Salute to 高志达

目录

第一章 二维傅里叶分析

1.1 信号分析中常用的函数

一.一些非初等函数们

函数	original 表达式	拓展方式	拓展表达式	拓展式的 SorV	拓展式的特点/功能
$\mathrm{rect}(x)$	$\begin{cases}1, \lvert x\rvert \le \frac{1}{2}\\ 0, \lvert x\rvert > \frac{1}{2}\end{cases}$	先以直线 x=0 为位似中心向左向右横向放大 a 倍；后整体向右平移 x_0个单位$\xrightarrow{\text{等价于}}$先整体向右平移x_0个单位；后以直线 x=x_0为位似中	$\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \left\lvert\frac{x-x_0}{a}\right\rvert \le \frac{1}{2}\\ 0, \left\lvert\frac{x-x_0}{a}\right\rvert > \frac{1}{2}\end{cases}$ 它等价于:	a	宽为 a，高为 1 的矩形小山包，四周还有海拔为 0 的水平面。 功能：F(x)=$\mathrm{rect}(x)\cdot$f(x)相对于 f(x)，只截取了 f(x)

		心向左向右横向放大 a 倍(a>0)	$\begin{cases}1, \vert x-x_0\vert \le \frac{a}{2}\\ 0, \vert x-x_0\vert > \frac{a}{2}\end{cases}$		在部分区间$\vert x-x_0\vert \le \frac{\vert a\vert}{2}$上的值 or 图像。(矩形函数；门函数)
		先整体向右平移x_0个单位；后以直线 x=0 为位似中心向左向右横向放大 a 倍$\xrightarrow{等价于}$先以直线 x=0 为位似中心向左向右横向放大 a 倍；后整体向右平移 $a\cdot x_0$个单位(a>0)	$\mathrm{rect}(\frac{x}{a}-x_0)=\begin{cases}1, \vert\frac{x}{a}-x_0\vert \le \frac{1}{2}\\ 0, \vert\frac{x}{a}-x_0\vert > \frac{1}{2}\end{cases}$ 它等价于: $\begin{cases}1, \vert\frac{x-ax_0}{a}\vert \le \frac{1}{2}\\ 0, \vert\frac{x-ax_0}{a}\vert > \frac{1}{2}\end{cases}$		
$\mathrm{sinc}(x)$	$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ (已拓)	再通过两个路径进一步拓展到同一个结果: $x\xrightarrow{平移or放大}x-x_0$或 $\frac{x}{a}\xrightarrow{放大or平移}\frac{x-x_0}{a}$(a>0)	$\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\frac{\sin(\pi\frac{x-x_0}{a})}{\pi\frac{x-x_0}{a}}$ (有点像傅里叶变换那里的三角函数族：1,$\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$的周期计算)	a	反复上下穿插 x 轴、与 x 轴的交点的坐标刻度，从$\frac{\sin(x)}{x}$的$\pm k\pi$们到$\pm k$们再到$\pm ka$们，其中 k 为自然数。(它的平方即为：夫琅禾费单缝衍射光强分布)
$\Lambda(x)$	$\begin{cases}1-\vert x\vert, \vert x\vert \le 1\\ 0, \vert x\vert > 1\end{cases}$	同上俩(a>0)	$\Lambda(\frac{x-x_0}{a})=\begin{cases}1-\vert\frac{x-x_0}{a}\vert, \vert\frac{x-x_0}{a}\vert \le 1\\ 0, \vert\frac{x-x_0}{a}\vert > 1\end{cases}$	a	宽为 2a，高为 1 的三角形小山包，四周还有海拔为 0 的水平面。(三角形函数)

$\mathrm{sgn}(x)$	$\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$	$x\xrightarrow{平移}x-x_0$ $\xrightarrow{放大(无用)}\frac{x-x_0}{a}$ (在 a>0 时，效果与$x-x_0$相同；a<0 时，函数关于 $x=x_0$ 对称变换)	$\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})=\begin{cases}1, \frac{x-x_0}{a}>0\\ 0, \frac{x-x_0}{a}=0\\ -1, \frac{x-x_0}{a}<0\end{cases}$		当 a>0 时，它的“有用部分”为$x \le x_0$的部分；当 a<0 时，其“有用部分”为$x \ge x_0$的部分。功能：对于 a>0：F(x)=$\mathrm{sgn}(x)\cdot f(x)$相对于 f(x)，在 $x<x_0$时，F(x)=-f(x)；在 $x=x_0$时，F(x)=0。即此时对应x_0左侧上下翻转。(符号函数)
$\mathrm{step}(x)$	$\begin{cases}1, x>0\\ \frac{1}{2}, x=0\\ 0, x<0\end{cases}$	同上一 (a>0 与 a<0 对横向放大不起作用，	$\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a})=$		它与$\mathrm{sgn}(x)$在 x 方向无异，只在 y 方向有不同。易看出二者间的关系：$\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})=2\mathrm{step}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)-1$

		只控制原函数是否沿 $x=x_0$对称翻转)	$\begin{cases}1, \frac{x-x_0}{a}>0\\ \frac{1}{2}, \frac{x-x_0}{a}=0\\ 0, \frac{x-x_0}{a}<0\end{cases}$		功能：开关。从左往右地，在某点开启(a>0)or 关闭(a<0)某函数(阶跃函数)
circ(x,y) =circ($\mathbf{r}$)	$\begin{cases}1, \lvert\mathbf{r}\rvert\le 1\\ 0, \lvert\mathbf{r}\rvert>1\end{cases}$	$\mathbf{r}\xrightarrow{平移or放大}\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$或 $\frac{\mathbf{r}}{a}\xrightarrow{放大or平移}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}$(a>0)	circ($\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}$)= $\begin{cases}1, \lvert\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}\rvert\le 1\\ 0, \lvert\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}\rvert>1\end{cases}$	πa^2	上底面封闭、没有下底面，高为 1 的圆柱面+抠掉下底面的水平面(二维圆域/柱函数)
Gauss(x)	$e^{-\pi x^2}$	同前三(a>0)	Gauss($\frac{x-x_0}{a}$)= $e^{-\pi(\frac{x-x_0}{a})^2}$	a	
Gauss(x,y)	$e^{-\pi(x^2+y^2)}$	平移+以椭圆圆心为位似中心的 x,y 两个方向的缩放(a,b>0)	Gauss($\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}$)= $e^{-\pi[(\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2]}$ (为了更广义地包括椭圆，不写为 Gauss ($\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}$)；要注意它与 circ($\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{a}$)的区别)	ab	(高斯函数；激光的光强分布)

一些归纳:

a.**拓展到二维•共性的定义**

1.$\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right):=\mathrm{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$

二维矩形函数，定义为两个一维矩形函数的乘积。即相当于两条“丝丝糕”垂直地相交于 x-o-y 平面上，交集空间区域、两个函数都非零时，才非零。

书上举的例子很精辟：可描述无限大不透明屏上矩形孔的透过率 transmission coefficient T。

2.$\mathrm{sinc}(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}):=\mathrm{sinc}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$

书上举的例子也很精辟：它可描述——矩孔的夫琅禾费光场 E 分布；其平方用于描述——对应的光强 I 分布 or 衍射图样。

3.$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right):=\Lambda(\frac{x-x_0}{a})\Lambda\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$

注意它可不是简单的两列横截面为等腰直角△的丝丝糕的交集！即不是个标准的四棱锥：因为除了最高点之外，一维的Λ的其他点上的函数值$\Lambda(x_1)$比 1 小，因此若恰好$\Lambda(x_1,x_2)$中另一个一维的$\Lambda(x_2)$也因x_2不是中点而未达到最高点 1，则$\Lambda(x_1,x_2)$比$\Lambda(x_1)$or 四棱锥在该(x_1,x_2)点的函数值还要(进一步降)低。因此这是一个“埃菲尔铁塔

式”的建筑：任何一个过中轴的截面，从底面边缘的四周到顶点，是凹升上去的——先斜率小地缓升，再斜率大地急升。

否则其体积将变为四棱锥的$\frac{2a\cdot 2b}{3}=\frac{4}{3}ab$，而不是实际的$\iint \Lambda(\frac{x-x_0}{a})\Lambda\left(\frac{y-y_0}{b}\right) dxdy$ $=\int[\int \Lambda(\frac{x-x_0}{a})\Lambda\left(\frac{y-y_0}{b}\right) dx]dy=\int \Lambda(\frac{x-x_0}{a})dx \int \Lambda\left(\frac{y-y_0}{b}\right) dy=ab$。所以得每个地方的高度相对于直接投影线“相交”而成的四棱锥的相同地方的高度，更下降一些，才能从$\frac{4}{3}ab\to ab$。而四棱锥只是$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right)$的一个外骨骼，只能说四棱锥所在空间外肯定没有$(x,y,\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right))$存在，$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}\right)$只存在于其内，但它也没有填充满四棱锥！即四棱锥内部空间也不全是它。

4.$\mathrm{Gauss}(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b}):=\mathrm{Gauss}(\frac{x-x_0}{a})\cdot\mathrm{Gauss}(\frac{y-y_0}{b})=e^{-\pi(\frac{x-x_0}{a})^2}\cdot e^{-\pi(\frac{y-y_0}{b})^2}=e^{-\pi[(\frac{x-x_0}{a})^2+(\frac{y-y_0}{b})^2]}$

同样的道理，二维的高斯函数在函数值比 1 小的地方，其函数值比对应的一维的高斯函数的函数值，还要小。高的更高(虽然高斯函数没有>1 的部分)，矮的更矮，世事常情。这样才能使得 Area=$\int \mathrm{Gauss}(\frac{x-x_0}{a})dx\int \mathrm{Gauss}(\frac{y-y_0}{b})dy=ab$，否则它们相交的体积肯定是 > ab 的。

b.**拓展到二维•个性的定义**

5.$\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b})=\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a})$

它可描述——光学直边的透过率 T。

6.$\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a},\frac{y-y_0}{b})=\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})=2\mathrm{step}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)-1$

c. **一对一维函数的功能和特征•异同 ($\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})$与$\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a})$)**

相异之处(功能)：a>0 时，$\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})$的$x_0$左侧上下翻转；而$\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a})$的$x_0$右侧是开。

相同之处(特征)：a>0 时，$\mathrm{sgn}(\frac{x-x_0}{a})$的$x_0$右侧不变、左侧改变；且$\mathrm{step}(\frac{x-x_0}{a})$的$x_0$右侧不变、左侧改变。

d.**一维函数的 a 与横向对称/翻转操作的关系**

“函数是偶函数 or 存在对称轴 $x=x_0$” ⇔ “a>0” ； “函数不存在对称轴” ⇔ “a>0、a<0，且分别对应‘左右放大’、‘左右放大 and 左右翻转’”。

二.关于《数物》和《量子力学》中的傅里叶变换和傅里叶积分

在量子力学中，“对于一个向右传播的子波/单色波ψ_k，选取合适的振幅$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，能使$\psi_k=A_k e^{ikx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$狄拉克归一化，再将$\psi_k$乘上$c_k=\phi(k)dk$因子，以削减每个子波的振幅，然后叠加起来$\psi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\psi_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k A_k e^{ikx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}dk=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(k)e^{ikx}dk=<\phi(k)|\psi_k>$，成为一个由已狄拉克归一化的基波/基矢们线性叠加而成的波包”。

这个过程，与《数物》中的复数形式的傅里叶积分，有异有同，异在于$\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<\phi(k)|e^{ikx}>$要比 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwx}dw$，即 $f(x)=<F^*(w)|e^{iwx}>$多个系数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，这来源于构成$\psi(x)$的每个子波ψ_k的振幅，要比构成 $f(x)$的每个“子波”e^{iwx}的振幅小$\sqrt{2\pi}$倍，这样各自的子波叠加而成的$\psi(x)$也比 $f(x)$要矮那么多，也就是波包$\psi(x)$里也含有$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$因子。

而之所以出现这样不同，是由于$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$而不是 1 的缘故；而之所以$A_k\neq 1$，为的是使子波$\psi_k$满足狄拉克归一化，即为了让$<\psi_{k'}|\psi_k>=\delta(k-k')$中$\delta$前面的系数为 1：根据常数 A 的傅里叶变换：$\mathcal{F}[A]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A\cdot e^{-ik\xi}\cdot d\xi=\frac{A}{2\pi}\lim_{\xi\to\infty}\frac{e^{-ik\xi}-e^{ik\xi}}{-ik}=\frac{A}{2\pi}\lim_{\xi\to\infty}\frac{-2i\sin(k\xi)}{-ik}=\frac{A}{\pi}\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin(k\xi)}{k}=A\delta_1(k)$，有$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik\xi}\cdot d\xi=2\pi\mathcal{F}[1]=2\pi\delta_1(k)$，

那么$<\psi_{k'}|\psi_k>=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{k'}^*(x)\psi_k(x)\cdot dx=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik'x}e^{ikx}\cdot dx=2\pi|A|^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(k'-k)x}\cdot dx=2\pi|A|^2\delta(k'-k)$【注：δ函数是偶函数，因此$\delta(k-k')=\delta(k'-k)$】，令 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，通解变为$\psi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$，且$<\psi_{k'}|\psi_k>=\delta(k'-k)$。【而在数物中，$<e^{ik'x}|e^{ikx}>=2\pi\delta(k'-k)$。】

所以，为了保持傅里叶变换的形式不变，在量子力学中，$\phi(k)=<\psi_k|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<e^{ikx}|\psi>$要比数物中的$\frac{1}{2\pi}<e^{ikx}|f(x)>$少乘一个系数因子$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，这是因为不仅$<\psi_k|\psi>$左括号中的$\psi_k$中含有$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，右括号中的$\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<\phi(k)|e^{ikx}>$中也还有$\psi_k$以及$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，所以若将量子力学的傅里叶积分$\phi(k)=<\psi_k|\psi>$中$\psi_k$、$\psi$二者里面的$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$均提到前面来，则其实和数物里的复数形式的傅里叶变换公式分毫不差！【这里也还须说明一点，那就是 $f(x)$不像ψ，其 $f(x)=<F(w)|e^{iwx}>$中不含任何振幅因子，或者说$A=1$】

但是，这里的奇怪之处是，量子力学相对于数物，傅里叶积分变换没有改变，但傅里叶积分却似乎变成了数物/标准的$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；在之后我们对比信息光学和数物中的傅里叶

变换公式时，会发现傅里叶积分公式不能改变，但傅里叶变换公式允许千变万化。这二者明显矛盾了，取舍谁？修改谁？——其实如果你再认真点，就能知道其实量子与数物的傅里叶积分殊途同归，并不差那$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$= =。不过为了让你体验体验我的矛盾，让你付出小于我的代价，到那里我才会给你解释，藏在这其中的小小的玄机，虽然现在的你按理说已经能解释它了，只是你像当初的我一样，不够细心、逻辑有漏洞、视角太窄而已。

	求和转积分的权重系数	为了达到以下目的	于是	原函数/波包	傅里叶积分/叠加原理	像函数/子波权重	傅里叶变换
数物	$c=F(w)dw$	$<e^{iw'x}\vert e^{iwx}>=2\pi\delta(k'-k)$	$A=1$	$f(x)$	$<F^*(w)\vert e^{iwx}>$	$F(w)$	$\frac{1}{2\pi}<e^{iwx}\vert f(x)>$
量子力学	$c_k=\phi(k)dk$	$<\psi_{k'}\vert\psi_k>=\delta(k'-k)$	$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\psi(x)$	$<\phi(k)\vert\psi_k>$	$\phi(k)$	$<\psi_k\vert\psi>$
	$c_p=c(p)dp$	$<f_{p'}\vert f_p>=\delta(p'-p)$	$A_p=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$	$f(x)$	$<c(p)\vert f_p>$	$c(p)$	$<f_p\vert f>$
解释说明	频谱矩形小长条面积	狄拉克归一化	子波的振幅A_k	波包因含有子波，所以也含振幅A_k	子波/本征函数/确定态写在右矢中	频谱高度	子波/本征函数/确定态写在左矢中

其中认为子波权重$\phi(k)$,$c(p)$是实函数，像函数$F(w)$是复函数；有趣的是，在量子力学中，也有 Discrete/Continuous Spectra 等概念；看来数物、量子力学、信号分析学，均有交集存在、有相通之处。

三.探索以上非初等函数的性质

例 1.求矩形脉冲 $f(t)=rect(\frac{t}{a})$的复数形式的傅里叶变换：

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} rect(\frac{t}{a})\cdot e^{-iwt}\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1\cdot e^{-iwt}\cdot dt=\frac{1}{2\pi w}i\cdot e^{-iwt}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{2\pi w}i\cdot(e^{-iw\frac{a}{2}}-e^{iw\frac{a}{2}})=\frac{1}{2\pi w}i\cdot[-i2\sin(w\frac{a}{2})]=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(w\frac{a}{2})}{w}。$$

也可将其写为$\frac{1}{\pi}\frac{\sin(w\frac{a}{2})}{w}=\frac{\frac{a}{2}}{\pi}\frac{\sin(\pi\cdot w\frac{\frac{a}{2}}{\pi})}{\pi\cdot w\frac{\frac{a}{2}}{\pi}}=\frac{\frac{a}{2}}{\pi}sinc(w\frac{\frac{a}{2}}{\pi})$。——可见 $rect(\frac{t}{a})$的像函数为$\frac{\frac{a}{2}}{\pi}sinc(w\frac{\frac{a}{2}}{\pi})$，那么$\frac{1}{a}rect(\frac{t}{a})$的像函数即为$\frac{1}{2\pi}sinc(w\frac{a}{2\pi})=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\pi(w\frac{a}{2\pi})}{\pi(w\frac{a}{2\pi})}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{wa}{2}}{\frac{wa}{2}}$(我们在5.3.δ函数的傅里叶变换中也能得出这个结论)。若令 a=1，则$rect(t)=\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{w}{2\pi})$。

F(w)-w的图像，称作频谱。$\frac{\frac{a}{2}}{\pi}\mathrm{sinc}(w\frac{\frac{a}{2}}{\pi})$的频谱上，除了$\frac{\pi}{\frac{a}{2}}$、$\frac{2\pi}{\frac{a}{2}}$、$\frac{3\pi}{\frac{a}{2}}$…这些w刻度之外，F(w)几乎在每个w上都有分量。所以这就是 FM-76.5 之外的频率也有 FM-76.5 的声音，而 FM-76.5 也有其他频率的噪声的缘故所在。

例 2.求 $\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$的傅里叶变换.

法一：$\mathcal{F}[\frac{\sin\pi t}{\pi t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot e^{-iwt}\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\pi t}-e^{-i\pi t}}{2i\cdot\pi t}\cdot e^{-iwt}\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\pi-w)t}-e^{i(-\pi-w)t}}{t}\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}\cdot dt-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}e^{i(-\pi-w)t}\cdot dt]$，对于前一个积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}\cdot dt$，这就如同**类型三**中的$\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{imx}\cdot dx$，当然并不是因为$\frac{1}{t}$是奇函数我就将其类比于$G(x)$，这里说它像$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{imx}\cdot dx$也无妨：这其实并不是实变函数的定积分，而是直接从其中的中间过程插入开做，因此我们无需关心$\frac{1}{t}$的奇偶性(奇偶性是用来化$\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\cdot dx$为$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)e^{imx}\cdot dx$的)。

更准确地说，这是**类型四**，即被积函数 $f(x)=G(x)e^{imx}=\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}$，在实轴上有单极点 t=0 的情形。当$\pi-w>0$时，相当于$m>0$，根据约当引理，我们得选取逆时针&上半平面的回路$l$，那么此时该公式中的$C_\varepsilon$对应地为顺时针：$\int_{-R}^{\alpha-\varepsilon}f(x)dx+\int_{\alpha+\varepsilon}^{R}f(x)dx=\oint_l f(z)dz-\int_{C_\varepsilon}f(z)dz-0$，于是其中的$\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=-\pi i\mathrm{Resf}(\alpha)$，因而总的来说$=\oint_l f(z)dz+\pi i\mathrm{Resf}(\alpha)$。

当$\pi-w<0$时，相当于$m<0$，根据此时的约当引理，我们得选取顺时针&下半平面的回路l，那么此时该公式中的C_ε对应地为逆时针：于是其中的$\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=\pi i\mathrm{Resf}(\alpha)$，因而总的来说$=\oint_l f(z)dz-\pi i\mathrm{Resf}(\alpha)$。但其中的$\oint_l f(z)dz$此时虽然在本质上应为$-2\pi i$乘以$\{f(z)=F(z)e^{imz}$在下半平面的留数和$\}$，但之前说了，该结果与$2\pi i\cdot\{$上半平面留数和$\}$无异，因此$\oint_l f(z)dz$的计算方法，可以不因回路的选取的改变而改变。

于是当$\pi-w>0$时，前一个积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}\cdot dt$中的$C_\varepsilon$顺时针转，导致其积分结果为$\pi i\cdot\lim_{t\to0}t\cdot\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}=\pi i$(其中的$\oint_l f(z)dz=0$，因为$\frac{1}{t}e^{i(\pi-w)t}$在上半平面没有奇点)；而当$\pi-w<0$时，前一个积分中的$C_\varepsilon$逆时针转，积分值为$-\pi i$。

同样的道理：当$-\pi-w>0$时，后一个积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}e^{i(-\pi-w)t}\cdot dt$中的$C_\varepsilon$顺时针转，导致其积分结果为$\pi i$；而当$-\pi-w<0$时，后一个积分中的$C_\varepsilon$逆时针转，积分值为$-\pi i$。

综上，当$|w|<\pi$时，俩积分和为$[\pi i-(-\pi i)]=2\pi i$，使得$\mathcal{F}[\frac{\sin\pi t}{\pi t}]=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\cdot2\pi i=\frac{1}{2\pi}$。除此之外要么$[\pi i-\pi i]=0$、要么$[(-\pi i)-(-\pi i)]=0$，此时$\mathcal{F}[\frac{\sin\pi t}{\pi t}]=0$。因此$\mathcal{F}[\frac{\sin\pi t}{\pi t}]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}(\frac{w}{2\pi})$。同样我们也可得到$\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}]=\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{w}{2})$【可用相似定理解释】。

这个结果非常有趣：对比上一个例题的$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}(\frac{w}{2\pi})$，以及这一题的结果$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}(\frac{w}{2\pi})$，可见它俩是有多么和谐！！！互为像函数！。

法二：$\mathcal{F}[\frac{\sin\pi t}{\pi t}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot e^{-iwt}\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot[\cos(wt)-i\sin(wt)]\cdot dt$，其中，$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\sin(wt)\cdot dt$中被积函数是个奇函数，因此该积分值=0。于是只需考虑$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\cos(wt)\cdot dt=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi t\cdot\cos(wt)}{t}dt=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi+w)t+\sin(\pi-w)t}{2t}dt$，即有$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi+w)t+\sin(\pi-w)t}{t}dt$，利用数物 p51 中**例 9**.的推论：对于 m>0，$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$；对于 m<0，$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$，有：$\pi+w>0$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi+w)t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$；$\pi+w<0$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi+w)t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}$。

同样，$\pi-w>0$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi-w)t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$；$\pi-w<0$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi-w)t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}$。那么

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi+w)t-\sin(\pi-w)t}{t}dt=\frac{1}{2\pi^2}\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2},w>\pi\\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2},-\pi<w<\pi\\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2},w<-\pi\end{cases}=\frac{1}{2\pi^2}\begin{cases}\pi, & |w|<\pi\\ 0, & |w|>\pi\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & |w|<\pi\\ 0, & |w|>\pi\end{cases}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}(\frac{w}{2\pi})。$$

【**例 9**.计算$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$：[由于$\mathrm{sinc}(x)$的宽度为$\frac{\sin x}{x}$的$\frac{1}{\pi}$；而该式给出了$\mathrm{sinc}(x)$在全 x 区间的面积为 Area($\frac{\sin x}{x}$)=π的$\frac{1}{\pi}$倍，即证明了 Area($\mathrm{sinc}(x)$)=1。以及 Area($\mathrm{sinc}(\frac{x-x_0}{a})$)=a]

原积分函数，在补充定义后是没有奇点的；但若我们将该实函数，认为是$G(x)\sin mx$型的，则将得到$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x}\cdot dx$。$\frac{e^{imx}}{x}$除了在实轴上有单极点 x=0 外，满足**类型三**的条件。

然而这家伙在上半平面没有奇点，于是$\int_{-\infty}^{0-\varepsilon}\frac{e^{imx}}{x}dx+\int_{0+\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x}dx=\oint_l\frac{e^{imz}}{z}dz-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z}dz-0=\pi i\,\mathrm{Res}f(0)=\pi i e^{im0}=\pi i$。那么$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x}\cdot dx=\frac{\pi i}{2i}=\frac{\pi}{2}$。

推论：对于 m>0，$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{mx}d(mx)=\frac{\pi}{2}$；对于 m<0，$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=-\int_0^{\infty}\frac{\sin(-m)x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$】

例 3.Gauss($\frac{x-x_0}{a}$)的面积

高斯型积分：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，于是$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}dx=1$、$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(\frac{x-x_0}{a})^2}dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(\frac{x-x_0}{a})^2}d(\frac{x-x_0}{a})=a$，当然你也可以几何地看出，后者在 x 方向放大了 a 倍，因而面积变成了原来的 a 倍。

例 4.Gauss($\frac{x-x_0}{a}$)的傅里叶变换

先求$\mathcal{F}[\mathrm{Gauss}(x)]=\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}]=\frac{1}{2\pi}<e^{iwx}|e^{-\pi x^2}>=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}\cdot e^{-iwx}\cdot dx$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}\cdot e^{-iwx}\cdot dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi[x^2+\frac{iw}{\pi}x-\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2]-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}\cdot dx=$ $\frac{1}{2\pi}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left[\sqrt{\pi}x+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}\right]^2}\cdot dx=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}\int_l e^{-z^2}\cdot dz$，其中$l$沿着复平面上//实轴的直线 y=$\frac{w}{2\sqrt{\pi}}$，从负无穷远处，往正无穷远走，因此$dz\equiv\sqrt{\pi}dx$。

根据柯西定理，由于 f(z)=$e^{-\pi z^2}$在单连通区域 B 上解析，则$\int_l f(z)dz$的值只与l的起点和终点有关(与路径无关)。那么有$\mathcal{F}[\mathrm{Gauss}(x)]=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}\int_{x=-\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}}^{x=+\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}}e^{-z^2}\cdot dz=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\pi}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}$。而至于为什么$\int_{x=-\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}}^{x=+\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}}e^{-z^2}\cdot dz$与$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$的结果如出一辙($\sqrt{\pi}$)，或许是因为高斯函数的原函数 F(z)满足 F($+\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}$)=F($+\infty$)、F($-\infty+\frac{iw}{2\sqrt{\pi}}$)=F($-\infty$)，虽然高斯函数的原函数无法用初等函数表示= =。

根据延迟定理 $\mathcal{F}[f(x-x_0)]=e^{-iwx_0}F(w)$，可得到$\mathcal{F}[\mathrm{Gauss}(x-\frac{x_0}{a})]$ $=\frac{1}{2\pi}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2}e^{-iw\frac{x_0}{a}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)^2-iw\frac{x_0}{a}}$；再根据相似性定理 $\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$，得到$\mathcal{F}[\mathrm{Gauss}(\frac{x-x_0}{a})]=\frac{a}{2\pi}e^{-\pi\left(\frac{aw}{2\pi}\right)^2-iwx_0}$；该结果与先用相似性定理，再用延迟定理所得结果一致。

当然，还可以单独利用相似性定理 $\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$，得到$\mathcal{F}[e^{-ax^2}]=$ $\mathcal{F}[\mathrm{Gauss}(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}x)]=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}F(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}w)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi\sqrt{a}}e^{-\left(\frac{w}{2\sqrt{a}}\right)^2}$。

1.2 δ函数

一.δ函数的定义

1.积分表达式：
$$\begin{cases}\delta(x-x_0,y-y_0)=\begin{cases}0, & \text{其他}\\ \infty, & x=x_0\text{且 }y=y_0\end{cases};\\ \iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy=1\end{cases}$$

2.函数序列表达式：$\delta(x-x_0,y-y_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x-x_0,y-y_0)$，其中$f_n$也需满足积分表达式的两个条件。满足这两个条件的一维$f_n(x)$有：当$n\to\infty$时的$n\mathrm{rect}(nx)$、$n\mathrm{sinc}(nx)$、$\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$、$n\Lambda(nx)$、$n\mathrm{Gauss}(nx)=ne^{-\pi n^2x^2}$、$\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$、$\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$，它们都可作为$\delta(x)$；二维$f_n(x,y)$有：$\frac{n^2}{\pi}\mathrm{circ}(n\mathbf{r})$以及对应函数的两个一维$f_n$的乘积等。可以如下证明之：

a.$n\mathrm{rect}(nx)$相对于$\mathrm{rect}(x)$，左右压缩了 n 倍，上下放大了 n 倍，变得又瘦又高，且面积仍然不变=1。

b.$n\mathrm{sinc}(nx)$相对于$\mathrm{sinc}(x)$，左右压缩了 n 倍，上下放大了 n 倍，变得又瘦又高，且面积仍然不变=1。

c.法 1：可通过$\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}=\frac{n}{\pi}\frac{\sin nx}{nx}=\frac{n}{\pi}\mathrm{sinc}(n\frac{x}{\pi})$相对于$n\mathrm{sinc}(nx)$，左右放大了π倍，上下压缩了π倍，虽变得矮胖了一点点，但仍然又瘦又高(∵n→+∞)，且面积仍然不变=1；法 2：根据数物 p51 中**例 9**.的推论：对于 m>0，$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，则 Area$(\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x})=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1$。

d.$n\Lambda(nx)$相对于$\Lambda(x)$，左右压缩了 n 倍，上下放大了 n 倍，变得又瘦又高，且面积仍然不变=1。

e.$n\mathrm{Gauss}(nx)=ne^{-\pi n^2x^2}$相对于$\mathrm{Gauss}(x)=e^{-\pi x^2}$，左右压缩了 n 倍，上下放大了 n 倍，变得又瘦又高，且面积仍然不变=1。

f.$\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$相对于$ne^{-\pi n^2x^2}$，左右放大了π倍，上下压缩了π倍，虽变得矮胖了一点点，但仍然又瘦又高(∵n→+∞)，且面积仍然不变=1。

g.利用数物 p43 中的**例 3**.的结果：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$，而有$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(nx)^2}dx=\frac{\pi}{n}$，因此 Area$(\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2})=1$；所以$\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$相对于$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$，左右压缩了 n 倍，上下放大了 n 倍，变得又瘦又高，且面积仍然不变=1。

【**例 3**.可以用原函数 atanx 来做$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$；也可将被积函数解析延拓为$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}$，其两个单极点±i，但只有一个+i 在上半平面，于是 $\mathrm{Resf}(+i)=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}$；需要说明因$\frac{1}{1+x^2}$满足$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=0$ 而$\int_{C_\infty}f(z)\cdot dz=0$，因此 p.v.$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\oint_l f(z)dz-\int_{C_\infty}f(z)\cdot dz=\frac{2\pi i}{2i}=\pi$】

h.$\mathrm{circ}(\mathbf{r})$的体积是π，$\frac{1}{\pi}\mathrm{circ}(\mathbf{r})$的体积是 1，而$\frac{n^2}{\pi}\mathrm{circ}(n\mathbf{r})$相对于它，左右前后 or 底面半径 r 压缩了 n 倍，底面积压缩了n^2倍，上下放大了n^2倍，变得又瘦又高，且体积仍然不变=1。

3.分离变量式：

①.根据δ函数的定义，可看出$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)$，它是二维δ函数在直角坐标系下的特性；或者它直接就可用于定义部分二维的δ函数。

这很像 1.1.一.a.中四个二维非初等函数的共性的定义：这也是由两条⊥ x-o-y 面的 z 轴一侧无限高、宽度很窄的平板相交交出来的平行于 z 轴且指向 z 轴正半轴的细射

线区域，因此对于二维的δ函数，多用三维空间中的一维的箭头表示，其前面的系数作为箭头的长度；但要注意只要系数不是 0，箭头方向上箭头以外的空间中，仍然有函数值，且延伸到无穷远处。【一维的δ函数在二维平面中也是个箭头/射线，但在三维平面中，就是个半无限大的无限薄的平面了，是个箭头/射线平移为一个平面的箭头/射线集合】

比如$-66\cdot\delta(y-y_0,z-z_0)$对应的箭头起点为 y-o-z 面上的$(0,y_0,z_0)$，箭头方向为⊥ y-o-z 面指向 x 轴负半轴(即$-\mathbf{i}$)，箭头长度为66个单位。

②.根据此特性，再加上 1.2.一.2.以及 1.1.一.a.，还可将二维的δ函数表示为：

a.$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)=n\mathrm{rect}(nx)\cdot n\mathrm{rect}(ny)=n^2\mathrm{rect}(nx)\cdot\mathrm{rect}(ny)$ $=n^2\mathrm{rect}(nx,ny)$。

b.$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)=n\mathrm{sinc}(nx)\cdot n\mathrm{sinc}(ny)=n^2\mathrm{sinc}(nx,ny)$。

c.$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)=n\Lambda(nx)\cdot n\Lambda(ny)=n^2\Lambda(nx,ny)$。

d.$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)=n\mathrm{Gauss}(nx)\cdot n\mathrm{Gauss}(ny)==n^2\mathrm{Gauss}(nx,ny)$。

4.δ函数用于描述具有$\begin{cases} f(x-x_0,y-y_0)=\begin{cases}0,\ \text{其他}\\ \infty,\ x=x_0\text{且}\ y=y_0\end{cases} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0,y-y_0)dxdy=\mathrm{Const.}\end{cases}$性质的物理量，归一化后的物理量f就是δ函数。

二.δ函数的性质

数物老师说，每一个性质都可以作为δ函数的定义；似乎看上去确√。

1.乘法性 (与筛选性区分)

$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0)$；$f(x,y)$需在$(x_0,y_0)$处连续。

特例：$\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_0$时，$\delta(x-x_1,y-y_1)\delta(x-x_0,y-y_0)=0$：这意味着两个“箭头”必须重合，才能不总为 0；但事实上即使满足$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_0$了，$\delta(x-x_0,y-y_0)\delta(x-x_0,y-y_0)=0$ 也将变得没有意义了，因为 how could you define ∞×∞?

2.筛选性 (利用到了乘法性)

$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy=$ $f(x_0,y_0)\iint_{\mathbf{r}_0^-}^{\mathbf{r}_0^+}\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy=f(x_0,y_0)$；$f(x,y)$需在$(x_0,y_0)$处连续。

3.可分离变量

直角坐标系：$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0)$

极坐标系：$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\cdot\delta(\theta-\theta_0)$，其中的系数$\frac{1}{r}$是为了$\int_0^{\infty} rdr\int_0^{2\pi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)d\theta=1$。($r,r_0\geq0$)

4. “瘦-高转换”(坐标缩放)

正如$\frac{n}{\pi}\mathrm{sinc}(n\frac{x}{\pi})$相对于$n\mathrm{sinc}(nx)$，或者$\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$相对于$ne^{-\pi n^2x^2}$，虽变得矮胖了一点点，但仍然属于δ函数一样：对δ函数乘以一个有限大的因子，并不会改变δ函数的“无限高”特性：原来的无限高不会变得“更无限高”，也不会降低到有限高；同样的道理，对δ函数的自变量除以(乘以)一个有限大的因子，也不会改变其“无限窄”的特性：原来的无限窄不会变宽到有限宽，也不会变得“更无限窄”。

也就是说，对宽度或对高度的任何操作，所得到的新函数，仍然保留/拥有作为δ函数的第一个条件；但该单独的操作可能破坏了构成δ函数的第二个条件：归一化。也就是说新函数可能因不满足归一化而无法成为一个新δ函数。

所以，要想一个δ函数在被操作后成为一个新δ函数，则任何对高度的操作都必须同时引入对宽度进行等价的处理，以使得所构造的新函数因满足归一化，而是个δ函数。比如——$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)=|ab|\delta(ax)\cdot\delta(by)=|ab|\delta(ax,by)$，于是$\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y)$。

δ函数是广义的函数、能够被表示为多种具体的序列形式的原因，就在这里。

5.积分形式

①.根据常数 1 的傅里叶变换：$\mathcal{F}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot dx=\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-i\omega x}-e^{i\omega x}}{-i\omega}=\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{-2i\sin(\omega x)}{-i\omega}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\pi}\frac{\sin(\omega x)}{\omega x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega\frac{x}{\pi})=\lim_{x\to\infty}x\mathrm{sinc}(\omega x)=\delta(\omega)$，于是$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot dx$，即$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot d\omega$。

同理，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\cdot dx=\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{i\omega}=\delta(\omega)$，这也可看做δ(x)的傅里叶积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x}d\omega=\delta(x)$的 x-ω轮换后的结果；因此$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm i\omega x}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}[A\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\cdot d\omega+(1-A)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot d\omega]$。

②.而根据欧拉公式，有$\cos(\omega x)=\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}$，因此当 A=$\frac{1}{2}$时，$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\cdot d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot d\omega]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot d\omega$。同样也可轮换得到$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot dx$。

而根据另一欧拉公式，还能得到$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\cdot d\omega=\frac{\delta(x)-\delta(x)}{2i}=0\cdot(-\frac{1}{2}i)=0$。因此$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\cdot d\omega=0$、$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\cdot dx=0$，而$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot d\omega$却$=2\pi\delta(x)$、$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot dx=2\pi\delta(\omega)$。

③.物理情景解释：

$\delta(x)$可由所有频率ω且振幅均为$\frac{1}{2\pi}$的$\cos(\omega x)$叠加而成，而振幅$\frac{1}{2\pi}$也可由$\mathcal{F}[\delta(x)]=C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\cdot e^{-i\omega\xi}\cdot d\xi=\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega 0}=\frac{1}{2\pi}$得到。

a.这在物理上可以解释为任何频率ω的$\cos(\omega x)$在 x=0 处的相位ωx都=0，则它们在此 x 处的$\cos(\omega x)$都=1，无数个正弦波在该处的值的叠加则=∞·1=∞；而在其他 x 处，各种相位ωx的$\cos(\omega x)$都有，因此所有正弦波在其他 x 处的振动之和=0。

同理，由于任何频率ω的$\sin(\omega x)$在 x=0 处都=0，无数频率的正弦波在该处的叠加=0；其他 x 处$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\cdot d\omega=0$ 的理由与上一段末$\cos(\omega x)$的情况一致。

(1).事实上，更广义地，对于$\sin(\omega x+\varphi)$，当$\varphi\neq k\pi$时，均有$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x+\varphi)\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\sin(\omega x)\cos\varphi+\cos(\omega x)\sin\varphi]\cdot d\omega=\sin\varphi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot d\omega=\sin\varphi\delta(x)$不恒等于 0，即只要正弦波在 x=0 处的振动不是 0 就行。

(2).另一个广义的方向，是根据延迟定理 $\mathcal{F}[f(x-x_0)]=e^{-i\omega x_0}F(\omega)$，有$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)]=e^{-i\omega x_0}\frac{1}{2\pi}$，于是$\delta(x-x_0)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\omega(x-x_0)}d\omega$；同理根据位移定理 $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}f(x)]=F(\omega-\omega_0)$，有$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}\cdot 1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega x}\cdot dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx=\delta(\omega-\omega_0)$，于是 x-ω轮换后即有$\delta(x-x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-i(x-x_0)\omega}d\omega$。——这就证明了$\delta(x-x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{\pm i\omega(x-x_0)}d\omega$。

进而有$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}[A\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-x_0)}\cdot d\omega+(1-A)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(x-x_0)}\cdot d\omega]$、$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[\omega(x-x_0)]\cdot d\omega$、$\int_{-\infty}^{\infty}\sin[\omega(x-x_0)]\cdot d\omega=0$。

(3).综合这两个延拓方向，便有$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[\omega(x-x_0)+\varphi]\cdot d\omega=\sin\varphi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[\omega(x-x_0)]\cdot d\omega=\sin\varphi\delta(x-x_0)$。

b.而对于$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x)\cdot dx=0$、$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega x)\cdot dx=2\pi\delta(\omega)$的解释，也类似：当$\omega=0$时，无论在何处$(x)$，$\cos(\omega x)=1$(有值)，$\sin(\omega x)=0$，因而二者在全(实)空间上的积分，一个等于∞，一个等于 0；而当$\omega\neq0$ 时，二者在-∞~+∞上的积分均=0。

同理，也有$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega x+\varphi)\cdot dx=\sin\varphi\delta(\omega)$、$\delta(\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{\pm i(\omega-\omega_0)x}dx$。以及$\delta(\omega-\omega_0)=\frac{1}{2\pi}[B\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_0)x}\cdot dx+(1-B)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)x}\cdot dx]$、$\delta(\omega-\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[(\omega-\omega_0)x]\cdot dx$、$\int_{-\infty}^{\infty}\sin[(\omega-\omega_0)x]\cdot dx=0$。

以及$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[(\omega-\omega_0)\mathrm{x}+\varphi]\cdot \mathrm{dx}=\sin\varphi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[(\omega-\omega_0)\mathrm{x}]\cdot \mathrm{dx}=\sin\varphi\delta(\omega-\omega_0)$。

5.导函数的性质

①.记$\delta(\mathrm{x})$的一阶导$\frac{d\delta(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}$为$\delta^{(1)}(\mathrm{x})$，则由于$\delta(\mathrm{x}\neq 0)=0=\mathrm{const.}$，可得$\delta^{(1)}(\mathrm{x}\neq 0)=0$，而由于左右导不同$\delta_-^{(1)}(0)\neq\delta_+^{(1)}(0)$，所以$\delta^{(1)}(0)$不存在，即$\delta^{(1)}(\mathrm{x})$在 x=0 处没有定义；而由于δ函数的偶函数性质，$\delta(\mathrm{x})=\delta(-\mathrm{x})$，两边对 x 求微分，得$\delta^{(1)}(\mathrm{x})=-\delta^{(1)}(-\mathrm{x})$，因而$\delta^{(1)}(\mathrm{x})$是奇函数。当然你也可以举具体的序列表达式验证之。

综上，$\delta^{(1)}(\mathrm{x})$的积分表达式：$\begin{cases}\delta^{(1)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)=\begin{cases}0,\ \text{其他}\\ \text{无定义},\ x=\mathrm{x}_0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(1)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\mathrm{dx}=0\end{cases}$。而根据第 6 点的认识，也有另一个表达式：$\delta^{(1)}(\mathrm{x})=-\frac{\delta(\mathrm{x})}{\mathrm{x}}$，这也进一步说明了$\delta^{(1)}(0)=\frac{\infty}{0}$无意义。

②.设 f(x)有界且在 x=0 处前 m 阶导存在，则
$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(1)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}_\mathrm{n}^{(1)}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})=\lim_{n\to\infty}\{f(x)\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})df(x)\}=f(x)\delta(\mathrm{x})|_{-\infty}^{\infty}-\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})f^{(1)}(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})f^{(1)}(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}f^{(1)}(x)\delta(\mathrm{x})dx$，而再根据$\delta(\mathrm{x})$的筛选性，有$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(1)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=-f^{(1)}(0)$。

同理，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(2)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\mathrm{f}_\mathrm{n}^{(1)}(\mathrm{x})=-\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}_\mathrm{n}^{(1)}(\mathrm{x})f^{(1)}(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}f^{(1)}(x)\delta^{(1)}(\mathrm{x})dx=(-1)^2\int_{-\infty}^{\infty}f^{(2)}(x)\delta(\mathrm{x})dx$，再根据$\delta(\mathrm{x})$的筛选性，有$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(2)}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=(-1)^2f^{(2)}(0)$。

于是，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=(-1)^\mathrm{m}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(m)}(x)\delta(\mathrm{x})dx=(-1)^\mathrm{m}f^{(m)}(0)$。

③.令上一段中$f(x)=1$，则得$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=(-1)^\mathrm{m}\cdot 0=0$。

于是，$\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})$的积分表达式：$\begin{cases}\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)=\begin{cases}0,\ \text{其他}\\ \text{无定义},\ x=\mathrm{x}_0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\mathrm{dx}=0\end{cases}$。而根据第 6 点的认识，也有另一个表达式：$\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})=\frac{(-1)^\mathrm{m}m!}{x^m}\delta(\mathrm{x})$，这也进一步说明了$\delta^{(\mathrm{m})}(0)=\frac{\infty}{0^m}$无意义。

6.微分形式

由于$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(\mathrm{x})dx=f(0)=\frac{1}{m!}(x^mf(x))^{(m)}|_{x=0}=\frac{(-1)^\mathrm{m}}{m!}(-1)^\mathrm{m}F^{(m)}(0)=\frac{(-1)^\mathrm{m}}{m!}(-1)^\mathrm{m}\int_{-\infty}^{\infty}F^{(m)}(x)\delta(\mathrm{x})dx=\frac{(-1)^\mathrm{m}}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{(-1)^\mathrm{m}}{m!}x^m\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$，对比头尾两被积函数，有$\delta(\mathrm{x})=\frac{(-1)^\mathrm{m}}{m!}x^m\delta^{(\mathrm{m})}(\mathrm{x})$。

特别地，有$\delta(x)=-x\delta^{(1)}(x)$。

三.梳状函数

一维：$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$，n∈Z；

更广义的一维：$\mathrm{comb}(\frac{x}{x_0})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{x}{x_0}-n)=x_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0)$【其实我很想用$\mathrm{comb}_n(\frac{x}{x_0})=x_0\cdot\mathrm{comb}_{nx_0}(x)$来表示这层关系，其中$\mathrm{comb}_n(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$】

二维：$\mathrm{comb}(x,y)=\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-n)=\sum_{m,n}\delta(x-m)\delta(y-n)=\sum_{m,n}\delta(x-m,y-n)$，m,n∈Z；

更广义的二维：$\mathrm{comb}(\frac{x}{x_0},\frac{y}{y_0})=\mathrm{comb}(\frac{x}{x_0})\mathrm{comb}(\frac{y}{y_0})=x_0y_0\sum_{m,n}\delta(x-mx_0,y-ny_0)$【我也想用$\mathrm{comb}_{m,n}(\frac{x}{x_0},\frac{y}{y_0})=x_0y_0\cdot\mathrm{comb}_{mx_0}(x)\mathrm{comb}_{ny_0}(x)=x_0y_0\cdot\mathrm{comb}_{mx_0,my_0}(x,y)$来表示这层关系，其中$\mathrm{comb}_{m,n}(x,y)=\sum_{m,n}\delta(x-m,y-n)$】

一维 comb 函数相当于一排行道树式的箭头，占满了 x 轴上所有整数刻度；二维 comb 函数是一列列半无限大平面与另外一排排的同类相交而成的占满网格格点的箭头阵列。

而$\mathrm{comb}(x,y)=\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)$也相当于$\delta(x,y)=\delta(x)\cdot\delta(y)$这样先认为一个$\delta(x)$对另一个$\delta(y)$采样，再用它们的乘积$\delta(x,y)$或$\mathrm{comb}(x,y)$去对 f(x,y)采样。

利用δ函数的乘法性，可证明 comb 函数也具有类似的“乘法性”：$\mathrm{comb}_n(x)\cdot f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)\cdot f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(x-n)$。

1.3 卷积与相关

一.卷积的定义

一维：$f(x)*h(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi$，称为$f(x)$与$h(x)$的卷积，其中$f(x)$,$h(x)$为复函数，卷积结果仍然是一个关于新 x 的复函数$g(x)$。【$fgh$像$xyz$一样挨一起，$g$夹在$f$和$h$的中间，所以用$f$和$h$的卷积表示$g$】

之后我们还会用到像傅里叶变换和积分式的卷积形式，毕竟它俩的积分上下限一样：$f(x)*h(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi=<f^*(\xi)|h(x-\xi)>=<h^*(x-\xi)|f^*(\xi)>$。但由

于现在还未遇到傅里叶变换等形式，我不用这样的形式推导卷积和互相关的各性质。——根据交换律，还将有$f(x)*h(x)=<h^*(\xi)|f(x-\xi)>=<f^*(x-\xi)|h(\xi)>$。一共四种表示形式。其中第一种是定义。

注意：之所以要将$f(x)*h(x)$额外地写成一个关于x的函数，除了简便之外，是因为$f(x)*h(x)$虽然看上去其自变量是x，但是其实不然，其中的 x 是卷积之前的 x，不论其具体值是多少，在卷积后全都被替换为了积分变量ξ，没有提供任何关于卷积之后的，新 x 这一参数的值余地和信息。比如如果你写$f(4)*h(4)$，我该认为是$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi$呢，还是$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot h(4-\xi)d\xi$呢？其实前者只能用$f(x)*h(x)$表示，而后者硬要用该形式表示的话，形式上应该为$f(x)*h(x)|_{x=4}$；但这形式觉得有点繁琐，因此开发成了用$g(x)$来表示。同样的道理，之后的互相关、自相关，都需要这样的一个关于“互相关操作之后的新 x”的函数。在各定义处和自相关性质之后时，就用颜色来区分新旧x吧。

标准的 5 个操作步骤：后者 $h(x)\xrightarrow{\text{代换 } x\to\xi} h(\xi)\xrightarrow{(\text{关于 }\xi=0)\text{翻转 } h(\xi)\to h(-\xi)} h(-\xi)$
$\xrightarrow{(\text{向右}\to)\text{平移 } h(-\xi)\to h[-(\xi-x)]=h[x-\xi]} h(x-\xi)\xrightarrow{\text{相乘}} f(\xi)\cdot h(x-\xi)\xrightarrow{\text{积分}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi$。

【其中第 2、3 步可以互换位置，不过内容需要进行相应的更改：$h(\xi)\xrightarrow{(\text{向右}\to)\text{平移 } h(\xi)\to h(\xi-x)} h(\xi-x)\xrightarrow{(\text{关于 }\xi=x)\text{翻转 } h(\xi-x)\to h(x-\xi)} h(x-\xi)$，我们一般用前者，因为先翻转后平移，只需要考虑一次翻转，之后只需考虑平移就行；而先平移后翻转，每次都要考虑平移和翻转】

几何意义：若$f(x),h(x)$为实函数，则要想$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi$的结果不是 0，则必要条件是需要选择合适的 x 的值，使得$h(-\xi)$在往右平移了 x 个单位后，其函数值$h(x-\xi)$不为 0 的区间，与$f(\xi)$不为 0 的对应 x 区间，有交集。——因此，对于任意一个 x，对应的$g(x)$值=将$h(-\xi)$往右平移 x 个单位后，所得函数图像$h(x-\xi)$与$f(\xi)$的双双非零区间的交集区间内(左右端点分别作为积分下上限)，两个函数乘积的积分。

二维：$f(x,y)*h(x,y):=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\cdot h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta$，卷积结果表为$g(x,y)$。也可写为$<f^*(\xi,\eta)|h(x-\xi,y-\eta)>$。

二.卷积的性质

1.线性性

①.$[af_1(x,y)+bf_2(x,y)]*h(x,y)=af_1(x,y)*h(x,y)+bf_2(x,y)*h(x,y)$，这容易理解，因为积分运算和四则运算都属于线性运算，所以卷积运算也是线性运算。

②.复函数的卷积：设$f=f_R+\mathrm{i}f_I$、$h=h_R+\mathrm{i}h_I$，由卷积的线性性可得$g=f*h=(f_R+\mathrm{i}f_I)*(h_R+\mathrm{i}h_I)=(f_R*h_R-f_I*h_I)+\mathrm{i}(f_R*h_R+f_I*h_I)=(f_R,f_I)\otimes(h_I,h_R)+\mathrm{i}(f_R,f_I)\odot(h_R,h_I)=g_R+\mathrm{i}g_I$，因此$g_R=(f_R,f_I)\otimes(h_I,h_R)$、$g_I=(f_R,f_I)\odot(h_R,h_I)$。

③.可分离变量：若$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$、$h(x,y)=h_x(x)h_y(y)$，则$g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\cdot h(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\iint_{-\infty}^{\infty}f_x(\xi)f_y(\eta)\cdot h_x(x-\xi)h_y(y-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(\xi)\cdot h_x(x-\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_y(\eta)\cdot h_y(y-\eta)\mathrm{d}\eta=g_x(x)g_y(y)$。

2.交换律

$f(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(x-\xi)\mathrm{d}\xi=-\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(x-\xi)\mathrm{d}(x-\xi)=-\int_{\infty}^{-\infty}f(x-X)\cdot h(X)\mathrm{d}X=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\cdot h(\xi)\mathrm{d}\xi=h(x)*f(x)$，有了此定律之后，才能说“5 个操作步骤”的操作对象无论前一个 or 后一个函数，对应的操作结果都是等价的了。

3.结合律

$[f(x)*h(x)]*l(x)=f(x)*[h(x)*l(x)]$、

$[f(x,y)*h(x,y)]*l(x,y)=f(x,y)*[h(x,y)*l(x,y)]$

4.平移不变性

$f(x-x_1)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi-x_1)\cdot h(x-\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi-x_1)\cdot h[(x-x_1)-(\xi-x_1)]\mathrm{d}(\xi-x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h[(x-x_1)-\xi]\mathrm{d}\xi=f(x)*h(x-x_1)=g(x-x_1)$。

例如：$f(x-2x_1)*h(x)=f(x-x_1)*h(x-x_1)=f(x)*h(x-2x_1)=g(x-2x_1)$。

同理二维：$f(x-x_1,y-y_1)*h(x)=f(x,y)*h(x-x_1,y-y_1)=g(x-x_1,y-y_1)$。

5.缩放性

若 a>0：$f\left(\frac{x}{a}\right)*h(\frac{x}{a})=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\cdot h(\frac{x-\xi}{a})\mathrm{d}\xi=a\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\cdot h(\frac{x}{a}-\frac{\xi}{a})\mathrm{d}\frac{\xi}{a}=a\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(\frac{x}{a}-\xi)\mathrm{d}\xi=ag(\frac{x}{a})$；若 a<0，$f\left(\frac{x}{a}\right)*h(\frac{x}{a})=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\cdot h(\frac{x}{a}-\frac{\xi}{a})\mathrm{d}\xi=a\int_{\infty}^{-\infty}f\left(\frac{\xi}{a}\right)\cdot h(\frac{x}{a}-\frac{\xi}{a})\mathrm{d}\frac{\xi}{a}$ $=-a\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(\frac{x}{a}-\xi)\mathrm{d}\xi=-ag(\frac{x}{a})$。

综上，$f\left(\frac{x}{a}\right)*h(\frac{x}{a})=|a|g(\frac{x}{a})$。它也可写为 1.2.二.4. “瘦-高转换”的形式：$\frac{1}{|a|}f\left(\frac{x}{a}\right)*h(\frac{x}{a})=g(\frac{x}{a})$，即$|a|f(ax)*h(ax)=g(ax)$。

同理二维：$f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)*h(\frac{x}{a},\frac{y}{b})=|ab|g(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$，或写为$|ab|f(ax,by)*h(ax,by)=g(ax,by)$。——要注意它与 1.2.二.4. “瘦-高转换”的区别：那里$|ab|\delta(ax,by)=\delta(x,y)$右边是$\delta(x,y)$，而这里的右边是$g(ax,by)$；而且它与平移不变性也有区别，平移不变性只需要一个函数加减，而这需要两个函数都乘除。

6.(与)δ函数的卷积

$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\delta(x-\xi)d\xi=f(x)$，更一般地，$f(x-x_0)*\delta(x)=f(x)*\delta(x-x_0)=f(x-x_0)$。事实上，在顺序上最好写作$f(x)*\delta(x-x_0)=f(x-x_0)*\delta(x)=f(x-x_0)$，这样更好理解：任何一个函数与$\delta(x)$的卷积等于它自身。

同理二维：$f(x-x_0,y-y_0)*\delta(x,y)=f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$。

7.卷积效应

①.展宽效应：卷积结果$g(x)$的取值非零的区间范围≤被卷积的两函数$f(x)$,$h(x)$分别的非零值所对应的区间范围之和。【取“<”的特殊情况：某个函数$h(x)$的非零区间若由两段“相隔距离<$f(x)$的非零区间宽度”的区间的并集构成】

②.平滑化效应：$f(x)$,$h(x)$两个函数的卷积，相对于其中任意一个函数而言，是其所参与的积分，而积分之于被积函数，即原函数与函数的关系，是函数与导函数的关系，而当导函数陡时，函数不一定很陡。

例 1：求$g(x)=\mathrm{rect}\left(\frac{x+1}{2}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$h(x)\to\mathrm{rect}\left(\frac{\xi-1}{2}\right)\to\mathrm{rect}\left(\frac{-\xi-1}{2}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\to\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1-x}{2}\right)\to\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1-x}{2}\right)d\xi$，于是$g(x)=\begin{cases}0, x<-2\\ \int_{-2}^{x}d\xi=x+2, -2\le x<0\\ \int_{x}^{2}d\xi=2-x, 0\le x<2\\ 0, x>2\end{cases}=2\Lambda(\frac{x}{2})$。

三.互相关的定义

一维：$f(x)\star g(x):=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)\cdot g(x+\xi)d\xi(=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(X-x)\cdot g(X)dX)=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi-x)\cdot g(\xi)d\xi$，称为$f(x)$与$g(x)$的互相关，其中$f(x)$,$g(x)$为复函数，互相关结果仍然是一个关于新 x 的复函数$R_{fg}(x)$。【这定义与卷积的交换律有点像，但它不是互相关的交换律】【由于专门用了R，所以就不用g来表示f和h的互相关了，而是用R_{fg}表示f和g的互相关】

利用互相关的卷积表达式，还可导出像傅里叶变换和积分式的互相关形式：$f(x)\star g(x)=f^*(-x)*g(x)=\langle f(-\xi)|g(x-\xi)\rangle=\langle g^*(x-\xi)|f^*(-\xi)\rangle$。——根据卷积的交换律，还将有$f(x)\star g(x)=g(x)*f^*(-x)=\langle g^*(\xi)|f^*(\xi-x)\rangle=\langle f(\xi-x)|g(\xi)\rangle$。

——且还将有$f(\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$=<$f(\xi)|g(\mathrm{x}+\xi)$>=<$g^*(\mathrm{x}+\xi)|f^*(\xi)$>。一共六种表达方式。其中，第 5、4 分别是定义，第 1,4,5 种是常用的。

标准的 5 个操作步骤：后者$g(\mathrm{x})\xrightarrow{\text{代换 x→ξ}}g(\xi)\xrightarrow{(\text{向左←})\text{平移}g(\xi)\to g(\xi+\mathrm{x})}$

$g(\mathrm{x}+\xi)\xrightarrow{\text{相乘}}f^*(\xi)\cdot g(\mathrm{x}+\xi)\xrightarrow{\text{积分}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi)\cdot g(\mathrm{x}+\xi)\mathrm{d}\xi$。【也可以整体更改为：$f^*(\xi)\xrightarrow{(\text{向右→})\text{平移}f^*(\xi)\to f^*(\xi-\mathrm{x})}f^*(\xi-\mathrm{x})\xrightarrow{\text{相乘}}f^*(\xi-\mathrm{x})\cdot g(\xi)\xrightarrow{\text{积分}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi-\mathrm{x})\cdot g(\xi)\mathrm{d}\xi$，一般我们用后一个流程，因为我们习惯于向右平移。但要说长得像，还是前者长得像】

二维：$f(\mathrm{x,y})\star h(\mathrm{x,y}):=\iint_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi,\eta)\cdot g(\mathrm{x}+\xi,\mathrm{y}+\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$=$\iint_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi-\mathrm{x},\eta-\mathrm{y})\cdot g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$。

四.互相关的性质

1.互相关的卷积表达式：$\mathrm{R}_{fg}(\mathrm{x})$=$f(\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$=$\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi-\mathrm{x})\cdot g(\xi)\mathrm{d}\xi$=$\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\cdot\{f(\xi-\mathrm{x})\}^*\mathrm{d}\xi$=$g(\mathrm{x})*f^*(-\mathrm{x})$=$f^*(-\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$；该过程也可“倒着”推：$f(\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$=$g(\mathrm{x})*f(\mathrm{x})$=$\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\cdot f(\mathrm{x}-\xi)\mathrm{d}\xi$=$\int_{-\infty}^{\infty}\{f^*[-(\xi-\mathrm{x})]\}^*\cdot g(\xi)\mathrm{d}\xi$=$f^*(-\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$。

2.若$f(\mathrm{x})$为实的偶函数：则$f(\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$=$f^*(-\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$=$f(\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$，即此时$f(\mathrm{x})$与$g(\mathrm{x})$的互相关=它俩的卷积。

若$g(\mathrm{x})$同时也是实的偶函数，则$g(\mathrm{x})\star f(\mathrm{x})$=$g(\mathrm{x})*f(\mathrm{x})$=$f(\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$，且此时便有互相关交换律$f(\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$=$g(\mathrm{x})\star f(\mathrm{x})$，除此之外一般情况下是没有的。

3.不过有个类似交换律的等式：$\mathrm{R}_{fg}(\mathrm{x})$=$f(\mathrm{x})\star g(\mathrm{x})$=$f^*(-\mathrm{x})*g(\mathrm{x})$=$g(\mathrm{x})*f^*(-\mathrm{x})$=$g^*(-\mathrm{x})\star f^*(-\mathrm{x})$=$\mathrm{R}_{gf}^*(-\mathrm{x})$，其中第 1 个等式从左到右的理由，与第 3 个等式从右到左的理由相同。

例 2：求$\mathrm{R}_{fg}(\mathrm{x})=\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{x}+1}{2}\right)\star\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{x}-1}{2}\right)$

$f(\mathrm{x})\to\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\to\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1-\mathrm{x}}{2}\right)\to\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\xi+1-\mathrm{x}}{2}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\xi-1}{2}\right)\mathrm{d}\xi$，于是

$$\mathrm{R}_{fg}(\mathrm{x})=\begin{cases}0,x<0\\ \int_0^x\mathrm{d}\xi=x,0\le x<2\\ \int_{x-2}^{2}\mathrm{d}\xi=4-x,2\le x<4\\ 0,x>4\end{cases}=2\Lambda(\frac{x-2}{2})。$$

五.自相关的定义

一维：$f(x)\star f(x):=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)\cdot f(x+\xi)d\xi$=$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(X-x)\cdot f(X)dX$=$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi-x)\cdot f(\xi)d\xi$，称为$f(x)$的自相关，记作$R_{ff}(x)$。其中的 x 为新 x，与$f(x)\star f(x)$中的 x 不同，专门指代被积表达式中的$x$。

二维：$f(x,y)\star f(x,y):=\iint_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi,\eta)\cdot f(x+\xi,y+\eta)d\xi d\eta$=$\iint_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi-x,\eta-y)\cdot f(\xi,\eta)d\xi d\eta$。

六.自相关的性质

1.厄米对称性：根据互相关的类交换律$R_{fg}(x)$=$R_{gf}^*(-x)$，有$R_{ff}(x)$=$R_{ff}^*(-x)$。

2.$|R_{ff}(x)|\le R_{ff}(0)$、$|R_{ff}(x,y)|\le R_{ff}(0,0)$。于是我们便可以将$R_{ff}(x)$归一化：$\gamma(x)$=$\frac{R_{ff}(x)}{R_{ff}(0)}$，$|\gamma(x)|\in[0,1]$。

证：根据 Schwarz inequality：同一积分区间上，$|<f|g>|\le\sqrt{<f|f><g|g>}$，其中积分变量为 dx。则$|R_{ff}(x)|$=$|f(x)\star f(x)|$=$|<f(\xi)|f(x+\xi)>|\le$ $\sqrt{<f(\xi)|f(\xi)><f(x+\xi)|f(x+\xi)>}$=$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2d\xi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\xi)|^2d\xi}$= $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2d\xi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\xi)|^2d(x+\xi)}$=$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2d\xi$=$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)f(0+\xi)d\xi$=$R_{ff}(0)$，其中积分变量为$d\xi$。

3.既然有第二点性质的证明过程，那么同样根据 Schwarz inequality，可得到互相关与自相关的关系：由于$|R_{fg}(x)|$=$|\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi)\cdot g(x+\xi)d\xi|$ =$|<f(\xi)|g(x+\xi)>|\le$ $\sqrt{<f(\xi)|f(\xi)><g(x+\xi)|g(x+\xi)>}$=$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2d\xi\int_{-\infty}^{\infty}|g(x+\xi)|^2d(x+\xi)}$= $\sqrt{R_{ff}(0)\int_{-\infty}^{\infty} g^*(\xi)g(0+\xi)d\xi}$=$\sqrt{R_{ff}(0)R_{gg}(0)}$，得到$|R_{fg}(x)|\le\sqrt{R_{ff}(0)R_{gg}(0)}$。

因此还可设$\gamma_{fg}(x)$=$\frac{R_{fg}(x)}{\sqrt{R_{ff}(0)R_{gg}(0)}}$，且有$|\gamma_{fg}(x)|\in[0,1]$。

七.有限功率函数的相关

1.三. 五.中的互相关定义要求 f(x)、g(x)是有限能量函数，即它们的模的平方 $|f(\mathrm{x})|^2$、$|g(\mathrm{x})|^2$绝对可积(即其绝对值$|f(\mathrm{x})|^2$、$|g(\mathrm{x})|^2$可积)：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mathrm{x})|^2\mathrm{dx}=C_1$、$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\mathrm{x})|^2\mathrm{dx}=C_2$。

对于周期函数、平稳随机函数，并不满足这一条件。但满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1}{2x}|f(\mathrm{x})|^2\mathrm{dx}=C_1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1}{2x}|g(\mathrm{x})|^2\mathrm{dx}=C_2$，它们在物理意义上意味着能流的平均功率为有限值，称为有限功率函数。

不过周期函数中，三角函数其实是满足这一条件的？：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[(\omega-\omega_0)\mathrm{x}+\varphi]\cdot\mathrm{dx}=\sin\varphi\delta(\omega-\omega_0)$，不不不，这里说的是平方可积！三角函数只是可积，但其平方，是一系列朝上的小山包，是不可积的。所以三角函数就属于这么个东西。——由于$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\pi$，$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}})^2\mathrm{dx}$也应是个有限值。

2.这样的两个函数的互相关，书上用$<f^*(\xi-\mathrm{x})g(\xi)>=\lim\limits_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}\frac{1}{2\xi}f^*(\xi-\mathrm{x})\cdot g(\xi)\mathrm{d}\xi$ 表示，说<>表示“平均”。这概念明显是偷取《量子力学》里的狄拉克 bracket 吧，还不如写为$<f(\xi-\mathrm{x})|g(\xi)>$，或者更严谨地说，应该是$\lim\limits_{\xi\to\infty}<\frac{1}{2\xi}f(\xi-\mathrm{x})|g(\xi)>$或者$\lim\limits_{\xi\to\infty}<f(\xi-\mathrm{x})|\frac{1}{2\xi}g(\xi)>$。而老师的 ppt 仍沿用$\mathrm{R}_{fg}(\mathrm{x})$的形式。

自相关的也差不多，$\mathrm{R}_{ff}(\mathrm{x})=\lim\limits_{\xi\to\infty}<\frac{1}{2\xi}f(\xi-\mathrm{x})|f(\xi)>=\lim\limits_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi}\frac{1}{2\xi}f^*(\xi-\mathrm{x})\cdot f(\xi)\mathrm{d}\xi$。

二者分别写成$\lim\limits_{\xi\to\infty}<\frac{1}{2\xi}f(\xi)|g(\mathrm{x}+\xi)>$、$\lim\limits_{\xi\to\infty}<\frac{1}{2\xi}f(\xi)|f(\mathrm{x}+\xi)>$也应无妨。

1.4 傅里叶变换

一.信息光学中的傅里叶变换

1.一维：

①.数物中的傅里叶变换，形式为$\mathrm{F}(\omega)=\frac{1}{2\pi}<\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}}|\mathrm{f}(\mathrm{x})>$；傅里叶积分的形式为 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=<\mathrm{F}^*(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{x}}>$。

但在信息光学中，这些人喜欢这么定义：先修改原傅里叶变换的定义为：$F(f)=\mathrm{F}(2\pi f)=\mathrm{F}(\omega)=2\pi\mathrm{F}(\omega)=<e^{i2\pi f x}|f(x)>$，这相当于将子波系数 or 振幅 or 频谱高度$\mathrm{F}(\omega)$，修改/扩张/增益为了原来的$2\pi$倍；但与此同时，保持原傅里叶积分的形式不变：$f(x)=<\mathrm{F}^*(\omega)|e^{i\omega x}>=<\frac{F^*(f)}{2\pi}|e^{i\omega x}>=\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{i2\pi f x}df=<F^*(f)|e^{i2\pi f x}>$。

这就有意思了：虽然他们的频谱比我们高个2π倍，但由于它们并没有将他们的频谱直接作为子波系数放入$d\omega$形式的傅里叶积分，以还原原函数——他们乘以了$\frac{1}{2\pi}$再放进去作为$d\omega$形式的傅里叶积分的系数的，这样一来，他们用他们的频谱还原得到的 f(x)和我们用我们的频谱还原所得的 f(x)是一样的。——或者说，他们将$F(f)$直接放入的是df形式的傅里叶积分而非$d\omega$形式的傅里叶积分。因而就从分解再合成所得的还原结果而言，结果是等价的。

这些人可真聪明啊，这种操作既使得他们的傅里叶变换前面没有了$\frac{1}{2\pi}$，同时又没有使得傅里叶积分在形式上发生变化，而且还保证了分解→合成，结果的一致。这就启发了我们：这很像保守力做功之积分结果与积分路径无关啊！即合成结果与分解方式无关！

无论你怎么分解，只需要在合成时保证$d\omega$形式的傅里叶积分形式 $f(x)=<\mathrm{F}^*(\omega)|e^{i\omega x}>$保持不变即可！比如你还可以分解为$F_n(\frac{f}{n})=\mathrm{F}_n(2\pi n\cdot\frac{f}{n})=\mathrm{F}_n(\omega)=2\pi n\mathrm{F}(\omega)=n<e^{i2\pi f x}|f(x)>$，那么对应的合成公式需修改为：$f(x)=<\mathrm{F}^*(\omega)|e^{i\omega x}>=<\frac{F_n^*(\frac{f}{n})}{2\pi n}|e^{i\omega x}>=\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\frac{f}{n})e^{i2\pi n\cdot\frac{f}{n}x}d\frac{f}{n}=<F_n^*(f_n)|e^{i2\pi n f_n x}>$，这里记$f_n=\frac{f}{n}$，且 bracket 是对$f_n$的积分。

总的来说，结论就是，傅里叶积分式不能改变，但傅里叶变换式允许千变万化：——但是，傅里叶变换式 or 像函数，乘以了多少倍，在将修改后的像函数代入傅里叶积分式时，傅里叶变换式 or 像函数，就必须除以多少倍，以保证傅里叶积分式不变；或者说直接用修改后的像函数替换原积分式中的像函数，但之后需对新积分式整体，除以相同倍数。

另外，信息光学里喜欢将$F(f)=<e^{i2\pi f x}|f(x)>$称为 f(x)的傅里叶谱 or 频谱函数。由于$F(f)$如 f(x)一样也是复函数，于是可将$F(f)$表作$|F(f)|e^{i\cdot arg\,F(f)}$，因此将$|F(f)|$称作 f(x)的(傅里叶变换)振幅谱，$\Phi(f)=\arg F(f)$称为相位谱，将$|F(f)|^2$称作 f(x)的功率谱。——注意不要将$(|F(f)|,\Phi(f))$与接下来的$(f,\varphi)$搞混了。

称 f(x)与$F(f)$构成傅里叶变换对，表示为 $f(x)\longleftrightarrow F(f)$

③.现在我们来好好解释一波历史遗留问题——为什么在量子力学中，傅里叶积分变换式没有改变，但傅里叶积分式却变成了数物/标准的$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$？这是对的吗？如果是对的，要怎么正确地理解它的含义？

(1).首先必须先考察傅里叶变换，在量子力学中，$\phi(k)=<\psi_k|\psi>$左右矢中的子波和总波都含有$A_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，因而全提出来后看上去与$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}<e^{i\omega x}|f(x)>$无异，但它无异不一定就平安无事了，因为最终需保证傅里叶积分$\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>$的不变，才是真正的不留后患。

然而，如果我们这么理解，则量子力学的傅里叶积分$<\phi(k)|\psi_k>$，始终要比标准的数物的傅里叶积分$<F^*(\omega)|e^{i\omega x}>$要小$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。——所以我们不能将量子力学的傅里叶变换视为与数物的傅里叶变换一样；但这时你可能就会说，它俩怎么可能不一样呢？

确实，如果k等价于ω、$\psi_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$等价于$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x}$、$\phi(k)$等价于$F(\omega)$，同时满足以上三点条件，则量子力学的傅里叶变换，等价于数物的傅里叶变换。但是，如果满足以上三点条件，则量子力学的傅里叶积分，恒不等价于数物的傅里叶积分。——因此要想傅里叶积分等价，则不能同时满足以上三点条件，至少需要破坏掉其中一个条件：哪个条件？

(2).前两个条件中，k等价于ω是自然而然的，不需要破坏；而$\psi_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$等价于$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x}$又是为满足狄拉克归一化而设定好了的；因此，最终需要改变的观念，是$\phi(k)$不等价于$F(\omega)$，也就是说，$\phi(k)\neq F(k)$。为此我们需考察$F(k)$关于$\phi(k)$的函数的具体形式。

事实上，为使得$\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>$以数物的傅里叶积分的形式出现，须有$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)=\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>=<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(k)|e^{ikx}>$，即有 $f(x)=<\phi(k)|e^{ikx}>$，其中的$\phi(k)$就是以 $f(x)=<F^*(k)|e^{ikx}>$为参照的，所谓的$F^*(k)$，不过由于$\phi(k)$是实函数，所以有$\phi(k)$等价于$F(k)$。——emmm，到头来我们又证明了$\phi(k)$是等价于$F(\omega)$的= =。因此量子力学的傅里叶积分是等价于数物的傅里叶积分的。循环论证？毫无用处？——NONONO，事实上，通过该过程我们找到了：这种等价的前提条件，在于$\psi(x)$不等价于 $f(x)$，而是$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)$。

而我们之前之所以认为量子力学的傅里叶积分与数物中的不等价，是因为确信$<\phi(k)|\psi_k>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<F^*(k)|e^{ikx}>$，没错，承认这点你就会发现答案，关于该等式，那时的我们、现在的我们都是对的。——问题并没有出在这里，问题在于我们一直关注着方程的右边！！！根本就忽略了方程左边的量子的$\psi(x)$根本就≠数物的 $f(x)$。因此其实应该这么说：量子的傅里叶积分表达式，不仅其右边比数物的小$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，其左边、甚至这整个等式也均比数物的小相同的倍数！！！此时，矛盾便烟消云散了。

(3).其实，回过头看，我们很容易检查出问题的结症所在，在于我们逻辑有两处不够鲜明：首先，我们在此之前已经提出并用到了“$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)$”的思想，以解释量

子和数物的傅里叶变换等价，但后来处理这个问题的时候竟然没有想起来；其二，在断定量子和数物的傅里叶积分不等价的时候，只考虑了方程右侧的表达式，右侧不等就说方程不等价，这是何等荒谬！

不过我知道为什么我们的注意力永远集中在方程右边了，一是因为两方程的右侧表达式均很长；第二，也是最为关键的一点，就是我们在解释傅里叶积分不等价之前，是在解释傅里叶变换等价，而在解释傅里叶变换等价时，我们一直关注的是方程右边，且成功解释了它，这就启发我们延续这种只关注右边、不关注左边的模式便一定能解释傅里叶积分的不等价。

然而事实便是，甚至连我们提出傅里叶变换等价的逻辑，就不完整：我们犯下了“默认量子方程左侧的$\phi(k)$等价于数物方程左侧的$F(\omega)$而没有说明它”的错误。所以，最终的证明逻辑应该是这样——a.假设$\phi(k)=F(k)$，b.根据$\psi_k=A_k e^{ikx}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$和叠加原理推出$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)$，利用 a.b.，从量子开始推，得到数物的$F(k)=\phi(k)=<\psi_k|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<F^*(k)|e^{ikx}>$，于是傅里叶变换等价(成立)；利用 a.从数物开始推，得 $f(x)=<F(k)|e^{ikx}>=<\phi(k)|e^{ikx}>=\sqrt{2\pi}<\phi(k)|\psi_k>$，推得$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)=<\phi(k)|\psi_k>$，再根据 b.$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)$，得到量子的$\psi(x)=<\phi(k)|\psi_k>$，即证明了傅里叶积分等价(成立)。这样解释，逻辑就完美了。

2.二维：

①.直角坐标系：

(1).数物中的二维傅里叶变换：$F(\omega_x,\omega_y)=\frac{1}{2\pi}<e^{i\omega_y y}|\frac{1}{2\pi}<e^{i\omega_x x}|f(x,y)>>=\frac{1}{4\pi^2}<e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}|f(x,y)>$；二维傅里叶积分：$f(x,y)=<<F^*(\omega_x,\omega_y)|e^{i\omega_x x}>|e^{i\omega_y y}>==<F^*(\omega_x,\omega_y)|e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}>$，被积变量为$d\omega_x\ d\omega_y$。

上述像函数和原函数还可分别写为：$F(\omega_x,\omega_y)=\mathcal{F}[f(x,y)]|_{\omega_x,\omega_y}$、$f(x,y)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega_x,\omega_y)]|_{x,y}$；像函数F=傅里叶变换$\mathcal{F}[\cdot]$操作于原函数$f$的结果，原函数$f$=傅里叶积分/逆变换$\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$操作于像函数F的结果。

(2).信息光学中的二维傅里叶变换：$F(f_x,f_y)=<e^{i2\pi f_y y}|<e^{i2\pi f_x x}|f(x,y)>>=<e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}|f(x,y)>$；二维傅里叶积分：$f(x,y)=<<F^*(f_x,f_y)|e^{i2\pi f_x x}>|e^{i2\pi f_y y}>=<F^*(f_x,f_y)|e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}>$，被积变量是$df_x\ df_y$。

同样，$F(f_x,f_y)=\mathcal{F}[f(x,y)]|_{f_x,f_y}$、$f(x,y)=\mathcal{F}^{-1}[F(f_x,f_y)]|_{x,y}$；信息光学和数物的$\mathcal{F}^{-1}$，在不考虑被积变量的差异时，在形式上仍然不同(即若认为$\omega=f$；则$\mathcal{F}[\cdot]$与$\mathcal{F}[\cdot]$形式不同)，但在结果上一样(即若$\omega=2\pi f$；则结果相同)，因函数形式仍有差别，而用同

一个字符和字体，但不同的颜色加以表示：$\mathcal{F}^{-1}$；而对于傅里叶变换，在函数形式和结果上均有差别，因此更应用颜色$\mathcal{F}$与数物中的$\mathcal{F}$加以区分。

(3).在直角坐标系下，f(x, y)可分离变量⇔ $F(f_x, f_y)$ or $F(\omega_x, \omega_y)$可分离变量。

比如若$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$，则$F(f_x, f_y)=<e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}|f_x(x)f_y(y)>=<e^{i2\pi f_x x}|f_x(x)><e^{i2\pi f_y y}|f_y(y)>=F_{f_x}(f_x)F_{f_y}(f_y)$；反之如果$F(f_x, f_y)=F_x(f_x)F_y(f_y)$，则$f(x,y)=<F_{f_x}^*(f_x)F_{f_y}^*(f_y)|e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}>=<F_{f_x}^*(f_x)|e^{i2\pi f_x x}><F_{f_y}^*(f_y)|e^{i2\pi f_y y}>=f_x(x)f_y(y)$。

②.极坐标系：

(1).数物：

变换：$G(\omega,\varphi)=F(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi)=F(\omega_x,\omega_y)=\frac{1}{4\pi^2}<e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}|f(x,y)>=\frac{1}{4\pi^2}<e^{i(\omega\cos\varphi\cdot r\cos\theta+\omega\sin\varphi\cdot r\sin\theta)}|f(r\cos\theta, r\sin\theta)>=\frac{1}{4\pi^2}<e^{i\omega r\cos(\varphi-\theta)}|g(r,\theta)>$。

积分变量：$r d\theta\cdot dr$。积分限：$\int_0^{2\pi} d\theta$、$\int_0^{\infty} r dr$。

积分：$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=f(x,y)=<F^*(\omega_x,\omega_y)|e^{i(\omega_x x+\omega_y y)}>=<F^*(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi)|e^{i\omega r\cos(\varphi-\theta)}>=<G^*(\omega,\varphi)|e^{i\omega r\cos(\varphi-\theta)}>$。

积分变量：$\omega d\varphi\cdot d\omega$。积分限：$\int_0^{2\pi} d\varphi$、$\int_0^{\infty}\omega d\omega$。

(2).信息光学：

变换：$G(f,\varphi)=F(f\cos\varphi, f\sin\varphi)=F(f_x, f_y)=<e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}|f(x,y)>=<e^{i2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}|g(r,\theta)>$。

积分：$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=f(x,y)=<F^*(f_x,f_y)|e^{i2\pi(f_x x+f_y y)}>=<F^*(f\cos\varphi, f\sin\varphi)|e^{i2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}>=<G^*(f,\varphi)|e^{i2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}>$。

积分变量：$f d\varphi\cdot df$。积分限：$\int_0^{2\pi} d\varphi$、$\int_0^{\infty} f df$。【似乎数物和信息光学的dφ真是同一个：因$\boldsymbol{\omega}=2\pi\boldsymbol{f}=k\boldsymbol{f}//\boldsymbol{f}$】

为了之后的方便(比如之后我们希望$C_m[g_\theta(\theta)]$在形式上是$g_\theta(\theta)$的傅里叶变换，而不是$<e^{-im\theta}|g_\theta(\theta)>$这个不伦不类的家伙)，写书的那些人们将指数部分的$\varphi-\theta$写作$\theta-\varphi$(因 cos 的关系，允许自变量取反)；虽然这样做并不对称(因fr中f在r前面，那按理说$\varphi-\theta$中φ也应在θ前面)。

(3).在极坐标系下，由于f,φ或r,θ共轭关系对，在 e 指数上均是相乘而不是相加的关系，因此$g(r,\theta)$可分离变量⇎ $G(f,\varphi)$ or $G(\omega,\varphi)$可分离变量。

比如若$g(r,\theta)=g_r(r)g_\theta(\theta)$，则$G(f,\varphi)=<e^{i2\pi fr\cos(\varphi-\theta)}|g_r(r)g_\theta(\theta)>=<e^{i2\pi fr}|g_r(r)><e^{i\cos(\varphi-\theta)}|g_\theta(\theta)>=G_f(f)G_\varphi(\varphi)$不成立；$G(f,\varphi)=G_f(f)G_\varphi(\varphi)$也无法导出$g(r,\theta)=g_r(r)g_\theta(\theta)$。

对于圆对称系统，为了能在能分离g中的变量r,θ的同时，也能分离G中的f,φ，我们将使用贝塞尔函数的级数展开$e^{-i2\pi fr\cos(\theta-\varphi)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(2\pi fr)e^{-im(\varphi-\theta)}$，这样便将$f,r$从指数上扒了下来，变成乘积因子$J_m(\cdot)$的自变量，与含$\varphi,\theta$的因子$e^{-im(\varphi-\theta)}$相乘，既将$G(f,\varphi)$中的$f,\varphi$分离了，又将$G(f,\varphi)$中的$r,\theta$分离了(当然其实我们只想要前者，以至于即使只能化简到$e^{im\varphi}<J_m(2\pi fr)e^{im\theta}|g_r(r)g_\theta(\theta)>$也是可以的，因为至少已经分离了$f,\varphi$)。

(4).极坐标系下可分离变量的函数的傅里叶变换和积分：

数物中，柱坐标系下解拉普拉斯方程时，分离变量，对于径向 r 方向的 R(r)满足的方程，变量替换 r 为 x，再将 R(x)写成级数形式，解出 R(x)所满足的贝塞尔方程，便引入了贝塞尔函数。

并且我们曾推导过它有如下性质：对于整数 m，有$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$，因此$J_m(x)$,$J_{-m}(x)$二者线性相关；有意思的是，另一个反映其奇偶性的等式与之很像：$J_m(-x)=(-1)^m J_m(x)$，所以有$J_m(-x)=J_{-m}(x)$。而对于非整数的ν，Δ≠0，此时$J_\nu(x)$,$J_{-\nu}(x)$线性无关。

1°.根据$e^{ix\cos\varphi}$可展开/分解为以贝塞尔函数为基矢(基本函数族)的级数形式，额按理说以$e^{-im\varphi}$或$J_{-m}(x)$为基矢都行，两个中任何一个也都可当做系数：因为$e^{ix\cos\varphi}$是个x,φ的二元函数：$e^{ix\cos\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x)e^{-im\varphi}\xrightarrow{\text{线性相关}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_{-m}(x)e^{-im\varphi}$ $\xrightarrow{m\ \text{替换}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{-m}J_m(x)e^{im\varphi}\xrightarrow{(-i)^{-m}=i^m}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x)e^{im\varphi}$。【其中用到了$i^{2m}=(-1)^m$，于是$i^m=i^{-m}(-1)^m=i^{-m}(-1)^{-m}=(-i)^{-m}$，也可直接$(-i)^{-m}=(\frac{1}{i})^{-m}=i^m$】

对比最后一个和第一个表达式，可得$e^{-im\varphi}\longleftrightarrow e^{im\varphi}$互换不改变级数和。

对于$e^{-ix\cos\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(-x)e^{-im\varphi}\xrightarrow{J_m(-x)=J_{-m}(x)}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_{-m}(x)e^{-im\varphi}\xrightarrow{m\ \text{替换}}$ $\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m}J_m(x)e^{im\varphi}\xrightarrow{i^{-m}=(-i)^m}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(x)e^{im\varphi}$。也可从第一个表达式就利用$\xrightarrow{\text{奇偶性}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(x)e^{-im\varphi}$。

对比两个最后一个表达式，也可得$e^{-im\varphi}\longleftrightarrow e^{im\varphi}$互换不改变级数和。

2°.实空间中r,θ可分离变量：利用第四个结果，有$e^{-i2\pi fr\cos(\theta-\varphi)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}J_{m}(2\pi fr)e^{-im(\theta-\varphi)}$(如果 e 指数上是$\varphi-\theta$，则可用第三个结果来得到同样的它)，于是$G(f,\varphi)=<e^{i2\pi fr\cos(\theta-\varphi)}|g(r,\theta)>=<\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^{m}J_{m}(2\pi fr)e^{im(\theta-\varphi)}|g(r,\theta)>=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}e^{im\varphi}<J_{m}(2\pi fr)e^{im\theta}|g(r,\theta)>$。

对于可分离变量的$g(r,\theta)=g_r(r)g_\theta(\theta)$，有$G(f,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}e^{im\varphi}<J_{m}(2\pi fr)e^{im\theta}|g_r(r)g_\theta(\theta)>=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}e^{im\varphi}<e^{im\theta}|g_\theta(\theta)><J_{m}(2\pi fr)|g_r(r)>$。其中前一个 bracket 的积分变量是$d\theta$，后一个的积分变量是$rdr$，积分限也请自行脑补.

记其中θ有关项$<e^{im\theta}|g_\theta(\theta)>$的$\frac{1}{2\pi}$为$C_m[g_\theta(\theta)]$(如果不加系数$\frac{1}{2\pi}$，它就是$g_\theta(\theta)$的傅里叶变换；若加了$\frac{1}{2\pi}$，就很像以$d\omega$为傅里叶积分的积分变量的，相应傅里叶变换，不过严格地说并不是，而是就是以df为傅里叶积分的积分变量的，相应傅里叶变换，乘以了$\frac{1}{2\pi}$。不过它在数值上与数物的傅里叶变换值一样，即$C_m[g_\theta(\theta)]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[g_\theta(\theta)]=\mathcal{F}[g_\theta(\theta)]$；不过，..从积分限上它是有限的，所以不是正宗的傅里叶变换，只是形式上是/像)、r有关项$<J_m(2\pi fr)|g_r(r)>$的2π为$H_m[g_\theta(\theta)]$，于是$G(f,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}e^{im\varphi}C_m[g_\theta(\theta)]H_m[g_r(r)]$。

其中$H_m[g_r(r)]=2\pi<J_m(2\pi fr)|g_r(r)>$叫做$g_r(r)$的m阶汉开尔 Hankel 函数，它是$r$、$g_r(\cdot)$的函数，同时也是唯一的一个关于$f$的函数；$e^{im\varphi}$是唯一的一个关于$\varphi$的函数；而式中$C_m[g_\theta(\theta)]$由于只是$\theta$、$g_\theta(\cdot)$的函数，因而地位甚至没有$e^{im\varphi}$高，而只能作为一个系数，对$\theta$的积分完成后，它的值就确定了，以至于常写作不带参数的形式C_m。——而若进一步对于圆对称的$g(r,\theta)=g_r(r)g_\theta(\theta)$，其$g_\theta(\theta)$=Const.，以至于该常数可挪进$g_r(r)$，因此此时$g_\theta(\theta)=1$，于是$C_m[g_\theta(\theta)]$沦落为$C_m[1]\to\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[1]=\mathcal{F}[1]\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-im\theta}\cdot d\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-im\theta}}{-im}\Big|_0^{2\pi}$，其中m为整数，因此$C_m[1]=\begin{cases}1, m=0\\0, m\neq 0\end{cases}$。【“→”表示像但不是，即形式上是，但积分限不是；之所以要在C_m的形式中引入$\frac{1}{2\pi}$，估计就是为了使得$C_0[1]=1$】

因此将该式重新写为$G(f,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}C_m e^{im\varphi}H_m[g_r(r)]$，该式表明对于极坐标系下可分离变量的$g(r,\theta)=g_r(r)g_\theta(\theta)$，其频谱函数$G(f,\varphi)$在极坐标系中也是可分离变量的，分离为了$e^{im\varphi}$与$H_m[g_r(r)]$的乘积的求和，即$G(f,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}C_m G_{m,\varphi}(\varphi)G_{m,f}(f)$。

3°.频谱空间中f,φ可分离变量：同理，利用第一个结果，有$e^{i2\pi fr\cos(\theta-\varphi)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^{m}J_{m}(2\pi fr)e^{-im(\theta-\varphi)}$(如果 e 指数上是$\varphi-\theta$，则可用第二个结果来得到同样的它)，$g(r,\theta)=<G^*(f,\varphi)|e^{i2\pi fr\cos(\theta-\varphi)}>=<G^*(f,\varphi)|\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^{m}J_{m}(2\pi fr)e^{-im(\theta-\varphi)}>=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^{m}e^{-im\theta}<G^*(f,\varphi)|J_{m}(2\pi fr)e^{im\varphi}>$。

若频谱函数可分离变量$G(f,\varphi)=G_f(f)G_\varphi(\varphi)$，则$g(r,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\theta} < G_f^*(f)G_\varphi^*(\varphi)|J_m(2\pi fr)e^{im\varphi} >=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\theta} < G_\varphi^*(\varphi)|e^{im\varphi} >< G_f^*(f)|J_m(2\pi fr) >$ $=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\theta} C_m^{-1}[G_\varphi(\varphi)]H_m^{-1}[G_f(f)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m C_m^{-1} e^{-im\theta} H_m^{-1}[G_f(f)]=$ $\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m C_m^{-1} G_{m,\theta}(\theta) G_{m,r}(r)$。

$C_m^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi} < 1|e^{im\varphi} >=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\varphi}\cdot d\varphi=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{im\varphi}}{im}\Big|_0^{2\pi}=\begin{cases}1, m=0\\0, m\neq 0\end{cases}$。

4°.实空间(r,θ)的圆对称系统：

实空间中，光学系统具有圆对称性时，其极坐标系下的原函数$g(r,\theta)=g_r(r)$。于是$G(f,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m C_m e^{im\varphi} H_m[g_r(r)]=(-i)^0 C_0 e^{i\cdot 0\cdot\varphi} H_0[g_r(r)]=H_0[g_r(r)]$。可见变换结果仍然是一个仅与$f$有关、与$\varphi$无关的函数，因此当$g(r,\theta)=g_r(r)$时，$G(f,\varphi)=G_f(f)$，即频谱函数仍然是圆对称的。

这种特殊的(傅里叶)变换$G(f,\varphi)=G_f(f)$称作“傅里叶-贝塞尔变换”，用专门的符号$\mathcal{B}[g_r(r)]$来表示($\mathcal{F}[g(r,\theta)]=\mathcal{F}[g_r(r)]$)。

5°.频谱空间(f,φ)的圆对称系统：

同理，若$G_\varphi(\varphi)=1$、$G(f,\varphi)=G_f(f)$，则有$g(r,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m C_m^{-1} e^{-im\theta} H_m^{-1}[G_f(f)]$ $=i^0 C_0^{-1} e^{-i\cdot 0\cdot\theta} H_0^{-1}[G_f(f)]=H_0^{-1}[G_f(f)]=g_r(r)$。

于是凑得原函数$g(r,\theta)=g_r(r)$的“傅里叶-贝塞尔变换逆变换/积分”，用$\mathcal{B}^{-1}[G_f(f)]$表示之($\mathcal{F}^{-1}[G(f,\varphi)]=\mathcal{F}^{-1}[G_f(f)]$)。

二.广义傅里叶变换

若$f(x,y)$不满足傅里叶变换条件(或者满足但很难算)，但$f_n(x,y)$满足变换条件、$\mathcal{F}[f_n(x,y)]$存在且确定，且$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y)$，则$\mathcal{F}[f(x,y)] := \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}[f_n(x,y)]$。

1.如取$f_n(x)=\begin{cases}e^{-x/n}, x>0\\0, x=0\\-e^{x/n}, x<0\end{cases}$，则 sgn(x)可视为$=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$。而$\mathcal{F}[f_n(x)]=<e^{i2\pi fx}|f_n(x)>=\int_{-\infty}^{0} -e^{x/n}\cdot e^{-i2\pi fx}\cdot dx+\int_0^\infty e^{-x/n}\cdot e^{-i2\pi fx}\cdot dx=-\int_{-\infty}^{0} e^{(\frac{1}{n}-i2\pi f)x}\cdot dx+\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{n}+i2\pi f)x}\cdot dx=-\frac{1-0}{\frac{1}{n}-i2\pi f}-\frac{0-1}{\frac{1}{n}+i2\pi f}=\frac{1}{\frac{1}{n}+i2\pi f}-\frac{1}{\frac{1}{n}-i2\pi f}$ $=\frac{-i4\pi f}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+(2\pi f)^2}$，于是$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(x)] := \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}[f_n(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{-i4\pi f}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+(2\pi f)^2}=\begin{cases}\frac{1}{i\pi f}, f\neq 0\\0, f=0\end{cases}$。

它应该是唯一确定的，若找其他的如$f_n(x)=\begin{cases} e^{x/n}, x>0 \\ 0, x=0 \\ -e^{-x/n}, x<0 \end{cases}$或$\begin{cases} e^{x/n}, x>0 \\ 0, x=0 \\ -e^{x/n}, x<0 \end{cases}$或$\begin{cases} a^{bx/n}, x>0 \\ 0, x=0 \\ -a^{bx/n}, x<0 \end{cases}$ (a>0)，所得的$\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}[f_n(x)]$也应是一样的。

2.$\mathcal{F}[\delta(x)]=<e^{i2\pi f x}|\delta(x)>=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i2\pi f x}\cdot dx=1(=2\pi\frac{1}{2\pi}=2\pi\mathcal{F}[\delta(x)])$；$\mathcal{F}^{-1}[1]=<1|e^{i2\pi f x}>=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi f x}\cdot df=\delta(x)(=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\pi}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}[\delta(x)]}{2\pi}])$。此即 1.2 中$\delta(x)$的积分形式$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\cdot d\omega$。【你也可以不直接利用定义；而是选择$f_n(x)=n\mathrm{Gauss}(nx)$绕个弯再得到它；广义的傅里叶变换的对象，也多是——是广义的函数的δ函数？】

3.$\mathcal{F}[step(x)]=\mathcal{F}[\frac{1+sgn(x)}{2}]=\frac{1}{2}(\mathcal{F}[1]+\mathcal{F}[sgn(x)])=\frac{1}{2}(\delta(f)+\frac{1}{i\pi f})$。【利用到了傅里叶变换的线性性】

4.$\mathcal{F}[comb(x)]=\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[\delta(x-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}\mathcal{F}[\delta(x)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}$，n∈Z【利用到了傅里叶变换的平移性】

【我保证这家伙肯定与$\delta(f)$的积分形式有关，即它在频谱上每个f=整数 n 的位置，均包含了类似$\delta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f x}\cdot dx$的存在】

于是，$comb(x)=\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}]$，那么$\mathcal{F}[comb(x)]=\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}]]=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}]]=\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[e^{-i2\pi f n}]]=\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}<e^{i2\pi f x}|e^{-i2\pi f n}>]=\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}<e^{-i2\pi f(x+n)}>]=\mathcal{F}^{-1}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}<\delta(f)|e^{i2\pi f x}>=\sum_{n=-\infty}^{\infty}1$ ？？？。

书上是这么做的，先将$comb(x)$认为是周期函数，表达成离散的傅里叶级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i2\pi nx}$，再用离散的傅里叶变换确定其系数$C_n=1$；然后用连续的傅里叶变换作用于它，得到$\mathcal{F}[comb(x)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n)=comb(f)$。

我觉得$comb(f)$就是$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi f n}$，二者没有区别；但若只用连续的傅里叶变换 or 逆变换，似乎得不到书上的这个东西。

1.5 傅里叶变换的性质和定理

一.基本性质

1.线性性：$\mathcal{F}[af(x)+bg(x)]=a\mathcal{F}[f(x)]+b\mathcal{F}[g(x)]$。

2.叠次变换和叠次逆变换：对称式：$\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]=\mathrm{f}(-f)$，$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]=F(-\mathrm{x})$；连贯式：$\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]=\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}_f^{-1}[\mathrm{f(x)}]]=\mathrm{f}(-f)$。

【很明显，书上的该式写错了。不仅$\mathrm{f}(-f)$中自变量变成了$(-\mathrm{x})$，而且没有标明双层傅里叶变换中每层的下角标，即其含义 or 作用对象】

2.1.根据 f(x)=$\mathcal{F}^{-1}[F(f)]=<F^*(f)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}>$，有$\mathrm{f}(-\mathrm{x})=<F^*(f)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}>=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|F(f)>$，x$\longleftrightarrow f$互换，得$\mathrm{f}(-f)=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|F(\mathrm{x})>=\mathcal{F}[F(\mathrm{x})]$，一般就到此为止了。但也可因$F(f)=\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]$，而有$F(\mathrm{x})=\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]|_{f=x}$，从而有$\mathrm{f}(-f)=\mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]|_{f=x}]$；或者在约定$F(\mathrm{x})=\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|\mathrm{f}(f)>$的前提下，有$\mathrm{f}(-f)=\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]$；未注明的$\mathcal{F}$一般为$\mathcal{F}_x$，即对自变量 x 进行积分，且得到的是$f$的函数。

根据$F(f)=\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|\mathrm{f(x)}>$，有$F(-f)=<\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|\mathrm{f(x)}>=<\mathrm{f}^*(\mathrm{x})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}>$，x$\longleftrightarrow f$互换，得$F(-\mathrm{x})=<\mathrm{f}^*(f)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}>=\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{f}(f)]$，一般也就到此为止了。但也可因 f(x)=$\mathcal{F}^{-1}[F(f)]$，而有$\mathrm{f}(f)=\mathcal{F}^{-1}[F(f)]|_{x=f}$，从而有$F(-\mathrm{x})=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}^{-1}[F(f)]|_{x=f}]$；或者在约定$\mathrm{f}(f)=\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]=<F^*(\mathrm{x})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}>$的前提下，有$F(-\mathrm{x})=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]$；未注明的$\mathcal{F}^{-1}$一般为$\mathcal{F}_f^{-1}$，即对自变量$f$进行积分，且得到的是 x 的函数。

【我在证明过程中遇到了个更有趣的错误版本：$\mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathrm{f(x)}]]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|F(f)>=F(f)<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f\mathrm{x}}|1>=F(f)\delta(f)=F(0)$？其中用到了$\mathcal{F}[1]=2\pi\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)=2\pi\delta(2\pi f)=\delta(f)$】

2.2.似乎后者可以用前者得到：对前者的两边求$\mathcal{F}^{-1}$再求$\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}$，得到$\mathrm{f(x)}=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathrm{f}(-f)]]$，然后$\mathrm{f}(-\mathrm{x})=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathrm{f}(f)]]$，再$F(-\mathrm{x})=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]$，就能得到$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]=F(-\mathrm{x})$？——确实，正如$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}=\mathcal{F}_f^{-1}\mathcal{F}_x=1$，也有$\mathcal{F}_x^{-1}\mathcal{F}_f=1$。

更有甚者，还可对后者采取 x$\longleftrightarrow f$互换，可将$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]=F(-\mathrm{x})$即$\mathcal{F}_f^{-1}[\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[F(f)]]=F(-\mathrm{x})$变为$\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}_f^{-1}[F(\mathrm{x})]]=F(-f)$，即$\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}^{-1}[F(\mathrm{x})]]=F(-f)$；然后再将函数关系式$F$变为f，便有$\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{f(x)}]]=\mathrm{f}(-f)$。——于是便可连起来写为$\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]=\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{f(x)}]]=\mathrm{f}(-f)$。

2.2.1 但这只是为了对称；而在意义上，最好将其写作$\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]=\mathcal{F}_{\mathrm{x}}^{-1}[\mathcal{F}_f^{-1}[\mathrm{f(x)}]]=\mathrm{f}(-f)$。因为毕竟后者与前者仍不对称：$\mathcal{F}^{-1}$的对象一般以$f$为自变量，且需要完成变量替换，所以需要标明下角标$\mathcal{F}_f^{-1}$。

而前一个的$\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]$标明角标不是因为此，∵$\mathcal{F}$的对象本身已是 x 了，它标明角标的原因是想做变量替换；而完成替换并积分完成后，所得结果又是一个关于 x 的函数，于是接下来的$\mathcal{F}[\mathcal{F}_f[\mathrm{f(x)}]]$就没有再加角标了：既不需要作用对象一致时进行额外替换(如对称式中的两个)，又不需要作用对象不一致时进行提醒+额外替换(如连贯式中的$\mathcal{F}_f^{-1}[\mathrm{f(x)}]$)。

加角标的原因还有一点，那就是$\mathcal{F}_x^{-1}[\mathcal{F}^{-1}[f(x)]]$的第二层$\mathcal{F}_x^{-1}$，是作用对象不一致，需提醒，但不需要替换。——总的来说，只要不一致或者需要替换，二者有其一，则需要加角标(一共有 3 点原因)。

3.对称性：其实就是对称式中，由原傅里叶积分式导出的$\mathcal{F}[F(x)]=f(-f)$与原傅里叶变换式$\mathcal{F}[f(x)]=F(f)$的对称；以及由原傅里叶变换式导出的$\mathcal{F}^{-1}[f(f)]=F(-x)$与原傅里叶积分式$\mathcal{F}^{-1}[F(f)]=f(x)$的对称。

4.坐标缩放性：$\mathcal{F}[f(\frac{x}{a})]|_f=<e^{i2\pi fx}|f(\frac{x}{a})>=a<e^{i2\pi af\frac{x}{a}}|f(\frac{x}{a})>|_{d(\frac{x}{a})}=$
$\begin{cases}a<e^{i2\pi afx}|f(x)>|_{-\infty}^{+\infty}, a>0\\ a<e^{i2\pi afx}|f(x)>|_{+\infty}^{-\infty}, a<0\end{cases}=\begin{cases}a<e^{i2\pi afx}|f(x)>, a>0\\ -a<e^{i2\pi afx}|f(x)>, a<0\end{cases}=|a|\mathcal{F}[f(x)]|_{af}=|a|F(af)$。
【注：若没有特殊说明，则默认<|>中，被积变量为 dx 或df；且积分上下限均是从$-\infty$积分到$+\infty$；要注意$\mathcal{F}[f(x)]|_f$与$\mathcal{F}_f[f(x)]$在含义上的区别，前者针对的是 e 指数上的频率修改，后者针对的是 e 指数以外的，包括 bracket 和被作用函数的，自变量替换】

该性质可直接解释δ函数的坐标缩放：由于$\mathcal{F}[1(x)]=\delta(f)$，所以$\mathcal{F}[1(x)]=\mathcal{F}[1(\frac{x}{a})]=|a|\delta(af)$，这个解释漂亮吧，因为无论怎么横向缩放δ函数的原函数$1(x)$，它都保持不变；正如$\mathrm{sgn}(x)$和$\mathrm{step}(x)$。所以，δ函数的坐标缩放性质可由它导出，是它的子集。

还有一个特例就是，$\mathcal{F}[f(-x)]=F(-f)$。

【这就是缩放反演定理，没有必要再加一条与性质重复的定理】

5.平移性：

$\mathcal{F}[f(x+x_0)]=<e^{i2\pi fx}|f(x+x_0)>=e^{i2\pi f(x_0)}<e^{i2\pi f(x+x_0)}|f(x+x_0)>=e^{i2\pi fx_0}\mathcal{F}[f(x)]$。

$\mathcal{F}^{-1}[F(f+f_0)]=<F^*(f+f_0)|e^{i2\pi fx}>=<F^*(f+f_0)|e^{i2\pi(f+f_0)x}>e^{-i2\pi f_0x}=\mathcal{F}^{-1}[F(f)]e^{-i2\pi f_0x}$。——该式还可写为$F(f+f_0)=\mathcal{F}[f(x)e^{-i2\pi f_0x}]$。

6.体积对应关系：(对一维来说，是面积对应关系)

$F(0)=<e^{i2\pi\cdot0\cdot x}|f(x)>=<1|f(x)>$；$f(0)=<F^*(f)|e^{i2\pi f\cdot0}>=<F^*(f)|1>$。

7.共轭变换：

$\mathcal{F}[f^*(x)]=<e^{i2\pi fx}|f^*(x)>=<e^{i2\pi(-f)x}|f(x)>^*=F^*(-f)$。

【还有个有意思的做法：$\mathcal{F}[f^*(x)]=<e^{i2\pi fx}|f^*(x)>=<e^{-i2\pi fx}|f(x)>^*=<f^*(x)|e^{i2\pi fx}>^*=\mathcal{F}_x^{-1^*}[f(f)]$；这说明了$\mathcal{F}_x^{-1}[f(f)]=F(-f)$，该式也可由对称式$\mathcal{F}^{-1}[f(f)]=F(-x)$得到】

$\mathcal{F}^{-1}[F^*(f)]=<F(f)|e^{i2\pi fx}>=<F^*(f)|e^{i2\pi f(-x)}>^*=f^*(-x)$。

【还有个有意思的做法：$\mathcal{F}^{-1}[F^*(f)]$=<$F(f)$|$e^{i2\pi f x}$>=< $F^*(f)$|$e^{-i2\pi f x}$ >*=< $e^{i2\pi f x}$|$F(f)$ >*=$\mathcal{F}_f{}^*[F(x)]$；这说明了$\mathcal{F}_f[F(x)]=f(-x)$，该式也可由对称式$\mathcal{F}[F(x)]=f(-f)$得到】

若对二式两边求傅里叶变换，则有：$F^*(f)=\mathcal{F}[f^*(-x)]$，这就回到了一式。

二.基本定理

1.卷积定理：首先将卷积的定义在形式上修改为$f(x)*h(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot h(x-\xi)d\xi$=<$f^*(\xi)$|$h(x-\xi)$>。

$\mathcal{F}[f(x)*g(x)]=\mathcal{F}$[< $f^*(\xi)$|$g(x-\xi)$ >]=<$e^{i2\pi f x}$|<$f^*(\xi)$|$g(x-\xi)$>> =<$f^*(\xi)$|<$e^{i2\pi f x}$|$g(x-\xi)$>>=<$f^*(\xi)$|$\mathcal{F}[g(x-\xi)]$>，利用平移性中的一式$\mathcal{F}[f(x+x_0)]=e^{i2\pi f x_0}\mathcal{F}[f(x)]$，得到原式=<$f^*(\xi)$|$e^{-i2\pi f\xi}\mathcal{F}[g(x)]$>=<$f^*(\xi)$|$e^{-i2\pi f\xi}$>$\mathcal{F}[g(x)]$= <$e^{i2\pi f\xi}$|$f(\xi)$>$\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]$。——或写为：$\mathcal{F}[f(x)*g(x)]=F(f)G(f)$。

$\mathcal{F}[f(x)]*\mathcal{F}[g(x)]$=<$\mathcal{F}^*[f(x)]|_\xi$|$\mathcal{F}[g(x)]|_{f-\xi}$>，利用平移性中的二式的第二个形态$F(f+f_0)=\mathcal{F}[f(x)e^{-i2\pi f_0 x}]$，有$\mathcal{F}[g(x)]|_{f-\xi}=G(f)|_{f-\xi}=G(f-\xi)=\mathcal{F}[g(x)e^{i2\pi\xi x}]$，而$\mathcal{F}[f(x)]|_\xi=F(f)|_\xi=F(\xi)$；于是原式=<$F^*(\xi)$|$G(f-\xi)$>=<$F^*(\xi)$|$\mathcal{F}[g(x)e^{i2\pi\xi x}]$> =<$F^*(\xi)$|<$e^{i2\pi f x}$|$g(x)e^{i2\pi\xi x}$>>=<$e^{i2\pi f x}$|<$F^*(\xi)$|$e^{i2\pi\xi x}$>$g(x)$>=<$e^{i2\pi f x}$|$f(x)g(x)$>= $\mathcal{F}[f(x)g(x)]$。——或写为：$F(f)*G(f)=\mathcal{F}[f(x)g(x)]$。

例 1：$\mathcal{F}[\Lambda(x)]=\mathcal{F}[rect(x)*rect(x)]=\mathcal{F}[rect(x)]\mathcal{F}[rect(x)]=(\frac{e^{-i2\pi f x}}{-i2\pi f}|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}})^2=(-\frac{2i\sin(\pi f)}{-i2\pi f})^2=(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f})^2=sinc^2(f)$。

Info1：rect 函数的傅里叶变换也可通过数物的结果得来：据$\mathcal{F}[rect(t)]=\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{\omega}{2\pi})$，有$\mathcal{F}[rect(x)]=2\pi\mathcal{F}[rect(x)]=sinc(\frac{\omega}{2\pi})=sinc(f)$、以及$rect(x)=\mathcal{F}^{-1}[sinc(f)]$。

同样，对于$\mathcal{F}[sinc(t)]=\frac{1}{2\pi}rect(\frac{\omega}{2\pi})$，也有$\mathcal{F}[sinc(x)]=2\pi\mathcal{F}[sinc(x)]=rect(\frac{\omega}{2\pi})=rect(f)$、以及$sinc(x)=\mathcal{F}^{-1}[rect(f)]$。

Info2：注意，$rect(x)\longleftrightarrow sinc(f)$与$sinc(x)\longleftrightarrow rect(f)$是两个不同的傅里叶变换对！第一个不能导出第二个，第二个也不能导出第一个！就像数物中的$rect(x)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}sinc(\frac{\omega}{2\pi})$与$sinc(x)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}rect(\frac{\omega}{2\pi})$一样，你觉得它俩是一样的吗？？！！

Info3：同样的两对看似相同但实则不同的变换对，还有$1(x)\longleftrightarrow\delta(f)$与$\delta(x)\longleftrightarrow 1(f)$。更有甚者，$\Lambda(x)\longleftrightarrow\mathrm{sinc}^2(f)$是个变换对，那会不会没有$\mathrm{sinc}^2(x)\longleftrightarrow\Lambda(f)$这样一个变换对呢?

事实上，输入 FourierTransform[sinc^2(x),x,-2πf]，经过 WolframAlpha 的计算，$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}^2(x)]=<e^{i2\pi fx}|\mathrm{sinc}^2(x)>=\pi\Lambda(f\pi)$；但在它眼里$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(x)}{x}$，因此我们需要输入 FourierTransform[sinc^2(πx),x,-2πf]，或者利用坐标缩放性，直接得到$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}^2(x)]=\Lambda(f)$。

额，其实是有的…于是我们又找到了一对“意料之中”的，但其实“意料之外”才是我们希望的“意料之中”：即是否每一对变换对，在信息光学的傅里叶变换设定下，都有另一对与之“形似”的“反变换对”存在呢？——或许在$F(f)=2\pi F(\omega)$的设定下，确实有这个定律，但人们仍 hold the belief 认为这是两个不同的变换对的原因，是因为他们可能采用非信息光学的傅里叶变换设定，而采用诸如数物$F(\omega)$、或者$F_n(\frac{f}{n})=2\pi n F(\omega)$、甚至量子力学的傅里叶变换标准！因此在那些标准下，2 个对应的正反傅里叶变换对，在(函数)形式上不一定一样。

2.互相关定理：

写法 1：但这本质上与卷积无区别，不是我们想要的。

根据$f(x)*g(x)=f^*(-x)\star g(x)$，代入$\mathcal{F}[f(x)*g(x)]=F(f)G(f)$，得$\mathcal{F}[f^*(-x)\star g(x)]=F(f)G(f)$；代入$F(f)*G(f)=\mathcal{F}[f(x)g(x)]$，得$F^*(-f)\star G(f)=\mathcal{F}[f(x)g(x)]$。

写法 2：这才是我们想要的互相关——等式左边含互相关的标准定义形式。

根据$f(x)\star g(x)=f^*(-x)*g(x)$，$\mathcal{F}[f(x)\star g(x)]=\mathcal{F}[f^*(-x)*g(x)]=\mathcal{F}[f^*(-x)]\mathcal{F}[g(x)]$，利用共轭变换二式的傅里叶变换，有$\mathcal{F}[f^*(-x)]=F^*(f)$，因此$\mathcal{F}[f(x)\star g(x)]=F^*(f)G(f)$。

同样根据它，$F(f)\star G(f)=F^*(-f)*G(f)$，根据共轭变换一式，有$F^*(-f)=\mathcal{F}[f^*(x)]$，于是原式$=\mathcal{F}[f^*(x)]*\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[f^*(x)g(x)]$，因此$F(f)\star G(f)=\mathcal{F}[f^*(x)g(x)]$。【很明显，书上的该式写错了，它在像函数$F(f)$上，多取了复共轭】

3.广义帕色渥定理：首先将互相关的定义在形式上修改为$f(x)\star g(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\xi)\cdot g(x+\xi)\mathrm{d}\xi=<f(\xi)|g(x+\xi)>$。

于是$<f(x)|g(x)>=<f(\xi)|g(0+\xi)>=f(x)\star g(x)|_{x=0}$，再根据互相关定理一式$\mathcal{F}[f(x)\star g(x)]=F^*(f)G(f)$，有$f(x)\star g(x)=\mathcal{F}^{-1}[F^*(f)G(f)]=<F(f)G^*(f)|e^{i2\pi fx}>=$

$<F(f)|e^{i2\pi fx}G(f)>$，因此$f(x)\star g(x)|_{x=0}$=$<F(f)|e^{i2\pi fx}G(f)>|_{x=0}$，即有$<f(x)|g(x)>=<F(f)|G(f)>$。

3.1.帕色渥定理：取g(x)=f(x)，得$<f(x)|f(x)>=<F(f)|F(f)>$，即$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2df$。这说明信号在空间域中的能量，与其在频域中的能量相同。【另外，若你想不通过广义帕色渥直接过渡到帕色渥的话，则需要用到"自相关定理"来证明它】

例 2：应用帕色渥定理：注意两个$\mathrm{sinc}(x)$都是实函数！

$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{sinc}(f)|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{rect}(x)|^2dx=1$，这用的是$\mathrm{rect}(x)\longleftrightarrow\mathrm{sinc}(f)$这个傅里叶变换对；当然你也可$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{rect}(f)|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{rect}(x)|^2dx=1$，这用到的是另一个变换对$\mathrm{sinc}(x)\longleftrightarrow\mathrm{rect}(f)$。二者有本质区别！

例 3：应用广义帕色渥定理：注意$\mathrm{sinc}^2(x)$与$\mathrm{sinc}(x)$都是实函数！

$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^3(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}(x)\cdot\mathrm{sinc}^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^*(f)\cdot\mathrm{sinc}^2(f)df$ $=<F(f)|G(f)>=<f(x)|g(x)>=<\mathcal{F}^{-1}[F(f)]|\mathcal{F}^{-1}[G(f)]>=<\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{sinc}(f)]|\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{sinc}^2(f)]>=<\mathrm{rect}(x)|\Lambda(x)>=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Lambda(x)dx$；当然你也可以使用另一个傅里叶变换对$\mathrm{sinc}^2(x)\longleftrightarrow\Lambda(f)$。

4.微分定理：若$\mathcal{F}[f(x)]$存在，则：

$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=<e^{i2\pi fx}|f^{(n)}(x)>=<e^{i2\pi fx}|1>|_{df^{(n-1)}}=e^{i2\pi fx}f^{(n-1)}|_{-\infty}^{\infty}-(-i2\pi f)<e^{i2\pi fx}|f^{(n-1)}(x)>=i2\pi f\mathcal{F}[f^{(n-1)}(x)]$，于是$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(i2\pi f)^n\mathcal{F}[f(x)]$。【要注意其中$f^{(n)}=\frac{d^nf}{(dx)^n}$】

其中$e^{i2\pi fx}f^{(n-1)}|_{-\infty}^{\infty}=0$，是因为：由于$\mathcal{F}[f(x)]$存在，则$f(x)e^{-i2\pi fx}$可积，而这就要求$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)e^{-i2\pi fx}=0$，于是$\mathcal{F}[f^{(1)}(x)]$中$e^{i2\pi fx}f^{(0)}|_{-\infty}^{\infty}=0-0=0$，因此$\mathcal{F}[f^{(1)}(x)]=(i2\pi f)\mathcal{F}[f(x)]$也存在；于是$f^{(1)}(x)e^{-i2\pi fx}$可积，而这又导致$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f^{(1)}(x)e^{-i2\pi fx}=0$，于是$\mathcal{F}[f^{(2)}(x)]$中$e^{i2\pi fx}f^{(1)}|_{-\infty}^{\infty}=0-0=0$，因此$\mathcal{F}[f^{(2)}(x)]$也存在…，如此类推。

$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(f)]=<F^{(n)^*}(f)|e^{i2\pi fx}>=<1|e^{i2\pi fx}>|_{dF^{(n-1)}}=e^{i2\pi fx}F^{(n-1)}|_{-\infty}^{\infty}-(i2\pi f)<F^{(n-1)^*}(f)|e^{i2\pi fx}>=-i2\pi f\mathcal{F}^{-1}[F^{(n-1)}(f)]$，于是$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(f)]=(-i2\pi f)^n\mathcal{F}^{-1}[F(f)]$。【要注意其中$F^{(n)}=\frac{d^nF}{(df)^n}$】

仍然，$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(f)]$中各个$e^{i2\pi fx}F^{(n-1)}|_{-\infty}^{\infty}=0$，是因为其上一级$\mathcal{F}[F^{(n-1)}(f)]$存在的缘故，而$\mathcal{F}[F^{(n-1)}(f)]$之所以存在，是因为其中的$e^{i2\pi fx}F^{(n-2)}|_{-\infty}^{\infty}=0$。

例 4：$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(x)]=(\mathrm{i}2\pi f)^{n}\mathcal{F}[\delta(x)]=(\mathrm{i}2\pi f)^{n}1(f)=(\mathrm{i}2\pi f)^{n}$。

$\mathcal{F}^{-1}[\delta^{(n)}(f)]=(-\mathrm{i}2\pi f)^{n}\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)]=(-\mathrm{i}2\pi f)^{n}1(\mathrm{x})=(-\mathrm{i}2\pi f)^{n}$。

5.积分定理：

$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{x}\mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi]=\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\xi)\mathrm{step}(\mathrm{x}-\xi)\mathrm{d}\xi]=\mathcal{F}[\mathrm{f}(x)*\mathrm{step}(\mathrm{x})]=\mathcal{F}[\mathrm{f}(x)]\mathcal{F}[\mathrm{step}(\mathrm{x})]$ $=F(f)\frac{1}{2}(\delta(f)+\frac{1}{\mathrm{i}\pi f})=\frac{F(0)\delta(f)}{2}+\frac{F(f)}{\mathrm{i}2\pi f}$，其中用到了阶跃函数的性质、卷积定理一式、δ函数的乘法性。

其中 f(x)的原函数$\int_{-\infty}^{x}\mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$竟然能用 f(x)和阶跃函数的卷积$\mathrm{f}(x)*\mathrm{step}(\mathrm{x})$表示，真让我大开眼界！

6.转动定理：

根据$G(f,\varphi)=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}|\mathrm{g}(r,\theta)>$，有$\mathcal{F}[\mathrm{g}(r,\theta+\alpha)]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}|\mathrm{g}(r,\theta+\alpha)>=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f r\cos(\varphi-\theta)}|\mathrm{g}(r,\theta+\alpha)>=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f r\cos((\varphi+\alpha)-(\theta+\alpha))}|\mathrm{g}(r,\theta+\alpha)>=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f r\cos((\varphi+\alpha)-\theta)}|\mathrm{g}(r,\theta)>=G(f,\varphi+\alpha)$。

1.6 线性系统与线性空间不变系统

一.线性系统

1.系统即算符：输入信号/激励函数$\mathrm{f}(x)$流经系统后，变为了输出信号/响应函数$\mathrm{g}(x)$，因此系统在信号转变过程中，相当于一个算符/变换/映射(指对函数的映射,有点像变分！)$\mathfrak{F}[\cdot]$：即$\mathrm{g}(x)=\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x)]$。

2.线性系统：对于任意输入信号$\mathrm{f}_1(x)$、$\mathrm{f}_2(x)$，若系统是线性的，即$\mathfrak{F}[a\mathrm{f}_1(x)+b\mathrm{f}_2(x)]=\mathfrak{F}[a\mathrm{f}_1(x)]+\mathfrak{F}[b\mathrm{f}_2(x)]=a\mathfrak{F}[\mathrm{f}_1(x)]+b\mathfrak{F}[\mathrm{f}_2(x)]=a\mathrm{g}_1(x)+b\mathrm{g}_2(x)$，则系统$\mathfrak{F}[\cdot]$为线性系统。线性系统具有以下两个性质：【注意，$x$与$x$不同，它更像之前的$f$】

①.叠加性：$\mathfrak{F}[\mathrm{f}_1(x)+\mathrm{f}_2(x)]=\mathfrak{F}[\mathrm{f}_1(x)]+\mathfrak{F}[\mathrm{f}_2(x)]$。【a,b 分别取 1】

②.均匀性：$\mathfrak{F}[a\mathrm{f}_1(x)]=a\mathfrak{F}[\mathrm{f}_1(x)]$。【b 取 0】

【注：一个系统是线性系统，与其满足$\mathfrak{F}[a\mathrm{f}(x)+b\mathrm{g}(x)]=a\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x)]+b\mathfrak{F}[\mathrm{g}(x)]$互为充要条件；且与同时满足①.②.两个条件也互为充要条件，即两种说法、两种条件均等价。】

3.光学中的线性系统：物平面x_1-o-y_1的光分布f(x_1,y_1)，经过光具组(映射)$\mathfrak{F}[\cdot]$后$\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1)]$，变为像平面$x_2$-o-$y_2$的光分布g$(x_2,y_2)$。【g相当于$F$，$x_2,y_2$相当于$f_x,f_y$；g$(x_2,y_2)$相当于$F(f_x,f_y)$。之后我们会证明之】。

①.我们将某点(x_1,y_1)处的光源f(x_1,y_1)分解为：时间上的(该点处的各个子)连续激励之和，或空间上的一层层弱面光源(在该点处的)的叠加$\sum_n c_n \mathrm{f}_n(x_1,y_1)=\sum_n c_n(x_1,y_1)\mathrm{f}_n$，而这一层层弱面光源也可以“不可数”地，一个实数 n(之前是一个整数)对应一个子面光源地(其强度=$c(n)\mathrm{dn}$)，排列在一条空间直线 or 时间线(n 轴)上：$\int c(n)\mathrm{f}(x_1,y_1;n)\mathrm{dn}=\int c(x_1,y_1;n)\mathrm{f}(n)\mathrm{dn}$，甚至一组“实数对”对应一个子面光源地(其强度=$c(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$)，排列在一条直线上：$\iint c(\xi,\eta)\mathrm{f}(x_1,y_1;\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\iint c(x_1,y_1;\xi,\eta)\mathrm{f}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$。——以上这些都相当于$\mathfrak{F}[a\mathrm{f}_1(x)+b\mathrm{f}_2(x)]=a\mathrm{g}_1(x)+\mathrm{b}\mathrm{g}_2(x)$中的$a\mathrm{f}_1(x)+b\mathrm{f}_2(x)$。

甚至如果你喜欢，你还可以将权重系数变成三维的$c(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$，对应$\iint c(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{f}(x_1,y_1;\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\iint c(x_1,y_1;\xi,\eta,\zeta)\mathrm{f}(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$，但这并不比$c(n)\mathrm{dn}$多任何信息量，∵幅值因子*三维的体积$c(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$=幅值因子*二维的面积$c(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$=幅值因子*一维的长度$c(n)\mathrm{dn}$=幅值$c_n$，多维度只是为了将系数$c_n$分解出线性的部分更多一些。

【注：a.物平面的某点(x_1,y_1)处的光场 or 光强f(x_1,y_1)，可表为振幅为若干个振幅 or 振幅的平方为$f_n(x_1,y_1)$的低亮度小光点，分别以不随(x_1,y_1)变化的，只与振幅型号 n 有关的序列$\{c_n\}$为权重，求和而来。但每个子面光源$f_n(x_1,y_1)$是随(x_1,y_1)有起伏的；以合成出起伏分布的总面光源f(x_1,y_1)。

b.或理解为每个子面光源振幅为不随(x_1,y_1)起伏的f_n，则其相应的权重序列$\{c_n(x_1,y_1)\}$不仅与不同的子面光源(f_n中的 n)有关，即使对于相同的子面光源(n 固定)，其权重也随(x_1,y_1)位置而变。以合成出起伏分布的总面光源f(x_1,y_1)。

——我们不需要$\sum_n c_n(x_1,y_1)f_n(x_1,y_1)$，只要 c 或 f 中任意一个随$(x_1,y_1)$有关，就足以合成任意f$(x_1,y_1)$。】

那么当f(x_1,y_1)作为线性系统的输入时，输出$\mathrm{g}(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1)]=\mathfrak{F}[\sum_n c_n\mathrm{f}_n(x_1,y_1)]=\sum_n c_n\mathfrak{F}[\mathrm{f}_n(x_1,y_1)]=\sum_n c_n\mathrm{g}_n(x_2,y_2)$、同样$\mathrm{g}(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1)]=\mathfrak{F}[\int c(n)\mathrm{f}(x_1,y_1;n)\mathrm{dn}]=\int c(n)\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1;n)]\mathrm{dn}=\int c(n)\mathrm{h}(x_2,y_2;n)\mathrm{dn}$、以及$\mathrm{g}(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1)]=\mathfrak{F}[\iint c(\xi,\eta)\mathrm{f}(x_1,y_1;\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta]=\iint c(\xi,\eta)\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1;\xi,\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int c(\xi,\eta)\mathrm{h}(x_2,y_2;\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$。【之所以$\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x_1,y_1;\xi,\eta)]$不用$\mathrm{g}(x_2,y_2;n)$而要用$\mathrm{h}(x_2,y_2;n)$，是因为已经有$\mathrm{g}(x_2,y_2)$了】

②.书上采用的是$\iint c(\xi,\eta)f(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta=\iint c(x_1,y_1;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$；且采用的是后者，$\iint c(x_1,y_1;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$，即子面/点光源亮度在面上一定，不随$(x_1,y_1)$起伏，只是权重序列$\{c_n(x_1,y_1)\}$与面上坐标有关；而且还把它写成了$f(\xi,\eta)$在前面的$\iint f(\xi,\eta)c(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta$这个不伦不类的形式。因此在这样的形式下，有$\mathfrak{F}[f(x_1,y_1)]=\mathfrak{F}[\iint f(\xi,\eta)c(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta]=\iint f(\xi,\eta)\mathfrak{F}[c(x_1,y_1;\xi,\eta)]d\xi d\eta=\int f(\xi,\eta)h(x_2,y_2;\xi,\eta)d\xi d\eta$。

其中，基元函数选为$c(x_1,y_1;\xi,\eta)=\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)$，于是根据δ函数的筛选性，$f(x_1,y_1)=\iint f(\xi,\eta)\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)d\xi d\eta$成立，这称为系统输入函数的分解式【这种说法我觉得不恰当，因为在这样的理解下，c 是振幅分布，f 才是基元函数；而 f 与空间坐标无关；当 c 的具体形式确定为δ函数后，积分上下限也变为了-∞→+∞】。当然，也可认为$f(x_1,y_1)=\iint c(\xi,\eta)f(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta=\iint \delta(\xi,\eta)f(x_1-\xi,y_1-\eta)d\xi d\eta$，但书上可能觉得这使得 f 变得复杂了，且让$\mathfrak{F}[f(x_1,y_1;\xi,\eta)]$变成 h 有点过意不去(要将 f 剩下来，而将系数进行线性变换)？【线性系统(非线性系统谈c没有任何意义)中，常用的基元函数c有δ函数、复指数函数、三角函数】

——还可用卷积形式表示$f(x_1,y_1)=\langle f^*(\xi,\eta)|\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)\rangle=f(x_1,y_1)*\delta(x_1,y_1)$，或有$f(x_1,y_1)=\langle\delta^*(\xi,\eta)|f(x_1-\xi,y_1-\eta)\rangle=\delta(x_1,y_1)*f(x_1,y_1)$，不过根据卷积的交换律，这是自然而然的。【这有点意思，傅里叶变换积分定理中也用卷积形式表示了原函数；任何函数与δ函数的卷积，等于该函数自身！】

因此$g(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[f(x_1,y_1)]=\iint f(\xi,\eta)\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]d\xi d\eta=\int f(\xi,\eta)h(x_2,y_2;\xi,\eta)d\xi d\eta$，称为线性系统输出函数的叠加积分 Superposition Integral。其卷积形式，只能暂时表为$g(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[f(x_1,y_1)]=\langle f^*(\xi,\eta)|\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]\rangle$(暂时还不能进一步写为$f(x_1,y_1)*\mathfrak{F}[\delta(x_1,y_1)]$或$f(x_2,y_2)*\mathfrak{F}[\delta(x_1,y_1)]$，以进一步$=f(x_2,y_2)*h(x_2,y_2)$)

其中$h(x_2,y_2;\xi,\eta)=\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]$，称为系统的脉冲响应 impulse response 函数。它表示位于输入平面上的一点$(x_1,y_1)=(\xi,\eta)$位置处的单位脉冲点光源$\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)$，通过系统后，在输出平面上(x_2,y_2)点得到的分布(但按照我们的理解，δ是 c 的一种，而 c 是振幅分布，所以 c 本身不是点光源；要形式为δ的 c 乘以均匀面光源 f 后，再乘以面元$d\xi d\eta$，才确实是个点光源)；它是个关于输入输出平面上坐标的四元函数，即是x_1-o-y_1平面上的(ξ,η)的函数，也是x_2-o-y_2平面上的(x_2,y_2)的函数。

一般而言，输入平面上的一物点，通过系统后，在输出像面上，不是形成一个相像点，而是扩展成一个弥散的像斑，类似于 Halo Effect 晕现象，因而将$h(x_2,y_2;\xi,\eta)$也/又称为点扩展函数、点扩散函数 Point-Spread Function，即 PSF。——为了完全确

定输出，需要知道系统对于输入平面所有可能的点上的脉冲响应，即确定物场中各点处点光源的像。

二.线性空间不变 LSI 系统（Linear Space Invariant System）

1.LSI 系统：若系统满足$\mathfrak{F}[af_1(x-x_0)+bf_2(x-x_0)]$=$\mathfrak{F}[af_1(x-x_0)]$+$\mathfrak{F}[bf_2(x-x_0)]$=$a\mathfrak{F}[f_1(x-x_0)]$+$b\mathfrak{F}[f_2(x-x_0)]$=$ag_1(x-Mx_0)$+$bg_2(x-Mx_0)$，则此系统为 LSI 系统。其中M为横向放大率。

或者说若线性系统再满足$\mathfrak{F}[f_1(x-x_0)]$=$g_1(x-Mx_0)$，即再升级为线性不变系统。——要注意这与傅里叶变换的平移性$\mathcal{F}[f(x+x_0)]$=$e^{i2\pi f x_0}\mathcal{F}[f(x)]$不同(除非$\mathcal{F}[f(x)]$也是$e^{if}$的形式，这样就相当于相位因子的加减/平移了)，当点光源在物场中移动时，其像斑只改变位置，不改变其函数形式。

①.据此，因$\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]$=$h(x_2,y_2;\xi,\eta)$，而有$\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]$=$h(x_2-M\xi,y_2-M\eta)$，因此$h(x_2,y_2;\xi,\eta)$=$h(x_2-M\xi,y_2-M\eta)$，即我们找到了脉冲响应函数h关于$x_2,y_2;\xi,\eta$的相对更具体的形式。

②.在此基础上，对于 LSI 系统，便有$g(x_2,y_2)$=$\mathfrak{F}[f(x_1,y_1)]$=$<f^*(\xi,\eta)|h(x_2-M\xi,y_2-M\eta)>$=$<f^*(\xi,\eta)|h(x_2-M\xi,y_2-M\eta)>$；更进一步地，对于 M=1 的 LSI 系统，还可将$g(x_2,y_2)$=$<f^*(\xi,\eta)|h(x_2-\xi,y_2-\eta)>$=$f(x_2,y_2)*h(x_2,y_2)$写成卷积的形式。

该式表明，LSI 系统的像(输出函数g)，可以表示为物(输入函数f)与系统的脉冲响应函数$h(x_2-M\xi,y_2-M\eta)$，在输出平面(像平面x_2-o-y_2)上的一个二维卷积(因此 f 虽是输入函数，但仍是x_2,y_2的函数)。因此 LSI 系统的叠加积分又叫卷积积分，且$h(x_2,y_2)$称为 LSI 系统的输入-输出关系(f-g)的空域描述。

③.$G(f_{x_2},f_{y_2})$=$\mathcal{F}[g(x_2,y_2)]$=$\mathcal{F}[f(x_2,y_2)*h(x_2,y_2)]$=$\mathcal{F}[f(x_2,y_2)]\mathcal{F}[h(x_2,y_2)]$=$F(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2})$，其中$H(f_{x_2},f_{y_2})$称为系统的传递 Transfer 函数，表示系统在频域中对信号的传播能力(相当于一个振幅因子，与F相乘，改变F的振幅；但由于H一般是个复函数，∴还可能改变的F相位)。

利用此，可以不作卷积，而使用$g(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[F(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2})]$的方法来求$g(x_2,y_2)=\mathfrak{F}[f(x_1,y_1)]$。看上去有三种、四步操作：先求两个傅里叶变换，再相乘，再求逆变换。

2.LSI 系统的本征函数

若$g(x)=\mathfrak{F}[f(x)]=af(x)$，则称$f(x)$为算符/系统$\mathfrak{F}[\cdot]$的本征函数，a 为此$f(x)$的本征值，是个复常数。——因此，LSI 系统的本征函数$f(x)$，在通过系统后，所变成的$g(x)$，相对于原通过系统前的$f(x)$所对应的$f(x)$，仅仅可能被衰减或放大或产生相移。【我暂时并没有看出这个因果关系在哪，难道在线性系统基础上，$\mathfrak{F}[f(x-x_0)]=g(x-Mx_0)$，可与$g(x)=\mathfrak{F}[f(x)]=af(x)$互推？暂且将其看做 LSI 系统在其线性特性基础上的，另一个/第二个特性呗】

线性系统的 3 种基元函数δ函数、复指数函数、三角函数，都是 LSI 系统的本征函数，即$h_g(x)=\mathfrak{F}[c_f(x)]=ac_f(x)$：【基元函数$c$们，很像量子力学中的子波函数们；都是相应哈密顿算符的本征函数们】利用二.1.③.的$G(f_{x_2},f_{y_2})=F(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2})$和$g(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[F(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2}))]$，有类似的$H_g(x_2,y_2)=C_f(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2})$，以及$h_g(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[C_f(f_{x_2},f_{y_2})H(f_{x_2},f_{y_2})]=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[c_f(x_2,y_2)]H(f_{x_2},f_{y_2})]$。【其中傅里叶变换$\mathcal{F}$(的被积变量)是针对$x_2,y_2$的；而傅里叶逆变换$\mathcal{F}^{-1}$是针对$f_{x_2},f_{y_2}$的】

其中c_f,C_f,h_g,H_g分别表示作为输入函数的基元函数(该基元函数$c_f(x_1,y_1)$不是$c_f(x_1,y_1)=\iint f(\xi,\eta)c(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta$中的基元函数$c(x_1,y_1;\xi,\eta)$！当$c_f(x_1,y_1)$是 3 种基元函数中的任何一种时，不影响$c(x_1,y_1;\xi,\eta)$的表达形式作为 3 种基元函数中的任何一种；它俩无任何关联)、作为输入函数的基元函数的傅里叶变换、作为输入函数的基元函数的输出函数、作为输入函数的基元函数的输出函数的傅里叶变换。【注：h是δ经过系统$\mathfrak{F}$后的输出函数，而不是δ的傅里叶变换$\mathcal{F}$】

【我其实有点想用的f_c,F_c,g_h,G_h，但为了加大与f,F,g,G的区别，我还是采用了c_f,C_f,h_g,H_g；毕竟 h 对于 c，与 g 对于 f 一样，都是输出函数与输入函数之间的关系，前者是后者经$\mathfrak{F}$作用后的结果，而(前者)不是(后者的)傅里叶变换。】

①.当$c_f(x_1,y_1)=e^{i2\pi(f_{x_1}x_1+f_{y_1}y_1)}$时，$h_g(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[c_f(x_2,y_2)]H(f_{x_2},f_{y_2})]$中$\mathcal{F}[c_f(x_2,y_2)]=<e^{i2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|c_f(x_2,y_2)>=<e^{i2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|e^{i2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}>=\delta(f_{x_2}-f_{x_1},f_{y_2}-f_{y_1})$，此即$C_f(f_{x_2},f_{y_2})$。

代回公式，得$h_g(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[\delta(f_{x_2}-f_{x_1},f_{y_2}-f_{y_1})H(f_{x_2},f_{y_2})]=<[\delta(f_{x_2}-f_{x_1},f_{y_2}-f_{y_1})H(f_{x_2},f_{y_2})]^*|e^{i2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}>=H(f_{x_1},f_{y_1})e^{i2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}=H(f_{x_1},f_{y_1})c_f(x_2,y_2)$。这即说明了$\mathfrak{F}[c_f(x_1,y_1)]=H(f_{x_1},f_{y_1})c_f(x_2,y_2)$。

对比$\mathfrak{F}[\mathrm{f}(x)]=\mathrm{af}(x)$，可见$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_1+f_{y_1}y_1)}$是线性系统的一个本征函数(暂时还不知道它是不是 LSI)，$H(f_{x_1},f_{y_1})$是其对应的本征值。

②.当$c_\mathrm{f}(x_1,y_1)=\delta(x_1-x_0,y_1-y_0)$时，$\mathrm{h_g}(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[c_\mathrm{f}(x_2,y_2)]H(f_{x_2},f_{y_2})]$中$\mathcal{F}[c_\mathrm{f}(x_2,y_2)]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|\delta(x_2-x_0,y_2-y_0)> =\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_0+f_{y_2}y_0)}$，此即$C_\mathrm{f}(f_{x_2},f_{y_2})$。

代回公式，得$\mathrm{h_g}(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_0+f_{y_2}y_0)}H(f_{x_2},f_{y_2})]=<[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_0+f_{y_2}y_0)}H(f_{x_2},f_{y_2})]^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}>=<H^*(f_{x_2},f_{y_2})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi[f_{x_2}(x_2-x_0)+f_{y_2}(y_2-x_0)]}>=\mathrm{h}(x_2-x_0,y_2-y_0)$。这即说明了$\mathfrak{F}[\delta(x_1-x_0,y_1-y_0)]=\mathrm{h}(x_2-x_0,y_2-y_0)$，这符合$\mathfrak{F}[\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)]=\mathrm{h}(x_2-M\xi,y_2-M\eta)$，是它的特例，因此系统$\mathfrak{F}$是个线性不变系统；但我们好像没有得到$\delta$是 LSI 系统的一个本征函数，也没有得到其对应的本征值。除非$\mathrm{h}(x_2-x_0,y_2-y_0)$在具体形式上也是个$\mathrm{a}\delta(x_2-x_0,y_2-y_0)$。

③.当$c_\mathrm{f}(x_1,y_1)=\cos[2\pi(f_{x_1}x_1+f_{y_1}y_1)]$时，$\mathrm{h_g}(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[c_\mathrm{f}(x_2,y_2)]H(f_{x_2},f_{y_2})]$中$\mathcal{F}[c_\mathrm{f}(x_2,y_2)]=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|\cos[2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)]>=<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}}{2}>=\frac{1}{2}<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}>+\frac{1}{2}<\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}>=\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}-f_{x_2})+\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}+f_{x_2})$，此即$C_\mathrm{f}(f_{x_2},f_{y_2})$。

代回公式，得$\mathrm{h_g}(x_2,y_2)=\mathcal{F}^{-1}[[\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}-f_{x_2})+\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}+f_{x_2})]\cdot H(f_{x_2},f_{y_2})]=<[[\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}-f_{x_2})+\frac{1}{2}\delta(f_{x_1}+f_{x_2})]\cdot H(f_{x_2},f_{y_2})]^*|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}>=\frac{1}{2}<H^*(f_{x_2},f_{y_2})|\delta(f_{x_1}-f_{x_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}>+\frac{1}{2}<H^*(f_{x_2},f_{y_2})|\delta(f_{x_1}+f_{x_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_2}x_2+f_{y_2}y_2)}>=\frac{1}{2}H(f_{x_1},f_{y_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}+\frac{1}{2}H(-f_{x_1},-f_{y_1})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}$。

由于基元函数$c_\mathrm{f}(x_1,y_1)=\cos[2\pi(f_{x_1}x_1+f_{y_1}y_1)]$是实函数，所以其经过$\mathfrak{F}$变换后，相应的脉冲响应函数$\mathrm{h_g}(x_2,y_2)$也将是实函数(若经过傅里叶变换$\mathcal{F}$则就不一定是实函数了)，则根据傅里叶变换的一.基本性质中的 7.共轭变换中的一式$\mathcal{F}[\mathrm{f}^*(\mathrm{x})]=F^*(-f)$，有$H^*(-f_{x_1},-f_{y_1})=\mathcal{F}[\mathrm{h}_\mathrm{g}^*(x_1,y_1)]=\mathcal{F}[\mathrm{h_g}(x_1,y_1)]=H(f_{x_1},f_{y_1})$。

由于H是由$\mathrm{h_g}$傅里叶变换$\mathcal{F}$而来，因此虽然$\mathrm{h_g}$是实数，H也不一定是实数。于是用复数的指数式来表示该复数，即分为幅值部分与幅角部分，但仍然保持自变量是f_{x_1},f_{y_1}，即有$H(f_{x_1},f_{y_1})=A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}$。【注意这与极坐标系下$G(f,\varphi)=G_f(f)G_\varphi(\varphi)$可分离变量不同！】

由于$H^*(-f_{x_1},-f_{y_1})=H(f_{x_1},f_{y_1})$，得到$A(-f_{x_1},-f_{y_1})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(-f_{x_1},-f_{y_1})}=A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}$，于是幅值幅角对应相等，即有$A(-f_{x_1},-f_{y_1})=A(f_{x_1},f_{y_1})$，说明$|H|$是个偶函数；而$-\varphi(-f_{x_1},-f_{y_1})=\varphi(f_{x_1},f_{y_1})$，说明其主幅角 arg H是个奇函数。

代入得$h_g(x_2,y_2)=\frac{1}{2}A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot e^{i\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}e^{i2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}+\frac{1}{2}A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot e^{-i\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}e^{-i2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)}=\frac{1}{2}A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot[e^{i[2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)+\varphi(f_{x_1},f_{y_1})]}+e^{-i[2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)+\varphi(f_{x_1},f_{y_1})]}]=A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot\cos[2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)+\varphi(f_{x_1},f_{y_1})]$。

这意味着$\mathfrak{F}[\cos[2\pi(f_{x_1}x_1+f_{y_1}y_1)]]=A(f_{x_1},f_{y_1})\cdot\cos[2\pi(f_{x_1}x_2+f_{y_1}y_2)+\varphi(f_{x_1},f_{y_1})]$，它很像 LSI 系统所满足的$\mathfrak{F}[f_1(x-x_0)]=g_1(x-Mx_0)$但又不是(emm 这个东西用$\mathfrak{F}[c_f(x_1,y_1)]=A(f_{x_1},f_{y_1})c_f(x_2,y_2;\varphi(f_{x_1},f_{y_1}))=A(f_{x_1},f_{y_1})c_f(x_2+\frac{\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}{4\pi f_{x_1}},y_2+\frac{\varphi(f_{x_1},f_{y_1})}{4\pi f_{y_1}})$表示效果不咋好)，所以大概只能用“LSI 系统的本征函数通过该系统时不改变函数形式$h_g(x)=\mathfrak{F}[c_f(x)]=ac_f(x)$”这第二个特性，来认定它是个 LSI 系统。

可见，为了检验一个系统是否是 LSI 系统，可输入一个余弦信号，考察其通过系统后是否包含了其他频率成分的信号，若还包含其他频率的余弦信号(傅里叶变换)甚至其他信号，则该系统不是 LSI 系统。

3.LSI 级联系统

对于 2 个 LSI 系统，第一个系统的输入设为$f_1(x_1,y_1)=f(x_1,y_1)$，于是第一个系统的输出为$g_1(x_2,y_2)=f(x_2,y_2)*h_1(x_2,y_2)$，它同时也是第二个系统的输入$f_2(x_2,y_2)$，因此第二个系统的输出为$g_2(x_3,y_3)=f_2(x_3,y_3)*h_2(x_3,y_3)=[f(x_3,y_3)*h_1(x_3,y_3)]*h_2(x_3,y_3)$，根据卷积的结合律，得$g_2(x_3,y_3)=f(x_3,y_3)*[h_1(x_3,y_3)*h_2(x_3,y_3)]$。

因此，$G_2(f_{x_3},f_{y_3})=\mathcal{F}[g_2(x_3,y_3)]=\mathcal{F}[f(x_3,y_3)*[h_1(x_3,y_3)*h_2(x_3,y_3)]]=\mathcal{F}[f(x_3,y_3)]\mathcal{F}[h_1(x_3,y_3)*h_2(x_3,y_3)]=F(f_{x_3},f_{y_3})H(f_{x_3},f_{y_3})$，其中$H(f_{x_3},f_{y_3})=\mathcal{F}[h_1(x_3,y_3)*h_2(x_3,y_3)]=\mathcal{F}[h_1(x_3,y_3)]\cdot\mathcal{F}[h_2(x_3,y_3)]=H_1(f_{x_3},f_{y_3})\cdot H_2(f_{x_3},f_{y_3})$。

同样，对于 n 个 LSI 系统，有$G_n(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})=F(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})H(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})$，其中$H(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})=\prod_{i=1}^{n}H_i(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})$。然后再以此来计算第 n 个系统的输出函数$g_n(x_{n+1},y_{n+1})=\mathcal{F}^{-1}[G_n(f_{x_{n+1}},f_{y_{n+1}})]$，其中被积变量为$f_{x_{n+1}}$,$f_{y_{n+1}}$。

1.7 二维采样定理