2.有个共同点，方程右边的偏导成分会因回路的△h→0 而值→0，而非偏导成分均幸免遇难【之前的法向的三个边值关系不存在偏导项，因为没有这样的考量】。——这或许是因为：

1.中的$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$本身就因△h→0 而通量=0，它不像接下来的 2.由于有两项而有相对意义；它的→0 是绝对的。

2.$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}=\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P$，其中$\mathbf{J}_P=\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$在相对程度和绝对程度上，相较于$\mathbf{J}_f$理应都是非常弱的(因为极化电荷又名束缚电荷，从这一点便可看出：$\nabla\cdot\mathbf{J}_P=\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{P}}{\partial t}=-\frac{\partial\rho_P}{\partial t}$)；我们再看看$\mathbf{J}_D$：

而从$\mathbf{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$的来源$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$、$\nabla\cdot[\mathbf{J}(\chi)+\mathbf{J}_D(\chi)]=0$、$\nabla\cdot\mathbf{J}_D(\chi)=\frac{\partial\rho(\chi)}{\partial t}$、$\nabla\cdot\mathbf{E}(\chi)=\frac{\rho(\chi)}{\varepsilon_0}$可看出，实际上$\mathbf{J}_D$应该与$\mathbf{J}_f$等地位，因而大小差不多(甚至相等)，但其实它俩只是共同构成一个空间上的连续量而已，在有$\mathbf{J}_f$的地方，$\mathbf{J}_D=\mathbf{0}$；而在$\mathbf{J}_f=\mathbf{0}$的地方，$\mathbf{J}_D$才被设计来被迫跳出来弥补这个间断、这个空白，使得此时的$\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_f$值仍=原$\mathbf{J}_f$。所以$\mathbf{J}_f\cdot\triangle\mathbf{S}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot\triangle\mathbf{S}\approx I_f$其实应该改为$(\mathbf{J}_f+\mathbf{J}_D)\cdot\triangle\mathbf{S}+\mathbf{J}_P\cdot\triangle\mathbf{S}\approx I_f+I_D$[注：$I_D$对应的是$\mathbf{J}_D$而不是$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$；正如$\mathbf{J}_D\neq\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$而$\mathbf{J}_P=\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$一样：$\mathbf{J}_D=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{J}_P$]，以至于最终结果应该更正为$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f+\boldsymbol{\alpha}_D$，其中有$\boldsymbol{\alpha}_f$的地方$\boldsymbol{\alpha}_f+\boldsymbol{\alpha}_D=\boldsymbol{\alpha}_f+0=\boldsymbol{\alpha}_f$，没$\boldsymbol{\alpha}_f$的地方$\boldsymbol{\alpha}_f+\boldsymbol{\alpha}_D=0+$原$\boldsymbol{\alpha}_f$=原$\boldsymbol{\alpha}_f$。

②.1.2.3.，即这里的三个边值关系，在场景描述、坐标系建立、结论形式上，几乎是完全一致的——比如由于三个方程左边均是环积分，右边均是面积分，则接下来左边总会出现点乘$\mathbf{t}_2$，右边总会出现点乘$\mathbf{t}_1$，然后总也逃不过将$\mathbf{t}_2$改写为$\mathbf{n}\times\mathbf{t}_1$的命运——之所以我们不改写右边的$\mathbf{t}_1$为$\mathbf{t}_2\times\mathbf{n}$，一方面是因为我们好不容易在一开始将左边的环积分变为与右边相对应的面积分，另一方面便是：右边有现成的诸如$\boldsymbol{\alpha}_f$、$\boldsymbol{\alpha}_M$的单体表达式，为什么要将右边搞复杂呢？

③.事实上，关于什么时候趋于 0，谁(哪一项)该→0、谁该保留，是个非常值得思考的问题(有价值)，以及非常不值得思考的问题(但价值藏在最后；一旦你绕进去了，不仅没产生正面价值，还产生了负面价值，破坏了你的原有框架；只有你得到了最终的宝藏，才是赚的)：——其实每一个→0 的项，如果是因△h→0，而非⊥回路的△h 或//柱面的△h 而=0，则当△h 不→0 时，它们也还是有值的，只不过对整体的影响因子很小而已(即使与△h 夹角→0 或→90°)——这意味着“边值条件”本身就是在边界面附近考虑的事情，考虑得越接近分界面，公式越贴合所考虑的情形；若△h 较大，即考虑离分界面较远的地方的电磁矢量们，则那些本该因△h→0 而→0 的项，便开始起作用了，导致公式无法预测靠分界面较远地方的电磁矢量的曲线走向了(可能就弯了)。

3.磁化面电流α_M（面磁化电流= =；引用到了磁化电流$J_M=\nabla\times M$）

外磁场$\mathbf{B}_0$均穿过介质 1,介质 2，且方向//分界面(暂且考虑这一节的一.2.所设情景)。我们朝着⊥$\mathbf{B}_0$且//分界面的方向看去，分界面变成了一条线 $\mathbf{L}$，在视图平面(//$\mathbf{B}_0$且⊥分界面的平面，即⊥视线的平面，即纸面)作一个包围△$\mathbf{L}$ 的狭长的闭合回路(△h→0)；△$\mathbf{L}_1$同向于△$\mathbf{L}$，△$\mathbf{h}_1$同向于△$\mathbf{h}$；△$\mathbf{L}_1$→△$\mathbf{h}_2$→△$\mathbf{L}_2$→△$\mathbf{h}_1$所构成的狭长闭合回路的右手螺旋矢量设为$\mathbf{t}_1$，其方向逆着视线、穿出纸面、且//分界面(所以才用$\mathbf{t}_1$来表示分界面的切向单位矢量之一)；分界面上的另一切向单位矢量，设为同向于△$\mathbf{L}_1$的$\mathbf{t}_2$，于是 $\mathbf{n}=\mathbf{t}_1\times\mathbf{t}_2$即为分界面的法向矢量，可见 $\mathbf{n}$ 同向于△$\mathbf{h}_2$。【注：$\mathbf{t}_2$是指第二个切向单位矢量，而不是与△$\mathbf{L}_2$方向一致的单位矢量，事实上它们的方向没什么关联，且在此场景中恰好相反】

将$\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{J}_M$写成积分形式：$\oint_L \mathbf{M}\cdot d\mathbf{L}=I_M=\iint_S \mathbf{J}_M\cdot d\mathbf{S}$，于是方程左侧变为：$\mathbf{M}_1\cdot\triangle\mathbf{L}_1+\mathbf{M}_2\cdot\triangle\mathbf{L}_2+\mathbf{M}\cdot\triangle\mathbf{h}_1+\mathbf{M}\cdot\triangle\mathbf{h}_2=(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)\cdot\triangle\mathbf{L}=(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L$，方程右侧变为：$\mathbf{J}_M\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle S=\mathbf{J}_M\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h\cdot\triangle L$，联立得$(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)\cdot\mathbf{t}_2=\mathbf{J}_M\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h$，于是$(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{t}_1)=[(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}_1=\mathbf{J}_M\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h$，得到 $\mathbf{n}\times(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)=\mathbf{J}_M\cdot\triangle h=\boldsymbol{\alpha}_M$。

若介质 2 为真空，则$\mathbf{M}_2=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_M=-\mathbf{n}\times\mathbf{M}_1$。【这里也延续了习惯于将 $\mathbf{n}$ 写在前面的习惯，而不写成$\mathbf{M}_1\times\mathbf{n}$——这 5 点中，$\mathbf{M}_2$均放在$\mathbf{M}_1$前面，表示末减初；则 n 都因此而放在它们前面；另外$\mathbf{M}\cdot\triangle\mathbf{h}_1$和$\mathbf{M}\cdot\triangle\mathbf{h}_2$均分别=0 而不是≈0，因为 $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}=\chi_m\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\frac{\mu_r-1}{\mu}\mathbf{B}$，导致 $\mathbf{M}$//$\mathbf{B}_0$，而$\mathbf{B}_0$⊥△$\mathbf{h}$，因此$\mathbf{M}\cdot\triangle\mathbf{h}_1$等=0——而之前是因为△h→0 所导致的≈0，而不是垂直关系导致的=0；不过如果$\mathbf{B}_0$并非//分界面的话，则与之前一样是≈了】

四.电磁场的边值关系

1.场的边值关系

- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$（法向）
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$（切向）
- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$（法向）
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$（切向）

2.电流的边值关系

- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}$（法向）
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_M$（切向）

1.6 电磁场的能量与能流

一.电磁场的能量与能流

1.电磁场的能量

对于场中的电荷：单位体积带电体受洛伦兹力：$\mathbf{f}_0=\frac{d\mathbf{f}}{dV}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}$，于是电磁场(力)对单位体积带电体做功$\frac{dA}{dV}=\mathbf{f}_0\cdot d\mathbf{L}=(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{L}[=\rho\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}]$，功率为$\frac{dA}{dV\cdot dt}=\mathbf{f}_0\cdot\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{f}_0\cdot\mathbf{v}=(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}=\rho(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}=\rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$(第二项没了，这对应着洛伦兹力不做功！)；由于dA会转化为带电体动能的增量(动能又可能进一步转化为焦耳热，所以将焦耳热包含在动能中；其势能的增量/减少量，都包含在下一段的场能中，这里不考虑)，因此这一段中的dA可写为dW_k，并且其能量密度$dw_k=\frac{dW_k}{dV}=\frac{dA}{dV}$，那么动能密度增加率$\frac{dw_k}{dt}=\frac{dA}{dV\cdot dt}=\mathbf{f}_0\cdot\mathbf{v}=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$。

对于场本身：电磁场的能量密度$w(\chi,t)=\frac{dW}{dV}$[如果场与电荷组成的系统封闭的话，则还将有$=-\frac{dA}{dV}=-(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{L}$]，电磁场能量密度变化率(局部能量对时间的导数)$\frac{dw}{dt}=\frac{dW}{dV\cdot dt}$[如果系统封闭的话，则还将有$=-\frac{dA}{dV\cdot dt}=-\rho(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}$]；单位体积内电磁场的能量$dW=-dA=w(\chi,t)\cdot dV$，电磁场具有的总能量 $W=\int_V dW=\iiint_V w(\chi,t)\cdot dV$。

这里第二段中的 W、w 均是场的属性，不包含场内电荷的能量在内。

2.电磁场的能量流动

电磁场的能流密度 $\mathbf{S}(\chi,t)$

大小：单位时间垂直通过单位横截面的能量$\frac{dW_i}{d\sigma_\perp\cdot dt}$【由于 S 已用来表示能流密度$\mathbf{S}(\chi,t)$，因此用 $d\boldsymbol{\sigma}$来表示面元矢量；为了不与dW混淆，用dW_i表示穿过截面的能量(若截面是闭合曲面，则 i 意味着穿过曲面向内，当然实际情况不一定，只是希望看到)】

方向：能量dW_i传输的方向

单位时间通过面元矢量 d$\boldsymbol{\sigma}$的能量：$\frac{dW_i}{dt}=\mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$

单位时间通过封闭曲面$\boldsymbol{\sigma}$流入系统的能量：$\frac{dW_i}{dt}=-\oint_S \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$【其中$d\boldsymbol{\sigma}$朝向外法向】

3.封闭系统内电磁场能量的变化

(1).封闭系统内，场对电荷做功$dA=\mathbf{f}\cdot d\mathbf{L}$，则电荷动能增加，场能减小。

(2).场能dW_i(流)流入或流出封闭系统，则(场能+电荷动能)增加 or 减少。

二.坡印廷定理 poynting theorem

定理建立：单位时间流入系统的能量$\frac{dW_i}{dt}$等于单位时间场能的增加量$\frac{dW}{dt}$，以及单位时间带电体动能的增加量$\frac{dE_k}{dt}$之和：$-\oint_S \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{d(W+E_k)}{dt}$。

于是$-\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{S}\cdot dV=-\oint_S \mathbf{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{d}{dt}\iiint_V (w+w_k)\cdot dV=\iiint_V (\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{f}_0\cdot\mathbf{v})\cdot dV$。于是便得到了$-\nabla\cdot\mathbf{S}=\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{f}_0\cdot\mathbf{v}=\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$。

三.电磁场的能量密度与能流密度

1.w 和 S

根据 4th 介质中的麦克斯韦方程：$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，两边点乘$\mathbf{E}$得$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$；再根据$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$，可得$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$，于是$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$；将该式带入到上式，得：$-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$。

移项，得到$-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$。将其与$-\nabla\cdot\mathbf{S}=\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$对比，可得到两个式子：能流密度$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$，以及能量密度变化率$\frac{\partial w}{\partial t}=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$。

于是 $dw=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$，该式普遍适用，即使是在非线性介质内。若在各向同性的线性介质中，则$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$(非线性介质中不能写成这样，有高次项)中的$\varepsilon$、$\mu$会因$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$、$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$中的$\chi_e$、$\chi_m$与坐标(各向同性)、取向(各向同性)无关，而变为常量，于是对 $dw=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$在任意坐标处积分(∵我觉得各向异性的线性介质，也满足之后的式子，因为这里的积分不是对坐标的积分，而是在某一坐标点，对场的积

分；而某一坐标点处的ε,μ为常数)，便进一步有能量密度 $w=\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2+\frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2$，即 $w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$。

四.电磁能量的传输

数据：$n\sim10^{23}/\mathrm{cm}^3$，$e\sim1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$，$\mathbf{J}\sim1\mathrm{A}/\mathrm{mm}^2$，则根据 $\mathbf{J}=ne\bar{v}$，可得 $\bar{v}\sim10^{-5}\mathrm{m/s}$，因而电子动能 $E_k=\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{E}$ 并不大；再加上回路中的 I(不论各处的 r 大小)处处为恒定值，所以电路中负载上消耗的能量，并不是由电子的运动所提供的。——而是由场传输并提供的。

第二章 静电场

一.本章研究的主要问题

1.给定的自由电荷分布以及周围空间介质和导体分布情况，求解电场。

2.注意两个特点

(1).电荷静止，$\mathbf{v}=0$，ρ_f 只是坐标的函数，不是时间的函数；无电流，$\mathbf{v}=0$，$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}=\mathbf{0}$。

(2).电场不随时间变化，$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$。

3.方法：(1).分离变量法(2).镜像法

4.求解依据：唯一性定理

二.主要内容

1.静电场的标势及其微分方程

2.唯一性定理

3.拉普拉斯方程，分离变量法

4.镜像法

5.电多极矩

2.1 静电场的标势及其微分方程

一.静电场标势的引入

1.静电场基本方程

根据介质中的麦克斯韦方程组的前两个(表示电场方面的)方程，有：$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$；$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$，而$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 不产生磁场，于是后者中$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$；因此$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$；$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$。

2.静电现象的条件

根据 $\mathbf{v}=0$，可得$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}=\mathbf{0}$；又因静电场电场不随时间变化，所以$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$。

3.静电场的标势

(只利用到静电场；因此在非线性介质中也适用)

根据$\nabla\times\mathbf{E}=0$的积分形式，$\int_L\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\oiint_S\nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=0$；设$C_1,C_2$为$P_1$到$P_2$的两条有向曲线，得$\int_{C_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}-\int_{C_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=0$，于是$\int_{C_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\int_{C_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$。

于是电场将电荷从P_1移到P_2时，电场对其作的功与路径无关，因此定义电场对电荷做功$\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=\varphi(P_1)-\varphi(P_2)$，即$P_1$到$P_2$的电势之差；可见若电场对电荷做了正功，则电势$\varphi(P_2)-\varphi(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$，下降了。

其微分形式：相距 $d\mathbf{L}$ 的两点电势差$d\varphi=-\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$，又因$d\varphi=(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz)=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\varphi\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k})=\nabla\varphi\cdot d\mathbf{L}$。对比可得$-\mathbf{E}=\nabla\varphi$，因此$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$。

对于电荷分布于有限区域的带电体，常常选无穷远点为电势的参考点，即电势零点：$\varphi(\infty)=0$。于是$\varphi(A)=\varphi(A)-\varphi(\infty)=-\int_\infty^A\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}(=\int_A^\infty\mathbf{E}\cdot d\mathbf{L})$。

二.静电势的计算及微分方程

1.电势的计算

(1).点电荷电势计算

$\varphi(\mathrm{P})=\int_{\mathrm{P}}^{\infty}\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{L}=\int_{\mathrm{P}}^{\infty}\frac{\mathrm{Q}\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{\mathrm{P}}^{\infty}\frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot \mathrm{d}r=\frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0|\chi-\chi'|}$(积分路径任意，因此可沿位矢**r**积分)。

(2).带电体激发电势

$\varphi(\mathrm{P})=\iiint_{V'}\frac{\rho(\chi')}{4\pi\varepsilon_0|\chi-\chi'|}\mathrm{d}V'$。

2.电势φ的微分方程

(既利用到介质的各向同性，又利用到静电场；因此只在此中适用)

$\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E}+\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$，其中对于各向同性的线性介质而言，$\nabla\varepsilon=0$；于是$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$，再根据$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$，可得$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon}$；而$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$，代入可得$\nabla\cdot\nabla\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$，即$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$。这称为泊松方程。

那么在无电荷区，$\nabla^2\varphi=0$。这称为 Laplace 方程。

三.电势的边值关系

仍利用场的边值关系的前两个：$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$，$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$。

1.电势φ的边值关系

(未利用到介质的各向同性，也未利用到静电场；因此是普适的；但非静电场又没有标势)

对于两个分处两个介质中，且朝着连线方向，相向着无限靠近彼此(但不越过分界面)的两点(这样它们同时也在无限贴近分界面)1,2，有：$\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{L}=\mathbf{E}_1\cdot\triangle\mathbf{L}_1+\mathbf{E}_2\cdot\triangle\mathbf{L}_2=\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n}\triangle \mathrm{L}_1+\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{n}\triangle \mathrm{L}_2=0$，其中$\triangle \mathrm{L}_1,\triangle \mathrm{L}_2$均因 1,2 点无限靠近分界面而→0。【这里并没直接利用$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$，反而是之后推证了它；另外，**n** 的方向像之前一样，与$\mathbf{E}_1$→分界面→$\mathbf{E}_2$夹角为锐角】

因而$\varphi_1=\varphi_2$，即界面两侧的电势φ是连续的(但要注意，这里着重证明的是φ的“法向连续性”，因为 1,2 点若朝着连线方向无限靠近，则意味着它们朝着分界面的投影点，也将无限靠近，即连线最终与界面法向$\mathbf{n}$平行——虽然φ在//分界面方向，也是连续的——∵在同一个介质中，φ当然是连续的：$\mathbf{E}$是有限的；φ在介质分界面上的连续性，归根结底也是因为$\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_1$虽跃变了，但仍然分别有限)。

我们也可用“φ的法向连续性”这一点，验证 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$：另取一对像 1,2 一样相互靠近的，位于分界面两侧的参考点 1′,2′，则也应有$\varphi_{1'}=\varphi_{2'}$，于是$\varphi_1-\varphi_{1'}=\varphi_2-\varphi_{2'}$，即$\mathbf{E}_1\cdot\triangle\mathbf{L}=\mathbf{E}_2\cdot\triangle\mathbf{L}$($\triangle\mathbf{L}$ 方向为 1→1′)，于是即有$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\triangle\mathbf{L}=0$，即$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$，即也就是 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$。

2.$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系

(只利用到了介质的各向同性，即它在非静电场中也成立；但非静电场又没有标势)

根据 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$(这里就用到了它)，在各向同性的线性介质中(这是指介质 1、介质 2 分别是各向同性的，而其二者的边界处并不是各向同性的)，有 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1)=\sigma_f$，于是 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\cdot-\nabla\varphi_2-\varepsilon_1\cdot-\nabla\varphi_1)=\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_1\nabla\varphi_1-\varepsilon_2\nabla\varphi_2)=\sigma_f$，其中，正如之前的$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\mathbf{L}$一样，$d\varphi=\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}|d\mathbf{L}|$，$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_1=\frac{d\varphi}{|d\mathbf{L}|}=\frac{d\varphi}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，这在数学上的含义为**方向导数**，也就是标量场中某点，其φ值沿着单位$d\mathbf{L}$方向(这里即 $\mathbf{n}$ 方向)的变化量，记为$\frac{\partial\varphi}{\partial L}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$。【这里可以看出，矢量$\nabla\varphi$本身可能看不出什么名堂(关于$\varphi$的信息)，要将其点乘个什么东西(如$d\mathbf{L}$、$\mathbf{n}$)，才能想象得出物理图景——$\nabla\varphi$方向只是$\varphi$变化最快的两个方向中同向于$-\mathbf{E}$的那个方向，即电势升高最快的方向(至于为什么，请参见数学物理方程(第七章)的输运方程中的扩散方程一节)：设$\mathbf{n}=\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-|\nabla\varphi|\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}=-|\nabla\varphi|\mathbf{n}$，根据 $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，有$|\nabla\varphi|=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$，其中$\theta=<\mathbf{n},\nabla\varphi>=<\mathbf{n},\mathbf{n}>$。于是$|\nabla\varphi|=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\max\{|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|\}}{\max\{|\cos\theta|\}}=\frac{|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|}{1}=|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|$，代入即有$\mathbf{E}=-|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|\mathbf{n}$】于是$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma_f$；但我们喜欢将 2 号写在前面，表示物理量的终态减末态，因此$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$。【同样，$\mathbf{n}$ 的方向像之前一样，界面法向的两个中，与$\mathbf{D}_1$→分界面→$\mathbf{D}_2$成锐角的那条】

【我们再对比一下 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1)=\sigma_f$以及由它所得的结果$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$，可得 $\mathbf{n}\cdot\varepsilon_2\mathbf{E}_2=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$，于是 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$，从这里也可看出$\mathbf{E}=-|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|\mathbf{n}$：代入可得$-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\cdot\cos<\mathbf{n},\mathbf{n}>=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，即$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\cdot\cos\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，而 $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，代入即有$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\cdot\cos\theta=\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi=|\nabla\varphi|\cdot\cos\theta$，得到$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|=|\nabla\varphi|$——嘿嘿，very reasonable，这是非常合理的，我们之前就得到过它！】

因此综合 1.2.，介质分界面上的电势满足$\varphi_1|_S=\varphi_2|_S$，且$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=-\sigma_f$【我们要在原有基础上加个“$|_S$”，是因为 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$、$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$都是边值关系，该关系只在二介质分界面 S 邻近存在】。

3.导体的边值关系

相当于将“两种介质”，换成了“一介质+一导体”，则也应符合上述结论。

静电平衡：电荷只分布于表面，内部电场＝0，即无电荷分布。导体表面电场与表面垂直。——表面等势面，导体等势体。

(1).根据静电平衡下的导体为等势体，习惯设导体内部近分界面处为 1 号点所在位置(即一般选导体为介质 1；这是因为 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$在创建之时，$\mathbf{n}$ 方向与$\mathbf{D}_1\to\mathbf{D}_2$成锐角；且若分界面是个封闭曲面，则 $\mathbf{n}$ 一般取为其外法向单位矢量，指向介质 2，因此$\mathbf{D}_1$就由此处于面内，而不得不让$\mathbf{D}_1$是介质 1)，于是$\varphi_2|_S=\varphi_1|_S$=导体表面的$\varphi$=常量 const.。

(2).再根据静电平衡下的导体内部场强$\mathbf{E}_1=0$，则 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1)=\sigma_f$变为了 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2)=\sigma_f$，因此$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=-\sigma_f$中$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=0$，于是便有$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=-\sigma_f$。

这意味着：在介质 2 中，靠近分界面的一点 2 处，它朝着⊥界面且指向介质 2 (而非导体这个介质 1)方向的φ值变化率$\cdot\varepsilon_2$，等于该分界面表面(导体表面)的自由电荷面密度σ_f的负值。【注意，$\mathbf{n}$ 是朝着介质 2 的】

并且可用$\sigma_f=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S$，或者用 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\sigma_f$，得到$\sigma_2=D_{2n}|_S$。来直接计算导体表面(感应)电荷面密度。【事实上，你也可以认为导体为介质 2，这样的话 $\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2-\varepsilon_1\mathbf{E}_1)=\sigma_f$中的$\mathbf{E}_2=0$，对应着$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=-\sigma_f$中的$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=0$，变为了$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=\sigma_f$，但此时要注意 $\mathbf{n}$ 会变成从介质 2 朝向介质 1 了！因此它与$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=-\sigma_f$，二者是等价的！】

四.静电场的能量

【我从这里开始，之后不用多重积分符号了= =弃繁从简】

之前给出过，普遍适用于非线性介质的 $dw=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$；在线性介质中，积分得任意场点处的能量密度 $w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$。那么进一步地，在处于静电场的线性介质中(或者说，在线性介质中的静电场能量)，其静电场的能量密度 $w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$(与磁场无关，没有磁场部分)。

于是 $W=\int_V \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}dV$。又因$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$(这也只在各向同性的线性介质中成立，可看作由$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$推出的)、以及$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$，于是$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}=-\nabla\varphi\cdot\mathbf{D}=-\nabla\cdot(\varphi\mathbf{D})+(\varphi\nabla\cdot\mathbf{D})$，因此 $W=\frac{1}{2}\int_V[-\nabla\cdot(\varphi\mathbf{D})+(\varphi\nabla\cdot\mathbf{D})]\cdot dV=-\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\varphi\mathbf{D})\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \varphi\rho_f\cdot dV=-\frac{1}{2}\oint_S \varphi\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\frac{1}{2}\int_V \varphi\rho_f\cdot dV$。【注：运用到了$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{D})=\nabla\varphi\cdot\mathbf{D}+(\varphi\nabla\cdot\mathbf{D})$】

若 V 取全空间，对应的面积分遍及无穷远界面，那么由于$\varphi\sim\frac{1}{r}$、$\mathbf{D}\sim\frac{1}{r^2}$、$d\mathbf{S}\sim r^2$，则第一项中的$\varphi\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\sim\frac{1}{r}$，而 $r\to\infty$，于是第一项$-\frac{1}{2}\oint_\infty \varphi\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=0$。因此 $W=\frac{1}{2}\int_\infty \varphi\rho_f\cdot dV$。——虽然其中的 $V=\infty$是全空间，但积分只需遍及电荷分布的区域 V【但我觉得这句话有问题，不知阁下意见如何？等会我们会对其做出半否半肯的回答。】

讨论：

(1).适用静电场和各向同性的线性介质。

(2).适用求**全空间的**总能量(求部分时，$-\frac{1}{2}\oint_S \varphi\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\neq0$；所以那句紫色的话是错的- -；但从$\rho_f=0$ 的区域$\varphi\rho_f\cdot dV$的积分值为 0，这个角度上来说，它又是对的。)

(3).$\frac{1}{2}\varphi\rho_f$非能量密度，只表示在存在电荷分布的空间区域中的那部分能量，并且这部分能量中还要除开电荷区域中电场的能量；另外一部分能量分布于电场内，而电场不仅在电荷分布区域中存在。

静电场的能量密度以 $w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$的形式在空间中连续分布，场强大的地方能量大。

(4).$W=-\frac{1}{2}\oint_S \varphi\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\frac{1}{2}\int_V \varphi\rho_f\cdot dV$中的$\frac{1}{2}\varphi\rho_f$为电荷分布$\rho_f$所激发的。

(5).静电场中电场由电荷分布决定，场内无独立电磁运动，因而场的能量与由电荷分布决定。

(6).若全空间充满介电系数为ε的介质，则电荷激发的电场总能量 $W=\frac{1}{2}\int_\infty \varphi\rho_f\cdot dV=\frac{1}{2}\int_\infty \frac{\rho(\chi')}{4\pi\varepsilon_0 r}\rho_f\cdot dV=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_\infty \frac{\rho(\chi')\rho_f(\chi)}{|\chi-\chi'|}\cdot dV$，这是对$\chi$的积分，意味着$\rho(\chi')$在V中激发的能量，还要将$\rho(\chi')$对带电体 V'积分，才能得到所有电荷，在所有场点激发的能量之和 $=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_{V'} dV'\int_\infty \frac{\rho(\chi')\rho_f(\chi)}{|\chi-\chi'|}\cdot dV$。

五.举例

求均匀电场的电势：$\varphi_P-\varphi_0=-\int_0^P \mathbf{E}_0\cdot d\mathbf{L}$，积分路径我们取参考点到 P 点这一条直向量$\triangle\mathbf{L}=\mathbf{r}$，并设为参考点处$\varphi_0=0$，且将极坐标系的原点置于参考点处(无需关心极轴在哪)，用其径向 $\mathbf{r}$ 来描述$\triangle\mathbf{L}$：$\triangle\mathbf{L}=\mathbf{r}$，于是$\varphi_P=\varphi_0-\mathbf{E}_0\cdot\triangle\mathbf{L}=-\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}$，其中，$\mathbf{E}_0$

不一定要//极轴(x 轴)。【均匀电场可看作由无穷大带电平板激发，其电荷不在有限区域内，因此不能选$\varphi(\infty)=0$】

2.2 唯一性定理

本节将利用一个微分方程，两个边值关系，来回答两个问题：

(1).需具备什么条件求解静电问题

(2).判断所求的解是否唯一并且正确

一.静电问题的唯一性方程

1.有介质存在的情形

①.将一区域 V 划分为许多小区域V_i，每个小区域的介质各向同性(这个词由于不能描述非线性介质，因而默认也是线性介质了)，介电系数为ε_i。每个区域内，以及区域与区域的分界面，均给定电荷分布$\rho(\chi)$，以及$\sigma_f(\chi)=0$(一般俩介质分界面上无自由电荷分布(准确地说，由于其是体分布而面密度为 0)，这和一介质一导体不同，那时分界面上必有自由电荷)，$\chi\in V$。——相当于在完全确定了 V 内的自由电荷分布的情况下，我们可得到对φ的三种形式的约束方程：

由于每个小区域V_i是线性且各向同性的，以及$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$所引用到的静电场条件$\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$，则 1.每个区域$V_i$内部满足泊松方程$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_i}$(边界上由于两侧介质是线性的，但因其邻域内$\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$并不满足各向同性，因此不满足泊松方程)；2.各区域分界面满足φ和$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系：普适的$\varphi_i=\varphi_j$；以及因各向同性而有的$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}-\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=-\sigma_f=0$，即$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}$。

若再给定 V 边界 S 上的 1.$\varphi|_S$或者 2.$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$，则 V 内的电场唯一确定。

②.唯一性定理：设区域 V 内给定自由电荷分布$\rho(\chi)$，在 V 的边界 S 上给定电势或电势的法向偏导，则 V 内电场唯一确定。——也就是说，存在唯一的解，它在每个区域内满足泊松方程，在两区域分界面上满足两个边值关系(自己列，不需给)，并在 V 的边界 S 上满足给定的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$值。

证明：假设有两组不同的解φ'和φ''满足唯一性定理的条件，设$\varphi(\chi)=\varphi'(\chi)-\varphi''(\chi)$。我们只需证明$\varphi$是个常量即可：电势的附加常量对电场没有影响。

由于φ′和φ′′满足唯一性定理，则一个必要条件便是它们满足泊松方程：$\nabla^2\varphi'=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_i}$，$\nabla^2\varphi''=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_i}$，对于同一χ处，ρ(χ)相同，此时这两个方程右侧相同，于是$\nabla^2\varphi'-\nabla^2\varphi''=\nabla^2[\varphi'(\chi)-\varphi''(\chi)]=\nabla^2\varphi=0$。

同样由于φ′和φ′′满足唯一性定理，则两个边值关系：$\varphi_i'=\varphi_j'$，$\varphi_i''=\varphi_j''$；以及$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j'}{\partial n}$，$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i''}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j''}{\partial n}$；二式对应项相减，前者有：$\varphi_i=\varphi_i'-\varphi_i''=\varphi_j'-\varphi_j''=\varphi_j$；后者有$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\varepsilon_i\frac{\partial(\varphi_i'-\varphi_i'')}{\partial n}=\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n}-\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i''}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j'}{\partial n}-\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j''}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}$。

对第 i 个区域V_i的边界S_i，考虑如下积分(之所以考虑它，是因为等会会发现它=0，这意味着与它等价的某个体积分=0，而后者会得到我们想要的结果)，$\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}$：一方面，它可写成体积分，并利用之前刚得到的$\nabla^2\varphi=0$，有：$\int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)dV=\int_{V_i}\varepsilon_i[(\nabla\varphi)^2-\nabla^2\varphi]dV=\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2dV$。

另一方面，对所有对V_i的积分求和，$\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}=\sum_i\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2dV=\int_V\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2dV$。而方程左边的$\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}=\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}dS=\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\sum_i\oint_{S_i}\varphi\cdot(\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS$，其中由于$d\mathbf{S}_i=-d\mathbf{S}_j$，$\mathbf{n}_i=-\mathbf{n}_j$，因此$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i}=\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=-\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial(-n)}=-\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j}$，于是像体积分$\sum_iV_i=V$的合并一样，有$\sum_i\oint_{S_i}\varphi\cdot(\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS=\sum_i\oint_S\varphi\cdot(\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS$，只不过并不是$\sum_iS_i=S$，而是$\sum_i\mathbf{S}_i=\mathbf{S}$。【本质上，我们可以不那么早地用$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，代换掉方程左边的$\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}$，可利用它先直接得到$\sum_i\oint_S\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}$，再得到$\sum_i\oint_S\varphi\cdot\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dS$。】

而由于唯一性定理也指出了“在 V 的边界 S 上给定电势$\varphi_0|_S$或电势的法向偏导$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}|_S$”是个已知条件，即给定$\varphi'|_S=\varphi''|_S=\varphi_0|_S$或$\frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S=\frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S=\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}|_S$；因此$\varphi|_S=(\varphi'-\varphi'')|_S=0$、$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S=\frac{\partial(\varphi'-\varphi'')}{\partial n}|_S=0$。于是方程左边的$\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}=\sum_i\oint_S\varphi\cdot\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dS=0$。

那么，方程右边的$\int_V\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2dV=0$。然而被积函数$\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\geq0$，因此 V 内各点χ处均应有$\nabla\varphi=0$。那么$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\mathbf{L}=0$，即φ=const.，得证。

2.有导体存在时的唯一性定理

唯一性定理：设区域 V′内存在一些导体，挖去导体后的一个“复连通区域”，设为 V。同样，给定 V 内自由电荷分布ρ(χ)，以及在 V 的边界 S 上的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，则 V 内电场唯一确定。——其中，由于 V 是个复连通区域，则 V 的边界 S 由 V′的表面 S′和各导体表面S_i组成，那么我们可分别独立地给出 S′面的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，以及各$S_i$的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，取其并集，作为已知的 S 上的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$。【注：这里的$V_i$、$S_i$不和纯介质情况下的相同了，这里的它

们的S_i属于 S 的一部分，而之前的S_i是在 S 内部，不算作 S 的一部分；当然，V 内不一定要求ε为一常数，它仍可被瓜分为一个个不同介质区域V_j、S_j们】

这样一来，由于S_i的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$可用对应导体(表面)总电荷$Q_i$表示，那么 S 上的$\varphi$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$中的$S_i$部分，便可以$\varphi$或$Q_i$的形式给出。【导体表面被认为是边界条件而不是边值关系！】

现在我们只需要证明“给定了S_i的Q_i”等价于“给定了S_i的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$”即可(我们主要推导左到右，不必推导右到左，因为：既然有了右，右何必到左呢？)：根据$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$，以及$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$在各向同性线性介质中的积分形式，即高斯定理：$\oint_{S_i}\mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{S}_i=\frac{Q_i}{\varepsilon_i}$(注意，这里的$\varepsilon_i$为 V′中的各非 V 区域，即各导体内部区域，再加上导体表面及面外附近空间的总和V_i，对应S_i比导体表面稍膨胀一点，以包含表面的自由电荷Q_i的同时，作为V_i的边界；并且因此指向导体表面外法向的$d\mathbf{S}_i$、$\mathbf{n}_i$指向的V_i、S_i的外部，与同时也作为复连通区域 V 的内边界的$d\mathbf{S}$的外法线 $\mathbf{n}$(指向的V_i、S_i的内部)，的方向相反)，但我们将其写作$\oint_{S_i}\varepsilon_i\mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{S}_i=Q_i$的形式：【注：若 dS 是对于复连通区域的内边界而言，则 $dS=dS_i$，但 $\mathbf{n}\cdot dS=d\mathbf{S}=-d\mathbf{S}_i=\mathbf{n}_i\cdot dS_i$、$\mathbf{n}=-\mathbf{n}_i$；因而$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$中$dS$表示为$dS_i$也无妨】

那么$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=\oint_{S_i}\varepsilon_i\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}dS_i=\oint_{S_i}\varepsilon_i-\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}_i=\oint_{S_i}\varepsilon_i\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}_i=Q_i$。【或者请直接用$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=-\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i=Q_i$来证明】于是，像之前唯一性定理的条件之一“$\frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S=\frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S=\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}|_S$”，所导致的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S=\frac{\partial(\varphi'-\varphi'')}{\partial n}|_S=0$一样，这里作为 V 的边界的$S_i$们，同样也满足“$Q_i'|_{S_i}=Q_i''|_{S_i}=Q_{0i}|_{S_i}$”及其所导致的$Q_i|_{S_i}=(Q_i'-Q_i'')|_{S_i}=0$，于是$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=0$，那么之前的方程左边的$\Sigma_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\mathbf{S}=\Sigma_i\oint_S\varphi\cdot\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dS=\Sigma_i\varphi_i\oint_S\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dS=0$【之所以$\oint_S\varphi\cdot\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dS$中的$\varphi$能提到外面作为$\varphi_i$，是因为导体区域$V_i$，不像介质区域$V_i$，前者表面是个等势面，$\varphi$在$S_i$上处处相等，所以将这整个$S_i$面上任意一处的$\varphi$其记作$\varphi_i$】。于是，最终也得证。

【注意：若$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$中的 $\mathbf{n}$，方向与$\oint_{S_i}\varepsilon_i\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}_i$中的$\mathbf{n}_i$恒反向，则$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=Q_i$恒成立；不过你也可以改变$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的定义，使得其的 $\mathbf{n}$ 方向与$\mathbf{n}_i$相同，那么此时对应该 $\mathbf{n}$ 的定义的式子应写为$\oint_{S_i}\varepsilon_i(-\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS_i=Q_i$，即$-\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=Q_i$；这个负号便与导体的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系中的$\sigma_f=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S$非常一致！！说实话它俩本身一个就是微分形式，另一个是积分形式。】

当 V 内的电势φ(唯一)确定后，由场的边值关系中的第一条：$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$，我们令该式中的 $\mathbf{n}$ 指向V_i、S_i的内部(导体区域)，即指向 V 的边界 S 的正向，由于$\mathbf{D}_1$在之前定义为在介质 1 中指向分界面，$\mathbf{D}_2$定义为处在介质 2 中，并从分界面指向介质 2。那么对应地在这里，$\mathbf{D}_1$处在 V 区域，即那里的介质 1 为这里的 V 区域；而$\mathbf{D}_2$处在V_i内。——于是在静电平衡下，$\mathbf{D}_2=0$，对应$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=-\sigma_f$中的$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=0$，于是便有$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S=\sigma_f$；当然，若你依导体的边值关系中的观点，认为导体为介质 1 的话，则事情变为了$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=-\sigma_f$，其中的 $\mathbf{n}$ 指向V_i外部。它们本质上是等效的。——但若要

用ε和$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$简写的话，一般写作$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S=\sigma_f$，因为一般$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$中的$\mathbf{n}$是S的正向，即V内指向$V_i$内的(这三个式子中的S也可写作$S_i$，因为后者是前者的一部分)。

例.两同心导体球壳之间充以两种介质，左侧电容率ε_1，右侧ε_2。设内球壳$S_i(=S_1+S_2)$带总电荷Q，外球壳S′接地，求电场和球壳上电荷分布。(注：内球壳相当于一个导体球V_i，其内部的$\rho(\chi)=0$，$\mathbf{E}=0$，大球面S′对应的V′包含导体内球壳S_i内部区域V_i以及复连通区域V)

解.我们先看看是否已经具备完全确定静电场的条件，若是，则尝试着提出一个满足部分条件的“尝试解”，若它满足唯一性定理的所有条件，则我们便找到了为该问题的唯一正确解。

在两层球壳间的复连通区域V中，给定了两种介质内部区域自由电荷分布$\rho(\chi)=0$、以及两种介质的两个分界面上的$\sigma_f=0$；于是V区域内满足泊松方程：$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_1}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_2}=0$，且左半区域与右半区域分界面上有$\varphi_1=\varphi_2$；以$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f=0$；同时又给出了外球壳接地所导致的复连通区域V外球面上电势$\varphi|_S=0$，以及V的内球面S_i上的电荷分布Q。——那么根据有导体存在时的唯一性定理，V内电势和电场被唯一确定(V_i内部的电场$\mathbf{E}$已知=0，电势与内球壳表面相同，因此不需要考虑V_i内的情况)。

在两介质的分界面上，由于得满足$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$，$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f=0$，或者它们的推论：电势φ的边值关系：$\varphi_1=\varphi_2$(这个可不视为由$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$推来，虽然这个可以推导它- -；这里我们不用$\varphi_1=\varphi_2$，而用$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$)；以及$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\sigma_f=0$。

由于$\mathbf{E}$要求在内球壳上处处与球面垂直，以保证导体内球面为等势面，从这个角度上$\mathbf{E}$在内球壳附近是径向的；又因为为了满足上一段的两个关系，$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$强制要求$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2$，即分界面处$\mathbf{E}$径向分量相等(对分界面而言，是切向；对球壳而言，是径向)；而非分界面的两个半球面S_1,S_2上，理应也有$\mathbf{E}$的大小为常值(对应各处电荷面密度也应是常值)——因此我们有理由假设$\mathbf{E}$在V区域内仍保持球对称性，并且表达式应该长成与之前类似的样子：$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2=\frac{A}{r^3}\mathbf{r}$；于是利用“V的内球面$S_i$上的有电荷Q”这个已知条件，加上$\oint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=Q$(其中的$\mathbf{D}$是积分曲面S附近的$\mathbf{D}$，因此$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$中的ε也是积分曲面S附近的；因而我们将高斯面做得稍微比内球壳S_i稍大，以使得积分曲面S附近的ε是$\varepsilon_1,\varepsilon_2$中的一个，而不需考虑$V_i$内的介电常数)，可得$\oint_{S_i^+}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\mathbf{D}_1 d\mathbf{S}+\oint_{S_2^+}\mathbf{D}_2 d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\varepsilon_1\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}+\oint_{S_2^+}\varepsilon_2\mathbf{E}_2 d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\varepsilon_1\frac{A}{r^3}\mathbf{r}d\mathbf{S}+\oint_{S_2^+}\varepsilon_2\frac{A}{r^3}\mathbf{r}d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\varepsilon_1 A\cdot d\Omega+\oint_{S_2^+}\varepsilon_2 A\cdot d\Omega=2\pi\varepsilon_1 A+2\pi\varepsilon_2 A=Q$(注：可将立体角的微分以球坐标系表示为$d\Omega=\frac{dS}{r^2}=\frac{rd\theta\cdot[(r\sin\theta)\cdot d\varphi]}{r^2}=\sin\theta d\theta d\varphi$，其中的θ像原子物理一样是与z轴的夹角，即方向角，而非极角(极坐标系的/非球坐标系的)，哭；并且还有$d\Omega=\frac{d\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}}{r^2}=\frac{d\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$，以及$dS=r^2d\Omega$、$d\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}=r^2d\Omega$、$dV=r^2d\Omega dr$)，得到$A=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$，于是$\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}\mathbf{r}$。

同样利用$\oint_{S_i^+}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\mathbf{D}_1 d\mathbf{S}+\oint_{S_2^+}\mathbf{D}_2 d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\varepsilon_1\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}+\oint_{S_2^+}\varepsilon_2\mathbf{E}_2 d\mathbf{S}=\oint_{S_1^+}\sigma_1 dS+\oint_{S_2^+}\sigma_2 dS=Q_1+Q_2=Q$，对比可得$D_{1r}=\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{n}=\varepsilon_1\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n}=\varepsilon_1 E_{1r}=\sigma_1$以及$\sigma_2=\varepsilon_2 E_{2r}$。于是$\sigma_1=\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$、$\sigma_2=\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$。【也可直接用电位移矢量 **D** 的法向边值关系(这是最好的)：$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\sigma_f$，得到$\sigma_2=D_2|_{S_2^+}=\sigma_2=\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$，或者$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系$\sigma_f=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S$得到】

2.3 拉普拉斯方程和分离变量法

本节主要讨论泊松方程的解析求解方法。静电学的基本问题：满足给定边界条件的泊松方程的解；但如上一个例题所示，只有在界面形状是比较简单的几何曲面时，才能以解析的形式给出，并且具体情况对应不同解法(而且对于“试探解”，主要靠“直觉”)。

若自由电荷不出现在复连通区域 V 内，只出现在导体V_i的表面S_i上，则 V 内的泊松方程变为拉普拉斯方程$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}=0$；——即，产生电场的电荷都分布在 V 的边界上(主要是指各S_i上，而非 S′上)，它们的作用通过边界条件反映出来，此时这类问题的解法，为求拉普拉斯方程满足边界条件的解。

此时问题归结为：1.求 laplace 方程的通解 2.利用边界条件(如$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$)和边值关系(如 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$)，确定积分常数。

一.拉普拉斯方程 分离变量法

1.直角坐标系 laplace 方程求解

由于等会其他地方会用到φ，所以现用 u 表示电势：$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

利用分离变量法，令 $u=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$，则$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}=0$，于是$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$，设$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2$，$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2$，$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k_z^2$，那么$k_z^2=-(k_x^2+k_y^2)$；设 $X=e^{rx}$(它不能有常数部分)，代入$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2$，则$r^2=-k_x^2$，于是$r=\pm ik_x$；得到$X=e^{\pm ik_x x}=\cos(k_x x)\pm i\sin(k_x x)$，由于这两个解线性无关，我们将其线性组合成另一组同样线性无关但更好看的解；并且不仅为了好看，还得保证组合出的每个解均为实函数，这样新的两个线性无关的解，组合出来的通解便百分之百是实函数，以使得 X 和 u 是实函数：$X_1=\cos(k_x x)$，$X_2=\sin(k_x x)$。

于是通解 $X=A_1\cos(k_x x)+A_2\sin(k_x x)$；$Y=B_1\cos(k_y y)+B_2\sin(k_y y)$；由于约束关系$k_z^2=-(k_x^2+k_y^2)$，因此对于 $Z=e^{rz}$而言，$r^2=-k_z^2=k_x^2+k_y^2$，$r=\pm\sqrt{k_x^2+k_y^2}$，于是 $Z=e^{\pm\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cdot z}$，得到 $Z=C_1e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cdot z}+C_2e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cdot z}$。

于是 $u=XYZ=[A_1\cos(k_x x)+A_2\sin(k_x x)]\cdot[B_1\cos(k_y y)+B_2\sin(k_y y)]\cdot[C_1e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cdot z}+C_2e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\cdot z}]$。

2.柱坐标系 laplace 方程求解

$\nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$。分离变量：$u=R(r)\cdot\Phi(\phi)\cdot Z(z)$，$\frac{\Phi Z}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})+\frac{RZ}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}=0$，得$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$。由于我们之所以选用柱坐标系求解，就是因为估计u具有柱向(z 向)等势的特征，即只需研究截面一个平面上的等势线，即可得到空间中的等势面(这不叫轴对称，轴对称是u与极角φ无关，柱坐标系的u与φ有关；接下来介绍的球坐标系的u才与φ无关)，若在此基础上假设$\frac{\partial u}{\partial z}=0$，则$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$项=0。

于是乘以r^2后，$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0$，令$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})=n^2$，则$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-n^2$。于是$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0$，以及$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+n^2\Phi=0$。对于前一个方程，令 $r=e^t$，即 $t=\ln r$，则 $\frac{d}{dr}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}$；$\frac{d^2}{dr^2}=\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{d}{dt})=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\frac{1}{r}\frac{d}{dt})=\frac{1}{r}(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}+\frac{1}{r}\frac{d^2}{dt^2})=\frac{1}{r}(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{r}\frac{d}{dt})=\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}$；于是原方程变为欧拉方程：$r^2(\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt})+r(\frac{1}{r}\frac{dR}{dt})-n^2R=\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0$，令$R=e^{kt}$，则$k^2=n^2$，于是$R=e^{\pm nt}$(它也可由之前的 $Z=e^{rz}$，$r^2=-k_z^2=k_x^2+k_y^2$类比得到)，得到$R=Ae^{nt}+Be^{-nt}=Ar^n+Br^{-n}(n\neq0)$；当 $n=0$ 时，$\frac{d^2R}{dt^2}=0$ 的解为$R=A+Bt=A+B\cdot\ln r(n=0)$。

对于后一个方程$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+n^2\Phi=0$，它与之前的$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2$形式相同，我们直接给出：$\Phi=C\cos(n\phi)+D\sin(n\phi)(n\neq0)$，以及$\Phi=C+D\phi(n=0)$。——其中，由于轴对称下应有($n\neq0$ 时候确实是满足的)$u(\phi)=u(\phi+2\pi)$所导致的$\Phi(\phi)=\Phi(\phi+2\pi)$，则其中$D=0$，得$\Phi=C(n=0)$。这意味着当 n=0 时，u与极角φ无关，电势分布也就轴对称了；由于 u 本身又与 z 无关，此时 u 就只与 r 有关了。

于是 $u=R(r)\cdot\Phi(\phi)\cdot Z(z)=C_0\cdot[A_0+B_0\cdot\ln r]\cdot Z_0+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-n}]\cdot[C_n\cos(n\phi)+D_n\sin(n\phi)]\cdot Z_0=A_0+B_0\cdot\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-n}]\cdot[C_n\cos(n\phi)+D_n\sin(n\phi)]$【注：$R,\Phi,Z$ 中 n 相同的解乘在一起作为一个解，而不是像这样：$[A_0+B_0\cdot\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^n+B_nr^{-n}]\cdot[C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\phi)+D_n\sin(n\phi)]\cdot Z_0$分属地乘在一起】。

【注：只要 u 与z无关，即$\varphi(r,\phi,z)=\varphi(r,\phi)$，就考虑用此柱坐标系下的 laplace 方程(你可以通过$[C_n\cos(n\phi)+D_n\sin(n\phi)]$看出与 z 无关)；而若进一步地判断出 u 与φ无

关，即$\varphi(r,\phi)=\varphi(r)$，则式中只有$A_0+B_0\cdot\ln r$项存在；若 u 与ϕ有关，即$\varphi(r,\phi)\neq\varphi(r)$，则式中无$A_0+B_0\cdot\ln r$存在，即只有它之外的那些项存在——它们因“u 是否与ϕ有关”，而二元对立，有 M 则无 N，有 N 则无 M。】

【注：以上指导思想有误：当 u 与ϕ有关时，则式中不一定没有$A_0+B_0\cdot\ln r$存在！因为只要有$\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-n}]\cdot[C_n\cos(n\phi)+D_n\sin(n\phi)]$存在(此时这些项肯定总有一个≠0)，不论是否有$A_0+B_0\cdot\ln r$项存在，u 都与ϕ有关而非轴对称：这一项的存在并不影响整体的非轴对称，因而它允许存在，且有时候不得不存在：不然我们哪来的常数项！一个微分方程的通解没有常数项，或者总电势分布没有常数项，那岂不是完蛋了！——该项只是总电势中的一项轴对称项，有了它并不意味着总电势就轴对称了，此时总有非轴对称项使得总电势非轴对称。所以并不能因总电势的非轴对称而扼杀它；除此之外，其余认识是正确的，即判断出 u 与ϕ无关后，确实不能有$A_0+B_0\cdot\ln r$之外的项存在。此时的通解中仍然是有常数的。】

3.球坐标系 laplace 方程求解

$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$；当然你也可以将其与柱坐标系对比，其中的$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$到$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$是沿用下来的(二者 r 含义不同，不过正因如此，该式才与之前的同类项相同)，球坐标系下的ϕ也表示极角(这里的极角仍是指平面极坐标系的极角，而非球坐标系的极角 roz)，而不是方向角θ；按理说它在位置上应该像柱坐标系一样，写在中间的；第一项括号外多除了一个 r，则括号内得多乘一个 r。

分离变量：$u=R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\phi)$，$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{r^2\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{1}{r^2\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2}=0$，同$\times r^2$后得$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2}=0$。选用球坐标系，一个原因便是 u、Φ不随极角ϕ变化(另一个原因是它与方向角θ有关，即与 z 有关；ϕ,θ二者均与柱坐标系的使用条件有所区别)；之所以选用球坐标系求解，因为体系的u具有轴对称物理特性，即与极角ϕ无关，那么$\frac{1}{r^2\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2}=0$，即$\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\phi^2}$项=0【这也就回答了为什么要将极角ϕ项写在后面第三项(最末)的位置：它是采用该坐标系，所最有可能对称的项，和因此不被考虑的项】。

所以这便是为什么球坐标系一般不考虑极角ϕ，而考虑方向角θ和 z；柱坐标系与之恰好相反。而且有趣的是，没有同时考虑 r 和 z 的柱坐标系，也没有同时考虑 r 和ϕ的球坐标系：可能是因为前者的工作已经被考虑 r 和θ的球坐标系覆盖了，且θ在一定程度上代表 z；而后者的工作也以被考虑 r 和ϕ的柱坐标系覆盖了。这样的书写形式，甚至各符号的含义，在原子物理处理波函数的时候，也出现的是完全相同的。

那么便有$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})=0$，令$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})=n\cdot(n+1)$，则$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})=-n\cdot(n+1)$；于是是$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n\cdot(n+1)R$，可将该方程对比之前柱坐标系时的$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0$，它们都是欧拉方程，因此我们仍然作相同的变量替换：$\frac{d}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}$和$\frac{d^2}{dr^2}=\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}$，带入后由于只比之前的多了一项$r\frac{dR}{dr}$，因此方程中比$\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0$多一项$\frac{dR}{dt}$即可，即$\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}-n\cdot(n+1)R=0$；这也是为什么我们要令它$=n\cdot(n+1)$的原因。

同样像柱坐标系一样，令$R=e^{kt}$，则$k^2+k-n\cdot(n+1)=0$，得$(k-n)(k+n+1)=0$，k=n 或-n-1，于是$R=Ae^{nt}+Be^{-(n+1)t}=Ar^n+Br^{-(n+1)}(n\neq0)$；当 n=0 时，$\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}=0$的解为$R=A+Be^{-t}=A+B\cdot\frac{1}{r}(n=0)$。【n=0 可归并于 n≠0 的形式中去】

对于后一个方程$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})=-n\cdot(n+1)$，并不忙着将其展开，而是写作$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+n\cdot(n+1)\Theta\sin\theta=0$，令 x=cosθ，则$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d}{dx}$，于是原式变为$-\sin\theta\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right)+n\cdot(n+1)\Theta\sin\theta=0$，即有$\frac{d}{dx}\left(\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right)+n\cdot(n+1)\Theta=0$，再代入 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$，得到$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}]+n\cdot(n+1)\Theta=0$。——该式的解为 n 阶勒让德函数$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，即$\Theta=P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}(\cos^2\theta-1)^n$。

当 n=0 时，$\Theta=P_0(\cos\theta)=1$，这意味着此时电势分布与方向角θ无关了，又因 u 本身又与极角ϕ无关，那么此时 u 便只与 r 有关了，因而球对称分布了；n=1 时，$\Theta=P_1(\cos\theta)=\cos\theta$。

于是 u=R(r)·Θ(θ)·Φ(ϕ)=1·$[A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}]\cdot\Phi_0+\Phi_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)=A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$。【注：只要 u 与ϕ无关，即$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi(r,\theta)$，就考虑用此球坐标系下的 laplace 方程(你可以通过$P_n(\cos\theta)$看出这种轴对称性)；而若进一步地判断出 u 与θ无关，即$\varphi(r,\theta)=\varphi(r)$，则式中只有$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$项存在；若 u 与θ有关，即$\varphi(r,\theta)\neq\varphi(r)$，则式中无$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$存在，即只有它之外的那些项存在——它们因“u 是否与θ有关”，而二元对立，有 M 则无 N，有 N 则无 M。】

【同样，以上认识有误：二者并不是二元对立的：有 M 时也可有 N，有 N 时也可有 M：因为当通过物理情景确定 u 与θ有关后，仍然应该写出$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$这一球对称项，因为它的存在也不会最终导致总φ球对称，因为总有非零的$\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$项保证(它们标量叠加后)总电势的非球对称。因此当$\varphi(r,\theta)\neq\varphi(r)$时，仍要写出完整形式的$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$——从数学的角度讲，此时通项中才有常数部分；并且有时候B_0也≠0，这对应着有时候导体球接电池，而导致球面均匀带电，产生了一个球对称项。】

注：①.球对称的 laplace 方程还可合起来写为$\sum_{n=0}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$，但这样的话不能让我们一眼 +6 看出其电势分布的对称性；并且之前的柱坐标系的由

于有 lnr，就不能化简成这样了。②.电势的不随 z 改变、轴对称性、球对称性，等性质，得在合理建立的坐标系下，才存在这样的φ不与 z 或ϕ或θ有关：即这些 z,ϕ,θ坐标量都是在某一坐标系下被描述的，而要想φ不与它们中的某一个有关，则坐标系不能乱取。得满足诸如原点取在球心、轴线上，且 z 轴朝向同向于φ不改变的方向等。——我们 laplace 方程的通解，便是用这样已建立好了的坐标系来描述的和推导得的，因而也只能被应用于这样建立好了的坐标系下。

二.利用边界条件求解

说明：

1.如果考虑问题中，有 i 个区域，必须有 i 个相应的拉普拉斯方程。

2.应用唯一性定理：区域交界面满足$\varphi_i=\varphi_j$，$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\varepsilon_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}$，边界上已知$\varphi|_S$或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$或$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=Q_i$。

三.举例说明确定特解的方法

例 1.

一个内径和外径分别为R_2和R_3的导体球壳，带电荷 Q。同心地包围一个半径为R_1的导体球$R_1<R_2$。并使半径为R_1的导体球接地。——求空间各点的电势和与导体球的感应电荷。

易看出$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi(r)$，即电势电场分布都是球对称的。——寻找边界条件，看条件是否足够，以使得问题定解，以及观察是否 or 如何用它们作为约束条件：

①.由于静电平衡的导体是等势体，因此我们只需要求解 4 个区域中的两个区域，设R_3外部区域电势为φ_1，记R_1,R_2之间区域电势记为φ_2，则：

(1).边界条件：内球接地+电荷分布于有限区域，则$\varphi_2|_{r=R_1}=\varphi_1|_{r\to\infty}=0$。

(2).边值关系：静电平衡时导体球壳为等势体，则$\varphi_2|_{r=R_2}=\varphi_1|_{r=R_3}$。

(3).边界条件：$\oint_{S_i}\varepsilon_i\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}_i=-\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i=Q_i$，将其写为对$R_2$~$R_3$之间的复连通区域，进行闭合曲面积分，内球面半径取得比R_2稍小，外球面半径取得比R_3稍大：$d\mathbf{S}_i$总指向复连通区域边界的外法向，而$d\mathbf{S}_3=dS_i$，$d\mathbf{S}_2=-dS_i$，它俩均指向径向 **r** 方向；【注：$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$；$d\mathbf{S}_2$对内球来说是外法向，但对$R_2$~$R_3$之间的区域不是】

于是$-\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i=-\oint_{S_{i2}}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i-\oint_{S_{i3}}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i=\oint_{S_2}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS-\oint_{S_3}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=Q_i$【注：该式中的$d\mathbf{S}_i$和$\mathbf{n}_i$总是指向所设单连通 or 复连通高斯面边界面外法向(不管$d\mathbf{S}_i$是不是导体边界：要知道它只是个高斯面)，因此在S_2面上$n_i=-n$，在S_3面上$n_i=n$】，这样 dS 便可写为$r^2d\Omega$(并且其中$d\Omega$恒正)，且之后的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$可写为$\frac{d\varphi}{dr}$；

于是$-\oint_{S_3}\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}r^2d\Omega+\oint_{S_2}\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}r^2d\Omega=Q$。

②.根据定解条件，确定通解和待定系数：

1.根据$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi(r)$，与$\phi$无关，轴对称的，则应用球坐标系 laplace 方程$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$；又与$\theta$无关，则应设$\varphi_1=A+B\cdot\frac{1}{r}(r>R_3)$，$\varphi_2=C+D\cdot\frac{1}{r}(R_1<r<R_2)$。

2.(1)'.根据$\varphi_1|_{r\to\infty}=0$，可得$A=0$。于是$\varphi_1=B\cdot\frac{1}{r}$。

根据$\varphi_2|_{r=R_1}=0$，得$C+D\cdot\frac{1}{R_1}=0$，即$C=-\frac{D}{R_1}$。于是$\varphi_2=D\cdot(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})$。

(2)'.根据$\varphi_2|_{r=R_2}=\varphi_1|_{r=R_3}$，得到$D\cdot(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1})=B\cdot\frac{1}{R_3}$。

(3)'.根据$-\oint_{S_3}\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}r^2d\Omega+\oint_{S_2}\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}r^2d\Omega=Q$，得到$-\oint_{S_3}\varepsilon_0\frac{d\varphi_1}{dr}r^2d\Omega+\oint_{S_2}\varepsilon_0\frac{d\varphi_2}{dr}r^2d\Omega=-\oint_{S_3}\varepsilon_0(-B\cdot\frac{1}{r^2})r^2d\Omega+\oint_{S_2}\varepsilon_0(-D\cdot\frac{1}{r^2})r^2d\Omega=\oint_{S_3}\varepsilon_0Bd\Omega-\oint_{S_2}\varepsilon_0Dd\Omega=\varepsilon_0B4\pi-\varepsilon_0D4\pi=Q$。于是$B-D=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$。

3.联立(2)'.(3)'.的结论$D\cdot(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1})=B\cdot\frac{1}{R_3}$，$B-D=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$，有$D\cdot(\frac{R_3}{R_2}-\frac{R_3}{R_1})-D=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$，得到$D=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\frac{R_3}{R_2}-\frac{R_3}{R_1}-1}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3})}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot-\frac{Q}{R_3(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$。于是$B=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}+D=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$。

4.将其代入(1)'.$\varphi_1=B\cdot\frac{1}{r}$和(2)'.$\varphi_2=D\cdot(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})$，得到$\varphi_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}$和(2)'.$\varphi_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})=-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}$。

③.场强.

利用$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，既可以通过$\mathbf{E}_1=-\nabla\varphi_1=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{Q+Q_1}{r}=\frac{Q+Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，和$\mathbf{E}_2=-\nabla\varphi_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$来得到场强；也可以通过$\mathbf{E}=-|\frac{\partial\varphi}{\partial n}|\mathbf{n}$来求解它：$\mathbf{E}_1=-|\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|\mathbf{n}$，其中$\mathbf{n}=\frac{\nabla\frac{1}{r}}{|\nabla\frac{1}{r}|}=-\hat{\mathbf{r}}$，$|\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|=|\frac{d\varphi_1}{dr}|=|\frac{d}{dr}(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+Q_1}{r})|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+Q_1}{r^2}$，同样也可得到$\mathbf{E}_1=\frac{Q+Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$。

④.导体上的球上的感应电荷.

同样根据$\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_i=\oint_{S_i}\varepsilon_i\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}_i=Q_i$，we can get that：【当然，直接用$-\oint_{S_i}\varepsilon_i\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}dS_i$=更好，因为$n_i$方向即r方向】$\oint_{S_1}\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_1=\oint_{S_1}\varepsilon_0\frac{d\varphi_2}{d(-r)}dS_1=\oint_{S_1}\varepsilon_0(-\frac{d\varphi_2}{dr})r^2d\Omega=\oint_{S_1}\varepsilon_0(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2})r^2d\Omega=\oint_{S_1}(\frac{Q_1}{4\pi})d\Omega=Q_1$。

例 2.

介电常数为ε的均匀介质球，至于均匀外场E_0中，球外为真空，求电势分布。

①.设φ_1为球外电势，φ_2为球内电势；在 r≥R 的区域，分别列写 4 个有用的东西：

(1).在介质球外区域内满足拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi_1=0$；

(2).边界条件：$\varphi_1|_{r\to\infty}=-E_0 r\cdot\cos\theta=-E_0 r\cdot P_1(\cos\theta)$(之前我们介绍过均匀电场的电势：$\varphi_P=\varphi_0-\mathbf{E}_0\cdot\triangle\mathbf{L}=-\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}$)；

(3).边值关系：$\varphi_1|_{r=R}=\varphi_2|_{r=R}$；

(4).边值关系：$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_{r=R}=\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_{r=R}$；

①'.在 r≤R 的区域：

(5).在介质球内区域内满足拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi_2=0$；

(6).边界条件：$\varphi_2|_{r\to 0}$=有限值；

(3)'.边值关系：$\varphi_2|_{r=R}=\varphi_1|_{r=R}$；(这个与上面的一样，可不用列写)

(4)'.边值关系：$\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_{r=R}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_{r=R}$；(此与上面也一样，只不过 **n** 指向介质 2→1)

②.根据定解条件，确定通解和待定系数：

1.由于φ理应是轴对称的，轴//$\mathbf{E}_0$，即$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi(r,\theta)$，与ϕ无关：那么应用球坐标系 laplace 方程$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$；然而φ不应是球对称的，因此φ应与θ有关，则介质球外的泊松方程$\nabla^2\varphi_1=0$，应没有$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$项(球对称时才有此项，且无其他项)，并且具现为：$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$(r≥R)；并且$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n r^n+D_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$(r<R)。【注：以上指导思想有误，以下过程中本该有$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$项，只不过其中的A_0,B_0=0 罢了(其实A_0也≠0，它=φ_0，因为之前就该令原点的电势为φ_0的)，但这个过程需要说明；而且这里这两个系数=0 只是巧合；同样，也该有$C_0+D_0\cdot\frac{1}{r}$项，且C_0,D_0=0，其中C_0=0 要在下下一段才能得出。】

2.将φ_1的通式代入①.(2).：$\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)|_{r\to\infty}=-E_0 r\cdot P_1(\cos\theta)$，可得$A_1=-E_0$，$A_n$=0(n=2,3...)，于是$\varphi_1=-E_0 r\cdot P_1(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}\cdot$

$P_n(\cos\theta)$；同样，根据①′.(2).有：$\sum_{n=1}^{\infty}[C_n r^n+D_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)|_{r\to 0}$=有限值，得到$D_n=0(n=1,2\ldots)$，因此$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^n\cdot P_n(\cos\theta)$。

3.利用(3).得到$-E_0R\cdot P_1(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}B_nR^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nR^n\cdot P_n(\cos\theta)$，即有：$-E_0R\cdot P_1(\cos\theta)+B_1R^{-2}\cdot P_1(\cos\theta)=C_1R\cdot P_1(\cos\theta)(n=1)$所对应的$-E_0R+B_1R^{-2}=C_1R$，即$B_1=(E_0+C_1)R^3$；以及$\sum_{n=2}^{\infty}B_nR^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}C_nR^n\cdot P_n(\cos\theta)(n\neq1)$所对应的$B_nR^{-(n+1)}=C_nR^n$，即$B_n=C_nR^{2n+1}$。

利用(4).$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_{r=R}=\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_{r=R}$，即$\varepsilon_0\frac{d\varphi_1}{dr}|_{r=R}=\varepsilon\frac{d\varphi_2}{dr}|_{r=R}$(这里 **n** 从介质 1 指向介质 2，即介质球内指向介质球外，是球面的外法向，同向于径向 **r**)，得到$-E_0\cdot P_1(\cos\theta)-2B_1R^{-3}\cdot P_1(\cos\theta)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1\cdot P_1(\cos\theta)(n=1)$所对应的$-E_0-2B_1R^{-3}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1$，即$B_1=-\frac{1}{2}(E_0+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1)R^3$；以及$\sum_{n=2}^{\infty}-(n+1)B_nR^{-(n+2)}\cdot P_n(\cos\theta)=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{n=2}^{\infty}nC_nR^{n-1}\cdot P_n(\cos\theta)(n\neq1)$所对应的$-(n+1)B_nR^{-(n+2)}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}nC_nR^{n-1}$，即$B_n=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{n}{n+1}C_nR^{2n+1}$。

联立由(3).(4).所得的$(n=1)$两个的式子，即有$(E_0+C_1)R^3=-\frac{E_0+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1}{2}R^3$，得到$(E_0+C_1)=-\frac{1}{2}(E_0+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}C_1)R^3$，于是 $0=3E_0+(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2)C_1$，得到$C_1=-\frac{3E_0}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0$；代入$B_1=(E_0+C_1)R^3$，得$B_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3$；

联立由(3).(4).所得的$(n\neq1)$两个的式子，即有$C_nR^{2n+1}=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{n}{n+1}C_nR^{2n+1}$，即$C_n=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{n}{n+1}C_n$，因此$C_n=0$；代入$B_n=C_nR^{2n+1}$，得$B_n=0$。

4.将上面 4 个系数代入 2.中所得的$\varphi_1=-E_0r\cdot P_1(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}B_nr^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)$，以及$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}C_nr^n\cdot P_n(\cos\theta)$，便有$\varphi_1=-E_0r\cdot\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3r^{-2}\cdot\cos\theta$，$\varphi_2=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0r\cdot\cos\theta$。

④.(注：标量的梯度一般都用空间直角坐标系的 **i**,**j**,**k** 表示，即使要换成球坐标系，最多也只能对$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$中的诸如$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}$下手，因为像平面极坐标系一样，球坐标系也没有相互垂直的三个基向量，因此 **i**,**j**,**k** 是改不了的，也就逃脱不了使用空间直角坐标系来表示∇的命运；不过对于某些特殊的，被∇作用的函数，如r、$\frac{1}{r}$，我们用直角坐标系处理了它后，其结果可转化为用球坐标系的矢径 **r** 表示)

球内电场 $\mathbf{E}_2=-\nabla\varphi_2=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\nabla(r\cdot\cos\theta)=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\nabla z=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0(\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial z}\mathbf{k})=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\mathbf{k}=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0$。可见它仍然是个匀强电场，并且值比$\mathbf{E}_0$小。【注：此处最好不用$\mathbf{E}=-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\cdot\mathbf{n}$求解，因为$\mathbf{n}=\frac{\nabla\varphi_2}{|\nabla\varphi_2|}$的方向比较复杂，梯度中有除 r 外的θ因子存在，不是简单的径向 **r**】

【注：既不能用数学基础二：$\nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r}$，误操作为$\nabla(r\cdot\cos\theta)=\cos\theta\nabla r=\cos\theta\frac{\mathbf{r}}{r}$；也最好不要这么操作：$\nabla(r\cdot\cos\theta)=\cos\theta\nabla r+r\nabla\cos\theta$；我们对此做一证明，类似于数学基础二：

$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，$\nabla\cos\theta=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\frac{z-z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{z-z'}{r}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{z-z'}{r}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{r}\mathbf{k}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}(z-z')\mathbf{i}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}(z-z')\mathbf{j}+\frac{r-(z-z')\frac{\partial r}{\partial z}}{r^2}\mathbf{k}=-\frac{1}{r^2}(z-z')(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k})+\frac{1}{r}\mathbf{k}=-\frac{1}{r^2}(z-z')\nabla r+\frac{1}{r}\mathbf{k}=-\frac{1}{r^2}(z-z')\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{1}{r}\mathbf{k}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}(z-z')+\frac{1}{r}\mathbf{k}=\nabla\frac{1}{r}(z-z')+\frac{1}{r}\mathbf{k}$；于是$\nabla(r\cdot\cos\theta)=\frac{z-z'}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}+r\cdot[-\frac{\mathbf{r}}{r^3}(z-z')+\frac{1}{r}\mathbf{k}]=\frac{z-z'}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}-\frac{\mathbf{r}}{r^2}(z-z')+\mathbf{k}=\mathbf{k}$，可以看出，结果$\nabla(r\cdot\cos\theta)=\mathbf{k}$在预料之中，但得到过程很麻烦。】

球外电场$\mathbf{E}_1=-\nabla\varphi_1=E_0\nabla(r\cdot\cos\theta)-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\nabla(r^{-2}\cdot\cos\theta)=\mathbf{E}_0-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\nabla\frac{z}{r^3}$。其中$\nabla\frac{z}{r^3}=x\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla z=-3\frac{1}{r^4}z\nabla r+\frac{1}{r^3}\mathbf{k}=-\frac{3}{r^3}\cos\theta\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{1}{r^3}\mathbf{k}=\frac{\mathbf{k}-3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}}{r^3}$，于是$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_0+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}$；当然你也可以将与合并：$(1-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3})\mathbf{E}_0+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}3\cos\theta E_0\hat{\mathbf{r}}$。

⑤.对于$\varphi_1=-E_0r\cdot\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3r^{-2}\cdot\cos\theta$的第二项，我们进行如下讨论：根据$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$，则球内电极化强度$\mathbf{P}_2=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\mathbf{E}_2=(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{E}_2=(\varepsilon-\varepsilon_0)(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0)=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}3\varepsilon_0\mathbf{E}_0$，由于$\mathbf{P}_2$也是匀强的，则总电偶极矩$\sum_i\mathbf{p}=\mathbf{P}_2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3\mathbf{E}_0$。我们将$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\mathbf{E}_0R^3=\frac{\sum_i\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0}$取模后，代入$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3r^{-2}\cdot\cos\theta$之中，可得$\frac{|\sum_i\mathbf{p}|\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{\sum_i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0r^3}$，这恰好就是介质球的偶极矩产生的电势之和！【$U=U_++U_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_--r_+}{r_+r_-}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L\cdot\cos\theta}{r^2}=\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0r^2}$】

我们再将$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3=\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}$代入$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_0+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}$的右边部分，得到$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}=\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}$，这恰好就是介质球的电偶极子们在空间中的场强分布。我们可以取两个方向的特例：a.偶极距方向上的场强分布：

$\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}=\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\mathbf{k}-\mathbf{k}}{r^3}=\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{k}}{r^3}$，可将其与$E=-\frac{\partial\frac{q\cdot L\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\partial x}|_{y=0}=-\frac{q\cdot L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial\frac{x}{|x^3|}}{\partial x}=-\frac{q\cdot L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial\frac{1}{x|x|}}{\partial x}=\frac{q\cdot L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2|x|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cdot p}{x^2|x|}$对比，由于 r 总是正值，那么这两者是完全等价的；我们再看看 b.中垂面方向上的场强分布：$\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{k}}{r^3}=\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{0-\mathbf{k}}{r^3}=-\frac{|\sum_i\mathbf{p}|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\mathbf{k}$，这是不是也与$E=-\frac{\partial\frac{q\cdot L\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\partial x}|_{x=0}=-\frac{q\cdot L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3}|_{x=0}=-\frac{q\cdot L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|y^3|}{y^6}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{|y^3|}$所描绘的物理图景一致呢？

强大的数学工具，需要强大的人来驾驭，才能体现出它的 power！

2.4 镜像求解法

若求解电场的区域内有自由电荷，则我们必须解泊松方程了。不过我们在这里研究的情形虽属于此，但更特殊一些：所考虑的(即要求解的)区域内，1.只有一个或几个

点电荷(在这些点处应用泊松方程)。2.区域边界是导体或介质界面(= =这一点并不算对求解区域内贡献了自由电荷，并且并不新鲜：正如有导体存在时的唯一性定理一样，所考虑的复连通区域的内边界可由导体表面构成；而对于介质界面的情形，这不像唯一性定理中，介质界面以二介质的分界面的形式存在于所考虑的场域内，这里的介质界面是边界。)。

这样就可使用镜像求解法。【能用镜象法求解的，一般也可以用分离变量法求解；因为泊松方程的解，可以看作由泊松方程的一个特解，加上对应拉普拉斯方程的通解构成。——其中，泊松方程的那个特解，就是泊松方程$\nabla^2\varphi=-\frac{q_f\cdot\delta[\mathbf{r}-a\mathbf{k}]}{\varepsilon}$中的分子里的$q_f$所产生的电势；而拉普拉斯方程的通解，得由体系的电势的对称性选择合适的坐标系下的 laplace 方程，并且该项作为通解项也有物理含义：对应着极化电荷或感应电荷在空间中产生的电势。——这部分电势应在所研究的空间区域没有奇点，一方面是因为有奇点意味着有电荷，而为了仅考虑φ'而移走q_f后，极化/感应电荷并不结团分布(集中于某一点)，[不过由于它们一般情况下分布在所研究的区域边界上甚至以外，因而负幂次项也可存在于所研究区域内，且此时研究区域不在原点，以使得负幂次项不会取到∞]；另一方面，泊松方程的特解得是q_f所唯一提供的电势，该处不能有任何其余的电势无穷大项(然而通解项中就有 r 的负幂次项)。——以上二者就要求了通解项中的 r 的负幂次项有可能=0(也有可能存在(即负幂次系数≠0)：比如q_f并不在原点(以至于ρ_P不在原点附近分布)、或者原点附近区域并不是我们想考察的区域)】

【当然，从$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$这方面看，似乎$\varphi=\varphi_q+\varphi'$中的$\varphi'$应当全空间上满足拉普拉斯方程的——因为$\nabla^2\varphi'=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$中分子是自由电荷体密度，而$\varphi'$是极化 or 感应电荷，当我们只考察极化 or 感应电荷引起的电势时，保持它们的分布状况不动，移除ρ_f，此时由于全空间没有ρ_f而$\nabla^2\varphi'=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}=0$，因而$\nabla^2\varphi'=0$。——但其上从泊松方程的来源可知，$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f+\rho_P)$，这方面来讲$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$，分子$\rho_f+\rho_P$会在移除$\rho_f$后成为$\rho_P$，它在极化 or 感应电荷分布区域并不=0。——其实二者是和谐的，因为$-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$中分母是$\varepsilon$，而$-\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$中分母是$\varepsilon_0$，$\varepsilon$就代表了$\rho_P$的存在】

【因此φ'仍只在极化 or 感应电荷分布区域之外，满足拉普拉斯方程；并且其满足拉普拉斯方程后并不意味着其中的 r 的负幂次项全=0，这得从具体 condition 才能判断。——话说了这么多，《数学物理方程》一句话就能解释它：点电荷产生的电势，本身就是泊松方程的一个特解，代入特解+通解后，通解方程本身就是齐次的。】

1.镜像求解法的基本问题

点电荷附近有导体或介质存在，静电场由点电荷、感应/极化电荷共同激发。

感应电荷和极化电荷不好求，当作物(虽然点电荷看来才是实物)，求它们关于区域边界的像，即用场外的某个或某几个假想电荷代替这两种电荷。【这一段的意思是："像电荷"本身是用来等效代替感应/极化电荷的】

以点电荷为物，以界面为镜，以假想电荷为像，镜像法。【这里又说像电荷是点电荷的像，即却又将点电荷看作物：是因为①.一般来说感应电荷和极化电荷总在区域边界上存在，它们本身就是"镜子"，镜子关于镜子的像不就是镜子本身么，怎么会是像呢；另外，点电荷在要求解的区域内，像电荷在要求解区域外，二者均距离边界这一镜子分别有一段距离，因而看上去点电荷更像是物；②.另一方面，"像电荷"是个点电荷(多数时候只有一个)，而感应/极化电荷是以面密度分布在界面上的"带电体/点电荷集"，因而不像是"像电荷"的物，反而点电荷才像是它的物③.而且对于同一区域、同一边界、同一介质 or 导体，若点电荷在求解区域内位置不同，对应的像电荷便不同，且它俩一一对应，这样一来，点电荷就更像是物了。

——但其实，之所以像电荷与点电荷一一对应，是因为点电荷的每一个位置，均唯一对应着介质表面的极化电荷分布 or 导体表面的感应电荷分布状况，而有了它们后，后者才在外空间、非所研究区域内映射处一个等效像电荷；所以，"像电荷"的对应之物，本质上是感应/极化电荷们】

2.理论基础

(1).理论基础：唯一性定理

(2).实质：在被研究的场域以外，用不存在的假想"像电荷"代替真实的感应电荷和极化电荷对场点的作用。

(3).保证原有的场方程(是指泊松方程)和边界条件不变，像电荷的位置和大小由场方程和边界条件决定。(???)

注意：①.电势必须满足基于原有电荷分布(未放置电荷时)的泊松方程和拉普拉斯方程。研究场域内不可放置电荷(否则研究区域的泊松方程会改变，会新增一个像电荷处的泊松方程，或者说原有的泊松方程右侧分子会多一项)。

②.以像电荷代替真实感应/极化电荷，原来的导体/介质界面不再存在，整个空间看成无界均匀空间，介电系数为所研究区域的介电系数。【这非常像**数物**中的解析延拓、有限区间上的函数的傅里叶展开】

③.像电荷是虚构的，只是产生的电场与真实电荷(极化/束缚电荷)等效。电量与真实电荷不一定相等，不过某些问题恰好相等。

④.适用范围：场区电荷是点电荷，或无限长带电直线。边界面是简单规则几何面(球面，柱面，平面)。

定解条件[即边界条件和微分方程(这里一般没有边值关系了)]仍需给出，一方面是为了服务于我们用边界条件来确定待定系数(像电荷电量和位置)，另一方面给出充足的理由：当我们求得符合条件的解后，便是唯一正确的解了。——要知道定解条件的出现并不意味着我们要使用分离变量法。它并不是分离变量法所特有的。只是分离变量法也需要定解条件来确定各项待定系数而已，这一点是二者/大家的共同点。

3.镜像求解法的步骤

(1).正确写出电势所满足的微分方程以及给定的边界条件。

(2).根据边界条件，计算像电荷的电量和所在位置。

(3).由已知电荷和像电荷求出电势的解析形式。

(4).根据需要，求场强，电荷分布，以及电场力(场)。

4.举例讨论

(一).界面是平面：

例 1.接地无限大平面导体板附近有一点电荷，其电量为 Q，距板 a 处。求空间电势分布。

无限大平面导体板，处在 y-o-z 平面，将空间分为两部分；从 z 轴正向看去，设 Q 在其所分隔的右边的空间中，则右边才是我们的求解区域(因为右场域内有电荷存在，我们这一节就为求解有电荷分布的区域的电势而存在的；无电荷的区域为何不用之前的拉普拉斯方程的通解呢)，因此像电荷只能在左区(否则右区的泊松方程不再是原有的泊松方程，且右区的场和电荷分布改变了)；由于总能设 Q 在 x 轴上，而 Q 所激发的场、导体板上因 Q 而出现的感应电荷、感应电荷所激发的电场、二者共同产生的合场，四者均应关于 x 轴成轴对称分布，因此像电荷也得在 x 轴的负半轴上，以使得其取代板上的感应电荷后，与 Q 产生的合电势仍符合右区域原本轴对称的电势分布。

(1).$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}=-\frac{Q\cdot\delta(x-a,y-0,z-0)}{\varepsilon_0}$，其中$\delta(x-a,y-0,z-0)$表示包含(a,0,0)的微小体积元，$Q\cdot\delta(x-a,y-0,z-0)$代表该体积元的自由电荷平均体密度，三维的$\delta$函数自带单位/$m^3$。【所需求解的这右边的区域内，只有(a,0,0)这点满足泊松方程，其他地方均满足的是拉普拉斯方程】

(2).$\varphi|_{r\to\infty}=0$【因为这是电荷分布于有限区域的情形，常选无穷远点为电势零点】

(3).$\varphi|_{x=0}=0$

1.设$\varphi_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'})$。【这么设的话，由于有$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$此项，可以使得在考察区域内的(a,0,0)点处的微分方程为泊松方程；而$\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}$项由于Q′在非考察区域，因而其在求解区域内所创造的微分方程，都是拉普拉斯方程；所以总的来说，这样的两项所构成的φ_P，满足“只有在(a,0,0)点处的微分方程为泊松方程，其余地方都是拉普拉斯方程”这个微分方程条件；这样的设置是合理的，不是凭空捏造的】

其中，r′为(感应电荷的)像电荷到参考点 P 的距离，r 为 Q 到场点 P 的距离；若进一步设像电荷在 x 轴上的坐标为b(b<0)、P 到原点 O 的距离为 R、θ为 R 与 x 轴夹角，则φ_P可进一步表示为：$\varphi_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{\sqrt{R^2-2aR\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R^2-2bR\cdot\cos\theta+b^2}})$，可以看出这个满足了(1).的$\varphi_P$同样也满足(2).$\varphi|_{r\to\infty}=\varphi|_{R\to\infty}=0$。而为了使得其满足(3).$\varphi|_{x=0}=0$，即$\frac{Q}{\sqrt{R^2-0+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R^2-0+b^2}}=0$，θ已确定，则该式得对于任意$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{y^2+z^2}$均成立，不妨分别取 R=0 和 R=∞，则$\frac{Q'}{Q}=-\frac{|b|}{|a|}$且$\frac{Q'}{Q}=-\frac{\sqrt{\infty^2+b^2}}{\sqrt{\infty^2+a^2}}=-1$，因此得到$Q'=-Q$，以及$|b|=|a|$所对应的$b=-a$。

于是$\varphi_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{R^2-2aR\cdot\cos\theta+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+2aR\cdot\cos\theta+a^2}})$。即$\varphi_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}})$。

由于这样的φ_P满足微分方程和边值关系、边界条件，因此根据唯一性定理，它就是真实存在板右区的φ的解析形式。

2.下面我们来求求板上感应电荷分布情况：

①.板上各处的面密度：

根据导体中$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系：$\sigma_f=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S$，该式是假设了介质一为导体板内部区域后才得到的($\because\mathbf{E}_1=0$消去了$-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$得到了$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\sigma_f$)，介质二为 x>0 的研究区域，则 **n** 取界面法向中 1→2 的那个方向，即指向介质二的 x 轴正向：**i**。——因此原式变为$\sigma_f=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_S$，而不是$\sigma_f=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial(-x)}$。

因此$\sigma_f=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_S=\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}})|_{x=0}=\frac{Q}{4\pi}\frac{-2a}{[a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{[a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{[a^2+R^2]^{\frac{3}{2}}}$，可见板上感应电荷各点面密度不同，但均与 Q 异号，且在板上距离原点 O 越远的地方，电荷面密度的绝对值(量值)越小；电荷最密集的地方在原点处，这与经验事实符合。

②.总的感应电荷量：【注：以下采用平面极坐标系进行面积分，r 相当于 R(0,y,z)，即 x=0 时候的$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$=$\sqrt{y^2+z^2}$；因此该平面极坐标系建立在 y-o-z 平面上】

$Q_{感}=\iint_{y-o-z}\sigma_f\cdot dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sigma_f\cdot(rd\phi)dr=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{[a^2+R^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot RdR=$ $Q\int_0^{\infty}-\frac{a}{2}\frac{1}{[a^2+R^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot d(a^2+R^2)=Q\cdot a\frac{1}{[a^2+R^2]^{\frac{1}{2}}}|_0^{\infty}=-Q=Q'$。嘿嘿，和谐之处尽在不言中。【但要注意：感应电荷电量$Q_{感}$=像电荷电量Q'，只是个巧合】

3.场强：既然感应电荷在右区产生的电势能用像电荷在右区产生的电势替代，那么像电荷在右区的电场强度也可直接用于替代感应电荷在右区产生的电场强度。——即我们不需要进行诸如对总电势进行$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$操作，或对两个电势分别进行$\mathbf{E}_1=-\nabla\varphi_1$、$\mathbf{E}_2=-\nabla\varphi_2$的操作，直接沿用两个点电荷在空间产生的场强叠加即可。【当然，合场强的解析表达式还是需要先求电势再求梯度的】

4.板左区的φ的解析形式：

正如解析延拓的 F(z)只在 f(z)的收敛域内与之相同一样，我们在 1.中所得的φ_P，它虽然在板左区多数地方也有有限值，但这并不一定是左区电势的解析形式。一个简单的思辨过程就是：φ_P中含有$\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$这一项，这意味着(-a,0,0)处有点电荷，然而这只是为了描绘右区电势所引入的等效像电荷，实际上是不存在(于左区)的。

但要知道，我们手里掌握有：板上的电荷分布情况，以及右区的电荷分布情况(Q)，和左区的电荷分布情况(无电荷分布)，那么我们便知道了整个空间中电荷分布。因此(或者说因整个空间上的微分方程和边值条件的已知)当然能求出左区的电势以及整个空间的电势分布：

首先由于板上感应电荷的轴对称(关于 x 轴)分布，$\sigma_f=-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{[a^2+R^2]^{\frac{3}{2}}}$，以及这些电荷都在 y-o-z 面上，那么板上感应电荷对左区产生的电势，应与其对右区产生的电势对称。——对此我们不需要从σ_f做起，直接沿用$\varphi_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right)$中的非$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$成分，即由于电势的标量叠加原理，剩下的$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$这一项，一定是板上感应电荷对右区电势的贡献(之前我们认为是像电荷的贡献)。

那么若 Q 不存在，但板上现有的感应电荷单独存在，且仍不改变分布情况的话，应有$\varphi_f(-x)=\varphi_f(x)$，那么$\varphi_f$的左区(x<0 的区域)的表达式应为$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(-x+a)^2+y^2+z^2}}$。这和 Q 在左区产生的电势$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$等量异号，同时也说明了左区的各点电势=0 确实满足拉普拉斯方程。并且对左区而言，感应电荷的(等效)像电荷就是右区的 Q 所在位置(a,0,0)上所放置的一个等量异号的点电荷$-Q$。

5.另外，我觉得前人们是用其他方法求出解析形式后，才想出了这个镜象法的：这个从另外途径所得到的唯一的解析形式中含有一个点电荷的电势表达式，这才启发他们思考，是不是极化电荷和束缚电荷能够等效为这个像电荷，于是创造了这个得到它的途径。

(二).界面为球面：

例 2.有一半径为R_0的接地导体球，距球心 a 处($a>R_0$)有一点电荷 Q，求空间电势分布。

首先明确，求解区域是球外区域(因为球外区域有电荷分布；而且导体球内电势=0，无需求解了)。因此像电荷只能在球内；同样，总能设 Q 在 x 轴上，且 Q 所激发的场、球壳上因 Q 而出现的感应电荷、感应电荷所激发的电场、二者共同产生的合场，四者也均应关于 x 轴成轴对称分布，因此像电荷也得在球内区域的 x 轴上(其 x 不一定<0)，以使得其取代板上的感应电荷后，与 Q 产生的合电势仍符合球外区域原本轴对称分布的电势。

(1).$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}=-\frac{Q/\delta(x-a,y-0,z-0)}{\varepsilon_0}$【the same】

(2).$\varphi|_{r\to\infty}=0$【the same】

(3).$\varphi|_{r=R_0}=0$

1.同样我们假设球内对应地只有一个像电荷，它和 Q 在球外产生的电势之和仍为$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'})$。由于像电荷在球内，则该表达式同样满足球外区域的微分方程条件。其中的r'仍为像电荷到参考点的距离，r 为 Q 到场点 P 的距离；仍设像电荷在 x 轴上的坐标为b、P 到原点 O 的距离为 R、R 与 x 轴夹角为θ，则φ可进一步表示为与之前一样：$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{\sqrt{R^2-2aR\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R^2-2bR\cdot\cos\theta+b^2}})$，可以看出该$\varphi$已经满足了(2).$\varphi|_{r\to\infty}=\varphi|_{R\to\infty}=0$。

而为了使得其满足(3).$\varphi|_{r=R_0}=0$，得有$\frac{Q}{\sqrt{R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R_0^2-2bR_0\cdot\cos\theta+b^2}}=0$，即$\frac{Q'^2}{Q^2}=\frac{R_0^2-2bR_0\cdot\cos\theta+b^2}{R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2}$，该式的 R 已确定为$R_0$，则只剩下必须对于任一$\theta$均成立，那么分离变量得$(R_0^2+a^2)Q'^2-(R_0^2+b^2)Q^2=2R_0\cos\theta(aQ'^2-bQ^2)$，左边为常数，右边含变量$\theta$，因此要想等式恒成立，两边不仅都得等于一个常数，这个常数还得是 0。

于是，$(R_0^2+a^2)Q'^2=(R_0^2+b^2)Q^2$、$aQ'^2=bQ^2$。将后式代入前式，得到$\frac{R_0^2+a^2}{R_0^2+b^2}=\frac{a}{b}$，即有$(b-a)R_0^2+a^2b-ab^2=0$，不要追求对称性而忘了谁是自变量啊！写成标准形式：$b^2-(a+\frac{R_0^2}{a})b+R_0^2=0$，于是$(b-a)(b-\frac{R_0^2}{a})=0$，但由于若 b=a，则像电荷落到球外去了，那么 $b=\frac{R_0^2}{a}$。【这一关系非常有趣：$b\cdot a=R_0^2$，这就是射影定理，即斜边的平方=斜

边的 cos×斜边的$\frac{1}{\cos}$：利用此，我们可直接过 Q 点作球的切面，切点朝 x 轴的投影，即为像电荷所在位置。】

对于后式，$Q'=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}Q=\pm\frac{R_0}{a}Q$，但为了满足(3).$\varphi|_{r=R_0}=0$，所必须有的 $\frac{Q}{\sqrt{R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R_0^2-2bR_0\cdot\cos\theta+b^2}}=0$，可得Q′、Q必须异号，才能满足(3).，因此 $Q'=-\frac{R_0}{a}Q$。

因此$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-2aR\cdot\cos\theta+a^2}}-\frac{R_0}{a}\frac{1}{\sqrt{R^2-2\frac{R_0^2}{a}R\cdot\cos\theta+(\frac{R_0^2}{a})^2}}\right)$

2.球壳上感应电荷分布情况：

①.球壳上各处的面密度：

$$\sigma_f=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_S=-\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-2aR\cdot\cos\theta+a^2}}-\frac{R_0}{a}\frac{1}{\sqrt{R^2-2\frac{R_0^2}{a}R\cdot\cos\theta+\left(\frac{R_0^2}{a}\right)^2}}\right)'|_{R=R_0}=$$

$$-\frac{Q}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{2R_0-2a\cdot\cos\theta}{(R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R_0}{a}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2R_0-2\frac{R_0^2}{a}\cdot\cos\theta}{(R_0^2-2\frac{R_0^2}{a}R_0\cdot\cos\theta+(\frac{R_0^2}{a})^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{R_0-a\cdot\cos\theta}{(R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2)^{\frac{3}{2}}}-\right.$$

$$\left.\frac{R_0}{a}\frac{R_0-\frac{R_0^2}{a}\cdot\cos\theta}{(R_0^2-2\frac{R_0^2}{a}R_0\cdot\cos\theta+(\frac{R_0^2}{a})^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{R_0-a\cdot\cos\theta}{a^3(\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{R_0}-\frac{1}{a}\cdot\cos\theta}{(1-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+\frac{R_0^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}}\right)=$$

$$\frac{Q}{4\pi R_0a}\left(\frac{\frac{R_0^2}{a^2}-\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta}{(\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1-\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta}{(1-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+\frac{R_0^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{Q}{4\pi R_0a}\frac{\frac{R_0^2}{a^2}-1}{(\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+1)^{\frac{3}{2}}}$$

②.球壳上的感应电荷：

$$Q_{感}=\iint_S\sigma_f\cdot dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma_f\cdot(R_0\sin\theta d\phi)R_0d\theta=R_0^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{Q}{4\pi R_0a}\frac{\frac{R_0^2}{a^2}-1}{(\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cdot\cos\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$\sin\theta d\theta=-\frac{R_0}{a}Q=Q'$。【感应电荷电量$Q_{感}$=像电荷电量Q′，只是个巧合】

比如对于接地的空心导体球壳(而不是导体球)，距离球心 a<R_1处放置一点电荷 q(而不是像 a>R_0一样 a>R_2)，用镜像法求电势和感应电荷分布时：会发现感应电荷量值与像电荷量值不等(但符号仍均与点电荷相反)。【此时仍有 $b=\frac{R_0^2}{a}$、$Q'=-\frac{R_0}{a}Q$成立】

并且我们还会收获到以下认识：外球壳电势=无穷远电势=0，可反推出球壳外空间场强=0，因为不可能有 E 先增后减 or 先降后升的“原因”，所以也就不会有此过程。因此球外各点电势=0，于是外球壳表面场强=0，于是外球壳表面无电荷分布。——这便是静电屏蔽效应之一。

其实，若在球心放置一个偶极子，它也将与内球壳在球外产生的偶极场相互抵消，使得球外电势分布只由外球壳表面均匀分布的$\sigma_f=\frac{q}{4\pi R_2^2}$产生，并因此外场和球外电势均

球对称(只与 r 有关)。其中的 q 既为导体球壳外表面带电量，又为导体球壳原先或现在的带电总量——此时内球壳虽不均匀带电(为了产生偶极矩)，但内球壳带电总量=0(取一高斯面比内表面稍膨胀，于是 $0=\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=q_{高斯面内}=q_{球壳内表面}+q_{腔内}=q_{球壳内表面}$；而$q_{球壳内表面}+q_{球壳外表面}$=原来的带电量 q(电荷守恒)，所以$q_{球壳外表面}=q-q_{球壳内表面}$=0，为球心处的电偶极子是成对异号等量的点电荷，在内球面产生的感应电荷量值也是等量异号的)。

所以球外的电势、电场，只由球壳原本的带电量，以及腔内带电体带电量决定：它俩最终决定了球壳外表面带电量，以此决定球外电势的量值大小；而球壳外表面电荷的均匀分布，将使得球外电势永远球对称分布。与腔内电荷分布、内球壳上的感应电荷分布状况无关：内球壳的电荷会随着腔内电荷的改变而改变，使得它们对外合场强=0(或者说它们各自的电场线均穿不过球壳；始于其中一方，终于另一方)，在球壳外空间产生的电势也为 0——但是腔内电荷的量值如果增多，则增多的部分将转移到外球壳上，所以虽然球外电势球对称分布，但同一点的电势量值大小，仍然与腔内带电体带电量有关。【除非导体球壳接地，此时才是真正的静电屏蔽效应：导体球壳外表面仅仅是大地这个大导体的大表面之一，于是导体外表面电荷会转移到地球外表面，球壳外表面分配到的电荷忽略不计，它们产生的球外电势量值也很低】

但，腔内的电场(或者说腔内任意两点的电势差)，与球外的电荷分布状况，甚至连量值都无关；但，腔内电势的各点的量值与求外电荷的量值有关(如果球壳不接地的话)。——球壳外带电体产生的电场线，以及球壳外表面产生的电场线，仍然都穿不过/透静电平衡后的导体球壳，它们互相终止于彼此。如果在腔内被保护的物体本身不带电的话，则内表面以及腔内都没有电场。【可见当导体球壳接地时，此时也成为了绝对的静电屏蔽：连腔内电势的绝对量值，都连同相对量值而一同不受外界影响了。】

所以，球壳对求外电场的屏蔽(对球内物体的保护)，比球壳对求内电场的屏蔽(对球外物体的保护)，要更优一筹：被保护区域里，就两固定点之间的电势差而言，腔内电势差不受外电场的影响；而球壳外的两固定点，之间的电势差，要受腔内带电体的影响(如果球壳都不接地的话)。

若不给出外球壳表面带电量，只是说其接地，即给出电势=0，则首先这仍相当于给定了边界条件而可以定解。其次，这与外球壳表面带电量=0 却不已知电势的情况等效。——若外球壳带电量=0，则球外无电场，则从无穷远积分到外球壳，电势差=0，得到外球壳电势=0。【所以我们既可以用这个等效思想，也可以用之前的反推的思想得到之前同一个(等效的)物理情景。】

以下这道题就可采用“球壳电势=0”等效于“球壳原总带电量=0”的结论(因为腔内无带电体，所以外表面电量=总带电量，即内表面电量为 0)，从而沿用 $b=\frac{R_0^2}{a}$、

$Q'=-\frac{R_0}{a}Q$等结论；并直接认为Q_0在静电平衡后，均匀分布于外球壳表面，这样就能直接给出额外由Q_0导致的多出来的一项电势$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_自}{R_0}$了——而不需要再对$Q_0$假定一个关于它的像电荷 Q''，并推得它得处于球心位置了。【之前我没有这方面的经历，就多走了一些弯路】

同样地，对于球壳带电总量不是 0 或不接地的情况，其带电总量=q(这里的 q 应指外球壳带电量，但由于仍设球壳腔内无带电体，所以写成带电总量)，也与其电势被确定为φ等效——并且具体点说，等效电势$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_2}$，等效总带电量 $q=4\pi\varepsilon_0R_2\varphi$。

例 3.如上题，但导体球不接地，带电Q_0，求球外电势，并求 Q 所受的力。【边界条件中，对于导体界面至少给定φor$Q$or$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，这里不给$\varphi$则给了$Q$】

1 个微分方程和 2 个边界条件中，只需要改动(3).$\varphi|_{r=R_0}=0$为(3).$\varphi|_{r=R_0}=$const.，因为接地或静电平衡下，导体均是个等势体。

该题所言的Q_0，本身应该包含了两部分，一部分是自身带的电荷$Q_自$，另一部分是因 Q 的存在而产生的感应电荷$Q_感$。因此$Q_0=Q_自+Q_感$，于是$Q_自=Q_0-Q_感=Q_0-Q'=Q_0+\frac{R_0}{a}Q$——不过这里有个小问题，$Q'=-\frac{R_0}{a}Q$本身是由$\varphi|_{r=R_0}=0$ 得到的，但若$Q_自=0$，且球不接地，那么球表面并不一定(没有理由看出)有$\varphi|_{r=R_0}=0$，那此处的 $Q'=-\frac{R_0}{a}Q$又是基于什么样的假设得来的呢？——而且，$Q_感=Q'$也只是在之前的两个特例中成立，它在此处也成立吗？

确实，这样直接沿用之前$\varphi|_{r=R_0}=0$所导出的 $Q'=-\frac{R_0}{a}Q$的确有点牵强。不过接下来我们会给出一个比较好的答复：若$Q_自=0$，且在此情形下仍有$Q_感=Q'$，则$\varphi|_{r=R_0}=C$所对应的$\frac{Q}{\sqrt{R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R_0^2-2bR_0\cdot\cos\theta+b^2}}=C$，其在 C≠0 时，不存在这么一个 Q'解，甚至不存在任何可能的(Q',b)的组合，使得该方程对于每一θ值均成立。

也就是说，要想使得$Q_自=0$下所设的φ函数满足其在导体表面是个定值 C，即$\frac{Q}{\sqrt{R_0^2-2aR_0\cdot\cos\theta+a^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{R_0^2-2bR_0\cdot\cos\theta+b^2}}=C$，该电势值 C 必须为 0，并且因此解得仍有 $b=\frac{R_0^2}{a}$、$Q'=-\frac{R_0}{a}Q$这两个关系存在。所以“$Q_自=0$”+“不接地(or 不告诉接地与否)”=“接地”。

1.在承认了这样一个事实后，我们基于此继续往下推导。现在令“$Q_自\neq0$”，即从导体球不接地且带电量Q_0中只有感应电荷$Q_感=Q'$成分，变为了Q_0中引入了原有带电量$Q_自\neq0$，且仍假设$Q_自$=对应的像电荷电量 Q''。由于原有体系已经满足$\varphi|_{r=R_0}=0$，因此

$Q_{自}$对边界的像电荷 Q″，必须处在球心的位置，才能使得$\varphi|_{r=R_0}$继续是个常数，且其值就是$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q''}{R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{自}}{R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0-Q_{感}}{R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0-Q'}{R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0+\frac{R_0}{a}Q}{R_0}$。

因此$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'}+\frac{Q''}{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\frac{-\frac{R_0}{a}Q}{r'}+\frac{Q_0+\frac{R_0}{a}Q}{R})$。

2.场强：$Q_{自}$和$Q_{感}$在球外的电势已被像电荷 Q′和 Q″对球外的电势替代，则它俩在球外所产生的电场也被 Q′和 Q″产生的电场替代，因此$Q_{自}$和$Q_{感}$在(a,0,0)即 Q 处产生的场强为 $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q'}{r'^2}+\frac{Q''}{R^2})|_{\substack{r'=a-b\\R=a}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{-\frac{R_0}{a}Q}{(a-b)^2}+\frac{Q_0+\frac{R_0}{a}Q}{a^2})|_{b=\frac{R_0^2}{a}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{-\frac{R_0}{a}}{(a-\frac{R_0^2}{a})^2}+\frac{\frac{Q_0}{Q}+\frac{R_0}{a}}{a^2})$。

3.受力：$F=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{-\frac{R_0}{a}}{(a-\frac{R_0^2}{a})^2}+\frac{\frac{Q_0}{Q}+\frac{R_0}{a}}{a^2})$。

张量简介

两矢量并列，之间不作标记 or 矢积运算，称为并矢。并矢是张量的一种特殊情形。

1.设三维一阶张量$\vec{\mathbf{A}}=A_i\vec{i}+A_j\vec{j}+A_k\vec{k}$，$\vec{\mathbf{B}}=B_i\vec{i}+B_j\vec{j}+B_k\vec{k}$，则三维二阶张量$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}=\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}=$

$$\begin{pmatrix}A_1\vec{i}\\A_2\vec{j}\\A_3\vec{k}\end{pmatrix}(B_1\vec{i}\ \ B_2\vec{j}\ \ B_3\vec{k})=\begin{pmatrix}A_1B_1\vec{i}\vec{i} & A_1B_2\vec{i}\vec{j} & A_1B_3\vec{i}\vec{k}\\A_2B_1\vec{j}\vec{i} & A_2B_2\vec{j}\vec{j} & A_2B_3\vec{j}\vec{k}\\A_3B_1\vec{k}\vec{i} & A_3B_2\vec{k}\vec{j} & A_3B_3\vec{k}\vec{k}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}B_1A_1\vec{i}\vec{i} & B_1A_2\vec{i}\vec{j} & B_1A_3\vec{i}\vec{k}\\B_2A_1\vec{j}\vec{i} & B_2A_2\vec{j}\vec{j} & B_2A_3\vec{j}\vec{k}\\B_3A_1\vec{k}\vec{i} & B_3A_2\vec{k}\vec{j} & B_3A_3\vec{k}\vec{k}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}B_1\vec{i}\\B_2\vec{j}\\B_3\vec{k}\end{pmatrix}(A_1\vec{i}\ \ A_2\vec{j}\ \ A_3\vec{k})=\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{A}}$$

【其中的$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$也可写作$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$，$T_{ij}=A_iB_j$，$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}=\sum_{ij}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$】

2.三维的二阶单位张量$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}=\begin{pmatrix}1\vec{i}\vec{i} & 0\vec{i}\vec{j} & 0\vec{i}\vec{k}\\0\vec{j}\vec{i} & 1\vec{j}\vec{j} & 0\vec{j}\vec{k}\\0\vec{k}\vec{i} & 0\vec{k}\vec{j} & 1\vec{k}\vec{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\vec{i}\vec{i} & 0 & 0\\0 & 1\vec{j}\vec{j} & 0\\0 & 0 & 1\vec{k}\vec{k}\end{pmatrix}=\vec{i}\vec{i}+\vec{j}\vec{j}+\vec{k}\vec{k}$【类似地，$I_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases}$(克罗内克符号)，$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}=\sum_{ij}\delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$；其中$\delta_{ij}$无法写成$A_iB_j$的形式(因为$A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=1$说明$A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3$均不为 0，但$i\neq j$的$A_iB_j$又=0，这其实在上一段即 1.中$\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}\neq\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{A}}$的矩阵元中已经显示了系数$A_1B_1$像基矢$\vec{i}\vec{i}$一样只是并起来写在一起，而不做乘法！所以才有$A_1B_1\neq B_1A_1$！)，因此二阶单位张量$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$无法写成并矢的形式$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\neq\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}$；所以这也是为什么并矢是张量的一种特殊情形的论据之一】

3.$\vec{\mathbf{f}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}=\vec{\mathbf{f}}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}})=(\vec{\mathbf{f}}\cdot\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{B}}\neq\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{f}}=(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}})\cdot\vec{\mathbf{f}}=\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{f}})$。

证明：$\vec{\mathbf{f}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}=\sum_l f_l\overrightarrow{\mathbf{e}_l}\cdot\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\sum_l f_l[\overrightarrow{\mathbf{e}_l}\cdot\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}]=\sum_l f_l[\sum_{ij}T_{ij}(\overrightarrow{\mathbf{e}_l}\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_i})\overrightarrow{\mathbf{e}_j}]=\sum_l f_l[\sum_{lj}T_{lj}(\overrightarrow{\mathbf{e}_l}\cdot\overrightarrow{\mathbf{e}_l})\overrightarrow{\mathbf{e}_j}]=$

$\sum_l f_l[\sum_{lj}T_{lj}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}]=\sum_{lj}f_l T_{lj}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\sum_{ij}f_i T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\sum_j(\sum_i f_i T_{ij})\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\begin{pmatrix}\sum_i f_i T_{i1}\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\\ \sum_i f_i T_{i2}\overrightarrow{\mathbf{e}_2}\\ \vdots\end{pmatrix}$；$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{f}}=\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}\cdot$

$\sum_l f_l\overrightarrow{\mathbf{e}_l}=\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}(\overrightarrow{\mathbf{e}_j}\cdot\sum_l f_l\overrightarrow{\mathbf{e}_l})=\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}(\overrightarrow{\mathbf{e}_j}\cdot f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_j})=\sum_{ij}T_{ij}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_i}=\sum_i(\sum_j T_{ij}f_j)\overrightarrow{\mathbf{e}_i}=\begin{pmatrix}\sum_j T_{1j}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\\ \sum_j T_{2j}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_2}\\ \vdots\end{pmatrix}$；

而即使$\begin{pmatrix}\sum_j f_j T_{1j}\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\\ \sum_j f_j T_{2j}\overrightarrow{\mathbf{e}_2}\\ \vdots\end{pmatrix}=\sum_{ij}f_j T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}$都$\neq\sum_{ij}T_{ij}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_i}=\begin{pmatrix}\sum_j T_{1j}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\\ \sum_j T_{2j}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_2}\\ \vdots\end{pmatrix}$(额，其实如果是$T_{1j}f_j$相乘而非并列写在一起的话，它俩是相等的；不过若站在多维一阶张量的角度，$T_{1j}f_j$是并列的关系，二者就不等了；但若站在多维矢量的角度，就相等了，可能在运算过程中$T_{1j}f_j$确实是相乘的关系)，$\sum_{ij}f_i T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}$就更$\neq\sum_{ij}T_{ij}f_j\overrightarrow{\mathbf{e}_i}$了，所以$\vec{\mathbf{f}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}\neq\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{f}}$。

另外，我们还可看出，2 个三维一阶张量的点乘=1 个三维 0 阶张量，即标量；1 个三维二阶张量与 1 个三维一阶张量的点乘=1 个三维一阶张量，即矢量。——所以数学归纳法可得，1 个三维 n 阶张量与 1 个三维一阶张量的点乘，=一个三维 n-1 阶张量。也就是说，再推而广之，一个 r 维 n 阶张量在点乘一个同(r)维 1 阶张量后，原 n 阶会降 1 阶；继续推而广之，一个 r 维 n 阶张量在点乘一个同(r)维 m 阶张量后，当 n≥m 时，原 n 阶会降为(同维的)n-m 阶；当 n<m 时，原 m 阶会降为(同维的)m-n 阶。——特殊地 1，当两个同维张量点乘后，会得一个(同维)0 阶张量，即标量(标量好像不需要说明其维度)。比如 2 个 n 维一阶张量的点乘。特殊地 2，当一个张量点乘一个标量即 0 阶张量后，相当于没有降阶，会得到同维的另一个张量。

4.$\vec{\mathbf{f}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{I}}=\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{I}}\cdot\vec{\mathbf{f}}=\vec{\mathbf{f}}$【$(f_1\vec{\mathbf{i}}+f_2\vec{\mathbf{j}}+f_3\vec{\mathbf{k}})\cdot(\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}}+\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}})=(f_1\vec{\mathbf{i}}\cdot\vec{\mathbf{i}})\vec{\mathbf{i}}+(f_1\vec{\mathbf{j}}\cdot\vec{\mathbf{j}})\vec{\mathbf{j}}+(f_1\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{k}})\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{f}}$】

5. $\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}'=(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}})\cdot(\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{D}})=(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{D}}$

6. $\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}:\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}'=(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}):(\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{D}})=(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{C}})(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{D}})$

7.设 r 代表维度，n 代表阶数，则一切物理恒量分量数目 M=r^n。

2.6.电多极矩

第三种求解方法。

一.泰勒级数展开

1.一元函数泰勒级数展开

(1).f(x)在原点邻域的泰勒级数展开：f(x)=f(0)+xf′(0)+$\frac{1}{2!}x^2f''(0)$+…。

(2).f(x)在 x=a 附近，f(x)=f(a)+xf′(a)+$\frac{1}{2!}(x-a)^2f''(a)$+…。【余项以及第三项之后的，我们不予考虑】

2.三元函数的泰勒级数展开

(1).f(x,y,z)在原点附近的泰勒级数：f(x,y,z)=f(0,0,0)+$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z})f(0,0,0)$+$\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z})^2f(0,0,0)$+…。【一元函数在原点邻域的展开式，相当于它的特殊情况：f(x)=$(x\frac{\partial}{\partial x})^0f(0)+(x\frac{\partial}{\partial x})^1f(0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x})^2f(0)$】

(2).f(x)在(a,b,c)附近，f(x,y,z)=f(a,b,c)+$[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}]f(a,b,c)$+$\frac{1}{2!}((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial}{\partial z})^2f(a,b,c)$+…。

将其写成矢量式即有 f(**R**)=f(χ)=f(χ_0)+$[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]f(\chi_0)$+$\frac{1}{2!}[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]^2f(\chi_0)$+…。【注：$\nabla$只对$\chi$即 **R** 作用，即任何时候都作用于$\chi-\chi_0$中的前一项：$\chi$】

二.电势的泰勒级数

1.带电体电势

(1).点电荷

(2).点电荷系

(3).带电体系

2.电势的泰勒级数

设源点 source point 们两两间的最大间距都很小，且每个 point 都在原点附近(我们总可以将坐标系原点设定在密集分布的源点云之中的“质心”部分：即将原点设置

在它所量度的 $\mathbf{R}=\sum_i\frac{q_i}{\sum_j q_j}\cdot\chi_i'$这个地方，并重新给出各点的新$\chi_i'$)，此时对于每个源点，它们(对于新原点)的$\chi_i'\approx\mathbf{0}$，因此它们对于(新原点所量度的)某一场点$\chi$的矢径$\mathbf{r}_i=\chi-\chi_i'$，都在$\chi$即$\mathbf{R}$附近，随着(反向于)$\chi_i'$的波动而扰动/波动($\chi$相对固定)；但另一方面，场点$\chi$也可在$\chi_0$附近波动，使得$\mathbf{r}_i=\chi-\chi_i'$在$\chi_0-\chi_i'$附近，随着(同向于)$\chi$的波动而波动($\chi_i'$相对固定)。——因此 $\mathbf{r}=\chi-\chi'$，既在$\chi-\mathbf{0}$附近随χ'而波动，又在$\chi_0-\chi'$附近，随χ波动。因此我们选取$\mathbf{r}_0=\chi_0-\mathbf{0}$，使得 $\mathbf{r}$ 在$\mathbf{r}_0$附近，同时随着χ'和χ的扰动而扰动(该种$\mathbf{r}_0$设定只针对下一段而言；下下一段的$\mathbf{r}_0$会更广义一些)。

那么对于 $f(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}_0)+[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla]f(\mathbf{r}_0)+\frac{1}{2!}[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla]^2f(\mathbf{r}_0)+\ldots$：其中的橘黄色$\nabla$，按照之前的认识，只作用于$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$中的前一项$\mathbf{r}$，但$\mathbf{r}=\chi-\chi'$又同时是$\chi$和$\chi'$的函数；——那么(1).要么认为$\chi$相对而言是个常数，此时①.($\mathbf{r}=\chi-\chi'$中)$\chi=\chi_0$②.$\nabla$应只作用于$\mathbf{r}$中的$\chi'$，并写为$\nabla'$③.因此 $f(\mathbf{r})$应写为 $f(\mathbf{r})=f(\chi_0)+[((\chi_0-\chi')-\chi_0)\cdot\nabla']f(\chi_0)+\frac{1}{2!}[((\chi_0-\chi')-\chi_0)\cdot\nabla']^2f(\chi_0)+\ldots=f(\chi_0)+[-\chi'\cdot\nabla']f(\chi_0)+\frac{1}{2!}[-\chi'\cdot\nabla']^2f(\chi_0)+\ldots$；——(2).要么认为$\chi'$相对而言是个常数，此时①.($\mathbf{r}$ 中)$\chi'=\mathbf{0}$②.∇应只作用于$\mathbf{r}$中的χ，并保留为∇形式**(但颜色变黑)**③.因此 $f(\mathbf{r})$应写为 $f(\mathbf{r})=f(\chi_0)+[((\chi-\mathbf{0})-\chi_0)\cdot\nabla]f(\chi_0)+\frac{1}{2!}[((\chi-\mathbf{0})-\chi_0)\cdot\nabla]^2f(\chi_0)+\ldots=f(\chi_0)+[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]f(\chi_0)+\frac{1}{2!}[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]^2f(\chi_0)+\ldots$】

当然，还有一种认识方式：(3).仍认为χ相对而言是个常数，但此时①.($\mathbf{r}$ 中)$\chi=\chi$、$\mathbf{r}_0=\chi-\mathbf{0}$②.$\nabla$仍只作用于$\mathbf{r}$中的$\chi'$，并写为$\nabla'$③.$f(\mathbf{r})=f(\chi)+[((\chi-\chi')-\chi)\cdot\nabla']f(\chi)+\frac{1}{2!}[((\chi-\chi')-\chi)\cdot\nabla']^2f(\chi)+\ldots=f(\chi)+[-\chi'\cdot\nabla']f(\chi)+\frac{1}{2!}[-\chi'\cdot\nabla']^2f(\chi)+\ldots$；——以及(4).仍认为$\chi'$相对而言是个常数，但此时①.($\mathbf{r}$ 中)$\chi'=\chi'$、$\mathbf{r}_0=\chi_0-\chi'$②.$\nabla$仍只作用于$\mathbf{r}$中的$\chi$，并保留为$\nabla$形式③.$f(\mathbf{r})=f(\chi_0-\chi')+[((\chi-\chi')-(\chi_0-\chi'))\cdot\nabla]f(\chi_0-\chi')+\frac{1}{2!}[((\chi-\chi')-(\chi_0-\chi'))\cdot\nabla]^2f(\chi_0-\chi')+\ldots=f(\chi_0-\chi')+[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]f(\chi_0-\chi')+\frac{1}{2!}[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]^2f(\chi_0-\chi')+\ldots$。

我们采用的本该是(3).号认识方案：令 $f(\mathbf{r})=\frac{1}{|\mathbf{r}|}=\frac{1}{|\chi-\chi'|}$，根据$\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$，则$\nabla'f(\chi)=\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}=-\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}=\frac{\mathbf{r}}{r^3}|_{\mathbf{r}=\chi}=\frac{\chi}{\chi^3}$。于是 $f(\mathbf{r})=f(\chi)+[-\chi'\cdot\nabla']f(\chi)+\frac{1}{2!}[-\chi'\cdot\nabla']^2f(\chi)+\ldots=\frac{1}{\chi}-\chi'\cdot\frac{\chi}{\chi^3}+\frac{1}{2!}[-\chi'\cdot\nabla']^2f(\chi)+\ldots$，但是这样一来，第二项$-\chi'\cdot\frac{\chi}{\chi^3}$意味着当$\chi'$在$\chi$上的投影为正时，$f(\mathbf{r})$的一级近似却因$-\chi'\cdot\frac{\chi}{\chi^3}$为负而比$\frac{1}{\chi}$小了；但从不对 $f(\mathbf{r})=\frac{1}{|\mathbf{r}|}$做近似的角度，$|\mathbf{r}|=|\chi-\chi'|$中$\chi$不变，$\chi'$向$\chi$方向移动，$|\mathbf{r}|$减小，$f(\mathbf{r})$应该增大。哪儿出了问题？

(4).原因在于，对于每一个源点χ'来说，其 $f(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}_0)+[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla]f(\mathbf{r}_0)+\frac{1}{2!}[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\nabla]^2f(\mathbf{r}_0)+\ldots$，中的$\nabla$是针对$\mathbf{r}$整体的，而不是针对$\mathbf{r}=\chi-\chi'$中单独的某一$\chi$或$\chi'$。因此，即使我们的目的是如此明确地考虑密集分布的各个χ'处的源点对同一场点χ处的$f(\mathbf{r})$值(的叠加)，即 $\mathbf{r}$ 的确只是χ'的函数，但∇也仍不是单独作用于χ'而写作∇'——它作用于$\chi-\chi'$这个整体，即 $\mathbf{r}$。因此这里的∇虽没加撇，它也不代表对 $\mathbf{r}$ 中的χ的作用——它作用的是 $f(\mathbf{r})$中的 $\mathbf{r}$！因此不能直接沿用$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$(其中的$\nabla$作用的是$\chi$!)，而是

$\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}|}=-\frac{1}{r^2}\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$，该结果虽然与$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$相同，但是由其中的$\nabla$纯粹作用在整体 **r** 上所得。然后便有$\nabla f(\mathbf{r}_0)=\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}=-\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}$，其中的$\mathbf{r}_0$仍保持原定义$\mathbf{r}_0=\boldsymbol{\chi}-\mathbf{0}$不变，因此$\nabla f(\boldsymbol{\chi})=-\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。

除了∇的作用对象从$\boldsymbol{\chi}$变为 **r** 以外，一切定义与(3).中相同。①.因此 f(**r**)在$\boldsymbol{\chi}'=\mathbf{0}$附近对各$\boldsymbol{\chi}'$的展开式，变为 $f(\mathbf{r})=f(\boldsymbol{\chi})+[-\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]f(\boldsymbol{\chi})+\frac{1}{2!}[-\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2f(\boldsymbol{\chi})+\ldots$；②.现对于在原点附近密集分布每个源点$\boldsymbol{\chi}'$，其对同一场点$\boldsymbol{\chi}$的 f(**r**)便变为了 $f(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}')=f(\boldsymbol{\chi})-\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla f(\boldsymbol{\chi})+\frac{1}{2!}[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2f(\boldsymbol{\chi})+\ldots$；③.那么令 f(**r**)=电势的表达式$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}'|}$，则每个$\boldsymbol{\chi}'\neq\mathbf{0}$的源点，其对同一场点$\boldsymbol{\chi}$的电势的第 0、1、2…级近似之和(即泰勒近似)，便成了$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\chi}-\boldsymbol{\chi}'\cdot(-\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})+\frac{1}{2!}[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0=\boldsymbol{\chi}}+\ldots]$。④.现在我们用$\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$对 V′内各源点$\boldsymbol{\chi}'$对远处的某一固定场点$\boldsymbol{\chi}$产生的电势$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}'|}$，进行叠加：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\frac{1}{|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}'|}dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')[\frac{1}{\chi}+\boldsymbol{\chi}'\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}+\frac{1}{2!}[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}+\cdots]dV'$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\chi}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\cdot\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{\chi}'dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}+\cdots。$$

⑤.现在我们对其中的$[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2$进行变换，**一方面，作为 reminder，将其写成分量形式**$[(x',y',z')\cdot(\frac{\partial}{\partial(x-x')},\frac{\partial}{\partial(y-y')},\frac{\partial}{\partial(z-z')})]^2$，并展开为$\sum_{i,j=1,2,3}\chi_i'\chi_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$共 9 项算符之和(其中$\chi_1',\chi_2',\chi_3'$分别$=x',y',z'$；$r_1,r_2,r_3$分别$=x-x',y-y',z-z'$)。**另一方面**，令$D_{ij}=\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$、$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}_{ij}=\int_{V'}3\chi_i'\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\chi_j'\overrightarrow{\mathbf{e}_j}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$(其中$\overrightarrow{\mathbf{e}_1},\overrightarrow{\mathbf{e}_2},\overrightarrow{\mathbf{e}_3}=\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$)，那么根据$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{T}}=\sum_{ij}T_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}$，可得$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\sum_{ij}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}_{ij}=\sum_{ij}\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3\sum_{ij}\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$。【其中$\sum_{ij}\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'=\sum_{ij}(\chi_i'\chi_j')\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}=\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'$，$(\chi_i'\chi_j')$、$\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'$得在一起被看作类似于$D_{ij}$、$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}_{ij}$，这样$\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'$才能在一起被看作并矢，即被看作类似$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}$的张量】于是利用$(\overrightarrow{\mathbf{A}}\overrightarrow{\mathbf{B}}):(\overrightarrow{\mathbf{C}}\overrightarrow{\mathbf{D}})=(\overrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{C}})(\overrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{D}})$的右到左，可得$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)=\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV':(\nabla\nabla)=\int_{V'}3(\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'):(\nabla\nabla)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla][\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$。

【注：为了计算方便，我们希望以更简的方式得到分量式，要么对$[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2$展开(但我们之后就会提到它的弊端：不能先计算积分再计算偏导)，要么这么考虑：即以另一种眼光看待$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)=\sum_{ij}D_{ij}[\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}:(\nabla\nabla)]=\sum_{ij}\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'[(\overrightarrow{\mathbf{e}_j}\cdot\nabla)(\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\cdot\nabla)]=\sum_{ij}\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'[\frac{\partial}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial r_i}]=\sum_{ij}\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$，注意：不必要将$\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$写入积分符号内，因为它只在求和符号内，何必自找麻烦；意识到$\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$与积分无关是非常必要的。——因此在运算$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$时，我们通常先计算某一 i,j 下的$\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=\sum_{ij}\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$中的$\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，再将对应 i,j 的$\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$给它乘在右边，然后才对各 i,j 下的这样的一项积分与一项偏导的乘积，进行求和；求和完后，再乘以$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}$。——这样的话，会比$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$思路更清晰：其中的偏导可一时半会儿提不出来哦！】

⑥.代入即可得到$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\chi')\frac{1}{|\chi-\chi'|}dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\chi}\int_{V'}\rho(\chi')dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\chi}{\chi^3}\cdot\sum_i \mathbf{p}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}+\cdots$。其中，展开式的第一项$\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\chi}\int_{V'}\rho(\chi')dV'$，称为V′区域内的场源在$\chi$处的电势(之和)φ的零级近似；第二项$\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_i q_i\chi_i'}{\chi^3}$，称为φ的一级近似，其中的$\int_{V'}\rho(\chi')\chi' dV'=\sum_i q_i\chi_i'=\sum_i \mathbf{p}$为V′内总电偶极矩；第三项$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}$，称为φ的三级近似，其中的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\int_{V'}3\chi'\chi'\rho(\chi')dV'$为电四极距，其分量为$D_{ij}=\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\chi')dV'$。

3.展开式各项的物理意义

(一).$\varphi^{(0)},\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}$的物理意义

(1).$\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\chi}$：所有场点电荷 $Q=\int_{V'}\rho(\chi')dV'$集中于原点 O，对$\chi$点产生的电势；小区域带电体在观察点$\chi$的φ的零级近似。

(2).$\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_i q_i\chi_i'\cdot\chi}{\chi^3}$：体系电偶极矩集中于原点对场点$\chi$产生的电势；φ的一级近似。

若体系电荷分布对原点(中心)对称，即χ'和$-\chi'$处有相同的电荷密度，因此$\sum_i \mathbf{p}=\sum_i q_i\chi_i'=0$。只有对原点不(中心)对称分布，才有电偶极矩。

(3).$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}$：总的四极矩集中于原点，在场点产生电势。作为体系在观察点χ处电势φ的二级近似。

展开式表明，一个小区域内连续分布的电荷在远点处激发的场等于，体系在原点处多极子在远处激发的场的叠加。

(二).对电四极矩$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的进一步认识

$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$是张量，有 9 个分量，5 个是独立的。

证明 a).由于$D_{ij}=\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\chi')dV'$，所以$D_{12}=D_{21},D_{13}=D_{31},D_{23}=D_{32}$，因此$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$最多有 6 个独立分量：$D_{11},D_{22},D_{33},D_{33},D_{12}=D_{21},D_{13}=D_{31},D_{23}=D_{32}$。

b).①.我们考察一下$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}$：就像 r≠0 时的$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0$所导致的，r≠0 时将有$\nabla^2\frac{1}{r}=0$一样——这里也有$\chi\neq\mathbf{0}$时，$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}=0$(因为$\mathbf{r}$的属性和$\chi$类似)；而由于$|\chi|>>$各$|\chi'|$以及V′的线度，也就是说$\chi\neq\mathbf{0}$，因此$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}=0$。【这是为了我们之后要引入(附加)一个带$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\chi}$这个的项，以更新$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的定义，但又不改变其在$\chi\neq\mathbf{0}$ 处的值】

另外，像之前的$[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2=\sum_{i,j=1,2,3}\chi_i'\chi_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$一样，若选择一个对于$i,j=1,2,3$，$\chi_i'\chi_j'$都=1 的$\boldsymbol{\chi}'_I=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}+z'\mathbf{k}$，即$x'y'=1$&$y'z'=1$&$z'x'=1$，比如$\boldsymbol{\chi}'_I=(1,1,1)$或(-1,-1,-1)，则$[\boldsymbol{\chi}'_I\cdot\nabla]^2=\sum_{i,j=1,2,3}\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$；——但睁大眼睛！，$\nabla^2$是俩矢量的点积：$\nabla\cdot\nabla$，它是一个三项标量之和的标量，而$[\boldsymbol{\chi}'_I\cdot\nabla]^2$是俩矢量点积后(所得的三个标量和)的平方，它是个 9 个标量之和的标量。因此∇^2只是$[\boldsymbol{\chi}'_I\cdot\nabla]^2$中的一部分，即$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial r_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial r_3^2}=\sum_{i,j=1,2,3}\delta_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$，其中$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases}$为克罗内克符号。

②.于是$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=\sum_{i,j=1,2,3}\delta_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=0$。又因$\nabla^2=(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2$；于是$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=0$。用$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\chi'^2dV'$乘以$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$，一方面得到$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\chi'^2(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=0$，另一方面得到$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\chi'^2\sum_{i,j=1,2,3}\delta_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=0$。【前者和后者的值，在$\boldsymbol{\chi}\neq\mathbf{0}$处均=0，因而任何值加上它=其本身。下一段我们就将使用这个结论以修正$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$：】

对比$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3\sum_{i,j=1,2,3}\chi_i'\chi_j'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$，用后者加上后者，得到$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\sum_{i,j=1,2,3}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$(注：这里的积分符号在外，求和符号在内，因而$\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$不能提到积分符号外；这也是为什么我们要写成 D 的形式：这样先算积分再算求和的话，$\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}$便可以提到积分符号外，∵它只服务于求和，此时便可单独算积分)，之前我们的D_{ij}被定义为$\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，现在我们定义为$D_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$。那么$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j-\chi'^2\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}(3\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'-\chi'^2\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，根据$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}=\sum_{ij}\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$，以及$\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'=\sum_{ij}(\chi_i'\chi_j')\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\sum_{ij}\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'$，可得$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\sum_{ij}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}_{ij}=\sum_{ij}\int_{V'}(3\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'-\chi'^2\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}\sum_{ij}(3\boldsymbol{\chi}_i'\boldsymbol{\chi}_j'-\chi'^2\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}(3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$。

而若仍考虑$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)$，则其$=(\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'-\int_{V'}\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'):(\nabla\nabla)=\int_{V'}3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'-\int_{V'}\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}\{3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)\}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$；如果我们假设仍有$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\{3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)\}\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$。那么接下来：

③.而如果我们用前者加上前者，则事情就变为了$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\{3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2-\chi'^2(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2\}dV'\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$。两者相比较，得到$3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)=3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2-\chi'^2(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2$，可得$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)=(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2$。——这个结果可不能通过拆$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$为并矢，并通过$(\overrightarrow{\mathbf{AB}}):(\overrightarrow{\mathbf{CD}})=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})$来得到。

④.因此，我们有以下结论：I. $\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\int_{V'}(3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，II. $D_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，III. $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}:(\nabla\nabla)=(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\nabla)^2=\nabla^2$，IV. $\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$。——其中，III.和 IV.互为充要条件，若有其中任意一个成立，则另一个成立。【以后我们把$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$写作$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}$了哈；我们主要是利用修正后的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的定义，而不是用其来算电四极矩；算的时候，最好直接用之前的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的定义不是么。不过如果要用这里的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的定义来算的话，在对其展开成分量形式求和后，我们仍希望将偏导提刀积分符号外，先不受干扰地算积分：$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}$。】

⑤.根据$D_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，则由于$(3\chi_1'\chi_1'-\chi'^2\delta_{11})+(3\chi_2'\chi_2'-\chi'^2\delta_{22})+(3\chi_3'\chi_3'-\chi'^2\delta_{33})=3x'^2+3y'^2+3z'^2-3\chi'^2=0$，可得$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$。因此$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$最多有 5 个独立分量。【或许你想说，在没有更新$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的定义时，$3x'^2+3y'^2+3z'^2>0$，会不会使得以不同的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$、相同的公式$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}$，算出的电四极矩的值不同？——其实$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$的值与$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}$的值，并非前者改变后者就改变：因为两者之间还差一个东西：对$\frac{1}{\chi}$的二阶混合偏导，虽然旧有的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$中$3x'^2+3y'^2+3z'^2>0$，但是它们的对应项相当于都加了一个$\chi'^2\delta_{kk}$，而$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=\sum_{i,j=1,2,3}\delta_{ij}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{|\mathbf{r}|}|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\chi}}=0$，因此$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}$的值并不随着的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$主对角线的等量加减而改变。——也就是说，$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\chi'^2dV'$中的$\chi'^2$，其实也可以取其他值，并且负号–也可以是正号+】

三.几种典型多极矩产生的场

1.z 轴上一对关于原点对称的正负电荷组成的体系

体系小区域，采用多极矩近似。

电荷总量为 0，无零级近似。

于是$\varphi=\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\cdot\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{\chi}'dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[q\frac{l}{2}\mathbf{e_z}+(-q)\frac{l}{2}\cdot(-\mathbf{e_z})]\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[ql\cdot\mathbf{e_z})]\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。【它即使有电四极矩，我们也不考虑；因为我们只需要取第一个不是零的 k 级近似；况且一个电偶极子没有电四极矩，下一题我们就能知道。】

我们来看看这样的体系产生的场强和其泊松方程：$\nabla\varphi=\nabla\varphi^{(1)}=\nabla(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla(\mathbf{p}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})$，根据$\nabla[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}]=\mathbf{f}\times[\nabla\times\mathbf{g}]+[\mathbf{f}\cdot\nabla]\mathbf{g}+\mathbf{g}\times[\nabla\times\mathbf{f}]+[\mathbf{g}\cdot\nabla]\mathbf{f}$，有$\nabla(\mathbf{p}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})=\mathbf{p}\times\left[\nabla\times\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\right]+[\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}+\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\times[\nabla\times\mathbf{p}]+\left[\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\cdot\nabla\right]\mathbf{p}$，其中因$\mathbf{p}$是定矢，对它求的所有偏

导全=0，于是没有了后两项：$\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\times[\nabla\times\mathbf{p}]$、$\left[\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}\cdot\nabla\right]\mathbf{p}$；而其中$\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$的旋度$\nabla\times\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=(\nabla\frac{1}{\chi^3})\times\boldsymbol{\chi}+\frac{1}{\chi^3}\nabla\times\boldsymbol{\chi}$，后者中$\nabla\times\boldsymbol{\chi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$，前者中$\nabla\frac{1}{\chi^3}=-3\frac{1}{\chi^4}\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi}$，与$\boldsymbol{\chi}$同向，与$\boldsymbol{\chi}$叉乘也$=\mathbf{0}$；因此$\nabla\times\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=\mathbf{0}$。于是$\nabla[\mathbf{p}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]=[\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。于是$\mathbf{E}\approx\mathbf{E}^{(0)}+\mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}^{(1)}=-\nabla\varphi^{(1)}=-(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla(\mathbf{p}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。

根据$\vec{\mathbf{f}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}=\vec{\mathbf{f}}\cdot(\overrightarrow{\mathbf{A}}\overrightarrow{\mathbf{B}})=(\vec{\mathbf{f}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{A}})\overrightarrow{\mathbf{B}}$，也可以将$[\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$写作$\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$，也就是说将$\nabla\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$整体看作一个并矢、张量，于是$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。【不过不常用这个形式，除了之后的电偶极子在外场中的受力；因为没有张量分析公式来处理$\nabla\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})$这种矢量点乘张量的运算。——但对于泊松方程的得来，即使写成$\nabla\cdot([\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})$，也似乎没法处理：$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi^{(1)}=\nabla\cdot([\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3})=[\nabla\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=[\nabla\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=\ldots$，所以接下来需要另谋高就、另辟蹊径】

对于电偶极子的泊松方程的得来：先将电偶极子产生的场强$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\mathbf{p}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$，对比点电荷产生的场强 $\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$，可见电偶极子的$-[\mathbf{p}\cdot\nabla]$等效为点电荷的Q，那么只需要将点电荷的泊松方程$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}=-\frac{Q\cdot\delta(\boldsymbol{\chi})}{\varepsilon}$中的$Q$替换为$-[\mathbf{p}\cdot\nabla]$，即得到了电偶极子的泊松方程$\nabla^2\varphi=\frac{[\mathbf{p}\cdot\nabla]\cdot\delta(\boldsymbol{\chi})}{\varepsilon}$。

2.z 轴上关于原点对称的一对正电荷(±b)和一对负电荷(±a)组成的体系

体系为小区域；电荷总量为 0；电荷关于原点中心对称分布，总电偶极矩为 0。

于是$\varphi=\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:(\nabla\nabla)\frac{1}{\chi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3[\boldsymbol{\chi}'\cdot\nabla]^2dV'\frac{1}{\chi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')3\sum_{i,j=1,2,3}\chi_i'\chi_j'\,dV'\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{\chi}$，由于各$\boldsymbol{\chi}'$的$\chi_1',\chi_2'$即 x′,y′均=0，因此$D_{ij}=\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$中只剩下$D_{33}=\sum_{i=1}^4 3q_i z'z'$，则$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\overleftrightarrow{\mathbf{D}_{33}}=\sum_{i=1}^4 3q_i z'z'\overrightarrow{\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z}$。于是$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{\chi}')\chi_3'\chi_3'\frac{\partial^2}{\partial r_3^2}dV'\frac{1}{\chi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^4 q_i z'^2\frac{\partial^2}{\partial(z-z')^2}\frac{1}{\chi}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^4 q_i z'^2]\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{\chi^2}\frac{\partial\chi}{\partial z})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}[-qa^2-qa^2+qb^2+qb^2]\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{\chi^2}\frac{z}{\chi})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q[b^2-a^2](-\frac{1}{\chi^3}+z3\frac{1}{\chi^4}\frac{\partial\chi}{\partial z})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q[b^2-a^2](\frac{3z^2}{\chi^5}-\frac{1}{\chi^3})$。

根据$\sum_{i=1}^2 q_i z'^2$，我们可以推测一个电偶极子的电四极矩=0。事实上，除了$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j}=\sum_{ij}\overleftrightarrow{\mathbf{D}_{ij}}=\sum_{ij}\int_{V'}3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3\sum_{ij}\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$、$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j}=\sum_{ij}\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij}\overrightarrow{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}(3\boldsymbol{\chi}'\boldsymbol{\chi}'-\chi'^2\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$之外，电四极矩张量像电偶极矩 **p** 的定义类似，被定义为：大小相等、方向相反的两个电偶极子相距一微小距离(它们可以共线地头头 or 尾尾相距，也可平行地头尾—尾头 or 尾头—头尾相距，共四种相对位置的可能)，这样的一个复合体。且如同$\vec{\mathbf{p}}=q\vec{\mathbf{L}}$一样，有

$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{L}}$。【这么定义是为了使得体系的带电总量、电偶极矩=0，使得第一个不为零的k级近似，是四极矩集中于原点产生的。】

【球对称分布：存在这么一点，绕该点旋转任意角度，现有电荷分布与原有电荷分布重合、完全一致。则称该点为球心，且称电荷分布关于该点球对称】

一般只有球对称的电荷分布没有电四极矩：此时$\int_{V'} x'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'} y'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'} z'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\frac{1}{3}\int_{V'}(x'^2+y'^2+z'^2)\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\frac{1}{3}\int_{V'}\chi'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，也就是说 i=j 时，$\int_{V'} 3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'}\chi'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$；根据$D_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，此时$D_{11}=D_{22}=D_{33}=0$——同样也可通过另一个旧的定义$D_{ij}=\int_{V'} 3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，察看$\int_{V'} 3x'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'} 3y'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'} 3z'^2\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$，得到$D_{11}=D_{22}=D_{33}$(你也可用新的$D_{ij}$定义得到它)，然后利用$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$(这是由新的$D_{ij}$定义得到的)，得到$D_{11}=D_{22}=D_{33}=0$；

同样的道理，电荷球对称分布时，不妨假设一层正电荷均匀分布的球壳，此时对于某一//x0y 面的面所截的圆环，考虑$3x'y'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'$的值：当$\boldsymbol{\chi}'$在一、三象限时为正，当$\boldsymbol{\chi}'$在二、四象限的值时为负，而两个关于 x 轴或 y 轴对称的$\boldsymbol{\chi}'$，所对应的此值，大小相等符号相反，相互抵消，因此一个圆环上的$\int_{V'} 3x'y'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=0$，于是所有圆环即一层球壳上的$\int_{V'} 3x'y'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=0$，于是对于多层正负电荷均匀分布的球壳，$\int_{V'} 3x'y'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=0$，即也就证明了电荷球对称分布时，$\int_{V'} 3x'y'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=0$。同样，$\int_{V'} 3y'z'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\int_{V'} 3z'x'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=0$，得到$D_{12}=D_{12}=D_{23}=0$。【这个方法无法适用于旧的$D_{ij}$定义下的$D_{11}$、$D_{22}$、$D_{33}$，此时它们全>0，因此在旧定义下的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$下，球对称的电荷分布的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$不为 0(∵各分量不为 0)，此时只能像之前那样得到$D_{11}=D_{22}=D_{33}$，但其实它们即使不为零，只要值相等，算出来的电四极矩就相等——因为之前说过，电四极矩的值不仅与$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$有关，还与二阶混合偏导有关，而$D_{11}=D_{22}=D_{33}$所引入的主对角线的三项偏导之和=0，因此电四极矩与$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$ 时的一样；但该方法可以适用于新的D_{ij}定义下的D_{11}、D_{22}、D_{33}，此时仍可得到他们分别=0——总结一下，电荷球对称分布时，不论$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$如何定义(指的是新旧定义下的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$)，体系的电四极矩都=0；然而旧定义下的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\neq 0$，新定义下的$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=0$。由此也可见$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$与电四极矩之间，关系并没有那么紧密】

【电偶极子虽然不是球对称的，但它的各项旧定义下的D_{ij}值均为 0，因为对于 6 种$\chi_i'\chi_j'$中的任何一种，电偶极子的两个点电荷的$\chi_i'\chi_j'$值均是同号的(x'^2,y'^2,z'^2不用说，不仅等大同号且同正；另外，由于它们总关于原点成中心对称，则它们总处在 1-7 或 3-5 或 2-8 或 4-6 四个对角的卦限上，其上的$x'y'$、$y'z'$、$z'x'$均等大且同号：要么同正要么同负)；然而它们的带电量又是异号的，这就导致了$D_{ij}=\int_{V'} 3\chi_i'\chi_j'\rho(\boldsymbol{\chi}')dV'=\sum_{k=1}^{2} 3\chi_i'\chi_j' q_k=3\chi_i'\chi_j' q_1+3\chi_i'\chi_j' q_2=3\chi_i'\chi_j' q_1-3\chi_i'\chi_j' q_1=0$，于是$\sum_{ij}D_{ij}=0$，$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\,\overrightarrow{\mathbf{e}_i}\overrightarrow{\mathbf{e}_j}$

=**0**，因此新旧D_{ij}定义下的电偶极子均没有电四极矩[旧$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$都为 **0** 了乘以偏导后哪里还有电四极矩；且只要用新 or 旧$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$中的一个算出来了电四极矩的值(不一定要=0)，则电四极矩的值就是那么多]、且旧D_{ij}定义下的电偶极子$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$=**0**——同样的道理，由于$3x'^2-\chi'^2, 3y'^2-\chi'^2, 3z'^2-\chi'^2$和等大同号(不一定同正)，$3x'y'$、$3y'z'$、$3z'x'$也均等大且同号(跟之前一样，因为$\delta_{ij}$=0)，因此$D_{ij}=\int_{V'}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})\rho(\chi')dV'=\sum_{k=1}^{2}(3\chi_i'\chi_j'-\chi'^2\delta_{ij})q_k=0$，得到$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}=\sum_{ij}D_{ij}\overline{\mathbf{e_i}}\overline{\mathbf{e_j}}$=**0**，因此新$D_{ij}$定义下的电偶极子也有$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$=**0**】

所以我们说一般只有球对称才没有，而没法去掉一般：电偶极子就是个例外。同样的，非球对称但仍然没有电四极矩的，还有一对对正负电荷连线的中点共点的电偶极子们，所组成的体系：包括同一球壳上，半球面均匀带正电、半球面均匀带等量/等面密度负电荷的体系等；但绝大多数的非球对称都有四极距存在。另外，球对称电荷分布，不仅没有电四极矩，甚至没有各级电多极矩——这是因为球对称电荷产生的场强也是球对称的，根据高斯定理，这与所有电荷集中于球心所产生的电场一样，而后者便没有电多极矩。

四.小区域电荷系在外场中的能量

设外电场电势为$\varphi_e(\chi)$，具有电荷分布$\rho(\chi)$的体系在外场中的能量 $W=\int_V\rho(\chi)\varphi_e(\chi)dV$。【此时我们并不关心产生$\varphi_e(\chi)$的$\rho(\chi')$的分布，即使源点$\rho(\chi')$不在原点附近且分散分布也无妨，因为现在情况变了：$\varphi_e(\chi)$因已知而不需要做近似；反而是所关心的场点$\chi$=**0** 处附近有电荷分布$\rho(\chi)$：之前的产生场的量$\rho(\chi')$，现在是在别人的场中，被观察的对象了，所以即使是同一个量，它也将被写作$\rho(\chi)$——并且因此∇更不应该用∇'了！】

1.假设电荷系$\rho(\chi)$分布区域是外场中的一个小区域(相当于之前的$\rho(\chi')$)，取其中一点为坐标原点，可对φ_e在原点附近作泰勒级数展开。一般地，$\varphi_e(\chi)=\varphi_e(\chi_0)+[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]\varphi_e(\chi_0)+\frac{1}{2!}[(\chi-\chi_0)\cdot\nabla]^2\varphi_e(\chi_0)+\ldots$。由于$\varphi_e(\chi)$分布完全已知，那么总可以设$\rho(\chi)$所在的小区域的“质点”$\chi_0$为原点，并以此坐标系来重新描绘$\rho(\chi)$和$\varphi_e(\chi)$，于是：$\varphi_e(\chi)=\varphi_e(0)+(\chi\cdot\nabla)\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}(\chi\cdot\nabla)^2\varphi_e(0)+\ldots$。【注意，$\varphi_e(0)$不是之前的$\varphi^{(0)}$，不要想糊涂了：两者都是零级近似，但$\varphi_e(0)$是这里的外场(外场不一定分布在小区域)在原点附近的零级近似；而$\varphi^{(0)}$是小区域分布的$\rho(\chi')$在远处某点的电势的零级近似之和(或者说之和的零级近似)】

那么$W_i=\int_V\rho(\chi)\varphi_e(\chi)dV=\int_V\rho(\chi)[\varphi_e(0)+(\chi\cdot\nabla)\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}(\chi\cdot\nabla)^2\varphi_e(0)+\cdots]dV=W_i^{(0)}+W_i^{(1)}+W_i^{(2)}$。【此时在原点附近被展开的函数 f(**r**)，变成了$\varphi_e(\chi)$，所以不再是$-(\chi\cdot\nabla)\varphi_e(0)$了】

其中$W_i^{(0)}=\int_V \rho(\chi)\varphi_e(0)dV=Q\varphi_e(0)$：体系电荷集中于原点，在外场中的能量。是$W_i$的零级近似。$W_i^{(1)}=\int_V \rho(\chi)(\chi\cdot\nabla)\varphi_e(0)dV=\sum_i \mathbf{p}\cdot\nabla\varphi_e(0)=-\sum_i \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)$：体系电偶极矩集中于原点，在外场中的能量。是$W_i$的一级近似。$W_i^{(2)}=\int_V \rho(\chi)\frac{1}{2!}(\chi\cdot\nabla)^2\varphi_e(0)dV=\int_V \rho(\chi)\frac{1}{2!}(\chi\chi:\nabla\nabla)\varphi_e(0)dV=\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:\nabla\nabla\varphi_e(0)=-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}:\nabla\mathbf{E}_e(0)$：体系电四极矩集中于原点，在外场中的能量。是$W_i$的二级近似。

2.关于为何 $W=\int_V \rho(\chi)\varphi_e(\chi)dV$，且 W 要写为$W_i$：

设$\rho_{总}(\chi)=\rho_e(\chi)+\rho(\chi)$，其中$\chi\in V'\cup V$。当$\chi\in V'$时，$\chi=\chi'$，$\rho_e(\chi)=\rho(\chi')$，否则$\rho_e(\chi)=0$；当$\chi\in V$时，$\rho(\chi)=\rho(\chi)$，否则$\rho(\chi)=0$。

根据**全空间的**静电场的能量$=\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}\varphi_{总}(\chi)\rho_{总}(\chi)\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}(\rho_e+\rho)(\varphi_e+\varphi)\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho_e\varphi_e\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\cdot dV+\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}(\rho_e\varphi+\rho\varphi_e)\cdot dV$，前两项为$\rho_e$、$\rho$分别单独存在时的能量，称为自作用能，记作$W_m$；第三项为两个电荷系相互作用能量$W_i$。【注：在$V'\cup V$之外的空间中，$\rho_{总}(\chi)=0$，即使$\varphi_{总}(\chi)\neq0$，$\varphi_{总}(\chi)\rho_{总}(\chi)$也$=0$，因此$\frac{1}{2}\int_\infty \varphi_{总}(\chi)\rho_{总}(\chi)\cdot dV$变为了它】

于是$W_i=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho_e\varphi\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi_e\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho(\chi')\int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\chi)}{r}dV\cdot dV'+\frac{1}{2}\int_V \rho(\chi)\int_{V'}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\chi')}{r}dV'\cdot dV$，二项相等，因此$W_i=\int_V \rho\varphi_e\cdot dV$。

五.电偶极子在外场中所受的力和力矩

一个电偶极子在外场中的能量为$W_i^{(1)}=-\sum_i \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)$。

电偶极子在外场中平移或转动(**F** 来源于外场$\mathbf{E}_e(\chi)$，是相互作用力/内力；**M** 也来源于场源电荷们)，根据能量守恒，场源电荷和场点电荷的系统总能量改变量=0，即一方面有 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}+dW_i^{(1)}=0$，$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}=-dW_i^{(1)}$；另一方面有 $\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}+dW_i^{(1)}=0$，$\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}=-dW_i^{(1)}$。于是，一方面 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}$(本该写作 $\mathbf{F}\cdot\widehat{d\mathbf{L}}=-\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial L}$)，另一方面 $\mathbf{M}\cdot\widehat{d\boldsymbol{\theta}}=-\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial\theta}$。【我们会用到后者，来算 **M**】

另外，根据$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\mathbf{L}$，以及$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$，可得$dW_i^{(1)}=\nabla W_i^{(1)}\cdot d\mathbf{L}$，以及$\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}=\mathbf{n}\cdot\nabla W_i^{(1)}$。【我们会用到前者，来算 **F**】【当然也可结合这里的后者，和之前的前者，来得到 **F**】

1.$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}=-dW_i^{(1)}=-\nabla W_i^{(1)}\cdot d\mathbf{L}=-\nabla[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]\cdot d\mathbf{L}=\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]\cdot d\mathbf{L}$，得到$\mathbf{F}=\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]$。【或者利用 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}=-\mathbf{n}\cdot\nabla W_i^{(1)}$，得到 $\mathbf{F}=-\nabla W_i^{(1)}=-\nabla[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]=\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]$】

利用矢量分析公式：$\nabla[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}]=\mathbf{f}\times[\nabla\times\mathbf{g}]+[\mathbf{f}\cdot\nabla]\mathbf{g}+\mathbf{g}\times[\nabla\times\mathbf{f}]+[\mathbf{g}\cdot\nabla]\mathbf{f}$【这个公式可以这么记：将∇写在中间：f,∇,g，然后后括号&后叉乘，加上前括号&前点乘；然后保持∇在中间，调换两边函数的位置，再对g,∇,f进行一波♂操作/或者直接调换f,g为g,f】，可得$\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]=\mathbf{p}\times[\nabla\times\mathbf{E}_e(0)]+[\mathbf{p}\cdot\nabla]\mathbf{E}_e(0)+\mathbf{E}_e(0)\times[\nabla\times\mathbf{p}]+[\mathbf{E}_e(0)\cdot\nabla]\mathbf{p}$。

其中，第一项根据静电场无旋度，有$\nabla\times\mathbf{E}_e(0)=\mathbf{0}$；第三项$\nabla\times\mathbf{p}=\mathbf{0}$(∵p是定矢)；第四项$[\mathbf{E}_e(0)\cdot\nabla]\mathbf{p}=(E_{ex}(0)\frac{\partial}{\partial x}+E_{ey}(0)\frac{\partial}{\partial y}+E_{ez}(0)\frac{\partial}{\partial z})(p_x\mathbf{i}+p_y\mathbf{j}+p_z\mathbf{k})\neq(E_{ex}(0)\mathbf{i}+E_{ey}(0)\mathbf{j}+E_{ez}(0)\mathbf{k})(\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z})=\mathbf{E}_e(0)(\nabla\cdot\mathbf{p})$，因为$(E_{ex}(0)\frac{\partial}{\partial x}+E_{ey}(0)\frac{\partial}{\partial y}+E_{ez}(0)\frac{\partial}{\partial z})p_x\mathbf{i}\neq E_{ex}(0)\mathbf{i}(\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z})$，即$(E_{ey}(0)\frac{\partial}{\partial y}+E_{ez}(0)\frac{\partial}{\partial z})p_x\neq E_{ex}(0)(\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z})$，但仍有$[\mathbf{E}_e(0)\cdot\nabla]\mathbf{p}=0$(∵p是定矢)。因此$\mathbf{F}=\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]=[\mathbf{p}\cdot\nabla]\mathbf{E}_e(0)$。【同样不能写作$\mathbf{p}[\nabla\cdot\mathbf{E}_e(0)]$，因为这不像$(\chi\cdot\nabla)\varphi_e(0)$，括号右外是个标量；这里括号右外是个矢量；而且$\mathbf{p}[\nabla\cdot\mathbf{E}_e(0)]$是个矢量，共线于p，但矢量$[\mathbf{p}\cdot\nabla]\mathbf{E}_e(0)$不一定共线于p】

但根据$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}=\vec{f}\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\vec{f}\cdot\vec{A})\vec{B}$，我们可以将$[\mathbf{p}\cdot\nabla]\mathbf{E}_e(0)$写作$\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}_e(0)$，也就是说将$\nabla\mathbf{E}_e(0)$整体看作一个并矢、张量，于是$\mathbf{F}=\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}_e(0)$；同样的道理，第四项$[\mathbf{E}_e(0)\cdot\nabla]\mathbf{p}$也可看作一个矢量点乘一个张量的形式：$\mathbf{E}_e(0)\cdot\nabla\mathbf{p}$，而后者这个张量$\nabla\mathbf{p}$本身因p是定矢而是个各个分量=0 的张量(∵对p求任何偏导均=0)，点乘其他矢量=0。

2.$M_{\widehat{d\theta}}=\mathbf{M}\cdot\widehat{d\boldsymbol{\theta}}=-\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial\theta}=-\frac{\partial[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)]}{\partial\theta}=\frac{\partial[p\cdot E_e(0)\cdot\cos\theta]}{\partial\theta}=-p\cdot E_e(0)\cdot\sin\theta$；考虑角度后$\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}_e(0)$。【还可进一步写作$q\mathbf{L}\times\mathbf{E}_e(0)=\mathbf{L}\times q\mathbf{E}_e(0)=\mathbf{L}\times\mathbf{F}_e(0)$】

第三章 静磁场

基本问题：给定电流分布(或外场)和介质分布情况下，求解空间磁场分布。

主要内容：1.磁矢势及其微分方程 2.磁标势 3.磁多极矩

3.1 矢势及其微分方程

一.矢势

根据介质中的麦克斯韦方程组的后两个(表示磁场方面的)方程，有：$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$；$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，而静磁场可看作由**稳恒电流**$\mathbf{J}_f$($\mathbf{J}_f$只是坐标的函数)激发的磁场，而稳恒电流$\mathbf{J}_f$的电荷分布($\rho_f$只是坐标的函数)不随时间改变，所激发的电场与静电场激发的电场相同，都是稳恒电场($\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$)，因而$\mathbf{P}$也不随时间变化($\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}=0$)。于是$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}=\mathbf{J}_D+\mathbf{J}_P$中的$\mathbf{J}_D,\mathbf{J}_P$均=0；因此$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$；$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f$。

根据无源场$\mathbf{f}$必可表示为某矢量场$\mathbf{A}$的旋度：若$\nabla\cdot\mathbf{f}=0$，则$\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{A}$——则由于$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，得到$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，现在我们来看看$\mathbf{A}$是个什么东西。【静电场中之所以没引进矢势，是因为$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$；$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$中，前者$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f\neq0$，虽然在无电荷区有$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$，但我们对此用的是已创造的标势(通过$\nabla\times\mathbf{E}=0$)与它($\nabla\cdot\mathbf{D}=0$)共同创造了$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$下的规律——拉普拉斯方程$\nabla^2\varphi=0$，因而不需要矢势了；不过有意思的是我们在之前没用$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$来创造电矢势，但我们之后却会用$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f$来创造磁标势。这是一个严重的不对称(虽然或许又要说不对称才是美，但这次我找不到理由来 cover)，以至于电只有标势(只需要标势即可描述两个属于电的麦克斯韦方程)，而磁却既有标势又有矢势(需要两个势函数才能描绘完全它的两个磁的麦克斯韦方程)。】

根据磁通量$\phi_m=\iint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\oint_l\mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$。

矢势沿任意一闭合回路的环量代表通过以该回路l为边界的任一曲面的磁通量。

注：(1).只有$\mathbf{A}$的环量才有物理意义，每个点上的$\mathbf{A}$值无直接物理意义。

(2).矢势$\mathbf{A}$可以确定磁场$\mathbf{B}$，但$\mathbf{B}$不能唯一确定$\mathbf{A}$：根据标量场的梯度必为无旋场：$\nabla\times\nabla\phi\equiv\mathbf{0}$——则对于任意函数$\psi$，$\nabla\times(\mathbf{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$。

$\mathbf{A}$的任意性是因为只有$\mathbf{A}$的环量才具有物理意义。

二.矢势的微分方程

由于，线性均匀介质中$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，将$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$代入其中，得到$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$，再将其代入第二个方程$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f$，即可得到$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\mathbf{J}_f$，即$\frac{1}{\mu}[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}]=\mathbf{J}_f$；由于符合条件的$\mathbf{A}$有许多，引入**库伦规范**：$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，于是$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}_f(\nabla\cdot\mathbf{A}=0)$。在直角坐

标系下，该式可因$\nabla^2(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})=-\mu(J_x\mathbf{i}+J_y\mathbf{j}+J_z\mathbf{k})$，而写为三个式子：$\nabla^2A_i=-\mu J_i$(i=1,2,3，代表 x,y,z 分量)。

根据静电场的标势$\varphi(\chi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\chi')}{r}dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\chi')}{|\chi-\chi'|}dV'$，我们假设静磁场的矢势也有类似的形式【注：是这样的东西引领我们这么想：$\varphi(\chi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\chi')}{|\chi-\chi'|}dV'$，是电势的微分方程$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}$的解，而矢势所满足的微分方程$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}_f$与之类似，因此它的解也应类似电势微分方程的解】：$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\chi-\chi'|}dV'$(它满足库伦规范，因为$\nabla\cdot\mathbf{A}$中的$\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}=\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}(\chi')+\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi')$，其中$\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi')=0$…接下来的步骤请参看第一章的六.用 BS 定律来推导磁场的旋度与散度)。那么$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}[\nabla\times\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}]dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}[\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{J}(\chi')+\frac{1}{r}\nabla\times\mathbf{J}(\chi')]dV'$。因为场源$\mathbf{J}(\chi')$只是$\chi'$的函数，所以$\nabla\times\mathbf{J}(\chi')=0$。剩下$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\frac{1}{r}\times\mathbf{J}(\chi')dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\times\mathbf{J}(\chi')dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')dV'\times\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{L'}\frac{I(\chi')d\mathbf{L}\times\mathbf{r}}{r^3}$，这与毕奥萨伐尔定律所描述的实验规律$\mathbf{B}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')dV'\times\mathbf{r}}{r^3}$一模一样。所以这样的对$\mathbf{A}$的数学形式的假设，能自圆其说。

三.矢势的边值关系

利用场的边值关系的后两个：$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$，$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$。

1.法一

我们既可以像$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的边值关系那一段一样，通过代入$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$和$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$，得$\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}_2-\nabla\times\mathbf{A}_1)=0$，$\mathbf{n}\times(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$。

①.对于前者，$\mathbf{n}\cdot[\nabla\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)]=\nabla\cdot[(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)\times\mathbf{n}]=0$，于是$\mathbf{n}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=\mathbf{0}$；②.对于后者，$\mathbf{n}\times[\nabla\times(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)]=[\nabla(\mathbf{n}\cdot(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1))-(\mathbf{n}\cdot\nabla)(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)]$，根据$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，则有$-(\mathbf{n}\cdot\nabla)(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$(其实推不出来前一项=0)，即有$(\mathbf{n}\cdot\nabla)(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)=-\boldsymbol{\alpha}_f$；或写成$\mathbf{n}\cdot\nabla(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)=-\boldsymbol{\alpha}_f$，其中$\nabla(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)$为一并矢；它同样可以写为$(\mathbf{n}\cdot\nabla)(\frac{1}{\mu_2}\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{A}_1)=\frac{1}{\mu_2}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{A}_1=\frac{1}{\mu_2}\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_1=-\boldsymbol{\alpha}_f$。

你可以用该结果$\frac{1}{\mu_2}\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_1=-\boldsymbol{\alpha}_f$，与$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f$对比，其中的$\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_2$就相当于$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$，而$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_2$，可见它们($\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_2$与$\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_2$)是有多么地相似！甚至我们可以对$\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{A}_2$也取个类似的表达式：$\frac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial n}$。

2.法二

也可以①.像电场 **E** 的切向边值关系(或 **H** 的；但 **H** 的没有 **E** 的那么像**A**的)那样，从考虑对应的积分形式开始：正如 "将$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$写成积分形式：$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=-\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$，方程左侧变为：$\mathbf{E}_1\cdot\triangle\mathbf{L}_1+\mathbf{E}_2\cdot\triangle\mathbf{L}_2+\mathbf{E}\cdot\triangle\mathbf{h}_1+\mathbf{E}\cdot\triangle\mathbf{h}_2\approx(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\triangle\mathbf{L}=(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L$" 一样，$\oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}=\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$的左侧$=(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2)\cdot\mathbf{t}_2\cdot\triangle L$；右侧像 "$-\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle S)=-\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h\cdot\triangle L)\approx 0$" 一样，变为$\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle S=\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\triangle h\cdot\triangle L\approx 0$，因此$(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2)\cdot\mathbf{t}_2=0$。

同样类比 "$(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{t}_2=(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{t}_1)=[(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{t}_1=0$，加上$\mathbf{t}_1$的取向具有任意性" ，可得 $\mathbf{n}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=\mathbf{0}$，即$\mathbf{A}_{2t}=\mathbf{A}_{1t}$。【而且这里有个非常有意思的东西：$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}=-\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=-\frac{d}{dt}\oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}=\oint_l -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{L}$，于是$\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$，将这个小家伙代入$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$，可得$\nabla\times-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$，导出了$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$，非常和谐。】

②.根据**库伦规范**，$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\cdot dV=0$，因此像磁感应强度 **B** 的法向边值关系(或 **D** 的；但 **D** 的没有 **B** 的那么像**A**的；这里用的是第二个，之前却用的第一个)一样， "将$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$写成积分形式：$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\cdot dV=0$，于是$\mathbf{B}_1\cdot\triangle\mathbf{S}_1+\mathbf{B}_2\cdot\triangle\mathbf{S}_2+\mathbf{B}_{侧}\cdot\triangle\mathbf{S}_{侧}\approx\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n}_1\cdot\triangle S_1+\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}_2\cdot\triangle S_2=(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{n}\cdot\triangle S=0$，得到$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$。即有$\mathbf{B}_{2n}=\mathbf{B}_{1n}$。"

仿照着即有：$(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)\cdot\mathbf{n}\cdot\triangle S=0$，得到$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1)=0$。即有$\mathbf{A}_{2n}=\mathbf{A}_{1n}$。

③.于是像电势φ的边值关系$\varphi_1=\varphi_2$一样，我们有$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$。即$\mathbf{A}_1|_S=\mathbf{A}_2|_S$。

四.静磁场的能量

静电场引入了个标势φ，将能量变为了用它表示的：$W=\frac{1}{2}\int_\infty \varphi\rho_f\cdot dV$。我们现在对静磁场也引入了个矢势**A**，是不是也能将静磁场的能量变为用**A**表示的类似形式呢?

1.静磁场的能量密度

在线性介质中，对$dw=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$积分得任意场点处的能量密度$w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$。那么处于静磁场的线性介质中，其静磁场的能量密度 $w=\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ (与电场无关，没有电场部分)。

于是 $W=\int_V \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}dV$。又因$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$以及$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$，于是$\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}=(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{H}=\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})+\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})+\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}$，代入即有 $W=\frac{1}{2}\int_V[\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})+\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}]\cdot dV=\frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\cdot dV=\frac{1}{2}\oint_S \mathbf{A}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\cdot dV$。

【有点奇葩，不存在$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{H}+(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{A}=\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})$，而竟然是$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{H}-(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{A}$这种关系，叉乘特有？但$\nabla\cdot$这可是点乘呀= =】

同样，若V取全空间，对应的面积分遍及无穷远界面，第一项$\frac{1}{2}\oint_\infty \mathbf{A}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}=0$。因此 $W=\frac{1}{2}\int_\infty \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\cdot dV$。不过要注意$\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}$仍不是能量密度，因为能量分布于磁场中 and 电流区域内，而不仅仅在电流分布区域中；因此该式子只用于计算总能量。

2.相互作用能量W_i

正如$W_i=\int_V \rho\varphi_e\cdot dV$，也应有$W_i=\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV$，其中的$\mathbf{A}_e$，是产生该外磁场的电流$\mathbf{J}_e$所激发的。我们来考察一下两个独立电流系之间相互作用能，设电流$\mathbf{J}_e(\chi')(\chi'\in V')$建立矢势$\mathbf{A}_e(\chi)$，$\chi\in V$(或全空间)；电流$\mathbf{J}(\chi)(\chi\in V)$建立矢势$\mathbf{A}(\chi')$，$\chi'\in V'$(或全空间)。

则**全空间的**静磁场的能量$=\frac{1}{2}\int_\infty \mathbf{A}\cdot\mathbf{J}\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}\mathbf{A}_{总}(\chi)\cdot\mathbf{J}_{总}(\chi)\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}(\mathbf{A}_e+\mathbf{A})(\mathbf{J}_e+\mathbf{J})\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{J}_e\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\cdot dV+\frac{1}{2}\int_{V'\cup V}(\mathbf{J}_e\cdot\mathbf{A}+\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e)\cdot dV$，前两项为$\mathbf{J}_e$、$\mathbf{J}$分别单独存在时的能量，仍是自作用能$W_m$；第三项为两个电流系相互作用能量$W_i$。

于是$W_i=\frac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{J}_e\cdot\mathbf{A}\cdot dV+\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho(\chi')\int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi)}{r}dV\cdot dV'+\frac{1}{2}\int_V \rho(\chi)\int_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}dV'\cdot dV$，二项相等，因此$W_i=\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV$。

3.2 磁标势

一.引入磁标势的条件

1.所考虑区域无传导电流

仍然根据介质中的麦克斯韦方程组的后两个(表示磁场方面的)方程：$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$；$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J}_f$。我们用前一个导出了矢势，现在我们考虑用后一个方程导出磁标势：

静电场中$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$，无旋才能够引入标势。那么为了使得$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J_f}=\mathbf{0}$，我们所考虑的区域不应有传导电流$\mathbf{J_f}$，这意味着我们所研究的区域是抠去了所有(传导)电流线的区域。

2.空间应为单连通区域

抠去了自由电流$\mathbf{J_f}$还不够，因为$\nabla\times\mathbf{H}=0$只是其积分形式成立的必要条件：$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}=0$，而最终我们要满足的是积分形式。于是我们还要保证区域内的任何回路都不被自由电流所链环，这就要求还要把以线圈为边界的一个壳层/曲面 S 给抠去。【注：我们认为所有自由电流在足够大的尺度上都是环状的，因而每条自由电流作为l都有一个 S】

抠去各 S 后的区域便成了单连通区域。【因为抠去 S 之前的区域，可看作全空间中只挖去了一条条l，即一个个甜甜圈(相当于将电流视为有横截面积)；甜甜圈本身是复连通的，全空间是单连通的，单连通的挖去一个个同 n 值的复连通的，=更高 or 更低 n 值的复连通的；而在抠去一个个 S 之后，相当于全空间挖去了一个个球(球相当于由两个/层共用边界l的曲面 S 组成)，每个球都是单连通的，因而单连通的全空间减去一个个单连通=单连通】。

【关于连通性，我只知道甜甜圈它的表面是复连通的，球的表面是单连通的，但它们内部的空间的连通性怎么定义/是否同属性，不清楚。因而这里全空间的连通性是指其内部空间的连通性，还是指其内外表面的连通性，尚不清楚。——如果说面的连通性可由其表面的任意一条闭合曲线/环路的连续变化是否都能收缩为一点来判断，那么空间的连通性，应该由其内部任意一个闭合曲面的连续变化是否都能收缩为一个点(如果一个闭合曲面的两面能贴合为一个面，那么它便可继续连续变化为一条线，以及一个点)。——如果这样的话，其实不论全空间挖去l还是挖去 S，二者所剩的区域都是复连通的，因此我在之前认为全空间挖去一个球所得空间是复连通区域】

【但如果空间中仍沿用任意一条闭合曲线(曲线不必贴合内外边界面)收缩为一点的话，那么结论仍然是挖去l的是(剩)个复连通，挖去 S 的剩个单连通。——因为，全空间挖去一个甜甜圈后，l可以由甜甜圈所链环，二者环环相扣，这样的l虽然可以脱离甜甜圈表面，但仍无法收缩为一个点(因为甜甜圈内部不属于所考虑的空间，l在连续变化过程中不能绕过它，l上的点必须时刻处于所考虑/所想判断连通性的空间中)。——但空间的复连通性不像面的复连通性那样，若l只能贴在甜甜圈表面，那么一共有两种l不能收缩为一点：一种就是这样互相垂直地链环着的，另一种是互相平行着环绕着洞口的。——但若l可脱离表面处在甜甜圈内部以外的空间，则后者(后一种情况中的l)可以在外空间中连续变化缩为一点，前者不能；而若l可脱离表面处在甜甜圈内部的空间，则前者可以在内部空间中连续变化缩为一点，而后者不能。】

复联通：若 AB 点的连线穿过J的l所围的 S，则在保持 AB 两点不动的情况下，l无法连续变化到不穿过 S 的，空间中的其他也以 AB 两点为端点的l的位置上。

二.磁标势所满足的微分方程

在可引入磁标势的区域：有$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$、$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{0}$。将$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$带入前者，即有$\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}$，这就相当于我们创造了$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$中的$\rho_f$——但之前我们却并不是将$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$代入$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$，而是将$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon\mathbf{E}$代入其中的——或许是因为$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$右侧本身就有电荷$\rho_f$了，因而代入右侧只有一项的$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$；而$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$右侧没有“磁荷”，因此我们不能带入$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})=\mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}=\mu\mathbf{H}$，而只能代入$\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$。

【当然，其实将$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$代入$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$后，被$\nabla$作用后，也会分裂成两项的：$\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E}+\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$，只不过对于各向同性的线性介质而言，$\nabla\varepsilon=0$，才最终变为一项的：$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$】

——为了得到类似$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon}$的式子，假想磁荷$\rho_m=-\mu\nabla\cdot\mathbf{M}$，这样$\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}=\frac{\rho_m}{\mu}$；【注：与$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon}$类比，而不是与$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$类比，是因为$\mathbf{H}$经常与$\mathbf{E}$靠边，这些操作都在模仿$\mathbf{E}$所满足的存在形式，并且才是$\mathbf{E}$与电势直接相关量(这两点也解释了为什么选$\mathbf{H}$而不选$\mathbf{B}$来引入磁标势)。】

【当然，也可使用$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$：$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\mu\cdot\mathbf{H}+\mu\nabla\cdot\mathbf{H}=0$，于是$\nabla\cdot\mathbf{H}=-\frac{\nabla\mu\cdot\mathbf{H}}{\mu}$；或许这时候该把$-\nabla\mu\cdot\mathbf{H}$定义为$\rho_m$；在铁磁质的情况下，$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})=\mu\mathbf{H}=f(\mathbf{H})$，$\mathbf{B}$和$\mathbf{H}$间非线性(对应$\mu$非常数)，甚至非单值；而在非铁磁质的情况下，$\mu$也不一定为常数】

又由于静磁场在可引入标势区域内无旋$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{0}$，于是对于$\mathbf{H}$，存在磁标势$\varphi_m$，并且类似$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$地有$\mathbf{H}=-\nabla\varphi_m$；结合以上二者，便有$\nabla\cdot\mathbf{H}=\nabla\cdot(-\nabla\varphi_m)=\frac{\rho_m}{\mu}$，得到$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu}$。

三.φ_m,$\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}$的边值关系

同样利用场的边值关系的后两个：$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$，$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$。但由于在介质中或在导体外空间——即有标势的存在的空间，无传导电流$\mathbf{I}_f$、传导电流体密度$\mathbf{J}_f$、传导电流面密度$\boldsymbol{\alpha}_f$，因此后者修正为 $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{0}$。

①.同样我们要么利用$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{0}$，加上 1,2 点若朝着连线方向无限靠近，则它们的连线最终与界面法向$\mathbf{n}$平行；要么干脆不用它，而是利用$\varphi_{m1}-\varphi_{m2}=\int_1^2\mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}$，再配合$\mathbf{H}_2$,$\mathbf{H}_1$在两侧仍分别为有限值，均可得到$\varphi_{m2}|_S=\varphi_{m1}|_S$。

②.将$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$带入$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$，得到$-\mathbf{n}\cdot(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)$；代入$\mathbf{H}=-\nabla\varphi_m$，即有$\mathbf{n}\cdot(\nabla\varphi_{m2}-\nabla\varphi_{m1})=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)$；于是$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}|_S-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}|_S=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)$。

同样，$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$也可写为$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，于是变为$\mathbf{n}\cdot(\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1)=0$，即$-\mathbf{n}\cdot(\mu_2\nabla\varphi_{m2}-\mu_1\nabla\varphi_{m1})=0$，得到$\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}|_S-\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}|_S=0$。

四.静磁场问题的唯一性定理

如果可均匀分区的区域 V 中无传导电流分布，只要在边界上给出下列条件之一，则 V 内磁场唯一确定。

(1).磁标势之值$\varphi_m|_S$

(2).磁场强度的法向分量$H_n|_S=\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}|_S$

(3).磁场强度的切向分量$H_t|_S$

五.磁标势的应用

例 1.证明$\mu\to\infty$的磁性介质的表面为等势面

设$\mu_1=\mu$为磁性介质 1，$\mu_2=\mu_0$为真空。只需证明介质表面的$\mathbf{H}_2$无切向分量H_{2t}(或者说$\tan\theta=\frac{H_{2n}}{H_{2t}}=\infty$，$\theta\to90°$)，则$\mathbf{H}_2$与表面垂直，表面是等势面。

将$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$代入$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$，得到$\mathbf{n}\cdot(\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1)=0$，于是$\mu_2 H_{2n}=\mu_1 H_{1n}$；又因有标势存在的空间满足$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{0}$，即$H_{2t}=H_{1t}$。所以$\mu_2\frac{H_{2n}}{H_{2t}}=\mu_1\frac{H_{1n}}{H_{1t}}$，即$\frac{H_{2n}}{H_{2t}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{H_{1n}}{H_{1t}}=\frac{\mu}{\mu_0}\frac{H_{1n}}{H_{1t}}=\infty$。

该例的结果对**磁极设计**很重要，一般软磁材料的μ很大，当用电流磁化时，其表面近似为等磁势面。进而由磁极表面$\varphi_m|_S$=const.的边界条件可解出磁极之间的磁场——适当选择磁极表面形状，可以获得不同形式的磁场。

例 2.求磁化矢量为M_0的均匀磁场化铁球所产生的磁场

设$\mathbf{M}_0$的方向为 z 轴方向，且球内空间对应φ_{m2}，球外磁标势为φ_{m1}。【奇怪，这里的介质球(不要看到铁是金属就认为是导体球= =，这是对电而言的)内为何不标记为

1；之前的导体球内的点习惯于标记为 1 号；但从“所研究的区域设为 1 号”而言，这确实没问题，并且之后的$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}$中的 **n** 从球外的 1 号空间，指向球内的 2 号空间；之前求解均匀极化的介质球产生的电场，也是设外部为φ_1的】

铁球外$\mathbf{M}_1=\mathbf{0}$，无磁荷存在$\rho_{m2}=-\mu\nabla\cdot\mathbf{M}_1=0$；铁球内$\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_0$是一常矢量，于是$\rho_{m1}=-\mu\nabla\cdot\mathbf{M}_0=0$(三个方向的偏导均=0)。因而磁荷只存在于铁球表面，这与我们之前对 **P**、**M** 的认知是相符的。

根据磁标势所满足的微分方程，$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu}$，可知$\nabla^2\varphi_{m2}=0(r<R_0)$、$\nabla^2\varphi_{m1}=0(r>R_0)$。由轴对称性，即$\varphi(r,\theta,\phi)=\varphi(r,\theta)$，与$\phi$无关，那么应采用球坐标系 laplace 方程的通解$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)$。而进一步由于不应具有球对称性，即$\varphi(r,\theta)\neq\varphi(r)$，与$\theta$有关：那么介质球外的泊松方程$\nabla^2\varphi_{m2}=0$中，应没有$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$项，并且具现为：$\varphi_{m1}=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)(r\geq R)$，以及$\varphi_{m2}=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n r^n+D_n r^{-(n+1)}]\cdot P_n(\cos\theta)(r<R)$。【注：以上指导思想有误，以下过程中本该有$A_0+B_0\cdot\frac{1}{r}$项、$C_0+D_0\cdot\frac{1}{r}$项】

球外φ_{m1}应随着r增大而减小，因此$A_n=0$；球内φ_{m2}在 r→0 处为一有限值，因此$D_n=0$。于是$\varphi_{m1}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)$，$\varphi_{m2}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^n\cdot P_n(\cos\theta)$。【只不过因无穷远处$\varphi_{m1}$应=0 而$A_0=0$，$B_0$待定；同样，$\varphi_{m2}$为有限值导致$D_0=0$、$C_0$待定】

根据方向导数边值关系$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}|_{r=R_0}-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}|_{r=R_0}=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{M}_2-\mathbf{M}_1)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0$。其中，$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial(-r)}=-\sum_{n=1}^{\infty}nC_n r^{n-1}\cdot P_n(\cos\theta)$，$\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)B_n r^{-(n+2)}\cdot P_n(\cos\theta)$，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0=-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{M}_0=-M_0\cdot\cos\theta$。代入即有$M_0\cdot\cos\theta=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n R_0^{n-1}\cdot P_n(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)B_n R_0^{-(n+2)}\cdot P_n(\cos\theta)$。——方程要成立，右侧的多项式满足：右侧 n=1 时的多项式匹配左侧所仅含的cosθ项：$M_0\cdot\cos\theta=C_1\cdot\cos\theta+2B_1R_0^{-3}\cdot\cos\theta$，即有$M_0=C_1+2B_1R_0^{-3}$；右侧其余 n 值时，左边只能是零：$0=\sum_{n=2}^{\infty}nC_n R_0^{n-1}\cdot P_n(\cos\theta)+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)B_n R_0^{-(n+2)}\cdot P_n(\cos\theta)$，即有 $n\neq1$ 时，$C_n=B_n=0$。——这样二式相加，才有原方程成立。【本该还有$0=0+B_0R_0^{-2}$，得到$B_0=0$】

根据磁标势的边值关系$\varphi_{m2}|_{r=R_0}=\varphi_{m1}|_{r=R_0}$。有$\sum_{n=1}^{\infty}C_n R_0^n\cdot P_n(\cos\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n R_0^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)$，左右同 n 项应分别相同，于是有$C_n R_0^n\cdot P_n(\cos\theta)=B_n R_0^{-(n+1)}\cdot P_n(\cos\theta)$。但我们只需要考虑 n=1 时的情形，因为上一段已经解出了当 n>1 时，$C_n=B_n=0$。所以我们得到了第二个关于C_1,B_1的方程：$C_1R_0=B_1R_0^{-2}$。【本该还有$C_0=B_0=0$的】

将后者的B_1用C_1表示后，代入前者，得到$M_0=C_1+2C_1$，于是$C_1=\frac{1}{3}M_0$，$B_1=C_1R_0^3=\frac{1}{3}M_0R_0^3$。故$\varphi_{m1}=\frac{1}{3}M_0R_0^3r^{-2}\cdot\cos\theta=\frac{1}{3}R_0^3\frac{\mathbf{M}_0\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^3}$(或写成$\frac{R_0^3}{r^3}\cdot\frac{1}{3}\mathbf{M}_0\cdot\hat{\mathbf{r}}$是不是更与下式对称?)，$\varphi_{m2}=\frac{1}{3}\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{r}$。

讨论：将$\mathbf{M}_0=\frac{\sum_i \mathbf{m}}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$代入$\varphi_{m1}$，可得$\varphi_{m1}=\frac{1}{3}R_0^3\frac{\mathbf{M}_0\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^3}=\frac{\sum_i \mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^3}$，这表明铁球外磁场现当于铁球总磁矩集中(一个磁偶极子)在原点激发的场。——而对于φ_{m2}，我们来利用它看一看$\mathbf{H}_2$长什么样：$\mathbf{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=-\nabla(\frac{1}{3}\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{r})=-\frac{1}{3}\nabla(\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{r})=-\frac{1}{3}(\mathbf{M}_0\times[\nabla\times\mathbf{r}]+[\mathbf{M}_0\cdot\nabla]\mathbf{r}+\mathbf{r}\times[\nabla\times\mathbf{M}_0]+[\mathbf{r}\cdot\nabla]\mathbf{M}_0)$，其中第三项$\nabla\times\mathbf{M}_0=\mathbf{0}$、第四项$[\mathbf{r}\cdot\nabla]\mathbf{M}_0=\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{M}_0$中的并矢$\nabla\mathbf{M}_0=\mathbf{0}$、第二项$[\mathbf{M}_0\cdot\nabla]\mathbf{r}=[M_0\mathbf{k}\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\mathbf{r}=[M_0\frac{\partial}{\partial z}]\mathbf{r}=M_0\mathbf{k}=\mathbf{M}_0$、第一项$\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$。

因此$\mathbf{H}_2=-\frac{1}{3}\mathbf{M}_0$，于是$\mathbf{B}_2=\mu_0(\mathbf{H}_2+\mathbf{M}_0)=\mu_0(-\frac{1}{3}\mathbf{M}_0+\mathbf{M}_0)=\frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}_0$。可见$\mathbf{H}_2$与$\mathbf{B}_2$相反，相当于正磁荷分布在$\mathbf{M}_0$箭头末端的铁球端面上，产生$\mathbf{H}_2$，指向存在于$\mathbf{M}_0$箭头始端的铁球端面上的负磁荷。——该$\mathbf{H}_2$削弱了$\mathbf{M}_0$，但仍没有它那么强，所以剩余的$\mathbf{B}_2$仍与$\mathbf{M}_0$同向。【$\mathbf{M}_0$相当于原外场$\mathbf{E}_0$；$\mathbf{H}_2$相当于附加场$\mathbf{E}'$；$\mathbf{B}_2$相当于合场强$\mathbf{E}$】

3.3 磁多极矩

本节研究局部范围内的电流分布所激发的磁场在远处的展开式。与电多极矩对比，引入磁多极矩的概念。并讨论电流分布在外磁场中的能量问题。

一.矢势A的多级(极)展开

给定电流分布的空间中激发的磁场(的)矢势:

①.f($\mathbf{r}$)在$\chi'=\mathbf{0}$附近对各χ'的展开式，为$f(\mathbf{r})=f(\chi)+[-\chi'\cdot\nabla]f(\chi)+\frac{1}{2!}[-\chi'\cdot\nabla]^2f(\chi)+\ldots$；②.现对于在原点附近密集分布每个源点$\chi'$，其对同一场点$\chi$的f($\mathbf{r}$)便为$f(\chi-\chi')=f(\chi)-\chi'\cdot\nabla f(\chi)+\frac{1}{2!}[\chi'\cdot\nabla]^2f(\chi)+\ldots$；③.令f($\mathbf{r}$)=磁矢势的表达式$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\mathbf{r}|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\chi-\chi'|}$，则每个$\chi'\neq\mathbf{0}$的源点，其对同一场点$\chi$的矢势的第0、1、2...级近似之和(即泰勒近似)，便成了$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\chi-\chi'|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\chi')[\frac{1}{\chi}-\chi'\cdot(-\frac{\chi}{\chi^3})+\frac{1}{2!}[\chi'\cdot\nabla]^2\frac{1}{\chi}+\ldots]$。④.现在我们用$\int_{V'}dV'$对V′内各源点$\chi'$对远处的某一固定场点$\chi$产生的矢势$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\chi-\chi'|}$，进行叠加：$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{|\chi-\chi'|}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathbf{J}(\chi')[\frac{1}{\chi}+\chi'\cdot\frac{\chi}{\chi^3}+\frac{1}{2!}[\chi'\cdot\nabla]^2\frac{1}{\chi}+\cdots]dV'$。

第一项$\mathbf{A}^{(0)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi}\int_{V'}\mathbf{J}(\chi')dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi}\oint_{l'}I(\chi')\cdot d\mathbf{L}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi}I\oint_{l'}d\mathbf{L}'=\mathbf{0}$(由于构成的是稳恒闭合细环电流，其中各$\chi'$处传导电流值的大小$I(\chi')$相等)，表明没有与自由电荷对应的磁荷存在。第二项$\mathbf{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi^3}\int_{V'}\mathbf{J}(\chi')\chi'\cdot\chi dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi^3}\oint_{l'}I(\chi')\chi'\cdot\chi d\mathbf{L}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\chi^3}\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'$(注：$d\mathbf{L}'=d\chi'$)，而由于$d[(\chi'\cdot\chi)\chi']=(\chi'\cdot\chi)d\chi'+\chi'd(\chi'\cdot\chi)$，其中$\chi$为一定矢，因此其

中的$d(\chi'\cdot\chi)=d\chi'\cdot\chi$，那么 $0=\oint_{l'}d[(\chi'\cdot\chi)\chi']=\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'+\oint_{l'}\chi'd\chi'\cdot\chi$，得到$\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'=-\oint_{l'}\chi'd\chi'\cdot\chi$。

于是$\frac{1}{2}\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'=-\frac{1}{2}\oint_{l'}\chi'd\chi'\cdot\chi$，得到$\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'=\frac{1}{2}\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'-\frac{1}{2}\oint_{l'}\chi'd\chi'\cdot\chi$ $=\frac{1}{2}\oint_{l'}[\chi'\cdot\chi d\chi'-\chi'd\chi'\cdot\chi]$。而$(\chi'\cdot\chi)d\chi'-(d\chi'\cdot\chi)\chi'=(\chi'\times d\chi')\times\chi$。代入可得$\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'=\frac{1}{2}\oint_{l'}[(\chi'\times d\chi')\times\chi]=\frac{1}{2}[\oint_{l'}(\chi'\times d\chi')]\times\chi$。再代入$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\chi^3}\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'$，可得$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi^3}[\frac{I}{2}\oint_{l'}(\chi'\times d\chi')]\times\chi$，其中$\frac{I}{2}\oint_{l'}(\chi'\times d\chi')=I\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}=I\mathbf{S}=\mathbf{m}$。——至于为什么：

设$d\chi'$对原点张角大小为$d\theta>0$，对应一个矢量$d\boldsymbol{\theta}$，其模为$d\theta$，方向为$\chi'\times d\chi'$的方向——即$d\boldsymbol{\theta}=d\theta\frac{\chi'\times d\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}$。那么$d\boldsymbol{\theta}\times\chi'=d\theta\frac{\chi'\times d\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}\times\chi'=d\theta\frac{(\chi'\cdot\chi')d\chi'-(\chi'\cdot d\chi')\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}$，于是$\chi'\times(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=\chi'\times\frac{(\chi'\cdot\chi')d\chi'-(\chi'\cdot d\chi')\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}d\theta=\chi'\times\frac{(\chi'\cdot\chi')d\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}d\theta=(\chi'\cdot\chi')\frac{\chi'\times d\chi'}{|\chi'\times d\chi'|}d\theta=(\chi'\cdot\chi')d\boldsymbol{\theta}$；从另一个角度也可得$\chi'\times(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=(\chi'\cdot\chi')d\boldsymbol{\theta}-(\chi'\cdot d\boldsymbol{\theta})\chi'=(\chi'\cdot\chi')d\boldsymbol{\theta}=\chi'^2d\boldsymbol{\theta}$。

接下来只需要证明$|\chi'\times(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')|=|\chi'^2d\boldsymbol{\theta}|=\chi'^2d\theta=|\chi'\times d\chi'|$即可证明$\chi'\times(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=\chi'\times d\chi'$(因为它俩方向一致)：$|\chi'\times d\chi'|=|\chi'|\cdot(|d\chi'|\cdot\sin<\chi',d\chi'>)=|\chi'|\cdot(|\chi'+d\chi'|\cdot\sin d\theta)=|\chi'|\cdot[(\frac{\chi'}{|\chi'|}\cdot(\chi'+d\chi'))\cdot\tan d\theta]=|\chi'|\cdot[(|\chi'|+\frac{\chi'}{|\chi'|}\cdot d\chi')\cdot\tan d\theta]$，极限情况下，$\frac{\chi'}{|\chi'|}\cdot d\chi'\to0$，$\tan d\theta\to d\theta$(或利用$\chi'+d\chi'\to\chi'$，$\sin d\theta\to d\theta$)。于是结果变为$=\chi'^2d\theta$。【你也可以通过察看：$d\chi'$和$d\boldsymbol{\theta}\times\chi'$它俩分别在$d\boldsymbol{\theta}\times\chi'$方向上的投影大小：$d\chi'\cdot(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=d\boldsymbol{\theta}\cdot(\chi'\times d\chi')=d\theta\cdot|\chi'\times d\chi'|$，而$(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')\cdot(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=(d\theta)^2\cdot\chi'^2$。若极限情况下$|\chi'+d\chi'|=\chi'^2d\theta$，则极限情况下$d\chi'\cdot(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')\cdot(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')$，反之亦然。】

因此$\chi'\times(d\boldsymbol{\theta}\times\chi')=\chi'^2d\boldsymbol{\theta}\approx\chi'\times d\chi'$，极限情况下第二个(≈)变为等号(=)。那么$I\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}=I\oint_{l'}\frac{\chi'^2d\boldsymbol{\theta}}{2}=I\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\theta}\oint_{l'}\frac{\chi'^2d\theta}{2}=I\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\theta}S=I\mathbf{S}=\mathbf{m}$。——当然，其实我们不需要以上两段的转换，也能直接得到$I\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}=I\mathbf{S}$，而且这样的得到完全不需要说明：因为$\frac{\chi'\times d\chi'}{2}$就是以各个小三角形的面积为模的面元矢量；我之所以增加以上两段的篇幅，只是为了说明$\frac{\chi'^2d\boldsymbol{\theta}}{2}$与$\frac{\chi'\times d\chi'}{2}$的等价性，以后我们便可不假思索地相互转换，因为在此已有理论基础。【注意，以上各段中：l'上各点共面；且度量χ'的原点，得在l'平面上】

除此之外，**m** 还可写作 $\mathbf{m}=\frac{I}{2}\oint_{l'}\chi'\times d\chi'=\frac{1}{2}\oint_{V'}\chi'\times\mathbf{J}_M(\chi')dV'=\frac{1}{2}\oint_{S'}\chi'\times\boldsymbol{\alpha}_M(\chi')dS'$。

【比如我们可以来证明一下，为何 **M=m×B**：首先，由于**B**为常矢量，因此有$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+\oint_{l'}(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=\oint_{l'}d[(\chi'\cdot\mathbf{B})\chi']=0$；而另一方面，仍因**B**为常矢量而把它提出来：$\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}=\mathbf{B}\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')=\mathbf{B}\oint_{l'}d(\frac{\chi'^2}{2})=0$。——综合以上二者，即有$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+\oint_{l'}(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=0=2\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}$，**方法一**：将$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'$写成$2\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'$，两边同时÷2，即有$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-\frac{1}{2}\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+\frac{1}{2}\oint_{l'}(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}$，移项即有$\oint_{l'}\frac{(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'}{2}=\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-(\chi'\cdot$

$d\chi')\mathbf{B}$。于是便有了 $\mathbf{m}\times\mathbf{B}=I\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}\times\mathbf{B}=I\oint_{l'}\frac{(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'}{2}=I\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}=I\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})=\oint_{l'}\chi'\times(Id\chi'\times\mathbf{B})=\mathbf{M}$

方法二：我们用另一种方法处理$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+\oint_{l'}(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=2\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}$：$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'-(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}=\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}-(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'$，得到$\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})=\oint_{l'}d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')$，于是根据多重矢积公式$\mathbf{B}\times(\chi'\times d\chi')+\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})+d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')=\mathbf{0}$，可得$(\chi'\times d\chi')\times\mathbf{B}=\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})+d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')$，于是$\oint_{l'}(\chi'\times d\chi')\times\mathbf{B}=\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})+\oint_{l'}d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')=2\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})$，因此$\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}\times\mathbf{B}=\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})$，即得到了 $\mathbf{m}\times\mathbf{B}=I\oint_{l'}\frac{\chi'\times d\chi'}{2}\times\mathbf{B}=\oint_{l'}\chi'\times(Id\chi'\times\mathbf{B})=\mathbf{M}$】

【注意：诸如$\oint_{l'}(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+\oint_{l'}(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=2\oint_{l'}(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}$、$\oint_{l'}\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})=\oint_{l'}d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')$这样的关系，在去除了环积分符号后不成立。即没有$(\chi'\cdot\mathbf{B})d\chi'+(d\chi'\cdot\mathbf{B})\chi'=d[(\chi'\cdot\mathbf{B})\chi']=2(\chi'\cdot d\chi')\mathbf{B}$，也没有$\chi'\times(d\chi'\times\mathbf{B})=d\chi'\times(\mathbf{B}\times\chi')$，只是因为环积分让前者两端都=0了，它们才相等了，以至于才有了后者的环积分=0。】

综上，$\mathbf{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\chi^3}\oint_{l'}\chi'\cdot\chi d\chi'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi^3}[\frac{I}{2}\oint_{l'}(\chi'\times d\chi')]\times\chi=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\chi^3}\mathbf{m}\times\chi$。于是$\mathbf{A}\approx\mathbf{A}^{(0)}+\mathbf{A}^{(1)}=\mathbf{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\chi}{\chi^3}$。

二.磁偶极距的场和磁标势

给定电流分布的空间中激发的磁感应强度：

$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times(\mathbf{A}^{(0)}+\mathbf{A}^{(1)}+\mathbf{A}^{(2)}\ldots)$，其中$\mathbf{B}^{(0)}=\nabla\times\mathbf{A}^{(0)}=\mathbf{0}$；磁偶极矩(磁矩)在远点产生的磁感应强度$\mathbf{B}^{(1)}=\nabla\times\mathbf{A}^{(1)}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\chi}{\chi^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times(\mathbf{m}\times\frac{\chi}{\chi^3})=\frac{\mu_0}{4\pi}\{[(\frac{\chi}{\chi^3}\cdot\nabla)\mathbf{m}-(\nabla\cdot\mathbf{m})\frac{\chi}{\chi^3}]+[(\nabla\cdot\frac{\chi}{\chi^3})\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\chi}{\chi^3}]\}$，其中由于$\mathbf{m}$是定矢，对它求的所有偏导全=0，于是前一个中括号中的两项均=0：$(\frac{\chi}{\chi^3}\cdot\nabla)\mathbf{m}=0$，$(\nabla\cdot\mathbf{m})\frac{\chi}{\chi^3}=0$，只剩下$\frac{\mu_0}{4\pi}[(\nabla\cdot\frac{\chi}{\chi^3})\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\chi}{\chi^3}]$。其中$\nabla\cdot\frac{\chi}{\chi^3}=\nabla\cdot(-\nabla\frac{1}{\chi})=-\nabla^2\frac{1}{\chi}$，根据数学基础二它在$\chi\neq0$处均=0，而我们想研究的是远处的(即$\chi$较大的)场点，所以此项$(\nabla\cdot\frac{\chi}{\chi^3})\mathbf{m}=0$，只剩下$-\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\chi}{\chi^3}$。

根据矢量分析公式$\nabla[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}]=\mathbf{f}\times[\nabla\times\mathbf{g}]+[\mathbf{f}\cdot\nabla]\mathbf{g}+\mathbf{g}\times[\nabla\times\mathbf{f}]+[\mathbf{g}\cdot\nabla]\mathbf{f}$，得到$\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\chi}{\chi^3}]=\mathbf{m}\times[\nabla\times\frac{\chi}{\chi^3}]+[\mathbf{m}\cdot\nabla]\frac{\chi}{\chi^3}+\frac{\chi}{\chi^3}\times[\nabla\times\mathbf{m}]+[\frac{\chi}{\chi^3}\cdot\nabla]\mathbf{m}$。其中仍然因$\mathbf{m}$是定矢，没有了后两项：$\frac{\chi}{\chi^3}\times[\nabla\times\mathbf{m}]$、$[\frac{\chi}{\chi^3}\cdot\nabla]\mathbf{m}$；而其中$\frac{\chi}{\chi^3}$的旋度$\nabla\times\frac{\chi}{\chi^3}=(\nabla\frac{1}{\chi^3})\times\chi+\frac{1}{\chi^3}\nabla\times\chi$，后者中$\nabla\times\chi=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$，前者中$\nabla\frac{1}{\chi^3}=-3\frac{1}{\chi^4}\frac{\chi}{\chi}$，与$\chi$同向，与$\chi$叉乘也$=\mathbf{0}$；因此

$\nabla\times\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=\mathbf{0}$。于是$\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]=[\mathbf{m}\cdot\nabla]\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$。于是$\mathbf{B}\approx\mathbf{B}^{(0)}+\mathbf{B}^{(1)}=\mathbf{B}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]$。

电流分布空间以外的磁场和磁标势：$\mathbf{H}^{(1)}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^{(1)}=\frac{1}{\mu_0}\cdot-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]=-\frac{1}{4\pi}\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]$

【本该是$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$的，不过磁矢势中的μ似乎始终是μ_0？不过我觉得正如电势$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$中的$\varepsilon_0$会因介质中的电场表达式中出现ε而也会有ε的存在一样，应该说磁矢势中的μ_0在磁介质中为μ；不过即使这样的话，$\mathbf{H}^{(1)}$的表达式仍是如此】

又因$\mathbf{H}^{(1)}=-\nabla\varphi_m^{(1)}=-\frac{1}{4\pi}\nabla[\mathbf{m}\cdot\frac{\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}]$，可得$\varphi_m^{(1)}=\frac{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\chi}}{4\pi\chi^3}$。【这可对比$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$；这里也应像$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum_i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\chi}}{\chi^3}$一样，写作$\frac{\sum_i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\chi}}{4\pi\chi^3}$的，包括之前的那些小$\mathbf{m}$们，它们原则上也该写作$\sum_i\mathbf{m}$】

三.小区域电流分布在外场中的能量

根据 P66 静磁场的能量一节，设外场$\mathbf{B}_e$的矢势为$\mathbf{A}_e$，则$\mathbf{J}(\boldsymbol{\chi})$分布在外磁场中的能量(相互作用能)为：$W_i=\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV$。【此时我们并不关心产生$\mathbf{A}_e(\boldsymbol{\chi})$的$\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\chi}')$的分布，即使$\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\chi}')$不在原点附近且分散分布也无妨。】

1.假设$\mathbf{J}(\boldsymbol{\chi})$分布区域是外场中的一个小区域，取其中一点为坐标原点，可对$\mathbf{A}_e$在原点附近作泰勒级数展开。于是：$\mathbf{A}_e(\boldsymbol{\chi})=\mathbf{A}_e(0)+(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\mathbf{A}_e(0)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)^2\mathbf{A}_e(0)+\dots$。同样，也可对$\mathbf{B}_e$在原点附近作展开：$\mathbf{B}_e(\boldsymbol{\chi})=\mathbf{B}_e(0)+(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\mathbf{B}_e(0)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)^2\mathbf{B}_e(0)+\dots$。

那么我们既可表示为$W_i=\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV=\int_V\mathbf{J}\cdot[\mathbf{A}_e(0)+(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\mathbf{A}_e(0)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)^2\mathbf{A}_e(0)+\cdots]\cdot dV=W_i^{(1)}+W_i^{(2)}+W_i^{(3)}$。又可先变换$W_i=\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV=I\oint_l\mathbf{A}_e\cdot d\mathbf{L}=I\int_S(\nabla\times\mathbf{A}_e)\cdot d\mathbf{S}=I\int_S\mathbf{B}_e\cdot d\mathbf{S}$，再用它得到$W_i=I\int_S\mathbf{B}_e\cdot d\mathbf{S}=I\int_S[\mathbf{B}_e(0)+(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)\mathbf{B}_e(0)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{\chi}\cdot\nabla)^2\mathbf{B}_e(0)+\cdots]\cdot d\mathbf{S}=W_i^{(1)}+W_i^{(2)}+W_i^{(3)}$。【注意对比：用$\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}_e\cdot dV$时，结果中的$\mathbf{J}$放在了里面提不出来，而用$I\int_S\mathbf{B}_e\cdot d\mathbf{S}$时，I从一开始就提出来了：这相当于我们简化了物理情景，先只考虑V中的一条小的环形电流。】

其中$W_i^{(1)}=I\int_S\mathbf{B}_e(0)\cdot d\mathbf{S}$，而在$l$、$\mathbf{J}(\boldsymbol{\chi})$所在的小区域 V 中，$\mathbf{B}_e(0)$可看作一个常数，于是$I\int_S\mathbf{B}_e(0)\cdot d\mathbf{S}=\mathbf{B}_e(0)I\int_S\cdot d\mathbf{S}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)$。而若考虑 V 内所有的$\mathbf{J}(\boldsymbol{\chi})$，即所有的$I\,l$，那么将有这些环形电流分别与外磁场之间的相互作用能之和$W_i^{(1)}=\sum_i\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)$。这个结果非常像之前的：体系电偶极矩集中于原点，在外场中的能量(相互作用电场能W_i的一级近似)：$W_i^{(1)}=-\sum_i\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_e(0)$。——只不过差了个负号，这里之所以$W_i^{(1)}$也从 1 级近似开始，也是因为对应的那里是一级近似。【注：可别认为$\mathbf{B}_e(0)$是之前的$\mathbf{B}^{(0)}$，而直接认为$W_i^{(1)}=0$了哈！它俩有本质上的区别：$\mathbf{B}^{(0)}$是小区域分布的$\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\chi}')$在远处的$\mathbf{B}$的零级近似；而$\mathbf{B}_e(0)$是外场在原点处($\mathbf{J}(\boldsymbol{\chi})$所分布的小区域)的 1 级近似，这里的外场并不一定是小区域$\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\chi}')$产生的】

因此$W_i \approx W_i^{(1)} = \Sigma_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$。

四.磁矩(磁偶极矩)在外场中的受力

一个磁偶极子(一个线圈)在外场中的能量为$W_i = W_i^{(1)} = \Sigma_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$。

磁偶极子在外场中平移或转动(**F** 来源于外场$\mathbf{B}_e(\chi)$；**M** 也来源于场源电流们，都是相互作用力，对应着相互作用能W_i的总值：当$\mathbf{J}(\chi)$与$\mathbf{J}_e(\chi')$之间的相互作用能W_i减小时，减小的那部分能量$-dW_i^{(0)}$，应拿去对外做功 **F**·d**L**)，于是根据能量守恒，相互作用力 **F** 做功，对应着相互作用能$W_i^{(0)}$的减少，**F** 相当于是借用$W_i^{(0)}$中的一部分$dW_i^{(0)}$进行做功，功 **F**·d**L** 再化为体系机械能(动能+势能)，这个过程中，场源电流和场点电流的系统总能量改变量=0。

但这里与之前有点区别：是否真的有 **F**·d**L**$+dW_i^{(0)}$=0? 即在$I_e l'$所产生的$\mathbf{B}_e(\chi)$对$\mathbf{J}(\chi)$即线圈Il做功的过程中，场源电流和场点电流的系统总能量改变量是否=0? ——答案是否定的，因为如果没有任何外来形式的能量补充这个系统的总能量的话，则 **F** 所产生的 d**L**，会导致线圈$I_e l'$所产生的$\mathbf{B}_e(\chi)$穿过线圈Il的磁通量Φ_e改变$d\Phi_e$，磁通量的改变意味着将在线圈Il上引起感应电动势$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt}$，进而产生与线圈$l$上原电流I方向相反的感应电流，导致I的减小；同样，d**L** 也会导致线圈Il产生的$\mathbf{B}(\chi')$穿过线圈$I_e l'$的通量Φ改变dΦ，在其上引起感应电动势$\varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt}$，以及对应的感应电流，导致$I_e$减小。

——然而我们之前的结论$W_i \approx W_i^{(1)} = \Sigma_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$，建立在$W_i = I \int_S \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{S}$中的I和产生$\mathbf{B}_e$的$I_e l'$中的$I_e$都不衰减的前提下，因此为了在接下来的过程中使用$\Sigma_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$，我们必须保持I和$I_e$均不衰减，而这就需要我们对这个体系“充能”：利用电源提供额外的能量，以保持$\mathbf{J}(\chi)$与$\mathbf{J}_e(\chi')$，即I和I_e的值不衰减——于是系统总能量改变量 **F**·d**L**$+dW_i^{(1)}>0$。【当然，如果 **F**·d**L**<0 的话，这一段中的I和I_e，在体系总能量恒定的情况下，值会升高；其实也不然，因为我们尚未规定l和l'的绕向相对而言是同向还是反向】

我们来计算一下 **F**·d**L** 这个过程中，系统总能量改变量/增加量，到底是多少：根据$W_i = \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A} \cdot dV + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e \cdot dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e \cdot dV$，我们也把$W_i = I \int_S \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{S}$拆成相等的两项：得到$W_i = \frac{1}{2} I_e \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I_e \Phi + \frac{1}{2} I \Phi_e$，于是在花费时间 dt 施行 **F**·d**L** 这个过程中，系统总能量增加量(改变量)dW_s=两个反反电动势产生的能量=两个反电动势减小了电流所导致的能量损失的负值$= -(\varepsilon_e I_e dt + \varepsilon I dt) = -(-\frac{d\Phi}{dt} I_e dt - \frac{d\Phi_e}{dt} I dt) = I_e d\Phi + I d\Phi_e = 2(\frac{1}{2} I_e d\Phi + \frac{1}{2} I d\Phi_e) = 2dW_i$。

于是 **F**·d**L**$+dW_i^{(1)} = dW_s = 2dW_i = 2dW_i^{(1)}$，得到 **F**·d**L**$= dW_i^{(1)}$；这样与 **F**·d**L**$= -dW_i^{(1)}$的不同，才能与“$W_i \approx W_i^{(1)} = \Sigma_i \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$与$W_i^{(1)} = -\Sigma_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0)$的不同”相互抵消，使

得磁偶极子受外场作用时，与外场并不反向，得到与电偶极子在电场中受力类似的结论，而不是相反的结论。

那么一方面有 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}=dW_i^{(1)}$；另一方面有 $\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}=dW_i^{(1)}$。于是，一方面 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}$(本该写作 $\mathbf{F}\cdot\widehat{d\mathbf{L}}=\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial L}$)，另一方面 $\mathbf{M}\cdot\widehat{d\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial\theta}$。

另外，对于 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}$ 的类型(而非 $\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\theta}$的类型，∵$\nabla$总与$d\mathbf{L}$适配的缘故)，还额外有：$dW_i^{(1)}=\nabla W_i^{(1)}\cdot d\mathbf{L}$，以及$\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}=\mathbf{n}\cdot\nabla W_i^{(1)}$。

①.根据 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}=dW_i^{(1)}=\nabla W_i^{(1)}\cdot d\mathbf{L}$，或者 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial n}=\mathbf{n}\cdot\nabla W_i^{(1)}$，可得到 $\mathbf{F}=\nabla W_i^{(1)}$。

而$\nabla W_i^{(1)}=\nabla[\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)]=\mathbf{m}\times[\nabla\times\mathbf{B}_e(0)]+(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}_e(0)+\mathbf{B}_e(0)\times[\nabla\times\mathbf{m}]+(\mathbf{B}_e(0)\cdot\nabla)\mathbf{m}$，由于$\mathbf{m}$是定矢，后两项=0；而根据静磁场下，介质中的麦克斯韦方程的第四项$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J}_f$，$\nabla\times\mathbf{B}_e(0)=\mu_0\mathbf{J}_e(0)$，其中产生外场的$\mathbf{J}_e(\chi')$一般的所在区域$\chi'$在$\mathbf{J}(\chi)$所在的原点附近区域之外，因此$\mathbf{J}_e(0)=0$。于是 $\mathbf{F}=\nabla W_i^{(1)}=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}_e(0)=\mathbf{m}\cdot\nabla\mathbf{B}_e(0)$，其中$\nabla\mathbf{B}_e(0)$为一并矢。【这与之前的电偶极子在电场中的受力 $\mathbf{F}=\mathbf{p}\cdot\nabla\mathbf{E}_e(0)$类似】

五.磁矩在外磁场中所受力矩

②.$M_{\widehat{d\theta}}=\mathbf{M}\cdot\widehat{d\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial\theta}=\frac{\partial[\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)]}{\partial\theta}=\frac{\partial[m\cdot B_e(0)\cdot\cos\theta]}{\partial\theta}=-m\cdot B_e(0)\cdot\sin\theta$；考虑角度后 $\mathbf{M}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}_e(0)$。【这与$\mathbf{M}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}_e(0)$所对应的$q\mathbf{L}\times\mathbf{E}_e(0)=\mathbf{L}\times q\mathbf{E}_e(0)=\mathbf{L}\times\mathbf{F}_e(0)$相照应】

第四章 电磁波的传播

本章介绍电磁波传播最基本理论，讨论电磁场在介质、导体以及边界上的传播特性。

主要内容 1.平面电磁波。2.平面电磁波在介质界面上的反射和折射。3.导体存在时电磁波的传播。4.电磁波在中的传播。

4.1 平面电磁波

一.电磁波的波动方程

1.一般情况下(有介质)的无源麦克斯韦方程

电磁波本身传播路径上，波周围所处空间，不一定是真空(即可能处于介质中)，但是无源的(即$\rho_f=0$、$J_f=0$)，那么我们要去掉介质中的麦克斯韦方程组中的ρ_f、J_f，退化到无源的麦克斯韦方程组。先回顾一下介质中的麦克斯韦方程组：【注：广义的真空只指的是非介质的情形，狭义的真空不仅指非介质，还包含了无源(条件更苛刻)。】

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$→→无源条件下$\rho_f=0$→→$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→无源条件下不变→→$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→无源条件下不变→→$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=J_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$→→无源条件下$J_f=0$→→$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

如果我们将其中的$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$、$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$移到方程左边去，则每个方程都是齐次的；因此该无源的麦克斯韦方程组又称为齐次的麦克斯韦方程组。【因为**D**和**B**可转化为**H**和**E**，而ρ_f,J_f不能】

2.真空情形下的无源麦克斯韦方程

①.先将介质中的麦克斯韦方程组，并倒推/退化/还原到真空的情形：

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$→→真空条件下(去掉介质)$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$中$\rho_P=0$→→$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→真空条件下不变→→$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→真空条件下不变→→$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=J_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$→→真空条件下$\nabla\times(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M})=J_f+\frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}{\partial t}$，$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0(J_f+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M})=\mu_0(J_f+J_D+J_P+J_M)$，中无**P**和**M**，$J_P$,$J_M$均=0→→$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0(J_f+J_D)$

不过我们加上了真空的条件限制后，接下来不再继续加上稳恒这一条件以回到最初(电磁波本身就不是稳恒的，要推导它当然不能继续退化到稳恒了)。

②.再将真空情形下的麦克斯韦方程组，退化到无源的：

- $\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$→→无源条件下$\rho_f=0$→→$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→无源条件下不变→→$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→无源条件下不变→→$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}_f+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t})$ 无源条件下$\mathbf{J}_f=0$→→$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

2′.真空中的电磁波的波动方程

我们用$\nabla\times$作用于方程$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$的左右两边，左边$=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{E}$，其中根据第一个方程(的无源特性)$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，得到$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\nabla^2\mathbf{E}$；右边$=\nabla\times(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})=-\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{B})}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$。

于是$-\nabla^2\mathbf{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$，得到$\nabla^2\mathbf{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$；同样根据$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，可得$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})=-\nabla^2\mathbf{B}$，且$\nabla\times\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{E})}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$。于是我们得到了$\nabla^2\mathbf{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$，以及$\nabla^2\mathbf{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$。

令 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$，可得$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$、$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$。这种方程在《数学物理方程》中被称为波动方程，它便是真空中的电磁波的波动方程。我们也可借鉴《数学物理方程》的表示方法，将其写为$\mathbf{E}_{tt}-c^2\nabla^2\mathbf{E}=0$、$\mathbf{B}_{tt}-c^2\nabla^2\mathbf{B}=0$，可以轻而易举地看出 c 的量纲是速度的量纲($\because c^2\nabla^2\mathbf{B}$的量纲要与$\mathbf{B}_{tt}$一致)，事实上它就是光速。

它反映了电磁场具有波动性。以及 c 是物理常量之一，光速。(我们现在并未着眼于该波动方程的解)

==

1′.介质中的电磁波的波动方程(铺垫)

现在我们想回过头去讨论 1.，看看 1.能得出什么样的波动方程。但我们必须要像 2′.中$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$、$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$一样，得到$\mathbf{B}$、$\mathbf{H}$以及$\mathbf{D}$、$\mathbf{E}$之间的明确关系：

根据介质的电磁性质中的各向同性介质一节，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$[$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi,t)$、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu\mathbf{H}(\chi,t)$]只适用于静电场，静磁场，缓变场。但我们的电磁波是迅变场，因此不能直接用$\varepsilon\mu$替换掉上述波动方程中的$\mu_0\varepsilon_0$得到介质中的波动方程。

对于电磁波这一迅变场，**E**, **B**变化快，介质中的 **P**,**M** 的振动滞后于它们，且此时ε与振动的圆/角频率ω有关(不再是介质的固有属性了：对于同一介质而言，ε(ω)与ω有关；不过对于同一ω而言，ε(ω)又与介质有关= =)，因此$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\chi,t-t_0)$、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu(\omega)\mathbf{H}(\chi,t-t_0)$。

当以一定角频率ω正弦振荡的电磁波入射介质内时，ε和μ随频率的变化而变化称为**介质的色散**。如果对于各χ而言，$\mathbf{E}(t)$、$\mathbf{B}(t)$都是正/余弦变化的，则此时$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi,t)$，即同一时刻的**D**,**E**是同向的且比例固定的，且也有$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu\mathbf{H}(\chi,t)$；而对于随时间非正/余弦变化的$\mathbf{E}(\chi,t)$、$\mathbf{B}(\chi,t)$，关系式$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi,t)$、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu\mathbf{H}(\chi,t)$不再成立。——因此我们下面就讨论这一能够进行讨论的类型：随时间正弦或余弦变化的$\mathbf{E}(\chi,t)$、$\mathbf{B}(\chi,t)$。

二.时谐电磁波(单色电磁波)

一般电磁波源都以大致确定的ω做正弦振荡，因而发出的电磁波也以相同的频率做正弦振荡——这样以恒定角频率ω做正弦振荡的波，称为**时谐电磁波**/**单色波**。即使电磁波不是单色波，也可展成傅里叶级数，即视为不同频率的单色波的叠加。

设角频率为ω的电磁场，对时间的依赖关系为 cos(ωt)【用余弦是因为它是欧拉公式的实部，我们喜欢实部】；先设$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0\cos(kx-\omega t)$，写成复数的形式：$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}=\mathbf{E}_0 e^{ikx}e^{-i\omega t}=\mathbf{E}(\chi)e^{-i\omega t}$，其中$\mathbf{E}(\chi)$作为电场强度波形在空间上的分布，不一定要取$\mathbf{E}_0 e^{ikx}$(何况这里只是为了引入而故意采用的是小写的 x，不与χ对应)，也可以是其他形式(因为我们只规定了**E**对时间的规律)。同理，$\mathbf{B}(\chi,t)=\mathbf{B}(\chi)e^{-i\omega t}$。

(1).时谐情况下的线性均匀介质中的无源麦克斯韦方程

$\boxed{\text{一定频率下}}$，$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi,t)$【$=\varepsilon\mathbf{E}(\chi)e^{-i\omega t}=\mathbf{D}(\chi)e^{-i\omega t}$】、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu\mathbf{H}(\chi,t)$【$=\mathbf{B}(\chi)e^{-i\omega t}=\mu\mathbf{H}(\chi)e^{-i\omega t}$】，我们简记为$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，并且有$\mathbf{D}(\chi)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi)$、$\mathbf{B}(\chi)=\mu\mathbf{H}(\chi)$【因为ε,μ也只是χ的函数，与 t 无关】；$\boxed{\text{线性均匀=各向同性}}$：$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$、$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=\mu\nabla\cdot\mathbf{H}$【它可管不着$\frac{\partial\mu}{\partial t}$(以至$\frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t}=\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$)，它只管μ随坐标的取值情况】。

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$→→时谐条件下$\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})$→→线性均匀条件下$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→时谐条件下$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，以至$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=i\omega\mathbf{B}=i\omega\mu\mathbf{H}$→→$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→时谐条件下$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})$→→线性均匀条件下$\nabla\cdot\mathbf{H}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$→→时谐条件下$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，以至$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{D}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$→→$\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$

在ω≠0时，该方程组不独立/无关：由于两边均没有偏t的存在，取二式的散度，即得三式；取四式的散度，则得一式。——之前则不然，∵二、四方程右边有对t的偏导项存在。所以这组方程，有用的只有第二、四这两个方程。

我们再来对二、四方程两边取旋度看看：二式左边$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{E}=-\nabla^2\mathbf{E}$，二式右边$i\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}=i\omega\mu(-i\omega\varepsilon\mathbf{E})=\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}$；于是得到$\nabla^2\mathbf{E}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}=0$；四式左边$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H})=-\nabla^2\mathbf{H}$，四式右边$-i\omega\varepsilon\nabla\times\mathbf{E}=-i\omega\varepsilon(i\omega\mu\mathbf{H})=\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H}$；于是得到$\nabla^2\mathbf{H}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H}=0$。

(2).Helmholtz 方程

设$k=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，便得到了一定频率下的电磁场基本方程(可适用于均匀介质)——亥姆霍兹方程：$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$、$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0$。(要使得$\nabla^2\mathbf{H}$的量纲与$k^2\mathbf{H}$的一致，可见k的量纲为$\frac{1}{m}$，即长度单位分之一，意味着它的物理意义应该是**波数**)

不过我们只需要解$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$这一个方程，解出来的$\mathbf{E}$/满足条件的$\mathbf{E}$，还需满足第一个方程$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$(或者是因为我们之前在得到该方程时用到了它，所以它得满足它)。解出符合这两个条件的$\mathbf{E}$后，可利用第二个方程$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}=i\omega\mathbf{B}$，解出$\mathbf{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{i}{k}\sqrt{\varepsilon\mu}\nabla\times\mathbf{E}$。——而不需要解$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0$这个方程，一是因为正向求解总比逆向好，二是因为相对于$\mathbf{B}$而言，我们也不关心$\mathbf{H}$这个辅助量，所以这个方法连同这个方程，一并不太受关注，反而习惯将其写为$\nabla^2\mathbf{B}+k^2\mathbf{B}=0$；因此我们常说的亥姆霍兹方程，单指$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$。

并且用于求解的方程写为以下三个：$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$、$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$、$\mathbf{B}=-\frac{i}{k}\sqrt{\varepsilon\mu}\nabla\times\mathbf{E}$。这个三个方程是独立的，$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$不能由其他俩得来，但它得存在(∵之前就存在)。当然也可以将其用表示：$\nabla^2\mathbf{B}+k^2\mathbf{B}=0$、$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$、$\mathbf{E}=\frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}=\frac{i}{k\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla\times\mathbf{B}$。

它的解$\mathbf{E}(\chi)$、$\mathbf{B}(\chi)$，代表电磁波场强在空间中的分布情况。

三.平面电磁波(求解亥姆赫兹方程)

(1).按照初始条件(激发条件)、传播条件的不同，不同约束下解出来的$\mathbf{E}(\chi)$有不同的形式(广播天线发出的球面波、沿传输线波导定向传播的波、激光器激发的狭窄光束)。一个最基本的解，是平面电磁波：

设电磁波沿x轴传播，其场强、磁感应强度在与x轴正交平面上各点具有相同的值($\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$仅与x,t有关：这就要求方程中的自变量χ必须以$\mathbf{e}_x\cdot\chi$的形式存在)，其波阵面(等相位的点组成的面)与x轴正交：此时方程化为一维常微分方程$\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$，其的一个解为$\mathbf{E}(\chi)=\mathbf{E}_0e^{i(k\mathbf{e}_x)\cdot\chi}=\mathbf{E}_0e^{ikx}$，$\mathbf{E}_0$是一定矢【它确实是个关于$\chi$的函数】。但其

实所有简写的$\mathbf{E}$都应是χ, t的函数，因此完整的解应写为$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}(\chi)e^{-i\omega t}=\mathbf{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$；同样可解$\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{B}+k^2\mathbf{B}=0$得$\mathbf{B}(\chi,t)=\mathbf{B}_0e^{i(kx-\omega t)}$。

现在我们来利用$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，得到的$\mathbf{E}$、$\mathbf{E}_0$方向的约束：根据$\nabla\cdot\mathbf{f}(u(\mathbf{r}))=\frac{d\mathbf{f}}{du}\cdot\nabla u$，其中 $u(\chi)=\mathbf{e}_x\cdot\chi$，$\mathbf{f}(u)=\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{iku}$，$\frac{d\mathbf{f}}{du}=ik\mathbf{E}_0e^{iku}=ik\mathbf{E}$，$\nabla u=\nabla\mathbf{e}_x\cdot\chi=\nabla x=\mathbf{e}_x$，于是有$\nabla\cdot\mathbf{E}=ik\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_x=0$，因此$\mathbf{E}\perp\mathbf{e}_x$，即$E_x=\mathbf{0}$。所以定矢$\mathbf{E}_0\perp x$轴，为电场振幅；同样因$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$而有$\mathbf{B}$、$\mathbf{B}_0\perp\mathbf{e}_x$。

实际存在的场强、磁感应强度为实数部分：$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0\cos(kx-\omega t)$、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mathbf{B}_0\cos(kx-\omega t)$。令$kx-\omega t=0$，得到相速度$v=\frac{x}{t}=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n}$。

(2).我们将该解$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0e^{i(kx-\omega t)}=\mathbf{E}_0e^{i(k\mathbf{e}_x\cdot\chi-\omega t)}$推广至$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$。

①.$|\mathbf{k}|=k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi/T}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$是波数，而$\mathbf{k}$是个矢量，同向于波速$\mathbf{v}$(因此是不是可以将其写作$\mathbf{k}=\frac{\omega}{\mathbf{v}}$？嘿嘿，不过写作$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}=\omega$倒是没有问题)，即波的传播方向，因此我们称之为**波矢**。

②.单色平面电磁波的解：

根据$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f})=\mathbf{f}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\mathbf{f}$，有$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot(\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)})=\mathbf{E}_0\cdot\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}+e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}\nabla\cdot\mathbf{E}_0$，后者中$\mathbf{E}_0$是个定矢，则$\nabla\cdot\mathbf{E}_0=0$；而根据之前的认识，可设$\nabla u=\nabla(\hat{\mathbf{k}}\cdot\chi)=\hat{\mathbf{k}}\times[\nabla\times\chi]+(\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla)\chi+\chi\times[\nabla\times\hat{\mathbf{k}}]+(\chi\cdot\nabla)\hat{\mathbf{k}}$，其中$\nabla\times\chi=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x&y&z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$，而$\hat{\mathbf{k}}$是一单位定矢，于是后两项全为$\mathbf{0}$，得到$\nabla u=(\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla)\chi=\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla\chi$，其中$\nabla\chi=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x}\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}}&0\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}}&0\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}}\\0\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{i}}&\frac{\partial y}{\partial y}\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}}&0\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}}\\0\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{i}}&0\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{j}}&\frac{\partial z}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}}&0\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}}&0\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}}\\0\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{i}}&1\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}}&0\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}}\\0\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{i}}&0\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{j}}&1\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}}\end{pmatrix}=\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{I}}$，因此$\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla\chi=\hat{\mathbf{k}}\cdot\overset{\rightarrow\rightarrow}{\mathbf{I}}=\hat{\mathbf{k}}$，因此根据$\nabla\phi(u)=\frac{d\phi}{du}\nabla u$，得到$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}=ike^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}\nabla(\hat{\mathbf{k}}\cdot\chi)=ike^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}\hat{\mathbf{k}}=i\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$于是$\nabla\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cdot\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}=\mathbf{E}_0\cdot i\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}$。【并且我们得到了这样一个结论：当某一函数$\phi$的空间变量$\chi$只在$e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$这样一个因子中时，$\nabla\phi=i\mathbf{k}\phi$】

得到$\nabla\cdot\mathbf{E}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}$，这个结论非常好用，请记住：以后的“$\nabla\cdot$”就相当于“$i\mathbf{k}\cdot$”，不过前提是它得作用于类似于$\mathbf{E}$的矢量上(即表达式含有且只含有$e^{i\mathbf{k}\cdot\chi}$这一个关于$\chi$的部分)。——然而又根据$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，得到$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$，即我们又证明了$\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$；同样的道理，$\nabla\cdot\mathbf{B}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}$，得到$\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$。这表明了平面电磁波的电磁场的振动方向与传播方向互相垂直。

我们再来证明类似的$\nabla\times\mathbf{E}=i\mathbf{k}\times\mathbf{E}$：同样根据$\nabla\times(\phi\mathbf{f})=(\nabla\phi)\times\mathbf{f}+\phi\nabla\times\mathbf{f}$，可得到$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}\times\mathbf{E}_0$，然后直接沿用已经得到的$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}=i\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$，便能得之。以后我们也直接使用它。【并且此处的$\mathbf{B}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{D}$均满足以上二式】。

利用介质中的无源麦克斯韦方程中的第二个、第四个：$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$、$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，将$\nabla\times\mathbf{E}=i\mathbf{k}\times\mathbf{E}$、$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-(-i\omega\mathbf{B})=i\omega\mathbf{B}$带入其中，得到$i\mathbf{k}\times\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B}$，约去虚单位i得到$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B}$【$\mathbf{B}\perp\mathbf{k},\mathbf{E}$】。同样，对于后者，将$\nabla\times\mathbf{H}=i\mathbf{k}\times\mathbf{H}$、$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{D}$代入，有$i\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-i\omega\mathbf{D}$，因此$\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\omega\mathbf{D}$，即有$\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\omega\varepsilon\mu\mathbf{E}$【$\mathbf{E}\perp\mathbf{k},\mathbf{B}$】。这说明了$\mathbf{k}$、$\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$三者两两垂直(最关键的是，我们说明了$\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$，因为之前已经说明了$\mathbf{E},\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$了)，且$\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$同相。

取模$|\mathbf{k}\times\mathbf{E}|=|\omega\mathbf{B}|$，$\omega\sqrt{\varepsilon\mu}|\mathbf{E}|=\omega|\mathbf{B}|$，可得到$|\mathbf{B}|=\sqrt{\varepsilon\mu}|\mathbf{E}|$，于是$|\mathbf{E}|=v|\mathbf{B}|$。【同样你也可以通过$|\mathbf{k}\times\mathbf{B}|=|-\omega\varepsilon\mu\mathbf{E}|$来得到它】

四.电磁波的能量与能流

(1).电磁波的能量密度

根据线性介质中的能量密度 $w=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2$，利用$|\mathbf{B}|=\sqrt{\varepsilon\mu}|\mathbf{E}|$，得到$\varepsilon\mathbf{E}^2=\frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2$，代入即有 $w=\varepsilon\mathbf{E}^2=\frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2$。【这里的 w 是 W 的小写，不是角频率ω】由于$\mathbf{E},\mathbf{B}$是χ, t的函数，因此 $w=w(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}_0^2\cos^2(kx-\omega t)$。

$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w(\chi,t)\cdot dt=\varepsilon\mathbf{E}_0^2\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(kx-\omega t)\cdot dt=\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}_0^2\frac{1}{T}\int_0^T[1+\cos2(kx-\omega t)]\cdot dt=\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}_0^2$。

(2).电磁波的能流密度

能流密度$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\mathbf{E}\times\frac{1}{\mu}\mathbf{B}=\mathbf{E}\times\frac{1}{\mu}\mathbf{B}$，代入$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B}$，得到$\mathbf{S}=\frac{1}{\omega\mu}\mathbf{E}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})=\frac{1}{\omega\mu}[\mathbf{E}^2\mathbf{k}-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{k})\mathbf{E}]=\frac{1}{\omega\mu}\mathbf{E}^2\frac{\omega}{v}\hat{\mathbf{k}}=\frac{1}{\mu v}\frac{w}{\varepsilon}\hat{\mathbf{k}}=vw\hat{\mathbf{k}}$。【注意能量密度 w 与角频率ω的区别】由于 $w=w(\chi,t)$，因此$\mathbf{S}=\mathbf{S}(\chi,t)$。

$\overline{\mathbf{S}}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{S}(\chi,t)\cdot dt=v\overline{w}\hat{\mathbf{k}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}_0^2\hat{\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_0^2\hat{\mathbf{k}}$。

4.2 单色平面电磁波在介质界面上的反射与折射

本节所讨论的问题，用 maxwell 电磁理论，分析在介质界面上的电磁波将发生的反射和折射的规律。

(1).运动学规律：入射角，反射角，折射角的关系。

(2).动力学规律：入射波，反射波，波的振幅比和相位的关系。

一.反射和折射定律

1.波动在俩不同介质界面上的反射、折射，属于边值问题

之前说过，无源时，$\rho_f=0$、$\mathbf{J}_f=0$；这里也有，$\sigma_f=0$、$\boldsymbol{\alpha}_f=0$ 所对应的无源条件下的边值关系：

- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f=0$（法向）
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$（切向）
- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$（法向）
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f=\mathbf{0}$（切向）

将它运用到时谐电磁波的麦克斯韦方程上时，由于下面的二式可得三式；四式可得一式，并不独立，只有二、四式有用；因此我们也只需要利用上面边值关系中的二、四式。

- $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$
- $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$

因此，讨论一定频率的电磁波，在介质界面上的边值关系，只取其中的 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$、$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{0}$，即$\mathbf{E}_{2t}=\mathbf{E}_{1t}$、$\mathbf{H}_{2t}=\mathbf{H}_{1t}$。【注：$\mathbf{E}_t$既可以指 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$，又可以指$\mathbf{E}$的切向分量$\mathbf{E}_t$——因为 $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{n}\times[(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)_t+(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)_n]=\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)_t=\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{2t}-\mathbf{E}_{1t})=\mathbf{0}$，以至$\mathbf{E}_{2t}-\mathbf{E}_{1t}=\mathbf{0}$】

2.反射和折射定律

假设所考虑交界面为一平面，设为 x-o-y 面(即 z=0 面)，考虑一单色电磁波从 z=0 下方入射到交界面上，设 z=0 平面上下方介质不同，下方为ε_1,μ_1，上方为ε_2,μ_2；入射角为θ、反射角θ'、折射角θ''、入射波波矢$\mathbf{k}$、反射波矢$\mathbf{k}'$、折射波矢$\mathbf{k}''$六者不一定共于一面(但每个 SAS 均共面，如$\mathbf{k}'$、θ'和界面在该点处的法线)，其中$\mathbf{k}$的末端指向$\mathbf{k}'$、$\mathbf{k}''$的始端。【我们尚不规定入射光线与界面法线所在平面，也不对$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$的振动方向进行规定】

入射波：$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}$，反射波：$\mathbf{E}'=\mathbf{E}_0'e^{i(\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega' t)}$，折射波：$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega'' t)}$；根据$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B}$，有入射波：$\mathbf{B}=\frac{1}{\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}$，(同样根据$\mathbf{k}'\times\mathbf{E}'=\omega'\mathbf{B}'$)有反射波：$\mathbf{B}'=\frac{1}{\omega'}\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0'e^{i(\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega' t)}$，折射波：$\mathbf{B}''=\frac{1}{\omega''}\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega'' t)}$。

根据$\mathbf{E}_{1t}|_S=\mathbf{E}_{2t}|_S$，我们有$(\mathbf{E}_t+\mathbf{E}_t')|_{z=0}=\mathbf{E}_t''|_{z=0}$，得到$\mathbf{E}_{0t}e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}+\mathbf{E}_{0t}'e^{i(\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega' t)}=\mathbf{E}_{0t}''e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega'' t)}$。为了让此式成立，首先得有：$\begin{cases}\mathbf{E}_{0t}|_{z=0}+\mathbf{E}_{0t}'|_{z=0}=\mathbf{E}_{0t}''|_{z=0}\\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}|_{z=0}=e^{i(\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega' t)}|_{z=0}=e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega'' t)}|_{z=0}\end{cases}$，而后式的成立又继续要求$(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)|_{z=0}=(\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega' t)|_{z=0}=(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega'' t)|_{z=0}$，进而要求$k_xx+k_yy-\omega t=k_x'x+k_y'y-\omega' t=k_x''x+k_y''y-\omega'' t$【注意其中$k_z''z$等因 z=0 而=0 了】，x,y,t 又是(相互)独立变量，于是像这样一样分别取等$k_xx=k_x'x=k_x''x$，因此$\omega=\omega'=\omega''$、$k_x=k_x'=k_x''$、$k_y=k_y'=k_y''$。

这说明，a.入、反、折射波频率相同；b.$k_x\mathbf{i}+k_y\mathbf{j}=k_x'\mathbf{i}+k_y'\mathbf{j}=k_x''\mathbf{i}+k_y''\mathbf{j}$，即$\mathbf{k}-k_z\mathbf{k}=\mathbf{k}'-k_z'\mathbf{k}=\mathbf{k}''-k_z''\mathbf{k}$，其中$\mathbf{k}$,$k_z\mathbf{k}$两向量确定一个平面，说明入、反、折射波($\mathbf{k}$、$\mathbf{k}'$、$\mathbf{k}''$)在同一平面(或者说，这三个平面的投影线共线)。——若进一步地令入射波$\mathbf{k}$的$k_y=0$，则$k_y=k_y'=k_y''=0$，此时$\mathbf{k}$、$\mathbf{k}'$、$\mathbf{k}''$将共面在 z-o-x 平面内【以后我们都以这个平面为入射面(入射面 z-o-x 不是分界面 x-o-y；也不是另一种意义上的、区分入与反 and 折的分界面 y-o-z 面)，且均在其内讨论事情】。

c.由于入、反、折射面为 z-o-x 面，则$k_x=k\sin\theta$、$k_x'=k'\sin\theta'$、$k_x''=k''\sin\theta''$；又因$k_x=k_x'$，我们有$k\sin\theta=k'\sin\theta'$，得到$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{k'}{k}=\frac{\omega'\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=1$，$\boxed{\theta=\theta'}$，这就是$\boxed{\text{反射定律}}$。

d.根据$k_x=k_x''$，有$k\sin\theta=k''\sin\theta''$，于是$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k}=\frac{\omega''\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{2r}\mu_{2r}}}{\sqrt{\varepsilon_{1r}\mu_{1r}}}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}$，同时$\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{v_1}{v_2}$，于是便有$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}$，这便是$\boxed{\text{折射定律}}$。一般介质(铁磁质除外)，$\mu\approx\mu_0$，此时$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$。

二.菲涅尔(Fresnal)公式

在 1.中我们已规定入射面为 z-o-x 面，且得到了折、反射面都在 z-o-x 面内；但即使这样，$\mathbf{E}_{0t}|_{z=0}+\mathbf{E}_{0t}'|_{z=0}=\mathbf{E}_{0t}''|_{z=0}$中的$\mathbf{E}_{0t}$,$\mathbf{E}_{0t}'$,$\mathbf{E}_{0t}''$的方向也是没有确定的，因为各$\mathbf{E}$只需要⊥对应的各自的$\mathbf{k}$即可(可旋转)，所以我们那时尚未讨论它。【另外，由于$\mathbf{E}_0$,$\mathbf{E}_0'$,$\mathbf{E}_0''$是常矢量，所以可以去掉边界条件"$|_{z=0}$"】

①.虽然 3 个$\mathbf{E}$在⊥各自的$\mathbf{k}$的方向上，均可取向；但既然$\mathbf{E}$,$\mathbf{E}'$,$\mathbf{E}''$是线偏振，那么它们总可以由同相位的，一垂直(于 z-o-x 面的)分量$\mathbf{E}_\perp$,$\mathbf{E}_\perp'$,$\mathbf{E}_\perp''$和一平行(于 z-o-x 面的)分量$\mathbf{E}_\parallel$,$\mathbf{E}_\parallel'$,$\mathbf{E}_\parallel''$的叠加构成。我们设$\mathbf{E}_\perp$,$\mathbf{E}_\perp'$,$\mathbf{E}_\perp''$以共同穿出纸面朝外(y 负轴)为正，即以$-\mathbf{j}$为正；且这一对对分量$\mathbf{E}_\parallel$,$\mathbf{E}_\parallel'$,$\mathbf{E}_\parallel''$分别由$\mathbf{E}_\perp$,$\mathbf{E}_\perp'$,$\mathbf{E}_\perp''$叉乘$\mathbf{k}$,$\mathbf{k}'$,$\mathbf{k}''$得到；以$\mathbf{E}_\perp$,$\mathbf{E}_\parallel$为例，其朝 x-o-y 面的投影为$\mathbf{E}_{-y}$,$\mathbf{E}_{-x}$($\neq\mathbf{E}_{t(-y)}$,$\mathbf{E}_{t(-x)}$)，因为这里的切向 t 是指用 **n** 叉乘了的，在直接

的投影基础上还要逆时针旋转 90°，见下：$\mathbf{E}_{0t(-x)}$=$\mathbf{n}$×$\mathbf{E}_{0y}$；否则就与$\mathbf{E}_{-y}$,$\mathbf{E}_{-x}$无异了：**它们已经表示切向了**)，$\mathbf{E}_{-y}$以$-\mathbf{j}$方向为正，$\mathbf{E}_{(-x)}$以$-\mathbf{i}$方向为正，二者的投影也互相垂直，互不干扰。【同样也适用于$\mathbf{E},\mathbf{E}',\mathbf{E}''$的振幅$\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0',\mathbf{E}_0''$所对应的分量$\mathbf{E}_{0\perp},\mathbf{E}_{0\parallel},\mathbf{E}_{0\perp}',\mathbf{E}_{0\parallel}',\mathbf{E}_{0\perp}'',\mathbf{E}_{0\parallel}''$朝 x-o-y 面的投影$\mathbf{E}_{0(-y)},\mathbf{E}_{0(-x)}$，$\mathbf{E}_{0(-y)}',\mathbf{E}_{0(-x)}',\mathbf{E}_{0(-y)}'',\mathbf{E}_{0(-x)}''$】

可见，当$\mathbf{E}_{0\perp},\mathbf{E}_{0\perp}',\mathbf{E}_{0\perp}''$朝着$-\mathbf{j}$方向时，对应的$\mathbf{E}_{0(-y)},\mathbf{E}_{0(-y)}',\mathbf{E}_{0(-y)}''$们也朝着$-\mathbf{j}$方向；而当$\mathbf{E}_{0\parallel},\mathbf{E}_{0\parallel}',\mathbf{E}_{0\parallel}''$朝着$\mathbf{E}_{0\perp}\times\mathbf{k},\mathbf{E}_{0\perp}'\times\mathbf{k}',\mathbf{E}_{0\perp}''\times\mathbf{k}''$方向时，对应的$\mathbf{E}_{0(-x)},\mathbf{E}_{0(-x)}',\mathbf{E}_{0(-x)}''$们，却不一定朝着$-\mathbf{i}$方向。——因此将$\mathbf{E}_{0t}+\mathbf{E}_{0t}'=\mathbf{E}_{0t}''$中各量写成分量式：$\mathbf{E}_{0t}$=$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp}+\mathbf{E}_{0\parallel})$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp y}+\mathbf{E}_{0\parallel x})$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0(-y)}+\mathbf{E}_{0(-x)})$=$\mathbf{E}_{0tx}+\mathbf{E}_{0t(-y)}$；$\mathbf{E}_{0t}'$=$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0'$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp}'+\mathbf{E}_{0\parallel}')$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp y}'+\mathbf{E}_{0\parallel x}')$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0(-y)}'+\mathbf{E}_{0x}')$=$\mathbf{E}_{0tx}'+\mathbf{E}_{0ty}'$；$\mathbf{E}_{0t}''$=$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0''$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp}''+\mathbf{E}_{0\parallel}'')$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0\perp y}''+\mathbf{E}_{0\parallel x}'')$=$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{0(-y)}''+\mathbf{E}_{0(-x)}'')$=$\mathbf{E}_{0tx}''+\mathbf{E}_{0t(-y)}''$；

这样由于$\mathbf{E}_{0\perp}+\mathbf{E}_{0\parallel}$的相互独立和位置定义，所导致的$\mathbf{E}_{0y}+\mathbf{E}_{0x}$的相互独立，进而导致了$\mathbf{E}_{0tx}+\mathbf{E}_{0ty}$的相互独立，因此代入所得的$(\mathbf{E}_{0tx}+\mathbf{E}_{0t(-y)})+(\mathbf{E}_{0tx}'+\mathbf{E}_{0ty}')=(\mathbf{E}_{0tx}''+\mathbf{E}_{0t(-y)}'')$可被拆写为：$\mathbf{E}_{0tx}+\mathbf{E}_{0tx}'=\mathbf{E}_{0tx}''$，以及$\mathbf{E}_{0t(-y)}+\mathbf{E}_{0ty}'=\mathbf{E}_{0t(-y)}''$，即$\mathbf{E}_{0ty}-\mathbf{E}_{0ty}'=\mathbf{E}_{0ty}''$。

②.当然，以上认识是建立在$\mathbf{E}_t$=$\mathbf{n}\times\mathbf{E}$的基础上；若只是简单地认为$\mathbf{E}_t$是$\mathbf{E}$的切向分量的话，则$\mathbf{E}_{0t}+\mathbf{E}_{0t}'=\mathbf{E}_{0t}''$写成分量形式便是$(\mathbf{E}_{0(-y)}+\mathbf{E}_{0(-x)})+(\mathbf{E}_{0(-y)}'+\mathbf{E}_{0x}')=(\mathbf{E}_{0(-y)}''+\mathbf{E}_{0(-x)}'')$，分离得到$\mathbf{E}_{0y}+\mathbf{E}_{0y}'=\mathbf{E}_{0y}''$，以及 $\mathbf{E}_{0x}-\mathbf{E}_{0x}'=\mathbf{E}_{0x}''$。我们沿用这后一个认知。

由于$\mathbf{E}_\parallel,\mathbf{E}_\parallel',\mathbf{E}_\parallel''$分别由$\mathbf{E}_\perp,\mathbf{E}_\perp',\mathbf{E}_\perp''$叉乘$\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''$得到；而根据$\mathbf{k}\times\mathbf{E}$=$\omega\mathbf{B}$，$\mathbf{H}_\parallel,\mathbf{H}_\parallel',\mathbf{H}_\parallel''$却分别由$\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''$叉乘$\mathbf{E}_\perp,\mathbf{E}_\perp',\mathbf{E}_\perp''$得到；可见$\mathbf{H}_\parallel,\mathbf{H}_\parallel',\mathbf{H}_\parallel''$与$\mathbf{E}_\parallel,\mathbf{E}_\parallel',\mathbf{E}_\parallel''$反向；——而要满足$\mathbf{B}\times\mathbf{k}$=$\omega\varepsilon\mu\mathbf{E}$，则$\mathbf{E}_\parallel,\mathbf{E}_\parallel',\mathbf{E}_\parallel''$得分别由$\mathbf{H}_\perp,\mathbf{H}_\perp',\mathbf{H}_\perp''$叉乘$\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''$得到，则$\mathbf{H}_\perp,\mathbf{H}_\perp',\mathbf{H}_\perp''$却与$\mathbf{E}_\perp,\mathbf{E}_\perp',\mathbf{E}_\perp''$同向，均朝向$-\mathbf{j}$方向；可看到$\mathbf{H}_\parallel,\mathbf{H}_\parallel',\mathbf{H}_\parallel''$却因此分别由$\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''$叉乘$\mathbf{H}_\perp,\mathbf{H}_\perp',\mathbf{H}_\perp''$得到。

于是$\mathbf{H}_{0t}+\mathbf{H}_{0t}'=\mathbf{H}_{0t}''$【同样根据$\mathbf{H}_{1t}|_S$=$\mathbf{H}_{2t}|_S$，并省略去"$|_{z=0}$"】写成分量形式便是$(\mathbf{H}_{0(-y)}+\mathbf{H}_{0x})+(\mathbf{H}_{0(-y)}'+\mathbf{H}_{0(-x)}')=(\mathbf{H}_{0(-y)}''+\mathbf{H}_{0x}'')$，分离得到$\mathbf{H}_{0y}+\mathbf{H}_{0y}'=\mathbf{H}_{0y}''$，以及$\mathbf{H}_{0x}-\mathbf{H}_{0x}'=\mathbf{H}_{0x}''$。

(1).$\mathbf{E}$⊥入射面：利用$\mathbf{E}_{0y}+\mathbf{E}_{0y}'=\mathbf{E}_{0y}''$和$\mathbf{H}_{0x}-\mathbf{H}_{0x}'=\mathbf{H}_{0x}''$，将$\mathbf{H}$=$\frac{\mathbf{B}}{\mu}$=$\frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}$=$\frac{1}{\mu\omega}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}$=$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}$，$\mathbf{H}_{0x}$=$\mathbf{H}_{0\parallel x}$=$(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\perp})_x$=$(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{0\perp})\cdot\cos\theta$、$\mathbf{H}_{0x}'$=$-\mathbf{H}_{0(-x)}'$=$-\mathbf{H}_{0\parallel x}'$=$-(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}'\times\mathbf{E}_{0\perp}')_x$=$(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{0\perp}')\cdot\cos\theta'$，代入$\mathbf{H}_{0x}-\mathbf{H}_{0x}'=\mathbf{H}_{0x}''$，得到$(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{0\perp})\cdot\cos\theta-(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{0\perp}')\cdot\cos\theta'=(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{0\perp}'')\cdot\cos\theta''$，$\mathbf{k}\times$

$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}[\mathbf{E}_{0\perp}\cdot\cos\theta-\mathbf{E}'_{0\perp}\cdot\cos\theta']=\mathbf{k}\times\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathbf{E}''_{0\perp}\cdot\cos\theta''$，由于$\mathbf{E}_{0\perp}$,$\mathbf{E}'_{0\perp}$,$\mathbf{E}''_{0\perp}$共线，且反射定律$\theta=\theta'$，得到$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}[\mathbf{E}_{0\perp}-\mathbf{E}'_{0\perp}]\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathbf{E}''_{0\perp}\cdot\cos\theta''$。

将$\mathbf{E}_{0y}+\mathbf{E}'_{0y}=\mathbf{E}''_{0y}$中的 3 个 y 转换为了(-y)=⊥，等式仍成立，将$\mathbf{E}_{0\perp}+\mathbf{E}'_{0\perp}=\mathbf{E}''_{0\perp}$带入其中，得到$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}[\mathbf{E}_{0\perp}-\mathbf{E}'_{0\perp}]\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}[\mathbf{E}_{0\perp}+\mathbf{E}'_{0\perp}]\cdot\cos\theta''$，得到$[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta'']\mathbf{E}_{0\perp}=[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta]\mathbf{E}'_{0\perp}$，$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}$；将$\mathbf{E}'_{0\perp}=\mathbf{E}''_{0\perp}-\mathbf{E}_{0\perp}$代入其中，或直接代入后式：$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}-\mathbf{E}_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}$，得到$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}$。

一般情况下(非铁磁质)，$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$；且根据非铁磁质的折射定律$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，得到$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''}=\frac{\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}{\cos\theta+\frac{\sin\theta''}{\sin\theta}\cos\theta''}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$；并且有$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$。

(2).$\mathbf{E}$//入射面：利用$\mathbf{H}_{0y}+\mathbf{H}'_{0y}=\mathbf{H}''_{0y}$和$\mathbf{E}_{0x}-\mathbf{E}'_{0x}=\mathbf{E}''_{0x}$，将$\mathbf{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}$，

$\mathbf{H}_{0y}=-\mathbf{H}_{0(-y)}=-\mathbf{H}_{0\perp y}=-(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\parallel})_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\parallel}$，

$\mathbf{H}'_{0y}=-\mathbf{H}'_{0(-y)}=-\mathbf{H}'_{0\perp y}=-(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widehat{\mathbf{k}'}\times\mathbf{E}'_{0\parallel})_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widehat{\mathbf{k}'}\times\mathbf{E}'_{0\parallel}$，代入$\mathbf{H}_{0y}+\mathbf{H}'_{0y}=\mathbf{H}''_{0y}$，得到$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\parallel}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widehat{\mathbf{k}'}\times\mathbf{E}'_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\widehat{\mathbf{k}''}\times\mathbf{E}''_{0\parallel}$，两边取模，由于共线且同向的原因$|\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\parallel}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widehat{\mathbf{k}'}\times\mathbf{E}'_{0\parallel}|=|\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_{0\parallel}|+|\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widehat{\mathbf{k}'}\times\mathbf{E}'_{0\parallel}|$，即有$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathrm{E}_{0\parallel}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathrm{E}'_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathrm{E}''_{0\parallel}$。

将$\mathbf{E}_{0x}-\mathbf{E}'_{0x}=\mathbf{E}''_{0x}$【写为$-\mathbf{E}_{0(-x)}-\mathbf{E}'_{0x}=-\mathbf{E}''_{0(-x)}$，即$\mathbf{E}_{0(-x)}+\mathbf{E}'_{0x}=\mathbf{E}''_{0(-x)}$，得到$\mathbf{E}_{0\parallel x}+\mathbf{E}'_{0\parallel x}=\mathbf{E}''_{0\parallel x}$】取模即有$-\mathrm{E}_{0\parallel}\cdot\cos\theta+\mathrm{E}'_{0\parallel}\cdot\cos\theta'=-\mathrm{E}''_{0\parallel}\cdot\cos\theta''$，利用反射定律$\theta=\theta'$，得到$(\mathrm{E}_{0\parallel}-\mathrm{E}'_{0\parallel})\cdot\cos\theta=\mathrm{E}''_{0\parallel}\cdot\cos\theta''$。——将前者代入后者，得到$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}(\mathrm{E}_{0\parallel}-\mathrm{E}'_{0\parallel})\cdot\cos\theta=(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathrm{E}_{0\parallel}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathrm{E}'_{0\parallel})\cdot\cos\theta''$，即有$(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta'')\mathrm{E}_{0\parallel}=(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta'')\mathrm{E}'_{0\parallel}$，于是$\frac{\mathrm{E}'_{0\parallel}}{\mathrm{E}_{0\parallel}}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$；将$\mathrm{E}'_{0\parallel}=(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathrm{E}''_{0\parallel}-\mathrm{E}_{0\parallel})$代入$\frac{\mathrm{E}'_{0\parallel}}{\mathrm{E}_{0\parallel}}$，即有$\frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\mathrm{E}''_{0\parallel}}{\mathrm{E}_{0\parallel}}-1=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$，得到$\frac{\mathrm{E}''_{0\parallel}}{\mathrm{E}_{0\parallel}}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$

$=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$。

【同样，我们也可类似$\mathbf{E}$⊥入射面地，察看$\mathbf{H}$⊥入射面：利用$\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\omega\varepsilon\mu\mathbf{E}$，得到$\mathbf{E}=\frac{1}{\omega\varepsilon}\mathbf{H}\times\mathbf{k}=\frac{1}{\omega\varepsilon}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{k}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{k}}$。之后$\mathbf{E}_{0x}=-\mathbf{E}_{(-x)}=-\mathbf{E}_{0\parallel x}=-(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}_{0\perp}\times\hat{\mathbf{k}})_x=(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}_{0\perp}\times\mathbf{k})\cdot\cos\theta$、$\mathbf{E}'_{0x}=\mathbf{E}'_{0\parallel x}=(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}'_{0\perp}\times\hat{\mathbf{k}}')_x=(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}'_{0\perp}\times-\mathbf{k})\cdot\cos\theta'=-(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}'_{0\perp}\times\mathbf{k})\cdot\cos\theta'$，代入$\mathbf{H}_{0x}-\mathbf{H}'_{0x}=\mathbf{H}''_{0x}$，得到$(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}_{0\perp}\times\mathbf{k})\cdot\cos\theta-(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}'_{0\perp}\times\mathbf{k})\cdot\cos\theta'=(\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\mathbf{H}''_{0\perp}\times\mathbf{k})\cdot\cos\theta''$，$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}[\mathbf{H}_{0\perp}\cdot\cos\theta-\mathbf{H}'_{0\perp}\cdot\cos\theta']\times\mathbf{k}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\mathbf{H}''_{0\perp}\cdot\cos\theta''\times\mathbf{k}$，由于$\mathbf{H}_{0\perp}$,$\mathbf{H}'_{0\perp}$,$\mathbf{H}''_{0\perp}$共线，且反射定律$\theta=\theta'$，得到$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}[\mathbf{H}_{0\perp}-\mathbf{H}'_{0\perp}]\cos\theta=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\mathbf{H}''_{0\perp}\cdot\cos\theta''$，该式与之前的式子极其相像。

之后同样将$\mathbf{H}_{0y}+\mathbf{H}'_{0y}=\mathbf{H}''_{0y}$写作$\mathbf{H}_{0\perp}+\mathbf{H}'_{0\perp}=\mathbf{H}''_{0\perp}$；之后的步骤完全相同，只需要将其中的$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$改为$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$、E 改为 H 即可，我们直接给出结果：$\frac{\mathbf{H}'_{0\perp}}{\mathbf{H}_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta-\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}$、$\frac{\mathbf{H}''_{0\perp}}{\mathbf{H}_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}$，同样非铁磁质时$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$；且根据非铁磁质的折射定律$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，得到$\frac{\mathbf{H}'_{0\perp}}{\mathbf{H}_{0\perp}}=\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta-\cos\theta''}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta+\cos\theta''}=\frac{\sin(\theta-\theta'')\cos(\theta+\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$；并且有$\frac{\mathbf{H}''_{0\perp}}{\mathbf{H}_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta+\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$。

然后再根据$\mathbf{E}_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}_{0\perp}\times\hat{\mathbf{k}}$、$\mathbf{E}'_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\mathbf{H}'_{0\perp}\times\hat{\mathbf{k}}'$等，取模得到$E_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}H_{0\perp}$、$E'_{0\parallel}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}H'_{0\perp}$。于是便有$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{H'_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$、$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{H''_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$，不过此时的分子分母的 E 的平行分量，就不像 E 和 H 的垂直分量那样可写作矢量了。】

由于$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$、$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cdot\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta''}$，(等号右边都乘以$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$后)与中括号中的$\frac{H'_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta-\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}$、$\frac{H''_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta+\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta''}$完全等价，因此我们不再用此方法算下去了，结果一样。

总结一下：$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$、$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$；$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$、$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$。

讨论:

(1).电磁波的偏振性

偏振：电场矢量$\mathbf{E}$在垂直于传播方向平面内的振动状态。

时谐波按偏振状态分为，线偏振，圆偏振，和椭圆偏振。

平面波是线偏振的。

圆，椭圆偏振：两个频率相同，振动方向互相垂直的平面波的叠加。

(2).垂直偏振$\mathbf{E}'_{0\perp}$

任意偏振的波总可以分为$\mathbf{E}_0$平行和垂直于 z-o-x 入射的两个入射波；当其中$\theta+\theta''=\frac{\pi}{2}$时，$\mathbf{E}'_{0\parallel}=0$，只有$\mathbf{E}'_{0\perp}$存在；这说明此时，反射波中没有电场平行入射面的部分。是完全的线偏振波。

这便是：光学中的布儒斯特定律，满足条件的入射角θ_0为布儒斯特角。平面波以 brewster 角入射，反射波只存在垂直入射面偏振的波。

此时还有，$\theta'+\theta''=\frac{\pi}{2}$，即反射波和折射波传播方向互相垂直。

(3).a.当平面波从光疏介质入射光密介质($n_{21}>1$)

根据折射定律，$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=n_{21}>1$，于是$\theta''<\theta$，此时$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}<0$；若再有$\theta'+\theta''>\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\mathbf{E}'_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}<0$，此时无论垂直分量，还是平行分量，都与入射波相应分量反向。反射波与入射波相位相差π，差了半个波长。半波损失。

b.从光密到光疏($n_{21}<1$)，$\theta''>\theta$，$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}>0$；若再有$\theta'+\theta''>\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\mathbf{E}'_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}>0$。此时无半波损失。

三.全反射

从光密到光疏($n_{21}<1$)，$\theta''>\theta$，若此时θ达到某值θ_1，使得$\theta''=\frac{\pi}{2}$(θ再增大将使得θ''消失)，此时$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\sin\theta=n_{21}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$。

θ_1称作全反射临界角；以θ_1入射，无折射波($\mathbf{E}''_{0\perp}$、$\mathbf{E}''_{0\parallel}$均没有)。全反射现象。

1.发生全反射时，导体内部折射波振幅

若$\theta>\theta_1$，此时$\sin\theta>n_{21}$；根据边值关系$k_x=k'_x=k''_x=k\sin\theta$、$k_y=k'_y=k''_y=0$，此时又有 $k=k'=\frac{\omega}{v_1}$(因为 **k,k'**都在介质一内，同一介质波矢大小$\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$相同)、$k''=\frac{\omega}{v_2}$，于是$\frac{k''}{k}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21}<\sin\theta$。现在我们利用$k''_x=k\sin\theta$以及$k''=k\cdot n_{21}$，来考察一下$k''_z$：。

$k''_z=\sqrt{k''^2-k''^2_x-k''^2_y}=\sqrt{k''^2-k''^2_x}=\sqrt{k^2\cdot n_{21}^2-k^2\sin^2\theta}=k\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta}=$ $ik\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}=i\alpha$。由于选择的是 z-o-x 面，$k''_y=0$，$\mathbf{E}''=\mathbf{E}''_0e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega''t)}=\mathbf{E}''_0e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega''t)}$，

折射波传播因子$e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}}=e^{i(k_x x+k_z z)}=e^{i(k_x x+i\alpha z)}=e^{-\alpha z}e^{ik_x x}=e^{-\alpha z}e^{ik\sin\theta\cdot x}$，代入相位因子$e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega'' t)}$得到$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega'' t)}=\mathbf{E}_0''e^{-\alpha z}e^{i(k_x x-\omega'' t)}=\mathbf{E}_0''e^{-\alpha z}e^{i(\mathbf{k}_x\cdot\mathbf{x}-\omega'' t)}$，可见折射波$\mathbf{E}''$沿 z 方向衰减，沿 x 方向传播。

全反射的介质 2 中，电磁波不全为 0，电场被限制在表面附近一个区域内，全反射时的折射波为表面波。

2.折射波能流密度

$\bar{\mathbf{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}^*\times\mathbf{H})$，$\overline{\mathbf{S}''}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}''^*\times\mathbf{H}'')=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ E_x''^* & E_y''^* & E_z''^*\\ H_x'' & H_y'' & H_z''\end{bmatrix}\right)$，则(我们重点关注折射波的 z 分量)$\overline{\mathbf{S}''}_z=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_x''^*H_y''-E_y''^*H_x'')\mathbf{k}$，设$\mathbf{E}''$⊥入射面，即只有$\mathbf{E}_\perp''$分量，于是$E_x''^*=0$，因此$\overline{S''}_z=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_y''^*H_x'')$，又因$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\frac{1}{\mu\omega}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{k}\mathbf{k}\times\mathbf{E}$，得到，得到$\mathbf{H}_x''=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{k''}\mathbf{k}_z''\times\mathbf{E}_y''$，于是取模得到$H_x''=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{k''}k_z''E_y''$，代入得$\overline{S''}_z=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_y''^*\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{k''}k_z''E_y''\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{k''}E_y''^*E_y''\mathrm{Re}(k_z'')$，其中的$E_y''^*E_y''$为一实数，取实部即提出来了，$\mathrm{Re}(k_z'')=\mathrm{Re}(i\alpha)=0$，因此$\overline{S''}_z=0$。

这说明确实没有能量 or 能流在 z 向传输。

4.3 有导体存在时电磁波的传播

一.导体内自由电荷分布

设导体均匀，各向同性，其性质由一组物质常数ε,μ,σ确定。并且有这 3 个电荷所应遵循的方程：$\begin{cases}\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}\\ \nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f\end{cases}$。那么，$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{J}=\nabla\cdot(\sigma\mathbf{E})=\sigma\nabla\cdot(\mathbf{E})=\sigma\frac{\rho}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$。于是$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0$，得到$\rho(t)=\rho_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$。流逝了特征时间$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$之后，$\rho(t)=\rho_0e^{-1}$，认为电荷流失得差不多了。

若所要考虑的电磁波的周期远远大于τ，即$\tau<<T=\frac{2\pi}{\omega}$，则数量级上有$\omega<<\tau^{-1}$。代入$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$，即有$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$。这称为**良导体条件**。

讨论(1). 一般地，金属的$\tau\sim10^{-17}$s，只要$\omega<<\tau^{-1}=10^{17}$，即电磁波频率不太高，则金属可视作良导体。良导体内无自由电荷分布，ρ_f只能分布于导体表面。

(2).导体内自由电荷衰减快，完全由于导体自身性质决定，与导体进行何种电磁过程无关。所以讨论电磁波在导体中传播时，电荷体密度$\rho_f=0$。

二.导体内单色平面电磁波

导体内：$\rho_f=0$，$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$。

1.导体的麦克斯韦方程

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$→→导体中$\rho_f=0$→→$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→导体下不变→→$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→导体下不变→→$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$→→导体中$\mathbf{J}_f=\sigma\mathbf{E}$→→$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

2.一定频率的(线性均匀)导体中的麦克斯韦方程

$\boxed{\text{一定频率下}}$，$\mathbf{D}(\chi,t)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi,t)$【$=\varepsilon\mathbf{E}(\chi)e^{-i\omega t}=\mathbf{D}(\chi)e^{-i\omega t}$】、$\mathbf{B}(\chi,t)=\mu\mathbf{H}(\chi,t)$【$=\mathbf{B}(\chi)e^{-i\omega t}=\mu\mathbf{H}(\chi)e^{-i\omega t}$】，我们简记为$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，并且有$\mathbf{D}(\chi)=\varepsilon\mathbf{E}(\chi)$、$\mathbf{B}(\chi)=\mu\mathbf{H}(\chi)$【因为$\varepsilon,\mu$也只是$\chi$的函数，与t无关】；$\boxed{\text{线性均匀=各向同性}}$：$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$、$\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})=\mu\nabla\cdot\mathbf{H}$。

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$→→时谐条件下$\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})$→→线性均匀条件下$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$→→时谐条件下$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，以至$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=i\omega\mathbf{B}=i\omega\mu\mathbf{H}$→→$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$→→时谐条件下$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot(\mu\mathbf{H})$→→线性均匀条件下$\nabla\cdot\mathbf{H}=0$
- $\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$→→时谐条件下$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{D}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$→→$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$

我们将第四项方程写作$\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})\mathbf{E}$，令复介电常数$\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$(实部是位移电流$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$的贡献，虚部是传导电流$\sigma\mathbf{E}$的贡献)，得到形式上类似的$\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon'\mathbf{E}$。【这个很好记，$\frac{\sigma}{\omega}$与$\tau^{-1}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$是一对兄弟，一起凑成良导体条件$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$】

这样我们便可对二、四方程两边取旋度：二式左边$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{E}=-\nabla^2\mathbf{E}$，二式右边$i\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}=i\omega\mu(-i\omega\varepsilon'\mathbf{E})=\omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{E}$；于是得到$\nabla^2\mathbf{E}+\omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{E}=0$；

四式左边$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H})=-\nabla^2\mathbf{H}$，四式右边$-i\omega\varepsilon'\nabla\times\mathbf{E}=-i\omega\varepsilon'(i\omega\mu\mathbf{H})=\omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{H}$；于是得到$\nabla^2\mathbf{H}+\omega^2\varepsilon'\mu\mathbf{H}=0$。

3.Helmholtz 方程

设复波数 $k=\sqrt{\omega^2\varepsilon'\mu}=\omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$，仍得到：$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$、$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0$。设复波矢$\mathbf{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha}$，则一方面$\mathbf{k}^2=\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2+i2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$，另一方面$\mathbf{k}^2=k^2=\omega^2\varepsilon'\mu=\omega^2(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})\mu=\omega^2\mu\varepsilon+i\omega\mu\sigma$，实虚部相等，得到$\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2=\omega^2\mu\varepsilon$、$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$。

由于我们重点关注折射波，因此现在设真空中(z<0)的入射波矢为$k^{(0)}$，反射波矢$k'^{(0)}$，折射波矢为k【上一段的$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}$就是折射波的波矢的成分，因为上一段中的复波数 k 来源于方程，而方程的条件是导体中的，有$\sigma\mathbf{E}$；而入射波和反射波所在的介质一为真空，$\sigma=0$，介电常数当然是实数】； z>0 为导体内部，对应μ,ε且$\sigma\neq0$，z<0 真空对应μ_0,ε_0且$\sigma=0$。但仍沿用折射波的电矢量记号$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}=\mathbf{E}_0''e^{i[(\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}=\mathbf{E}_0''e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\chi}}\cdot e^{i[\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}$。【我也觉得这样的设定很奇怪】现在我们按照全反射那一节求$\theta>\theta_1$时的$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}''\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega''t)}$的步骤，尝试着求这里的$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}$。

(a).同样根据 z=0 的边界条件，有$k_x^{(0)}=k_x'^{(0)}=k_x=k^{(0)}\sin\theta$，又因$k_x=\beta_x+i\alpha_x$，于是$\beta_x+i\alpha_x=k_x^{(0)}=k^{(0)}\sin\theta$，比较实虚部，得到$\beta_x=k_x^{(0)}=k^{(0)}\sin\theta$，$\alpha_x=0$。

(b).同样有$k_y^{(0)}=k_y'^{(0)}=k_y=0$(入射面为 x-z 面)，得到$k_y=\beta_y+i\alpha_y=0$，因此$\beta_y=\alpha_y=0$。

(c).由于我们已处于**良导体条件**，因此$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$，$k^2=\omega^2\varepsilon'\mu=\omega^2(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})\mu=\omega^2\varepsilon\mu(1+i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})\approx\omega^2\varepsilon\mu(i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})=i\omega\mu\sigma$。可见$\mathbf{k}^2=\omega^2\mu\varepsilon+i\omega\mu\sigma\approx i\omega\mu\sigma$，那么$\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2=\omega^2\mu\varepsilon\approx0$，因此$\beta^2=\alpha^2$。即有，$\beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2=\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2$。

①.现在让我们把(a).$\alpha_x=0$、(b).$\beta_y=\alpha_y=0$代入(c).，即有$\beta_x^2+\beta_z^2=\alpha_z^2$。得到$\beta_z=\sqrt{\alpha_z^2-\beta_x^2}$。

②.由于$\alpha_x=\alpha_y=0$，得到$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\beta_z\alpha_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma=\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon\approx\frac{1}{2}\omega^2\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{2}k^{(0)^2}=\frac{1}{2}(\frac{k_x^{(0)}}{\sin\theta})^2>\frac{1}{2}k_x^{(0)^2}=\frac{1}{2}\beta_x^2$，即有$\beta_z\alpha_z>>\beta_x^2$。

利用①.和②.：根据①.可知$\beta_z<\alpha_z$，则$\beta_z\alpha_z>>\beta_x^2$只能是$\alpha_z$单独很大，或$\beta_z,\alpha_z$二者都很大引起的，而不是$\beta_z$单独很大引起的。——然而若$\alpha_z>>\beta_x^2$而$\beta_z$不大，则$\beta_z=\sqrt{\alpha_z^2-\beta_x^2}$右边会变得比左边大很多，不会取等。——所以$\beta_z,\alpha_z$都很大，但$\beta_z$稍$<\alpha_z$。

可见β_x^2可忽略，且$\beta_z\approx\alpha_z$。这样的话，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$都已确定：$\beta_x\approx0$，$\beta_y=0$，$\beta_z\approx\alpha_z$；$\alpha_x=\alpha_y=0$。

讨论：1.任意入射角情况下，α垂直于分界面(法线方向)，β接近法线方向。即进入导体的折射波基本上沿界面法线方向传播，与入射方向(角)无关。【不太精确】【这与全反射的可以对比起来记忆：二者都是向 z 方向指数衰减，但一个朝着 x 方向传播，这个却也朝着 z 方向传播】

2.根据之前所得$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\chi}}\cdot e^{i[\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}$，其中$e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\chi}}=e^{-\alpha_z\cdot z}=e^{-\boldsymbol{\alpha}_z\cdot\boldsymbol{\chi}}$的衰减方向仅为 z 方向。这种效应叫趋肤效应，并且可算趋肤深度。【精确，因为$\alpha_x=\alpha_y=0$】

三.趋肤效应和穿透深度

只考虑垂直入射的情形，即$\mathbf{k}^{(0)}=k_z^{(0)}\mathbf{e}_z$：那么$k_x^{(0)}=k_x=0$，得到折射波波矢的 x 向分量$k_x=\beta_x+i\alpha_x=0$，于是$\beta_x=\alpha_x=0$；同样由于入射面设为了 xoz 面的关系，$k_y^{(0)}=k_y=0$，于是$\beta_y=\alpha_y=0$。所以$\beta=\beta_z$、$\alpha=\alpha_z$。

此时$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\beta_z\alpha_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$，得到$\alpha=\alpha_z=\frac{1}{2\beta}\omega\mu\sigma$，代入$\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2=\omega^2\mu\varepsilon$，得到$\boldsymbol{\beta}^2-\frac{1}{4\beta^2}\omega^2\mu^2\sigma^2=\omega^2\mu\varepsilon$，于是$\beta^4-\omega^2\mu\varepsilon\beta^2=\frac{1}{4}\omega^2\mu^2\sigma^2$，方程两边加上$\frac{1}{4}\omega^4\mu^2\varepsilon^2$，得到$(\beta^2-\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon)^2=\frac{1}{4}\omega^2\mu^2(\sigma^2+\varepsilon^2\omega^2)$，于是$\beta^2-\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon=\frac{1}{2}\omega\mu\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2\omega^2}=\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon\sqrt{(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})^2+1}$，得到$\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon(1+\sqrt{(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})^2+1})}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})^2+1})}$；将$\beta^2=\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon+\frac{1}{2}\omega^2\mu\varepsilon\sqrt{(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})^2+1}$代入$\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\alpha}^2=\omega^2\mu\varepsilon$，得到$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})^2+1}-1)}$。

讨论：$\mathbf{E}''=\mathbf{E}_0''e^{-\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\chi}}\cdot e^{i[\beta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}$，$\mathbf{H}''=\mathbf{H}_0''e^{-\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\chi}}\cdot e^{i[\beta\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}$。

(1).$\mathbf{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha}$中，$\boldsymbol{\beta}$是通常意义的波矢量，$\boldsymbol{\alpha}$是电磁波进入导体衰减的程度。

衰减的原因：

①.传导电流消耗焦耳热，损耗随导体导电性能σ的提高而减小。

②.导体表面自由电荷引起导体导体表面上强烈反射，随导电能力σ提高而增强。理想导体焦耳热为 0，电磁波全部反射。

(2).$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$的意义：

$\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{J}_D|}=\frac{|\sigma\mathbf{E}|}{|-i\omega\varepsilon\mathbf{E}|}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$，反映了传导电流$\mathbf{J}$与位移电流$\mathbf{J}_D$的比值。【但按理说，位移电流的定义并不是$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=$ =】

①.若$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}<<1$，则$\alpha=0,\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。近似于绝缘介质【相当于$\sigma$太小，电阻率$\rho$太大】，即之前的情况。【此时$\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{J}_D|}<<1$】；②.若$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}>>1$，则$\alpha\approx\beta$，再根据$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\beta\alpha=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$，得到$\alpha\approx\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$。【此时$\frac{|\mathbf{J}|}{|\mathbf{J}_D|}>>1$】

(3).波振幅沿传播方向按指数$e^{-\alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$衰减，α为衰减常数。

波振幅降为原值的 1/e 时的传播距离，称为穿透深度δ，$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$。铜的$\sigma\sim5\times10^7\mathrm{s/m}$，当ω=50Hz 时，$\delta\sim0.9$cm；当ω=100MHz 时，$\delta\sim0.7\times10^{-3}\mathrm{cm}$。

趋肤效应：对于高频电磁波，电磁场以及和它相互作用的高频电流，集中于(内)表面薄层。

(4).相速度 $v=\frac{\omega}{|\mathbf{k}|}=\frac{\omega}{\beta}$，导体中传播速度由β决定，β称为相位常数。

波长$\lambda=\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}=\frac{2\pi}{\beta}$，然而$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2+1}\right)}>\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，因此相对于介质一即真空中的波数$|\mathbf{k}|$，这里$|\mathbf{k}|$的波数β更大；波长λ更短。

(5).良导体的$\alpha\approx\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$：根据$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B}$，得到$\mathbf{H}''=\frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{E}''=\frac{1}{\mu\omega}(\beta+i\alpha)\mathbf{n}\times\mathbf{E}''=\frac{\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\mu\omega}\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)\mathbf{n}\times\mathbf{E}''=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{n}\times\mathbf{E}''$。说明$\mathbf{H}''$的相位比电场$\mathbf{E}''$落后$\frac{\pi}{4}$。

四.电磁波在导体表面上的反射与折射

z>0 为导体内部，对应$\mu\approx\mu_0,\varepsilon$且$\sigma\neq0$，z<0 真空对应$\mu_0,\varepsilon_0$且σ=0。我们又退回使用 **k,k′,k″**的情形。真空中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$k''=\omega''\sqrt{\mu\varepsilon}\approx\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}$，于是$\frac{k}{k''}=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon}}$；$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}=n_{12}$。$\cos\theta''=\sqrt{1-\sin^2\theta''}=\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}$。

$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$、$\frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$；$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$、$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$。将其代入之前的一个中间过程得：$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}}=\frac{\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''}=\frac{\cos\theta-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}\right)}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}\right)}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}$。

代入$\frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}\right)}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}$。

同样，$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{H'_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta-\cos\theta''}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta+\cos\theta''}=\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\cos\theta-\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\cos\theta+\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}$；

$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{H''_{0\perp}}{H_{0\perp}}=\frac{2\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta+\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\cos\theta+\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}$。

电磁波垂直入射金属表面，即$\theta=\theta'=\theta''=0$：于是$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}$，$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_0\sin^2\theta}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}$，$\frac{\mathbf{E}'_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}}=-\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}$，$\frac{\mathbf{E}''_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sin^2\theta}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}}=\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}$；再根据$\frac{k}{k''}=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon}}$，我们还可写作$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}=\frac{k-k''}{k+k''}$，$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+\sqrt{\varepsilon}}=\frac{2k}{k+k'}$，以及$\frac{\mathbf{E}'_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=-\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{k''-k}{k''+k}$，$\frac{\mathbf{E}''_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2k}{k+k'}$。

之前我们计算了垂直入射的趋肤效应和穿透深度，现便可应用至此。

对于良导体，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$，$k''=\beta+i\alpha=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}+i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}=\frac{1+i}{\delta}(\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}})$，$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，代入即有$\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{k-k''}{k+k''}=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}-\frac{1+i}{\delta}}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}+\frac{1+i}{\delta}}=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\delta-1-i}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\delta+1+i}=-\frac{1+i-\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}{1+i+\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}=-\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}(\mu=\mu_0)$；$\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2k}{k+k'}=1+\frac{k-k''}{k+k''}=\frac{2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}(\mu=\mu_0)$。反射系数$R_\perp=\frac{|\mathbf{E}'_{0\perp}|^2}{|\mathbf{E}_{0\perp}|^2}=\frac{(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1}{(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1}=\frac{(1-A)^2+1}{(1+A)^2+1}$；

$\frac{\mathbf{E}'_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=-\frac{\mathbf{E}'_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}(\mu=\mu_0)$；$\frac{\mathbf{E}''_{0\parallel}}{\mathbf{E}_{0\parallel}}=\frac{\mathbf{E}''_{0\perp}}{\mathbf{E}_{0\perp}}=\frac{2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}(\mu=\mu_0)$。反射系数$R_\parallel=\frac{|\mathbf{E}'_{0\parallel}|^2}{|\mathbf{E}_{0\parallel}|^2}=\frac{(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1}{(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2+1}=\frac{(1-A)^2+1}{(1+A)^2+1}$。考虑良导体条件$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$，此时$A=\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}<<1$，于是$R_\perp=R_\parallel=\frac{(1-A)^2+1}{(1+A)^2+1}=\frac{1-2A+1}{1+2A+1}=\frac{1-A}{1+A}$，更进一步地，还可近似地写作：$R=\frac{1-A}{1+A}=1-\frac{2A}{1+A}\approx1-2A=1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$。对于铜而言，$\sigma\sim5.7\times10^7\,s/m$，当$\omega=100s^{-1}$时，$R\approx1$。

反射不应是粒子撞上弹回，本质上应是导体表面次波波源发出的：而且多是产生的位移电流$\mathbf{J}_D=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}$产生的交变电磁场发出的，而不是传导电流$\mathbf{J}$；并且与此同时也发出了折射波。——这样的话，就能解释为什么在介质中，折射波可以向z方向/向内传输很远，然而导体中的折射波却不能：因为导体中$\mathbf{J}$很大，$\mathbf{J}_D$很小，且很快电荷就消散，达到静电平衡了，此时导体内$\mathbf{E}=\mathbf{0}$，就没有交变电磁场了。

介质反射不强，但为何镜子反射强呢？——刷了一层银粉的嘛，银是金属。

五.导体内功率损耗

导体内电场$\mathbf{E}''=\mathbf{E}''_0e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\chi}}\cdot e^{i[\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t]}=\mathbf{E}''_0e^{-\alpha\cdot z}\cdot e^{i[\beta\cdot z-\omega t]}$。并且，$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}''$。单位体积平均功率【即能量密度变化率$\frac{dw}{dt}=\frac{dW}{dV\cdot dt}$在时间上的平均：$\int_0^T\frac{dw}{dt}\cdot dt$，对应这里的电流体密度$\mathbf{J}$】：$\overline{P}=\frac{1}{2}R_e(\mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}'')=\frac{1}{2}R_e(\sigma\mathbf{E}''^*\cdot\mathbf{E}'')=\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{E}''_0e^{-\alpha\cdot z})^2=\frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}''^2_0e^{-2\alpha\cdot z}$。

单位面积的平均功率$\overline{P_\alpha}=\int_0^\infty \overline{P}\cdot dz=\int_0^\infty \frac{1}{2}\sigma \mathbf{E}_0''^2 e^{-2\alpha\cdot z}\cdot dz=\frac{1}{-4\alpha}\sigma \mathbf{E}_0''^2 e^{-2\alpha\cdot z}|_0^\infty=\frac{\sigma \mathbf{E}_0''^2}{4\alpha}$。表面电流密度$\boldsymbol{\alpha}_f=\int_0^\infty \mathbf{J}\cdot dz=\int_0^\infty \sigma \mathbf{E}''\cdot dz=\int_0^\infty \sigma \mathbf{E}_0'' e^{i[(\beta+i\alpha)\cdot z-\omega t]}\cdot dz=$ $\sigma \mathbf{E}_0'' e^{-i\omega t}\int_0^\infty e^{-(\alpha-i\beta)\cdot z}\cdot dz=\sigma \mathbf{E}_0'' e^{-i\omega t}\frac{1}{-(\alpha-i\beta)}e^{-(\alpha-i\beta)\cdot z}|_0^\infty=\sigma \mathbf{E}_0'' e^{-i\omega t}\frac{1}{\alpha-i\beta}$。

其中，$\alpha-i\beta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{-i\phi}$，其中$\phi=\operatorname{atan}\frac{\beta}{\alpha}$，于是$\boldsymbol{\alpha}_f=\frac{\sigma \mathbf{E}_0''}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{i(\phi-\omega t)}$。它的峰值即幅值为$\alpha_{f0}=\frac{\sigma \mathbf{E}_0''}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，于是$\overline{P_\alpha}=\frac{\sigma \mathbf{E}_0''^2}{4\alpha}=\frac{\sigma^2 \mathbf{E}_0''^2}{4\alpha\sigma}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\alpha\sigma}\alpha_{f0}^2$，比较$\overline{P}=\frac{1}{2}I_m^2 R$，得到表面电阻$R_s=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\sigma}$，对于良导体，$\alpha\approx\beta$，$R_s=\frac{\alpha}{\sigma}=\frac{1}{\delta\sigma}$。

4.4 电磁波在波导中的传播

4.1 研究了无界空间中的电磁波，其最基本的形式是平面波——平面波的电场和磁场都作横向振荡(即$\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$、$\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$)，这种类型的波称为横电磁波(TEM,Transverse Electric and Magnetic Field)。

4.3 讨论了电磁波与导体的相互作用。导体表面相当于(半)有界空间的边界，在理想导体(良导体)情况下，电磁波近乎全被导体表面反射(反射系数 R≈1)。我们来看看当这个(半)有界空间变成封闭空间(谐振腔、波导)时，电磁波在其中是怎么传播的。

拟解决两个问题：

(1).波导中电磁波怎样分布，是否存在 TEM 波。

(2).频率多高，波长多长的电磁波，才能在波导中传播？

一.矩形波导中的电磁波

波导(波导管)，利用良导体制成中空管状传输线，一种传输电磁能量的工具。管内是均匀介质，认为是介质二；管壁为一截面为矩形相框的导体薄膜，认为是介质一。在一定频率下，管内电磁波满足亥姆霍兹方程：$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$、$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0$。

在矩形波导内表面，即导体管壳内表面、介质一与介质二的分界面，有边值关系：

- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_f$（法向）$\rightarrow\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\sigma_f$
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{0}$（切向）$\rightarrow\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=\mathbf{0}$
- $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$（法向）$\rightarrow\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2=0$
- $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$（切向）$\rightarrow\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\boldsymbol{\alpha}_f$

由于导体管壁是金属(介质一)，因此理想导体中导体内部(离表面几个穿透深度处)已没有电磁场，于是$\mathbf{E}_1=\mathbf{H}_1=\mathbf{0}$。三式和四式都可推出管壁内表面的$\mathbf{H}_2$//界面，因而信息含量更少的三式，被淘汰；四式和一式，四式反映了电磁波磁场强度$\mathbf{H}_2$与导体(内)表面高频电流$\boldsymbol{\alpha}_f$的关系，一式类似，但其所反映的$\boldsymbol{\alpha}_f$流经区的电荷面密度σ_f没啥用；一式和二式，只有二式能推出管壁内表面的$\mathbf{E}_2$⊥内表面。

因而我们只采用其中反映“电场线与导体(内)表面正交、磁感线与界面相切”的两个式子 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=\mathbf{0}$、$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\boldsymbol{\alpha}_f$。设 x 轴//矩形管壁横截面的长为 a 的边，y 轴//矩形管壁横截面的长为 b 的边，且使得管壁截面处于 x-0-y 面的第一象限，z 轴因右手螺旋而穿出纸面。

1.我们先考虑电场部分

$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=\mathbf{0}$、$\nabla\cdot\mathbf{E}_2=0$(后者来源于靠近管壁内表面的地方，$\nabla\cdot\mathbf{D}_2=\rho_f=0$)，并省去下角标：$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$、$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$。——其中，$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$，它因 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$ 还可以进一步如下表示：x=0 或 a 时，由于$\mathbf{E}_t=\mathbf{0}$ 而$E_y=E_z=0$，此时$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$；y=0 或 b 时，由于$\mathbf{E}_t=\mathbf{0}$ 而$E_x=E_z=0$，此时$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$。

【所以 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$、$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 还可写为$\mathbf{E}=\mathbf{E}_n$、$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$(对于管壁截面为圆形的波导，$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 仍然会因$\mathbf{E}=\mathbf{E}_n$而写作$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$；因为你可以将坐标系随着考察点而旋转，使其原点与考察点重合，且其 z-o-x 面恒与内管壁相切，这样$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$仍然适用，并恒可化为$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$，即$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$)】

(我们设)波导中的电磁波沿管的轴向(z 向)传播【因为宏观来讲它只能这样，导体内表面的反射系数为 1，导致多次反射后多波叠加后的方向应当是//管壁方向】，因此$\mathbf{k}=\mathbf{k}_z$，于是传播因子应为$e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}=e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，因此$\mathbf{E}(\boldsymbol{\chi},t)=\mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。【注：振幅$\mathbf{E}_0$其实也与 z 有关：已经体现在了相位因子$e^{ik_z\cdot z}$中了——并且其实即使设$\mathbf{E}_0$为$\mathbf{E}_0(x,y,z)$也没关系，因为之后会对它分离变量为 X(x)Y(y)Z(z)，代入方程后，Z 会约掉，意味着 Z(z)的形式是无法确定的，像个待定常数；且它是满足 Helmholtz 方程的一种解】

代入$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$，得到$\nabla^2[\mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}]+k^2\mathbf{E}_0(x,y)e^{i[k_z\cdot z-\omega t]}=0$，拉普拉斯算符只作用于空间变量，提出并约去$e^{-i\omega t}$，于是$\nabla^2[\mathbf{E}_0(x,y)e^{ik_z\cdot z}]+k^2\mathbf{E}_0(x,y)e^{ik_z\cdot z}=0$。得到$\frac{\partial^2\mathbf{E}_0(x,y)}{\partial x^2}e^{ik_z\cdot z}+\frac{\partial^2\mathbf{E}_0(x,y)}{\partial y^2}e^{ik_z\cdot z}+\frac{\partial^2 e^{ik_z\cdot z}}{\partial z^2}\mathbf{E}_0(x,y)+k^2\mathbf{E}_0(x,y)e^{ik_z\cdot z}=0$，即有$\frac{\partial^2\mathbf{E}_0}{\partial x^2}e^{ik_z\cdot z}+\frac{\partial^2\mathbf{E}_0}{\partial y^2}e^{ik_z\cdot z}-k_z^2e^{ik_z\cdot z}\mathbf{E}_0+k^2\mathbf{E}_0e^{ik_z\cdot z}=0$，于是$\frac{\partial^2\mathbf{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}_0}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)\mathbf{E}_0=0$。

虽然$\mathbf{E}_0(x,y)$只与 x,y 有关，但该矢量的方向却有可能在 x,y,z 三轴上均有分量(这即也是我们所关心的：是否也有$\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$)：$E_{0x}(x,y)$,$E_{0y}(x,y)$,$E_{0z}(x,y)$。于是我们将那个

关于$\mathbf{E}_0$的方程，写作三个分量(标量)所满足的方程，由于它们具有相同的形式，它们的解(E_{0x},E_{0y},E_{0z})也应有相同的形式，因此我们用u来同时表示E_{0x},E_{0y},E_{0z}，以及它们的方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)u=0$。

设u(x,y)=X(x)Y(y)，于是$X''Y+XY''+(k^2-k_z^2)XY=0$，同除以XY得：$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-(k_x^2+k_y^2)$，得到$\frac{X''}{X}=-k_x^2$，$\frac{Y''}{Y}=-k_y^2$【本该是$\frac{X''}{X}=C_1$、$\frac{Y''}{Y}=C_2$，且$C_1+C_2=-(k_x^2+k_y^2)$的】。于是得到两个特征方程：$X''+k_x^2X=0$，$Y''+k_y^2Y=0$，解的形式为三角函数：$X(x)=A\sin k_xx+B\cos k_xx$，$Y(x)=C\sin k_yy+D\cos k_yy$。于是$u=XY=(A\sin k_xx+B\cos k_xx)(C\sin k_yy+D\cos k_yy)$。

这意味着E_{0x},E_{0y},E_{0z}的解均为上述形式：因此$E_{0x}=(A\sin k_xx+B\cos k_xx)(C\sin k_yy+D\cos k_yy)$；$E_{0y}=(A'\sin k_xx+B'\cos k_xx)(C'\sin k_yy+D'\cos k_yy)$；$E_{0z}=(A''\sin k_xx+B''\cos k_xx)(C''\sin k_yy+D''\cos k_yy)$。

于是，沿 z 方向传播的电磁波$\mathbf{E}(\chi,t)=\mathbf{E}_0(x,y)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，其电场的三个分量：$E_x=(A\sin k_xx+B\cos k_xx)(C\sin k_yy+D\cos k_yy)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；$E_y=(A'\sin k_xx+B'\cos k_xx)(C'\sin k_yy+D'\cos k_yy)\,e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；$E_z=(A''\sin k_xx+B''\cos k_xx)(C''\sin k_yy+D''\cos k_yy)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。接下来我们使用边值关系(边界条件)：$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$：x=0 或 a 时，$E_y=E_z=0$，$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$；y=0 或 b 时，$E_x=E_z=0$，$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$ 来确定 12 个常数A~D''中的一部分，以及两个特征值k_x,k_y。

①.当 y=0 时，$E_x=0\to D=0$，代入得$E_x=(A_1\sin k_xx+B_1\cos k_xx)\sin k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，其中$A_1=AC$，$B_1=BC$；当 y=b 时，$E_x=0\to k_yb=n\pi$，$k_y=\frac{n\pi}{b}$，带入得$E_x=(A_1\sin k_xx+B_1\cos k_xx)\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 x=0 时，$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0(k_x\neq0)\to A_1=0$，代入得$E_x=B_1\cos k_xx\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 x=a 时，$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0(B_1,k_x\neq0)\to k_xa=m\pi$，$k_x=\frac{m\pi}{a}$，代入得$E_x=B_1\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。

②.当 x=0 时，$E_y=0\to B'=0$，代入得$E_y=(A_1'\sin k_yy+B_1'\cos k_yy)\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，其中$A_1=A'C'$，$B_1=A'D'$；当 x=a 时，$E_y=0\to k_xa=m\pi$，$k_x=\frac{m\pi}{a}$(之前也已得出此结论)，带入得$E_y=(A_1'\sin k_yy+B_1'\cos k_yy)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 y=0 时，$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0(k_y\neq0)\to A_1'=0$，代入得$E_y=B_1'\cos k_yy\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 y=b 时，$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0(B_1',k_y\neq0)\to k_yb=n\pi$，$k_y=\frac{n\pi}{b}$(之前也已得出此结论)，代入得$E_y=B_1'\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。

③.当 x=0 时，$E_z=0\to B''=0$，代入得$E_z=(A_1''\sin k_yy+B_1''\cos k_yy)\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，其中$A_1''=A''C''$，$B_1''=A''D''$；当 x=a 时，$E_z=0\to k_xa=m\pi$，$k_x=\frac{m\pi}{a}$(之前也已得出此结论)，带入得$E_z=(A_1''\sin k_yy+B_1''\cos k_yy)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 y=0 时，$E_z=0\to B_1''=0$，代入得$E_z=A_1''\sin k_yy\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；当 y=b 时，$E_z=0(A_1''\neq0)\to k_yb=n\pi$，$k_y=\frac{n\pi}{b}$(之前也已得出此结论)，代入得$E_z=A_1''\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。

④.在介质二所处空间中(而不是管壁内表面附近)，$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$，代入即有$\frac{\partial}{\partial x}[B_1\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}]+\frac{\partial}{\partial y}[B_1'\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}]+\frac{\partial}{\partial z}[A_1''\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}]=0$，得到$-\frac{m\pi}{a}B_1\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}-\frac{n\pi}{b}B_1'\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}+ik_zA_1''\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}=[-\frac{m\pi}{a}B_1-\frac{n\pi}{b}B_1'+ik_zA_1'']\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}=0$，得到$A_1''=\frac{\frac{m\pi}{a}B_1+\frac{n\pi}{b}B_1'}{ik_z}=\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}$。于是$E_z=\frac{\frac{m\pi}{a}B_1+\frac{n\pi}{b}B_1'}{ik_z}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。

⑤.至此，我们已经确定出了 12 个常数$A\sim D''$中的 10 个，还剩两个B_1,B_1'是独立的($A_1''=\frac{\frac{m\pi}{a}B_1+\frac{n\pi}{b}B_1'}{ik_z}$可由它俩确定，其余 9 个有些合并了，有些=0)，以及两个特征值$k_x,k_y=\frac{m\pi}{a},\frac{n\pi}{b}$。——总结一下，$E_x=B_1\cos k_xx\cdot\sin k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；$E_y=B_1'\cos k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$；$E_z=\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}\sin k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$。

2.再考虑磁场部分

$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\to\to$时谐条件下$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，以至$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=i\omega\mathbf{B}=i\omega\mu\mathbf{H}$，因此$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$。写成分量形式：$\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\E_x&E_y&E_z\end{vmatrix}=i\omega\mu(H_x\mathbf{i}+H_y\mathbf{j}+H_z\mathbf{k})$，对比得$\begin{cases}i\omega\mu H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\\i\omega\mu H_y=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\\i\omega\mu H_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{cases}$，于是

$\begin{cases}H_x=\frac{i}{\omega\mu}(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y})\\H_y=\frac{i}{\omega\mu}(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z})\\H_z=\frac{i}{\omega\mu}(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x})\end{cases}$，代入$E_x,E_y,E_z$表达式：

$$\begin{cases}H_x=\frac{i}{\omega\mu}(ik_zB_1'\cos k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}-k_y\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}\cos k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)})\\H_y=\frac{i}{\omega\mu}(k_x\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}\sin k_yy\cdot\cos k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}-ik_zB_1\cos k_xx\cdot\sin k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)})\\H_z=\frac{i}{\omega\mu}(k_yB_1\cos k_xx\cdot\cos k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}-k_xB_1'\cos k_yy\cdot\cos k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)})\end{cases}$$。

得到$\begin{cases}H_x=\frac{1}{\omega\mu}(-k_zB_1'-k_y\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{k_z})\cos k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\\H_y=\frac{1}{\omega\mu}(k_x\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{k_z}+k_zB_1)\sin k_yy\cdot\cos k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\\H_z=\frac{i}{\omega\mu}(k_yB_1-k_xB_1')\cos k_xx\cdot\cos k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\end{cases}$。于是

$$\begin{cases}H_x=-\frac{1}{\omega\mu k_z}[(k_y^2+k_z^2)B_1'+k_xk_yB_1]\cos k_yy\cdot\sin k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\\H_y=\frac{1}{\omega\mu k_z}[(k_x^2+k_z^2)B_1+k_xk_yB_1']\sin k_yy\cdot\cos k_xx\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\\H_z=\frac{i}{\omega\mu}(k_yB_1-k_xB_1')\cos k_xx\cdot\cos k_yy\cdot e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}\end{cases}$$。

E_x,E_y,E_z和H_x,H_y,H_z的表达式中均只含有两个独立常数B_1,B_1'(且前两个E_x,E_y只含其中一个常数；后四个表达式E_z,H_x,H_y,H_z中两个常数都含有)，且其中$k_x,k_y=\frac{m\pi}{a},\frac{n\pi}{b}$。

二.横电波(TEW)与横磁波(TMW)

选取一种波模(波的振动模式)，即调整(m,n)[此时一般k_x,k_y不再=0]，使得E_z=0(电矢量 E 无 z 向分量，而 z 向又是传播方向，因此电矢量⊥传播方向，称为横电波 TE)，则$k_x B_1+k_y B_1'$=0，则$k_x B_1'-k_y B_1$≠0(否则二式联立，得$B_1^2+{B_1'}^2$=0，得到B_1=B_1'=0，则E_x,E_y,E_z和H_x,H_y,H_z全为 0)，于是H_z≠0(横电波 TE 不能同时是横磁波 TM)；同样的道理，若H_z=0(是横磁波 TM)，则E_z≠0(不能同时是横电波 TE)。

也就是说，(矩形)波导中传播的电磁波，电场和磁场不能同时为横波。TEW 和 TMW 根据(m,n)值的不同，分为TE_{mn}、TM_{mn}。

3.讨论

(1).根据 **E** 和 **H** 的各分量在波导内电磁场沿传播方向不能同时为 0，即“若$E_z=H_z=0$，则B_1=B_1'=0，导致整个电磁场(**E**,**H**)为 0”，因此波导中不能传播横电磁波。

(2).(矩形)波导管截面上，场是谐变的，其分布取决于 m,n 的值。不同的 m 和 n 对应不同的场，称为不同的波型或模式，一组 m,n 组成一种模式，TE 记作TE_{mn}，TM 记作TM_{mn}。

(3).k_z=$\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$=$\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$，对于一定尺寸的矩形波导(即 a,b 确定)，选定某种模式TE_{mn}/TM_{mn}(m,n 不再更改)：①.当ω足够大时，k=ω$\sqrt{\varepsilon\mu}$足够大，使得$k^2>k_x^2+k_y^2$，此时k_z为实数，传播因子$e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$表示场沿(z)轴向传播，是行波。

②.ω足够小，$k^2<k_x^2+k_y^2$，k_z为虚数，传播因子$e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$中$e^{ik_z\cdot z}$部分变成实数，即变成了振幅因子，表示波不再是行波，而随 z 的增大呈指数衰减。此时电磁波不能在波导内以TE_{mn}/TM_{mn}型传播。

③.$k^2=k_x^2+k_y^2$，k_z=0 为临界状态，$\omega_{c,mn}$=vk=v$\sqrt{k_x^2+k_y^2}$=v$\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$=$\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$为截止频率。相应波长$\lambda_{c,mn}$=$\frac{2\pi}{k}$=$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$=$\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}$为截止波长。只有ω>$\omega_{c,mn}$的电磁波才能在波导中传播。

(4).场的分布：

a.由于E_x,E_y,E_z分别含有$\sin k_y y$,$\sin k_x x$,$\frac{k_x B_1+k_y B_1'}{ik_z}\sin k_y y\cdot\sin k_x x$等含$k_x$,$k_y$的因子，而$H_x$,$H_y$,$H_z$分别含有$\sin k_x x$,$\sin k_y y$,$k_y B_1-k_x B_1'$等含$k_x$,$k_y$的因子(或者用$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}$)，因此$k_x$,$k_y$=$\frac{m\pi}{a}$,$\frac{n\pi}{b}$也不能全为 0，即 m,n 不能全为 0，否则整个电磁场=0；之前我们又

得到了B_1,B_1'不能全为 0(通过察看各分量中含 B 的因子：E_x,E_y,E_z分别含有如下因子$B_1,B_1',\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}$，而$H_x,H_y,H_z$分别含有$(k_y^2+k_z^2)B_1'+k_xk_yB_1,(k_x^2+k_z^2)B_1+k_xk_yB_1',k_yB_1-k_xB_1'$)。

并且k_x,k_y与B_1,B_1'除了都不能全为 0 之外，还有一层制约关系：①.当k_x=0 时，不仅k_y≠0，而且B_1≠0——否则若k_x=0,B_1=0，则E_x,E_y,E_z会分别因含有因子$B_1,\sin k_xx,\sin k_xx$而全=0，且H_x,H_y,H_z也会因分别含有因子$\sin k_xx,(k_x^2+k_z^2)B_1+k_xk_yB_1',k_yB_1-k_xB_1'$而全=0；同样的道理，②.当$k_y$=0 时，不仅$k_x$≠0，而且$B_1'$≠0——否则若$k_y$=0,$B_1'$=0，则$E_x,E_y,E_z$会分别因含有因子$\sin k_yy,B_1',\sin k_yy$而全=0，且$H_x,H_y,H_z$也会因分别含有因子$(k_y^2+k_z^2)B_1'+k_xk_yB_1,\sin k_yy,k_yB_1-k_xB_1'$而全=0。③.同样，当$B_1$=0 时，$k_x$≠0；当$B_1'$=0 时，$k_y$≠0。——也就是说$k_x,B_1$以及$k_y,B_1'$均不能同时为 0，当其中一个=0 时，另一个必定不能为 0。这层关系不能直接导出B_1,B_1'或k_x,k_y不同时为 0，因此三者是互相独立的制约关系。

b.由于k_x,k_y即 m,n 不能全为 0，因此 m,n 中可有一个为 0。——但这只针对TEW(E_z=0)而言！因为 m,n 中有个=0，加上E_z=0 所对应的$\frac{k_xB_1+k_yB_1'}{ik_z}\sin k_yy\cdot\sin k_xx$=0 这个额外条件，不会引起整个电磁场为 0；然而对于 TMW(H_z=0)，附加条件H_z=0 即$k_yB_1-k_xB_1'$=0，若加上 m,n 中有个=0，即k_x,k_y中有个=0，即k_yB_1,k_xB_1'中有个=0，于是剩下的那个比如k_xB_1'也=0(设 n=k_y=0)，这就导致要么k_x=0，要么B_1'=0，即也就是说要么k_x,k_y同时为 0，要么B_1',k_y同时为 0——然而上一段 a.中我们已经知道，这两对均不能同时为 0，否则电磁场为 0，因此 TMW(H_z=0)的 m,n 中任何一个不能=0。

在各自的类别下，(截止)频率最低的波有三种：TE_{10},TE_{01},TM_{11}。其中TE_{10}波的截止频率$\omega_{c,10}=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\pi}{a}$【其实不用说所属类别，∵$\omega_{c,10}$只能是TE的，不可能有$TM_{10}$；同样$\omega_{c,01}$也不用指明是$TE_{01}$的；但$\omega_{c,11}$必须得指明是否是$TM_{11}$的】；$TE_{01}$波的截止频率$\omega_{c,01}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\pi}{b}$；$TM_{11}$波的截止频率$\omega_{c,11}=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$。由于一般而言，矩形波导的长为 a，宽为 b，于是 a>b，因此$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$，所以对于截止频率而言，$TE_{10}<TE_{01}<TM_{11}$。

由于TE_{10}具有最小截止频率，我们称其为主波。$\omega<\omega_{c,10}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\pi}{a}$的波，是真的完全不能在波导中传播。对应的截止波长$\lambda_{c,10}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}=2a$为波导中能传播的最大波长。

(5).相位因子$e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$中，$k_z=\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$，中的 v=$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，是电磁波在自由空间中的传播速度，非波导中的传播速度。其在波导中的传播速度由以下两个量表示：

相速度 u：$u=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k_z}$。【相位变化(同一相位的传播)速度】

【令相位因子$e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$中$k_z\cdot z-\omega t$=const.，两边对z,t微分得$k_z\cdot dz-\omega dt=0$，于是便有 $u=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k_z}$。】

群速度u_g：$u_g=\frac{dz}{dt}=\frac{d\omega}{dk_z}$。【各单色波叠加后的合成振幅的最大值的传播速度】

【设$E_1=E_0e^{i[(k_z+dk_z)\cdot z-(\omega+d\omega)t]}=E_0e^{i(dk_z\cdot z-d\omega\cdot t)}e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，$E_2=E_0e^{i[(k_z-dk_z)\cdot z-(\omega-d\omega)t]}=E_0e^{-i(dk_z\cdot z-d\omega\cdot t)}e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，二者相加，得到$2E_0\cos(dk_z\cdot z-d\omega\cdot t)e^{i(k_z\cdot z-\omega t)}$，令$dk_z\cdot z-d\omega\cdot t$=const.，两边对z,t微分得$dk_z\cdot dz-d\omega\cdot dt=0$，于是$u_g=\frac{dz}{dt}=\frac{d\omega}{dk_z}$。它可理解为受/施加调制的缓变振幅项$\cos(dk_z\cdot z-d\omega\cdot t)$的(同一)相位的传播速度。】

$u=\frac{\omega}{k_z}=\frac{\omega}{\sqrt{(\frac{\omega}{v})^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}>v$；$u_g=\frac{d\omega}{dk_z}=\left(\frac{dk_z}{d\omega}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{k_z}\cdot 2\frac{\omega}{v}\frac{1}{v}\right)^{-1}=v^2\frac{k_z}{\omega}=\frac{v^2}{u}$，而 u>v，因此$u_g=\frac{v^2}{u}=v\frac{v}{u}<v$：①.表明 u 和$u_g$由波导尺寸(a,b)和波型(m,n)以及ω,w,v 决定。②.u>电磁波在自由空间中的传播速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，则可能大于光速 $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$。③.$u_g$是能量的传播速度，≤$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，不能大于光速 c。

4.谐振腔

泛定方程$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$、$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0$；边界条件 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$、$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\boldsymbol{\alpha}_f$【本来是 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2=\mathbf{0}$、$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2=\boldsymbol{\alpha}_f$】，这两者与波导中的情形一样。

但谐振腔中的电磁波并不一直沿 z 向传播了，因此波包的 **k** 不再只有k_z分量。于是单个电磁波的传播因子应为$e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}$，并且$\mathbf{E}_0=\mathbf{E}_0(x,y,z)$，于是$\mathbf{E}(\boldsymbol{\chi},t)=\mathbf{E}_0(x,y,z)e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}$。

谐振腔是个产生电磁波的源头；波导是用以传播能量和电磁波的。微波炉：极化分子受电磁波交变电场影响，振动生热。

第五章 电磁波的辐射

研究问题：电磁波的辐射

研究方法：与稳恒场一样，引入势的概念

(1).将势的概念推广到一般变化的电磁场。

(2).通过势，求解辐射问题。

主要内容：

1.电磁场的矢势 标势

2.推迟势

3.电偶极辐射

5.1 电磁场的矢势和标势

一.用矢势和标势描述电磁场 (真空$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\end{cases}$)

- $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\rightarrow\rightarrow\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=\mathbf{0}$($\nabla\times$与$\frac{\partial}{\partial t}$相互独立,均可先作用于$\mathbf{A}$)
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\rightarrow\rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$【$\phi_m=\iint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\oint_l\mathbf{A}\cdot d\mathbf{L}$】
- $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

由于新矢量$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$无旋，引入标势$\varphi$，使得$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$。为了区别于电势$\varphi$，我们用绿色字体表示电磁场的标势$\varphi$；并且称磁矢势$\mathbf{A}$为电磁场的矢势$\mathbf{A}$。

注：(1).当$\mathbf{A}$与时间t无关时，$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\mathbf{0}$，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi$，此时的$\varphi$归结为电势$\varphi$。

(2).φ与电势φ不能混为一谈。非稳恒的$\mathbf{E}$不再是保守场，不存在势能的概念，也就没有电势φ。φ≠φ=单位电荷从空间某一点移到无穷远处，电场做的功。

(3).时变场下，电场磁场是相互作用的整体。将$\mathbf{A}$和φ作为一个整体，描述电磁场。

二.规范变换与规范不变性

如此我们得到了$\begin{cases}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{cases}$，可见$\mathbf{A}$,φ与$\mathbf{B}$,$\mathbf{E}$在描述电磁场方面是等价的，但这两对并不一一对应，即存在许多对$\mathbf{A}'$,φ'，满足$\begin{cases}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}'\\ \mathbf{E}=-\nabla\varphi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\end{cases}$：①.比如$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi$【$\psi=\psi(\chi,t)$】也能满足$\nabla\times\mathbf{A}'=\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$，②.与$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi$对应地，存在$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}$，使得$-\nabla\varphi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}=-\nabla\varphi'-(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t})=-\nabla(\varphi'+\frac{\partial\psi}{\partial t})-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\mathbf{E}$。

可见，$\mathbf{A}$,φ和$\mathbf{A}'$,φ'均可描述同一电磁场，即对于同一电磁场，$\mathbf{A}$,φ的选择并非唯一。在无穷组对应同一电磁场的$\mathbf{A}$,φ中，可按一定的附加条件(对应一种规范变换和规范)，挑选所需的一组势。【$\begin{cases}\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi\\ \varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{cases}$称为势的规范变换，每一组($\mathbf{A}$,φ)称为一种规范(把用规范规范好了的东西称为规范它的规范？)，不同的规范对应同一$\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$】

从物理上来说，可测量的量$\mathbf{E}$,$\mathbf{B}$一定是规范不变的(与对势的规范的选择无关)。从数学的角度上说，规范变换及其(剩余)自由度的存在，是由于$\begin{cases}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{cases}$中第一个方程，以及其他 Maxwell 方程，没有对$\mathbf{A}$的散度有任何限制；然而为了确定$\mathbf{A}$，还必须给出它的散度，每一个散度值$\nabla\cdot\mathbf{A}$的选择，对应一种规范。适当的规范可使得方程更简单对称、物理意义更明显。

1.库伦规范：$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$

设 **F** 是一矢量场，若$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，称 **F** 为横场(无源场)，记为$\mathbf{F}_\perp$；若$\nabla\times\mathbf{F}=0$，称 **F** 为纵场(无旋场)，记为$\mathbf{F}_\parallel$；【它可视为来源于：若$\nabla\cdot\mathbf{E}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$则$\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$，即$\mathbf{E}$为横电波；若$\nabla\times\mathbf{E}=i\mathbf{k}\times\mathbf{E}=0$则$\mathbf{E}//\mathbf{k}$，即$\mathbf{E}$为纵电波】于是，任意一个矢量 **F** 可表为它的横向分量和纵向分量之和 $\mathbf{F}=\mathbf{F}_\perp+\mathbf{F}_\parallel$。

则在库伦规范下，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$中的$-\nabla\varphi$相当于纵场$\mathbf{E}_\parallel$，对应库伦场；其$-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$相当于横场$\mathbf{E}_\perp$，对应感应电场。【$\mathbf{E}_\perp$并不代表这里的$\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$，它有没有$\mathbf{k}$还未知= =】

2.洛仑兹规范：$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

在洛仑兹规范下，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$中的$-\nabla\varphi$无旋，仍只有纵向分量；而$\mathbf{A}$和$-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$既有旋又有源($\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$)，即$\mathbf{A},-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$既有横向分量$\mathbf{A}_\perp,-\frac{\partial\mathbf{A}_\perp}{\partial t}$又有纵向分量$\mathbf{A}_\parallel,-\frac{\partial\mathbf{A}_\parallel}{\partial t}$。因此，此时的$\mathbf{E}_\parallel=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}_\parallel}{\partial t}$，$\mathbf{E}_\perp=-\frac{\partial\mathbf{A}_\perp}{\partial t}$。

三.达朗贝尔方程

我们来考虑剩下的两个 Maxwell 方程：根据$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f$以及$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$，有：$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_0\nabla\cdot(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=\varepsilon_0(-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A})=\rho_f$，即有$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$。

根据$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$以及$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$，一方面$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\nabla\times\mathbf{H}=\mu_0(\mathbf{J}_f+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t})=\mu_0\mathbf{J}_f+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=\mu_0\mathbf{J}_f-\mu_0\varepsilon_0\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$；另一方面，$\nabla\times\mathbf{B}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$。于是$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}_f-\mu_0\varepsilon_0\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$，得到$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\mathbf{J}_f$。

整理得到$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$。第二个方程是不是就是数学物理方法里面的非齐次的波动方程？！

(1).库伦规范$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$下：$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$。

(2).洛仑兹规范$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$下：$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$。【第二个方程，其右侧与矢势的微分方程的右侧一致；其左侧与真空中的波动方程区别不大——它们的第二项都是负的。(除了它有非齐次项之外)；洛伦兹规范是“+”，跟亥姆霍兹方程一样】

四.单色平面电磁波的势 (真空$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}\end{cases}$+无源$\begin{cases}\rho_f=0\\ \mathbf{J}_f=0\end{cases}$)

(1).类比真空中的电磁波的波动方程、单色平面电磁波的解，洛仑兹规范下的无源波动方程$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\mathbf{0}\end{cases}$的解的形式为$\begin{cases}\varphi=\varphi_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}\\ \mathbf{A}=\mathbf{A}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}-\omega t)}\end{cases}$(在热统的瑞利-金斯公式的经典推导中给出了来源)。既然两个势长这样，则它们也满足诸如$\nabla\cdot=i\mathbf{k}\cdot$和$\nabla\times=i\mathbf{k}\times$

算符关系等式。那么将其运用于洛仑兹规范$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$，得到$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}-i\omega\frac{1}{c^2}\varphi=0$，于是$\varphi=\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}$。

解出$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}_\perp=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp$【之前提到过，洛仑兹规范下的A既有旋又有源】。而根据$\nabla\phi=i\mathbf{k}\phi$，并带入$\varphi=\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}$，有$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-i\mathbf{k}\varphi+i\omega\mathbf{A}=-i\mathbf{k}(\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})+i\omega\mathbf{A}=-i\frac{c^2}{\omega}[\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A}]=-i\frac{c^2}{\omega}[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{A}]=-i\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{A})=-i\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\times\frac{\mathbf{B}}{i}=-\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-c\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{B}$。

平面电磁场只依赖于A的横向分量$\mathbf{A}_\perp$，$\mathbf{A}_\parallel$为任意值均不影响电磁场的值。那么我们就取$\mathbf{A}=\mathbf{A}_\perp$(此时$\nabla\cdot\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}_\perp=0$，即相当于已处于库伦规范下)，此时$\varphi=\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}=\frac{c^2}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\perp=0$，$\mathbf{B}=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp$，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=i\omega\mathbf{A}=i\omega\mathbf{A}_\perp$。

(2).该结果也可通过解库伦规范下的无源波动方程$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)=\mathbf{0}\end{cases}$得到：对第一个泛定方程而言，由于全空间无自由电荷分布($\rho_f=0$)，拉普拉斯方程$\nabla^2\varphi=0$+齐次边界条件，解得库伦场/纵场的标势$\varphi=0$；代入第二个泛定方程，得到$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\mathbf{0}$。其解的形式为$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$，那么仍可利用算符关系等式。又因库伦规范$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，所以$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}=0$，即有$\mathbf{A}=\mathbf{A}_\perp$。从而$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp$，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=i\omega\mathbf{A}=i\omega\mathbf{A}_\perp$。

总结：库伦规范，洛仑兹规范的特点：

(1).库伦规范：标势φ描述库仑作用，可由ρ_f分布求出。矢势A只有横向分量$\mathbf{A}_\perp$，恰好足够描述辐射电磁波的两种相应偏振。

(2).洛仑兹规范：虽然A的纵场$\mathbf{A}_\parallel$和标势φ的选择有任意性；但A与φ构成的方程具有对称性，它们将在相对论中显示出协变性。

5.2 推迟势

本节主要求解达朗贝尔方程，并阐明其物理意义。

一.达朗贝尔方程的解

洛仑兹规范$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$下达朗贝尔方程的形式为：$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$。

(1).方程中，$\mathbf{A}$和φ是线性的，满足叠加原理，反映电磁场可叠加性。

(2).对于场源分布在有限体积内的势，可先求某一体积元的场源，所激发的势，然后对场源区域积分，得到某场点的势。

(3).$\mathbf{A}$和φ的方程形式相同，只需求出φ的方程的解。

假设源点处有一假想的随 t 变化的电荷 Q(t)，电荷密度$\rho(\chi',t)=Q(t)\delta(\chi')$。那么关于$\varphi$的方程变为$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)\delta(\chi')}{\varepsilon_0}$。源点以外的区域满足$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$。应用球坐标系下的 laplace 算符表达式：$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$，由于$\varphi$的解应具有球对称性，则后两个θ,ϕ关于的项=0，于是将其代入即有

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)\delta(\chi')}{\varepsilon_0}$，源点以外的区域(r>0)满足$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$。【这些式子中的 r 为 $\mathbf{r}=\chi-\chi'$的模】

其解为球面波，φ应随 r 的↗而↘，令$\varphi(\chi,t)=\frac{1}{r}u(\chi,t)$，$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{r\frac{\partial u}{\partial r}-u}{r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}$【注：$u(\chi,t)$也是 r 的函数，因为$\chi=\chi'+\mathbf{r}$】，代入方程即有$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2})]-\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，于是$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial u}{\partial r}-u]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，得到$\frac{1}{r}(\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2})-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，即$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$(与原方程很像)。此方程即为《数学物理方法》中的(一维的齐次)波动方程$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$，其通解为 $u=f_1(x+at)+f_2(x-at)$，即俩沿着 x 轴正负两个方向传播的行波。

可知这里的通解$u(r,t)=f(t-\frac{1}{c}r)+g(t+\frac{1}{c}r)$，其中 f,g 为任意函数，由原点处的电荷变化形式决定。$f(t-\frac{1}{c}r)$：场源向外辐射球面波，$g(t+\frac{1}{c}r)$：向场源汇聚的球面波。由于我们研究的是辐射问题，因此我们取 g=0，得到$\varphi=\frac{u}{r}=\frac{f(t-\frac{1}{c}r)}{r}$。

静电场下电势$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$，结合解的形式$\varphi=\frac{f(t-\frac{1}{c}r)}{r}$，我们猜想$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)\delta(\chi')}{\varepsilon_0}$的解为$\varphi=\frac{Q(\chi',t-\frac{1}{c}r)}{4\pi\varepsilon_0 r}$，这对应着交变场源$Q(t)\delta(\chi')=Q(\chi',t-\frac{1}{c}r)|_{r=0}=Q(\chi',t)$。根据标势的叠加性，场源电荷分布于有限体积内，产生的标势为$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\chi',t-\frac{1}{c}r)}{r}dV'$。那么矢势$\mathbf{A}$的解，形式上也应是：$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi',t-\frac{1}{c}r)}{r}dV'$。【可代入方程证得】

二.推迟势

式中的$\varphi,\mathbf{A}$都是指$\varphi(\chi,t)$和$\mathbf{A}(\chi,t)$，对应 t 时刻，χ点处的势(其χ隐含在表达式中的 r 中)。而$\rho(\chi',t-\frac{1}{c}r)$,$\mathbf{J}(\chi',t-\frac{1}{c}r)$，却对应$t'=t-\frac{1}{c}r$时刻，$\chi'$点处的源。$t-t'=\frac{1}{c}r>0$，即 t>t'，这意味着$\chi$处的两个势$\varphi,\mathbf{A}$对应的时刻 t，晚于激发出对应$\varphi,\mathbf{A}$的场源$\rho,\mathbf{J}$，所刚激发出它们时的那一时刻'；或者说，到达$(\chi,t)$的$\varphi,\mathbf{A}$，是由$(\chi',t')=(\chi',t-\frac{1}{c}r)$处和时刻的$\rho,\mathbf{J}$所激发的。因此将$\varphi,\mathbf{A}$称为推迟势。

重要性：说明电磁作用以有限速度 v=c 向外传播，非瞬时超距作用。

描述物理过程：电荷电流向外辐射电磁波，电磁波脱离电荷、电流向外传播。

三.证明推迟势满足洛伦兹规范

由于∇只作用于χ，而$\mathbf{J}$是(χ',t')的函数，因此∇只作用于$t'=t-\frac{1}{c}r$中的r，根据$\nabla\cdot\mathbf{f}(u)=\frac{df}{du}\cdot\nabla u$，得$\nabla\cdot\mathbf{J}=\nabla\cdot\mathbf{J}(\chi',t')=\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\nabla t'=\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\nabla(t-\frac{1}{c}r)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\nabla r=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$。同样的道理，$\nabla'$既作用于$\chi'$，又作用于$t'$，因此$\nabla'\cdot\mathbf{J}=\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi',t')=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}+\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{\chi'=\text{const.}}=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}+\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\nabla't'=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\nabla'r=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t'}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$，它也可写作$\nabla'\cdot\mathbf{J}=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-\nabla\cdot\mathbf{J}$，那么$\nabla\cdot\mathbf{J}=\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-\nabla'\cdot\mathbf{J}$。【注：$\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{\chi'=\text{const.}}$是指只是将$(\chi',t')$中的$\chi'$视作常量，只对$t'$偏导，而不是甚至将$t'$中的$\chi'$也视作常量！】

根据$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{f})=\nabla\varphi\cdot\mathbf{f}+\varphi\nabla\cdot\mathbf{f}$，可得$\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}}{r}=\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}+\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}=-\nabla'\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}+\frac{1}{r}[\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-\nabla'\cdot\mathbf{J}]=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-(\nabla'\frac{1}{r}\cdot\mathbf{J}+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J})=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}-\nabla'\cdot\frac{\mathbf{J}}{r}$。而由于$\int\nabla'\cdot\frac{\mathbf{J}}{r}dV'=\oint\frac{\mathbf{J}}{r}dS'=\mathbf{0}$，因此$\int\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}}{r}dV'=\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}dV'$。那么洛伦兹规范左侧式子$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$中的$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\frac{\mathbf{J}(\chi',t')}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}dV'$。

而其中的$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{r=\text{const.}}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\chi',t-\frac{1}{c}r)}{r}dV'|_{r=\text{const.}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\partial}{\partial(t-\frac{1}{c}r)}\frac{\rho(\chi',t-\frac{1}{c}r)}{r}dV'|_{r=\text{const.}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t'}dV'$，二者全代入洛伦兹规范左侧表达式，有$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}dV'+\frac{\mu_0\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t'}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}[\nabla'\cdot\mathbf{J}|_{t'=\text{const.}}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}]dV'$。根据电荷守恒定律$\nabla'\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=0$，得到洛伦兹规范：$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$。

5.3 电偶极辐射

本节研究宏观电荷系统在其线度远小于波长情况下的辐射。

一.计算辐射场的一般公式

【类比$e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$】设$\mathbf{J}$为一定频率交变电流，即$\mathbf{J}(\chi',t')=\mathbf{J}(\chi')e^{-i\omega t'}=\mathbf{J}(\chi')e^{-i\omega(t-\frac{1}{c}r)}=\mathbf{J}(\chi')e^{i(\frac{\omega}{c}r-\omega t)}=\mathbf{J}(\chi')e^{i(kr-\omega t)}$，则$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi',t')}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{i(kr-\omega t)}}{r}dV'$。令$\mathbf{A}(\chi,t)=\mathbf{A}(\chi)e^{-i\omega t}$，则对比可得$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{ikr}}{r}dV'$。其中$e^{ikr}$为推迟作用因子，表示电磁波传至场点时，相位滞后kr。

此时可通过$\mathbf{J}(\chi')$来确定$\mathbf{A}(\chi)$，并通过$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$所对应的$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-c^2\nabla\cdot\mathbf{A}$，来确定$\varphi$【方程两边可约去时间部分；各量的时间部分已确定，无需求解】；也可通过$\mathbf{J}(\chi')$加上$\nabla'\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=0$所对应的$-i\omega\rho(\chi',t')=\frac{\partial\rho(\chi)e^{-i\omega t'}}{\partial t'}=\frac{\partial\rho}{\partial t'}=-\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi',t')$，来确定$i\omega\rho(\chi')=\nabla'\cdot\mathbf{J}(\chi')$中的$\rho(\chi')$，进而通过$\varphi(\chi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\chi')e^{ikr}}{r}dV'$来确定$\varphi$。

通过$\mathbf{J}(\chi')$或$\rho(\chi')$确定了$\mathbf{A}(\chi)$和$\varphi(\chi)$后，也就确定了$\mathbf{A}(\chi,t)$和$\varphi(\chi,t)$。进而可通过$\begin{cases}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{cases}$确定$\mathbf{B},\mathbf{E}$；或者在确定了$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$后，通过电荷分布区域外$\mathbf{J}=0$，所导致的$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$，得到$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$，得到$\mathbf{E}=\frac{ic^2}{\omega}\nabla\times\mathbf{B}=\frac{ic}{k}\nabla\times\mathbf{B}$。

二.矢势A的展开式

$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{ikr}}{r}dV'$。注意三个线度：①.电荷分布区域线度$l$决定$|\chi'|$们的大小。②.$\lambda=\frac{2\pi}{k}$。③.电荷$\rho$电流$\mathbf{J}$到场点的距离r。

研究分布于小区域$\begin{cases}l\ll\lambda\\ l\ll r\end{cases}$的电流$\mathbf{J}$，产生的辐射。而r与$\lambda$有三种情况：

(1).近区(似稳区)，$l\ll r\ll\lambda$：于是$\frac{r}{\lambda}\ll 1$，$kr=\frac{2\pi}{\lambda}r\ll 1$，接近于0，$ikr$接近于实数0，于是$e^{ikr}\sim 1$，此时$\mathbf{A}(\chi)\sim\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}dV'$。

场保持稳恒场的特点(静电场就是稳恒的，而静电场是无旋的，即也就是纵向的；所以稳恒场也类似纵向的)。电场具有静电场的纵向形式(叉乘=0)。磁场也与稳恒场相似。所以近区也称为似稳区。

(2).远区(辐射区)，$l\ll\lambda\ll r$：之后我们会着重研究远场，此时$\mathbf{B},\mathbf{E}$略去$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\chi|}$的高次项，剩下的场接近于横向电磁场($\nabla\cdot$作用于$\mathbf{B},\mathbf{E}$后均=0)，再作近似后，其中的偶极场即为横向电磁场。

(3).感应区(过渡区)，$l\ll\lambda\sim r$：介于似稳区和辐射区的过渡区域。

重点研究远区：$\mathbf{R}=\chi$，$\mathbf{r}=\chi-\chi'$，$r\approx R-\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'$，$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{ikr}}{r}dV'\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{ik(R-\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi')}}{R-\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'}dV'\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\chi')e^{ik(R-\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi')}}{R}dV'\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int\mathbf{J}(\chi')e^{-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'}dV'$，将$e^{-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'}$对$-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'$在$-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'=0$附近展开：$e^{-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi')^j}{j!}=1-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'+\frac{(-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi')^2}{2!}+\ldots$，于是$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int\mathbf{J}(\chi')[1-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'+\frac{(-ik\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi')^2}{2!}+\ldots]dV'$。其中各项对应各级电磁多极辐射。【注：分母中的$R-\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'$可略去$\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'$，因为$R(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\frac{\chi'}{R})$中$\frac{\chi'}{R}\sim\frac{l}{r}$，而$l\ll\lambda\ll r$，$\frac{l}{r}\sim 0$，所以它可被忽略；但分子中的不能，因为$k\hat{\mathbf{R}}\cdot\chi'=2\pi\hat{\mathbf{R}}\cdot\frac{\chi'}{\lambda}\sim\frac{l}{\lambda}$，而$l\ll\lambda\ll r$，它比$\frac{l}{r}$大一点。所以我们在相因子展开式中，保留$\frac{l}{\lambda}$的各级项；$\frac{e^{ikR}}{R}$中不含$\chi'$，因此可提出积分号外】

三.偶极辐射

$\mathbf{A}_{(1)}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int\mathbf{J}(\chi')dV'$，其中$\int\mathbf{J}(\chi')dV'=\int\rho(\chi')\mathbf{v}(\chi')dV'=\int\rho(\chi')\frac{d\chi'}{dt'}|_{\chi'}dV'=\frac{d}{dt'}\int\rho(\chi')\chi'dV'|_{\chi'}=\frac{d}{dt'}\sum q\chi'|_{\chi'}=\frac{d}{dt'}\mathbf{p}|_{\chi'}=\dot{\mathbf{p}}(\chi')$。因此$\mathbf{A}_{(1)}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\dot{\mathbf{p}}$。【稳定电流场的$\rho(\chi')$不随时间变化，所以$\frac{d}{dt'}[\rho(\chi')\chi']=\rho(\chi')\frac{d\chi'}{dt'}$】

以简单的电偶极子系统为例：交变电流 I 流过导线，导体球电荷交替变化，$\mathbf{p}=Q\cdot\mathbf{L}$，则$\dot{\mathbf{p}}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{dQ\cdot\mathbf{L}}{dt}=I\cdot\mathbf{L}=\int\mathbf{J}(\chi')dV'$。

计算辐射场的技术问题：之前我们用$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f})=\mathbf{f}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\mathbf{f}$，得到过$\nabla\cdot\mathbf{E}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}$。其中的关键在于中途使用了$\nabla\phi(u)=\frac{d\phi}{du}\nabla u$，以及$\nabla(\hat{\mathbf{k}}\cdot\chi)=\hat{\mathbf{k}}\times[\nabla\times\chi]+(\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla)\chi+\chi\times[\nabla\times\hat{\mathbf{k}}]+(\chi\cdot\nabla)\hat{\mathbf{k}}$，以得到$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}=i\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}$；同样，$\nabla\times(\phi\mathbf{f})=(\nabla\phi)\times\mathbf{f}+\phi\nabla\times\mathbf{f}$再配合$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi)}=i\mathbf{k}e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi)}$，也能得出$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\chi-\omega t)}\times\mathbf{E}_0$。

现在我们在尝试着用$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$来得到$\mathbf{B}$时，有那么点不同：首先，$\mathbf{A}_{(1)}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\dot{\mathbf{p}}$中的$e^{ikR}$不再是$e^{i\mathbf{k}\cdot\chi}$，那么我们要用到的公式将不再是$\nabla(\hat{\mathbf{k}}\cdot\chi)=\hat{\mathbf{k}}\times[\nabla\times\chi]+(\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla)\chi+\chi\times[\nabla\times\hat{\mathbf{k}}]+(\chi\cdot\nabla)\hat{\mathbf{k}}$，而是$\nabla(\phi\varphi)=\phi\nabla\varphi+\varphi\nabla\phi$，但由于k中不包含$\nabla$的作用对象，因此$\nabla(kR)=k\nabla R$；其次，$\nabla\times(\phi\mathbf{f})$中的$\mathbf{f}$，不再是$\mathbf{E}_0$，而是$\dot{\mathbf{p}}$，但我们仍将其看作定矢，于是$\nabla\times\dot{\mathbf{p}}=0$；再者，$\nabla\times(\phi\mathbf{f})$中的$\phi$，不仅包含$e^{ikR}$，还有$\frac{1}{R}$，那么我们还得将$\nabla(\phi\varphi)=\phi\nabla\varphi+\varphi\nabla\phi$作用于$\frac{e^{ikR}}{R}$上。

$\nabla\times\mathbf{A}_{(1)}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\dot{\mathbf{p}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{e^{ikR}}{R}\times\dot{\mathbf{p}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\nabla\times\dot{\mathbf{p}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{e^{ikR}}{R}\times\dot{\mathbf{p}}$，其中$\nabla\frac{e^{ikR}}{R}=\nabla(\phi\varphi)=\frac{1}{R}\nabla e^{ikR}+e^{ikR}\nabla\frac{1}{R}$，其中后者$=e^{ikR}\nabla\frac{1}{R}=-e^{ikR}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$，我们先抛下它不管，等下会知道它的数量级很小。其中的前者$\frac{1}{R}\nabla e^{ikR}=\frac{1}{R}\nabla\phi(u)=\frac{1}{R}ike^{ikR}\nabla R=\frac{1}{R}ike^{ikR}\hat{\mathbf{R}}$。可见前者的模$\frac{k}{R}$，远比后者的模$\frac{1}{R^2}$要大，因此我们忽略掉后者。将前者代入，可得

$\nabla\times\mathbf{A}_{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}ike^{ikR}\hat{\mathbf{R}}\times\dot{\mathbf{p}}=\frac{\mu_0 k}{4\pi R}e^{ikR}\hat{\mathbf{R}}\times i\dot{\mathbf{p}}=\frac{\frac{1}{c^2\varepsilon_0}\frac{\omega}{c}}{4\pi R}e^{ikR}\hat{\mathbf{R}}\times i\dot{\mathbf{p}}=\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\hat{\mathbf{R}}\times i\omega\dot{\mathbf{p}}=\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\hat{\mathbf{R}}\times-\ddot{\mathbf{p}}=\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r$。

【可见$\nabla e^{ikR}=ike^{ikR}\hat{\mathbf{R}}$，而$\nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\chi}=i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\chi}$；同样有$\nabla\times=ik\hat{\mathbf{R}}\times$、$\nabla\cdot=ik\hat{\mathbf{R}}\cdot$；不过其实这里由于$|\chi'|$线度极小，可认为$\hat{\mathbf{R}}$与$\hat{\mathbf{k}}$的方向重合，于是$k\hat{\mathbf{R}}=k\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}$；同时我们也记$\hat{\mathbf{R}}$为$\hat{\chi}$、$\mathbf{e}_r$，并且常用后者$\mathbf{e}_r$。因为我们等会将以球坐标系，来量度辐射出来的波的$\mathbf{k},\mathbf{E},\mathbf{B}$的方向；其中，$\dot{\mathbf{p}}(\chi')=\int\mathbf{J}(\chi')dV'$，而$\mathbf{J}(\chi',t')=\mathbf{J}(\chi')e^{-i\omega t'}=\mathbf{J}(\chi')e^{i(kr-\omega t)}$，因此$\dot{\mathbf{p}}(\chi',t')=\int\mathbf{J}(\chi',t')dV'=\int\mathbf{J}(\chi')dV'\cdot e^{-i\omega t'}=\dot{\mathbf{p}}(\chi')e^{-i\omega t'}$(相当于以前就假定了偶极子做简谐振动，角频率为$\omega$)，得到$\ddot{\mathbf{p}}(\chi')e^{-i\omega t'}=\ddot{\mathbf{p}}(\chi',t')=\frac{d}{dt'}\dot{\mathbf{p}}(\chi',t')=-i\omega\dot{\mathbf{p}}(\chi',t')=-i\omega\dot{\mathbf{p}}(\chi')e^{-i\omega t'}$，因此$\ddot{\mathbf{p}}(\chi')=-i\omega\dot{\mathbf{p}}(\chi')$。以上的$\ddot{\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}$就是指$\ddot{\mathbf{p}}(\chi'),\dot{\mathbf{p}}(\chi')$，且之前的$\dot{\mathbf{p}}(\chi')$也应如此得来。】

得到了$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}_{(1)}=\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r$后，再通过 1.计算辐射场的一般公式末所给出的$\mathbf{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\mathbf{B}$，利用$\nabla\times=ik\hat{\mathbf{R}}\times$，得到$\mathbf{E}=\frac{ic}{k}ik\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}=c\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{R}}=c\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r)\times\hat{\mathbf{R}}$ $=\frac{1}{4\pi Rc^2\varepsilon_0}e^{ikR}(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r)\times\mathbf{e}_r$。于是便有$\begin{cases}\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r\\ \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi Rc^2\varepsilon_0}e^{ikR}(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{e}_r)\times\mathbf{e}_r\end{cases}$。

利用$\dot{\mathbf{p}}=-i\omega\mathbf{p},\ddot{\mathbf{p}}=-i\omega\dot{\mathbf{p}}=-\omega^2\mathbf{p}$，我们也可写为$\begin{cases}\mathbf{B}=-\frac{\omega^2}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}\mathbf{p}\times\mathbf{e}_r\\ \mathbf{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi Rc^2\varepsilon_0}e^{ikR}(\mathbf{p}\times\mathbf{e}_r)\times\mathbf{e}_r\end{cases}$。假设极轴(z 轴)在$\mathbf{p}$方向，则$\mathbf{p}=p\mathbf{e}_z$，于是$\mathbf{p}\times\mathbf{e}_r=p\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r=p\cdot\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$，于是$(\mathbf{p}\times\mathbf{e}_r)\times\mathbf{e}_r=p\cdot\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_r=p\cdot\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$；代入即有$\begin{cases}\mathbf{B}=-\frac{\omega^2}{4\pi Rc^3\varepsilon_0}e^{ikR}p\cdot\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\\ \mathbf{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi Rc^2\varepsilon_0}e^{ikR}p\cdot\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\end{cases}$。

球坐标系原点在电荷电流分布区域，$\mathbf{p}$为极轴，$\mathbf{B}$沿纬线($-\mathbf{e}_\phi$)震荡，$\mathbf{E}$沿经线($-\mathbf{e}_\theta$)振荡。——表明磁力线是围绕极轴($\mathbf{p}$)的圆周，$\mathbf{B}$是横向的；电力线是经面上的闭合曲线($\nabla\cdot\mathbf{E}=0$)。但$\mathbf{E}$不可能完全横向($\perp\mathbf{k}$)，只有略去了$\frac{1}{R}$的高次项后的电偶极辐射，其$\mathbf{E}$才完全横向(即使不略去$\frac{1}{R}$的高次项，(电偶极辐射的)$\mathbf{B}$也是横向的：∵磁力线总是环绕着 I 的不是么，所以总在纬线上)。

结论：电偶极辐射是空间中的 TMW，略去高次项，可近似成 TEM。

四.辐射性能的几个重要参数

(1).辐射场的能流密度：

$\bar{\mathbf{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}^*\times\mathbf{H})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[(c\mathbf{B}^*\times\hat{\mathbf{R}})\times\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}]=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\mathbf{B}^*\times\mathbf{e}_r)\times\mathbf{B}]=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{B})\mathbf{e}_r-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{B}^*]=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{B})\mathbf{e}_r]=\frac{c}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2\mathbf{e}_r=\frac{c}{2\mu_0}\frac{\omega^4}{16\pi^2R^2c^6\varepsilon_0^2}p^2\sin^2\theta\,\mathbf{e}_r=\frac{\omega^4}{32\pi^2R^2c^3\varepsilon_0}p^2\sin^2\theta\,\mathbf{e}_r$。

(2).辐射角分布：

$\theta=\frac{\pi}{2}$，辐射最强；$\theta=0,\pi$，无辐射。

(3).辐射功率：

$\bar{P}=\oint|\bar{\mathbf{S}}|R^2d\Omega=\oint\frac{\omega^4}{32\pi^2R^2c^3\varepsilon_0}p^2\sin^2\theta R^2(\sin\theta d\theta d\phi)=\frac{\omega^4}{16\pi c^3\varepsilon_0}p^2\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta$，其中$\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta=-\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)d\cos\theta=(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta)|_\pi^0=\frac{4}{3}$。于是$\bar{P}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4p^2}{3c^3}$。可见$\bar{P}\propto\omega^4$。

第六章 狭义相对论

着重讨论动体的电动力学，研究时空理论，阐述狭义相对论的实验基础，基本原理，数学工具和相对论电动力学。(之前我们研究的多是静体的电动力学)

解决电动力学的几个问题:

一.Maxwell 方程组究竟对哪一个参考系是正确的。

二.从一个参考系变换到另一个参考系时，基本规律的形式如何改变。

三.基本物理量如何变换。

6.1 狭义相对论的实验基础

一.经典力学的相对性原理

惯性系：自由粒子在其中作匀速运动的坐标系。

伽利略相对性原理：运动定律从一个惯性系变换到另一个惯性系时，运动定律的形式保持不变。即，一切作机械运动的惯性系是等价的。【任何惯性系下的运动规律的数学形式相同】

绝对时空观(旧的时空观)：空间距离和时间间隔是绝对的，与参考系无关。

二.伽利略变换

两个惯性系，三坐标轴相互平行，$t'=t=0$ 原点重合。系∑相对于系∑'沿∑的 x 轴(正向/负向，分别对应∑系下的 v 取正和取负)运动。

伽利略变换：$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$，即$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases}$；两边$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$对 t 求导即得速度变换：$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$。

三.迈克尔逊—莫雷实验

根据$\mathbf{u}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}$，电磁波应只在某个特殊参考系$\sum$下，才在任意方向上，传播速度为 c；而我们的地球，或者是我们这些做实验的人，应该大概率是众多系$\sum'$中的一个，那么同一电磁波对我们$\sum'$而言，我们测得的$|\mathbf{u}'| = |\mathbf{c} - \mathbf{v}|$将不是 c。

如果能够精确测定各个方向的光速的差异，就可以确定地球相对于这个特殊参考系“以太”的运动。

——零结果，否定了特殊参考系“以太”的存在。光速与观察者所处参考系无关，也与光源的运动速度无关。即光速不变。

6.2 狭义相对论的基本原理

一.Albert Einstein 的选择

电磁规律竟然不满足伽利略相对性原理；那么要么麦克斯韦方程组错了(且似乎无法做进一步修正了)，要么伽利略原理不完善(不能说它错，因为它对运动规律/力学规律而言，还是成立的。只是电磁规律不满足它；似乎可以下手)。

爱因斯坦选择了修正伽利略原理，将其扩展为了不止对力学规律也适用，对电磁学规律，甚至一切物理规律，都适用。

二.狭义相对论的基本原理

①.相对性原理：一切物理规律无论力学还是电磁学，对于所有惯性系都具有相同的数学形式。

②.光速不变原理：所有惯性系中，真空的光速在任何方向上恒为 c(真空中的光速相对于任何惯性系，沿任一方向恒为 c)，并且与光源的运动无关。

三.相对论的思想基础

空间均匀性：自然界的定律，在旋转和平移下是不变的。

时间均匀性：自然界的定律，在时间的平移下是不变的。

狭义相对论：时空具有更深刻的均匀性，自然界的定律在(时空的)四维空间的洛伦兹变换下是不变的。

6.3 闵可夫斯基空间和洛伦兹变换

旧时空观，集中反映在伽利略变换式。相对论时空观，也集中反映在一惯性系到另一惯性系的时空坐标变换式——洛仑兹变换。

从物质的运动中抽象出“事件”的概念。物质的运动可看作一连串事件的发展过程。事件可以有各种不同的具体内容，但它总是在一定的地点于一定的时刻发生的。

事件：无限小的空间中无限短的瞬间(x,y,z,t)/(x′,y′,z′,t′)，发生的物质运动过程。相对论坐标变换，是在不同参考系上观察同一事件的时空坐标变换关系。同一事件，在惯性系∑中用(x,y,z,t)表示，在另一惯性系∑′中用(x′,y′,z′,t′)表示。

一.间隔不变性

①.考察光速不变性对时空变换的限制。考虑两个特殊的事件。事件一：光讯号在某时刻从∑系的原点发出；事件二：另一地点 P 接收到该讯号(P 在∑系下坐标为(x,y,z)，在光信号传播方向上，且距离∑系原点 ct)。【其实，在我的狭义相对论框架下，后一个事件应该表述为：“∑系和∑′系均见到的∑系的时间流逝 t(从光信号从∑系原点发出开始计时，即从第一事件发生后开始计时)”，而不是用 P 这个空间位置不确定的接收器，千回百转地表达这层意思。】

选取∑′系的空间原点，在∑系的时间原点 t=0 时刻，与∑系的空间原点重合，并将此时∑′系的时间设为零点 t′=0，同时开始计时(之后∑′系相对于∑系匀速直线运动)。这样一来，光讯号也相当于在 t′=0 时刻从∑′系原点发出，即第一事件在两个参考系中的时空坐标(空时坐标)均是(0,0,0,0)。

设两系都见到∑系时间流逝 t 后，此时的光信号在∑系的坐标系下的时空位置为(x,y,z,t)，而这同一个光信号在∑′系的时空坐标轴上的刻度为(x′,y′,z′,t′)【这一段连续的事件发展进程，在∑′系的量度下，对应其时间流逝了 t′】。

由于两个参考系上测出的光速都是 c，因而$\begin{cases}\sum: r^2=c^2t^2\\ \sum': r'^2=c^2t'^2\end{cases}$，即有$\begin{cases}\sum: x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0\\ \sum': x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0\end{cases}$。也就是说，两个靠光信号联系起来的事件，当∑测量到光信号在∑坐标系下、在所考虑的两个始末事件之间，所划过的(空间间隔)²减去所对应的(时间间隔)²*c^2=0，即$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$时，∑′系也应测量到$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$，以保证光速不变。

以上的“光信号”相当于第三个参考系∑″，只不过我们总是将其当作一连串事件的发生载体，处在其他参考系中观察它，而不是将其作为一个参考系来看待，因而从未进驻其间，来察看外面的世界。当该第三个参考系∑″，的运动速度为 v，且 v≠c 时，不仅$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$≠0，而且也有$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$≠0，但此时是否仍有$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$=$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$=$\mathrm{Const.}(v)$呢，或者两个二次式差倍数关系?

【注：我们不考虑$x^2+y^2+z^2-v^2t^2$和$x'^2+y'^2+z'^2-v'^2t'^2$，是因为它俩恒=0，谈何之间的过渡和变换？；而且$-v^2t^2$,$-v'^2t'^2$因分别与 v,v′有关而不能作为第四个坐标参数，而$-c^2t^2$,$-c^2t'^2$就可以】

②.设二次式F_1(x′,y′,z′,t′)=$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$可以由二次式F_1(x,y,z,t)=$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$变换而来，那么它也是(x,y,z,t)的函数，记之为F_1(x′,y′,z′,t′)=F_2(x,y,z,t)。由于惯性系∑″相对于∑系作匀速运动，它的运动方程由∑系下具有线性关系的 **r**,t 描述；∑″相对于另一“相对于∑系做匀速运动的”惯性系∑′，也是匀速运动的，它在∑′系下的运动方程，也应由具有线性关系的 **r′**,t′描述。那么(**r**,t)→(**r′**,t′)的变换式必须是线性的【注：一般而言，**r′**=**r′**(**r**,t)、t′=t′(**r**,t)；同理，**r**=**r**(**r′**,t′)、t=t(**r′**,t′)】。

这就要求F_1,F_2之间的变换关系也是线性的，即有F_1(x,y,z,t)=A·F_2(x,y,z,t)，其中的 A 最多只与∑,∑′间的相对速度 **u** 的模有关(空间中不存在特定方向)。由于参考系∑,∑′对于量度∑″所生成的事件们，是等价的，反过来仍应有F_2(x,y,z,t)=A·F_1(x,y,z,t)。于是 A=±1。由于变换的连续性，应取 A=1。于是F_1(x,y,z,t)=F_2(x,y,z,t)。【这样一来，当F_1=0 时，F_2也=0；当F_2=0 时，F_1=0，而其中的F_2是任取的。——这就体现了光速不变；虽然F_1=A$(F_2)^2$也能体现出光速不变，但F_1,F_2之间的变换关系不是线性的，而且看上去不对称/不等价。】

F_1=F_2，即关系式$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$=$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$便是光速不变的数学表示。我们将$-F_1$,$-F_2$分别定义为同样的两个事件，在 s 系和 s′系下所分别量度出的“间隔 interval”（时空间隔)。即：s 系中，两事件的间隔定义为s^2=$c^2t^2-(x^2+y^2+$

z^2)；s′系中，两事件的间隔为$s'^2=c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)$。【这样定义才会使得“正常的”两个(由同一个∑″系先后创造的)事件，其“间隔”在任何系的量度下均>0；“间隔”这个概念将时间和空间联系和统一起来了。】

于是关系式可进一步写为$s'^2=s^2$。更一般地，s^2表示：在∑系中，(由同一个∑″系先后创造的)任意两个事件(x_1,y_1,z_1,t_1)与(x_2,y_2,z_2,t_2)的间隔(时空间隔)【也就是说，在∑系中，事件一不一定是(0,0,0,0)了，而是(x_1,y_1,z_1,t_1)，事件二(x,y,z,t)就相当于这里的(x_2,y_2,z_2,t_2)】，即$s^2=c^2\triangle t^2-(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)$。同样$s'^2=c^2\triangle t'^2-(\triangle x'^2+\triangle y'^2+\triangle z'^2)$。且仍有$s'^2=s^2$。【你也可将$s^2,s'^2$写作$\triangle s^2,\triangle s'^2$，但是要注意其中的$\triangle s'^2$指的是$(\triangle s')^2$，而不是$\triangle(s'^2)$】

$\boxed{\text{结论}}$：两事件间隔在所有惯性系的量度下都一样，即当由一个惯性系变换到另一个惯性系时，(量度出的同样两个)事件的间隔是不变的【在我的框架下，希望以“均察看到某系流过相同的$\triangle t$、或某系在某系上划过相同数量的刻度数量”来作为“同样的事件”的判据】。“间隔不变性$s'^2=s^2$”为光速不变原理的数学表示。

二.闵可夫斯基空间

之前我们得到过$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=\mathrm{Const.}(v)$，其中$\mathrm{Const.}(c)=0$，其他$\mathrm{Const.}(v)$只是不为 0 的常数 invariant(当∑系与∑′系之间的相对速度大小$|\mathbf{v}|=v$ 确定时)。

现在我们将$(x,y,z,ict),(x',y',z',ict')$，分别写为$(x_1,x_2,x_3,x_4),(x_1',x_2',x_3',x_4')$；于是式子变为${x_1'}^2+{x_2'}^2+{x_3'}^2+{x_4'}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\mathrm{Const.}(v)$。也就是说，我们将∑,∑′的时空看作一个复四维空间，坐标(x_1,x_2,x_3,x_4)看作复四维空间的位矢的四个分量。∑,∑′之间的时空坐标变换以线性变换$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$的形式存在，(以线性代数的观点)相当于四维空间的旋转操作。

满足间隔不变性$s'^2=s^2$的时空坐标变换$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，称为洛仑兹变换。此时$(x_1,x_2,x_3,x_4)$所构成的空间称为闵可夫斯基空间。

三.洛仑兹变换

对于$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，确定各个系数：

①.在$\sum'$系沿着$\sum$系的 x 轴方向下运动，且三个坐标轴互相平行，的特殊情况下，此时特殊的洛仑兹变换需满足$\begin{cases}y'=y\\z'=z\end{cases}$即$\boxed{\begin{cases}x_2'=x_2\\x_3'=x_3\end{cases}}$，对比$\begin{pmatrix}x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，可得$\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$；并且此时间隔不变式$s'^2=s^2$简化为$x'^2-c^2t'^2=x^2-c^2t^2$，或者$x_1'^2+x_4'^2=x_1^2+x_4^2$。

②.对于剩下的$\begin{pmatrix}x_1'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，由于$(x_1',x_2',x_3',x_4')$中，$(x_1',x_2',x_3')$相互独立【这就跟理论力学中的非自由质点满足面约束 $F(x_1',x_2',x_3')=0$，而自由质点的(x_1',x_2',x_3')是独立的一样；这里(x_1',x_2',x_3')只是x_4'即 t'的函数，是空间中的自由曲线(直线)，只是因共为 t'的函数而满足“匀速直线”这个线约束。但由于速度方向是任意的、直线方程不是给定的，因而这个线约束也是任意的，所以也就没有约束。所以作为自由质点的$\sum''$系，其在$\sum$系和$\sum'$系下的三个空间坐标，在各自组内两两相互独立。】，那么x_1'不是(x_2',x_3')的函数【否则若$x_1'=f(x_2',x_3')$，则也即 $F(x_1',x_2',x_3')=0$，则面约束+质点不自由+坐标不独立】，而根据①.$\begin{cases}x_2'=x_2\\x_3'=x_3\end{cases}$，则$x_1'$不是$(x_2,x_3)$的函数，因此$a_{12}=a_{13}=0$，于是$\boxed{x_1'=a_{11}x_1+a_{14}x_4}$，可见$x_4$只是$x_1'$和$x_1$的函数，而$x_1'$和$x_1$均不是$(x_2',x_3')$和$(x_2,x_3)$的函数，因此$x_4$也不是$(x_2',x_3')$的函数，那么由于变换式的对称性，$x_4'$也应不是$(x_2,x_3)$的函数(你可以对$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}$施行同样的操作，便能正面得出该结果)。

于是$a_{42}=a_{43}=0$，$\boxed{x_4'=a_{41}x_1+a_{44}x_4}$，且$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\a_{41}&0&0&a_{44}\end{pmatrix}$。

③.综上，$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&a_{14}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\a_{41}&0&0&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x_1'=a_{11}x_1+a_{14}x_4\\x_2'=x_2\\x_3'=x_3\\x_4'=a_{41}x_1+a_{44}x_4\end{cases}$。代入到间隔不变式$x_1'^2+x_4'^2=x_1^2+x_4^2$，可得$(a_{11}x_1+a_{14}x_4)^2+(a_{41}x_1+a_{44}x_4)^2=x_1^2+x_4^2$，对比系数得$\begin{cases}a_{11}^2+a_{41}^2=1\\a_{14}^2+a_{44}^2=1\\2a_{11}a_{14}+2a_{41}a_{44}=0\end{cases}$，因 x'轴与 x 轴同向，则实数$a_{11}>0$；t'轴与 t 轴同向，实

数$a_{44}>0$。得$\begin{cases} a_{11}=\sqrt{1-a_{41}^2} \\ a_{44}=\sqrt{1-a_{14}^2} \\ a_{11}a_{14}+a_{41}a_{44}=0 \end{cases}$；将前两式带入第三式的变换式$\frac{a_{11}}{a_{44}}=-\frac{a_{41}}{a_{14}}$，得到$\frac{\sqrt{1-a_{41}^2}}{\sqrt{1-a_{14}^2}}=-\frac{a_{41}}{a_{14}}$，平方并移项，即$\frac{1}{a_{41}^2}-1=\frac{1}{a_{14}^2}-1$，得$a_{14}^2=a_{41}^2$；代入$\begin{cases} a_{11}=\sqrt{1-a_{41}^2} \\ a_{44}=\sqrt{1-a_{14}^2} \end{cases}$，得$a_{11}=a_{44}$。于是$\frac{a_{11}}{a_{44}}=-\frac{a_{41}}{a_{14}}=1$，因此$a_{41}=-a_{14}$。

④.考虑特殊情况：令$x_1'=0$，这意味着在$\sum'$系看来，$\sum''$系一直处在$\sum'$系原点的正上方固定距离处($u'=0$)，与其一同沿着$\sum$系的 x 轴匀速直线运动；则在$\sum$系看来，$\sum''$系的横坐标与$\sum'$系原点的横坐标相同，$x_1=ut=vt$(此时$\sum''$系相对于$\sum$系的速度 $u=\sum'$系相对于$\sum$系的速度 v)，并将$x_4=ict$，三者一并代入$x_1'=a_{11}x_1+a_{14}x_4$，即有$0=a_{11}vt+a_{14}ict$，得到$a_{14}=i\frac{v}{c}a_{11}=i\beta a_{11}$，于是$a_{41}=-i\frac{v}{c}a_{11}=-i\beta a_{11}$。

⑤.代入$\begin{cases} a_{11}^2+a_{41}^2=1 \\ a_{14}^2+a_{44}^2=1 \end{cases}$，有$\begin{cases} a_{11}^2-\beta^2a_{11}^2=1 \\ -\beta^2a_{11}^2+a_{11}^2=1 \end{cases}$，即得到$a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma$，且$a_{44}=a_{11}=\gamma$。反代回④.，得$a_{14}=i\beta\gamma$，$a_{41}=-i\beta\gamma$。于是最终得到洛仑兹变换$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，或写为$\begin{cases} x_1'=\gamma(x_1+i\beta x_4) \\ x_2'=x_2 \\ x_3'=x_3 \\ x_4'=\gamma(x_4-i\beta x_1) \end{cases}$，或写为实四维空间形式$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x) \end{cases}$ (注：第四式两边同时除以ic)，即$\begin{cases} x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$。

⑥.洛伦兹变换的逆变换：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$，其中$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}=\mathbf{A}^T$，可见变换矩阵$\mathbf{A}$为正交矩阵($|\mathbf{A}|^2=|\mathbf{A}||\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{E}|=1$，说明$|\mathbf{A}|=1$；且因$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$，$\mathbf{A}$的任何两个不同的行向量内积为 0，即两两正交)。【正是因为正交矩阵$|\mathbf{A}|=1$，才有间隔不变性】

于是逆变换即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}$，或写为$\begin{cases}x_1=\gamma(x_1'-i\beta x_4')\\x_2'=x_2\\x_3'=x_3\\x_4=\gamma(x_4'+i\beta x_1')\end{cases}$，或

写为实四维空间形式$\begin{cases}x=\gamma(x'+\beta ct')\\y=y'\\z=z'\\t=\gamma(t'+\frac{\beta}{c}x')\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\y=y'\\z=z'\\t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{cases}$。

洛伦兹变换表明：

(1).时间和空间是统一的，时空的度量与物质运动(体现在∑系与∑'系的相对速度 v 上)不可分。

(2).v 远远小于 c 时，过渡回伽利略变换$\begin{cases}x'=x-vt\\y'=y\\z'=z\\t'=t\end{cases}$，伽利略变换是洛伦兹变换在低速下的近似。

6.4 相对论的时空性质

一.相对论时空结构

考虑两个事件，它们或许有关(比如是同一个对象的一连串事件发展进程的始末两个事件)，或许无关(两个纯粹的时空坐标，或者甚至空间上相距很远 r>ct)。选择合适的参考系(或者就以 O 事件为参考系∑)，将一个事件 O 设定为其下的(0,0,0,0)，另一个事件 P 在它的坐标系下为(x,y,z,t)，间隔$s^2=c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=c^2t^2-r^2$。

(1).若两事件用光信号联系，则 r=ct，$s^2=0$。

(2).若两事件用<电磁信号 c 的速度 v 联系，则 r=vt<ct，$s^2>0$。

(3).若两事件的空间距离超过光波在时间 t 内传播的距离，即 r>ct，则$s^2<0$。

四维时空中，任何一事件都可以用其中一点表示，这个点称为世界点。事件发展过程用四维时空中的轨迹线表示，叫世界线。

为了直观，将二维空间(x,y)与一维时间 z=ct 构成三维时空，原点为事件 O，第二事件用该空间中的一点 P 表示。P 在 x-o-y 面的投影表示事件发生的地点(相对于 O 事件而言)，P 点的 z 坐标表示事件发生的时间*c。

(1).$s^2=0$,r=ct，P 点在以 O 点为顶点的锥面上，该圆锥称为光锥。此时 P 点与 O 点可用光信号联系，间隔称为类光间隔。

(2).$s^2>0$,r<ct，P 点在光锥内，类时间隔。(可理解为 ct 更大，世界线更偏向 ct 轴)

①.p 在 O 点的上半光锥，绝对未来。

②.p 点在下半光锥，绝对过去。

洛仑兹变换保持“变换至的∑′系的时间轴(t′轴)”与“变换前的∑系的时间轴(t 轴)”同向，因此若事件 P 在 O 的上半光锥内，则在其他参考系(指的是时空原点与∑系一同在 O 点重合，$\boxed{\text{但}}$相对于∑系有速度 **v** 的其他∑′系，这里的∑′系不需要像之前那样，x′轴与 x 轴重合；这里的∑′系们的 x′轴方向，同向于其相对于∑系的速度 **v** 的方向，而后者(**v**)的大小(<c)和方向是任意的)中，它也在它们的上半光锥内。

(3).$s^2<0$,r>ct，P 点在光锥外，类空间隔。(可理解为 r 更大，世界线更偏向 x-o-y 平面)——此时 P 点无法与 O 点用光波或低于光速的作用相联系。

间隔划分不因参考系而变，相对论时空性质的绝对性：即若在某参考系内，P 在事件 O 的光锥内，则当变到另一参考系(时空原点也设定在 O 点)后，虽 P 在其下的时空坐标都改变，但s^2不变，则s^2的正负也不变，因此事件 P 仍然在 O 的光锥内。

二.同时的相对性

一个经典的场景：∑′系原点处在一节火车车厢中心(x′轴向朝向 **v**)，并与之一同，相对于地面上的∑系，以速度 **v** 匀速直线运动。∑′系 t′=0 时刻，(0,0,0)处，发生两个事件，事件一：小球 A 从车厢中心(即原点)开始以匀速u_1'滚向前门；事件二：小球 B 也从车厢中心开始以匀速$u_2'=-u_1'$滚向后门。

在∑′系看来，在其时间流逝$t_1'=t_2'$之后，事件三($u_1' t_1'=\frac{l_0}{2}$)和事件四$\boxed{\text{同时发生}}$：即在∑系的量度下，“小球 A 到达前门”这一事件的时空坐标($\frac{l_0}{2}$,0,0,t_1')，与“小球 B 到达后门”这一事件的时空坐标($-\frac{l_0}{2}$,0,0,t_2')，具有相同的时间坐标$t_1'=t_2'=\frac{l_0}{2u_1'}$。【虽两事件在∑′系下同时发生，但因异地发生，而导致它俩将在∑系下不同时(且不同地)发生了】

但在∑系看来，根据对(过渡到)t的洛仑兹变换的逆变换：$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，事件三和事件四在∑系的量度下，其时间坐标分别为：$t_1=\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$和$t_2=\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，可以看出来$t_1-t_2=\frac{(t_1'-t_2')+\frac{v}{c^2}(x_1'-x_2')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\frac{v}{c^2}l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}>0$，即在∑系看来，事件三和事件四$\boxed{\text{并非同时发生}}$，并且事件四先发生，事件三后发生。【注：当事件一和事件二发生时，∑′系的时空原点与∑系的时空原点重合。否则不能使用$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，而只能使用$\triangle t=\frac{\triangle t'+\frac{v}{c^2}\triangle x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$】

这一点会因 v 的增大而越发明显：当 v→c 时，$t_1-t_2=\frac{\frac{1}{c}l_0}{0^+}\to+\infty$，可见事件三将在事件四发生后许久许久才能发生；并且该时间间隔t_1-t_2与俩小球相对于∑′系的速度大小u_1'无关(但单独的t_1和t_2会因其中的$t_1'=t_2'=\frac{l_0}{2u_1'}$而与$u_1'$有关；注意$t_2=\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$在此过程中是恒正的，可以察看一下其终末时刻$t_2=\frac{\frac{l_0}{2u_1'}-\frac{l_0}{2\frac{c^2}{v}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}>0$)。

结论：若两事件在某一参考系中为$\boxed{\text{同时异地}}$事件，根据洛伦兹变换，在其它参考系中，这两个事件就不是同时的。——同时的相对性。

三.空间距离的相对性 (运动尺度的缩短)

一根固定在∑′系中的尺子，其两端在∑′系的量度下，空间坐标分别为x_1',x_2'，时空坐标分别为$(x_1',0,0,t'),(x_2',0,0,t')$【可将运动伊始的尺子的两端，看作事件一、事件二，则这俩时空坐标便是俩事件的】，$t_1'=t_2'=t'$表明∑′系是同时测量其两端的空间坐标的，对应尺子的固有长度$l_0=x_1'-x_2'$。设尺子连同∑′系一起相对于∑系以速度 v 运动，他们的时空原点均不必重合。∑系在某时刻$t=t_1=t_2$，同时测量∑′系中那同一把尺子的两端的时空坐标。

【即调整事件一与事件二在∑′系下的时间坐标，使得$t_1=t_2$，并测量此时($t_1=t_2=t$时)，两事件的空间坐标。——根据同时的相对性，我们已经知道，“尺子两端”这两个事件，对于∑′系是个“$\boxed{\text{同时异地}}$事件”，因此它在∑系中不是同时发生的，然而我们又需要同时测量$t_1=t_2$时的x_1-x_2，以作为(像固有长度l_0那样)有意义的长度量l，因此我们需要在$t_1=t_2$的前提下来考察x_1-x_2。你可以察看该节后面的括号内容加深理解】

根据对x′的洛仑兹变换$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，$\Sigma'$系对两事件的测量结果$x_1'$,$x_2'$，若分别用$\Sigma$系对同样两个事件的测量结果$x_1$,$t_1$和$x_2$,$t_2$，来表示，即有$x_1'=\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,$x_2'=\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。于是，$l_0=x_1'-x_2'=\gamma[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)]=\gamma(x_2-x_1)=\gamma l=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。或表成$l=\frac{l_0}{\gamma}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0$。

表明：固定在Σ'系中的杆最长。在相对于它以速度 v 运动的参考系Σ中，它的长度减少到$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0$。——洛伦兹收缩。$l_0$称作固有长度。

结论：物体沿其长度方向运动时，其长度缩短为静止的$\sqrt{1-\beta^2}$倍【长度沿运动方向收缩】。

【有些同学感到奇怪，为什么在 2.3.4.均先考察的是Σ'系作为拥有“固有长度”和“固有时”的参考系同时，2.和 4.都用的是对 t 的洛仑兹变换的逆变换，而唯独这里的 3.用的却是对x′的洛仑兹变换，为什么不用对 x 的洛仑兹变换的逆变换$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$呢?——我们试一下：$l=x_2-x_1=\gamma[(x_2'-x_1')-v(t_2'-t_1')]=\gamma(x_2'-x_1')=\gamma l_0=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。似乎所得结论与$l=\frac{l_0}{\gamma}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0$完全相反：哪个是正确的？为什么？——这样的方法之所以错了，是因为没有保证在$t_1=t_2$的前提下，去测量x_1-x_2：你可以看一下此时的$t_2-t_1=\gamma[(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')]=\gamma\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')\neq 0$。所以在这里我们不是要利用$t_2'-t_1'=0$来得到$l=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0$，而是要给定$t_2-t_1=0$的前提，来测量得到$l=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0$】

四.时间间隔的相对性 (运动时间的延缓)

Σ'系中同一地点，先后发射两信号(即这两个事件，在Σ'系的量度下，$x_1'=x_2'$)；在Σ系中，两事件的时空坐标为(x_1,0,0,t_1)和(x_2,0,0,t_2)。根据对 t 的洛仑兹变换的逆变换：$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，事件一(先发射信号)和事件二(后发射信号)在$\Sigma$系的量度下，其时间坐标分别为：$t_1=\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$和$t_2=\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，$\Delta t=t_2-t_1=\gamma[(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')]=\gamma(t_2'-t_1')=\gamma\,\Delta t'=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。可见，$\Delta t>\Delta t'$。

表明：不同惯性系中，同样两个事件的时间间隔是不同的，某一惯性系中，为同地的两个事件，在该系中的时间间隔是最短的。随某一物体(Σ'系)一起运动的时钟所指示的时间$\Delta t'$——固有时间$\Delta\tau$。

结论：相对于$\sum'$系匀速运动的$\sum$系，对同一对事件所测量得到的时间间隔$\triangle t=\frac{\triangle\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

【另一种推导方法：$\sum'$系中同一地点，先后发生两起事件，$\triangle s'^2=c^2\triangle t'^2-\triangle \mathbf{r}'^2=c^2\triangle t'^2=c^2\triangle\tau^2$，$\sum'$系相对于$\sum$系以 v 匀速运动，两起事件之间的连续事件流，也相对于$\sum$系以 u=v 匀速运动。在$\sum$系下量度两起事件之间的间隔$\triangle s^2=c^2\triangle t^2-\triangle \mathbf{r}^2$，根据间隔不变性$\triangle s'^2=\triangle s^2$，即有$c^2\triangle t^2-\triangle \mathbf{r}^2=c^2\triangle\tau^2$，于是$1-\frac{1}{c^2}(\frac{|\triangle \mathbf{r}|}{|\triangle t|})^2=\frac{\triangle\tau^2}{\triangle t^2}$，而$\frac{|\triangle \mathbf{r}|}{|\triangle t|}$=u=v，于是$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{\triangle\tau^2}{\triangle t^2}$，得到$\triangle t=\frac{\triangle\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

固有时$\triangle\tau$是个四维标量(协变量)：根据间隔不变性$\triangle s'^2=\triangle s^2$，有$\triangle\tau'^2=\frac{\triangle s'^2}{c^2}=\frac{\triangle s^2}{c^2}=\triangle\tau^2$，于是$\triangle\tau'=\triangle\tau=\frac{\triangle s}{c}$。其中$\triangle\tau'^2$指$\triangle \mathbf{r}'=0$时的$=\triangle t'^2$(即也就是上一段的$\triangle\tau^2$)，$\triangle\tau^2$指$\triangle \mathbf{r}=0$时的$\triangle t^2$【$\triangle \mathbf{r}'=0$与$\triangle \mathbf{r}=0$一般不能均成立，除非 u=v=0】。它$\triangle\tau'=\triangle\tau$与$\triangle s'^2=\triangle s^2$性质类似。【或许我们该写之为$\triangle\tau=\frac{\triangle s'}{c}=\frac{\triangle s}{c}$以及$\triangle\tau'=\frac{\triangle s}{c}=\frac{\triangle s'}{c}$？】

五.因果律对信号速度的限制

设有俩事件，它们在$\sum$系的量度下的时空坐标分别为(x_1,t_1)和(x_2,t_2)，在$\sum'$系中的时空坐标分别为(x_1',t_1')和(x_2',t_2')。根据对 t'的洛仑兹变换$t'=\frac{(t-\frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，有$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

若该两事件有因果关系，且$t_2>t_1$，即事件二在事件一之后发生。根据因果律，在其他任何参考系内，如$\sum'$系中，理应也观察到$t_2'>t_1'$。同理，若事件二在事件一之前发生，$t_2<t_1$与$t_2'<t_1'$也应互为充要条件。因此，因果律要求t_2-t_1与$t_2'-t_1'$同号。

于是，当$t_2>t_1$时，$t_2'>t_1'$要求右边分子>0，即$t_2-t_1>\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$，除以$t_2-t_1$不变号，得到$v\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}<c^2$，即有$vu<c^2$。【当$t_2<t_1$时，$t_2'<t_1'$要求右边分子<0，即$t_2-t_1<\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$，除以$t_2-t_1$变号，也得到$v\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}<c^2$，仍有$vu<c^2$】

其中，v表示$\sum'$系相对$\sum$系的速度，u 表示在$\sum$系看来，事件一发生到事件二发生，期间的因果联系速度(载体形式多样，但事件一到二是连续过渡的：“因”与“果”之间，需经历时空坐标之间的，每一个“空间断面”，以及“时间断面”)，比如信号传播速度。——只要信号速度 u 与物体运动速度 v 不超过光速 c，因果关系不变。

6.5 相对论理论的四维形式(与相对论力学一节合并)

一.三维空间的正交变换

二维：同一点 P，在 x-o-y 系下的坐标为(x,y)，在 x′-o-y′系下的坐标为(x′,y′)，则这样的旋转操作$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，是一种正交变换：若将左式表达为 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$，则，$\mathbf{X}'^{T}\mathbf{X}'=\mathbf{X}^{T}\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{X}^{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}$，$OP^2=\mathbf{X}'^{T}\mathbf{X}'=\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}$=const。

使得变换前后的向量内积不变(即$\mathbf{X}'^{T}\mathbf{X}'=\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}$，或者说$\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}=\mathbf{E}$)，的线性变换 $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$，称为正交变换。

像**矢径** OP 一样的其他二维矢量 **v**，在Σ系,Σ'系下的分量分别为$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$，也均满足$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$以及$|\mathbf{v}|=\mathbf{X}'^{T}\mathbf{X}'=\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}$=const.。

三维：满足内积不变$\mathbf{X}'^{T}\mathbf{X}'=\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}$的一种线性变换为 $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\mathbf{X}$(绕 x 轴转)。它也是个正交变换。

爱因斯坦求和约定：我们将$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$写为“$x'_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$，i=1,2,3”，并进一步将求和符号“$\sum_{j=1}^{3}$”和“i=1,2,3”省略，简写为$x'_i=a_{ij}x_j$。它表示对于某个确定的 i(1~3)，$x'_i$=对该 i 下的所有 j(1~3)所对应的右式$a_{ij}x_j$求和，是一种由分量$x_j$通过线性组合过渡到分量$x'_i$的简记法。【以后凡是出现了“$a_{ij}$”这样的有多个下标的因子，就意味着要对拥有该“$a_{ij}$”因子的那侧求和；更准确地说，凡是出现了$p_\mu p_\mu$这样，等号同侧中不同因子有重复/相同的角标时，便意味着要对那侧求和；等号同侧因子的相同下标，如a_{ij},x_j中的 j，是求和对象；等号异侧因子的相同下标，如x'_i,a_{ij}中的 i，是选取对象】

二.物理量按空间变换性质分类

一个表达物理规律的方程，当坐标系经过变换，方程是形式不变时，称方程对这个变换是协变的。狭义相对论要求所有表达物理规律的方程对洛伦兹变换是协变的。或称具有洛伦兹协变性。

1.标量

若一物理量在空间中没有取向关系，坐标系转动时这个物理量将保存不变。称此量为标量。如质量，电荷，标量势等。

2.矢量

若一物理量在空间中有一定取向性，它由 3 个分量表示。当空间坐标按作变换时，它的 3 个分量按同一方式变换(如$x_i'=a_{ij}x_j$，以及$v_i'=a_{ij}v_j$)。称为矢量。如电场强度，速度，力等。

∇也是矢量：$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial}{\partial x_3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_3'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_3'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}$，我们可将其简写作$\frac{\partial}{\partial x_i'}=\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j}$，其中的$\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$记为$a_{ij}$，也即为(之后的)$a_{ij}$。(有点绕口？等下即可知)

我觉得球坐标系的拉普拉斯方程的得来，估计就应用了$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3'}&\frac{\partial x_2}{\partial x_3'}&\frac{\partial x_3}{\partial x_3'}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial}{\partial x_3'}\end{pmatrix}$，或者说$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}&\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}&\frac{\partial x_3'}{\partial x_1}\\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}&\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}&\frac{\partial x_3'}{\partial x_2}\\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}&\frac{\partial x_2'}{\partial x_3}&\frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial}{\partial x_3'}\end{pmatrix}$，其中的$x_1,x_2,x_3$即为 x,y,z；而$x_1',x_2',x_2'$即为 r,θ,φ。

3.二阶张量

对于三维二阶张量，其分量的线性变换式为：$T_{ij}'=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$，其中 i,j,k,$l$=1,2,3。——对于从 9 个分量$T_{ij}'$中选定的一对 i,j，一共有 9 种$a_{ik}a_{jl}$组合，使得 9 个分量$T_{kl}$共同线性组合出该$T_{ij}'$。

三.闵可夫斯基空间物理量变换关系

$x_\mu'=a_{\mu\nu}x_\nu$，μ,ν=1,2,3,4。其中，$a_{\mu\nu}$为$\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}$中对应$(\mu,\nu)$处的元素(也可直接简记作$a_{\mu\nu}$=这个矩阵)。两边对$x_\nu$求偏导，即有$\frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\nu}=a_{\mu\nu}$；而对于逆变换而言，

$x_\mu=\tilde{a}_{\mu\nu}x'_\nu$，$\mu,\nu=1,2,3,4$($\tilde{a}_{\mu\nu}={a^{-1}}_{\mu\nu}$，表示逆矩阵中的($\mu,\nu$)处的元素)。两边对$x_\nu$求偏导，即有$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}=\tilde{a}_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}$。

该结果非常有用，比如我们可借此$\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}=a_{\nu\mu}$得出 2.b).中的$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}=a_{ij}$。

1.四维标量

四维空间中如果一物理量只需一个数表示，而在坐标系转动时数值不变。比如，间隔$ds'^2=ds^2=-dx_\mu dx_\mu$，$\mu=1,2,3,4$，或固有时$d\tau'=d\tau=\frac{ds}{c}$。

2.四维矢量

如果一个物理量需四个数表示，而坐标系转动时，这些数的变换关系与坐标变换关系相同。比如四维位移矢量：$dx'_\mu=a_{\mu\nu}dx_\nu$，$\mu,\nu=1,2,3,4$。

3.四维张量

16 个数/分量构成一个四维张量：$T'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}T_{\lambda\tau}$，$\mu,\nu,\lambda,\tau=1,2,3,4$。【该关系我们将在之后证明。其中的$a_{\mu\lambda}$和$a_{\nu\tau}$也即为坐标变换矩阵】

四.质点力学的修正

1.四维速度

四维速度矢量$=\frac{\text{四维位移矢量}}{\text{四维时间标量}}$，其分量形式即$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}$，$\mu=1,2,3,4$。这样所得的矢量才是个四维矢量；如果用$\frac{dx_\mu}{dt}$的话，虽然分子满足洛伦兹协变性(四维协变性)，但分母 t 不满足洛伦兹协变性。因此$\frac{dx_\mu}{dt}$也就不能合成一个四维矢量。所以分母要使用固有时$d\tau$。

根据时间间隔变换$\vartriangle t=\frac{\vartriangle\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，有$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。于是$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{dx_\mu}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

其空间分量$u_i=\frac{dx_i}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=v_i\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，$i=1,2,3$。时间分量$u_4=\frac{dx_4}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=ic\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。因此$u_\mu=(u_i,u_4)=(\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$。【其中的$\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，在我的 book3 里，称为相对论速度(分量)】

2.四维动量

分量形式：$p_\mu=m_0u_\mu$，$\mu=1,2,3,4$。其中m_0为静止质量，像固有时$d\tau$一样，是个四维标量。以保证p_μ是个四维矢量。

$p_\mu=(p_i,p_4)=(m_0u_i,m_0u_4)=(\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})=(mv_i,imc)$。【其中$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$为动质量。】

3.四维力(闵可夫斯基力)

分量形式：$K_\mu=\frac{dp_\mu}{d\tau}$，$\mu=1,2,3,4$。分母除以固有时$d\tau$，以保证$p_\mu$是个四维矢量。

$K_\mu=\frac{dp_\mu}{d\tau}=(\frac{dp_i}{d\tau},\frac{dp_4}{d\tau})=(\frac{d}{d\tau}(\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}),\frac{d}{d\tau}(\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}))$。一般地，空间分量写作$K_i=\frac{dp_i}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dp_i}{dt}$。于是定义$F_i=K_i\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{dp_i}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，得出三维形式的相对论运动方程：

$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$。当 v<<c 时，$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(m_0\mathbf{v})=m_0\mathbf{a}$，这就退化为了牛顿第二定律。

$p_\mu p_\mu=m_0^2u_\mu u_\mu=m_0^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)=m_0^2(u_iu_i+u_4^2)=m_0^2(\frac{v_iv_i}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{-c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}})=m_0^2\frac{v^2-c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=-m_0^2c^2$。现两边对$\tau$求导，即$\frac{d(p_\mu p_\mu)}{d\tau}=\frac{d(-m_0^2c^2)}{d\tau}=0$，即有$2p_\mu\frac{dp_\mu}{d\tau}=0$，即$p_\mu\frac{dp_\mu}{d\tau}=0$，即$p_\mu K_\mu=0$。

于是$p_\mu K_\mu=p_iK_i+p_4K_4=0$，即$p_iK_i=-p_4K_4$。其中$p_iK_i=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{F_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，而$p_4K_4=\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{d\tau}(\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})=-\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{d\tau}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，将两者带入得：$\frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{d\tau}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，得到$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}=\frac{d}{d\tau}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，即有$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，得到$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\frac{d}{dt}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})=\frac{d}{dt}(mc^2)$。这便是：力对质点的做功功率=质点能量(动能)增加率。是能量守恒的体现。

外力做功$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$，能量增加率应等于动能增加率，即有$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，于是$\frac{d}{dt}(T-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})=0$，得到$T-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=$const.，当 v=0 时，T=0，以此确定积分常数 const.$=-m_0c^2$。于是$T-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-m_0c^2$，得到$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2$。

另外，根据$K_4=\frac{d}{d\tau}(\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，以及上上一段的$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}=\frac{d}{d\tau}(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$，我们进一步有$K_\mu=(K_i,K_4)=(\mathbf{K},\frac{i}{c}\mathbf{K}\cdot\mathbf{v})$。

4.质能联系定律

总能量 $W=T+m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，静能量$W_0=m_0c^2$。

作为惯性的量度的质量，与作为物质运动的量度的能量，之间是普遍联系的。形式不同的能量之间，可以相互转化。以及表现静止的粒子，也具有能量m_0c^2。

5.能量动量和质量的关系

根据 $m=\frac{W}{c^2}$，代入 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{W}{c^2}\mathbf{v}$，于是$p^2=\frac{W^2}{c^4}v^2$。而$W^2=\frac{W_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$，移项，$W^2-\frac{v^2}{c^2}W^2=W_0^2$，即$W^2-p^2c^2=W_0^2$。于是$W^2=p^2c^2+W_0^2$。

当粒子静止质量$m_0=0$时，$W^2=p^2c^2$，这样的粒子是光子。

6.质量亏损

一些粒子结合后的总静能量$W_0=M_0c^2\neq$结合前各粒子静能量之和$\sum_i m_{0i}c^2$，这个差值$\vartriangle W_0=W_0-\sum_i m_{0i}c^2<0$，称为复合体的结合能。对应的$\vartriangle M_0=M_0-\sum_i m_{0i}$称为质量亏损。它们之间满足$\vartriangle W_0=\vartriangle M_0c^2$。

6.6 电磁规律的相对性理论

本节主要讨论电磁规律的洛伦兹协变性，将 maxwell 方程表示成四维形式。

一.势方程的协变性

1.达朗贝尔算符(洛伦兹标量算符)

之后我们将介绍到$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$,$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$，$\square=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\boldsymbol{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$。其中前两个是洛仑兹标量，后一个是洛仑兹标量算符(作用于标量后是标量，作用于矢量后是矢量= =)。

2.四维电流密度矢量

之前我们将三维速度v拓展为了满足洛仑兹协变的四维速度矢量$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\frac{dx_\mu}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=(u_i,u_4)=(\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$。之前的$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$，现写作$\mathbf{J}=\rho_0\mathbf{v}$，即之前的$\rho_0$是个四维标量(像$m_0$一样)，为粒子静止时所带电荷的密度。——可见，J因含有v，而需要扩充为四维速度矢量，且扩充后的J理应满足$J_\mu=\rho_0 u_\mu$，这样所得的J_μ为一个四维标量与一个四维矢量之积，才是个四维矢量，才满足洛仑兹协变。

那么$J_\mu=\rho_0(u_i,u_4)=(\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v_i,\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}ic)=(\rho v_i,ic\rho)$，则$(J_i,J_4)=(\rho_0u_i,\rho_0u_4)=(\rho v_i,ic\rho)$。【这就像$p_\mu=(p_i,p_4)=(m_0u_i,m_0u_4)=(mv_i,imc)$一样；另一种方式推导$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$：正如实验发现质量 m(效应：惯性/引力)随着速度的增加而增加一样，实验也发现带电粒子的电荷与其运动速度无关——前者虽不能用于推导$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，但后者可用于推导$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$：$Q=\int_V\rho dV=\int_V\rho(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dV_0)=\int_V\rho_0 dV_0$，对比可得$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。其中的$dV=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dV_0$来源于$l=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l_0$(各⊥速度的截面の面积不变)。——这将导致一个有趣的事情发生：运动质量密度$\frac{m}{dV}=\frac{m_0 v/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dV_0}=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{m_0}{dV_0}$，会变得更大。】

这样的J_μ满足$\begin{pmatrix}J_x'\\J_y'\\J_z'\\ic\rho'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_x\\J_y\\J_z\\ic\rho\end{pmatrix}$，即$J_\mu'=a_{\mu\nu}J_\nu$。【注：右边的ρ即上一段的$\rho_0$；左边的ρ′相当于上一段的ρ；上一段用$\rho,\rho_0$主要是为了与$m,m_0$和$l=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l_0$对应。而这里ρ′,ρ主要是为了与J′,J对应。但我们最好还是采用ρ,ρ_0，毕竟我们用m,m_0也没觉得多别扭】

在定义了$J_\mu=(\mathbf{J},J_4)=(\rho\mathbf{v},ic\rho)$后，原电荷守恒定律$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，实际上是指$\nabla\cdot\mathbf{J}_0+\frac{\partial\rho_0}{\partial t}=0$，即$\nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v})+\frac{\partial\rho_0}{\partial t}=0$，中各量，在含义上将被扩充为四维矢量的分量：$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，即$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。并将全以$J_\mu$的形式呈现：$0=\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}+\frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)}=\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4}=\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$，即$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0$，其中$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$含有重复角标μ(方程同侧的$_\mu$与$x_\mu$，均含有相同角标；即使一个在分子一个在分母，也是相乘关系；何况无需一定相乘，只要有相同角标就暗示求和——相加都可以？不，必须是相乘。之后我们将遇到一种轮换，它同侧虽有重复角标，但出现于的字母之间不是相乘。)，代表求和。当然$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0$还可写成$\nabla_4\cdot\mathbf{J}=0$，其中的J为四维电流密度矢量，$\nabla_4=\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3+\frac{\partial}{\partial x_4}\mathbf{e}_4$。

由于$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$(指的是 4 个μ下的$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$)的分子分母$J_\mu$,$x_\mu$均有洛仑兹协变性。那么$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$(也指的是 4 个μ下的$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$)本身也有洛仑兹协变性(此时将$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$看作一个如$J_\mu$,$x_\mu$的矢量)，于是$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4}$(指的是 4 个μ的$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$之和，是标量)也具有洛仑兹协变性。那么它是个四维标量(洛仑兹标量)，在惯性系到惯性系的变换下，值不变，均=0。因此电流密度与电荷密度统一为四维矢量，对应的电荷守恒定律$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 在任何惯性系下，形式均不变。

3.四维势矢量

既然J和ρ构成了四维电流密度矢量J_μ，我们是否是也可以扩充 **A** 与φ构成新的四维势矢量A_μ？——洛仑兹规范$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ 下：$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$，我们可以看到，方程右侧分别含有ρ,**J**，而左侧分别是φ与 **A**，这说明 **A** 和φ是可以扩充为同一个四维矢量的分量的(当然，你也可以通过“ρ激发标势φ，**J**激发矢势 **A**”来说服自己)：

在 3.1 处，静电场的标势$\varphi(\chi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\chi')}{r}dV'$(注意其中的电势φ不是标势φ)，在库伦规范下，静磁场的矢势也有类似的形式：$\mathbf{A}(\chi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\chi')}{r}dV'$。扩充后的$A_\mu$，或许也应满足类似的$A_\mu=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_\mu}{r}dV'=(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_i}{r}dV',\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_4}{r}dV')=(A_i,\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{ic\rho}{r}dV')=(\mathbf{A},\frac{\mu_0}{4\pi}ic[4\pi\varepsilon_0\varphi])=(\mathbf{A},\frac{i}{c}\varphi)$? ——但其中有两点问题：①.用库伦规范下的**A**的表达式，所扩充出来的A_μ，仍然是库伦规范下的，而不是洛仑兹规范下的。②.A_μ的第四个分量是电势φ，而不是标势φ。——归根结底，此时得出的A_μ是“$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$、$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=0$”，即“静电场、静磁场”这两个“静”下的，其中的**A**、φ都不随时间变化，是狭义的(且是库伦规范下的)。【但我们已经能从中预料到广义的A_μ的表达式了】

所以我们不能像之前那样从J的定义式开始考察了(∵**A** 和φ的表达式是不定的)，转而应该从势所遵循的方程上着手：先考察两个势方程左边均含有的算符$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，我们发现它$\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial(ict)}\frac{\partial}{\partial(ict)}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$。同样，角标相同代表求和。我们将其记为$\Box=\Delta_4=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，其中$\Delta_4$是《数学物理方法》采用的记号，表示四维拉普拉斯算符；□为电动力学采用的记号。【它俩其实一个正三角，一个正方形，寓意就在于：三个角代表三个维度，四个角代表四个维度= =】

采用这种记号后，两个势方程变为$\begin{cases}\Box\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\\ \Box\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J}_f\end{cases}$。现尝试着将第一个方程右边变换出$J_4=ic\rho$：$\Box\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}=-\mu_0c^2\rho_f$，两边同时乘以$\frac{i}{c}$，即有$\Box(\frac{i}{c}\varphi)=-\mu_0ic\rho=-\mu_0J_4$。现在两个势方程变为$\begin{cases}\Box(\frac{i}{c}\varphi)=-\mu_0J_4\\ \Box\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J}\end{cases}$。于是定义$A_4=\frac{i}{c}\varphi$，[再加上之前从定义式推得的狭义的

$A_\mu=(\mathbf{A},\frac{i}{c}\varphi)$]那么我们便有充足的理由，认定$A_\mu=(\mathbf{A},\frac{i}{c}\varphi)$。——此时两个势方程合并为一个$\Box A_\mu=-\mu_0 J_\mu$【比如对于μ=1，有$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_1=-\mu_0 J_1$，它相当于$\Box \mathbf{A}_x=-\mu_0 \mathbf{J}_x$】。根据该方程，由于$J_\mu$具有洛仑兹协变性，因此$\Box A_\mu$，即$A_\mu$也具有洛仑兹协变性(∵方程右边是四维矢量，则左边也是)。【之前我们是从物理的角度，认为A_μ由J_μ激发；或是库伦规范下的表达式赋予了A_μ的协变性】

于是$\begin{pmatrix}A'_x\\A'_y\\A'_z\\\frac{i}{c}\varphi'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\\\frac{i}{c}\varphi\end{pmatrix}$。即$A'_\mu=a_{\mu\nu}A_\nu$。

在这样定义的A_μ下，洛仑兹规范$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$也可以被写为更好看的形式：$0=\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial(\frac{i}{c}\varphi)}{\partial(ict)}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}+\frac{\partial A_4}{\partial x_4}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$，即$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$。可见不论从矢量意义上，还是从标量意义上，$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$均具有洛仑兹协变性。因此四维标量$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$，在坐标变换下值不变；因此洛仑兹规范的表达式，在各系下形式不变。【它与$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$类似，但我们没选用它作为开头来介绍，因为$J_4=\frac{i}{c}\varphi$的得来，若由它推出，则略显牵强】

二.Maxwell 方程的协变性

1.电磁场张量

电磁场均用$\mathbf{E},\mathbf{B}$表示：$\begin{cases}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\\\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{cases}$。

$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$的分量的四维形式(也就是将其中的φ换成A_4，t换成x_4)：$E_1=\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_1=(-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})\cdot\mathbf{i}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial t}=-\frac{\partial(\frac{i}{c}\varphi)}{\frac{i}{c}\partial x_1}-ic\frac{\partial A_1}{\partial(ict)}=ic\frac{\partial(\frac{i}{c}\varphi)}{\partial x_1}-ic\frac{\partial A_1}{\partial x_4}=ic[\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}]$；$E_2=\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_2=ic[\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}]$；$E_3=ic[\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}]$。【按照这个规律下去，$E_4=ic[\frac{\partial A_4}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_4}]=0$：这也是理所应当的，$\mathbf{E}$应只有空间分量】

据$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\\frac{\partial}{\partial x_1}&\frac{\partial}{\partial x_2}&\frac{\partial}{\partial x_3}\\A_1&A_2&A_3\end{vmatrix}$，有$B_1=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}$，$B_2=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$，$B_3=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$。若我们定义$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$，于是$E_1=icF_{14}=-icF_{41}$，$E_2=icF_{24}=-icF_{24}$，$E_3=icF_{34}=-icF_{34}$；$B_1=F_{23}=-F_{32}$，$B_2=F_{31}=-F_{13}$，$B_3=F_{12}=-F_{21}$。可见$F_{\mu\nu}$构成了一个对角元素

=0 的反对称四阶矩阵(四维二阶张量)，记作$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}$，称之为电磁场张量。【势：四维矢量(四维一阶张量)；电磁场：四维张量(四维二阶张量)】

【四维二阶张量：4^2个元素，其中每个元素$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$，都是个并矢(的分量)(的数值)？——$A_\mu$是个四维矢量(的分量)(的数值)，则$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$,$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$也分别是个($e_\mu$,$e_\nu$方向的)四维矢量(的分量)(的数值)，$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$是个并矢(的分量)(的数值)？将 16 个四维并矢$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$，放在 16 个格子中，组成的数组，就是个四维二阶张量了。】

2.麦克斯韦方程组的协变形式

真空情形的麦克斯韦方程组：

- $\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
- $\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0[\mathbf{J}+\mathbf{J}_D]=\mu_0[\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}]$

1.先考虑 1.号和 4.号方程$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\end{cases}$，它们可合写为$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu$(左侧重复角标，仍表示求和)。

这是因为：④.$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}=0+\frac{\partial B_3}{\partial x_2}+\frac{\partial(-B_2)}{\partial x_3}+\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_1)}{\partial x_4}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_2 & B_3\end{vmatrix}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}=\mu_0 J_1$；$\frac{\partial F_{2\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_4}=\frac{\partial(-B_3)}{\partial x_1}+0+\frac{\partial B_1}{\partial x_3}+\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_2)}{\partial x_4}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_3\end{vmatrix}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t}=\mu_0 J_2$；$\frac{\partial F_{3\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{33}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_4}=\frac{\partial B_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(-B_1)}{\partial x_2}+0+\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_3)}{\partial x_4}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ B_1 & B_2\end{vmatrix}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}=\mu_0 J_3$；

这三个方程各自乘以各自的基底矢量$\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$并相加，即有$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J}$。移项便有$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$。【或者说那三个方程，是该方程的三个分量的系数对应方程】

①.对于$\mu=4$，$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{44}}{\partial x_4}=\frac{\partial(\frac{i}{c}E_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\frac{i}{c}E_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\frac{i}{c}E_3)}{\partial x_3}=\frac{i}{c}(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3})=\mu_0 J_4=\mu_0 ic\rho$，得到$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}=\mu_0 c^2\rho=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$。即有$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$。

2.再考虑 2.号和 3.号方程$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\end{cases}$，它们可合写为$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0$(左侧相乘因子之间无重复角标(虽相加的项之间有重复角标)，这里表示(μ,ν,λ)在(1,2,3,4)间轮换取值：μ从 1 取到 4，ν,λ的取值依次+1，右边不够又从左头开始取，这样ν,λ分别也取遍了 2341，和 3421)。

③.对于$\mu=1$，$\nu,\lambda=2,3$，$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=\frac{\partial B_3}{\partial x_3}+\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}=\nabla\cdot\mathbf{B}=0$。

②.$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}=\frac{\partial B_1}{\partial x_4}+\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\frac{i}{c}E_2)}{\partial x_3}=ic\frac{\partial B_1}{\partial(ict)}+\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}=\frac{\partial B_1}{\partial t}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ E_2 & E_3\end{vmatrix}=0$；
$\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_3)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\frac{i}{c}E_1)}{\partial x_3}+\frac{\partial(-B_2)}{\partial x_4}=\frac{\partial(-E_3)}{\partial x_1}+\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-ic\frac{\partial(-B_2)}{\partial(ict)}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ E_1 & E_3\end{vmatrix}+\frac{\partial B_2}{\partial t}=0$；
$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}=\frac{\partial(\frac{i}{c}E_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_4}+\frac{\partial(-\frac{i}{c}E_2)}{\partial x_1}=-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}+ic\frac{\partial B_3}{\partial(ict)}+\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=\frac{\partial B_3}{\partial t}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ E_1 & E_2\end{vmatrix}=0$；。

三者各自乘以各自的基底矢量$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$并相加，即有$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ E_1 & E_2 & E_3\end{vmatrix}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$。即$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$。

3.电磁场张量变换形式

(1).就像之前的∇_3到∇_3'的转化一样，对于∇_4：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial}{\partial x_3'}\\ \frac{\partial}{\partial x_4'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial x_4}{\partial x_1'}\frac{\partial}{\partial x_4}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial x_4}{\partial x_2'}\frac{\partial}{\partial x_4}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial x_4}{\partial x_3'}\frac{\partial}{\partial x_4}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_4'}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial x_4'}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial x_4'}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial x_4}{\partial x_4'}\frac{\partial}{\partial x_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_4}{\partial x_1'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2'} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3'} & \frac{\partial x_4}{\partial x_3'}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_4'} & \frac{\partial x_2}{\partial x_4'} & \frac{\partial x_3}{\partial x_4'} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_4}\end{pmatrix}$$

，我们可将其简写作$\frac{\partial}{\partial x_\mu'}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu'}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$。【注：$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu'}=a_{\mu\nu}$，仍然来源于：$x_\nu$具有洛仑兹协变性，然后对其逆变换方程两边求偏导】

另外，由于四维势矢量A_μ也具有洛仑兹协变性，即$A_\mu'=a_{\mu\nu}A_\nu$，则$A_\nu'=a_{\nu\tau}A_\tau$、$A_\mu'=a_{\mu\lambda}A_\lambda$，将以上两内容代入下面：

那么$F_{\mu\nu}'=\frac{\partial A_\nu'}{\partial x_\mu'}-\frac{\partial A_\mu'}{\partial x_\nu'}=\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu'}\frac{\partial A_\nu'}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial x_\tau}{\partial x_\nu'}\frac{\partial A_\mu'}{\partial x_\tau}=a_{\mu\lambda}\frac{\partial(a_{\nu\tau}A_\tau)}{\partial x_\lambda}-a_{\nu\tau}\frac{\partial(a_{\mu\lambda}A_\lambda)}{\partial x_\tau}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda}-a_{\nu\tau}a_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}(\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau})=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}=a_{\mu\lambda}\tilde{a}_{\tau\nu}F_{\lambda\tau}=a_{\mu\lambda}F_{\lambda\tau}\tilde{a}_{\tau\nu}$。

将$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}F_{\lambda\tau}\tilde{a}_{\tau\nu}$写成矩阵形式便有：

$$\begin{pmatrix} 0 & B'_3 & -B'_2 & -\frac{i}{c}E'_1 \\ -B'_3 & 0 & B'_1 & -\frac{i}{c}E'_2 \\ B'_2 & -B'_1 & 0 & -\frac{i}{c}E'_3 \\ \frac{i}{c}E'_1 & \frac{i}{c}E'_2 & \frac{i}{c}E'_3 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}。$$

(2).电场磁场各分量变换关系

①.由上，$\begin{cases} E'_1=E_1 \\ E'_2=\gamma(E_2-vB_3) \\ E'_3=\gamma(E_3+vB_2) \end{cases}$，$\begin{cases} B'_1=B_1 \\ B'_2=\gamma(B_2+\frac{v}{c^2}E_3) \\ B'_3=\gamma(B_3-\frac{v}{c^2}E_2) \end{cases}$，逆变换为$\begin{cases} E_1=E'_1 \\ E_2=\gamma(E'_2+vB'_3) \\ E_3=\gamma(E'_3-vB'_2) \end{cases}$，$\begin{cases} B_1=B'_1 \\ B_2=\gamma(B'_2-\frac{v}{c^2}E'_3) \\ B_3=\gamma(B'_3+\frac{v}{c^2}E'_2) \end{cases}$。

这说明：电场和磁场不是能彼此独立的。当坐标系变换，**E**,**B**不是独立变换而是混合变换。【正如同 x′,t′分别是 x,t 的混合一样】

一个惯性系中，纯粹是电场或磁场，在另一个惯性系中，必然是电场和磁场的混合。比如Σ系只含**E**，则Σ′系的**B**′≠0(当然其**E**′≠0)【其实非相对论情形也是这样】。

②.将电磁场按平行和垂直于运动方向分解：

由于，$E_1=E_x=E_{\parallel v}=E_\parallel$，即$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_\parallel$，而$E_2\mathbf{e}_2+E_3\mathbf{e}_3=E_y\mathbf{j}+E_z\mathbf{k}=\mathbf{E}_{\perp v}=\mathbf{E}_\perp$。并且$v=v_x=v_1$，而$v_2=v_3=0$【即Σ′系仍相对于Σ系沿着其 x 轴运动，v 只有 x 向分量】。因此可将上述式子写为更简单的形式：$\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ E'_2\mathbf{e}_2+E'_3\mathbf{e}_3=\gamma(E_2\mathbf{e}_2+E_3\mathbf{e}_3+vB_2\mathbf{e}_3-vB_3\mathbf{e}_2) \end{cases}$，

即$\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma[\mathbf{E}_\perp+v(B_2\mathbf{e}_3-B_3\mathbf{e}_2)] \end{cases}=\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma[\mathbf{E}_\perp+v_1(B_2\mathbf{e}_3-B_3\mathbf{e}_2)+B_1(v_3\mathbf{e}_2-v_2\mathbf{e}_3)] \end{cases}$，

即$\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma[\mathbf{E}_\perp+(v_3B_1-v_1B_3)\mathbf{e}_2+(v_1B_2-v_2B_1)\mathbf{e}_3] \end{cases}=\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma\left[\mathbf{E}_\perp+\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}\right] \end{cases}$，

于是$\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma\left[\mathbf{E}_\perp+\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}_\perp\right] \end{cases}=\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma[\mathbf{E}_\perp+(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_\perp] \end{cases}=\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp=\gamma[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_\perp \end{cases}$。

同样的道理，$\begin{cases}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}\\ \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma[\mathbf{B}_{\perp}+\frac{v}{c^2}(E_3\mathbf{e}_2-E_2\mathbf{e}_3)]\end{cases}=\begin{cases}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}\\ \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma[\mathbf{B}_{\perp}+\frac{1}{c^2}\begin{vmatrix}v_1 & 0 & 0\\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ E_1 & E_2 & E_3\end{vmatrix}]\end{cases}=$

$$\begin{cases}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}\\ \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma[\mathbf{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ E_1 & E_2 & E_3\end{vmatrix}_{\perp}]\end{cases}=\begin{cases}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}\\ \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma[\mathbf{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{E})_{\perp}]\end{cases}=\begin{cases}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}\\ \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma[\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{E})]_{\perp}\end{cases}。$$

当 v<<c 时，过渡到非相对论形式，即$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$，$\mathbf{B}'=\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{E})$。