

Salute to 何砚发 & 代雪峰

目录

Chapter01.光的干涉	7
1.1 波动的独立性、叠加性、相干性	7
1.1.1 电磁波的传播速度和折射率	7
1.1.2 光强	7
1.1.3 机械波的独立性与叠加性	7
1.1.4 波动的特性：干涉现象	8
1.1.5 相干与不相干叠加	8
1.2 由单色波叠加形成的干涉图样	9
1.2.1 相位差与光程差	9
1.两个波源通过不同的介质到达同一点的光程差	9
2.同一个波源先后通过(两种)不同的介质到达某点的光程(而不是光程差)	10
1.2.2 两列单色波的干涉图样	10
1.两列单色波的干涉图样的特点	11
1.3 分波面双光束干涉	12
1.3.1 光源和机械波源的区别	12
1.通常的独立光源不相干的原因	12
1.3.2 获得稳定干涉图样的条件 典型的干涉实验	12
1.相干条件	12
2.典型的分波面干涉实验	13
1.4 干涉条纹的可见度 光波的非单色性、时间相干性、空间相干性	14
1.4.1 干涉条纹的可见度	14
1.4.2 光源的非单色性对干涉条纹的影响	15
1.4.3 时间相干性	16
1.4.4 光源的线度对干涉条纹的影响	16
1.4.5 空间相干性	18
1.5 菲涅尔公式	18
1.一些字母符号的含义：s：subvertical, p：parallel, but not：perpendicular.	18
2.推导 1	19
3.推导 2	20
1.6 分振幅薄膜干涉(一)——等倾干涉	21
1.6.1 单色点光源引起的干涉现象	21
1.6.2 单色发光平面引起的等倾干涉条纹	22

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

1.7 分振幅薄膜干涉(二)——等厚干涉	23
1.7.1 单色点光源引起的等厚干涉条纹	23
1.7.2 增透膜和增反膜	24
1.8 迈克尔孙干涉仪	25
1.8.1 基本原理	25
1.9 法布里-珀罗干涉仪 多光束干涉仪	26
1.9.1 基本原理	26
1.9.2 多光束干涉	26
1.9.3 等振幅多光束干涉	28
1.10 光的干涉应用举例	29
1.10.1 牛顿环	29
Chapter02.光的衍射	30
2.1 惠更斯-菲涅尔原理	30
2.1.1 菲涅尔半波带	30
2.2 菲涅尔半波带 菲涅尔衍射	31
2.2.1 菲涅尔半波带	31
2.2.2 合振幅的计算	31
2.2.3 影响半波带数 k 的有关因素	32
2.2.4 圆屏的菲涅尔衍射	34
2.2.5 波带片	34
2.2.6 菲涅尔直边衍射	35
2.3 夫琅禾费单缝衍射	36
2.3.1 实验装置与衍射图样	36
2.3.2 强度的计算 及 光强分布	36
2.3.3 单缝衍射图样的特点	37
2.4 夫琅禾费圆孔衍射	38
2.4.1 公式推导	38
2.4.2 双圆孔衍射	39
2.5 平面衍射光栅	40
2.5.1 透射光栅	40
2.5.2 谱线的缺级	41
2.5.3 谱线的半角宽度	42
2.5.4 双缝衍射	42
Chapter03.几何光学的基本原理	42

3.1 几个基本概念和定律 费马原理	42
3.1.1 光线与波面	42
3.1.2 几何光学的基本实验定律	43
3.1.3 费马原理	43
3.1.4 单心光束 实像和虚像	43
3.1.5 实物 实像 虚像	43
3.2 光在平面界面上的反射和折射	44
3.2.1 光在平面上的反射	44
3.2.2 光在平面上的折射	44
3.2.3 全反射 光导纤维	46
1.全反射	46
2.光导纤维	46
3.海市蜃楼	46
3.2.4 棱镜	47
3.3 光在球面上的反射和折射	48
3.3.1 符号法则	48
3.3.2 球面反射	48
3.3.3 近轴(光线)条件下的球面反射	49
3.3.4 球面折射	49
3.3.5 近轴(光线)条件下的球面折射	49
3.3.6 高斯公式和牛顿公式	50
3.4 光连续在几个球面界面上的折射 虚物的概念	51
3.4.1 共轴光具组	51
3.4.2 逐个球面成像法	51
3.4.3 虚物	51
3.5 薄透镜	52
3.5.1 近轴条件下的薄透镜成像	52
3.5.2 横向放大率	53
3.5.3 薄透镜的作图求像法	53
1.已知入射光线 or 折射光线, 找折射光线 or 入射光线	53
2.用交线求近轴像点 Q 的位置	54
3.6 近轴物近轴光线成像的条件	55
3.6.1 近轴物近轴光线条件下球面反射的成像公式	55
3.6.2 近轴物近轴光线条件下球面折射的物像公式	56
Chapter04.光学仪器的基本原理	57
4.1 人的眼睛	57

4.1.1 人眼的结构	57
4.1.2 简化眼	57
4.1.3 人眼的调节功能	57
4.2 助视仪器的放大本领	57
4.2.1 放大本领	58
4.2.2 放大镜	58
4.3 目镜	59
4.3.1 目镜的作用	59
4.3.2 两种目镜	59
1.惠更斯目镜	59
2.冉斯登目镜	59
4.4 显微镜的放大本领	60
4.4.1 显微镜的光路图	60
4.4.2 显微镜的放大本领	60
4.5 望远镜的放大本领	61
4.5.1 开普勒望远镜	61
4.5.2 伽利略望远镜	61
4.5.3 反射式望远镜	62
4.5.4 激光扩束器	62
4.6 光阑 光瞳	62
4.6.1 光阑的概念	62
4.6.2 有效光阑和光瞳	62
例题	63
4.7 光度学概要——光能量的传播	64
4.7.1 辐射通量	64
4.7.2 光视效率	64
4.7.3 光通量	65
4.7.4 发光强度	65
4.7.5 照度	66
4.7.6 亮度(非点光源情况下的发光强度)	66
4.8 物镜的聚光本领	66
4.8.1 光源在较近距离时的聚光本领 数值孔径	67
4.8.2 显微镜的聚光本领	67
4.8.3 光源距离较远时的聚光本领 相对孔径	68
1.物镜的聚光本领 相对孔径	68
2.望远镜的聚光本领	69

4.8.4 照相机的聚光本领	69
4.10 助视仪器的像分辨本领	69
4.10.2 人眼的分辨本领	70
4.10.3 望远镜的分辨本领	70
4.10.4 显微镜的分辨本领	70
Chapter05.光学仪器的基本原理	71
5.1 自然光与偏振光	71
5.1.1 光的偏振性	71
5.1.2 自然光与偏振光	72
5.2 线偏振光与部分偏振光	72
5.2.1 由二向色性产生的线偏振光	73
5.2.2 反射光的偏振态	73
5.2.3 透射光的偏振态	75
5.3 光通过单轴晶体时的双折射现象	76
5.3.1 双折射现象	76
5.3.2 光轴、主平面、主截面	77
5.3.3 o 光和 e 光的相对光强	77
5.4 光在晶体中的波面	78
5.5 光在晶体中的传播方向	80
5.5.1 单轴晶体内 o 光和 e 光的传播方向	80
5.5.2 单轴晶体的主折射率	81
5.6 偏振器件	81
5.6.1 尼科耳棱镜	81
5.6.2 沃拉斯顿棱镜	82
5.6.3 波片	82
5.7 椭圆偏振光和圆偏振光	83
5.7.1 椭圆偏振光和圆偏振光的描述	84
5.7.2 椭圆偏振光和圆偏振光的获得	85
5.7.3 自然光改造成椭圆偏振光或圆偏振光	86
5.8 偏振态的实验检验	87
5.8.1 只用一个偏振片 线偏振光的检验	87
5.8.2 偏振片前放置一个 1/4 波片 椭圆偏振光和圆偏振光的检验	87
5.8.3 补偿器	88
5.9 偏振光的干涉	89

5.9.1 偏振光的干涉	89
5.9.2 偏振光干涉的强度分布	90
Chapter07.光的量子性	93
7.1 光的相速度和群速度	93
7.2 经典辐射定律	95
7.2.1 热辐射	95
7.2.2 黑体辐射	96
1. 韦恩位移定律	96
2. 瑞利-金斯公式	96
7.3 普朗克辐射公式	97
7.3.1 能量子假说	97
7.4 光电效应	98
7.4.1 光电效应及其实验规律	98
1. 总结所有的实验结果，光电效应的规律可归纳为如下四点：	99
7.5 爱因斯坦的量子解释	99
7.5.1 爱因斯坦的光子假设及其光电方程	99
7.5.2 对光电效应的量子解释	100
7.5.3 遏止电压与入射光频率的关系	100
7.5.4 光子的质量和动量	101
7.5.5 光压	101
7.6 康普顿效应	102
7.6.1 康普顿效应	102
7.7 德布罗意波	103
Chapter08.现代光学基础	104
8.1 光与物质相互作用	104
8.1.1 原子发光机理	104
8.1.2 爱因斯坦关于受激辐射的预言	105
8.2 激光原理	106
8.2.1 粒子数反转	106
8.2.2 实现粒子数反转的物质	107
8.2.3 光学谐振腔	108

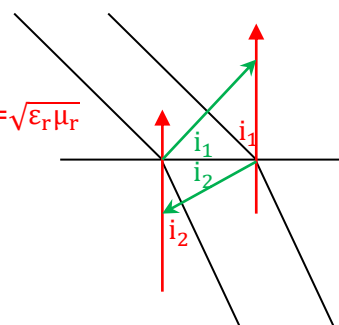
Chapter01.光的干涉

1.1 波动的独立性、叠加性、相干性

1.1.1 电磁波的传播速度和折射率

1. 由于 $\frac{c}{\sin i_1} = \frac{v}{\sin i_2}$, 可得 $\frac{c}{v} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$, 又由于 $\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, 因此 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

光是电磁波。电磁波在光频段的 $\mu_r = 1$, 因此对应的 $n = \sqrt{\epsilon_r}$ 。



1.1.2 光强

1. 电磁波的**电场强度 E**、**磁场强度 H** 均 \perp 传播方向——因此**电磁波是横波**。

2. **维纳实验的理论分析**证明, 对人眼或感光仪器起作用的是**电场强度 E**。因此我们常说的光波中的振动矢量通常指**电场强度 E**。

3. 波动的传播总是伴着能量的传递, 这个过程一般用**平均能流密度 $\bar{S} = I$** 表示(通过 \perp 传播方向的单位面积的功率)。电磁波的 **I** 正比于**电场强度 E** 的振幅 A_0 的平方【电磁学中, 可以给出在空间中独立传播的电磁波的 $I = \bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} E_0^2$, 电磁学中的 E_0 相当于这里的振幅 A_0 】。

1.1.3 机械波的独立性与叠加性

独立性: 只要振动不十分强烈, 几个振源发出的波相遇于同一区域时, 可以各自保持自己的特性(f、A、振动方向、传播方向等), 继续前进, 彼此不受影响。

叠加性: 在相遇区域内, 介质中的质点的合位移=各波分别单独传播到此处所引起的位移的矢量和(即可按照矢量加法简单相加)。**叠加性以独立性为条件**。

*通常情况下，波动方程是线性微分方程，若两个函数都是它的解，则它们的和也将是该微分方程的解。

**若两波 f 相等，且在观察时间内波不中断，且相遇处的振动方向几乎共线，则叠加后产生的合振动在有些地方加强、有些地方减弱，这一强度按空间周期性变化的现象称为干涉。【注：单列电磁波的强度 $I = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} E_0^2$ ，是通过 $I = \overline{S} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} S \cdot dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E H \cdot dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0 H_0 \cos^2(\omega_1 t - k_1 z) \cdot dt = \frac{1}{2} E_0 H_0$ 求出的，而两列波(不一定是电磁波)的合振动强度 I 的计算方法将在 1.1.5 中介绍，方法类似，相当于求 $\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 z) \cdot dt = \frac{1}{2} E_0^2$ 的过程，之后将给出 $I = \overline{A^2} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt$ ，其大小与 $\varphi_2 - \varphi_1$ 有关，而 $\varphi_2 - \varphi_1$ 又与是空间位置的函数，所以 I 是随空间分布的】

***在叠加区域内各点的振动强度有一定的非均匀分布，这种稳定分布的整体图像称为干涉图样。

1.1.4 波动的特性：干涉现象

波动的特征：能量以振动的形式在物质中依次转移，物质本身并不随波(能量)移动。相反，若以微粒为载体来迁移能量时，则能量随着微粒一起移动。

强弱按一定分布的干涉图样的出现肯定了光的干涉，而光的干涉肯定了光的波动本性。

1.1.5 相干与不相干叠加

设两个振动方向相同【即设想的两个线振子的振动路径所在直线[线段]的空间取向相互平行】的光源各自独立地在介质中同一点引起的两个电场强度 E 的振动状态分别为： $E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ 和 $E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ 【考虑的是空间某点，对应振动方程，而不是波动方程】。则根据波的叠加性： $E = E_1 + E_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$ 。

*其中根据旋转矢量法可得：合振幅的平方 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ；合初相 φ 满足 $\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$ 。

实际观察到的为合振动的(平均)强度 $I = \overline{A^2} = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \int_0^T \cos(\varphi_2 - \varphi_1) dt$ ，当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{常值}$ 时， $I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 为常值(红色部分称为干涉项)，即该点处有该点所独有的 $\varphi_2 - \varphi_1$ 属性所赋予的稳定强度。【强度本身就是平均意义上的；这里加了平均二字仅仅为了辅助呈现脑海中的图像】

*当 $A_1=A_2$ 时, $I=2A_1^2[1+\cos(\varphi_2-\varphi_1)]=4A_1^2\cos^2(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})$

*当 $\varphi_2-\varphi_1=f(t)$ 时, 由于 $f(t)$ 随 t 变化不慢, 并且 $f(t)=\text{圆频率之差}\cdot t$, 则 $f(t)$ 会均匀地取遍区间 $\cup_{k=0}^{\infty}[2k\pi, 2k\pi+2\pi]$, 则等效地, 在观察时间段 $[0,t]$ 内, $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\cos(f(t))$ 中的 $f(t)$ 会概率均等地多次取遍 $[0,2\pi]$ 之间的一切可能值, 因此 $\int_0^t \cos(\varphi_2-\varphi_1)dt=0$, 因此此时 $I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\int_0^t \cos(\varphi_2-\varphi_1)dt=A_1^2+A_2^2$ 。此时, 合振动的平均强度简单地等于分振动的强度之和, 不出现干涉现象, 称这种振动为不相干。

只要两个 f 相同的波源的振动方向不互相垂直, 则取它们同向的分量叠加也有上述结论。

1.2 由单色波叠加形成的干涉图样

1.2.1 相位差与光程差

1.两个波源通过不同的介质到达同一点的光程差

由于波源发出的波所经过的任何材料不同的介质时, 所引起的各处质元振动频率 f 均等于波源振动频率, 因此对于同一波源而言, r 不同的各点的圆频率 w 仍然保持不变。如果两个波源的 f 相同, 则这两个波源的两个传播方向的并集上的任意两点的 w 和 f 都会相同。(因为每一点都和自己的波源同, 而波源又与波源同)

另外, 波源振动频率 $\frac{w}{2\pi}$ 与 $c=\lambda f$ 中的 f 相同, 即与在真空中传播的电磁波的传播速度所对应的频率相同, 于是有 $w=2\pi f$ 。而波在介质中的传播速度所对应的频率也由其决定, 即有 $v_1=\lambda_1 f$ 、 $v_2=\lambda_2 f$ 。

因此我们有如下波动方程: $E_1=A_1\cos(wt-k_1r+\varphi_1)$ 和 $E_2=A_2\cos(wt-k_2r+\varphi_2)$, 其中 $k_1=\frac{w}{v_1}=\frac{w}{c}\cdot\frac{c}{v_1}=\frac{2\pi f}{\lambda f}\cdot n_1=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot n_1$ 、 $k_2=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot n_2$, 于是 $\Delta\varphi=k_2r_2-k_1r_1+\varphi_1-\varphi_2$, 现假设 $\varphi_1-\varphi_2=0$, 则 $\Delta\varphi=(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot n_2r_2-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot n_1r_1)=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(n_2r_2-n_1r_1)$ 。其中 $\Delta=n\cdot r$ 称为光程; 由于 $\Delta=n\cdot r=\frac{c}{v}\cdot r=c\cdot\frac{r}{v}=c\cdot\text{光在介质中走的时间}$, 所以光程 Δ 可以被解释为: 在同样的时间间隔下, 将介质中所走的路程换算为在真空中所走过的路程, 即为光程。【注: 波动方程的相位之差 $\Delta\varphi$ 通常是 1 号-2 号, 这样的 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(n_2r_2-n_1r_1)$ 在表达式上/光程差上, 才是所期望的 2 号光程-1 号光程, 不过相位差 $\Delta\varphi$ 在含义上却是 1 号-2 号的, 且在 $\Delta\varphi$ 中的初相差 $\varphi_1-\varphi_2$, 也是 1 号-2 号的; 而在之前, 对于空间某点的振动,

两个振动方程的相位之差 $\Delta\varphi$ 却通常是2号-1号, 即 $\varphi_2 - \varphi_1$, 使得其在表达式上仍然遵循2号-1号这种“改变量”、“末-初”的“微积分思想”】

2.同一个波源先后通过(两种)不同的介质到达某点的光程(而不是光程差)

仍然有类似的结论: $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_2 r_2 + n_1 r_1)$ 。其中 r_1 、 r_2 分别为先后经过的材料厚度, 而不是波源 S_1 、 S_2 分别到同一点的距离。这里的总光程等于分立光程的求和。

可以这样证明: 波源 S_1 所对应的第一种介质中的波动方程: $E_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 r + \varphi_1)$, 其在第二种介质中的波动方程: $E_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 r_1 - k_2(r - r_1) + \varphi_1)$ 和波源 S_3 的波动方程 $E_3 = A_3 \cos(\omega t - k_3 r + \varphi_3)$ 。

假设当 E_1 中的 r 取 $r_1 + r_2$ 时所对应的点, 与 E_3 中的 r 取 r_3 所对应的点相同, 则光程差 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_1 r_1 + n_2 r_2 - n_3 r_3)$ 。其中便可见绿色部分 $n_1 r_1 + n_2 r_2$ 即为 S_1 到 $r_1 + r_2$ 处的光程。

1.2.2 两列单色波的干涉图样

该模型为以 S_1 、 S_2 为焦点的双叶旋转双曲面集(簇)。若作一平面 $\perp S_1 S_2$ 的中垂面, 则该平面可视为光屏, 平面与双曲面簇的交线即为光屏上的条纹; 若过 S_1 、 S_2 作一平面, 则该平面与双曲面簇的交线即为平面双曲线簇, 同时若该平面与光屏的交线进一步与光屏上的条纹相交后, 即为分布在光屏中央(中线)的点纹。

我们的推导建立在后一个描述上。由于相位差 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$, 因此 $\Delta\varphi = k \cdot \pi$ 所对应的 $\delta = \frac{k}{2} \cdot \lambda$, 又因 $\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 = r_2 - r_1 = d \cdot \sin\theta \approx d \cdot \theta \approx d \cdot \tan\theta = d \cdot \frac{y}{r_0}$, 【注: 波动方程的光程差 $n_2 r_2 - n_1 r_1$, 对应相位差 $\varphi_1 - \varphi_2$ 】因此有 $\delta = d \cdot \frac{y}{r_0}$ 以及 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta$, 进一步代入 $\delta = \frac{k}{2} \cdot \lambda$ 即有 $y = \frac{r_0}{d} \cdot (\frac{k}{2} \lambda)$ 。当 k 取偶数 $2j$ 时, $y = \frac{r_0}{d} \cdot j \lambda = \frac{r_0}{d} \cdot 2j \cdot \frac{\lambda}{2}$, 这表示亮条纹的 y 向分布; 当 k 取奇数 $2j+1$ 时, $y = \frac{r_0}{d} \cdot \frac{2j+1}{2} \lambda = \frac{r_0}{d} \cdot (2j+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, 这表示暗条纹的 y 向分布。可见中间的亮条纹对应 $j=0$, 因此叫0级亮条纹。对于明(暗)纹, 我们称两相干波在这里相干加强(减弱)或相干相长(相消)。【即使两个单色点光源发出的同波长的单色光的光矢量振动面都朝着各种方向, 但对于指定的某个振动面、振动方向的光, 两个光源总有发出这样的成分的部分, 所以可以看成无数对发出不同振动方向的同波长单色光的光源形成的干涉图样的叠加; 另外, 只要振动不相互垂直, 两个不同振动方向的光源, 它们发出的光的同向的分量叠加也可有亮度不高的干涉图样】

设双孔对中央亮条纹的张角为 $\Delta\theta$, 则 $\Delta\theta \approx \tan \Delta\theta = \frac{2 \tan \frac{\Delta\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\Delta\theta}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{d}{r_0}}{1 - 0} = \frac{d}{r_0}$, 则 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta$ 同样也可以表示为 $y = \frac{1}{\Delta\theta} \cdot \delta$, 这就相当于通过干涉, 把 δ 放大成了 y , 放大系数为 $\frac{1}{\Delta\theta}$; 而

$\delta = d \cdot \frac{y}{r_0}$ 同样也可表示为 $\delta = \Delta \theta \cdot y$ 。对于前者，我们推荐这么表示，但不推荐后者这么表示；理由便是： $\delta = d \cdot \frac{y}{r_0}$ 本身就有物理含义，且其出处更有物理意义。

***由 $\delta = \Delta \theta \cdot y$ 可得 $\lambda = \Delta \theta \cdot \Delta y$ 。

1. 两列单色波的干涉图样的特点

(1). 各级亮条纹的光强相等 (∵ $A_1 = A_2$ ，它们到达相同点时传播 approximately 相同距离，衰减相同倍数后仍然相等，因而均以 $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ 叠加后的光强 $I = 2A_1^2 [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = 4A_1^2 \cos^2(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})$ 相互之间差别不大)。【这一点 link to 惠更斯—菲涅尔原理】

(2). 白光作为光源时，除了 $j=0$ 的中央亮条纹外，其余各级亮条纹都带有各种颜色。当 j 较大时，不同级数的各色条纹因相互重叠而得到均匀的强度。正因用白光观察时可辨认的条纹数目很少，故一般实验都用单色光作为光源。【这一点 link to 1.4.2】

(3). 干涉图样实质上体现了参与相干叠加的光波之间的相位差的空间分布。换句话说，干涉图样的强度记录了相位差的信息。【由 1.2.1 所言，便可以理解这里的(1).和(3).中的 $\Delta \varphi$ 所指的不同了，(1).描述的是振动方程的叠加，因此在合振动方程中，相位差 $\Delta \varphi$ 上习惯于使用的是 $\varphi_2 - \varphi_1$ ；而(3).描述的是波动方程的叠加，因而采用的是 $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 】

如果 $\varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$ ，则干涉图样的模样仍然不变，只不过整个图样相对于 S_1 、 S_2 有位移，条纹移动的距离和方向，要看 $\varphi_1 - \varphi_2$ 的大小和符号。【相当于 δ 相对于原来加减了某个常数，则 $y = \frac{1}{\Delta \theta} \cdot \delta$ 跟着变化】

那么即使振源是不相干的，即 $\varphi_1 - \varphi_2$ 时刻在改变，仍然将有：在任意一个瞬间和之后的微小时段中， $\varphi_1 - \varphi_2$ 可看作一个非零常数，干涉图样仍然按照上一段的规律分布；只不过由于 $\varphi_2 - \varphi_1 = f(t)$ 随时间变化过快，导致整个干涉图样在空间移动不定；如果 $\varphi_1 - \varphi_2$ 能作为常数稳定的时间非常短，则我们无法察觉这种迅速变化，而只能观察其平均强度，这样干涉图样就显示不出来了。这种振源就被认为是不相干的；只有在 $\varphi_1 - \varphi_2$ 维持不变的条件下，干涉图样才能在空间稳定。相干与不相干在本质上都是波叠加的结果。

1.3 分波面双光束干涉

1.3.1 光源和机械波源的区别

1.通常的独立光源不相干的原因

光是由原子或分子的辐射引起的。在两个独立的光源，甚至同一个光源的不同部分中，一般的原子辐射均是互不相关的(除了激光光源)。每一批发出辐射的原子，由于其能量的损失或周围原子的作用，辐射过程往往会中断，持续时间很短(约 10^{-8}s)。当一批原子发光后，另一批原子发光时，初相已经不同了，并且由于各批次原子发光时间、受激状态的随机，不仅每批原子的辐射初相随机，各批原子的辐射初相的相位差也将是随机的。因此不管指定地选取哪两批原子(除了指定相位差恒定的两批原子)，它们间的相位差是随着时间改变的。

由于原子辐射的复杂性，在不同瞬时叠加所得的干涉图样相互替换得极快且不规则，以至于肉眼和通常的探测仪器都观察不到。

由此，能否观察到光束的干涉现象，受到两方面的限制，即光源的相干性和接收器的时间响应能力(可以分辨的最小时间——即接收器响应入射光的速度，以探测器的输出信号由零上升到幅值的63%所需要的时间来量度)。快速光电接受器件的出现使得可以看到比过去短暂的多的干涉现象。

1.3.2 获得稳定干涉图样的条件 典型的干涉实验

1.相干条件

由上可知：为了观察到稳定的光的干涉，则任何时刻到达观察点的应该是**同一批原子发射出来**，但却**经过不同光程**的两列光波。各原子的发光尽管迅速地改变，但**任何初相位的改变和改变程度总是同时且等量**地发生在这两列光波上。因此它们到达同一观察点时**总保持着不变的初相差**。经过这样的特殊装置的两束光便是相关的。

在**分波面干涉**中，波的各个不同部分作为发射次波的光源，次波再交叠在一起发生干涉；在**分振幅干涉**中，波本身被分成两部分，各自走过不同的光程后重新叠加发

生干涉【分振幅有点强度分配的意思，一部分反射(占一部分强度)，一部分透射(折射)，折射后再反射，之后相遇】。

2.典型的分波面干涉实验

(1).杨氏实验

强烈的单色光照到一开有小孔 S 的不透明的遮光板(光阑)上，后面放置另一块开有两个小孔 S_1 、 S_2 的光阑。杨氏利用惠更斯原理解释这一实验，利用狭缝(小孔) S 从普通单色光源发出的光场中获取一线(点)光源， S_1 、 S_2 位于由 S 发出的光波的同一个波面上，那么它们永远有着相同的(初)相位，由于 S 、 S_1 、 S_2 足够小， S_1 、 S_2 就成为两个相干光源。

* S 、 S_1 、 S_2 同样可以是互相平行的狭缝。

* “单色光+狭缝”的搭配可用“激光束直接照射 S_1 、 S_2 ”代替。

* “激光束直接照射 S_1 、 S_2 ”可用“激光器的输出端的高反射膜上刻画两条狭缝”代替。

(2).菲涅尔双面镜

杨氏实验中小孔或狭缝都很小，其边缘往往对实验产生影响(衍射)而使问题复杂化。菲涅尔这样改善了它：两块平面镜 M_1 、 M_2 镜面交角接近 180° ， M_2 的反向延长面 OM'_2 与 OM_1 的夹角只有 θ° 。由于 S_1 为 S 关于 M_1 的镜像， S_2 为 S 关于 M_2 的镜像(S_1 、 S_2 相对位置与之前的相同，因此可以想象 S 在它们的右上方；因 S_1 在 S_2 的上方，则 M_1 在 M_2 的左上方；)，则 $SO=S_1O=S_2O$ ，则 S 、 S_1 、 S_2 共圆，设此圆半径为 r ；另设 O 点到光屏距离为 L 、 S 右侧有个遮光光阑 A (防止光源发出的光没有经过反射直接到达光屏)。

由于 $SS_1 \perp OM_1$ 、 $SS_2 \perp OM'_2$ ，则 $\angle S_1SS_2 = \angle M_1OM'_2 = \theta$ ，则 $\angle S_1SS_2 = 2\angle S_1OS_2 = 2\theta$ ；又由于 $S_1O=S_2O$ ，且 r_0 所对应的直线为 S_1S_2 的中垂线，则 O 在 r_0 上，且 r_0 平分 $\angle S_1OS_2$ ；那么 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta = \frac{r \cdot \cos\theta + L}{2 \cdot r \cdot \sin\theta} \cdot \delta \approx \frac{r+L}{2 \cdot r \cdot \sin\theta} \cdot \delta$ 。若以激光器作为光源 S ，则相当于“强单色光+狭缝”的 S 位于无限远处，此时 $r \gg L$ ，则 $y = \frac{r+L}{2 \cdot r \cdot \sin\theta} \cdot \delta \approx \frac{r}{2 \cdot r \cdot \sin\theta} \cdot \delta = \frac{1}{2 \cdot \sin\theta} \cdot \delta$ 。其中 $\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 = r_2 - r_1$ ，且 $\delta = \frac{k}{2} \cdot \lambda$ ，其中 $\Delta\varphi = k \cdot \pi$ 。

(3).劳埃德镜

劳埃德仍使用强单色光照射光阑上的狭缝 S ，创造线状光源，其射出的光以很大(接近 90°)的入射角 i_1 照射到一块下表面涂黑的平玻璃板 M 上，光仅从它的上表面反射。光屏 D 上可观察到一组明暗相间的平行于线光源 S 的直线形条纹。在这个实验中， S

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

本身和它的虚像形成了相干光源。在该实验中，若将光屏 D 移动到紧靠 M 右边缘，此时 D 与 M 的交点处理论上由于光程差=0 因而出现亮条纹，但是实际上却是暗条纹。并且这个时候所有理论上是亮条纹的地方全都变成了暗条纹。

这一变化一定是在反射过程中发生的，因为不可能在均匀物质或真空中的传播过程中无故出现这种变化。由于反射仅在介质表面发生，因此振动的相位在这里必然突然改变了 $(2k+1)\pi$ 。假设这是相位超前 $(2k+1)\pi$ ，即 $E_2 = A_2 \cos(\omega t - k_2 r + \varphi_2)$ 中当 r 的取值对应光线与镜面交点时，**相位提前**(+)了 $(2k+1)\pi$ ，即 $E_2 = A_2 \cos[\omega t - k_2(r - (2k+1)\frac{\pi}{k_2}) + \varphi_2]$ ，**换算成光程(相当于提前走过了其中某段路程而跳过了这段路程)相当于 S'P 损失了 $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$** (S' 是 S 的镜像、P 为屏上点)，根据 $\delta = S'P - SP$ ，则光程差 δ 也损失了 $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ，由于旧理论 $\delta = \frac{d}{r_0} \cdot y_0$ ，则假设新理论下有 $\delta = \frac{d}{r_0} \cdot y_0 - (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ，则将其代入 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta$ ，即有 $y = \frac{r_0}{d} \cdot (\frac{d}{r_0} \cdot y_0 - (2k+1)\frac{\lambda}{2}) = y_0 - \frac{r_0}{d} \cdot (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 。一般地，相位的超前与滞后在 $[-\pi, \pi]$ 间讨论，因此取 $k=0$ ，于是称其为半波损失。

光在介质表面反射，且入射角接近 90° (掠射) 时，产生了半波损失。【从光疏到光密介质表面上掠射时，产生了半波损失】

(4).维纳驻波

从光疏到光密介质表面上垂直反射时，也产生了半波损失。

*光在反射时产生半波损失是和光的电磁本性有关的，将在 1.5 节中通过菲涅尔公式来讨论。

1.4 干涉条纹的可见度 光波的非单色性、时间相干性、空间相干性

1.4.1 干涉条纹的可见度

*为描述干涉图样中条纹的强弱对比，需要引入可见度的概念： $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 。

当暗条纹全黑时，即 $I_{\min} = 0$ 时，条纹的反差最大，此时 $V = 1$ ；当明暗条纹强度接近时， $I_{\max} \approx I_{\min}$ ，此时 $V \approx 0$ ，条纹模糊不清甚至不可辨认，此时 $V \approx 0$ ；当 I_{\max} 与 I_{\min} 并不接近但 $I_{\max} + I_{\min}$ 仍然很大时，条纹总体强度将盖过(掩盖)明暗条纹的强度差。

影响干涉条纹可见度的大小因素很多。对于理想的相干点光源发出的光束，主要因素为振幅比。之前提到 $I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ，则 I_{\max} 对应 $(A_1 + A_2)^2$ ， I_{\min} 对应 $(A_1 - A_2)^2$ ，代入 $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 便有： $V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\frac{A_1}{A_2}}{\frac{A_1^2}{A_2^2} + 1} = \frac{2\frac{A_2}{A_1}}{1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}}$ 。如果假设 $I_0 = A_1^2 + A_2^2$ ，则 $I = I_0[1 + V\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$ 。

1.4.2 光源的非单色性对干涉条纹的影响

由于波长范围 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 范围内，每一波长的光均形成各自的一组干涉条纹【由于光速 c 相同， λ 不同的光， f 也不同，则 $w = 2\pi f$ 不同，则不同 λ 的光，相位差不恒定，无法发生干涉，即没有固定点的合强度的稳定的加强和减弱】，而且各组条纹除了 0 级条纹外，其他各相同的 j 级(亮)条纹互相均有一定的相对位移 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot j \Delta\lambda$ (这里的 $\Delta\lambda$ 在含义上可以比 “ $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ ” 中的 $\Delta\lambda$ 更小 $=$)，所以各组条纹的非相干叠加的结果会使得条纹的可见度下降。

以杨氏干涉实验为例，由于在 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot j \Delta\lambda$ (这里的 $\Delta\lambda$ 就是指 “ $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ ” 中的 $\Delta\lambda$) 以内，充斥着同一干涉级、波长在 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 之间的各种波长的明条纹。由此(是指更之前的一个 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot j \Delta\lambda$) 式子可知，随着干涉级 j 的提高，同一级但不同 λ 的干涉条纹间的相互宽度增大，当波长为 $\lambda + \Delta\lambda$ 的第 j 级亮条纹与波长为 λ 的第 $j+1$ 级亮条纹重合时：在 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot (j+1)\lambda \sim \frac{r_0}{d} \cdot (j+1)(\lambda + \Delta\lambda)$ 之间，会充斥着 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 之间的各种波长且同一干涉级 $(j+1)$ 的明条纹们；然而由于 $\delta = (j+1)\lambda = j(\lambda + \Delta\lambda)$ ，同时，同样的这段 $\frac{r_0}{d} \cdot j(\lambda + \Delta\lambda) \sim \frac{r_0}{d} \cdot (j+1)(\lambda + \Delta\lambda)$ 之间，又是同一波长 $(\lambda + \Delta\lambda)$ 且相邻干涉级之间的一条暗条纹所在地。——前者掩盖了后者，使得后者并不那么暗了；后者削弱了前者，使得前者并不那么亮了。

由于 $(j+1)\lambda = j(\lambda + \Delta\lambda)$ ，可得： $j = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ ，即使 $\Delta\lambda$ 无法整除 λ ，由于 $\Delta\lambda$ 相比于 λ 实在太小，因此 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 所算出来的 j 的整数部分足够大以至于可以忽略其小数部分。于是干涉条纹的可见度降为 0 所对应的干涉级 $j = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ ，且其所对应的光程差为 **实现相干的最大光程差**：(我们称之为 **相干长度**) $\delta_{\max} = (j+1)\lambda = j(\lambda + \Delta\lambda) = (\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} + \lambda) \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 【或者直接忽略掉 $(j+1)\lambda$ 中的 λ 或 $j(\lambda + \Delta\lambda)$ 中的 $j \Delta\lambda$ ，得到 $j\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 】。这同时也决定了能看得见的亮条纹在光屏上出现的最大 $y_{\max} = \frac{r_0}{d} \cdot \delta_{\max}$ 。

1.4.3 时间相干性

任何光源发射的光波只有在有限的空间范围内并且在一定的时间内才可以看作是稳定的。即光源发射的是有限长的波列。波列的长度由原子发光持续时间和波的传播速度决定。

仍以杨氏干涉为例，光源 S 先发射出一列光波 a，a 被两个狭缝 S_1 、 S_2 分为两个波列 a'、a''。它们有相同的频率和恒定的相位差，可以发生干涉。但若在光屏中 $y > 0$ 的区域，y 较大以至于光程差较大，以至于当 a' 的尾部都快要通过且离开 P 时，a'' 的头部还没到达 P，或者说当 a'' 的头部刚到达 P 时，a' 的尾部早已经过 P 且离开 P 了。这样的话两列波便不能相遇，当然无法发生干涉。

若光源 S 发射了一列光波 a 后接着发射了一列光波 b，并且 S_1 分割出的波列 b' 能够和 a'' 相遇于 P 点，但由于波列 a、b 没有恒定的相位关系，因此 a'、b' 也没有恒定的相位关系，因此它们在考察点 P 处无法发生干涉。

因此要想发生干涉，则光程差 $\delta \leq$ 波列长度 L，又因为非单色性中介绍了能实现相干的光程差有最大值 $\delta \leq \delta_{\max}$ ，因此有 $\delta \leq \min(L, \delta_{\max})$ ，若 δ_{\max} 已然确定了，那么为了使得能发生干涉(时间相干性)又能观察到干涉(非单色性)的 |y| 范围最大，即要使得对应的 δ 取值范围越大越好，那么我们要使得 $L \geq \delta_{\max}$ ，即有 $L_{\min} = \delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ ，由波列的最小长度 L_{\min} 我们可以确定波列通过考察点所需的时间 $t_0 = \frac{L_{\min}}{c}$ ，我们称之为相干时间，它是光通过相干长度 δ_{\max} 所需的时间，即也是原子发光持续时间。

1.4.4 光源的线度对干涉条纹的影响

在光的单色性对干涉条纹的影响中，我们说到谱线宽度的增大会导致条纹可见度的下降。同样，光源线度的增大也将使得可见度下降。实际的光源总有一定宽度，可将其视为许多线光源构成，也可将其视为许多对线光源【这里的“线光源”是指：一个能够发出连续的可见光的点状发光源，如果它的光在空间中只向一个方向成线性传播。而之前的有些地方是顾名思义的，即发光的光源是一线的】构成。我们首先讨论一对线光源的情况。

当 S' 从 S 点向上移动时， S' 所产生的干涉图样相对于 S 产生的图样向下平移，若 S' 的干涉图样的最大值恰好与 S 的干涉图样的最小值重合，则干涉条纹的可见度降为 0。设 $d' = SS'$ ，S 到光阑(两孔所在平面)的距离为 r_0' ，对于光源 S' ，根据 $\delta_1 = r_2' - r_1'$ 、 $r_2' + r_1' \approx 2r_0'$ ，我们有 $2r_0' \cdot \delta_1 \approx (r_2' + r_1')(r_2' - r_1') = r_2'^2 - r_1'^2 = \left[\left(\frac{d}{2} + d'\right)^2 + r_0'^2\right] - \left[\left(\frac{d}{2} - d'\right)^2 + r_0'^2\right] +$

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

$r_0'^2] = d \cdot 2d'$, 得到 $r_0' \cdot \delta_1 = dd'$, 于是 $\delta_1 = \frac{dd'}{r_0'}$ 。其中, δ_1 为 S' 到光阑(两个孔)的光程差、 δ_2 为光阑(两个孔)到光屏的光程差【两个 δ 都是 2 号(下光程)-1 号(上光程), 对应的小孔也是下面是 S_2 , 上面是 S_1 ; 这样设定的话, 由于相协调地将 S' 设定为在 S 上方, 则 $r_2' - r_1'$ 是正的; 而 y 也设定为向上为正, 则对于在 y 轴正半轴的参考点 P, $r_2 - r_1$ 也是正的, 这样 $\delta = \frac{d}{r_0} \cdot y$ 左右两边的 δ, y 就同号而和谐了; 当然, 对于波动方程, 我们总希望用光程差的 2 号-1 号, 来描述相位差上的 1 号-2 号】、则 S' 经过光阑到光屏的总光程差为 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 。在之前的实验中, 或者就在这个实验中, S 经过光阑到光屏的总光程差也为属于它的 $\delta = \delta_1 + \delta_2$, 不过由于其的 $\delta_1 = 0$, 因而我们将 δ_2 直接认定为其的 δ 。【所以之前的 $\delta = \frac{d}{r_0} \cdot y$ 准确的说应该为 $\delta_2 = \frac{d}{r_0} \cdot y$; 同理 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta$ 也该被写为 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta_2$ 】

由于 S' 和 S 的同一干涉级对应着 S' 的 $\delta = S$ 的 δ (因为对于亮条纹而言, $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta_2 = 2j\pi$, $\delta_2 = j\lambda$, 而 S 的 $\delta_2 = \text{公有的 } \delta$), 那么当 S' 的 $\delta_1' = \frac{\lambda}{2}$ 时, S' 的某干涉级的 $y' = \frac{r_0}{d} \cdot \delta_2' = \frac{r_0}{d} \cdot (\text{公有 } \delta - S' \text{ 的 } \delta_1') = \frac{r_0}{d} \cdot (\text{公有 } \delta - \frac{\lambda}{2}) = \frac{r_0}{d} \cdot \delta - \frac{r_0}{d} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{r_0}{d} (j\lambda - \frac{\lambda}{2}) = \frac{r_0}{d} (j - \frac{1}{2})\lambda$, 而 S 的对应干涉级的 $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta_2 = \frac{r_0}{d} \cdot (\text{公有 } \delta - S \text{ 的 } \delta_1) = \frac{r_0}{d} \cdot (\text{公有 } \delta - 0) = \frac{r_0}{d} \cdot \delta = \frac{r_0}{d} \cdot j\lambda$, S' 的同 j 干涉级的高度 y 比 S 的小了 $\frac{r_0 \cdot \lambda}{d \cdot 2}$, 于是 S' 的干涉图样会向下移动, 其亮纹将遮盖 S 的暗纹。

【一个类似的例子: 若在狭缝 S_2 靠 S 那侧安放一块薄玻璃板, 可知由于下路 r_2' 走过的光程变长, 上路 r_1' 光程不变, 导致 δ_1 变大, 而为了考察同一干涉级的条纹相对移动状况, δ 设定为不变, 因而 δ_2 会变小, 因而在放置了玻璃板后, 干涉图样中的所有同一 j 的干涉级均向下平移, 因为对应的 y 随着 δ_2 减小了。】

【另一道类似的题: 若第 5 级亮条纹变成中央亮条纹: 即 $j=5$ 对应的 y 的位置被 $j=0$ 的条纹占据了, 说明上移了; 则 $\delta_2 = r_2 - r_1$ 变大了, $y = \frac{r_0}{d} \cdot \delta_2$ 才会变大; 而 δ 不变, 则 $\delta_1 = \delta - \delta_2$ 变小, 即 $r_2' - r_1'$ 变小了, 则一定是 r_1' 对应的光程变大了, 即 S_1 左侧放置了块 $n=1.5$ 的玻璃板(当然也可以是 S_2 右侧放置了块玻璃板)。因此 $\Delta \delta_1 = -(1.5 - 1)L$, $\Delta \delta_2 = (1.5 - 1)L$, 而 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot (1.5 - 1)L$, 又 $\Delta y = \frac{r_0}{d} \cdot 5\lambda$, $\therefore 0.5L = 5\lambda$, 即玻璃板厚度 L 为 10λ 】

那么干涉条纹可见度为 0 的条件便是 $\delta_1 = \frac{dd'}{r_0'} = \frac{\lambda}{2}$, 所以应有: $\delta_1 = \frac{dd'}{r_0'} \leq \frac{\lambda}{2}$, 于是我们得到 $d' \leq \frac{r_0'}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}$, 如果令 $d_0' = 2d'$, 则 $d_0' \leq \frac{r_0'}{d} \cdot \lambda$, d_0' 便是可分成许多对相距为 d' 的线光源对的扩展光源的临界宽度。

1.4.5 空间相干性

若已知扩展光源的(临界)宽度为 d_0' 【比如实验所用光源已经选定了(线度不能再变得更小了), 则我们需考虑双缝间距, 以保证实验能观察到干涉图样】, 则双缝之间的距离 $d \leq \frac{r_0'}{d_0'} \cdot \lambda$, 即双缝之间的最大距离 $d_{\max} = \frac{r_0'}{d_0'} \cdot \lambda$ 。

1.5 菲涅尔公式

1.一些字母符号的含义: s: subvertical, p: parallel, but not: perpendicular.

(1).z-O-x 面上的设定和约束条件:

现假设入射光 i_1 、折射光 i_2 、反射光 i_1' 共处于 x-O-z 平面上, 其中 z 轴向下↓、x 轴向右→; i_1 在左上↖象限(朝向↘)、 i_2 在右下↘象限(朝向↘)、 i_1' 在右上↗象限(朝向↗)。并且记这三种光的电矢量在该平面的分量【电矢量不一定在传播路径与法线构成的平面内】分别为: 朝向↗的 A_{p1} 、朝向↗的 A_{p2} 、朝向↘的 A_{p1}' , 它们均朝向传播方向的右侧, 与传播方向共同构成平面直角右手坐标系【这是为了接下来对应的三个 H 的参考方向相同】。

根据光的电磁理论, 三个光波在分界面处(指的是 z-O-x 面与两种介质的分界面的交线——x 轴)满足边界条件。即在分界面(x 轴)上, 电矢量 **A** 和磁矢量 **H** 的沿分界面(x 轴)方向的分量在入射前和入射后应取连续值【切向分量的连续性, 本身是指电矢量本身与法线所在的平面中, 朝着平面与界面的交界线的投影分量的连续; (平面)分量的切向分量也是连续的, 因为你在前一个方程左右两边同乘以朝 z-O-x 面的投影 \cos 即可得到此结论(这里是先线投影, 再面投影)】, 即有相同的大小。电矢量 **A** 向 x 轴的投影=电矢量先向 z-O-x 面投影(即 A_{p1}), 再向 x 轴的投影($A_{p1} \cdot \cos i_1$)(而这里是先面投影, 再线投影)。【这里用 A 而不是用 E 表示电矢量, 可能是因为用过 E 来表示振动方程; 而 A 同时有振幅的含义, 而光矢量是电矢量 E 而不是 H, 因此用 A 来代表 E】

落实到 z-O-x 面, 即有: 入射前(法线左)的 x 轴分量 $A_{p1} \cdot \cos i_1$ =入射后(法线右)的 x 轴分量($A_{p2} \cdot \cos i_2 + A_{p1}' \cdot \cos i_1'$), 这种理解方式为: 入射前=入射后(法线 z 轴两侧相等, 即左右等)。【但实际上, 应采用另一种理解方式, 即电磁学给出的分界面两侧连续方程: $A_{p1x} + A_{p1x}' = A_{p2x}$, 这种理解方式为: 介质一=介质二(分界面 x 轴两侧相等, 即上下等), 它对应着 $A_{p1} \cdot \cos(i_1 - \pi) + A_{p1}' \cdot \cos i_1' = A_{p2} \cdot \cos(i_2 - \pi)$, 进而有 $A_{p1} \cdot \cos i_1$

Every Mile away/... This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

$$=A_{p2} \cdot \cos i_2 + A'_{p1} \cdot \cos i'_1 \quad \text{【由于 } i_1 = i'_1, \text{ 上式可被进一步写为: } (A_{p1} - A'_{p1}) \cdot \cos i_1 \\ = A_{p2} \cdot \cos i_2 \text{。} \quad \text{】}$$

(2). y 轴方向上的设定和约束条件:

由于 x-y-z 系得构成 $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ 的右手系, 因此 x 轴和 z 轴将 y 轴方向约束为穿出纸面向外 \odot 。同时, 由于三种光的磁矢量在 y 方向的分量 H_{s1} 、 H_{s2} 、 H'_{s1} 与它们的电矢量在 z-O-x 面上的分量 A_{p1} 、 A_{p2} 、 A'_{p1} 和它们各自的传播方向 \mathbf{v} , 均分别构成 $\mathbf{A}_p \times \mathbf{H}_s$ 同向于 \mathbf{v} 的右手系, 因此(利用 \mathbf{H}_s 同向于 $\mathbf{v} \times \mathbf{A}_p$), 三种光的磁矢量在 y 方向的分量 H_{s1} 朝向 \otimes 、 H_{s2} 朝向 \otimes 、 H'_{s1} 朝向 \otimes 。

现根据介质一=介质二(分界面 x 轴两侧相等): 即有 $H_{s1y} + H'_{s1y} = H_{s2y}$ 。这对应着 $-H_{s1} + (-H'_{s1}) = -H_{s2}$ (对应标量为正值), 即有 $H_{s1} + H'_{s1} = H_{s2}$ 。

(3). 设第一个介质和第二个介质中的电容率和磁导率分别为 ϵ_1 、 μ_1 以及 ϵ_2 、 μ_2 :

$$\text{则由电磁波理论 } \sqrt{\mu} \cdot \mathbf{H}_s = \sqrt{\epsilon} \cdot \mathbf{A}_p \text{ 可知: } H_{s1} + H'_{s1} = H_{s2} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cdot A_{p1} + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cdot A'_{p1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cdot A_{p2} \\ A_{p2} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_{1r} \cdot \epsilon_0}{\mu_{1r} \cdot \mu_0}} \cdot A_{p1} + \sqrt{\frac{\epsilon_{1r} \cdot \epsilon_0}{\mu_{1r} \cdot \mu_0}} \cdot A'_{p1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{2r} \cdot \epsilon_0}{\mu_{2r} \cdot \mu_0}} \cdot A_{p2} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_{1r}}{\mu_{1r}}} \cdot A_{p1} + \sqrt{\frac{\epsilon_{1r}}{\mu_{1r}}} \cdot A'_{p1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{2r}}{\mu_{2r}}} \cdot A_{p2} \rightarrow \\ \frac{\sqrt{\epsilon_{1r} \cdot \mu_{1r}}}{\mu_{1r}} \cdot A_{p1} + \frac{\sqrt{\epsilon_{1r} \cdot \mu_{1r}}}{\mu_{1r}} \cdot A'_{p1} = \frac{\sqrt{\epsilon_{2r} \cdot \mu_{2r}}}{\mu_{2r}} \cdot A_{p2} \rightarrow \frac{n_1}{\mu_{1r}} \cdot A_{p1} + \frac{n_1}{\mu_{1r}} \cdot A'_{p1} = \frac{n_2}{\mu_{2r}} \cdot A_{p2} \rightarrow \text{对光波而言, 光} \\ \text{波在大多数介质中的磁导率 } \mu_r \approx 1, \text{ 因此 } \mu_{1r} = \mu_{2r} = 1. \text{ 则有 } n_1 \cdot A_{p1} + n_1 \cdot A'_{p1} = n_2 \cdot A_{p2} \text{。}$$

又因折射定律: $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$, 我们有: $\sin i_2 \cdot A_{p1} + \sin i_2 \cdot A'_{p1} = \sin i_1 \cdot A_{p2}$ 。
现将其写作 $\sin i_2 \cdot (A_{p1} + A'_{p1}) = \sin i_1 \cdot A_{p2}$ 。

2. 推导 1

$$\text{由 1.(1) 我们有 } (A_{p1} - A'_{p1}) \cdot \cos i_1 = A_{p2} \cdot \cos i_2, \text{ 由 1.(3) 有: } \sin i_2 \cdot (A_{p1} + A'_{p1}) = \sin i_1 \cdot A_{p2} \text{。后式除以前式子即有: } \frac{\sin i_2}{\cos i_1} \cdot \frac{A_{p1} + A'_{p1}}{A_{p1} - A'_{p1}} = \frac{\sin i_1}{\cos i_2}, \text{ 即有 } \frac{\sin i_2 \cdot \cos i_2}{\sin i_1 \cdot \cos i_1} \cdot (A_{p1} + A'_{p1}) = A_{p1} - A'_{p1}, \text{ 得到 } \left(1 + \frac{\sin i_2 \cdot \cos i_2}{\sin i_1 \cdot \cos i_1}\right) \cdot A'_{p1} = \left(1 - \frac{\sin i_2 \cdot \cos i_2}{\sin i_1 \cdot \cos i_1}\right) \cdot A_{p1}, \text{ 因此有: } \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\left(1 - \frac{\sin i_2 \cdot \cos i_2}{\sin i_1 \cdot \cos i_1}\right)}{\left(1 + \frac{\sin i_2 \cdot \cos i_2}{\sin i_1 \cdot \cos i_1}\right)} \\ = \frac{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 - \sin i_2 \cdot \cos i_2)}{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 + \sin i_2 \cdot \cos i_2)} = \frac{(\sin i_2^2 + \cos i_2^2) \sin i_1 \cdot \cos i_1 - (\sin i_1^2 + \cos i_1^2) \sin i_2 \cdot \cos i_2}{(\sin i_2^2 + \cos i_2^2) \sin i_1 \cdot \cos i_1 + (\sin i_1^2 + \cos i_1^2) \sin i_2 \cdot \cos i_2} = \\ \frac{(\sin i_1 \cdot \cos i_2 - \cos i_1 \cdot \sin i_2)(\cos i_1 \cdot \cos i_2 - \sin i_1 \cdot \sin i_2)}{(\sin i_1 \cdot \cos i_2 + \cos i_1 \cdot \sin i_2)(\cos i_1 \cdot \cos i_2 + \sin i_1 \cdot \sin i_2)} = \frac{\sin(i_1 - i_2) \cdot \cos(i_1 + i_2)}{\sin(i_1 + i_2) \cdot \cos(i_1 - i_2)} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \text{。}$$

$$\text{现在再将 } \frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \text{ 代入 } (A_{p1} - A'_{p1}) \cdot \cos i_1 = A_{p2} \cdot \cos i_2 \text{ 或者 } \sin i_2 \cdot (A_{p1} + A'_{p1}) = \sin i_1 \cdot A_{p2}, \text{ 于是 } \frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \cdot \left(1 + \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}\right) = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \cdot \left(1 + \frac{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 - \sin i_2 \cdot \cos i_2)}{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 + \sin i_2 \cdot \cos i_2)}\right) = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \cdot \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 + \sin i_2 \cdot \cos i_2)} = \\ \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 + \sin i_2 \cdot \cos i_2)} = \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cdot \cos(i_1 - i_2)}, \text{ 即有 } \frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cdot \cos(i_1 - i_2)} \text{。}$$

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

3.推导 2

现在我们用 H_{p1} 、 H_{p2} 、 H'_{p1} 分别替换掉 A_{p1} 、 A_{p2} 、 A'_{p1} ，方向仍然是朝着 x-O-z 平面的各对应的原 A_p 的方向 \checkmark 、 \checkmark 、 \searrow ；同样根据右手螺旋定则 $A_s \times H_p // \mathbf{v}$ 确定类似于（指都//y轴） H_{s1} 、 H_{s2} 、 H'_{s1} 但具体朝向并不相同的 A_{s1} 、 A_{s2} 、 A'_{s1} ，利用 $A_s // H_p \times \mathbf{v}$ ，发现它们均朝着 y 轴正向，即均朝着各对应的原 H_s 的反方向： \perp 纸面向外 \odot 、 \odot 、 \odot 。

此时类似于 $A_{p1x} + A'_{p1x} = A_{p2x}$ ，根据 H_p 符合介质一=介质二（分界面 x 轴两侧相等），即有 $H_{p1x} + H'_{p1x} = H_{p2x}$ ，我们可以直接得出类似 $(A_{p1} - A'_{p1}) \cdot \cos i_1 = A_{p2} \cdot \cos i_2$ 的结论：

$(H_{p1} - H'_{p1}) \cdot \cos i_1 = H_{p2} \cdot \cos i_2$ ；同样，类似于 $H_{s1y} + H'_{s1y} = H_{s2y}$ ，我们有

$A_{s1y} + A'_{s1y} = A_{s2y}$ ，因而直接有 $A_{s1} + A'_{s1} = A_{s2}$ ；同样根据 $\sqrt{\mu} \cdot H_p = \sqrt{\epsilon} \cdot A_s$ 可知： $\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cdot$

$H_{p1} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cdot H'_{p1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cdot H_{p2}$ ，直接得到 $\frac{\mu_{1r}}{n_1} \cdot H_{p1} + \frac{\mu_{1r}}{n_1} \cdot H'_{p1} = \frac{\mu_{2r}}{n_2} \cdot H_{p2}$ ，于是有 $\frac{1}{n_1} \cdot$

$H_{p1} + \frac{1}{n_1} \cdot H'_{p1} = \frac{1}{n_2} \cdot H_{p2}$ 。同样根据 $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$ ，我们有 $\sin i_1 \cdot H_{p1} + \sin i_1 \cdot$

$H'_{p1} = \sin i_2 \cdot H_{p2}$ ，并化成 $\sin i_1 \cdot (H_{p1} + H'_{p1}) = \sin i_2 \cdot H_{p2}$ 。

现在仍然是 $\sin i_1 \cdot (H_{p1} + H'_{p1}) = \sin i_2 \cdot H_{p2}$ 与 $(H_{p1} - H'_{p1}) \cdot \cos i_1 = H_{p2} \cdot \cos i_2$ 与两式相除，即有： $\frac{\sin i_1}{\cos i_1} \cdot \frac{H_{p1} + H'_{p1}}{H_{p1} - H'_{p1}} = \frac{\sin i_2}{\cos i_2}$ ，将它与 $\frac{\sin i_2}{\cos i_1} \cdot \frac{A_{p1} + A'_{p1}}{A_{p1} - A'_{p1}} = \frac{\sin i_1}{\cos i_2}$ 对比，发现 $\sin i_1$ 与 $\sin i_2$ 互换

了位置。因此我们只需要将 $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 - \sin i_2 \cdot \cos i_2)}{(\sin i_1 \cdot \cos i_1 + \sin i_2 \cdot \cos i_2)}$ ，中的 $\sin i_1$ 与 $\sin i_2$ 互换即可得到

$\frac{H'_{p1}}{H_{p1}} = \frac{(\sin i_2 \cdot \cos i_1 - \sin i_1 \cdot \cos i_2)}{(\sin i_2 \cdot \cos i_1 + \sin i_1 \cdot \cos i_2)} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$ ；同样，利用 $\sin i_1 \cdot (H_{p1} + H'_{p1}) = \sin i_2 \cdot H_{p2}$ 便有：

$\frac{H_{p2}}{H_{p1}} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \cdot \left(1 + \frac{(\sin i_2 \cdot \cos i_1 - \sin i_1 \cdot \cos i_2)}{(\sin i_2 \cdot \cos i_1 + \sin i_1 \cdot \cos i_2)}\right) = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \cdot \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}$ 。

现在我们还需进行额外的步骤。由于 $\sqrt{\mu} \cdot H_p = \sqrt{\epsilon} \cdot A_s$ ，我们可知： $\frac{A'_{s1}}{A_{s1}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cdot H'_{p1}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cdot H_{p1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$ ，并且 $\frac{A_{s2}}{A_{s1}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cdot H_{p2}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cdot H_{p1}} = \frac{1}{n_2} \cdot \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{\sin i_2}{\sin i_1} \cdot \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}$ 。

总的来说，按推导顺序便有 $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}$ 、 $\frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cdot \cos(i_1 - i_2)}$ 、 $\frac{H'_{p1}}{H_{p1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$ 、 $\frac{H_{p2}}{H_{p1}} = \frac{2 \sin i_1 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}$ 、 $\frac{A'_{s1}}{A_{s1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$ 、 $\frac{A_{s2}}{A_{s1}} = \frac{2 \sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}$ 。由于我们并不关心不是光矢量的磁矢量 \mathbf{H} ，所以公式中只出现了两个关于磁场的过渡公式，并且一般地，它们不出现在菲涅尔公式中。

【关于记忆，一方面可以分为 p 和 s 两组来记（即以平行纸面的分量和垂直纸面的分量的整体图像作为分界线）——第一、二个方程即为描绘 A'_{p1} 、 A_{p2} 的，第五、六个方程即为描绘 A'_{s1} 、 A_{s2} 的；也可以分为带撇的和不带撇的来记（以反射光线和折射光线为整体作为区别）——第一、五个方程即为描绘 A'_{p1} 、 A'_{s1} 的，他们只在正负号和

\sin 与 \tan 上有差异, 先(p对应) \tan 后(s对应)- \sin , 第二、六个方程即为描绘 A_{p2} 、 A_{s2} 的, 后者(s)分母少个 $\cos(i_1 - i_2)$, 所以是纯 s(\sin)嘛】

1.6 分振幅薄膜干涉(一)——等倾干涉

1.6.1 单色点光源引起的干涉现象

1. 将一折射率为 n_2 的, 表面相互平行的透明介质薄膜, 置于另一折射率为 n_1 的透明介质中; 单色点光源 S 放置在会聚透镜 L_1 的焦点处, 使发出的两束平行光束 a 和 b 以入射角 i_1 照射到薄膜上表面。光束 a 的一部分 a_1 在 n_2 上表面 A 点反射回 n_1 , 一部分折射入 n_2 、这一部分又分为两部分, 一部分在 n_2 下表面 B 点反射(另一部分折射入 n_1)、反射的部分中的一部分 a_2 重新在 n_2 上表面 C 点处折射入 n_1 (另一部分仍在 n_2 上表面反射后回到 n_2), 与 b 中同样有幸第一次折射返回 n_1 的那部分光线平行地透过透镜 L_2 , 汇聚于 S' 发生干涉。

过 C 点作 $CC' \perp a_1$, 据以后的知识可知, C 和 C'、甚至线段 CC' 上所有点, 到 S' 的光程相等。那么光束 a 的两个部分 a_1 、 a_2 , 从共同起点 A 到共同终点 S' 的光程差 $\delta = a_2$ 从 A 到 C 的光程减去 a_1 从 A 到 C' 的光程 $= n_2 \cdot (AB + BC) - n_1 \cdot AC' = n_2 \cdot 2 \frac{d_0}{\cos i_2} - n_1 \cdot \sin i_1' \cdot AC = 2n_2 d_0 \cdot \frac{1}{\cos i_2} - n_2 \cdot \sin i_2 \cdot 2d_0 \tan i_2 = 2n_2 d_0 \cdot (\frac{1}{\cos i_2} - \frac{\sin^2 i_2}{\cos i_2}) = 2n_2 d_0 \cdot \cos i_2$ 。

【这样 $a_2 - a_1$ 的光程差对应 $a_1 - a_2$ 的相位差】

现用已知量来表示 $n_2 \cdot \cos i_2 = \sqrt{n_2^2 - n_2^2 \cdot \sin^2 i_2} = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1}$, 得到 $\delta = 2d_0 \cdot \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1}$; 由于只要薄膜处于同一介质中, 光在上下表面反射的物理性质必然相反(至于到底在上下哪个面半波损失, 这得看介质薄膜的折射率和所处外空间的折射率的相对大小), 因此两束反射光到 S' 点有额外光程差 $\pm \frac{\lambda}{2}$, 这里取 $-\frac{\lambda}{2}$ (如果说上表面半波损失(大部分情况是 n_1 光疏到 n_2 光密), 且 $\delta =$ 下路减上路的话, 本来这里应该是 $+\frac{\lambda}{2}$ 的, 但其实“半波损失”本身在含义上并不局限与“损失”, 而是着眼于“半波”; 何况我们并不知道 n_2 的相对大小), 于是 $\delta = 2d_0 \cdot \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = (2j) \frac{\lambda}{2}$ (相长) or $(2j - 1) \frac{\lambda}{2}$ (相消); 于是有 $2d_0 \cdot \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1} = (2j + 1) \frac{\lambda}{2}$ 对应相长, $(2j) \frac{\lambda}{2}$ 对应相消。

2. 设反射率 $\rho = \left(\frac{A'}{A}\right)^2$, 我们来看看 a_2 、 a_3 间以及后续在 n_2 中经历多次反射后再折射出的相邻两者 a_i 、 a_{i+1} 间的干涉相对于 a_1 、 a_2 间的干涉是否是微不足道。根据 $\rho = \left(\frac{A'}{A}\right)^2$, 我们有: $\rho_s = \left(\frac{A'_{s1}}{A_{s1}}\right)^2 = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} \approx \frac{(i_1 - i_2)^2}{(i_1 + i_2)^2} \approx \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} = \left(\frac{A'_{p1}}{A_{p1}}\right)^2 = \rho_p$, 因此当入射角很小时,

$$\rho = \frac{A_{s1}'^2 + A_{p1}'^2}{A_{s1}^2 + A_{p1}^2} = \rho_s = \rho_p = \frac{(i_1 - i_2)^2}{(i_1 + i_2)^2} = \frac{(\sin i_1 - \sin i_2)^2}{(\sin i_1 + \sin i_2)^2} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}。 \text{ 设 } n_1 = 1, n_2 = 1.5, \text{ 则 } \rho = 4\%, \text{ 那么}$$

折射强度比 = $1 - \rho$ ；因此，设 a、b 的强度为 1，则由于 a_1 经历了上表面的 1 次反射，则其强度为 $\rho = 4\%$ ； a_2 经历了下表面的 1 次反射、进出 n_2 的两次折射，则其强度为

$$\rho(1 - \rho)^2 = 3.7\% \quad \left[\text{你可以用可见度 } V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\frac{A_1}{A_2}}{\frac{A_1^2}{A_2^2} + 1} = \frac{2\frac{A_2}{A_1}}{1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}} \text{ 来算一算，} a_1 \text{ 的振幅平方} \right]$$

$= A^2 \cdot \rho = A^2 \cdot 4\%$ ，和 a_2 的 $A^2 \cdot 3.7\%$ 很接近，所以 V 挺大的；而在 $a_1 \rightarrow a_2$ 从一次反射增加了两个透射后，此后 $a_i \rightarrow a_{i+1}$ 均是增加两次反射，因此不仅强度衰减快，且相邻光源强度差距太大，因而 V 很低很低； a_3 经历了下-上-下表面的 3 次反射、进出 n_2 的两次折射，则其强度为 $\rho^3(1 - \rho)^2 = 0.006\%$ ；这对于任意大小的入射角 i_1 对应的同级光强，在数量级上也相仿。可见 a_2 、 b_2 以后光强减弱很快，和前两束光相比，可忽略不计。

【这和薄膜偏振分光棱镜有点像，都用到了菲涅尔公式，不过后者是光透射许多层介质，而前者是光在同一个介质中多次反射】

1.6.2 单色发光平面引起的等倾干涉条纹

1. 现在将置于 L_1 焦点处的单色点光源 S 换为置于 L_1 焦平面处的单色发光平面 P ，那么面 P 上任意一点 S 所发出的光束经 L_1 汇聚后平行、经 n_2 反射 or 折射反射折射后，将汇聚于 L_2 的焦平面 F 某点 S' 上。但是由于各 S 在 P 上所处位置不同，导致入射角 i_1 不同，于是到达 F 的光程差 δ 不同，并且汇聚点的位置也不同——此时将 F 上相同强度（对应着相同的 i_1 和 δ ）点连起来，就有明暗相间的条纹。在此装置下， P 上一点 S 对应地只形成 F 上的一个亮斑 S' ，不过亮度很高（不过有可能因 i_1 而是纯暗）；正如 P 由无数个 S 构成，因而 F 也由无数个 S' 构成。

现将此装置改版成：去掉 L_1 ，单色发光平面 P 竖直放置，在其发光方向倾斜放置一 45° 角的半透明平玻璃片 M ，使得 P 上各 S 朝同一个方向所发出的平行光经 M 反射后射向薄膜 G ，并让从薄膜反射回来的一部分光透过 M ，射到望远镜物镜 L （相当于之前的 L_2 ）上， L 再将这些平行光汇聚于同一点。由于我们可以将 P 等效成平行于薄膜 G 、处于 M 上方的、 P 关于 M 的镜像 P' ，并且 P 上各 S 的同一朝向，指的是其射出的光与 G 的夹角（入射角 i_1 ）相同，因此对于相同的 i_1 ，相当于 P 上的每个 S 均发射出一个有着共同顶角的，以自己为顶点的圆锥面光锥，这些互相相交的圆锥面，分别独立地在薄膜上反射和折射出圆台侧面，经 L 汇聚后射于 F 上的同一半径的圆环上。

若单独来看 P 上的每个 S ，则每个 S 均发射出不同顶角的圆锥面，独立地在 F 上形成独属于自己的一圈一圈条纹构成的干涉图样，只不过亮度很暗。此时再考虑 P 上许多其他 S ，它们单独在 F 上也形成全等的干涉图样，因此多个 S 在 F 上形成的暗淡但完整的干涉图样，全等地叠加（各自的同级干涉条纹彼此准确重合，没有位移），于

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

是便形成了高亮的干涉图样。——因此不仅可以将点光源 S 换成平面光源 P，甚至还可以将 P 换成球状扩展光源：与其上各点光源 S 的位置无关，而强度却会大大提高，有利无害；反而平行激光光源只能形成一个点(需要在其前插入一块毛玻璃转化之)。

2. 由于亮条纹满足 $2n_2d_0 \cdot \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$ ，因此相邻两条纹满足： $\cos i'_2 - \cos i_2 = \frac{\lambda}{2n_2d_0}$ ，其中 i'_2 表示 j 更大(∵ j 正比于 $\delta = 2n_2d_0 \cdot \cos i_2$ ，j 大的光程差 δ 更大，这样光程差的差值才是正的 λ) 的亮条纹所对应的折射角。由于 i_2 很小，略去 $\cos i_2$ 泰勒展开 i_2^4 项，即有 $(1 - \frac{i_2'^2}{2}) - (1 - \frac{i_2^2}{2}) = \frac{\lambda}{2n_2d_0}$ ，即有 $i_2^2 - i_2'^2 = \frac{\lambda}{n_2d_0}$ 。(一个有趣的数学游戏： $\sin x \approx x$ ， $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \approx \sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$) 可见更大的 j 对应更小的 i_2 (i_2')，而更小的 i_2 对应更小的 i_1 和更小的圆环半径，因此越靠内、半径越小的亮条纹圆环所对应的干涉级 j 更高。——当 d_0 连续增大时，由于角度最大的 i_2 保持不变，则 $2n_2d_0 \cdot \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 中的最低干涉级 j 虽随着 d_0 也增大，但仅仅是数值(对它的称呼)改变了，其位置仍然保持不动，即 i_2 不动，由于 $\frac{\lambda}{n_2d_0}$ 减少，则 j=1 对应的 i_2' 相对于 j=0 对应的 i_2 靠近，即 i_2' 增大；那么对于 j=1 和 j=2 的相邻干涉级，由于 j=1 对应的 i_2 增大了， $\frac{\lambda}{n_2d_0}$ 又减少了，则 j=2 对应的 i_2' 将增大更多。以此类推，当 d_0 增大时，各圈条纹向外移动。在 $\cos i_2 = 0$ 处， d_0 每增大 $\frac{\lambda}{2n_2}$ ， $2n_2d_0 \cdot \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 中的 j 就增加 1。【j=0 和 j=1 只是形象的比喻，分别代表最外亮纹和稍次紧邻亮纹，它们实际的 j 可由 $2n_2d_0 \cdot \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 算出，不过它们的 j 确实比内环的 j 小一；在杨氏干涉之后，很少有严格的从 j=0 开始算起的了】

1.7 分振幅薄膜干涉(二)——等厚干涉

1.7.1 单色点光源引起的等厚干涉条纹

之前讨论的是上下表面平行的介质薄膜，现在研究尖劈形介质薄膜的情况。若薄膜很薄，且两个表面夹角很小，则该梯形薄膜可视为 1.6.1 中的长方形薄膜(虽然我们并不关心梯形的上下底和长方形的两条宽是否平行)，那么仍然有 $\delta = 2n_2d_0 \cdot \cos i_2 - \frac{\lambda}{2} = 2d_0 \cdot \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2}$ 。对于薄膜表面的不同入射点而言， i_1 都是相同的，但是 d_0 不同。因此利用之前的结论 $2d_0 \cdot \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1} = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 对应相长， $(2j)\frac{\lambda}{2}$ 对应相消，我们有： $d_0 = (j + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1}}$ 对应相长， $d_0 = j \frac{\lambda}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i_1}}$ 对应相消。【之前 i_1 是变量， d_0 是常量， i_1 来控制 j；而这里 d_0 是变量， i_1 是常量， d_0 来控制 j】【等倾是指各组等 i_1 的光内部分振幅干涉，形成自己的第 j 级干涉条纹；等厚类似；然而干涉图样的形成却恰好是 i_1 的不同、 d_0 的不同所分别形成的等倾、等厚干涉图样】

当 $i_1=0$ 时, $\delta=2n_2d_0-\frac{\lambda}{2}$, $d_0=(j+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2\cdot n_2}$ 对应**相长**, $d_0=j\frac{\lambda}{2\cdot n_2}$ 对应**相消**。若采用发光面, 则要考虑 d_0 和 i_1 、不同发光点形成的干涉图样之间的叠加; 若改用有一定波长范围的复色光, 则考虑(亮条纹的)同一 d_0 处, 或者说同一 i_1 处, 不同波长的光在这里的干涉级不同, 其中对于在这里有整数干涉级的波长, 有: $n_2\cdot\cos i_2=\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=(j+\frac{1}{2})\frac{\lambda_1}{2d_0}+(j+\frac{3}{2})\frac{\lambda_2}{2d_0}+(j+\frac{5}{2})\frac{\lambda_3}{2d_0}\dots$ 【当然其他波长的光波在这里既不干涉相长也不干涉相消, 光强介乎其间】, 这样的重叠部分是彩色, 通常称为薄层色。

【题中经常涉及到: $\delta=2n_2d_0\cdot\cos i_2-\frac{\lambda}{2}=j\lambda$, 相邻干涉级所对应的 $\Delta d_0=\frac{\lambda}{2n_2\cos i_2}$, 则根据 $\frac{\Delta d_0}{\Delta x}=\tan\theta=\frac{H}{L}$, 可得到 $\Delta x=\Delta d_0\cdot\frac{L}{H}=\frac{\lambda}{2n_2\cos i_2}\cdot\frac{L}{H}$, 其中L为劈尖长度, H为劈尖最厚的地方的厚度; 关于利用等厚干涉检查工件平整度: 若空气劈尖左薄右厚, 则若工件上表面有凸起, 则由于同一级干涉条纹d相同, 相当于一等厚线(相当于等高线), 因此凸起处的条纹往右→凸起, 以在竖直方向上得到空气劈尖上表面的厚度补偿。】

1.7.2 增透膜和增反膜

1. **增透膜**: 眼镜发红发紫: 通过**干涉相消**使得**黄、绿光**透射得多(**反射得少**)而红、紫光反射得多。为了使得薄膜越薄越好, 必须设计来使得薄膜的 n_2 介于空气的 n_1 和所帖材料的 n_3 之间。并且还需要 $n_2=\sqrt{n_1n_3}$, 以便薄膜的内外界面的反射光波振幅接近相等。这样一来, **光在薄膜上下表面的反射均有半波损失**, 由此导致光程差 $\delta=2n_2d_0+(-\frac{\lambda}{2})-(-\frac{\lambda}{2})=2n_2d_0=\frac{\lambda}{2}$, 其中的 λ 便属于想要透过更多(限制反射)的波段, 即黄绿光波段。【 $\delta=2n_2d_0+0=(j+\frac{1}{2})\lambda$ 中j取0; 不过有些同学会理解为这样的情景: $\delta=2n_2d_0-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}=(j+\frac{1}{2})\lambda$, 其中j取-1, 即两次半波损失的被减数和减数应该在含义上不变, 所以总共是**全波损失**。最终的结果仍然保持不变, 但这种解释**并不对应我们的物理情景**, 大家可以思考思考。】

2. **增反膜**: 通过**干涉相长**使得目标波段在上表面同相。同样为了薄膜越薄越好, 必须设计来使得薄膜的 n_2 比空气的 n_1 和所帖材料的 n_3 都大【否则 $2n_2d_0+0=j\lambda$ 中的j只能取1了】。这样一来, **光波的半波损失只发生在薄膜的上表面**, 此时便有: $\delta=2n_2d_0-\frac{\lambda}{2}=0$, 其中 λ 便属于想要反射更多(帮助其反射)的波段。

*****增透膜和增反膜**的厚度均满足 $2n_2d_0=\frac{\lambda}{2}$ 。

1.8 迈克尔孙干涉仪

1.8.1 基本原理

分振幅法：单色点光源通过透镜 L_1 发出水平的平行光束 a 、 b ，以 45° 角射入 45° 倾斜的、下表面半透明的平面玻璃板 G_1 的上表面。经过一段折射后在下表面被分为强度几乎相等的透射(折射)光 a_2b_2 和反射光 a_1b_1 ，反射光 a_1b_1 经折射后垂直入射平面镜 M_1 并原路反射回来；透射光 a_2b_2 垂直入射 M_2 并原路反射回来。 a_1b_1 第三次折射入 G_1 后，在下表面与 a_2b_2 相遇， a_1b_1 的透射(折射)光与 a_2b_2 的反射光发生干涉。

如果不算在 M_1 、 M_2 的反射，由于 a_1b_1 经历了 1 次反射+接下来的 3 次折射， a_2b_2 却只经历了 1 次折射+之后的 1 次反射，为了补偿两光束间由此产生的光程差和强度差，我们时常在 a_2b_2 的路程中放入第二块与 G_1 完全相同(相同的厚度、折射率、下表面的反射率等等)的玻璃板 G_2 ，这样一来 a_2b_2 也将经历 3 次折射+1 次反射。

设 M_2 关于 G_1 下表面的镜像为 M'_2 ，并设 $M_1M'_2=d_0$ ，则 M_1 、 M'_2 之间相当于构成了“空气薄膜”，由于 $n_2=n_1=1$ ，不发生折射，故 $i_1=i_2=0$ ，且没有额外光程差(半波损失)【这里没有半波损失应该是指：在两个反射镜上都有半波损失，因而总的来说没有。或者说所等效的空气薄膜的周围也是空气】，于是光程差 $\delta=2 \cdot n_2 \cdot d_0=2 \cdot d_0$ 。如果将单色发光面 P 代替单色点光源 S，则的 L_1 焦平面 F 上出现同心圆形的迈克尔孙等倾干涉条纹；如果 M_2 不 $\perp M_1$ ，则 M'_2 不 $\parallel M_1$ ，则薄膜变为劈尖形，于是出现等厚干涉条纹。此时光程差 $\delta=2 \cdot d_0 \cdot \cos i_2=2j \cdot \frac{\lambda}{2}$ 时相长， $= (2j+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ 时相消。

移动 M_1 使得“空气薄膜”厚度发生改变时，整个同心圆形的干涉条纹将发生移动。我们可以注视某确定 i_1 对应的点，记录越过它的条纹数，从而算出 M_1 的移动距离；若用白光光源，由于只有在 $j=0$ 对应的 $d_0=0$ 时，中央亮条纹才是白色的，其他亮条纹均是彩色的，因此如果移动到某一位置时发现出现了白色条纹，就可以确定 G_1 的下表面到 M_1 和 M_2 的光程相等(在这里补偿板不可或缺)，因此可以用此来调节 M_1 的位置。【这一段 link to 1.6.2 中的 2.段尾 “当 d_0 连续增大时，……”】

1.9 法布里-珀罗干涉仪 多光束干涉仪

1.9.1 基本原理

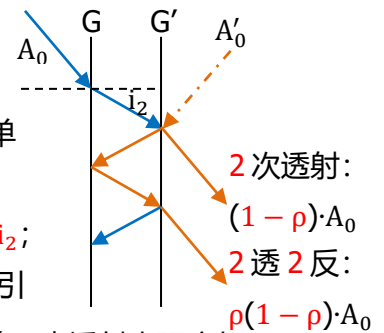
迈克尔孙干涉仪应用分振幅法，将振幅分为一个双光束系统。如果两束光的强度相同，即振幅都等于 A ，则根据之前的结论有： $I=2A^2[1+\cos(\varphi_2-\varphi_1)]=4A^2\cos^2(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})$ 。如果相位差 $\Delta\varphi$ 连续地改变，光强变化缓慢，用实验的方法不易测量其最大值和最小值的精确位置；并且如果两束光振幅不等，最小值不为 0，则条纹的可见度会进一步降低。【这段话听上去像是尘封已久的某篇论文的 abstract 或 introduction 部分- -】

实际中，总希望干涉图样的条纹最好十分狭窄、边缘清晰、十分明亮。并且要求亮条纹能够被比较宽阔且相当黑暗的区域隔开。因此我们的多光束干涉系统就能实现对于某指定的 $\Delta\varphi$ 处才出现十分锐利的最大值，而其他各处均为最小值。

利用等倾干涉原理，竖直地平行放置两块平板，两板相向的表面 G 、 G' 上镀有薄银膜或者其他反射率较高的薄膜。面光源 P 放在透镜 L_1 的焦平面上，设 L_1 的中心为 K_1 ， P 上某点 S 与 K_1 连线夹角与轴线夹角为 i_1 ， L_1 使得 S 发出的许多光束平行于 SK_1 地以入射角 i_1 射入 GG' 间，在其间来回多次反射，每一束光每一次在 G 的反射都会同时折射（透射）出一束束平行光线，并通过 L_2 ，汇聚到 L_2 的中心 K_2 与向量 SK_1 与 L_2 的焦平面 P' 相交的点 S' 上。同样，入射角相同的入射光最终会汇聚于 P' 的同一个圆周上，各种入射角的入射光最终形成同心圆形等倾干涉条纹。

1.9.2 多光束干涉

由于不考虑平板内的折射和反射，或者说忽略两个平板和其上的膜本身的厚度，所得结果和严格处理的一致，那么我们做这样的简化处理之后，仅关注图中的 5 个橘黄色箭头所代表的光线，这部分等效于之前的等倾干涉薄膜装置，因此我们有： $\delta=2n_2d_0\cdot\cos i_2$ 。为了计算单光束 A_0 所一次次透射出的多光束的振动的叠加，我们得将光程差转化为相位差，即有 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2n_2d_0\cdot\cos i_2=\frac{4\pi}{\lambda}\cdot n_2d_0\cdot\cos i_2$ ；由于一次次反射使得之后的透射光能量衰减，它们在同一点 S' 处引起的振动的振幅也会因此衰减：则根据反射率 $\rho=(\frac{A'}{A})^2$ ，我们有第一束透射光强度与 I_0 之比为 $1-\rho$ ，那么如图所示，各透射光的振幅为一组等比数列。【无半波损失的等倾



Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

干涉中, $\Delta\varphi$ 取决于 $\delta=2n_2d_0 \cdot \cos i_2$ 中的 i_2 , 不过对于亮条纹, $\Delta\varphi$ 直接就 $=2k\pi$ 了, 对应的 i_2 是离散的: $\delta=2n_2d_0 \cdot \cos i_2=j\lambda$; 图中, 一次透射的振幅衰减系数为 $\sqrt{1-\rho}$, 之后每次增加两次反射, 透射次数仍然 remain 为 2】【这里的 δ 没有半波损失, 因为上表面的入射光是假想的, a_1 并不是(光疏到光密)反射出去的, 而实际上是透射出去的】
【注: 这里隐隐约约用到了: 等倾干涉时所提及的“由于透镜的存在, CC' 上所有点, 到 S' 的光程相等”】

假设(A_0)的第一束透射光在的 S' 点引起的初相位为 0, 则: S' 的合振动 $= (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} + \rho(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t-\varphi)} + \rho^2(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t-2\varphi)} + \dots = (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (1 + \rho \cdot e^{-i\varphi} + \rho^2 \cdot e^{-2i\varphi} + \dots) = (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$. 将 e^{ix} 泰勒展开可得: $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \dots$, 可知 $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$; 同理可得 $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$. 于是我们有 $e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$, 并且 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; 那么若对 $(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$ 取实部(的振幅部分), 则 $e^{i\omega t}$ 的实部的振幅平方=它和它的复共轭之积=1; 而 $\frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$ 的实部的振幅平方 $= \frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}} \cdot \frac{1}{1-\rho \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{1+\rho^2-\rho(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})} = \frac{1}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi} = \frac{1}{1+\rho^2-2\rho+2\rho(1-\cos\varphi)} = \frac{1}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. 综上, 我们有合振幅的平方[因为 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 可以看出我们不需要像这样考虑 $e^{i\omega t}$, 直接考虑复振幅 $(1-\rho) \cdot A_0 \cdot \frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$ 就够了] $A^2 = (1-\rho)^2 \cdot A_0^2 \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}} = A_0^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4\rho}{(1-\rho)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, 对于给定的 ρ 值, 当 φ 取 $2k\pi$ 时, A^2 取最大值 A_0^2 ; 当 φ 取 $k\pi$ 时, A^2 取最小值 $A_0^2 \cdot \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$; 透射光束的光强的最小值与最大值的比为 $\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$. 则可见度 $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{(1+\rho)^2 - (1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + (1-\rho)^2} = \frac{2\rho}{1+\rho^2} = \frac{2}{\frac{1}{\rho} + \rho}$. 由于 $\rho < 1$, 则反射率 ρ 越大可见度 V 越大。

【电路原理对于正弦量用其相量形式表示以简化运算, 并在相量运算得到最终结果后, 用取虚部 $\text{Im}[\cdot]$ 的方式返回三角函数(正弦量); 而这里由于三角函数(波函数)本身为余弦形式, 则在使用对应相量简化运算后, 以取实部 $\text{Re}[\cdot]$ 的方式返回三角函数(波函数); 另外, 复共轭之积, 求出来应是模的平方 $= a^2 + b^2$, 而不一定是实部的平方 a^2 , 除非虚部 b 为 0。但我们所需要的不是“实部的平方”, 而是“实部的振幅平方”, 即“幅值的平方”; 而“模的平方”就是余弦函数的“幅值的平方”, 正如电路原理一样】

【 $I = \bar{S}$ (能流密度关于时间 or 空间一个周期(T or λ)的平均) $= \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} E_0^2$, 实部的振幅平方 A_0^2 相当于其中的 $E_0^2 \propto I$, 确实是模的平方, 不过若我们想要的是实部的平方, 相当于 $S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = E_0 H_0 \cos^2(\omega_1 t - k_1 z)$, 则就不能用模的平方了(但我们要的是实部的振幅平方); 然而这样用模的平方, 算出来的实部的振幅平方, 竟然像实部的平方一样与 φ 有关, 而不像 $A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ 那样是个常数 A_0 : 虽然二者的复振幅均含 φ , 但前者的复振幅的模的平方含 φ , 而后者 $A_0 \cdot e^{-i\varphi}$ 的模的平方 $= 1$, 不含 φ (这或许只是因为只要是

≥ 2 束光干涉); 另外, $\frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}} \cdot \frac{1}{1-\rho \cdot e^{i\varphi}}$ 相当于 $= \frac{1}{1-a+ib} \cdot \frac{1}{1-a-ib} = \frac{1-a-ib}{(1-a)^2+b^2} \cdot \frac{1-a+ib}{(1-a)^2+b^2}$, 被验证是正确的求模的平方的姿势: $z \cdot z^*$ 】

【这里的 φ 意义上就是 $4A^2 \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$ 中的 $\Delta\varphi$; 而我们所得的函数 $A^2 = A_0^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = A_0^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\rho}{(1-\rho)^2} (1 - \cos\varphi)}$, 虽然也是关于 $\Delta\varphi$ 的连续函数, 但比 $I = 2A^2 [1 + \cos\Delta\varphi] = 4A^2 \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$ 在 $\varphi = 2k\pi$ 处更尖锐; 虽然其在 $\varphi = (2k+1)\pi$ 时不像 $4A^2 \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}) = 0$, 不是那么地暗(强度 $\neq 0$), 但在非 $\varphi = 2k\pi$ 的广阔区间, 都暗得十分均匀和平稳, 低亮度区域比 $4A^2 \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$ 的大——另外, 之所以 $\varphi = (2k+1)\pi$ 时 $I \neq 0$, 是因为虽然第 $i+1$ 束透射光总与第 i 束透射光反相, 但第 $i+1$ 的强度略小于第 i 的强度, 总体像是 2.2.1 菲涅尔半波带中的矢量相加; 之前的普通的等倾干涉估计也有差别不大的总光强 I 的合成过程和最终结果, 只是那里的反射率 ρ 太低了, 而只考虑了前两束光的干涉】

1.9.3 等振幅多光束干涉

假设只考虑振幅均为 A_0 的有限条 (N 条) 透射光, 则 S' 的合振动 $= (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} + \rho(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} + \rho^2(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)} + \dots + \rho^{N-1}(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - (N-1)\varphi)} = (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (1 + \rho \cdot e^{-i\varphi} + \rho^2 \cdot e^{-2i\varphi} + \dots + \rho^{N-1} \cdot e^{-(N-1)i\varphi}) = (1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot [\frac{1}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}} - \frac{\rho^N \cdot e^{-Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}]$ 。现在我们求 $\frac{1-\rho^N \cdot e^{-Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$ 的实数部分的振幅的平方(其中用到了 $\cos Nx = \frac{e^{Nix} + e^{-Nix}}{2}$)

$$= \frac{1-\rho^N \cdot e^{-Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}} \cdot \frac{1-\rho^N \cdot e^{Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1+\rho^{2N}-2\rho^N \cos N\varphi}{1+\rho^2-2\rho \cos \varphi} = \frac{1+\rho^{2N}-2\rho^N(1-\cos N\varphi)}{1+\rho^2-2\rho(1-\cos \varphi)} = \frac{(1-\rho^N)^2 + 4\rho^N \sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

【注: 对 $(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1-\rho^N \cdot e^{-Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$ 取极限 $N \rightarrow +\infty$, 即可得到之前的合振动的相量形式】

【其中的 φ 不再是 1.9.2 中 $\delta = 2n_2 d_0 \cdot \cos i_2$ 所对应的 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_2 d_0 \cdot \cos i_2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot n_2 d_0 \cdot \cos i_2$ 了, 而是 $\delta = d \cdot \sin \theta$ 所对应的 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta$ 了——当 $\delta = j \cdot \lambda$ 时, 或者说 $\varphi = 2j\pi$ 时, 即有: $d \cdot \sin \theta = j \cdot \lambda$ ——这在光栅部分会着重提及】

现在令所有的透射光的入射和出射的两次透射的强度不衰弱, 即有

$A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1-\rho^N \cdot e^{-Ni\varphi}}{1-\rho \cdot e^{-i\varphi}}$; 现在再令 $\rho = 1$ (绝对反射, 则透射光强度都一样; 总的来说从 $(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i\omega t}$ 、 $\rho(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ 、 $\rho^2(1-\rho) \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)}$ 变为了 $A_0 \cdot e^{i\omega t}$ 、 $\rho \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ 、 $\rho^2 \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)}$, 再变为了 $A_0 \cdot e^{i\omega t}$ 、 $A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ 、 $A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)}$), 则有: $A_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{1-e^{-Ni\varphi}}{1-e^{-i\varphi}}$, 并且对应地, $\frac{1-e^{-Ni\varphi}}{1-e^{-i\varphi}}$ 的实数部分的振幅平方变为 $\frac{(1-\rho^N)^2 + 4\rho^N \sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ 。此时整体的实数部分的振幅平方 $= A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ 。【这部分本身可以直接通过 $A_0 \cdot e^{i\omega t}$ 、 $A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ 、 $A_0 \cdot e^{i(\omega t - 2\varphi)}$ 有限可列数列求和得到结论的, 这里稍微拓展了点, 或者说因为懒而沿用

了上一节的做法，而绕了个弯子；看上去 N 束叠加的总光强 $A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ 还没单束光的 A_0^2 大？仔细看看，这可不一定。】

由上式可知，要想使得分子分母同时=0，则有 $\frac{N\varphi}{2}=k\pi$ 以及 $\frac{\varphi}{2}=k\pi$ ，取交集，即当 $\varphi=\frac{2k\pi}{N}$ ($k=0, \pm 1N, \pm 2N$) 时，分子分母均趋向于 0 【这里的主极大和单缝衍射不同，有多个等间距主极大——间距怎么求：之后会用 $\varphi=\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta=\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin\theta=2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2$) 来得到 $\sin\theta$ 关于 k 的表达式】，根据极限理论，光强得到主极大值： $N^2 \cdot A_0^2$ ；要想使得分子趋向于 0 而分母不为零，则 $\frac{N\varphi}{2}=j\pi$ 以及 $\frac{\varphi}{2} \neq j\pi$ ，取交集，即当 $\varphi=\frac{2k'\pi}{N}$ ($k'=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm(N+1), \pm(N+2), \dots, \pm(2N-1), \pm(2N+1), \pm(2N+2), \dots, \pm(3N-1)$)，($k' \neq \pm 0, \pm N, \pm 2N$)，此时得到最小值 0——可见两个相邻主极大值之间分布着 $N-1$ 个最小值，又因为两个相邻最小值之间必有一极大值，故两个相邻主极大值之间分布着 $N-2$ 个次极大值。

1.10 光的干涉应用举例

1.10.1 牛顿环

在平面玻璃板 B 上放置一曲率半径为 R 的平凸(下表面凸，上表面平)透镜 AOA'，两者之间有一空气薄层。设半径为 R 的平凸透镜的曲率球壳球心为 C、球壳中距离 B 上表面 d 处的水平圆面半径为 r 。当单色平行光垂直平凸透镜 AOA' 的上平表面 AA' 时，方向不改变地折射入透镜中，射到球冠 AOA' (即下表面) 上，此时针对球冠上某点，之下的空气薄膜相当于 1.7.1 等厚干涉中的尖劈形介质薄膜，并且是 $i_1=0$ 的垂直入射的情况。

由勾股定理： $R^2 = (R-d)^2 + r^2$ ，或者用射影定理： $r^2 = (2R-d) \cdot d$ ，直接得 $d \approx \frac{r^2}{2R}$ 。根据 1.7.1 等厚干涉中的结论(这里空气薄膜的下表面有半波损失)： $\delta=2n_2d_0 - \frac{\lambda}{2}=2 \cdot \frac{r^2}{2R} - \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} - \frac{\lambda}{2}$ ， $r = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right) \lambda \cdot R}$ 对应亮环半径， $r = \sqrt{j \cdot \lambda \cdot R}$ 对应暗环半径：凸面镜与玻璃板接触的点，光程差仅=额外光程差，因此在这里是暗的。在透射光(从 B 的下表面透射出的)中仍然可以看到牛顿环，不过由于没有额外光程差，此时的亮环半径为： $r' = \sqrt{j \cdot \lambda \cdot R}$ ，它恰好等于反射光中 j 的暗环半径。

Chapter02.光的衍射

2.1 惠更斯-菲涅尔原理

2.1.1 菲涅尔半波带

光绕过障碍物偏离直线传播而进入几何阴影，并在屏幕上出现光强分布不均匀的现象，称为光的衍射。光的衍射中还有明暗相间的条纹出现，因此必须定量计算光所到达的空间范围内任何一点的振幅，才能更精确地解释衍射现象。菲涅尔根据惠更斯的“次波”假设，补充了描述次波的基本特征——相位和振幅的定量表达式，并增加了“次波相干叠加”原理。

波面 S 上每个面积元 dS 都可以看作新的波源，它们均发出次波。波面前方空间某一点 P 的振动可以由 S 面上所有面元发出的次波在该点叠加后的合振幅来表示。对 dS 所发出的次波的振幅和相位提出以下 4 个假设：

- (1).在波动理论中，波面是个等相位的面。因此各 dS 发出的次波均有相同的初相。
- (2).次波是球面波。次波在 P 点引起的振动的振幅与 r 成反比。
- (3).次波在 P 点引起的振动的振幅正比于 dS 的面积，且随着倾角 θ 的增大而减小 (θ 是 dS 与 P 的连线与 dS 的法线的夹角)。
- (4).次波在 P 点处的相位，由光程 $=nr$ 决定。

P 点处的振动为 $dE = C \cdot \frac{K(\theta) \cdot A(Q)}{r} \cdot \cos(kr - \omega t) \cdot dS$ 。其中可将 $\cos(kr - \omega t)$ 写作 $e^{i \cos(kr - \omega t)}$ ，式中的 $A(Q)$ 为振幅在 S 上的分布函数。该式积分非常复杂，我们会适时地用半波带法和振幅矢量叠加法做近似处理。根据光源和考察点到障碍物的距离，我们将衍射现象分为两大类：近场衍射和远场衍射。前者的代表为：菲涅尔衍射，光源和考察点到障碍物的距离均是有限的；后者的代表为：夫琅禾费衍射，光源和考察点到障碍物的距离均可认为无限远。

***衍射的实质是多光束干涉。

2.2 菲涅尔半波带 菲涅尔衍射

2.2.1 菲涅尔半波带

点光源 S 与小孔边缘的连线长度为 R ，以 R 为半径画出一球冠状波面遮盖整个小孔。将都在中轴上的点光源 S 和考察点 P 相连，它们交波面于 B_0 (称为极点)，令 $PB_0 = r_0$ (r_0 可被认为是第一个半波带的内环到 P 点的距离)。设想波面被分为许多圆环带，使每个带的内外边缘的圆环到 P 点的距离相差半个波长，并且每个带的外边缘与下一个带的内边缘无缝衔接。例如：第 k 个半波带的外边缘对应 $PB_k = r_k$ ，内边缘对应 $PB_{k-1} = r_{k-1}$ ，则有 $r_k - r_{k-1} = \frac{\lambda}{2}$ ；由于 r_{k-1} 还可以理解为第 $k-1$ 个半波带的外边缘，因此任意两个相邻半波带之间，任意指定一个半波带上的某个圆环，则它的相邻半波带上一一定存在一个对应的一个圆环，使得两个圆环到达 P 点的光程差相差 $\frac{\lambda}{2}$ ，并且对应的相位差相差 π 。

2.2.2 合振幅的计算

假设每个半波带再分为 c 个环带， c 足够大而将环带等效于细圆环，使得其上各点对 P 点产生的振动的相位随宽度、位置的变化不大，则各个半波带(一共有 k 条)的第 j 条圆环对 P 点产生的振动振幅之和为： $A_{kj} = a_{1j} - a_{2j} + a_{3j} - a_{4j} + \dots + (-1)^{k+1} a_{kj}$ ，其中 a_{ij} 表示第 i 条半波带的第 j 条圆环带对 P 的合振幅。那么 $A_k = \sum_{j=1}^c A_{kj} = \sum_{j=1}^c [a_{1j} - a_{2j} + a_{3j} - a_{4j} + \dots + (-1)^{k+1} a_{kj}] = \sum_{j=1}^c a_{1j} - \sum_{j=1}^c a_{2j} + \sum_{j=1}^c a_{3j} - \sum_{j=1}^c a_{4j} + \dots + \sum_{j=1}^c (-1)^{k+1} a_{kj} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k+1} a_k$ 。【之所以 $\sum_{j=1}^c a_{1j} = a_1$ ，是因为半波带像它的 c 条环带一样窄，对 P 点产生的振动的相位随宽度、位置的变化不大；因此可以标量同向相加】这相当于我们处理好了 $\int dE = \int C \cdot \frac{K(\theta) \cdot A(Q)}{r} \cdot \cos(kr - \omega t) \cdot dS$ 中的 $\cos(kr - \omega t)$ 这部分：即上式已经考虑了各波带间在 P 点的分振动的相位差了，其中的正负号体现了它；因此式中的各 $a_k = \frac{K(\theta) \cdot A(Q)}{r} \cdot dS$ 。

假设是个 $A(Q)$ 常数的话，则下面我们只需来察看 $\frac{K(\theta) \cdot dS}{r}$ ，即比较各 dS 所对应的 dE 的大小，即比较各半波带所对应的 $a_1 \sim a_k$ 的大小。在 $a_k = \frac{K(\theta_k) \cdot dS_k}{r_k}$ 这个式子中， dS_k 表示第 k 个半波带的面积。很容易知道 $dS_k = (R \cdot d\varphi) \cdot 2\pi(R \cdot \sin \varphi)$ ，由于我们之前赋予了 dS_k 对应的离散的物理意义，那么现在 φ 也将被关联为 SB_k 与 OP 的夹角，并且 $d\varphi$ 对应第 k 个半波带的带宽对 S 的张角。于是 $\sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{dS_k}{2\pi R^2}$ 。

在 $\triangle SPB_k$ 中, 应用余弦定理即有: $R^2 + (R + r_0)^2 - 2R(R + r_0) \cdot \cos\varphi = r_k^2$, 方程两边只有 φ 和 r_k 是变量。对其取微分即有: $R(R + r_0) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = r_k dr_k$, 由于 φ 、 $d\varphi$ 、 r_k 均被我们赋予了离散的物理意义, 那么 dr_k 也将对应于我们的模型中的 $\frac{\lambda}{2}$, 于是结合 $\sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{dS_k}{2\pi R^2}$ 即有 $R(R + r_0) \cdot \frac{dS_k}{2\pi R^2} = r_k dr_k$ 。于是 $\frac{dS_k}{r_k} = \frac{2\pi R \cdot dr_k}{R + r_0} = \frac{2\pi R \cdot \frac{\lambda}{2}}{R + r_0} = \pi \frac{R}{R + r_0} \lambda$ 。可见 $a_k = \frac{K(\theta_k) \cdot dS_k}{r_k}$ 中的 $\frac{dS_k}{r_k}$ 这部分是常值, 与 k 无关; 因此 a_k 只与 $K(\theta_k)$ 有关, 而我们只需要知道 $K(\theta_k)$ 随着 θ_k 的增加, 即随着 k 的增加而缓慢减少这一定性的性质即可(半波带很窄所以即使是离散的也是缓慢的), 不必知道其定量表达式, 即可知道 a_k 随着 k 的增加而离散地缓慢减小。如果我们以 k 为横坐标轴、以 a_k 为纵坐标轴地, 将 $a_1 \sim a_k$ 在其上以平行于 a_k 轴的矢量 $a_1 \sim a_k$ 作出, 并使得 a_1 中点过 k 轴、其余矢量的起点与上一矢量的终点连线平行于 k 轴、方向与上一矢量方向相反(因为综合了 $A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k+1} a_k$ 这个式子)。

这样一来, 始矢量 a_1 的起点竖直连接末矢量 a_k 的终点所得的竖直矢量 A_k 的大小, 即为在 P 点引起的合振幅 A_k 。并且 $A_k = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} (-1)^{k+1} a_k = \frac{1}{2} [a_1 + (-1)^{k+1} a_k]$ 。括号中 k 为奇数时 $+a_k$ 。【这种离散地兼顾相位和振幅进行合成的做法在多光束干涉中见过, 不过那里更数学地确定了合振幅的严格数学表达式; 而这里的相位差相当于那里的情景 $\varphi = (2k+1)\pi$ 时的情况, 而振幅的衰减用 $K(\theta)$ 代替了那里的 $\sqrt{\rho}$ 和 $\sqrt{1-\rho}$ 。——其实不仅有半波带, 也有各种 $\Delta\varphi$ 所对应的波带: $r_k - r_{k-1} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta\varphi$, 它们在描述合成结果上是等效的, 然而半波带有着化矢量(相量)为标量叠加的好处;

利用下一节的知识——并且对于每一个离散的 $k(k_{\max})$, 假设 $R_{hk_{\max}} = R_h$ 不变(且露出来的半波带数目都是整数 k_{\max} 条)的话, 则 $k(k_{\max})$ 与 r_0 协变(R 也不变), 若 $R = +\infty$ 的话, 协变关系还可确定下来为反比例关系: $r_0 = \frac{R_h^2}{k \cdot \lambda}$, 那么对于协变关系下离散的 r_0 的参考点 P 的光强 $I_p(r_0)$ [各个 r_0 处的 P 点的光强随 r_0 的变化, 本身来源于 k_{\max} 随 r_0 的变化: $I_p(r_0) = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k_{\max}+1} a_{k_{\max}})^2$], 都将是连续曲线(连续函数) $r_0 - I_p$ 中的极值, $k(k_{\max}) = 1, 3, 5 \dots$ 时对应极大值, 是相对于周围(这里的周围既是指 $k \pm 1$, 又是指 $k \pm 1$ 所对应的两个离散 r_0 两个极小值的亮点(半波带的好处就在于每个 k_{\max} 所对应的 $(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k_{\max}+1} a_{k_{\max}})^2$, 都是极值点: 都较周围更亮或暗, 都是特殊的点), 其光强也相对于 r_0 的小邻域内的参考点 P 更大。】

2.2.3 影响半波带数 k 的有关因素

光通过光阑上的圆孔, 圆孔的半径为 R_h , 设第 k 条圆环带对中轴的半径为 R_{hk} (过 B_k 做 $B_k H \perp SP$ 于 H , 即有 $R_{hk} = B_k H$; 并设对应的 $B_0 H = h$), 若 $k = k_{\max}$, 此时 $R_h = R_{hk} = R_{hk_{\max}}$; 遮盖了小孔的球冠状波面所含有的完整的菲涅尔半波带的数目 k_{\max} ,

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

与圆孔的相对位置(R 、 r_0)、光的波长 λ 、圆孔半径 $R_h=R_{hk_{\max}}$ 有关。同样,若取中间半波带所对应的 k , 则这些 k 也均与对应的一组 R 、 r_0 、 λ 、 R_{hk} 有关(或与 R 、 r_0 、 λ 、 h 有关, 若将 λ 看作常量的话, 剩余 4 个元素中的任意一个元素, 如 R_{hk} 、 h 总是关于其余三个元素如 k 、 r_0 、 R 协变的)。【对于半波带, 根据 $r_k - r_{k-1} = \frac{\lambda}{2}$, 你需要指明是中轴的哪 r_0 处对应的半波带; 同样你也需要指定是第几(k)条半波带。】

在右边的 $Rt\Delta B_kPH$ 中, $R_{hk}^2 = r_k^2 - (r_0 + h)^2 \approx r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h = (r_k - r_0) \cdot (r_k + r_0) - 2r_0h = (k \cdot \frac{\lambda}{2}) \cdot (2r_0) - 2r_0h = kr_0\lambda - 2r_0h$; 在左边的 $Rt\Delta B_kSH$ 中, 仍然可通过勾股定理得到类似的: $R_{hk}^2 = R^2 - (R - h)^2$, 不过由于在圆内, 我们采用射影定理更易直接得到: $R_{hk}^2 = (2R - h) \cdot h \approx 2Rh$ ——因此有: $kr_0\lambda - 2r_0h = 2Rh$, 于是: $h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{r_0}{R+r_0} \lambda$ 。【这和我们之前所得的 $\frac{dS_k}{r_k} = \pi \frac{R}{R+r_0} \lambda$ 很像; 在 $k \in [0, k_{\max}]$ 范围内, h 与 k 成正比, 是个有趣的特征】

现在我们将 $h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{r_0}{R+r_0} \lambda$ 代入两个式子(如 $R_{hk}^2 = kr_0\lambda - 2r_0h$)中的任何一个:
 $R_{hk}^2 = 2Rh = 2R \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{r_0}{R+r_0} \lambda = k \frac{r_0 R}{R+r_0} \lambda$ 【这个跟 $\pi \frac{R}{R+r_0} \lambda$ 更像了, 以至于: $\frac{dS_k}{r_k} = \frac{\pi}{k \cdot r_0} \cdot R_{hk}^2$ 】, 因此 $k = (\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}) \cdot \frac{R_{hk}^2}{\lambda}$, 并且我们还有: $\frac{1}{k \cdot \lambda} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}$, 式中的 $\frac{R_{hk}^2}{k \cdot \lambda}$ 相当于波带片的【或者说某一半波带的——即使用单色光入射, 波带片也有 $f/3$ 、 $f/5$ 等多个焦距(这里假设 f 对应 $k=1$, 则 $f/3$ 对应 $k=3$)——对于给定的物点 R , 不同的焦距 $\frac{R_{hk}^2}{k \cdot \lambda}$ 对应不同的考察点 P , 即波带片可以给出物体在多个 r_0 处的像】焦距 f 。当 $R \rightarrow \infty$, 即平行光射入小孔时, r_0 即为波带片的焦距。【但正如参考点 P 对应的 r_0 可选择轴线上任意一点, 因而对于选定的(想察看的)波带序列号 k , 其属性之 R_{hk}^2 或者 h 也会因 R 和 r_0 的不同而不同。

——而在考虑轴上的各 r_0 点的光强时, 一般设定 $R_{hk_{\max}} = R_h$ 相同, 以及 R 确定, 而 $k(k_{\max})$ 随着 r_0 的变化而变化, 物理含义便是对于轴线上各 r_0 处的参考点 P , 在光源位置 R 、波长 λ 、小孔大小 R_h^2 三参数确定的情况下: 不同 r_0 所对应的 k_{\max} 不同($r_0 = \frac{R_{hk_{\max}}^2}{k \cdot \lambda}$, 比如 r_0 减小, k 增大, 而变大了的 k_{\max} 所对应的 $R_{hk_{\max}}$ 的大小却仍旧不变, 对应的物理情景便是(外边缘) R_h 所对应的 h 处的半波带的“编号” k 变大了, 即每条半波带均变窄了, 相同的球冠上的半波带数目变大了), 则对于不同 r_0 处的 P 点, 小孔露出的半波带数目不同, 则光强 $(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k_{\max}+1} a_{k_{\max}})^2$ 不同; $k_{\max}=1、3、5\dots$ 处的亮点便是最亮的像点, 即焦点(居然是以亮度叫这些点为焦点的)。它们的 r_0 便是所谓的各 f 】

2.2.4 圆屏的菲涅尔衍射

泊松亮斑：设圆屏遮蔽了前 k 个带，则从第 $k+1$ 个带开始，之后所有带所发出的次波都能到达 P 点，将这些次波叠加，可得 P 点的合振幅为： $\frac{1}{2}a_{k+1}$ 。而 k 的影响因素与 2.2.3 中的相同。可以看到圆屏能使点光源成实像，可以认为它的作用与一块汇聚透镜相当。

2.2.5 波带片

从菲涅尔半波带的特征来看，对于通过波带中心并与波带面垂直的轴上一点 P 来说，圆孔露出半波带的数目 k 可为奇数或偶数。如果制造这样一种光屏，使得它对所考察的点只让奇数半波带或只让偶数半波带透光，那么由于各半波带上相应各点到达考察点时的光程差为波长的整数倍，各次波到达该点时所引起的光振动的相位差 2π 的整数倍，因而相互加强。这样在考察点处的合振幅为： $A_k = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_k$ 或者 $A_k = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_k$ 。

波带片的制作方法：根据 $R_{hk}^2 = k \frac{r_0 R}{R + r_0} \lambda$ ，知 R_{hk} 正比于 \sqrt{k} ，于是可在绘图纸上画出半径正比于 \sqrt{k} 的一组同心圆，把相间的圆环涂黑，即使得相邻圆环异色。然后用照相机拍摄在底片上，该底片即为波带片。——但如果要制作有几百个半波带的波带片，则可以用拍摄牛顿环的简单方法来实现，因为我们在 1.10.1 牛顿环中 $r = \sqrt{(2j+1) \frac{\lambda}{2} \cdot R}$ 对应亮环半径， $r = \sqrt{2j \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot R}$ 对应暗环半径； k 为奇数的波带片，对应牛顿环中的亮环，在胶片上透光。

除了用上述方法做成同心环带的波带片之外，还可以做成长条形波带片，这种波带片能使光在垂直于轴的平面上汇聚成一条明亮的直线，直线与波带片上的直条平行。两个长条形波带片中一个沿轴线旋转 90° ，使得其上的直条互相垂直后，互相平行且紧贴着地上轴线放置，构成方形波带片，成像为一条明锐的十字线。

****当波面完全不遮蔽时，所有波面的所有波带的所有次波在任何考察点处叠加的结果就形成了光的直线传播。**

2.2.6 菲涅尔直边衍射

平行光垂直照射到具有直线边缘的不透明障碍物时，在光屏上应该得到直线边缘清晰的影子，但仔细观察可看到复杂的衍射图样。

在 2.2.1 中，我们将相邻两个波带所发出的次波到 P 的振动限定为相位差 π ，以此来划分波带为半波带，这个限制实际上是不必要的。——光波垂直照射在直边障碍物 AC 以及屏 D 上，设 P 为 D 上任意一考察点，过 P 做 PB_0 交 AC 且平行于 D 的波面于点 B_0 (称为极点)，将波面分成平行于直边的许多条波带而分布于 B_0 左右：向左依次为 $B_0B'_1$ 、 $B'_1B'_2$ 、 $B'_2B'_3$ 、直至 $B'_{k-1}B'_k$ ，其中 B'_k 落于直边 AC 上；向右依次为 B_0B_1 、 B_1B_2 、 B_2B_3 、…。假设这些波带均有同样的宽度 dx ，则它们的 dS 相同，则 $C \cdot \frac{K(\theta) \cdot A(Q)}{r} \cdot \cos(kr - \omega t) \cdot dS$ 中的 $C \cdot A(Q) \cdot dS$ 相同，变量还有 $K(\theta)$ 、 r 以及 r 不同所导致的相位差 $kr - \omega t$ 不同 (由于同一波面上各次波波源相位相同，因此各次波对 P 引起的 $kr - \omega t$ 中的 ωt 是相同的，相位差只有 kr 上的差异)。

以 P 点为向量的起点 (或者终点)，水平向右 (左) 地沿着 x 轴作 a_1 ，表示从 B_0 右方第一个带 B_0B_1 发出的次波到达 P 点时的振幅矢量 (旋转矢量)。由于 B_0 右方第二个带 B_1B_2 相对于 B_0B_1 ，其 $\frac{K(\theta)}{r}$ 中的 $K(\theta)$ 更小、 r 更大，因而 B_1B_2 发出的次波到达 P 点时的旋转矢量 a_2 的模稍 $< a_1$ ，并且由于 r 更大，导致其所引起的 P 点的振动相位 $kr - \omega t$ 更提前，因此旋转矢量 a_2 相对于 a_1 朝逆时针方向旋转了一个小角度【如果用的是 $\omega t - kr$ ，则更大的 r 将导致相位更落后，因此不论设定的 a_1 的朝向如何，旋转矢量 a_2 相对于 a_1 会朝顺时针方向旋转一个小角度】。现将 a_2 的起点重合于的 a_1 终点 (或将 a_2 的终点重合于的 a_1 起点)，并如此地依次将 B_0 右边的波面的 every 下一个波带对应的旋转矢量与上一个邻近波带首尾 (尾首) 相接。——如此一来，由于露出的波面向右无限伸展，位于 B_0 右方的带数目无穷多，来自所有这些带的次波的旋转矢量形成螺旋形的折线 PM_1 ，折线起点 (终点) P 指向折线终点 (起点) M_1 ，形成一个大的旋转矢量 $\overrightarrow{PM_1} (\overrightarrow{M_1P})$ 。

位于 B_0 左方的波面的各个波带中，由于 $B_0B'_1$ 发出的次波到 P 点产生的振动的振幅和相位均与 B_0B_1 相同，因此 $B_0B'_1$ 对应的旋转矢量与 B_0B_1 的大小和方向相同，同理，其余关于 B_0 左右对称的同序号的波带对所对应的旋转矢量的大小和方向也相同，即有 $a'_1 = a_1$ 、 $a'_2 = a_2$ 等。由于 B_0 左方的波面只露出一部分，波带数量有限，限于 k ，则本身与右上 ↗ (右下 ↘) 螺旋折线 PM_1 关于 P 点中心对称的左下 ↙ (左上 ↖) 螺旋折线 PM_2 ，将因 k 非 ∞ 而缺失向中心无限向内盘旋的后续部分。

如果 dx 无限小，则矢量图的折线会变为光滑的双螺旋线，称为考纽螺线。合矢量的 $\overrightarrow{M_2M_1} (\overrightarrow{M_1M_2})$ 平方表示完全无遮蔽的波面上的光波到达 P 点时的强度。当 P 点不动，AC 直线边界远离 P 向左移动时，左下 ↙ (左上 ↖) 螺旋折线 MP 末端的第 k 个旋转矢量

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

终(起)点 M , 会向着 $M \rightarrow M_2$ 的方向盘旋向内进发; 这等效于: 当 AC 不动, P 点远离 AC 向右移动时的景象——合矢量 $\overrightarrow{MM_1}$ (M_1M) 的大小会在期间时而达到最大值, 时而达到最小值, 因此在几何影子之外(P 对应的 B_0 在 AC 右方时)并不是均匀明亮的, 而有明暗相间的条纹出现。两种变化过程中的右上 ↗ (右下 ↘) 螺旋折线 PM_1 均可认为没有变化。

当 AC 不动, P 点靠近 AC 向右移动, 且进入几何阴影区并深入其中时——相当于 M 点在矢量图上沿着 $M \rightarrow P \rightarrow M_1$ 的方向盘旋移动, 可见当 M 越过 P 朝 M_1 进发时, 合矢量 $\overrightarrow{MM_1}$ 的长度不断地减小, 这对应着 P 点越过 AC 对应的阴影边界向阴影内进发时, 光强不断地变暗。

2.3 夫琅禾费单缝衍射

2.3.1 实验装置与衍射图样

以上讨论的圆孔衍射和直边衍射, 都是不需要用任何仪器就能直接观察到的衍射现象。在这种情况下, 观察点和光源或是其中之一, 与障碍物间的距离都是有限的, 在计算光程和叠加后的光强等问题时, 都难免遇到繁琐的数学运算。夫琅和费研究了观察点和光源距障碍物都是(等效于)无限远时的衍射现象。这种情况下计算衍射图样中的光强分布时, 数学运算就比较简单; 并且多数情况下会使用光学仪器比如透镜, 因此经常会遇到这种衍射现象; 而且由于透镜的会聚, 衍射图样的光强将比菲涅尔衍射图样的光强大大增加。

2.3.2 强度的计算 及 光强分布

平行光束垂直于缝面入射, 波面和缝平面重合, 现将缝分为一组平行于缝的窄带, 这对应着宽度为 $BB'=b$ 的缝的侧面上的窄带宽度 dx 。设 A_0 为整个狭缝所发出的次波在 $\theta=0$ 的方向上的合振幅【而不是等振幅多光束干涉中的单独每条透射光的振幅了】(θ 为透镜 L_2 的中心与其焦平面 F 上一考察点 P 的连线与波面法线的交角), 则宽度为 dx 的窄带向各个方向(设 $\frac{K(\theta)}{r}$ 中的 $K(\theta)$ 和 r 均不随 θ 变; 或者说该实验本身所考虑的各条纹对应的 θ 很小, 因此 $r(\theta)$ 变化也很缓慢, 浮动不大)所发出的次波振幅为: $dE_0 = A_0 \cdot \frac{dx}{b}$; 设 B 点处的窄带 dx 以 θ 角入射 L_2 并到达 P 时所引起的振动为 $A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot \cos(wt)$, 则 $BM=x$ 的 M 处的窄带 dx 对 P 引起的振动为 $dE = A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot \cos(k\delta - wt) = A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot \cos(kx \cdot \sin\theta - wt)$, 现将其写作 $dE = A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot e^{i(kx \cdot \sin\theta - wt)}$ 。于是其复振幅为 $d\tilde{E} = A_0 \cdot \frac{dx}{b}$ 。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

$e^{ikx \cdot \sin\theta}$ (积分完成后的总复振幅的实振幅部分, 即除开类似于 $e^{ikx \cdot \sin\theta}$ 的之外的部分, 即为所需)。【 $\delta = x \cdot \sin\theta$ 仍然源自等倾干涉处所介绍的: CC' 上各点经过透镜到参考点 P 的光程相等; 之后的圆孔衍射也用到了这点】

现在对上式进行积分: $\int_0^b \frac{A_0}{b} \cdot e^{ikx \cdot \sin\theta} \cdot dx = \frac{A_0}{b} \cdot \frac{1}{ik \sin\theta} [e^{ikb \cdot \sin\theta} - 1] = \frac{A_0}{b} \cdot \frac{e^{i\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta} - e^{-i\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta}}{ik \sin\theta} e^{i\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta} = \frac{A_0}{b} \cdot \frac{2i \cdot \sin(\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta)}{ik \sin\theta} e^{i\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta} = A_0 \cdot \frac{\sin(\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta)}{\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta}$ (总的波动方程 = $\text{Re}[A_p \cdot e^{i\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta} \cdot e^{-i\omega t}] = A_p \cdot \cos(\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta - \omega t)$) 现取其实部的振幅部分, 即有: $A_p = A_0 \cdot \frac{\sin(\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta)}{\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta} = A_0 \cdot \frac{\sin u}{u}$, 其中 $u = \frac{k}{2}b \cdot \sin\theta = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda}$; 那么 P 点的光强 $I_p = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}$ 。对 $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ 求导, 令其=0, 得 $\sin u = 0$ 和 $u = \tan u$, 分别解以上两式, 可得出所有极值点(也可以通过 1.9.3 的方法做)。【可以这么记忆 $\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta$, 用其得来过程: 先是积分上下限 $0 \rightarrow b$, 使得原来的 $kx \cdot \sin\theta$ 变为了 $kb \cdot \sin\theta$; 然后为了使用欧拉公式而提出了一半, 因此还剩 $\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta$; 再把 k 带进去, 得到 $\frac{\pi}{\lambda}b \cdot \sin\theta$ 】

(1). 单缝衍射中央主极大的位置: $\theta_0 = 0$ 。【同时满足 $\sin u = 0$ 和 $u = 0$, 的 $u = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda}$, 中的 θ 值, 才能使得 $\frac{\sin u}{u}$ 比值=1; 首先可通过以上两式确定 $u = 0$, 并且在 $u = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda}$ 中 θ 只能取 0 了: 取 2π ? 想啥呢? θ 取值范围 $\in [-\pi, \pi]$ 】

(2). 单缝衍射最小值的位置: $\sin\theta_k = k \cdot \frac{\lambda}{b}$, 且 $k \neq 0$ 。【分子 $\sin u = 0$, 即 $u = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda} = k\pi$, 推出 $\sin\theta_k = k \cdot \frac{\lambda}{b}$; 分母 $u \neq 0$, 即有 $\pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda} \neq 0$; 注: $\frac{k}{2}b \cdot \sin\theta$ 中的 k 和这里的 $k\pi$ 中的 k 不是一回事; 其实 $k\pi$ 可以改成 $j\pi$ 的】

(3). 单缝衍射次极大的位置: 在每两个相邻最小值间有一极大值, 这些极大值的位置可由超越方程 $u = \tan u$ 解得。其近似解为: $\sin\theta_{k_0} = \pm(k_0 + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{b}$, 且 k_0 取 1、2...。【分子不为 0 (且分母不为 0) 的极值。分子 $\neq 0$ 保证了其不是最小值; 分母 $\neq 0$ (& 分子 $\neq 0$) 保证了其不是最大值】

2.3.3 单缝衍射图样的特点

(1). 中央主极大光强最大, 次极大光强远小于主极大, 即使第一级次极大都不到中央主极大的 5%, 并且随着级数 k 的增大而迅速地减小。

(2). 当 θ 很小时, $\sin\theta \rightarrow \theta$, 则:

中央亮条纹的角宽度 = { $k = \pm 1$ 的最小值对透镜中心的张角} = $2 \cdot \frac{\lambda}{b}$

次极大的角宽度 = {相邻两个最小值对透镜中心的张角} = $\frac{\lambda}{b}$

最小值的角宽度={相邻两个次极大对透镜中心的张角} $\approx \frac{\lambda}{b}$ 【这个意义不大】

若 L_2 的焦距为 f_2 , 线宽度 $=f_2 \cdot (\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \approx f_2 \cdot (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \approx f_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) = f_2 \cdot \text{角宽度}$ 。

【注: 严格地讲, 中央亮条纹的角宽度这样计算: $\sin\theta_1 - \sin\theta_{-1} = 2 \cdot \frac{\lambda}{b}$, 即有 $\Delta \sin\theta = 2 \cdot \frac{\lambda}{b}$, 即 $\cos\theta \cdot \Delta\theta = 2 \cdot \frac{\lambda}{b}$, 于是 $\Delta\theta = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{b}}{\cos\theta}$, 同理其他角宽度也都应除以 $\cos\theta$; 另外, 线宽度 $=f_2 \cdot (\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = f_2 \cdot \Delta \tan\theta = f_2 \cdot \sec^2\theta \cdot \Delta\theta = f_2 \cdot \sec^2\theta \cdot \text{角宽度}$ 】

(3).每一侧的最小值形成的暗纹是等间距的; 而次极大是不等间距的, 随着级数 k 的增大, 次极大愈趋近于等间距(每个次极大愈来愈趋近于落在相邻最小值的中点处, 可用此来近似次极大的位置)。

(4).非单色光的情况下, 不同波长的衍射图样除中央主极大外将彼此错开。于是中央亮纹仍为白色, 其边缘伴有彩色, 其他各级彩色条纹逐次重叠展开。

(5).随着缝的加宽, 比值 $\frac{\lambda}{b}$ 减小, $b \gg \lambda$ 时, 角宽度全都趋近于0, 衍射图样被纵向压缩为一条亮线。由此可见, 障碍物使得光强分布偏离几何光学规律的程度, 可用中央主极大的半角宽度来衡量。——只有在 $\lambda \ll b$, 即 $\frac{\lambda}{b} \ll 1$ 时, 衍射现象才可忽略不计, 反之, λ 越大或 b 越小, 衍射现象就越显著。

(6).中央主极大的半角宽度关系式又称为衍射反比律, 它反映了障碍物限制范围越小, 光波的扩展现象越显著; 在哪个方向限制, 就在哪个方向扩展。其次, 它还反映了“放大”机理: 缝宽减小则半角宽增大, 不过这不是通常的几何放大, 而是一种光学变换放大, 这正是激光测径和将衍射用于物质结构分析的基本原理。

2.4 夫琅禾费圆孔衍射

2.4.1 公式推导

类似单缝衍射 $dE = A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot e^{i(k\delta - wt)} = A_0 \cdot \frac{dx}{b} \cdot e^{i(kx \cdot \sin\theta - wt)}$ 地有: $dE = A_0 \cdot \frac{dS}{\pi R^2} \cdot e^{i(k\delta - wt)} = A_0 \cdot \frac{d\varphi \cdot r dr}{\pi R^2} \cdot e^{i(k(R + r \cos\varphi) \cdot \sin\theta - wt)}$, 其中 φ 为圆孔所对应的圆盘上, 以 BB' 轴为 x 轴时的极角, r 为极径。我们只关注其中的 $\frac{A_0}{\pi R^2} \cdot e^{ikr \cos\varphi \cdot \sin\theta} \cdot r d\varphi dr$ 部分。如用三角函数表示: $\int_0^R d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{\pi R^2} \cdot r \cdot \cos(kr \cos\varphi \cdot \sin\theta) dr$ 。

此积分可化为贝赛尔函数。类似单缝衍射中的 $I_p = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}$, 最后得到 P 点的光强为 $I_p = I_0 \cdot \frac{J_1^2(2m)}{m^2}$ 。其中 $J_1(x)$ 为 x 的一阶贝赛尔函数, 此函数对于任意 x 值是均匀收敛的。

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

并且类似 $u = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda}$ 地, 也有 $m = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{R}{\lambda}$ [实质上 $2m = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{2R}{\lambda}$ 中的圆孔直径 $2R$ 就相当于单缝缝宽 b]。这里也可以通过 $\theta=0$ 得到主极大、一阶导数 $=0$ 得到次极大、光强 $I_p=0$ 得到最小值。

类似 2.3.2(2) 中的 $u = \frac{k}{2} b \cdot \sin\theta = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda} = k\pi$ 所导致的 $\sin\theta_k = k \cdot \frac{\lambda}{b}$ 地, 根据 $m = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{R}{\lambda}$ 我们也有类似的 $\theta \approx \sin\theta = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{R}$, 下面列出各极值所对应的 $\frac{m}{\pi}$ 值: (1). 主极大: 0; (2). 第一、二、三最小值: 0.610、1.116、1.619; (3). 第一、二次极大: 0.819、1.333。中央亮斑的光强占整个入射光束的光强的 84%, 称之为艾里斑, 其半角宽度为 $0.610 \frac{\lambda}{R}$, 即 $1.22 \frac{\lambda}{2R}$, 即 $1.22 \frac{\lambda}{D}$, 比单缝衍射的中央主极大的半角宽 $\frac{\lambda}{b}$ 稍大(若圆孔直径 $D =$ 单缝缝宽 b 的话)。

2.4.2 双圆孔衍射

杨氏双缝干涉 + (2 个) 夫琅禾费单缝衍射; 杨氏双孔干涉 + (2 个) 夫琅禾费单孔衍射; 后者即为我们讨论的问题: 当光束垂直投射到一开有两小孔的光屏上, 两小孔直径为 b , 中心间距为 d , 且 $d \gg b$, 则总的衍射图样 = 杨氏干涉条纹受(被)单孔衍射图样调制后的图样[A 受 B 调制, 相当于先有 A 的完整的高频(陡峰且密集)波形, 然后将 B(缓峰且稀疏)加载于其上, 于是 A 的波形中的波峰的包络线会从直线变成 B 的波形; A 相当于 $\cos(wt)$, B 相当于振幅项 $A(t)$, 调制后为 $A(t) \cdot \cos(wt)$; 在 $B = A(t) = 0$ 的地方, 不允许有 A 的存在 or 整个 $A(t) \cdot \cos(wt)$ 的存在]。由于双孔间距 d 相对于两孔单独产生的衍射图样并不大, 因此双孔产生的衍射图样几乎重合; 而原本的衍射图样中亮的地方, 才允许有双曲线 or 直线的双孔干涉条纹存在。

【其实既然是 $A(t) \cdot \cos(wt)$ 两项乘积, 任何一项为 0 的地方, 合成光强都 = 0, 所以就其本身而言, 合成图案就是由两个图案的亮纹相交处的集合(必须亮亮交叠才 = 亮), $AB \leq A$, $AB \leq B$; 因此在限制光强 = 0 这个 field, 它们是平权的, 没有谁有优越性; 所以不应用此来判断谁受谁的调制/调控; 或许是因为衍射图案亮斑较大(决定外貌), 干涉条纹镶嵌其中(决定细节), 才认为干涉受衍射调制吧】

2.5 平面衍射光栅

2.5.1 透射光栅

光栅分为透射光栅和反射光栅，光栅和棱镜(棱镜又和波片是一家、有一腿?)一样，是一种分光装置，其主要用途是用来形成光谱。将 2.3.2 单缝衍射的实验装置中的单缝改为一系列宽度为 b 、间隔为 a 的平行狭缝，相邻两缝间均不透光。两狭缝中心的距离为 $d=a+b$ ，称之为光栅常量。若 d 的单位为毫米，则 $\frac{1}{d} = \frac{1\text{mm}}{d} \cdot \frac{1}{1\text{mm}}$ 称为光栅密度，表示每毫米内有多少条狭缝。

光栅这与 2.4.2 双圆孔衍射一样，既有干涉又有衍射；只不过这里不是杨氏双缝干涉+(2个)夫琅禾费单缝衍射，而是 1.9.3 等振幅多光束干涉+(多个) 2.3.2 夫琅禾费单缝衍射，因此综合 $I_p = A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ 以及 $I_p = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}$ 即有 $I_p = A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ ；其中的 $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ 叫单缝衍射因子， $\frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ 称为缝间干涉因子；其中 θ 定义与 2.3.2 中的相同(称为衍射角)，而 A_0 既可以用 2.3.2 的理解，认为是某个狭缝所发出的次波在 $\theta=0$ 的方向上的合振幅，又可以被 1.9.3 直接理解为某束光(朝任意某个方向)的波动的振幅；不过其中的 φ 不再是 1.9.2 中 $\delta = 2n_2 d_0 \cdot \cos i_2$ 所对应的 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_2 d_0 \cdot \cos i_2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot n_2 d_0 \cdot \cos i_2$ 了，而是 $\delta = d \cdot \sin \theta$ 所对应的 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta$ 了——当 $\delta = j \cdot \lambda$ 时，或者说 $\varphi = 2j\pi$ 时，即有： $d \cdot \sin \theta = j \cdot \lambda$ ，这称为光栅方程。

【一般来说，题所问到的“二级光谱”、“第一级光谱的末端”等等，其中的“光谱”均指的是缝间干涉的主最大值们，因为只有干涉项有多个主最大值，而衍射项只有一个主最大值；因此，同样当谈及诸如“第二十级主最大值”等，也均指的是多光束干涉的主最大值 $\sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{d}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2$) 们。——另外，“二级”、“第一级”是指 $\sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{d}$ 中的 k 取定某级后，一定范围内的连续 λ 所对应的 $\sin \theta$ 的区间；因此可见光 400nm~760nm 范围内“第一级光谱的末端”指的便是 k 取 1、 λ 取 760nm(的 $\sin \theta$)】

如果平行光束非垂直入射，而是以与光栅平面法线夹角 θ_0 倾斜入射，则光栅方程变为 $\delta = d \cdot (\sin \theta \pm \sin \theta_0) = j \cdot \lambda$ ，其中当 θ 与 θ_0 (衍射光和入射光)分居法线两侧时，括号中取减；分居法线同侧时，括号中取加。【其实更数学地，我们可以像之前 S_2 在 S_1 下方对应着光屏上 $y>0$ 的 p 点所对应的 $\delta = r_2 - r_1 > 0$ (即 $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$) 一样，我们同样设定光屏上的 y 轴正向朝上，每个缝的下边缘相对于其上边缘，以及任何一个相对更下面的缝，都可视为 S_2 ，此时规定从左向右出射缝的光束与缝面法线夹角 θ ，以出射光束朝向第一象限为正，朝向第四象限为负(在笛卡尔坐标系下)，即 θ 逆时针旋转为正，顺时针

针旋转为负，对应 $\delta_2 = d \cdot \sin\theta$ 的正负；而在 $\delta_1 = d \cdot \sin\theta_0$ 中，入射光束 and θ_0 顺时针旋转时， θ_0 为正，逆时针旋转时， θ_0 为负；对应入射光束尾巴朝向二象限时， $\theta_0 > 0$ ，尾巴朝向三象限时， $\theta_0 < 0$ 】

另外，x 射线衍射测晶体原子层间距中，光程差也与此近 π 角的 V 字形光路类似：
 $\delta = d \cdot (\sin\theta + \sin\theta_0) = j \cdot \lambda$ (同侧取加)，只不过这里的 θ 在含义上，从入射光束与缝面法线的夹角 θ_0 ，变为了“掠射角”，即光束与晶面的夹角；并且根据反射定律，反射角 $\theta = \theta_0$ ，因此有 $2d \cdot \sin\theta_0 = j \cdot \lambda$ 。(其中的 θ_0 常用 α_0 表示，以示与之前的 θ_0 在含义上有区别： $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ ；或者说另一种原因是因为 x 射线和 α 粒子有联系，或者 x 与 α 长得像，因而开创者就采用了 α -)

2.5.2 谱线的缺级

【类似于 $u = \frac{k}{2} b \cdot \sin\theta = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda}$ ，现在我们令 $v = \frac{\varphi}{2} = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{d}{\lambda}$ ，则 $I_p = A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$ ，括号中的东西对这里有点多余，就当复习了一下，之后有用到。】根据 1.9.3 中的结论，当 $\varphi = \frac{2k\pi}{N}$ ($k=0, \pm 1N, \pm 2N$) 时，多光束干涉的光强得到主极大值： $N^2 \cdot A_0^2$ ；当 $\varphi = \frac{2k'\pi}{N}$ 时 ($k' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm(N+1), \pm(N+2), \dots, \pm(2N-1), \pm(2N+1), \pm(2N+2), \dots, \pm(3N-1)$)，($k' \neq k$)，此时得到最小值 0——两个相邻主极大值之间分布着 $N-1$ 个最小值，分布着 $N-2$ 个次极大值。此时考虑多光束干涉光强的主极大的角位置 θ (而不是它的角宽度!它的角宽度得另算(见 2.5.3)，用相邻暗纹来算，而角位置就是各个主极大的角位置)， $\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta = \frac{2k\pi}{N}$ ，得到 $\frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta = \frac{k}{N}$ ($k=0, \pm 1N, \pm 2N$)，即有 $\sin\theta = k \cdot \frac{\lambda}{d}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2; \text{ a new } k!$) 【这也可以用光栅方程 $d \cdot \sin\theta = j \cdot \lambda$ 来得到!】；此时再考虑单缝衍射最小值的位置 θ ： $\sin u = 0$ 对应的 $u = k\pi$ ，即 $\pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda} = k\pi$ ，即 $\sin\theta = k' \cdot \frac{\lambda}{b}$ ，且 $k' \neq 0$ (与这一段中的 k' 不同)。【之前我们在多光束干涉中，并没有像单缝衍射那儿一样，在求出了各极值对应的 φ 后，考虑对应的角宽度 θ 等等信息】

如若单缝衍射的最小值恰好落到多光束干涉的主极大处，则会造成“谱线的缺级”现象；此时 $\theta = \theta$ ，于是 $k \cdot \frac{\lambda}{d} = k' \cdot \frac{\lambda}{b}$ ，得到 $\frac{k}{k'} = \frac{d}{b}$ ，因此若 $\frac{d}{b}$ 为整数，则会导致 $k = \frac{d}{b} \cdot k'$ ($k' = \pm 1, \pm 2$) 缺级；即使 $\frac{d}{b}$ 不是整数，只要 $\frac{d}{b}$ 是有理数，总会有多光束干涉的无数个整数 k 级处缺级，只是周期比较长而已。

2.5.3 谱线的半角宽度

类似单缝衍射中所讨论的，我们对这里的多光束干涉中的主极大的角宽度定义为其相邻两个最小值对应的 $\Delta\theta$ 。那么对于 $\varphi = \frac{2k'\pi}{N}$ ($k' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm(N+1), \pm(N+2), \dots, \pm(2N-1), \pm(2N+1), \pm(2N+2), \dots, \pm(3N-1)$)，且 $\varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin\theta = \frac{2k'\pi}{N}$ ，得到 $\sin\theta = \frac{k'}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$ (与上一段中的 k' 不同)，于是 $\sin\theta_1 - \sin\theta_{-1} = \frac{2}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$ ，即有 $\Delta\sin\theta = \frac{2}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$ ，即 $\cos\theta \cdot \Delta\theta = \frac{2}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}$ ，于是 $\Delta\theta = \frac{\frac{2}{N} \cdot \frac{\lambda}{d}}{\cos\theta}$ 。则半角宽度便为： $\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$ 。

2.5.4 双缝衍射

若令 $I_p = A_0^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$ 中 $N=2$ ，则(双)缝间干涉因子变为 $\frac{\sin^2 2v}{\sin^2 v} = 4 \cos^2 v = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ，于是 $I_p = \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot 4A_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ 。其中的 $4A_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ 即为之前我们所认为的双缝衍射的光强分布。——这建立在 $u = \frac{k}{2} b \cdot \sin\theta = \pi \cdot \sin\theta \cdot \frac{b}{\lambda} \rightarrow 0$ 的条件之上，即当 $b \ll \lambda$ 导致 $\frac{\sin^2 u}{u^2} = 1$ 时。这2.3.3与所说的“只有在 $\lambda \ll b$ ，衍射现象才可忽略不计”并不矛盾——因为孔径 b 太大或太小，衍射现象均不明显。

Chapter03.几何光学的基本原理

3.1 几个基本概念和定律 费马原理

3.1.1 光线与波面

一二章主要讲的是波动光学，其主要考虑的是波长、振幅、相位；而这章几何光学主要考虑的将是光线和波面，光线只表示光的传播方向。几何光学主要研究的实际上就是波动光学的极限情况。对于某些问题，我们只需要借助某些基本实验定律和几何定律，就可以借此进行有必要的计算而不必涉及光的本性。

3.1.2 几何光学的基本实验定律

- (1).光在均匀介质中的直线传播定律。
- (2).光通过两种介质分界面时的反射定律和折射定律。
- (3).光的独立传播定律和光路可逆原理。

3.1.3 费马原理

泛函数的积分值取极值——变分原理。光程 nds 便是泛函数。物理学中有三个重要原理反映了变分原理：哈密顿原理、费马原理、 δ 。【参见《QED,光和物质的奇妙理论》理查德·费恩曼：如果路程不是最小的，则较小的路径变化会带来较大的路程差，那么相邻的路径之间的时间差、相位差就比较明显；这样，它们之间就会发生比较明显的相消干涉。而最短的线，它的微小移动不会带来明显的相位差，此部分的概率幅将保留，并成为主要的贡献者。】

3.1.4 单心光束 实像和虚像

单心光束经反射或折射后，仍能实际会聚或虚线会聚为一个顶点，则称之为单心光束；第二个顶点即为单心光束的像。实际会聚的会聚点叫实像；若光线经反射或者折射后发散，但其反向延长线仍交于一个顶点，则该点叫虚像。

3.1.5 实物 实像 虚像

对眼睛来说，“物点”和“像点”都不过是进入瞳孔的发散光束的顶点。因此人眼看到的只是顶点，而并不能区分是“物点”还是“像点”。不过，发光的物点向一切方向发光，人眼无论在何处都可看见它；而会聚到像点(这里指的是实像点)后的光线，接下来的发散范围并不是一切方向，因此这种情况下，人眼能看见像点的地方，有空间上的限制。

3.2 光在平面界面上的反射和折射

3.2.1 光在平面上的反射

平面镜是一个最简单的，不改变光束单心性的，并能成完整像的，光学系统。

3.2.2 光在平面上的折射

光线在折射率不同的两个透明物质的分界面上折射时，除平行光束折射后仍为平行光束外，单心光束将被破坏。

设 P 点在水下，且 l 方向为 y 轴正向(因此 y 、 y' 在这种参考系下是正的)，则坐标为 $(0, y)$ 的、身处 n_1 的 P 点斜向上朝着水面发射两束光，一束以入射角 i_1 射入水面，交点为 $(x_1, 0)A_1$ ，以折射角 i_2 朝 B_1 方向射出水面；另一束光以入射角 $i_1 + \Delta i_1$ 射入水面，交点为 $(x_2, 0)A_2$ ，以折射角 $i_1 + \Delta i_1$ 朝 B_2 方向射出水面。 A_1B_1 的反向延长线与 A_2B_2 的反向延长线相交于 $(x', y')P'$ ，并且 A_1B_1 的反向延长线进一步延长至与 y 轴相交于 $(0, y_1)P_1$ 、 A_2B_2 的反向延长线进一步延长至与 y 轴相交于 $(0, y_2)P_2$ 。

计算得： P_1 点的 $y_1 = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{y^2 + (1 - \frac{n_1^2}{n_2^2})x_1^2}$ ； P_2 点的 $y_2 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{y^2 + (1 - \frac{n_1^2}{n_2^2})x_2^2}$ ， P' 的 $x' = y(\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1) \tan^3 i_1$ ， P' 的 $y' = y \frac{n_2}{n_1} [1 - (\frac{n_1^2}{n_2^2} - 1) \cdot \tan^2 i_1]^{\frac{3}{2}}$ 。

如果光束是单心的，只要作出任意两条光线的交点，就能确定所有其他光线都将通过这个交点，这个交点就是光束的顶点。因此不仅所研究的平面上的折射或反射后的光束所在直线相交于此点，所有平面上的、空间上的折射或反射后的光束，其所在直线都将通过这第二个顶点。

然而在没有证明平面界面的折射光束是单心光束的情况下，不能认为 P' 点就是折射光束的顶点。上面仅讨论了 Oxy 面内的任意两条光线，实际上应该考虑从光源 P 发出的狭窄的空间光束。为此，将 Oxy 面绕 y 轴向 $-z$ 方向转出一个角度，此时 $\triangle PA_1A_2$ 将展成一个单心的发散光束，该空间内，所有平面的所有光线的反向延长线均交于 y 轴的线段 P_1P_2 (弧矢焦线) 范围内，并且不同平面的折射光束所对应的不同的 P' 将描出一段很短的弧(子午焦线 \perp 弧矢焦线)。

仅当 P 点发出的光束几乎 \perp 界面时，即 $i_1 = x_1 = x_2 = 0$ 时，可得 $x' = 0$ 、 $y' = y_1 = y_2 = \frac{n_2}{n_1} y$ 。这时 P' 、 P_1 、 P_2 才能几乎重合，折射光束才能几乎保持单心，此时在水面上沿着

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

竖直方向观看水中的物体，所见的像最清晰，此时所见的像的深度 y' 与实际物体的深度 y 之比为 $\frac{n_2}{n_1}$ (这里可以很好地记为：同在分子 or 分母上的点 P' 的 y' 和 n_2 以直线传播的两端对应彼此；我们只用考虑 P' ，且直线传播所对应的一定是虚像点 P' ，且是反向延长到 P' 的；当然，光路可逆也可使得 P' 成为实像点，且反向了的光路会正向延长到虚像点 P (之前的 P 是发光的物点，而现在 P 、 P' 都是像点了)；一般来说与 n_2 “共线”的 y' 却在 n_1 里，和 y 呆在一起)；入射角 i_1 越大、入射光线越倾斜，折射光束的像散越显著，沿着倾斜角度较大的方向观看，则像的清晰度由于像散而受到破坏。若 $n_1 > n_2$ ，则 $y' < y$ ，即也就是似见水中的物体上升。 y' 称为像似深度。【在实际使用时，不论坐标系的选择 (之前 y 轴向下的选择本身就是意味着衡量 y' 到分界面的距离，并以正数来表示)， y' 与 y 均可看作到分界面的距离；并且一般将有折射的那个点 (非直线传播的点)，看作光源 P ，对应公式中的 y ，写在分母；将直线传播的点，看作像点 P' ，对应 y' ，写在分子——不论光路方向如何，都可这样看】

一束向 P 点会聚的光在到达 P 点之前通过一平行玻璃板，若将玻璃板上光束的轴竖放，问会聚点将朝哪个方向移动？移动多少？

$$PP' = \frac{L}{\sin i_1} = \frac{d}{\cos i_2} \cdot \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin i_1} = d \cdot \frac{\sin i_1 \cos i_2 - \cos i_1 \sin i_2}{\sin i_1 \cos i_2} = d \cdot \left(1 - \frac{\cos i_1 \sin i_2}{\sin i_1 \cos i_2}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i_2}\right)$$

$$= d \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\sqrt{1 - \sin^2 i_2}}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos i_1}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i_1}}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{\cos i_1}{\frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i_1}}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2 i_1}}\right)$$

$$= d \cdot \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{\frac{n_2^2}{1} - \sin^2 i_1}}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 i_1}}\right)$$

从上式可看出，光束会聚点的移动不仅与玻璃板的折射率 n 和厚度 d 有关，而且和光线的入射角 i_1 有关。显然，一束会聚光中各光线的入射角是不同的，因此严格地讲，存在像散。只有当光束立体角很小时， PP' 才有确定的值。此时 $i_1 = 0$ ，即垂直入射时：

$PP' = d \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ，这个结论可以利用之前的结论得到：第一次折射时， P'' 相当于为之前模型中的光源， P 的 y 与空气 n_1 共线于两端，(注：光路可逆，将 P'' 看作发光物) 它们同在分母或分子 (最好将像点写在分子)，则此时 $\frac{y}{y''} = \frac{n_1}{n_2}$ ；第二次折射时， P' 相当于旧模型中的光源， P'' 的 y'' 与玻璃 n_2 共线于两端，它们同在分母或分子，则此时 $\frac{y'' - d}{y' - d} = \frac{n_2}{n_1}$ ；——那么根据 $\frac{y}{y''} = \frac{n_1}{n_2}$ 可得 $y = \frac{1}{n} y''$ ，根据 $\frac{y'' - d}{y' - d} = \frac{n_2}{n_1}$ 可得，而 $PP' = y' - y = \frac{1}{n} (y'' - d) + d - \frac{1}{n} y'' = d \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

【由于 $PP' = y' - y = d \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0$ ，因此 y' 所对应的 P' 相对于 P 朝着远离界面的方向移动；另外，根据 3.4.3， P 有点虚物的意思，然而在这一节的公式中，它的地位却相当于像】

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

3.2.3 全反射 光导纤维

1.全反射

根据 $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$, 当处于折射率较大的介质 n_1 中的入射角 i_1 大到一定程度时, 折射角 i_2 会跟着增大到 $\frac{\pi}{2}$, 此时 $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1}$, 此时的 i_1 称作临界角 $i_c = \text{asin} \frac{n_2}{n_1}$ 【全反射的临界角和布儒斯特角有那么点像, 都有点临界的意思--】。入射光所处的介质折射率 n_1 越大, 则临界角 i_c 越小, 使得折射光无法透射的入射光 i_1 的取值区间 $[i_c, \frac{\pi}{2}]$ 的长度 $\frac{\pi}{2} - i_c$ 更大, 越容易发生全反射。——金刚石的折射率极大 ($n=2.417$), 故在切割钻石时控制切割面的角度, 使进入钻石的光线均产生全反射后自其顶部射出; 加上金刚石具有强烈的色散, 看起来更大放异彩。【玻璃介质的全反射可以使得玻璃充当理想镜子的角色(虽然镜子本身也主体上是玻璃成分--); 全反射在尼科耳棱镜处也会用到(光全反射掉了); 像 i_c 一样, 同样是临界角的还有布儒斯特角 i_{01} 等等】

2.光导纤维

假设一横放的圆柱形光导纤维, 有一束光从其侧面入芯入射, 入射角 i 要小, 以至于折射角 i' 也小, 而入射桶壁的入射角 $\frac{\pi}{2} - i'$ 较大, 导致其落于 $[i_c, \frac{\pi}{2}]$ 区间内, 产生全反射。设空气折射率为 n_0 、柱芯 n_1 、导线侧壁 n_2 , 那么有: $n_0 \cdot \sin i = n_1 \cdot \sin i' = n_1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - i') \leq n_1 \cdot \cos i_c = n_1 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 i_c} = n_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, 假设 $n_0=1$, 则 i 的最大值 $= \text{asin} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ 。——因此为了使得更大范围的光束能在纤维中传播, 应选择 $n_1 - n_2$ 差值较大的材料去制造光导纤维。

3.海市蜃楼

光在非均匀折射率的空气中传播时, 产生全反射后见到的景象。海面附近空气温度比高空中的低, 密度比空中的高, 折射率比空中的高。远处的海面或海岸上的景物发出的光通过不同层面的空气时会发生折射, 越向上, 入射角越大, 产生的折射角越大。当入射角大于临界角时, 则发生全反射。反射光线进入人眼后, 大脑会根据入射光线的反向延长线找到像的位置。

3.2.4 棱镜

单色入射光入射棱镜 A 角的一边时, 入射角为 i_1 , 折射角为 i_2 ; 折射光线入射 A 角另一边时, 入射角为 i_2' , 折射角为 i_1' 。设俩法线交角为 E , 由于 $i_2' + i_2 + E = \pi$, 且 $A + E = \pi$, 则 $i_2' + i_2 = A$ 。那么偏向角 $\theta = (i_1 - i_2) + (i_1' - i_2') = i_1 + i_1' - A$, 可以证明当 $i_1 = i_1'$ 时, $i_2' = i_2 = \frac{A}{2}$, 且有最小偏向角 $\theta_0 = 2i_1 - A$, 得到 $i_1 = \frac{\theta_0 + A}{2}$, 棱镜材料的折射率 $n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$ 。——之所以利用最小偏向角而不用任意偏向角, 是因为它在实验中最容易被精确地确定。

(1). 也可以用平行的薄的平玻璃做成空心三棱镜, 由于薄的平行平玻璃不引起光的偏折, 由此可测出液体的折射率。

(2). 利用全反射棱镜来改变光线方向, 比用一般的平面镜, 能量损失要小得多。等腰 $Rt\triangle ABC$ 为棱镜侧三角形(主截面), B 角为直角。当光线垂直入射到 AB 面时, 反射损失最小(玻璃约 4%), 并按原方向进入棱镜; 射到 AC 面时, 入射角 $= 45^\circ$, 比玻璃到空气的临界角 42° 大, 产生全反射, 反射光强几乎没有损失。由于反射角也是 45° , 光线偏折了 90° , 垂直于 BC 面射出, 反射损失也很小。——因此在光学仪器中经常用它作为把光线转向 90° 的光学元件。

(2)'. 也可以利用全反射棱镜来将光线方向改变 π 角: 将一个主截面为矩形的棱镜, 的主截面矩形的某一角截去一个 45° 的等腰直角三角形, 并让光束垂直于截面入射, 即可制成光线转向 180° 的光学元件, 取名为角锥棱镜。

(3). 利用全反射棱镜可以方便地获取指纹图像而制成指纹锁。棱镜的两个直角边外侧分别放置照明光源和摄像机。当手指按在斜边的折射面上时, 指纹的突出部分与棱镜的折射面紧密接触部分, 破坏了全反射条件, 入射到手上产生漫反射, 因而相应位置的反射光较弱, 而指纹的凹槽部分因其未与折射面接触, 反射光较强。因此摄像机可以清楚地接收到折射面上亮暗相间的指纹图像。

(4). 利用全反射棱镜还可以制成光开关。当两个(2). 中的等腰直角棱镜的斜边的折射面离开一小段距离时, 入射光被对应的棱镜全反射而转向 90° , 不能穿过折射面而前往另一个棱镜, 这时开关处于“关”的状态; 当两棱镜的斜边的折射面紧贴 or 其间充入折射率与棱镜相同的液体时, 全反射条件破坏, 光束能穿过棱镜 2, 使得开关处于“开”的状态。

3.3 光在球面上的反射和折射

3.3.1 符号法则

这套符号法则叫**新笛卡尔符号法则**：连接部分球面的中心点 **O**(顶点；相当于之前菲涅尔半波带一节中的球冠状波面顶点)与球面的球心(曲率中心)**C**点的**直线 CO**叫做**主轴**，通过主轴的平面称为**主平面**(相当于一个侧面、断面)；所有的主平面绕主轴旋转对称，因此只需要讨论一个主平面内的光线的反射、折射情况。

(1).各点的 x 、 y 坐标仍然依照笛卡尔直角坐标系判断正负，**顶点 O** 为原点。

(2).光线相对于主轴的倾斜角度异于笛卡尔直角坐标系，顺时针为正，逆时针为负， O 点从主轴算起(即仍从 x 轴算起)，并且角度**只记做绝对值 $< \frac{\pi}{2}$ 的形式**(即不用考虑光路方向，比如从第一象限射向第四象限的光，看上去角度应该记作类似于**向量 $+\frac{3\pi}{4}$ (顺时针转)**的样子，但其实记作**直线 $-\frac{\pi}{4}$ (逆时针转 $< \frac{\pi}{2}$ 角)**)。

(3).图中的所有线段的长度、角度的标识(标签)均是正的，因此有时候会用 $-u$ 表示角度，它暗示了对应的直线在新笛卡尔坐标系下的 u 是负值。

一般地，我们将发光点 P 取在主轴上 O 点左侧。

3.3.2 球面反射

P 发出**入射光 L** 从左到右地射到**凹球面上 A 点处**，**反射光 L'** 通过主轴上的 P' 点。令 $PO = -s$ ， $P'O = -s'$ ， $PA = L$ ， $AP' = L'$ ， C 点坐标 $= -r$ ，半径 AC 与主轴的夹角为 $-\theta$ 。则**光程 $PAP' = nL + n'L' = n\sqrt{PC^2 + AC^2} + 2PC \cdot AC \cdot \cos(-\theta) + n'\sqrt{P'C^2 + AC^2} - 2P'C \cdot AC \cdot \cos(-\theta)$** ，则 $\frac{d\Delta PAP'}{d\theta} = n \frac{PC \cdot AC \cdot \sin\theta}{L} - n' \frac{P'C \cdot AC \cdot \sin\theta}{L'} = n \frac{[(-s)-(-r)] \cdot r \cdot \sin\theta}{L} - n' \frac{[(-r)-(-s')] \cdot r \cdot \sin\theta}{L'} = 0$ ，得到 $n \frac{r-s}{L} - n' \frac{s'-r}{L'} = 0$ ，则 $n \frac{1-\frac{s}{r}}{L} + n' \frac{1-\frac{s'}{r}}{L'} = 0$ ， $\frac{n'}{L'} + \frac{n}{L} = \frac{1}{r} (\frac{n's'}{L'} + \frac{ns}{L})$ ，一般 $n = n'$ ，于是有： $\frac{1}{L'} + \frac{1}{L} = \frac{1}{r} (\frac{s'}{L'} + \frac{s}{L})$ (一般带撇的写在前，正如在平面折射一节的公式中，带撇的 y' 写在分子一样，因为带撇的量一般是要求的量，而若要求的量写在上面和前面，移项的就不是这些量了，会保留在方程左边)。该公式对于凸球面也适用，此时 $r > 0$ ；该公式对于物点在镜面右边也适用，此时 $s > 0$ ；物点可以距离顶点很近，对应 s 可以很小；代入计算的元素和计算结果的呈现，均依从符号法则。

可以看出, 当 s 、 r 不变时, θ 的变化会导致 L' 和 L 的变化, 进而导致 s' 变化。这就是说, 从物点发散的单心光束, 或者即使是平行光束, 经球面反射后, 将不再保持单心性; 或者从空间层面上, PA_1 与 PA_2 两条入射光线经球面反射后交主轴于 P_1 、 P_2 (它们的属性相当于之前的 P) , 则 P_1P_2 称为弧矢焦线; A_1P_1 与 A_2P_2 的交点 P' (不同于之前的像点 P) 绕主轴旋转一小角度, 描出的一短弧叫子午焦线。

3.3.3 近轴(光线)条件下的球面反射

在近轴条件下, θ 很小, 一级近似下 $\cos(-\theta)=1$, $L=\sqrt{(PC+AC)^2}=-s$, $L'=\sqrt{(AC-P'C)^2}=-s'$ 。此时 $\frac{1}{L'} + \frac{1}{L} = \frac{1}{r}(\frac{s'}{L'} + \frac{s}{L})$ 变为: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$ 。当 $s \rightarrow -\infty$ 时, 焦距 $f'=s'=\frac{r}{2}$ 。其中 f' 的符号取决于 r 的正负 (当 $r>0$ 时, 曲率中心点 C 在球面镜顶点 O 右边, 球面镜向左凸, 对于在左边的物点 P 是凸面镜, s' 是虚像)。【同样当 $s \rightarrow +\infty$ 时, 焦距 $f'=s'=\frac{r}{2}$, 此时 $r>0$ 的球面镜对于位于其右边的物点 P 是凹面镜, $s'=\frac{r}{2}>0$ 也是非常合理的, 这相当于 $s \rightarrow -\infty$ 、 $r<0$ 的情景: 你可以用这样的物理场景来帮助你记忆这个公式; 在这里, 不论 s 还是 $s' \rightarrow +\infty$ 还是 $-\infty$, 均有对应的: $f'=\frac{r}{2}$ 、 $f=\frac{r}{2}$ 】

——1.在做题时, 当其言及“凹面镜的焦距为 10cm”时, 其中的“凹面镜”是指, 对于题中的物点 P 而言的凹面镜, 即该球面镜向着背离物点的方向凸, 即向着物点 P 凹。而题中的“焦距”一词是指 $|f'|$, 即像方焦距的绝对值, 其正负通过“凹面镜”一词的隐藏朝向来确定——先用它的朝向来确定 r 的正负, 再 $f'=\frac{r}{2}$ 得到的 f' 正负。

3.3.4 球面折射

同样根据光程 $PAP'=nL+n'L'$ 以及费马原理 $\frac{d\Delta_{PAP'}}{d\theta}=0$, 折射公式与考虑了介质折射率的反射公式一模一样: $\frac{n'}{L'} + \frac{n}{L} = \frac{1}{r}(\frac{n's'}{L'} + \frac{ns}{L})$; 经球面折射后, 物点 P 发出的单心光束将不再保持单心性。

3.3.5 近轴(光线)条件下的球面折射

当 θ 很小时, $L=-s$, $L'=s'$ 。此时 $\frac{n'}{L'} + \frac{n}{L} = \frac{1}{r}(\frac{n's'}{L'} + \frac{ns}{L})$ 变为: $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$ 。上式右端对于一定的介质和一定形状的表面来说, 是个不变量, 定义它为光焦度, $\Phi = \frac{n'-n}{r}$ 。该式也适用于凹球面折射, 此时 $r<0$; 物点在镜面右(介质里)也使用, 此时 $s>0$; s 也可以很小。【注意, 虽然折射沿用了与反射相同的普适公式 $\frac{n'}{L'} + \frac{n}{L} = \frac{1}{r}(\frac{n's'}{L'} + \frac{ns}{L})$, 但却最终退化到了完全不同的近轴条件下的公式, 这得益于/归功于折射情景中的 $L=-s$, $L'=s'$

设定，与反射时的 L' 有一符号之差： $L=-s$ ， $L'=-s'$ ；并且在折射时，折射率是需要考虑的，不能像反射那样设定 $n=n'$ 。若球面反射处不约束 $n=n'$ 的话，则也有类似的 $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'+n}{r}$ ；这两点的不同导致了公式的大相径庭。】

P 点或 P' 点为物，则另一点必为其像，物点和像点的这种关系称为共轭。物像共轭是光路可逆的必然结果。平行于主轴的入射光线折射后和主轴的交点称为球面界面的像方焦点 F' 。当 $s \rightarrow -\infty$ 时，像方焦距 $f' = s' = \frac{n'}{n'-n} r$ (注：即使 $s \rightarrow +\infty$ ，仍有像方焦距 $f' = \frac{n'}{n'-n} r$ ，此数学结果并不违背物理场景：当 $s \rightarrow +\infty$ 时，P 点从处于 n 的介质中，变得处于 n' 的介质中了，因此 $f' = \frac{n'}{n'-n} r$ 中的 n 、 n' 在数值上会分别为 n' 、 n [但在含义上仍然分别是 P、P' 所处于的介质的折射率]，而 r 不变，因此 f' 与原来符号相反，对应 s' 即 P' 从处于右边变得处于左边了)。当 $s' \rightarrow +\infty$ 时，物方焦点 F 所对应的物方焦距为 $f = s = \frac{n}{n-n'} r$ (同样即使 $s' \rightarrow -\infty$ ，也有之)。——可得 $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ (不论 s 还是 $s' \rightarrow +\infty$ 还是 $-\infty$ ，所对应的 f 和 f' ，均有此式子成立；但得是同样的物理场景下的，即要么 $s' \rightarrow +\infty$ 且 $s \rightarrow -\infty$ ，要么 $s' \rightarrow -\infty$ 且 $s \rightarrow +\infty$ ，因为要保证 f' 中的 n 、 n' 与 f 中的 n 、 n' 分别在数值上对应相等)，由于两种介质的折射率永远不等 (不然连折射都不存在了)，因此 $|f'| \neq |f|$ ；上式中的负号表示物方焦点和像方焦点永远分居球面左右两侧。

【注：球面折射中有个特别需要注意的事情：实物/物点 P (对应 s) 所处的空间的折射率为多少，公式中的 n 就是多少，即公式中的 $\frac{n}{s}$ 总是一对符合物理情景的量： s 来决定 P 点位置，而 P 点位置决定 n 是多少；然而无论 s' 所对应的像点 P' 在物理情景上，是处在其所理应处境的 n' 环境中，还是仍然处于物点 P 所在的 n 环境中，公式中 $\frac{n'}{s'}$ 中的 n' 永远在取值上不取物点 P 所在环境的折射率值，即 n 的值 (除非球面两边折射率确实相同)，而是取球面所分隔的另一个环境的折射率的值；所以 $\frac{n'}{s'}$ 可能是一对“不诚实”的数据】

【同样，在薄透镜成像中， n_1 、 n_2 也应这么处理/对待，公式中只有物点 P 所对应的部分 $\frac{n_1}{s}$ ，二者才是物理情景上永远对应的；而像所对应的部分 $\frac{n_2}{s'}$ 中，算出来的 s' 所对应的 P' 可能仍然处于 n_1 环境中 (比如凹透镜)】

3.3.6 高斯公式和牛顿公式

将 $f' = \frac{n'}{n'-n} r$ 和 $f = \frac{n}{n-n'} r$ 代入 $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$ 中，便可得到 $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'}$ 和 $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = -\frac{n}{f} (\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n})$ 。或者进一步有 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ ，这称为高斯物像公式。

若令 $x = s - f$ ， $x' = s' - f'$ ，则原式 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ 变为： $\frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1$ ，化简后得 $xx' = ff'$ 。这便是牛顿公式。——其中 f 和 f' 仍然是 F、F' 相对于 O 点的坐标，而 x 和 x' 分别是 s 和 s' 分别以 F 和 F' 为参考点的坐标。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

其他光具组理想成像时，也满足上面的这些关系，它们是普遍的物像公式。

3.4 光连续在几个球面界面折射 虚物的概念

3.4.1 共轴光具组

多个球面的顶点和曲率中心都在同一直线上，这种系统称为共轴光具组。

3.4.2 逐个球面成像法

对第一个球面来说是出射的折射光束，对第二个球面来说就是入射光束；第一个球面所成的像，可看作第二个球面的物。依次逐个对各球面成像，最后能求出物体通过整个系统所成的像。

3.4.3 虚物

在单心光束的单心性不被破坏的条件下，光束通过前一个球面所成的像，不管是实像还是虚像，只要它的位置在下一个球面之前，即光束(可能是虚线)到达下一球面之前是发散的，则可比较简单地将其直接看作是物，此时将它相对下一个球面的顶点的坐标代入物像公式即可。

不过有时，光从前一个球面出射后是会聚的，但光束尚未达到会聚点，就遇上下一个球面了，其本该成的实像落在了下一个球面之后，此时仍将其本该会聚的顶点看作是物点，定义这种物为虚物(它是相对于下一个球面的虚物，是相对于上一个球面的实像)，并将它在这下一个球面后面的会聚光束作为对于该球面的入射光束。此时它相对下一个球面的顶点的坐标与上一段所述情况符号相反。

概括地说，发散的入射光束的顶点(不管是否有实际光线通过这点)是实物，会聚的入射光束的顶点(永远没有实际光线通过该点)是虚物。

3.5 薄透镜

连接两透镜两球面曲率中心的直线称为透镜的**主轴**(当然一般也是过两个顶点的直线), 过主轴的任意平面称为主平面, 透镜都制为圆片形, 并以主轴为对称轴, 圆片的直径称为透镜的**孔径**。

中间比边缘部分厚的透镜称为**凸透镜**。中间厚+两面凸(这里的凸是指向外弯曲)=**双凸**(这里的凸是指中间厚), 中间厚+1平1凸=**平凸**, 中间厚+1凹1凸=**弯凸**。中间薄+两面凹=**双凹**, 中间薄+1平1凹=**平凹**, 中间薄+1凹1凸=**弯凹**。

透镜两表面在其主轴方向上的间隔(俩顶点的距离)=**透镜的厚度**, 若透镜的厚度相对于球面的曲率半径不能忽略, 则称为**厚透镜**; 否则称为**薄透镜**。

3.5.1 近轴条件下的薄透镜成像

位于主光轴上透镜左侧物点 P 发出入射光发散到薄透镜左侧球面上, P 关于左侧球面的实像点为 P', 以左侧球面顶点为原点列物像公式: $\frac{n}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n-n_1}{r_1}$; 由于 P' 是会聚光束的顶点, 且落于右侧球面之后, 所以 P' 是虚物; 对于右侧球面来说, 既可以说 P' 是 P 的像(这个理解上更顺, 但其公式 $\frac{n}{s'} - \frac{n_2}{s'-d} = \frac{n-n_2}{r_2}$ 在接下来的推导中有点别扭), 又可以说 P 是 P' 的像(因为物像共轭/光路可逆), 因此依照后一种理解, 以右侧球面顶点为原点列物像公式: $\frac{n_2}{s'} - \frac{n}{s'-d} = \frac{n_2-n}{r_2}$ 。薄透镜条件下, $d \rightarrow 0$, 则 $\frac{n_2}{s'} - \frac{n}{s'} = \frac{n_2-n}{r_2}$ 。

将两式子相加, 即有 $\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}$ 。其中原本来说, (右侧面的坐标 d、s'、)s 和 r_1 的参照点为左侧球面顶点, s' 和 r_2 的参照点为右侧球面顶点, 并且其中 r_1 、 r_2 是异号的(对于双凸: $r_1 > 0$ 、 $r_2 < 0$)。——但是由于薄透镜的 $d \rightarrow 0$, 两个顶点可看作重合于一点 O, 于是 s 和 r_1 、 s' 和 r_2 均可看作参照于两个顶点的连线中点 O, 若透镜两边的折射率相同, 则通过 O 点的光线不改变方向, 这样的点称为透镜的**光心**。

$f' = \lim_{s \rightarrow -\infty} s' = \frac{n_2}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}}$, $f = \lim_{s' \rightarrow +\infty} s = -\frac{n_1}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}}$, 于是有 $\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n_2}{f'} - \frac{n_1}{f}$ (注: 这里仍有 $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} = -\frac{n_2}{n_1}$, 并且其中的 f' 、 f 也需要且只需对应同一物理场景), 以及 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$; 当 $n_1 = n_2$ 时, 可得 $\frac{f'}{f} = -1$, 带入 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ 即有 $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} (= -\frac{1}{f} = (\frac{n}{n_1} - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}))$, 并且此时; 当进一步地 $n_1 = n_2 = 1$ 时, $\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$ 。【当 $n_1 = n_2$ 或 f' 已知时, 就可考虑使用该公式 $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$, 公式中的 f' 一定要和所带入公式的 s 对应($s \rightarrow +\infty$), 以判断 f' 的正负。在 4.6 光阑 光瞳处用的较多】

3.5.2 横向放大率

在**近轴光线**和**近轴物**的条件下，垂直于主轴的物所成的像仍然垂直于主轴。定义像的横向大小与物的之比值=横向放大率 $\beta = \frac{y'}{y}$ 。

对于 $n_1 = n_2$ 情形(透镜两边的折射率相同)时的薄透镜，由于通过 O 点的光线不改变方向，由 $\triangle PQO$ 与 $\triangle P'Q'O$ 相似可得： $\frac{-y'}{y} = \frac{s'}{-s}$ ，因此 $\beta = \frac{s'}{s} = \frac{x' + f'}{x + f} = \frac{xx' + xf'}{x(x+f)} = \frac{ff' + xf'}{x(x+f)} = \frac{f'(f+x)}{x(x+f)} = \frac{f'}{x}$
 $= \frac{x'}{f}$ 。又因为当 $n_1 = n_2$ 时， $f = -f'$ ，因此还可进一步写作 $\beta = \frac{f'}{x} = \frac{x'}{f} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$ 。

若 $\beta > 0$ ，则像是正的(与物同向)；若 $\beta < 0$ ，则像是倒的(与物反向)；若 $|\beta| > 1$ ，则像是放大的；若 $|\beta| < 1$ ，则像是缩小的。

——凹透镜只能生成正立缩小的虚像。**不同之处**：凸透镜生成虚像时，物距得在一倍焦距内，且虚像是正立放大的。**相同之处**：透镜所成的虚像都是正立的(曲面镜也是)；凸透镜成实像很容易判断放大还是缩小，并且均是倒立的，规律和凹面镜一模一样。

3.5.3 薄透镜的作图求像法

1.已知入射光线 or 折射光线，找折射光线 or 入射光线

近轴条件下，通过物方焦点 F 与主轴垂直的平面称为**物方焦平面**。焦平面上一点与光心 O 的连线称为**副轴**(说到了光心，则已经默认了是 $n_1 = n_2$ 、 $f = -f'$ 的薄透镜了)。物空间的物方焦平面上任意一点发出的光 or 任意看上去将要会聚于像空间的物方焦平面上的光，经透镜折射后，将是一束与副轴平行的平行光，再加上光路可逆，即一束与副轴平行的平行光，经透镜折射后，会会聚于像空间的像方焦平面 or 反向会聚于物空间的像方焦平面上。

(像空间：折射光线行进于的空间；物空间：入射光线行进于的空间[物、像空间与光线行进方向直接相关，光线在经过光具之前的空间都叫物空间；当光具为透镜(而非平/球面镜)时，物空间与像空间总是分居透镜两侧]；物方焦平面——物方焦点——轴上的像点无穷远离透镜时的物点；像方焦平面——像方焦点——轴上的物点无穷远离透镜时的像点[一般情况下，当光具为凸透镜时，物方焦点与物空间、像方焦点与像空间都在凸透镜同一侧；当光具为凹透镜时，物方焦点在像空间、像方焦点在物空间都在凸透镜同一侧；而又由于物空间与像空间总是分居透镜两侧，因此物方焦点与物

空间、像方焦点与像空间分居透镜两侧——以上结论成立的条件为：凸透镜成实像、凹透镜成虚像，要知道凸透镜也能成虚像(凹透镜却不能成实像- -虽然会聚光经过凹透镜后可以变得平行，以致于再张大入射角使得(实)像点在像空间，但要知道会聚光可不是物点能发出的；利用薄透镜成像公式应该可以给出数学证明)，这样一来，我们或许该用成虚像、成实像来区分]——注：这一段的凸、凹透镜所处环境是通常的 $n_1=n_2=1<n$)

假如未知折射光线：利用平行光线透过凹透镜的折射光线会反向会聚于物空间的像方焦平面上的特点，我们就去找像方焦平面上的这个会聚点——强制假设一条与已知入射光线平行的过光心的副轴，它的折射光线仍是它本身，所以其折射光线的反向延长线，就是副轴本身，进而接着将副轴与物空间的像方焦平面相交即可得到假想的会聚点，连接会聚点与入射光线与凹透镜的交点，其延长线即为折射光线。同理凸透镜。

若是未知入射光线，则利用光路可逆原理，将已知的折射光线箭头取反，变成入射光线，这样就转化为了上一段的问题了。同理凸透镜。

2.用交线求近轴像点 Q 的位置

过物点 P 作两条特殊的入射光线，分别求出它们的折射光线，两条折射光线所在直线的交点，即为像点(对于物点 P 在主轴或者物点 Q 近轴时，均适用)：【设 O 为光心，A 为入射光线 QA 与透镜的交点】

(1).凸透镜：

法一：过光心的入射光线折射后方向不变，则连接 QO 并延长，该延长线即为 Q 的第一条折射光线；设 QA 所在直线与物空间的物方焦平面交于 B，B 即为假想的焦平面上的点光源，连接 BO 并延长，则 BA 作为视为 B 发出的另一条入射光线，其折射光线 AQ' 应该与 BO 对应的折射光线即 BO 的延长线平行，即与 BO 平行，因此作 Q 的第二条折射光线 AQ' // BO 并与其第一条折射光线：QO 的延长线相交，交点即为 Q'。

【最好说成 Q' 为两条折射光线所在的直线的交点，因为即使是凸透镜，也可能成虚像】

法二：第一条折射光线——QO 的延长线；第二条折射光线——作 OB // QA 交像空间的像方焦平面于 B，作射线 AB，即为 AQ'。两条折射光线所在直线的交点即为 Q'。

(2).凹透镜：

法一：第一条折射光线——QO 的延长线；第二条折射光线——设 QA 所在直线与像空间的物方焦平面交于 B，作 AQ' // OB。两条折射光线所在直线的交点即为 Q'。

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

法二：第一条折射光线——QO 的延长线；第二条折射光线——作 BO//QA 交物空间的像方焦平面于 B，作 BA 的延长线，即为 AQ'。两条折射光线所在直线的交点即为 Q'。

3.对于求 Q 的像点 Q'，还有一种简单的方法：先用 2.的方法求出 Q 点对应的 P 点在轴上的像点 P'，再通过横向放大率算出 P'Q'的高度，再确定 Q'点。

3.6 近轴物近轴光线成像的条件

费马原理指出，物体上任意发光点 Q 发出的光束经球面反射或折射后，能成像于单独一点 Q'的条件是：从 Q 发出的所有光线到达 Q'时的光程都相等。

3.6.1 近轴物近轴光线条件下球面反射的成像公式

设 P 点正上方的 Q 点产生的入射光线与凹球面交点为 A(x,h)，则非常有意思地：

$$\begin{aligned}\Delta_{QAQ'} &= QA + AQ' = \sqrt{(s-x)^2 + (y-h)^2} + \sqrt{(s'-x)^2 + (y'-h)^2} = (s-x) \sqrt{1 + \frac{(y-h)^2}{(s-x)^2}} \\ &+ (s'-x) \sqrt{1 + \frac{(y'-h)^2}{(s'-x)^2}} \approx (s-x) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{(s-x)^2}\right) + (s'-x) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{(s'-x)^2}\right) \\ &= \left[s-x + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{s-x}\right] + \left[s'-x + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{s'-x}\right] = \left[s-x + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{s}\right] + \left[s'-x + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{s'}\right] \\ &= \left[s-x + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{s}\right] + \left[s'-x + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{s'}\right] \approx \left[s-x + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{s}\right] + \left[s'-x + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{s'}\right] \\ &= \left[s - \frac{h^2}{2r} + \frac{1}{2} \frac{y^2 - 2hy + h^2}{s}\right] + \left[s' - \frac{h^2}{2r} + \frac{1}{2} \frac{y'^2 - 2hy' + h^2}{s'}\right] = s + s' + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{s} + \frac{y'^2}{s'}\right) - h \left(\frac{y}{s} + \frac{y'}{s'}\right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} - \frac{2}{r}\right)\end{aligned}$$

由于 $\Delta_{QAQ'}$ 应该与 h 无关，因此系数 $\frac{y}{s} + \frac{y'}{s'} = 0$ 、 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} - \frac{2}{r} = 0$ 。

可见与 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} - \frac{2}{r} = 0$ 之前的主轴上的球面反射公式、PP' 的物像公式 $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$ 有相同的形式，但是上一个只适用于主轴上的物和像，这里拓展了其含义：如果 Q 和 P 有相同的 s 值，则用两个公式算出来，Q' 和 P' 也将有相同的 s' 值——这说明如果物是垂直于主轴的线段，则像也是垂直于主轴的线段。此时 $\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$ 。【之前我们只在 3.5.2 提到了薄透镜的横向放大率 $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$ ，这里追加补充了两个初级情景下的横向放大率计算公式，一个是球面反射的，一个是球面折射的；需要注意的是，三者的物 Q 和像 Q' 在透镜 or 曲面镜成实像时，都处于 x 轴两侧，即 $\frac{y'}{y}$ 为负；在曲面镜的 $\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$ 中，负号并不影响这一结论，因为它的 s 与 s' 在成实像时同号，即反射的情况与折射时的不同】

从上述推导中可看出，要使得不在主轴上的一个发光点 Q 能够理想成像于一个像点 Q'，必须同时满足以下两个限制条件：(1).光线必须是近轴的，即 $h < r$ ，近似式 x

$\approx \frac{h^2}{2r}$ 才成立、 $\sin u = \frac{h}{r}$ 才能略去所有高次项而 $\approx u$ ；且 $x < s$, $\frac{x}{s} + \frac{x^2}{s^2} + \dots$ 才能被略去，这种近似式 $\frac{(y'-h)^2}{s'-x} \approx \frac{(y'-h)^2}{s'}$ 、 $\frac{(y-h)^2}{s-x} \approx \frac{(y-h)^2}{s}$ 才成立。(2).物点必须是近轴的，即 $y < s$ ，近似式 $\sqrt{1 + \frac{(y'-h)^2}{(s'-x)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{(y'-h)^2}{(s'-x)^2}$ 、 $\sqrt{1 + \frac{(y-h)^2}{(s-x)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{(y-h)^2}{(s-x)^2}$ 才成立， $\tan i = \frac{y}{s} \approx i$ 才能略去所有高次项而 $\approx i$ 。——满足上述条件的理想成像理论称为一级近似理论。

——对于物点的凹面镜，P 在一倍焦距以外成倒立的实像 P'，二倍焦距内是放大的，以外是缩小的，在一倍焦距以内成正立放大的虚像；对于物点 P 的凸面镜只能成虚像 P'，且是正立缩小的。【有意思的是，凸面镜和凹透镜均只能成正立缩小的虚像，且凹面镜和凸透镜的成像规律也完全一致】

3.6.2 近轴物近轴光线条件下球面折射的物像公式

用同样的方法处理球面折射时的情况，得到 $n \frac{y}{s} - n' \frac{y'}{s'} = 0$ 、 $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} - \frac{n'-n}{r} = 0$ 。由于已处于近轴条件下，此时 $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{i'}{i}$ 。

——纯球面折射的成像规律还是依赖于数学计算吧，不像曲面镜和薄透镜一样前人总结了。

Chapter04.光学仪器的基本原理

4.1 人的眼睛

4.1.1 人眼的结构

4.1.2 简化眼

4.1.3 人眼的调节功能

用眼睛观察物体时，必须使物体在视网膜上成一个清晰的像。眼睛通过物体在视网膜上所形成的像对眼的光心(简化眼这个凹面镜的曲率中心)的张角大小来判断物体的大小。

当睫状肌松弛时，晶状体两曲面曲率半径最大，远处的物体能在视网膜上形成清晰的像，故看远方的物体时不容易感到疲劳。睫状肌能松弛到的最大程度所对应的能看清楚的最远点，称为远点。

当眼睛注视近处的物体时，睫状肌收缩，晶状体的两面(特别是前一面)的曲率半径变小，焦距变短，物体仍能在视网膜上成像。当睫状肌最紧张，晶状体两侧面曲率半径最小时，眼睛能够看清楚的最远点称为近点。

随着年龄的增长，近点从 7~8cm 逐渐变远至 1~2m 处，远点逐渐从无穷远变近至眼前几米处——此时眼睛的调节范围就相当小了。正常的眼睛在适当的照明下，观察眼前 25cm 处的物体是不费力，且能看清物体细节的；我们称这个距离为明视距离。

4.2 助视仪器的放大本领

助视仪器：放大本领、聚光本领、像分辨本领、色分辨本领。

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) [Turn up the sound. \(my tunes\)](#) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

4.2.1 放大本领

在眼睛前配置了助视光学仪器时，线状物通过光学仪器和眼睛所构成的光具组在视网膜上形成的像的长度为 L' ；没有配备这种仪器时，将同一物体放在之前助视仪器的虚像平面上，其在视网膜上所成像的长度为 L 。

这里是将物体经助视仪器所成的像与肉眼直接观察的物体放在同一特定位置来比较像与物的大小。这一特定位置对于放大镜 or 显微镜而言，是指把被观察物放在人眼的明视距离处，对望远镜而言，是指把观察物放在无穷远处。

视网膜上像的长度不仅取决于物的实际长度 QP ，还取决于物和眼睛光心 O (这里的 O 在之前应写作 C -) 的距离 PO ，这两个因素共同决定了物体对眼睛光心 O 的张角 U (称为视角) 的大小，由于 O 到简化眼的凹面镜顶点距离不变，则张角的对顶角又直接决定了 L 的大小；因此我们用——仪器前的明视距离处 PQ 的视角 U 、 PQ (这里的 PQ 就不一定在明视距离处了，因为要保证它的像 $P'Q'$ 在明视距离处) 通过助视仪器所成于明视距离处的像 $P'Q'$ 的视角 U' 来表征仪器的放大本领： $M = \frac{L'}{L} = \frac{\tan U'}{\tan U} \approx \frac{U'}{U}$ 。

4.2.2 放大镜

为了看清微小的物体或者物体的细节，需要把物体移近眼睛，这样可以增大视角，在视网膜上成一个较大的实像；但当物体离眼睛的距离太近时，反而看不清楚。因此，要明察秋毫，不但应使物体对眼有足够张角，还要使物体与眼睛间有合适的距离。

以凸透镜为例，将 PQ 放置在透镜 L 的物方焦点 F 和 L 之间，并让它靠近焦点 F ，于是物体经透镜成一放大的虚像，物距 $s \approx f = -f'$ (这是因为 $n_1 = n_2$)，那么根据 $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$ ，我们可以得到 $U' = \frac{y'}{-s'} = \frac{y}{-s} \approx \frac{y}{-f} = \frac{y}{f'}$ ，(也可以用符号法则： $U' = -\tan(\text{笛卡尔角度}) = -\frac{y'}{s'} = \frac{y}{f'}$ ， y 为正导致 U' 为正，这表示正立物体对应的直线 $Q'O$ 与主轴成角为正，顺时针旋转；因为新笛卡尔角度 = 笛卡尔角度 $\pm \pi$ 或者 = -笛卡尔角度) 那么 $M \approx \frac{U'}{U} \approx \frac{\frac{y}{f'}}{y/25\text{cm}} = \frac{25\text{cm}}{f'}$ 。

若仅从放大本领来考虑，焦距应该取得短一些，而且似乎可以得到任意大的放大本领；但由于相差的存在，一般的单独放大镜的放大本领采用 $3\times$ ，如果采用复式放大镜，则可以减少像差，并使放大本领达到 $20\times$ 。

4.3 目镜

4.3.1 目镜的作用

目镜也是用来放大视角的仪器；不过放大镜用来直接放大实物，目镜则是用来放大其他光具组(物镜)成的像，复杂的助视仪器总是包括物镜和目镜两部分。

目镜通常由不相接触的两个薄透镜组成。面向物体(且接近物体)的透镜称为**场镜(场镜)**，接近眼睛的称为**接目镜(视镜)**。目镜的设计，既要考虑放大本领，又要考虑消除/矫正像差(通过配备分划板)。目镜还可用来使倒立的像变成正立像。

4.3.2 两种目镜

1.惠更斯目镜

两个相同平凸玻璃透镜，均凸面向着物镜，场镜焦距 $F'_1=3\cdot f'_2$ 视镜焦距，两镜间距 $O_1O_2=2f'_2$ 。那么 F'_2 与 F'_1 共点，且 F_2 处于两镜光心 O_1O_2 连线中点处。 O_1 、 F_2 、 O_2 、 F'_2/F'_1 从左到右等间距(间距为 f'_2)排列。

从物镜来的、向右入射场镜的光若是平行光，则光束透过场镜后会聚的像点 Q 本该在视镜和场镜共同的像方焦平面上，现在我们调整物镜与目镜的距离，使得入射场镜的光是会聚的，以至于像点 Q 落于 F_2 所对应的视镜的物空间的物方焦平面上(此时入射场镜的光所对应的物点是虚物点 Q ，在场镜右边了，且 P 介于 F_2 与 O_2 间，并靠近 F_2 点，因此其处于场镜的一倍焦距 $O_1F'_1$ 内，可以以此来求虚像 Q')，此时经过 Q' 的光线交叉后变成发散光，再经过视镜的折射，使出射倒序的平行光了。——惠更斯目镜的视场相当大，视角可达 40° ，结构简单，因此在显微镜中经常采用这种目镜。

2.冉斯登目镜

两个相同的平凸透镜，凸面相向，焦距相等 $f'_1=f'_2$ ，两透镜间的距离 O_1O_2 等于每一透镜焦距的 $2/3$ 。那么 F_2 、 O_1 、 O_2 、 F'_1 从左向右排列，间距分别为 $\frac{1}{3}f'_2$ 、 $\frac{2}{3}f'_2$ 、 $\frac{1}{3}f'_2$ 。

从物镜来的、向右会聚的入射光先于 F_2 所对应的焦平面的右侧一点点会聚于 Q 点，经过 Q 点交叉后变成发散光射到场镜上，由于 Q 处于 F_2O_1 之间，在 F_1O_1 即场镜的一倍

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

焦距范围内，算出 Q 点关于场镜的虚像点 Q'，要使得 Q' 落于 F₂ 所对应的焦平面上，此时 Q' 再视为物点对视镜成像，透过视镜的折射光便是平行且倒序的。

冉斯登目镜可作为一般放大镜观察实物，且可以对被观察的物体或物镜所成的实像进行长度的测量(物平面上加一分划板)，然而惠更斯目镜只能用来观察像，没有这两种功能。

4.4 显微镜的放大本领

4.4.1 显微镜的光路图

正立的高度为 y 的线状物 QP 在物镜(本身算个光具组)的一倍物方焦距 f₁ 以外一点点(F₁ 所在的焦平面以左一点点: $s \approx f_1$)，故 Q 发出的光经物镜光具组等效成的凸透镜折射后变成会聚光，会聚于目镜(光具组)的一倍物方焦距 f₂ 以内一点点(F₂ 所在的焦平面以右一点点)的 Q' 点(因此 $s' \approx L$ ，即镜筒长度、目镜和物镜之间的距离)，成 Q'P' 这一倒立放大的实像，Q' 再对目镜成一倒立(不改变方向)放大的虚像 Q''P'' 于人眼的明视距离处。

4.4.2 显微镜的放大本领

其中 U'' 是指 Q''P'' 的视角(=光线 Q''O 的倾角，是负值)，而 U'' 所对应的进入人眼的光线 Q''O，是经目镜折射后的光线之一，而这些光线又是通过作“物镜与目镜之间的相交于 Q' 的各光线与 F₂ 所在的焦平面的各个交点，与目镜的光心 O₂ 的连线们”的平行线作出来的。因此 U'' 又可用“焦平面的各个交点与目镜的光心 O₂ 的连线们”与 x 轴的主光轴的夹角表示，而这个夹角(Q''O 大约 // Q'O₂) 又 $\approx U' \approx \tan U' = -\frac{y'}{-f_2} = -\frac{y'}{f_2}$ ，其中 U' 为 P'Q' 对 O₂ 点的张角(是倾角，是负值)。则 $M = \frac{U''}{U} \approx \frac{U'}{U} \approx \frac{-\frac{y'}{f_2}}{\frac{y}{25\text{cm}}} = -\frac{y'}{y} \frac{25\text{cm}}{f_2} = \frac{y'}{y} \frac{25\text{cm}}{f_2}$ ；又因对于物镜来说， $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \approx \frac{L}{f_1} = -\frac{L}{f_1}$ ，因此 $M = \frac{y'}{y} \frac{25\text{cm}}{f_2} \approx -\frac{L}{f_1} \frac{25\text{cm}}{f_2}$ 。其中的负号表示像是倒的。【注：光线倾角的 tan 值直接用对应坐标量作除后取负即可，因为光学中坐标量与笛卡尔坐标系一致，而角量参照标准与其相反，所以可直接写作 $\tan U' = -\frac{y'}{f_2}$ 。即使考虑了 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ， $\tan \theta$ 也和直接写无异。】

式中， $\frac{25\text{cm}}{f_2}$ 恰为目镜的放大本领， $-\frac{L}{f_1}$ 为物镜的横向放大率 $\beta = \frac{y'}{y}$ ，显微镜的物镜和目镜上分别刻有 10×，20× 等字样，之积就是显微镜所对应的放大本领。【其实在这

个过程中, 当 s' 已知时, $s' \approx L$ 是不必要的, 公式会修正为 $\beta = -\frac{s'}{f'_1}$; 而 s' 的求法也很多, 可以 $s' = L - s \approx L - f'_2$, 而其中 f'_2 可由 $M = \frac{25\text{cm}}{f'_2}$ 算出(已知 M), 再采用 $L - f'_2$; 或通过 $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'_2}$ 得(已知 s' 和 f'_2 , 一般 $s' = -\infty$)出 s , 再采用 $L - s$ 。】

4.5 望远镜的放大本领

远处物体发射过来的光接近于平行光, 经望远镜后其像并不比原物大, 只是相当于把远处的物体移近, 以增大视角。物镜用反射镜的称为反射式望远镜, 物镜用透镜的称为折射式望远镜; 目镜是会聚透镜的称为开普勒望远镜, 目镜是发散透镜的称为伽利略望远镜。

4.5.1 开普勒望远镜

两个会聚透镜, 物镜的像方焦点 F'_1 与目镜的物方焦点 F_2 重合, 则镜筒长度 $L = f'_1 + f'_2$ (可以算物镜的横向放大率 $-\frac{L}{f'_1}$ 了)。远处一点 Q 射来的平行光束经物镜后会聚于位于目镜的物方焦平面 F_2 上的一点 Q' 处, 交叉发散后, 再经目镜成一束倒序平行光。与 4.4.2 类似, Q' 关于目镜的像点 Q'' 位于左 or 右无穷远处(最好理解为左(下), 因为它是相当于假想的物点), 其 $Q''O$ 所对应的 $U'' = (\text{这里不是约等于了}) U' \approx \tan U' = -\frac{y'}{f'_2}$, 其中 U' 仍为 $P'Q'$ 对 O_2 点的张角 ($Q''O // Q'O_2$)。又因线状物 PQ 离 O 点实在太远, 而 O 点到目镜 O_2 + 目镜 O_2 到物镜 O_1 , 即 O 到物镜之间的距离 OO_1 相对于 PO 太小, 因此 PQ 对 O 点所成张角 $U \approx PQ$ 对 O_1 所成张角 $\approx \tan$ 它 $= \tan$ 它的对顶角 $= -\frac{y'}{f'_1}$ 。——则 $M = \frac{U''}{U} = \frac{U'}{U} \approx$

$$\frac{-\frac{y'}{f'_2}}{-\frac{y'}{f'_1}} = \frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}。$$

俩凸透镜的像方焦距是正值, 因此 M 是负值, 因此形成的是倒立的像。

4.5.2 伽利略望远镜

目镜为发散透镜, 物镜的像方焦点 F'_1 仍与目镜的物方焦点 F_2 重合, 镜筒长度 $L = f'_1 - f'_2$ (物镜的横向放大率 $= -\frac{L}{f'_1}$)。远处一点 Q 射来的平行光束经物镜后本应会聚于位于目镜的物方焦平面 F_2 上的一点 Q' 处, 但提前遇上了目镜, 经其折射后成一束正序平行光。此时 Q' 相当于虚物, 其关于目镜的像点 Q'' 仍位于左(上)无穷远处, 仍然作 $Q''O // Q'O_2$ ($Q''O$ 仍然是这么作图作出来的), 仍然对应着 $U'' = U' \approx \tan U' = -\frac{y'}{f'_2}$, 仍然由于

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

PQ 离 O 点实在太远，而有 PQ 对 O 点所成张角 $U \approx PQ$ 对 O_1 所成张角 $\approx \tan$ 它 $= \tan$ 它的对顶角 $= -\frac{y'}{f'_1}$ 。——则 $M = \frac{U''}{U} = \frac{U'}{U} \approx \frac{-\frac{y'}{f'_2}}{-\frac{y'}{f'_1}} = \frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}$ 。

一凸一凹透镜的像方焦距一正一负，之商为负，因此 M 是正值，因此形成的是正立的像。

4.5.3 反射式望远镜

4.5.4 激光扩束器

扩束后的激光还是平行的，只不过变粗了：扩束器由先后放置的一小凹一大凸 or 一小凸一大凸组成(小 and 大是指直径/孔径)，并且均有 F'_1 与 F_2 重合。

4.6 光阑 光瞳

4.6.1 光阑的概念

之前只讨论了光学仪器如何助我们“看清”物体的问题，这里还要考虑进入人眼的光束截面积大小，即光的能量问题。像的明暗程度取决于光能流的多少。在光学系统中起着限制光束的作用的器件叫光阑，任何光学元件的边缘都可看作光阑，因而无论怎样的光学仪器都必定有光阑存在。为了改善成像的质量，也常装有附加光阑。

4.6.2 有效光阑和光瞳

限制入射光束最起作用的那个光阑，称为孔径光阑或有效光阑。有效光阑对自己前面部分的光具组所成的像称为入射光瞳，入射光瞳的边缘对物平面与主轴的交点成的张角叫入射孔径角(简称孔径角)；它被自己后面部分的光具组所成的像称为出射光瞳(出射光瞳也是入射光瞳被整个光具组所成的像，这是因为有效光阑与入射光瞳关于前面部分的光具组，物像共轭，光路可逆，可将入射光瞳看作物，有效光阑看作像，此时再将有效光阑对其后面的光具组成像，即得到出射光瞳。所以入射光瞳与出射光瞳对整个光具组来讲是共轭的)，出射光瞳的边缘对像平面与主轴的交点成的张角叫出

射孔径角(简称**投射角**)。【若有效光阑在整个光具组的最前面, 则它和入射光瞳重合, 即它对自己前面部分光具组所成的像就是自己本身; 若在整个光具组的最后面, 则它和出射光瞳重合——若第一个光具被判定为有效光阑, 则入射光瞳就是它自己】

两个相距为 d 的完全相同的凸透镜, 若在主轴上的物点 P 在 F_1 的右边, 则右边的凸透镜 L_2 为有效光阑; 若 P 在 F_1 的左边, 即 L_1 的一倍焦距以外, 则 L_1 变成有效光阑。可见, L_1 、 L_2 之中有且只有一个在限制光束上起决定作用; 并且, 一个光具组的有效光阑, 不光跟 L_1 、 L_2 有关, 还跟 P 点的位置有关。这是因为, **光阑们的像的位置是不变的, 它们对不同的物点所张的角不相等, 因此有效光阑总是对某一个指定的参考点而言的**, 这个参考点为平面物与主轴的交点。

确定任何光具组的有效光阑的方法: 求出每一个给定光阑包括透镜边缘对其前面(向着物方空间方向)那一部分光具组所成的像, 找出所有这些像和第一个透镜边缘对指定的物点所张的角, 在这些角中找出最小的那一个, **该最小的张角所对应的像就是入射光瞳, 入射光瞳对应的光阑就是对于该物点的有效光阑**。并可由此**有效光阑**求得**出射光瞳**。

例题

孔径(直径)为 4cm 的两个薄透镜组成的同轴光具组, 一个透镜是会聚的, 其焦距为 5cm, 另一个是发散的, 焦距为 10cm。俩透镜中心间距为 4cm。对于置于会聚透镜前 6cm 的一个物点, 问:

(1).哪一个透镜是有效光阑?

凹透镜对于其前面的光具组(凸透镜)而言是物, 在其右, 故 $s=4\text{cm}$; 凸透镜的**关于凹透镜(物)的像方焦点**在其左(像空间)【不要把物点当成了这里的物, 公式中的物是什么, 公式中的像方焦点就得对应它】, 故 $f'_1=-5\text{cm}$, 代入 $n_1=n_2$ 时的薄透镜成像公式: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$, 得到 $s'=20\text{cm}$ 。——根据薄透镜的横向放大率公式: $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$, 有 $\frac{y'}{4/2} = \frac{20}{4}$, 得到 $y'=10\text{cm}$ 。——于是 $u_2 = \frac{y'}{s'+6} = \frac{10}{20+6} = \frac{1}{2.6}$, 且 $u_1 = \frac{4/2}{6} = \frac{1}{3} < u_2$, 因此 L_1 这个凸透镜是有效光阑。

(2).入射光瞳和出射光瞳的位置在哪里? 大小分别等于多少?

入射光瞳: 由于有效光阑就在整个光具组的最前面, 所以入射光瞳与它重合, 其大小就为它的大小; 出射光瞳: 此时凸透镜对凹透镜而言是物, 在其左, 故 $s=-4\text{cm}$; **凹透镜关于有效光阑(凸透镜; 物)的像方焦点**在其左(物空间), 故 $f'_2=-10\text{cm}$, 因此通

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

过 $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$, 我们得到 $s' = -\frac{20}{7}\text{cm}$ 。——根据横向放大率公式: 有 $\frac{y'}{4/2} = \frac{-\frac{20}{7}}{-4}$, 得 $y' = \frac{10}{7}\text{cm}$ 。故其直径为 $\frac{20}{7}\text{cm}$ 。

4.7 光度学概要——光能量的传播

4.7.1 辐射通量

单位时间内通过光源面积元 dS 的某一波长附近, 单位波长间隔内的光能量, 用分布函数 $e(\lambda)$ 表示, 称作谱辐射通量密度。【注意, 并没有说“单位面元 dS ”, 因此的 $e(\lambda)$ 单位为 W , 而不是 W/m^2 ; 这和单色辐出度 $\frac{dW}{d\nu \cdot dt \cdot dS}$ 就略有不同了, 这里 $e(\lambda) = \frac{dW}{d\lambda \cdot dt}$ 】

单位时间内, 面元 dS 辐射出来的所有波长的光能量, 即该面元的辐射功率, 定义为面元 dS 的(总)辐射通量 ϵ 。且 $\epsilon = \int_0^\infty d\epsilon_\lambda = \int_0^\infty e(\lambda) \cdot d\lambda$ 。【 $\epsilon = \frac{dW}{dt}$, 与总辐出度 $\frac{dW}{dt \cdot dS}$ 也差一个 dS ; 注: $d\epsilon_\lambda$ 在含义上是 $(d\epsilon)_\lambda$ 】

4.7.2 光视效率

为了研究总辐射通量 ϵ 中引起视觉的那部分, 定义: 人眼对某一单色光的视觉灵敏度反比于, 引起相等强度的视觉情况下, 所需的该单色光的辐射通量 $d\epsilon_\lambda = e(\lambda) \cdot d\lambda$; 即正比于相同的辐射通量下, 所引起的视觉强度程度。则定义光视效率

$$v(\lambda) = \frac{\lambda \text{ 对应的视觉灵敏度}}{555\text{nm 对应的视觉灵敏度}} = \frac{d\epsilon_\lambda \text{ 对应的视觉强度} / d\epsilon_\lambda}{d\epsilon_{555\text{nm}} \text{ 对应的视觉强度} / d\epsilon_{555\text{nm}}} = \frac{(e(\lambda) \cdot d\lambda) \text{ 对应的视觉强度} / (e(\lambda) \cdot d\lambda)}{(e(555) \cdot d\lambda') \text{ 对应的视觉强度} / (e(555) \cdot d\lambda')}。$$

当 $d\epsilon_{555\text{nm}}$ 对应的视觉强度 $= d\epsilon_\lambda$ 对应的视觉强度时, 各自所对应的区间长度 ($d\lambda' \neq d\lambda$) 下的 $d\epsilon_{555\text{nm}} = e(555) \cdot d\lambda'$ 与 $d\epsilon_\lambda = e(\lambda) \cdot d\lambda$ 满足: $v(\lambda) = \frac{d\epsilon_{555\text{nm}}}{d\epsilon_\lambda}$, 现若进一步假定一个相同且确定的视觉强度, 则对应的 $d\lambda'$ 确定了 ($d\lambda$ 仍然是不定的, 因为固定的 “ $d\epsilon_\lambda$ 对应的视觉强度” $= f_\lambda(d\epsilon_\lambda) = f_\lambda(e(\lambda) \cdot d\lambda)$ 中的 λ 是不定的, 导致函数 $f_\lambda()$ 是不定的, 而 $f_\lambda()$ 的映射值 $f_\lambda(\cdot)$ 又是相同的, 因此自变量 $d\epsilon_\lambda = e(\lambda) \cdot d\lambda$ 是不定的, 又因 $e(\lambda)$ 是不定的, 导致 $d\lambda$ 是不定的; 而 $f_{\epsilon_{555\text{nm}}}(d\epsilon_{555\text{nm}})$ 确定后, $d\epsilon_{555\text{nm}}$ 便确定了, 则 $d\lambda'$ 确定了), 则 $d\epsilon_{555\text{nm}} = e(555) \cdot d\lambda'$ 确定了, 则 $v(\lambda)$ 与 $d\epsilon_\lambda = e(\lambda) \cdot d\lambda$ 成反比。

4.7.3 光通量

假设 $d\epsilon_{555nm}$ 、 $d\epsilon_{\lambda}$ 均以各自的 $f_{\lambda}()$ 映射到某个确定且相同的视觉强度，则满足这样的条件的、在这种意义下的自变量 $d\epsilon_{555nm}$ 、 $d\epsilon_{\lambda}$ ，不仅满足： $v(\lambda) = \frac{d\epsilon_{555nm}}{d\epsilon_{\lambda}}$ 。而且此时 $d\Phi_v(\lambda) = k(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m v(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m \cdot d\epsilon_{555nm} = 683lm/W \cdot d\epsilon_{555nm}$ 是个常量（上一节未提到过， $f_{555nm}(d\epsilon_{555nm})$ 确定后， $d\epsilon_{555nm}$ 便确定了），是个定值；我们现在将“确定且相同的视觉强度”的制约，退化到“不相同，但 $d\epsilon_{555nm}$ 对应的视觉强度确定（但 $d\epsilon_{\lambda}$ 对应的视觉强度并没确定）”下的 $d\Phi_v(\lambda) = k(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m v(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m \cdot$

$\frac{d\epsilon_{\lambda} \text{ 对应的视觉强度}}{d\epsilon_{555nm} \text{ 对应的视觉强度} / d\epsilon_{555nm}} = k_m \cdot \frac{d\epsilon_{555nm}}{d\epsilon_{555nm} \text{ 对应的视觉强度}} \cdot d\epsilon_{\lambda} \text{ 对应的视觉强度}$ 。以上一段的分析，其中的 $d\epsilon_{555nm}$ 是个定值，因此系数 $k_m \cdot \frac{d\epsilon_{555nm}}{d\epsilon_{555nm} \text{ 对应的视觉强度}}$ 是个定值，因此

$d\Phi_v(\lambda)$ 正比于 $d\epsilon_{\lambda}$ 对应的视觉强度。——因此我们用 $d\Phi_v(\lambda)$ 来表征 $d\epsilon_{\lambda}$ 对应的视觉强度的大小。【其中， $k(\lambda)$ 称为光谱光视效能，从 $k(\lambda) = \frac{d\Phi_v(\lambda)}{d\epsilon_{\lambda}}$ 可看出，其也为波长为 λ 的辐射的功光当量（两个不同量纲的量（瓦特→流明）之间的转换系数）； k_m 为最大光视效能、最大功光当量（也称最大光效率）】

复色光光通量 $=\Phi_v(\lambda) = \text{单色光光通量积分} = \int_0^{\infty} d\Phi_v(\lambda) = \int_0^{\infty} k(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m \int_0^{\infty} v(\lambda) \cdot e(\lambda) \cdot d\lambda$ 。

电光源发出的总光通量与电光源的耗电功率 P 之比，称为电光源的遍计发光效率 η ，一般的手册也将其称为发光效率 or 光效率。但遍计发光效率 η 与功光当量 $k(\lambda) = k_m v(\lambda)$ 所表征的光效率（转化效率）是有区别的。

4.7.4 发光强度

之前的 $d\Phi_v(\lambda) = k(\lambda) \cdot d\epsilon_{\lambda} = k_m v(\lambda) \cdot e(\lambda) \cdot d\lambda$ ，是关于 λ 的光通量函数（由于 $v(\lambda)$ 单位为1， $e(\lambda) \cdot d\lambda$ 单位为W，而 k_m 的单位为lm/W，因此 $d\Phi_v$ 的单位为lm）。现在我们看看 $d\Phi_v$ 关于立体角 Ω 的函数：定义点光源在单位立体角中发出的光通量 $I = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$ 为发光强度 I ，以其来表征光源在一定方向范围内发出的光通量的空间分布的物理量。其单位为cd（坎[德拉]）=lm/单位立体角。cd是国际单位制中的七个基本单位之一。光度学中的其他单位（比如lm）均为导出单位（虽然lm与cd只有数值上的倍数关系）。

由于球坐标系下的 $d\Omega = \frac{(R \cdot \sin\varphi \cdot d\theta) \cdot (R \cdot d\varphi)}{R^2} = \sin\varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi$ ，而这里光学又和习惯上的数学记法不同，其 θ 角与 φ 角所指代的角度恰好对换了，因此 $d\Omega = \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ 。那么 $\Phi_v = \int d\Phi_v = \int I_{\theta, \varphi} \cdot d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I_{\theta, \varphi} \sin\theta d\theta$ ；若 $I_{\theta, \varphi} = I$ ，则 $\Phi_v = 4\pi I$ 。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

4.7.5 照度

之前的两节中的 $d\Phi_v$ 分别是面元 dS 和点光源发出的光通量，而现在我们考虑的是受照射物体单位面积上的光通量 $d\Phi_v$ 。为了表征受照面的被照明程度，我们引入照度这一物理量： $E = \frac{d\Phi_v}{dS} = \frac{I \cdot d\Omega}{dS} = \frac{I \cdot \frac{dS \cdot \cos\alpha}{R^2}}{dS} = \frac{I \cdot \cos\alpha}{R^2}$ 。其中 α 为光束轴线方向与受照面法线在 $<90^\circ$ 的方向上的夹角。大多数情况下，物体都不是自己发光的，因此照度具有重要的意义。照度的单位为 cd/m^2 。其中的 $/\text{m}^2$ 是指(每)单位接受(收)面的面积。

4.7.6 亮度(非点光源情况下的发光强度)

一从 dS 发出的，在一立体角 $d\Omega$ 内的光束，其轴线与 dS 的外法向量 e_n 夹角为 θ 。朗伯通过实验发现对于许多发光体(非所有)，在立体角 $d\Omega$ 中的光通量 $d\Phi_v$ (即发光强度 I)，正比于 $d\Omega$ 和发光面表面积 $dS \cos\theta$ 的大小(朗伯定律)，比例系数与发光面的性质有关，与 θ 角无关。——这个系数用 L 表示，称作光源的亮度。 $L = \frac{d\Phi_v}{dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega} = \frac{I}{dS \cdot \cos\theta}$ ，表示单位面积的光源表面在法线方向的单位立体角传输的光通量。亮度的单位与照度相同，为 cd/m^2 。不过这里的 $/\text{m}^2$ 是指(每)单位发光面的面积。【这里和 2.1 惠更斯-菲涅尔原理中的关于衍射的 4 条假设有点像】

若发光强度 I 正比于 $\cos\theta$ ，则 L 不随 θ 角而变，这类光源称为遵从朗伯定律的光源，也称余弦发光体或朗伯光源。(太阳辐射的规律就很接近朗伯定律)

发光强度和亮度的概念不仅适用于自身发光的物体，还可推广到反射体。光束投射到光滑的表面上时，会定向地反射出去；而投射到粗糙的表面上时，将朝所有方向发生漫反射。——而一个理想的漫反射是遵循朗伯定律的——也就是说，无论入射光从何方来，沿各个方向的漫反射光的发光强度总是与 $\cos\theta$ 成正比的，因而亮度 L 相同。这类物体称为朗伯反射体。例如积雪、白墙、粗糙的白纸。

4.8 物镜的聚光本领

助视仪器的目镜，能将物镜所成的像放大，但对系统的聚光本领没有贡献。因此我们要求物镜除放大被观察的物体外，还要增加像的照度。在其他条件相同时，任何光学仪器的物镜的入射光瞳面积越大，能够进入(穿过)物镜的光通量就越多，像的照度就越强。

物镜的聚光本领是描述物镜聚集光通量能力的物理量，可以用像面的照度来量度。

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

4.8.1 光源在较近距离时的聚光本领 数值孔径

根据 4.7.6 亮度的知识，一垂直于光具组主轴的发光面元 dS ，设其对物镜的入射光瞳发出的总光通量为 $d\Phi_v$ ，则 dS 在与主轴成 u_1 角的方向上发出的，立体角 $d\Omega_1$ 内的光通量，是关于 u_1 和 Ω_1 的函数，记作 $d(d\Phi_v) = dS \cdot \cos u_1 \cdot d\Omega_1 \cdot L_{u_1}$ 。

物镜的入射光瞳大多是圆形的，且圆心过主光轴上主光轴。若发光体遵从朗伯定律，则发光面元的亮度 $L_{u_1} = L$ ，不随 u_1 而改变；并且根据之前介绍的 $d\Omega = \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ ，将这里的主光轴看作 z 轴，且正方向从 dS 指向物镜的入射光瞳，则 $d\Omega_1 = \sin u_1 \cdot d\varphi \cdot du_1$ 。

则 dS 发出的穿过入射光瞳的全部光通量 $d\Phi_v = \int d(d\Phi_v) = \int_0^{2\pi} \int_0^u dS \cdot \cos u_1 \cdot (\sin u_1 \cdot d\varphi \cdot du_1) \cdot L = L \cdot dS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^u \cos u_1 \cdot \sin u_1 \cdot du_1 = 2\pi L \cdot dS \cdot \frac{\sin^2 u}{2} = \pi L \cdot \sin^2 u \cdot dS$ 。（由于共轭关系，通过入射光瞳边缘的光也将通过出射光瞳边缘：因为入射光瞳关于整个物镜光具组的像为出射光瞳；进而以最大角度 u 入射入射光瞳边缘的光，也经过：出射光瞳对 $[dS$ 关于整个物镜光具组的像 dS'] 所张的出射孔径角边缘，以及 dS' 边缘）

同样的，设 dS' 为面元 dS 关于整个物镜成的像（与 dS 共轭）， $d\Phi'_v$ 为像空间中的光通量， u' 为出射光瞳边缘对 dS' 所张的出射孔径角， L' 为像的亮度（也遵循朗伯定律）。则 $d\Phi'_v = \pi L' \cdot \sin^2 u' \cdot dS'$ 。

可以证明，像的亮度 L' 与物（面光源）的亮度 L 之比 $\frac{L'}{L} = (\frac{n'}{n})^2$ 出射光束及入射光束所在介质的折射率平方之比。则 $\frac{L'}{n'^2} = \frac{L}{n^2} = \frac{L_0}{1^2} = L_0$ 。 L_0 这个常量表示物放在真空时的亮度。

假定光能量在通过整个光具组时完全不被吸收，即出射光通量 = 入射光通量，即有 $d\Phi'_v = d\Phi_v = \pi L \cdot \sin^2 u \cdot dS = \pi L_0 \cdot (n \cdot \sin u)^2 \cdot dS$ ，那么，照度 $E' = \frac{d\Phi'_v}{dS'} = \pi L_0 \cdot (n \cdot \sin u)^2 \cdot \frac{dS}{dS'}$ ，其中 β 为（像面半径关于物镜的）横向放大率 $= \frac{y'}{y} (= -\frac{f_1}{f_1'})$ ， $R_{N.A.} = n \cdot \sin u$ 叫做数值孔径。对于横向放大率已确定的光具组，聚光本领，即像面的照度 E' 正比于 $R_{N.A.}^2$ ，那么要提高聚光本领，则孔径角必须大，且物所在的空间应充满折射率较大的透明物质。

4.8.2 显微镜的聚光本领

根据显微镜的放大本领 $M = -\frac{f_1}{f_1'} \frac{25\text{cm}}{f_2'}$ ，可知显微镜必须焦距很短才能得到足够大的放大本领，而根据 $\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$ ，物镜的焦距 f_1' 要很小则必须使得 r_1 很小，则短焦距的透镜一般孔径都较小，这样就限制了进入物镜的光通量 $d\Phi_v = d\Phi'_v$ 。

物体放在平玻璃片(载玻片)上,在其上再盖一平玻璃片(盖玻片),盖玻片与物镜(上半球形)之间隔有一层空气。从物点 P 发出的光线经盖玻片玻璃折射入空气后入射物镜下平面时,只有入射角小于全反射临界角 41.8° 的那些光束能进入显微镜中。因而进入物镜的光束的孔径角受到了限制。

于是将与玻璃折射率差不多的液体充入空气层代替空气,则物点 P 发出的光线可以不经过折射进入物镜,由于物镜焦距很短, P 与物镜距离很近,孔径角几乎可以达到 90° ,故可以增加进入物镜的光通量。

假设盖玻片的折射率为 n ,孔径角 u =入射盖玻片上表面的入射角,盖玻片与物镜之间的介质折射率为 n' ,盖玻片上表面的折射角为 u' ;当介质为空气时 $n'=1$, $n \cdot \sin u = n' \cdot \sin u' < 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$;当采用了油浸法后, $n=n'$ 、 $u=u' \rightarrow 90^\circ$, $n \cdot \sin u = n' \cdot \sin u' \approx n \cdot 1 = n$,数值孔径为不用油浸时的 n 倍。

4.8.3 光源距离较远时的聚光本领 相对孔径

1.物镜的聚光本领 相对孔径

当物距很大时,入射光瞳对物点张角(入射孔径角) u 很小,在不同情况下 $\sin u$ 也差别不大,且 β 不易计算。因此此时计算光具组(通常是物镜)的聚光本领(4.8.1)通常采用其他方法:使用出射光瞳对像面元 ds' 所张的孔径角 u' 较为方便。【注意,孔径角的比较一般用 \tan 来比,所以对应地,孔径角一般是边缘到像(物)点的连线与主轴的夹角(即一半于两边缘对 P 或 P' 的张角)】

利用之前的 $E' = \frac{d\Phi_v'}{ds'} = \pi L_0 \cdot (n' \sin u')^2 \cdot \frac{ds'}{ds'} = \pi L_0 \cdot (n' \sin u')^2$, 我们将其中的 $\sin u' \approx \tan u' = \frac{d'/2}{x' - x'_p}$, 而 $x' - x'_p = f'(\frac{x'}{f'} - \frac{x'_p}{f'}) = f'(\beta_p - \beta)$, 其中 $d'/2$ 为出射光瞳半径, $x' = s' - f'$, 而 s' 为 ds 关于光具组(物镜)的像 ds' 的横坐标,一般 x' 为正; $x'_p = s' - f'$, 其中 s' 为入射光瞳光具组(物镜)的像出射光瞳的横坐标,一般 x'_p 为负。其中 β 表示像面 ds' 关于物镜的横向放大率 $= \frac{y'}{y} (= -\frac{L}{f'_1})$, β_p 表示出射光瞳直径的横向放大率 $= \frac{d'_p}{d}$ 【注: 3.5.2 中 $\beta = \frac{f'}{x} = \frac{x'}{f} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$ 】, 代入 $\sin u'$ 即有 $E' = \frac{\pi L_0 n'^2}{4} \cdot \frac{d'^2}{f'^2} \cdot \frac{1}{(\beta_p - \beta)^2}$, 又因 $\beta_p = \frac{d'_p}{d}$, 即出射光瞳直径/入射光瞳直径, 将 $d' = \beta_p \cdot d$ 代入即有 $E' = \frac{\pi L_0 n'^2}{4} \cdot \frac{d^2}{f'^2} \cdot \left(\frac{\beta_p}{\beta_p - \beta}\right)^2$ 。

物镜的聚光本领,即像面的照度正比于 $\left(\frac{d}{f'}\right)^2$, 我们将入射光瞳直径/焦距,即 $\frac{d}{f'}$ 称为相对孔径。

2.望远镜的聚光本领

根据 $M = -\frac{f'_1}{f'_2}$, 望远镜的放大本领与物镜的焦距成正比, f'_1 必须很大, 因此为了保证其正比于 $\left(\frac{d}{f'}\right)^2$ 的聚光本领, 又要使得入射光瞳直径 d 很大, 即又要制造孔径很大的物镜。

对于足够远的物体, 物镜所成的像较物而言大大缩小了, 即横向放大率远 < 1 , 可以近似认为 $\beta \approx 0$ 。此时 $E' = \frac{\pi L_0 n'^2}{4} \cdot \frac{d^2}{f'^2}$ 。

4.8.4 照相机的聚光本领

为简单起见, 可认为镜头前后部分是对称的, 即入射光瞳与出射光瞳认为大小相等, 即 $\beta_p = \frac{d'}{d} \approx 1$; 且物镜的物方介质和像方介质均为空气, 因此 $n = n' = 1$; 于是 $E' = \frac{\pi L_0}{4} \cdot \frac{d^2}{f'^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^2$ 。【可以这么记, 望远镜具象的是 β , 而照相机这里具象的是 β_p 】

照相机拍远处的物的像时, $\beta \approx 0$, 因此 $E' = \frac{\pi L_0}{4} \cdot \frac{d^2}{f'^2}$ 。

拍近处物体的像时, $\beta \approx -1$ (倒立等大实像), $\frac{\pi L_0}{16} \cdot \frac{d^2}{f'^2}$, 像的照度比远处的小 4 倍。

照相机的聚光本领常常用相对孔径的倒数——光圈数来表示。

4.10 助视仪器的像分辨本领

夫琅和费圆孔衍射中, 中央亮斑的范围由第一个暗环的衍射角 θ_1 (半角宽度) 确定: $0.610 \frac{\lambda}{R}$ 。

当两个发光点(物点)对光具组入射光瞳中心所张的视角 $U < 0.610 \frac{\lambda}{R}$ 时, 两个发光点所分别对应的像点(已经因衍射而成为像斑了, 但像斑的中心点位置不会因 R 的改变而改变, 只有像斑的大小会随 R 改变, 因而这里的像点是指像斑的中心点; 像斑大小与两个物对入射光瞳中心所成张角无关, 也与两个物距离光具组的距离无关, 像斑半径就是 $\theta_1 = 0.610 \frac{\lambda}{R}$) 对出射光瞳中心所成的张角 U 便 $< 0.610 \frac{\lambda}{R}$, 一个中央亮斑的最大值位置恰好和另一个中央亮斑的最小值位置重合(且两个最大值进一步靠拢时), 便分辨不出两点的“像”。这个极限角叫做光具组的分辨极限。它的倒数称为分辨本领(要保证该函数的数值大时, 物理意义上的分辨本领大, 可以想象科学的定义是怎么定义的), 光具组的分辨本领正比于入射光瞳的半径 R 。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

4.10.2 人眼的分辨本领

瞳孔的半径约为 $R=1\text{mm}$ ，波长 $\lambda=555\text{nm}$ 的黄绿色光进入瞳孔时，瞳孔的分辨极限角为 $U_0=3.4 \times 10^{-4}\text{rad} \approx 1'$ ，对应的：在明视距离处，两个发光点之间的距离为 $25U_0 \approx 0.1\text{mm}$ 。

视网膜上的像处于玻璃状液内，折射率为 1.337。此时 $\theta_1 = 0.610 \frac{\lambda/n}{R}$ ，视网膜与瞳孔间的距离为 2.2cm，于是视网膜上的衍射图样中央亮斑半径为 $2.2\text{cm} \times \theta_1 = 5 \times 10^{-4}\text{cm}$ 。这略大于视锥细胞的直径。

4.10.3 望远镜的分辨本领

若发光强度相等且相距很近的双星对眼睛所张的视角小于 $1'$ ，则肉眼无法直接分辨。望远镜物镜的分辨极限常以物镜焦平面上刚刚能够被分辨出的两个像点之间的距离来表示。

$\Delta y' = f' \cdot \theta_1 = f' \cdot 1.22 \frac{\lambda}{d} = 1.22 \frac{\lambda}{d/f'}$ ，其中 d 为物镜孔径， f' 为物镜的像方焦距， d/f' 为物镜的相对孔径。

4.10.4 显微镜的分辨本领

被观察的物体上每一发光点经物镜后在像面的中心上所产生的艾里斑与平行光束衍射时有几乎相同的角半径(即每一发光点到像面中心的距离都差不多[本来就是不准确的事情，何必说的那么准确呢- -])。那么将之前的 f' 用 s' 代替。

Δy 为物镜前的被观察的物体上，靠的很近的、刚能被显微镜分辨的两点(与 $\Delta y'$ 共轭)；制造显微镜物镜时，总是使 $\Delta y \cdot n \sin u = \Delta y' \cdot n' \sin u'$ ，其中 n 和 n' 分别是显微镜物镜前、后介质的折射率。而 u 为物镜的半径对 Δy 所对应的物点(两点靠的很近，近似于在主光轴上的一点)的张角， u' 为物镜的半径对 $\Delta y'$ 所对应的像点的张角。

在显微镜内，像总是在空气中，即 $n'=1$ ，而被观察的标本可能在其他介质中(如油浸)。又由于 $\sin u' \approx \tan u' = (d/2)/s'$ ，因此阿贝尔正弦条件变为 $\Delta y \cdot n \sin u = \Delta y' \cdot (d/2)/s'$ 。

整理得： $\frac{s'}{d} = \frac{\Delta y' \cdot 1}{\Delta y \cdot 2 \cdot n \cdot \sin u} = \frac{s' \cdot 1}{s \cdot 2 \cdot n \cdot \sin u}$ ，于是 $\frac{s}{d} = \frac{1}{2 \cdot n \cdot \sin u}$ 。

$\Delta y = s \cdot \theta_1 = s \cdot 1.22 \frac{\lambda}{d} = 0.610 \frac{\lambda}{n \cdot \sin u}$ ，其中 $n \cdot \sin u$ 为物镜的数值孔径。

显微镜物镜的分辨极限通常以被观察的物面上刚刚能被分辨出的两物点之间的距离来 Δy 表示。

Chapter05.光学仪器的基本原理

5.1 自然光与偏振光

干涉和衍射：光的波动性；光的偏振：光是横波；光速：光是一种电磁波。这一节与一、二章联系较多。光的偏振有 5 种可能的状态：自然光、部分偏振光、线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光。——自然界的大多数光源发出的光为自然光，这一章主要讨论，如何从自然光中通过不同的偏振元件获得各种偏振光，以及如何鉴别自然光和各种偏振光。

5.1.1 光的偏振性

波动可分为两种：振动方向和传播方向相同，称为纵波。纵波的振动状态对传播方向具有轴对称性。——而某一瞬间通过波的传播方向的各个平面中，包含振动矢量的那个平面与其他平面有区别，这称为波的振动方向对传播方向没有对称性。波的振动方向对于传播方向的不对称性叫做偏振，它是横波区别于纵波的一个最明显的标志，只有横波才有偏振现象。

实验表明，光和物质间的相互作用时，起主要作用的是光波中的电矢量 \mathbf{E} ，因而讨论光的作用时，只需考虑电矢量 \mathbf{E} 的振动， \mathbf{E} 称为光矢量， \mathbf{E} 的振动称为光振动。

若电矢量 \mathbf{E} 的振动只限于某一确定平面内，即其电矢量 \mathbf{E} 在上传播方向的平面上的投影为一条直线，称为线偏振光。电矢量和光的传播方向所构成的平面称为偏振光的振动面。

5.1.2 自然光与偏振光

自然光是轴对称分布、无固定相位关系的大量线偏振光集合而成的。一束沿着 z 轴传播的自然光, x - O - y 面上各矢量只反映电矢量的振动方向, 并不反映振动矢量间的相位差(并且是无法反映的)。

设自然光中任意一个电矢量的振幅为 a_i 。则 $A_x = \sum_i a_{ix}$ 、 $A_y = \sum_i a_{iy}$ 。由于大量线偏振光分布的轴对称性, A 的这两个垂直分量的振幅相同 $A_x = A_y$, 但 A_x 、 A_y 之间没有固定的相位关系, 不能将其合成为一个单独的矢量。

若自然光的强度为 I_0 , 根据的 A_x 和 A_y 非相干叠加, 则有 $I_0 = A_x^2 + A_y^2 = I_x + I_y$ 【参见 1.1.5 相干与不相干叠加】。于是 $I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot I_0$ 。

【另一个可以用来说明 $I_{\text{某方向}} = \frac{1}{2} \cdot I_0$ 的例子, 电磁学中, 均匀带电的半球壳, 在球心处产生的场强, 若我们先考虑 2π 的立体角内, 各面元在此处产生的场强的标量和, 则 $\sum E_i = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 这和单个无限大平板在空间某一点激发的场强大小一致, 且后者确实可以通过等效于相同面密度的半球壳对球心的场强的标量叠加来得到; 当然也可以用高斯定理。——但我们现在要的是矢量叠加; 首先给出微面元选择的合理性(有点归一化的感觉)证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\pi R \sin\theta) \cdot (R d\theta) = 2\pi R^2$; 其次对面元载体进行场强加权加载, 再求和: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot (2\pi R \sin\theta) \cdot (R d\theta)}{R^2} \cdot \cos\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \cdot \sin 2\theta \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \cdot \sin\theta \cdot d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$ 】——可以发现, 球状、半球状、圆环状、半圆环状的各个面元、线元的某项属性, 在某个特定方向的矢量和, 等于这些属性的标量和的二分之一; 光学在这方面的应用, 这里就是一例。

关于归一化和 $f(x)$ 加载到 dx 上, 大物中热学部分的玻尔兹曼速率分布/统计中能有更详细的体味; 上一段中提及的半球壳在球心处的场强, 也可以通过 $-\nabla \cdot \mathbf{U}$ 进行简便计算。

5.2 线偏振光与部分偏振光

如果有一种光学元件, 能以某种方式选择自然光中的一束线偏振光, 而摒弃其余或者另一束线偏振光, 则称为起偏器。线偏振光可以用相位相同, 振动相互垂直的两列光波的叠加来描述, 同样设两列波沿着 z 方向传播(y 轴向右, x 轴向上):

$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kz)$ 。【5.6.3 波片会用到: 若光轴在 y 方向, 则 \mathbf{e} 光振动面在此 y - o - z 平面内, 对应 $E_y \mathbf{e}_y$, 之后由于右手螺旋法则, 或即使仅仅三线垂直,

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

即即使在左手螺旋法则下, $E_x e_x$ 也将对应 o 光; 光学中, 喜欢用 E 表示“振动” $E = A \cdot \cos(\omega t - kz)$ 】

5.2.1 由二向色性产生的线偏振光

二向色性指的是有些晶体对振动方向不同的电矢量具有选择性吸收的性质。最早使用的是天然具有二向色性的晶体, 如电气石, 它能强烈地吸收与晶体光轴(见 5.3)垂直的电矢量, 对于光轴平行的电矢量吸收得较少。

广泛使用的二向色性片是一种人造偏振片。它是由小晶体或分子在透明的薄膜上整齐地排列起来形成的。它会吸收一个方向的电矢量, 而让上该方向的电矢量几乎完全通过。能透过电矢量振动的方向就是人造偏振片的透振方向。【这两段老是喜欢先交代不让透过的方向, 再交代能透过的方向, 而要的是后者- -】

偏振片 P_1 用来产生线偏振光, 叫做起偏器; 偏振片 P_2 用来检验线偏振光, 叫做检偏器, 它俩的透振方向互成 θ 角。

若通过 P_1 的电矢量振幅为 A , 则沿着 P_2 的透振方向的振幅分量为 $A \cos \theta$ 。于是透射光强为 $I_\theta = A^2 \cos^2 \theta = I \cdot \cos^2 \theta$, 线偏振光透过检偏器后的透射光强度随 θ 角变化的这种规律, 称为马吕斯定律。

自然光通过无吸收的理想偏振片后, 其强度应减为原来的一半 $\frac{I_0}{2}$ 。——更复杂地, 若一束自然光和一束线偏振光, 同时先后垂直透射过 P_1 和 P_2 , 设线偏振光与 P_1 的透振方向夹角为 α , 则透射 P_1 的光强为: $\frac{I_1}{2} + I_2 \cdot \cos^2 \alpha$ 。则透射 P_2 的光强为 $(\frac{I_1}{2} + I_2 \cdot \cos^2 \alpha) \cos^2 \theta$ 。——只有当 $\alpha=0$ 或 π , 且 $\theta=0$ 或 π , 通过系统的光强最大, 因此我们可以先固定 P_1 , 转动 P_2 来改变 θ 角; 调好 θ 角后, 再让 P_1 和 P_2 同步旋转, 以固定 θ 角的同时调整 α 角。

5.2.2 反射光的偏振态

(一). 反射光和折射光的传播方向虽由反射和折射定律决定, 但这两束光的振动取向, 即偏振态, 则要根据光的电磁理论, 由电磁场的边界条件来决定。由菲涅尔公式: $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}$, $\frac{A'_{s1}}{A_{s1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$ 。于是 $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} = \frac{\cos(i_1 + i_2) \sin(i_1 - i_2)}{\cos(i_1 - i_2) \sin(i_1 + i_2)} = -\frac{\cos(i_1 + i_2) A'_{s1}}{\cos(i_1 - i_2) A_{s1}}$, 若

不考虑方向, 则在 $i_1=0$ 或 90° 时, $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} = \frac{A'_{s1}}{A_{s1}}$, 之外的角度下均有 $|\frac{\cos(i_1+i_2)}{\cos(i_1-i_2)}| < 1$, 因而不考虑正负时, 其余角度对应的 $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} < \frac{A'_{s1}}{A_{s1}}$ 。

对于自然光来说 $A_{p1}=A_{s1}$, 那么根据 $\frac{A'_{p1}}{A_{p1}} < \frac{A'_{s1}}{A_{s1}}$, 反射光中电矢量的平行分量 A'_{p1} 总是 < 电矢量的垂直分量 A'_{s1} 的值【可以想象, 反射后的光矢量振动面更倾向于朝 s 方向, 即垂直于纸面方向偏向】。——从内部结构上看, 这两个分量是方向不同、振幅大小不等的大量偏振光的电矢量在这两个方向上的投影的矢量和。因此这两个分量仍然是不相干的, 不能合成为一个矢量, 合成后的反射光仍然是自然光。——具有这种特点的光称为部分偏振光。

部分偏振光通常有两种图示法: 1. 向 \perp 光的传播方向看去, 传播方向上均匀分布的点的线密度和上下箭头的线密度分别显示该部分偏振光在 \perp 图面和在 $//$ 图面的电矢量强度。2. 沿着光的传播方向看去, 在 \perp 光的传播方向上, 用一外边缘为椭圆的, 沿着各个方向的振动矢量的强度 I , 所构成的椭圆面来表示。

设 I_{\max} 为某一部分偏振光沿着某一方向上所具有的能量最大值, I_{\min} 为 \perp 该方向上具有的能量最小值, 则我们用偏振度 $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 表示偏振的程度。自然光的 $I_{\max} = I_{\min}$, 因此其 $P=0$, 因而也称其非偏振光; 线偏振光的 $I_{\min}=0$, 因此其 $P=1$, 因而其为偏振度最大的光。

通过偏振片观察一束部分偏振光。当偏振片由对应透射光强度最大的位置转过 60° 时, 其光强减为一半。试求这束部分偏振光中的自然光和线偏振光的强度之比以及光束的偏振度。

【注: $\frac{I_p}{4} \neq \frac{I_p}{2}$ 暗示了这不是纯粹的线偏振光】部分偏振光相当于自然光和线偏振光的叠加, 设自然光强度为 I_n , 线偏振光的强度为 I_p 。则未透射时, 部分偏振光强度 $I = I_n + I_p$, 第一位置时 $I_1 = \frac{I_n}{2} + I_p$, 第二位置时, $I_2 = \frac{I_n}{2} + I_p \cos^2 \theta = \frac{I_n}{2} + \frac{I_p}{4}$ 。由 $I_2 = \frac{I_1}{2}$, 可得 $I_p = I_n$ 。【n-normal, p-perticular, 类似于微分方程中的通解和特解】

则对于 $I = I_n + I_p$, $I_{\max} = \frac{I_n}{2} + I_n$, $I_{\min} = \frac{I_n}{2} + 0$ (对于某方向的强度, 保底为自然光自带的十字交叉线的其中一条 $\frac{I_n}{2}$), 因此 $P = \frac{1}{2}$ 。

(二). 要想使得反射光成为偏振光, 即要使得 $A'_{p1}=0$ 。那么此时 $i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ 。这时的特殊的入射角 i_1 —— i_{01} 满足: $\tan i_{01} = \frac{\sin i_{01}}{\cos i_{01}} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$ 。此定律叫布儒斯特定律, 此角 i_{01} 叫布儒斯特角。自然光以布儒斯特角入射到介质表面时, 其反射光为(电矢量 \perp 入射面的)线偏振光。玻璃的 $n_2=1.5$, 对应的 $i_{01}=57^\circ$ 。

5.2.3 透射光的偏振态

(一).之前提到了, 以自然光入射时: 在 $i_1=0$ 或 90° 之外, 反射光均为部分偏振光; 在 0 或 90° 时, 反射光均仍为自然光。

现在, 以自然光入射时: 任意角度下, 透射光均为部分偏振光(不考虑 0 和 90°); 只不过在 i_{01} 时, 用另一对与折射有关的菲涅尔公式可导出, 透射光的平行分量 100% 透射(这点也可仅仅从逻辑上, 用“反射光只有垂直分量”来得到), 反射光中虽全是垂直方向上的, 但并不是所有垂直分量均处在反射光中, 仍有一部分垂直分量透射了。

【其中的“透射光”是指折射两次后, 出了介质 n_2 的折射光】

根据 $\frac{A_{p2}}{A_{p1}} = \frac{2\sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1+i_2) \cdot \cos(i_1-i_2)}$, 并利用 $i_{01} + i_2 = \frac{\pi}{2}$, 我们可以得到折射了一次后的平行方向上的振幅 $A_{p2}^{(1)} = A_{p1} \cdot \frac{2\sin i_2 \cdot \cos i_1}{\cos(i_1-i_2)} = A_{p1} \cdot \frac{2\sin^2 i_2}{\sin(2i_2)} = A_{p1} \cdot \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = A_{p1} \cdot \tan i_2$ 。

经介质下表面第二次折射后, $A_{p2}^{(2)} = A_{p2}^{(1)} \cdot \frac{2\sin i_1 \cdot \cos i_2}{\sin(i_2+i_1) \cdot \cos(i_2-i_1)}$, 式中的 i_1 、 i_2 对换了, 发现 $\frac{2\sin i_1 \cdot \cos i_2}{\sin(i_2+i_1) \cdot \cos(i_2-i_1)} = \frac{2\cos^2 i_2}{\sin(2i_2)} = \cot i_2$ 。于是 $A_{p2}^{(2)} = A_{p2}^{(1)} \cdot \cot i_2 = A_{p1} \cdot \tan i_2 \cdot \cot i_2 = A_{p1}$ 。

这表明在没有吸收的情况下, 以布儒斯特角入射到一片透明介质时, 透射光中电矢量的平行分量=入射光中的电矢量的平行分量, 即平行分量 100%透射。

同样, 根据 $\frac{A_{s2}}{A_{s1}} = \frac{2\sin i_2 \cdot \cos i_1}{\sin(i_1+i_2)}$, $A_{s2}^{(1)} = A_{s1} \cdot \frac{2\sin^2 i_2}{1}$ 。

经介质下表面第二次折射后, $A_{s2}^{(2)} = A_{s2}^{(1)} \cdot \frac{2\sin i_1 \cdot \cos i_2}{\sin(i_2+i_1)} = A_{s2}^{(1)} \cdot \frac{2\cos^2 i_2}{1} = A_{s1} \cdot \frac{2\sin^2 i_2}{1} \cdot \frac{2\cos^2 i_2}{1} = A_{s1} \cdot \sin^2 2i_2$ 。

这表明, 对于自然光 $A_{p1} = A_{s1}$ 来说, $A_{s2}^{(2)} = A_{s1} \cdot \sin^2 2i_2 = A_{p1} \cdot \sin^2 2i_2 = A_{p2}^{(2)} \cdot \sin^2 2i_2$, 而 $A_{p2}^{(2)} = A_{p1} \neq 0$, 即即使以布儒斯特角入射, 从一片介质透射出来的光仍然是部分偏振光。

(二).为了利用折射获得线偏振光, 往往采用多次折射的方法。将一束自然光, 以布儒斯特角射入 n 片互相平行的透明介质板后, 经过 $2n$ 次折射, 此时 $A_{p2}^{(2n)} = A_{p1}$, $A_{s2}^{(2n)} = A_{s1} \cdot \sin^{2n} 2i_2$ 。其中 $\sin 2i_2 < 1$, 当 n 很大时, $A_{s2}^{(2n)} \rightarrow 0$ 。此时透射光几乎是线偏振光, 其电矢量平行于入射面。

1.薄膜偏振分光棱镜。——利用多层膜具有高反射率的特点, 能提高反射光的能量利用率和透射光的偏振度, 从而将这两部分偏振光都充分利用起来。——可使得自然光中的垂直分量基本上都能反射, 而平行分量都能透射, 可同时获得两种偏振度接近于 1、光强也很高的线偏振光。

2.外腔式气体激光器。——两端的激光器前方装有布儒斯特窗，光在两镜面 M 间来回反射并以布儒斯特角射到窗上，平行于入射面(纸面)振动的光不发生反射而完全透过，继续来回振荡，垂直于入射面振动的光则陆续被反射掉。最后只有平行于入射面振动的光，能在激光器内发生振荡而形成激光。因而外腔式激光器输出的是线偏振光。

5.3 光通过单轴晶体时的双折射现象

5.3.1 双折射现象

常见的折射现象为，一束光射到各向同性介质的表面时，它将按照折射定律沿某一方向折射。但是如果光射到各向异性的介质(比如大部分非立方晶系：方解石、石英等许多透明晶体)中时，折射光将分成两束，并各自沿着略微不同的方向传播。从晶体透射出来时，由于方解石相对的两个表面互相平行，这两束光的传播方向仍旧不变。若入射光束足够细，同时晶体足够厚(光线走更长的距离)，则透射出来的两束光可以完全分开。

通过这种晶体用眼睛观察一个发光点时，可以同时看到两个像点。例如，在白纸上涂一黑点，通过方解石来观察它，可以看到两个黑点。同一束入射光折射后分成两束的现象称为双折射。

当入射的平行光束上方解石表面时，一束折射光仍然沿着原方向在晶体内传播，这束光遵从折射定律，称为寻常光(ordinary, 简称 o 光)。另一束折射光在晶体内偏离原来的传播方向，此折射光入射角=0，但折射角 $\neq 0$ ，从晶体出射时，入射角 $\neq 0$ ，折射角=0，违背折射定律，称为非常光(简称 e 光: extraordinary)。

“寻常”和“非常”仅仅指光在折射时是否符合折射定律，它反映了光在晶体内沿各个方向的传播速度不同。因此它们只有在双折射晶体内部才有意义，射出后就没有 o 光和 e 光之分了。当入射角改变时，o 光的入射角正弦与折射角正弦之比为常数，且入射面和折射面保持在同一平面内；而 e 光的两角正弦之比不是常数，e 光不在入射面内(o、e 的入射面是公共的)，它的折射角以及入射面和折射面之间的夹角，不仅和原来光线的入射角有关，还与晶体的取向有关。

5.3.2 光轴、主平面、主截面

调整入射光的方向时，发现晶体内存在一些特殊的方向，沿着这些方向传播的光并不发生双折射，即 o 光和 e 光的传播速度以及传播方向都一样。在晶体内平行于这些特殊方向的任何直线都叫做晶体的光轴，光轴仅标志着一定的方向，并不限于某条特殊的直线。

只有一个光轴的晶体叫单轴晶体(方解石、石英、红宝石)，有两个光轴的晶体叫双轴晶体(云母、硫磺、黄玉)。包含晶体光轴和一条给定光线的平面叫做这条光线对应的主平面。比如通过 e 光和光轴(可平移至与 e 光相交)所作的平面，即为 e 光所对应的主平面。

用检偏器来观察时，发现 o 光和 e 光均是线偏振光，但它们光矢量的振动方向不同，o 光的振动面 \perp 自己的主平面，e 光的振动面 \parallel 自己的主平面。一般同一入射光束的 o 光和 e 光的主平面并不重合，仅当光轴位于入射面内(\parallel 入射面)时，这两个主平面才严格地重合(这和接下来的主截面的介绍有关)。但多数时候，两个主平面夹角很小，因而 o、e 两光的振动面几乎互相垂直。

包括晶体光轴和界面法线的平面叫做主截面。当光线的入射面与主截面重合时(即光轴 \parallel 入射面时)，寻常光线和非常光线都在入射面内，它们的主平面、主截面、入射面都相互重合。

5.3.3 o 光和 e 光的相对光强

不论是自然光还是线偏振光，入射到单轴晶体时，一般均会产生双折射。自然光入射时，o、e 光振幅相等；线偏振光入射时，o、e 光振幅不一定等。

假设一线偏振光 \perp 纸面向里入射，AA' 代表该偏振光的振动面与纸面的交线；晶体的主截面(即光轴和界面法线确定的平面)也 \perp 纸面，且与纸面交线为 OO'。θ 表示振动面与主截面的夹角。由于光线平行于主截面入射，因此 o、e 两光的主平面共面且 \parallel 主截面和入射面，且 o 光的振动面 \perp OO'，e 光的振动面 \perp OO'。【振动面是随意的，而决定 o、e 光的主平面取向的因素之一是入射面和入射角，而不是振动面】

(由于实验事实限制了 oe 光振动(面)的方向)于是 o 光和 e 光的振幅分别为： $A\sin\theta$ 、 $A\cos\theta$ 。在 4.8.1 中我们曾提及过，光强还与折射率成正比，并且 o 光和 e 光因传播方向的不同而所处的折射率并不相同，而且 e 光的折射率还与其不遵从折射定律的传播方向有关(介质的折射率的各向异性)，因此，晶体中 o 光强度和 e 光强度分别为：

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

$n_o A^2 \sin^2 \theta$ 、 $n_e(\alpha) A^2 \cos^2 \theta$ 。 α 为 e 光传播方向与光轴的夹角。相对光强为

$$\frac{n_o \sin^2 \theta}{n_e(\alpha) \cos^2 \theta} = \frac{n_o}{n_e(\alpha)} \tan^2 \theta。$$

当 o、e 光射出晶体后，都在空气中传播，这时没有 o、e 光之分了，此时 o、e 光强度为 $A^2 \sin^2 \theta$ 、 $A^2 \cos^2 \theta$ ，相对光强为 $\tan^2 \theta$ 。

当晶体以入射光传播方向为轴旋转时， θ 改变，两束光的光强、相对光强也就不断变化。若晶体主截面 $OO' \perp AA'$ ， $\theta=90^\circ$ ，则 o 光强度最大，e 光消失，射出后 $I_o=I$ ， $I_e=0$ 。若扩大入射光束，使得 o、e 两束光跟着扩束，让它们相互重叠，则射出后两束光重叠部分总光强 $I \sin^2 \theta + I \cos^2 \theta$ 是个常量，不论晶体如何绕入射光传播方向转动，重叠部分强度不变。

强度为 I 的自然光，垂直入射到方解石晶体上后(方解石相对面相平行，出射的 o、e 两光是平行光，且也 \perp 出射面)，又垂直入射到另一块完全相同的晶体上。两块晶体的主截面之间的夹角为 α 。

第一次出射时，两晶体之间的空气中(不受折射率的影响)， $I_o=I_e=\frac{I}{2}$ ，且出射后的 o、e 光共面于第一个晶体的主截面，其面与第二块晶体的主截面夹角 α ；由于 o 光 \perp 第一主截面、e 光 \parallel 第一主截面。且一二主截面夹角 $\alpha(<90^\circ)$ ，因此 o 光与第二主截面夹角 $90-\alpha$ ，e 光与第二主截面夹角 α ，——因此 $I_{oo}=I_o \cdot \sin^2(90-\alpha)$ 、 $I_{oe}=I_o \cdot \cos^2(90-\alpha)$ ； $I_{eo}=I_e \cdot \sin^2 \alpha$ 、 $I_{ee}=I_e \cdot \cos^2 \alpha$ 。因此相对强度为 $I_{oo}: I_{oe}: I_{eo}: I_{ee} = \cos^2 \alpha: \sin^2 \alpha: \sin^2 \alpha: \cos^2 \alpha$ 。

当 α 为 180° 时， $I_{oo}=I_o \cdot \sin^2(-90)=I_o$ ，即第一块晶体中的 o 光，入射第二块晶体后，只分出 o 光，没有 e 光。同理 e 光入射第二块晶体后仍只分出 e 光。并且由于前后两个晶体的光轴方向关于四个入射出射表面的法线对称，因此 e 光在第二块晶体中的偏折方向与在第二块晶体中的偏折方向相反，导致从第二块晶体出射时，与 o 光重合，成为一束光，非相干叠加，强度为 $\frac{I}{2} + \frac{I}{2} = I$ 。

5.4 光在晶体中的波面

晶体的各向异性不仅表现在它的宏观性质(弹性、热膨胀等)上，也表现在它的微观结构上。——构成晶体的原子、离子 or 分子，可认为是各向异性的振子，它们在三个互相垂直的方向上具有三个固有频率 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 。

根据光的电磁学说, 当光波通过物质时, 物质中的带电粒子在光的交变电场作用下做受迫振动, 频率与入射光频率相同。若入射光的电矢量振动方向与 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 所对应的三个方向中某个, 比如 ω_1 相同, 则粒子做稳定的受迫振动, 其振动相位与 ω_1 有关。若改变光的传播方向 or 晶体位置, 使得振动面和另一个方向如 ω_2 相同, 则其受迫振动相位与 ω_2 有关, 以此类推。——这种受迫振动将发出频率与入射光频率相同的次波, 次波叠加形成折射波。所以折射波中, 振动方向不同的部分(如 o 光和 e 光)有不同的相位传播速度(即介质中的速度)。

对于单轴晶体, 三个固有频率中有两个相同。设这两个相同的频率为 ω_2 , 对应的两个方向所确定的平面垂直于光轴, 平行于光轴方向的固有频率为 ω_1 。设在单轴晶体中, 有一发光点 C, 任意假设一个由一条 C 点发出的光线和光轴所形成的主平面, 垂直于该主平面方向看去(光轴在此平面上), C 点发出的所有振动面 \perp 主平面的光为 o 光, 振动方向均 \perp 光轴, 因而其传播速度均只与固有频率 ω_2 有关, 因而有相同的传播速度。将该面的情况以过 C 的光轴为轴旋转 180° , 便可得到 C 点发出的所有 o 光的波面, 可得其是个球面。

同样, 在某个主平面上研究振动方向平行于主平面的光线。对于不同的传播方向, 光的振动方向与光轴成不同的角度——沿着//光轴的方向传播时, 振动 \perp 光轴, 受迫振动和入射光电矢量之间的相位差取决于固有振动频率 ω_2 , 与同方向的 o 光传播速度一样; 沿着 \perp 光轴方向传播时, 振动//光轴, 传播速度与 ω_1 有关。将该面的情况以过 C 的光轴为轴旋转 180° , 便可得到 C 点发出的所有 e 光的波面, 可得其是个旋转椭球面。其与一个主平面的交线为椭圆, 横截面不大的 e 光束(看成立体角很小的直线)的传播方向不一定垂直于波面。

旋转椭球波面与球波面在光轴方向相切, 可见沿着光轴方向传播的光, 不论其振动方向如何, (分出的 o 光和 e 光的)速度都相同, 不发生双折射。

单轴晶体分为两类: 一类是椭球面在球面之内, 即 e 光的速度在除光轴外任何方向均比 o 光小, 这类晶体叫正晶体; 另一类是椭球面在球面之外, 即 e 光的速度在除光轴外任何方向均比 o 光大, 这类晶体叫负晶体。

5.5 光在晶体中的传播方向

5.5.1 单轴晶体内 o 光和 e 光的传播方向

实际光束入射到晶体中时，每一点都可作为次波源，同时发出旋转椭球面 or 球面的次波。利用晶体中波面的特点和惠更斯作图法，就可以确定晶体内 o 光和 e 光的传播方向。下面考虑平行光斜入射到负晶体，椭球面的半短轴方向同向于光轴方向：

当光轴在入射面时：平行光斜入射到晶体表面，同一束光的波面上，A 点已在晶体表面，B 点尚未到达；当 B 点发出的次波经过时间 t 到达晶体表面 D 点时，A 点发出的次波已进入晶体内部。设入射面、光轴都与纸面平行：

以 A 作一半径为 $v_o t$ 的半球面，和一个半短轴(沿光轴方向)和半长轴分别为 $v_o t$ 和 $v_e t$ 的半椭球面，并且 A 点与两波面的切点的连线//光轴。过 D 点作球面和椭球面的切面，这两个平面就是界面 AD 上所有各点发出的次波波面的包络面，分别代表晶体中的 o 光和 e 光的折射波面。o 光和 e 光就分别沿着 A 点到两切点的连线的延长线方向传播。不过，o 光的传播方向 \perp 其波面，而 e 光传播方向不 \perp 其波面。

当光轴不在入射面时：由于 o 光球波面与 e 光旋转椭球波面只在光轴方向相切，并关于光轴旋转对称，其余近乎 4π 的球面角方向上椭球面径向要么均小于球面，要么均大于球面。因此当光轴不在入射面时，椭球面的半短轴、D 点关于椭球面的切面、切点便跟着光轴旋转了(比如绕着纸面上 \perp 光轴的直线为轴向纸面内旋转)，而跟光轴一样不在入射面了；而圆面怎么跟着光轴旋转还是圆面，D 关于圆面的切点不动。此时 o 光与 e 光的主平面不再重合。

实际工作中常用晶体的光轴与晶体表面平行或垂直；当平行光束垂直入射晶体表面时：

(1).光轴 \perp 晶体表面时：此时光轴平行于纸面，//入射光，竖向。考虑一小束光，对应的旋转椭球面和球面的两切点连线，即椭球面的半短轴方向，同向于光轴方向，也//纸面且竖向，无数对同样大小的、同样组合的半球面和半椭球面方向一致地在晶体内部沿着光轴传播，包络面相同。因此 e 光、o 光不分开，传播方向相同，传播速度也相等。

(2).光轴//晶体表面时且 \perp 入射面时：此时光轴垂直于纸面， \perp 入射光，里向。椭球面的半短轴方向也 \perp 纸面。旋转椭球面与入射面的交线是以半长轴为半径的圆，大于 o 光的波面半径。此时 e 光的包络面比 o 光前进距离更大，速度更快，方向一致。

(3).光轴//晶体表面时且//入射面时：此时光轴平行于纸面， \perp 入射光，横向。椭球面的半短轴方向也//纸面且横向。旋转椭球面与入射面的交线是椭圆，椭圆的半短轴 = o 光的波面半径。此时 e 光的包络面比 o 光前进距离更大，速度更快(与上一段中的 e 光速度一样)，方向一致。

其实，以上三种情况中的后两种对应的是相同的情况。只是从两个互相垂直的截面看去的结果。以上三种情况中，主截面、o,e 光的主平面都重合。

5.5.2 单轴晶体的主折射率

o 光的折射率 $n_o = \frac{c}{v_o}$ ；e 光的主折射率 $n_e = \frac{c}{v_e}$ ，其中 v_e 为 e 光在负晶体中传播速度的最大值，or 正晶体中传播速度的最小值。即当 e 光沿着 \perp 光轴方向传播时【如 5.5.1 中的(2).(3).所示】，此时 e 光传播方向与 e 光波面垂直。在这种特殊方向下，e 光也遵从折射定律 $\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}} = \frac{c}{v_e}$ 。

5.6 偏振器件

o 光和 e 光的两个特点：都是线偏振光——光通过棱镜后，o、e 光分开，获得完全的线偏振光，比用偏振片和玻片堆获得的线偏振光质量更高；传播速度不同——光通过玻片后，o、e 光产生一定的相位差，从而用于改变入射光的偏振态(合成出新的偏振态——参见波片一节)。

【接下来我们就会分别介绍 o、e 光/双折射材料的这两个方向的用途及其制成的功能性器件，接下来的第一部分是棱镜，阐述的是第一个作用对应的用途，它要求 o、e 光必须分开；紧接着的第二部分是波片，对应第二个作用的用途，它要求 o、e 光必须共线。】

5.6.1 尼科耳棱镜

$n_e < \text{中间填充物折射率} < n_o$ ，对 o 光而言，是光密到光疏，发生全反射，得到 e 光所对应的线偏振光，其振动方向平行于主截面且平行于横截面的短对角线。

若入射光并不//棱镜边缘时，可能发生 o 光入射角小于临界角而不发生全反射，也可能发生 e 光入射角增大变得接近临界角而发生全反射，因此入射光在这两个方向

上存在极限角。激光发散角就比较小，适合作为理想的尼科耳棱镜的入射光束，不过棱镜得以空气层代替加拿大树胶。

尼科耳棱镜可以作为起偏器和检偏器，作为检偏器时，如入射线偏振光的振幅为 A ，其振动方向与尼科耳棱镜主截面之间的夹角为 θ ，则尼科耳棱镜内 e 光的振幅为 $A \cos \theta$ 、 o 光的振幅为 $A \sin \theta$ 。 e 光透射出尼科耳棱镜后，线偏振光强度为 $I \cos^2 \theta$ 。

自然光连续通过两个尼科耳棱镜时，第一个 N_1 作为起偏器，第二个 N_2 作为检偏器。两个尼科耳棱镜主截面之间的夹角即为上一段中的 θ 。当 $\theta=0$ 时， N_1 产生的偏振光能完全通过 N_2 ，这种装置称为平行尼科耳棱镜。 $\theta=\pi/2$ 时，称为正交尼科耳棱镜。

5.6.2 沃拉斯顿棱镜

沃拉斯顿棱镜能产生两束彼此分开的、振动互相垂直的线偏振光。由两个方解石做的光轴互相垂直的直角棱镜组成。【之前的尼科耳棱镜中填充物左右两边的光轴方向相同，主截面相互平行；不过对于连续通过两个尼科耳棱镜，主截面可相互垂直】

自然光垂直入射 AB 表面时， o 、 e 光传播方向 \perp 光轴，无折射地沿着同一方向以不同速度传播。【如 5.5.1 中的(2).(3).所示】当它们先后进入第二棱镜后，由于已经适应了第一棱镜的光轴的 o 、 e 光遇到了 \perp 第一棱镜光轴的第二棱镜光轴， o 光变成 e 光， e 光变成 o 光，第一棱镜中的 o 光以相对折射率(第二介质/第一介质) $\frac{n_e}{n_o}$ 折射，第一棱镜中的 e 光以相对折射率 $\frac{n_o}{n_e}$ 折射。

由于方解石是负晶体($\frac{n_o}{n_e} > 1$)，因此(第一棱镜中的) o 光的 $\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}} = \frac{n_e}{n_o} < 1$ ， $i_{2e} > i_1$ ，在第二棱镜中变为 e 光后，远离法线方向偏折； e 光的 $\frac{\sin i_1}{\sin i_{2o}} = \frac{n_o}{n_e} > 1$ ， $i_{2o} < i_1$ ，在第二棱镜中变为 o 光后，向着法线偏折。于是两光束在第二棱镜中分开，且经 CD 面再次折射入空气，进一步分开得更多。

5.6.3 波片

当光轴与单轴晶体的入射 and 出射表面(界面)(非入射面、出射面)平行时， e 、 o 光沿同一方向传播，我们将这样的晶体叫做波片。当一束平行光垂直入射到波片上时，在入射点分解成等相位的 e 、 o 光；但进入晶体后，由于 e 、 o 光的传播速度不同【如 5.5.1 中的(2).(3).所示】，频率相同，二者的波长就不同，逐渐形成相位不同的两束光。

这两束光在波片内的振动为 $E_e = A_e \cos(\omega t - k_e r)$ 和 $E_o = A_o \cos(\omega t - k_o r)$ 。其中 $k_e = \frac{\omega}{v_e} = \frac{2\pi f}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{v_o}{v_e} = \frac{2\pi}{\lambda} n_e$, $k_o = \frac{\omega}{v_o} = \frac{2\pi f}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda} n_o$, 于是波片中两束光传播相同距离的相位差 $\Delta\varphi = k_o r - k_e r = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) r$ 【这里的相位差是指, e 光的相位减去 o 光的相位, 这样的设定很 reasonable, 即不寻常相对于寻常的增量, 以寻常为参考系】。其中 r 表示入射的波片表面与光波所到达的波片内部某点的距离。——相位差同样也可以用之前的光程之差来给出: $\frac{2\pi}{\lambda} (n_o r_o - n_e r_e)$ 。

当两束光射出波片后 ($r_e = r_o = r = d$), 相位差即为 $\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$, 其中 d 为波片厚度。可见 o、e 光通过波片后的相位差, 除了与 $n_o - n_e$ 成正比还与 d 成正比。在实际工作中, 指定材料的 1/4 波片的厚度满足: $(n_o - n_e) d = \pm \frac{\lambda}{4}$ ——对应地, 光通过波片后的相位差 $\Delta\varphi$ 为 $\pm \frac{\pi}{2}$ 。由于 n_o 、 n_e 和影响 v_o 、 v_e 的光波波长 λ_o 、 λ_e 有关, 所以不同的光波波长对应不同的波片厚度 d。——另外, 由于这样的波片太薄, 实际上的 1/4 波片的厚度为上述厚度的奇数倍, 即有: $(n_o - n_e) d = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, 对应的相位差 $\Delta\varphi$ 为 $\pm (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ 。

厚度 d 和相位差 $\Delta\varphi$ 满足 $(n_o - n_e) d = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ 和 $\Delta\varphi = \pm (2k + 1)\pi$ 的波片叫做半波片, 线偏振光垂直入射到半波片后, 透射光仍为线偏振光, 但偏振方向与入射光不同。

——在 5.2 线偏振光中, 我们提到, 线偏振光可以用相位相同, 振动相互垂直的两列光波的叠加来描述: $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kz)$, 设刚进入 1/4 波片表面时 $\mathbf{E} = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y) \cos(\omega t_0)$, 即入射时候 o、e 光振动矢量为: $A_x \mathbf{e}_x \cos(\omega t_0)$ 、 $A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0)$, 则出射时候的 o、e 光振动矢量分别为: $A_x \mathbf{e}_x \cos(\omega t_0 - k_o d)$ 、 $A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0 - k_o d + (k_o d - k_e d)) = A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0 - k_o d + \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d) = A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0 - k_o d + \pm (2k + 1)\pi) = -A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0 - k_o d)$, 合成为: $\mathbf{E}' = (A_x \mathbf{e}_x - A_y \mathbf{e}_y) \cos(\omega t_0 - k_o d)$ 。——于是 \mathbf{E}' 相对于 \mathbf{E} , 相当于 \mathbf{E} 朝 \mathbf{E} 的振动面 $\rightarrow x$ 轴/ \mathbf{e}_x 轴 (o 光振动面) 在 $< 90^\circ$ 的方向, 转动了其原本夹角 θ 的 2 倍, 即 2θ , 致使 e 光对应的 y 向分量 $A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0)$ 反向为 $-A_y \mathbf{e}_y \cos(\omega t_0 - k_o d)$, 即 \mathbf{E}' 相对于 \mathbf{E} 关于 x 轴或者说 X-o-Z 平面 (o 光振动面) 对称了一下。

厚度 d 和相位差 $\Delta\varphi$ 满足 $(n_o - n_e) d = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$ 和 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 的波片叫做全波片。

5.7 椭圆偏振光和圆偏振光

强磁场中的物质中的电子做拉摩尔进动时, 会发出椭圆偏振的电磁辐射。椭圆偏振光指的是在光的传播方向上, 任意一个场点的电矢量既改变它的大小, 又以角速度 ω (=光波的圆频率) 均匀地转动它的方向, 电矢量的端点在垂直波传播方向的平面内

描绘出一个椭圆。【部分偏振光和椭圆偏振光的区别：部分偏振光可看作自然光和线偏振的混合产物，它的椭圆性质是指各方向的 I 的强度构成椭圆形状；而椭圆偏振光可看作由两个线偏振合成，它的椭圆性质是指电矢量端点的描绘图像的投影】

5.7.1 椭圆偏振光和圆偏振光的描述

椭圆偏振光可由两列频率相同(相位差恒定)，振动方向互相垂直，且沿同一方向(主要指共线)传播的线偏振光叠加得到。合成波的表达式： $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = A_x \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x + A_y \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi) \mathbf{e}_y$ ，消去 $(\omega t - kz)$ 可以得到电矢量端点所描的椭圆轨迹方程： $\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \cdot \left(\frac{E_x}{A_x}\right) \left(\frac{E_y}{A_y}\right) \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$ 。【既然涉及到数学，则 E_x -O- E_y 坐标系采用的是平面直角坐标系 x-O-y，z 轴垂直于纸面向外，波传播方向反向于 z 轴；与我们之前设定的 z 与传播方向同向，x 轴向上，y 轴向右的不同；这里 y 向上，x 向右，z 轴朝着自己； $\Delta\varphi$ 为 E_y 所超前于(相同 z 处的) E_x 的相位，即 e 光(仍对应 E_y) 超前于(可以超前负的值) o 光(仍对应 E_x) 的相位，这点是一致的(即仍然认为负晶体+光轴//y 轴)——虽然本身这里不涉及 o、e 光；尚未涉及波片这类物理性概念，只是纯粹数学地描述；e 光对应 E_y 这一点是为了将数学方程中的 $y-x=\Delta\varphi$ 与物理上波片处的 $e-o=\Delta\varphi$ 相对应】

a. 由于 E_x 、 E_y 的值总在 $\pm A_x$ 、 $\pm A_y$ 之间，因此电矢量端点轨迹与 $E_x = \pm A_x$ 、 $E_y = \pm A_y$ (或者说 $x = \pm A_x$ 、 $y = \pm A_y$) 围成的矩形相切。b. 椭圆的长轴 or 短轴与 x 轴构成 α 角，且 $\tan 2\alpha = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \Delta\varphi$ 。c. 电矢量的端点沿着椭圆运动的方向也与相位差 $\Delta\varphi$ 有关，在标准平面直角坐标系下，在 $\Delta\varphi \in [0, \pi]$ 区间内，于 z 轴正向观看逆着 z 轴正向传播的电矢量端点，其在顺时针画着椭圆，对应右旋椭圆偏振光。 $\Delta\varphi \in [\pi, 2\pi]$ 时，对应逆时针画椭圆，对应左旋椭圆偏振光(这些椭圆和线偏振线均与同一矩形框相切；可以这么记，左半区间为右旋)。 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3\pi}{2}$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍时，对应正椭圆偏振光。【构成的参数方程的两个均关于 t 的函数，想分别作为 x、y 分量合成一个去掉参数 t 的轨迹方程，这个思想类似于示波器显示屏中的 $(U_x(t), U_y(t))$ ；只不过得将这里的，均朝着 z/-z 方向的时间轴，给改为一个(想作为 x 分量的 U_x -t 直角坐标系)朝着 -y 方向，一个(想作为 y 分量的 U_y -t 直角坐标系)朝着 x 方向；这里若 E_x 和 E_y 的 ω 的不同似乎就对应着示波器实验中不同的李萨如图】

【关于右旋和左旋：你可以试着在标准平面直角坐标系下，利用旋转矢量法，做一个 $x = A_x \cos(\omega t - kz)$ 的逆时针/左旋旋转矢量，并对 $y = A_y \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)$ 做一个对应的顺时针/右旋旋转矢量。(对于 y 轴来说，x 轴相当于其 y 轴，其 y-o-x 坐标系相对于 x-o-y 坐标系关于 $y=x$ 对称，由于 $y = A_y \cos(\omega t - kz + \Delta\varphi)$ 的旋转矢量也要是其标准(右手)直角坐标系下的逆时针，所以其旋转矢量总是和 $x = A_x \cos(\omega t - kz)$ 的旋转矢量方向相反，不论 $\Delta\varphi$ 的取值，即永远是 x-o-y 系下的顺时针)——当 $\Delta\varphi = 90^\circ$ 时，要往 y 轴投影的初

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

始旋转矢量 A_y 的初位置为从 y 轴以 y - o - x 系下的逆时针旋转 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$, 即从 y 轴相对于 x - o - y 顺时针旋转 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$ 至了 x 轴; 而要往 x 轴投影的初始旋转矢量 A_x 的初始位置也是 x 轴, 因此初始时刻的两个旋转矢量相互重合, 之后 A_x 左旋、 A_y 右旋, 而 A_x 朝 x 轴投影所得的**向量**+ A_y 朝 y 轴投影所得的**向量**, 即为 **y 向超前 x 向相位差 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$** 所对应的 $(x,y)=(A_x\cos(wt-kz), A_y\cos(wt-kz+\frac{\pi}{2}))$ 所对应的**右旋合矢量 A** 。——同样的道理, 你也可以尝试着以同样的方法察看 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$ 所对应的合矢量 A 所对应的 $(x,y)=(A_x\cos(wt-kz), A_y\cos(wt-kz-\frac{\pi}{2}))$, 它的 A_y 的初始位置指向 x 轴的负半轴, 旋转方向仍为右旋。而**合矢量 A 是左旋的**。——之前 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时, A_x 、 A_y 关于 x 轴对称地旋转, 初始位置重合于 x 轴正向; 而现在 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时, A_x 、 A_y 关于 y 轴对称地旋转, 初始位置反向共线于 x 轴。】

圆偏振光是椭圆偏振光的特例。当 $A_x=A_y=A$, $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 时, 椭圆轨迹方程变为圆方程。当 $\Delta\varphi=+\frac{\pi}{2}$ 时, 合成波的表达式 $E=A_x\cos(wt-kz)e_x - A_y\sin(wt-kz)e_y$, 对应**右旋圆偏振光**; 当 $\Delta\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 时, $E=A_x\cos(wt-kz)e_x + A_y\sin(wt-kz)e_y$, 对应**左旋圆偏振光**。

例题: 波长为 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的一束左旋圆偏振光垂直入射到 $5.141\times 10^{-4}\text{cm}$ 厚的方解石波片上, $n_o=1.65836$, $n_e=1.48641$, 问透射光束的偏振态。

可通过 $\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ 算出 $\Delta\varphi=3\pi$ (发现这个方解石波片是半波片), 因此对于已经处于 $\Delta\varphi\in[0+2k\pi, \pi+2k\pi]$ 的左旋偏振光来说, 其 $\Delta\varphi$ 再+奇数 π 会使得其 $\Delta\varphi'$ 处于 $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$ 的右旋区间。——半波片使得左旋圆偏振光变为了右旋圆偏振光。

5.7.2 椭圆偏振光和圆偏振光的获得

“频率相同(相位差恒定), 振动方向互相垂直, 且沿同一方向(主要指共线)传播的线偏振光”, 这些前提均可由一束线偏振光通过波片来实现, 因其分解出来的 o 、 e 光正好满足这些条件。

一束线偏振光垂直入射到 $1/4$ 波片上, 且电矢量振动面与波片主截面**成非特殊角**(0° 、 90°)时(否则出射的仍然是线偏振光了), 出射光为**椭圆偏振光**($\Delta\varphi=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 则左($-\frac{\pi}{2}+k\pi$)、右旋($\frac{\pi}{2}+k\pi$)均有, 且是**正椭圆偏振光**)——若非 $1/4$ 波片, 则相位差不一定为 $\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, 则不一定是**正椭圆偏振光**, 但仍然多是**椭圆偏振光**。

若波片是由负晶体制成的, 且**光轴沿着 y 轴**, 则——若入射的线偏振光的振动在第一、三 or 二、四象限(即随便怎么放, 只要不是在 x - o - z 面或 y - o - z 面), 则**对应 E_y 的 e 光比对应 E_x 的 o 光超前 $\frac{\pi}{2}$** , 即 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$, (在该 x - o - y 参考系下为)**右旋正椭圆偏振光**; 若**光轴沿着 x 轴**【或者说, x 轴选在光轴方向】, 则**对应 E_x 的 e 光比对应 E_y 的 o 光超前 $\frac{\pi}{2}$** ,

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

即 E_y 比 E_x 超前 $-\frac{\pi}{2}$ (我们得将物理的 e-o 的转化为数学的 $E_y - E_x$ 的), 即 $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$, (在该 x-o-y 参考系下为)左旋正椭圆偏振光。

5.7.3 自然光改造成椭圆偏振光或圆偏振光

自然光是电矢量轴对称分布大量各种取向的线偏振光的集合, 彼此间没有固定的相位差。对于那些电矢量沿光轴或 \perp 光轴的线偏振光, 出射后是偏振方向不变的线偏振光; 其他大量的电矢量与光轴成一任意角度的线偏振光, 这些线偏振光在波片内都会被分解为 o、e 光, 出射后会合成为椭圆偏振光。——因而自然光经过波片后的偏振态, 是大量的、有着各种长短轴比例的椭圆偏振光集合。这些大量的椭圆偏振光仍然是无规律分布的, 彼此之间没有固定的相位关系。因此, 这种光从宏观看上去仍然是轴对称分布(以传播方向为轴)的, 仍然是自然光。

因此, 自然光要转化为椭圆偏振光, 得先通过一个起偏器变成线偏振光。把一个恰当取向的起偏器和一块波片的串接组合叫做椭圆偏振器。自然光通过椭圆偏振器后转化为椭圆偏振光。

若想得到圆偏振光, 需满足 $A_x = A_y = A$, $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, 因此必须使起偏器的透振方向与 $1/4$ 波片的光轴(主截面?)成 45° 。这样的串接组合叫做圆偏振器。

综上, 单独一个波片无法将非偏振光转化为偏振光, 可以把线偏振光转化为椭圆偏振光。原来一直认为, 光的偏振态一旦形成, 在自由空间传播时不会变化。但最近十几年的研究表明, 光的偏振态在自由空间以及大气中传输时会发生变化。这种变化与光源的相干度密切相关。

振幅为 A 的线偏振光正入射到一个由方解石制成的 $1/4$ 波片上, 其振动方向与波片光轴的夹角为 30° , 试讨论出射光的偏振态。

仍设 $1/4$ 波片的光轴沿着 y 方向(或者说把 y 轴设在光轴方向), e 光沿着 y 方向振动; 由于方解石是负晶体, $v_o < v_e$, 因此 $n_o = \frac{c}{v_o} > n_e = \frac{c}{v_e}$, 因此 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d > 0$, 导致射出时 e 光相位比 o 光提前 $\pi/2$, 它们的振动方程分别为 o 光:

$E_x = A_x \cos(\omega t) = A \sin 30^\circ \cos(\omega t)$, e 光: $E_y = A_y \cos(\omega t) = A \cos 30^\circ \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ 。对应(所设坐标系下的)右旋正椭圆偏振光。根据 $\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \cdot (\frac{E_x}{A_x})(\frac{E_y}{A_y}) \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$,
 $(\frac{E_x}{A/2})^2 + (\frac{E_y}{\sqrt{3}A/2})^2 - 2 \cdot (\frac{E_x}{A_x})(\frac{E_y}{A_y}) \cos \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}$, 即 $(\frac{E_x}{A/2})^2 + (\frac{E_y}{\sqrt{3}A/2})^2 = 1$ 。【也不需要数学运算, 因为既然用 $\frac{\pi}{2}$ 确定了正椭圆, 则只需要再加上与矩形相内切即可】

5.8 偏振态的实验检验

5.8.1 只用一个偏振片 线偏振光的检验

A.线偏振光：偏振片处于某一位置时，透射光强度最大；由此位置转过 90° 后，透射光强度为 0，这种现象叫消光。——再转 90° ，又最强；再 90° ，又消光。

B.椭圆偏振光和**部分偏振光**：当偏振片处于某一位置时，光强最大；由此位置转过 90° 后，透射光强度最小但不为 0，不出现消光现象。——与线偏振光不同，但与部分偏振光类似。

C.圆偏振光与**自然光**：转动检偏器时，透射光强度不变。——与自然光类似。

5.8.2 偏振片前放置一个 $1/4$ 波片 椭圆偏振光和圆偏振光的检验

先用一个偏振片，判断是 B 类还是 C 类。若是 B 类——则①.转动偏振片找到透射光最强 or 最弱的位置，即找到了椭圆的主轴(长轴 or 短轴)(如果是椭圆偏振光的话)，此时在偏振片前面放一 $1/4$ 波片(这和椭圆偏振器的放置顺序相反)，并使得 $1/4$ 波片的光轴严格//椭圆主轴(偏振片透振方向)。②.转动偏振片，若出现类似线偏振光的两次消光，则原光束为椭圆偏振光。若不出现消光，且强度最大方位同原先一样，则原光束为部分偏振光(由于 $1/4$ 波片的光轴//部分偏振光中的线偏振光成分，所以其中的线偏振光会要么成为 o 光、要么成为 e 光，之后射出，射出后振幅不变)。

这是因为，椭圆偏振光可以认为是由相位差 $\frac{\pi}{2}$ 的，两束沿着椭圆的两个主轴振动(这相当于之前的逆过程：之前是已有 x-y 轴，以 $\frac{\pi}{2}$ 合成的椭圆，其主轴恰于 x、y 轴上。)的线偏振光合成的【注意：同样也可以分解为两个在其他方向的振动来合成(即描绘该椭圆所用的数学坐标系的 x、y 轴不一定要设定在主轴上)，不过相位差就不再是 $\frac{\pi}{2}$ 了，参见 5.8.3】，或者说是由出射某个 $1/4$ 波片的 e 光和 o 光合成的(同样设 e 光所在的光轴方向为 y 轴)。由上一题可知，e 光： E_y 所对应的 $A_y = \sqrt{3}A/2$ 并不一定比 o 光的振幅 A_x 大(这和入射 $1/4$ 波片的线偏振光与主截面/光轴的夹角有关)，所以我们并不能判断那个振动相位更提前的光(e 光)在椭圆的哪个主轴(长轴 or 短轴)上【或者说我们只知道相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$ ，不知道是短轴-长轴 $=\frac{\pi}{2}$ ，还是长轴-短轴 $=\frac{\pi}{2}$ ，即不知道假想的 e 光、假想波片的光轴、y 轴在哪和左旋右旋情况】。因此当这束椭圆偏振光入射我们插入的 $1/4$ 波片时，o、e 光各自均分别再分出两束 o、e 光，只不过由于我们将 $1/4$ 波片

的光轴与椭圆偏振光的主轴平行了, 要么 o 光成为 oo 光、e 光成为 ee 光, 要么 o 光变成 oe 光、e 光变成 eo 光。——在前一种情况下, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 进一步增加 $\frac{\pi}{2}$, 变成 $\Delta\varphi = \pi$; 在后一种情况下, 既有相位差减少 $\frac{\pi}{2}$, 变成 $\Delta\varphi = 0$ 。两种情况的 $\Delta\varphi = 0$ 或 π 均会使得新的椭圆偏振光变成线偏振光, 只不过振动方向一个朝着 $(x, y) = (E_x, E_y) = (A_x, -A_y)$ 、 $(-A_x, A_y)$ 方向, 一个朝着 (A_x, A_y) 、 $(-A_x, -A_y)$ 方向。此时再转动偏振片, 会出现两次消光。【这里的 $\Delta\varphi$ 是以那个假想的 1/4 波片的坐标系(光轴为 y 轴)为参考的】

若 1/4 波片的光轴与椭圆偏振光的主轴不平行, 而是成一定角度, 则 o 光既分出 oo 成分, 又有 oe 成分, 且在相位上有: $ee = eo + \frac{\pi}{2} = oe + \frac{\pi}{2} = oo + \pi$, 此时就是 4 个同频振动分量进行合成, 即两个组合 $ee + oo$ 与 $eo + oe$ 先在组合内部各自合成一个分别朝着 $(A_{ox}, -A_{ey})$ 和 (A_{ex}, A_{oy}) 线偏振光(其参考坐标系以 1/4 波片的光轴为 y 轴, 即以 ee, eo, oe, oo 中后面的字母所对应的 xy 轴为参考), 其中在 $(A_{ox}, -A_{ey})$ 方向的 $ee + oo$ 的振动为 $A_{ox} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x + A_{ey} \cos(\omega t - kz + \pi) \mathbf{e}_y = A_{ox} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x - A_{ey} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_y$, 相位为 oo 光的相位(相当于 $\Delta\varphi = 0$ 所对应的那条对角线 (A_{ox}, A_{ey}) 上的线偏振光变成 $\Delta\varphi = \pi$ 所对应的另一条对角线 $(A_{ox}, -A_{ey})$ 上的线偏振光); 另一个在 (A_{ex}, A_{oy}) 方向的 $eo + oe$ 的振动为 $A_{ex} \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_x + A_{oy} \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_y$, 相位为 oo 光的相位 $+\frac{\pi}{2}$, 所以它们相位差为 $-\frac{\pi}{2}$, 但其振动并不一定相互垂直(\because 之前 $A_x \neq A_y$ 即 $A_o \neq A_e$, \therefore 不一定有 $(A_{ox}, -A_{ey}) \cdot (A_{ex}, A_{oy}) = 0$), 所以不仅不能再合成为一个线偏振光, 甚至或许也不能合成为一个右旋正椭圆偏振光(\because 虽相位差为 $-\frac{\pi}{2}$, 但却是以 $(A_{ox}, -A_{ey})$ 为 y 轴, (A_{ex}, A_{oy}) 为 x 轴的仿射坐标系), 不过有可能仍然是个椭圆偏振光; 或另俩组合 $oe + oo$ 与 $eo + ee$ 内部先各自合成出俩椭圆偏振光, 再合成为一个椭圆偏振光。

5.8.3 补偿器

上述实验方法检验椭圆偏振光, 需要事先测定(知道) 1/4 波片的光轴方向, 并使得 1/4 波片的光轴严格//椭圆主轴。这很难办到。不仅局限于操作繁琐, 而且我们只能将既有相位差 $\Delta\varphi$ 改变 $\pm \frac{\pi}{2}$ (或者说正因如此, 我们才操作繁琐的——我们得先让椭圆偏振光对应的椭圆在 1/4 波片上设定的 x-o-y 坐标系下为正椭圆偏振光(对应 E_y 所超前于(相同 z 处的) E_x 的相位 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3\pi}{2}$))。

主轴在任何方向的椭圆可认为是由两个互相垂直的振动在相位差(仍参照于主截面所对应 z-o-y 面, 所建立的 y 轴与光轴重合的坐标系, E_y 所超前于 E_x 的相位 $\Delta\varphi) \neq \pi/2$ 的情况下合成的。要使得这种相对于指定的 1/4 波片上的 x-o-y 参考系, 不是正的椭圆偏振光变为线偏振光, 则我们得设法引进可任意变更的相位差 $\Delta\varphi'$ 作为补偿, 使得 $\Delta\varphi + \Delta\varphi'$ 总和 = 0 或 π 。——补偿器就是以此为目的而诞生的, 它可创造任意额外相位差 $\Delta\varphi'$ 。

最简单的一种补偿器叫**巴比涅补偿器**，由两个劈形石英组成，光轴互相垂直，且均平行于某两侧端面(比如上下表面)。垂直入射表面的椭圆偏振光**被认为**其两个振动方向沿着第一晶劈中的 o 光和 e 光振动方向(即 E_x 、 E_y 或 x 、 y 方向或 **上光轴和光轴方向**)，第一晶劈内的 o/e 光进入第二晶劈后变成 e/o 光，**当光通过两晶劈厚度相同的部分时，两束光之间才不发生任何相位差**。通过其他部分时，在第一个晶劈内经过的厚度 d_1 和在第二个晶劈内经过的厚度 d_2 不同。此时 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d_1 + \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d_2 = \frac{2\pi}{\lambda}[(n_o - n_e)d_1 + (n_e - n_o)d_2] = \frac{2\pi}{\lambda}[(n_o - n_e)(d_1 - d_2)]$ 。【这里的 $\Delta\varphi$ 表示第一晶劈中的 e 光，在射出第二晶劈后，的相位减去 o 光的相位；因此 $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d_2$ 也得表示：成为了第二晶劈的 o 光的之前的 e 光相对于之前的 o 光，即现在的 e 光的相位提前量】

巴比涅补偿器需要让光通过补偿器的不同地方，才能得到任意的相位差。因此其缺点便在于必须使用极窄的光束，**否则光束照射面上各点就已经处于不同地方了，因而不同部分会有不同的相位差，仅仅在某些地方变成线偏振，其余地方全是不同方位的椭圆偏振光**。

索列尔设计了另一种补偿器，它由光轴平行(同向)的两个可沿着斜面平行滑动的石英劈和其下的一个石英薄片(两表面平行)组成。薄片的光轴和两劈的光轴垂直。它是通过**增减两劈的厚度来改变两劈的厚度与下面薄片的厚度差值**，来改变**相位差**的。光束可入射于补偿器中上面的那个**可用微动螺旋平行移动的劈的水平上表面上任意地方**，而光束内各处的光线经历的**厚度差值**保持恒定。

5.9 偏振光的干涉

5.9.1 偏振光的干涉

与自然光的干涉相同，两束偏振光的干涉也必须满足**频率相同、振动方向基本相同**，以及有**恒定的相位差**这三个基本条件。

典型的偏振光干涉装置：两块共轴偏振片之间放一块厚度为 d 、光轴沿 y 轴的波片。第一块偏振片 P_1 将朝着 z 轴入射的自然光转换为线偏振光，波片将线偏振光分解为振动互相垂直的两束线偏振光，并且两束光在射出波片时具有一定的相位延迟，第二块偏振片 P_2 将两束光的振动引导到相同方向上，使得从 P_2 射出的两束光满足干涉条件。——**在自然光入射的情况下，通过 P_2 后虽满足“振动方向相同”这一干涉条件，但没有固定的相位关系，故仍不能发生干涉**。

【整体结构可看成一个椭圆偏振器+第二块偏振片；自然光中各波段、各振幅、各偏振方向的光从 P1 透出后，由于偏振方向的随机性，出射 P1 的各段光波振幅进一步不一致(即使是之前相同波段相同振幅的)，一方面波片引入 e-o 相位差，另一方面，e 光路径所得的光振幅最终乘以由波片和第二个偏振片的取向所决定的常数 $\cos\theta\cos\alpha$ ，o 光路径最终乘以 $\sin\theta\sin\alpha$ ，然后再在同一条直线上进行旋转矢量合成；不同波段的光，波片引入的相位差 $\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ 不同，因而各波段的光虽然共振动面，但不同波段的光分得的两束 oe 光的相位差不同，每一列(种)波对应的两列子波的叠加方式就不同，无法发生干涉。】

5.9.2 偏振光干涉的强度分布

(1).设单色平行的自然光经偏振片 P_1 后，变成沿其透振方向振动的线偏振光，其振幅为 A_1 ，与波片光轴 y 的夹角为 θ 。则光进入玻片并射出后，o、e 光的振幅分别为 $A_o = A_1 \sin\theta$ 、 $A_e = A_1 \cos\theta$ 。经过透振方向与波片光轴成角 α 的 P_2 后，变为 $A_{2o} = A_o \sin\alpha = A_1 \sin\theta \sin\alpha$ 、 $A_{2e} = A_e \cos\alpha = A_1 \cos\theta \cos\alpha$ 。【 A_1 最好也看成单独一列波的振幅，不要看成多个，振动方向相同，振幅不一，相位不一，的单色光的叠加。。】

从偏振片 P_2 透射出来的光，其强度为这两束同频率、共线、共振动面、有固定相位差的相干光的叠加结果：设两束光之间的相位差为 $\Delta\varphi'$ ，则 $I = A^2 = A_{2o}^2 + A_{2e}^2 + 2A_{2o}A_{2e}\cos\Delta\varphi' = (A_{2o} + A_{2e})^2 - 2A_{2o}A_{2e}(1 - \cos\Delta\varphi') = A_1^2(\sin\theta\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)^2 - 2A_1^2\sin\theta\sin\alpha\cos\theta\cos\alpha(2\sin^2\frac{\Delta\varphi'}{2}) = A_1^2[\cos(\alpha - \theta)^2 - \sin 2\theta\sin 2\alpha\sin^2\frac{\Delta\varphi'}{2}]$ 。

(2).其中的 $\Delta\varphi'$ 不仅与波片厚度 d 有关，还与 P_1 、 P_2 的透振方向的相对取向有关。波片引入的相位差为： $\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ ；当 P_1 、 P_2 的透振方向处于波片的 x - 0 - y 系内不同的(一对)象限内时， A_1 从 P_1 透振方向乘以 $\cos\theta$ 投影到 y 轴，再从 y 轴乘以 $\cos\alpha$ 投影到 P_2 透振方向，在方向上两次均是一致向邻近象限旋转；而 A_1 从 P_1 透振方向乘以 $\cos(90^\circ - \theta)$ 投影到 x 轴，再从 x 轴乘以 $\cos(90^\circ - \alpha)$ 投影到 P_2 透振方向，在方向上两次均与之前相反地一致向另一个邻近象限旋转。 P_2 的透振直线所跨过的两个象限处于对位，而两个投影又投在 P_2 的透振直线的两侧，因而对应的 A_{2o} 、 A_{2e} 反向，此时要引入附加相位差 π 。【这一节的 P_1 、 P_2 的透振方向通常以波片的 x - 0 - y 系为参考系来定位，这也是自然而然的事情】

——当 P_1 、 P_2 的透振方向处于波片的 x - 0 - y 系内同(一对)象限内时， $A_1 \rightarrow A_o \rightarrow A_{2o}$ ，先后两次投影方向相反，从 P_1 透振方向所在的象限到了 P_2 透振方向所在的象限后，即回到了原 P_1 透振方向所在的象限；同样， $A_1 \rightarrow A_e \rightarrow A_{2e}$ 终也落到了 P_2 的透振直线的同一方位上。因此对应的 A_{2o} 、 A_{2e} 同向，此时不需要引入除波片因素外的附加相位差。

(3).因此 $\Delta\varphi'=\Delta\varphi+0$ 或 π 。在两块偏振片透振方向互相平行的情况下, $\alpha=\theta$, 透振方向跨同一对象限, 无附加相位差, $\Delta\varphi'=\Delta\varphi$, $I_{//}=A_1^2[\cos(0)^2 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi'}{2}] = A_1^2[1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}]$, 或者写成 $A_1^2[1 - \sin^2 2\theta \frac{1-\cos\Delta\varphi}{2}]$ 。——进一步地, 当 $\theta=45^\circ$ 时, $I_{//}=A_1^2[1 - \frac{1-\cos\Delta\varphi}{2}] = A_1^2[\frac{1+\cos\Delta\varphi}{2}] = \frac{A_1^2}{2}[1 + \cos\Delta\varphi]$ 。【 $I_{//}$ 表示 $P_1//P_2$ 时所对应的合成 I 】

在两块偏振片透振方向互相垂直的情况下, $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$, 透振方向跨异对象限, 有附加相位差, $\Delta\varphi'=\Delta\varphi+\pi$, 此时额外地有 $A_{2o}=A_1\sin\theta\cos\theta=A_{2e}=A_1\cos\theta\sin\theta$, 即两束光在 P_2 的透振方向上振幅相等, 因此 $I_{\perp}=2A_{2o}^2 + 2A_{2o}^2\cos\Delta\varphi'=2A_{2o}^2(1 + \cos\Delta\varphi') = A_1^2\sin^2 2\theta \frac{1+\cos\Delta\varphi'}{2} = A_1^2\sin^2 2\theta \cos^2 \frac{\Delta\varphi'}{2} = A_1^2\sin^2 2\theta \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = A_1^2\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ 。其还可写作 $A_1^2\sin^2 2\theta \frac{1-\cos\Delta\varphi}{2}$ 。——可见 $I_{//}+I_{\perp}=A_1^2$; 进一步地, 当 $\theta=45^\circ$ 时, $I_{\perp}=\frac{A_1^2}{2}[1 - \cos\Delta\varphi]$ 。

(4).现考虑单色光通过波片厚度一定的实验装置, 则 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ 中的 d 、 λ 、 $n_o - n_e$ 均为定值。若两块偏振片透振方向互相平行, 此时转动波片(而不是费力去转动两个偏振片), 使得 $\alpha=\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 时, $I_{//}=A_1^2[1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}]$ 最大, 为 A_1^2 。这是因为入射的线偏振光进入波片后成为 e 光($0, \pi$ 时)或 o 光($\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 时), 射出后仍为线偏振光, 振动面和强度和未通过波片前一样, 再通过同方向的 P_2 ——而转动波片使得 $\alpha=\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 时, $I_{//}=A_1^2[1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}]$ 最小, 为 $A_1^2\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$; 若两块偏振片透振方向互相垂直, 转动波片使得 $\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 时, $I_{\perp}=A_1^2\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ 最小, 为 0——而转动波片使得 $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 时, $I_{\perp}=A_1^2\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ 最大, 为 $A_1^2\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ 。

若波片厚度一定而用不同波长的光束来照射, 则 λ 与受其影响(主要是其中的 n_e)的 $n_o - n_e$ 不同, 导致 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ 不同, 于是透射光 $I=A_1^2[\cos(\alpha - \theta)^2 - \sin 2\theta \sin 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi'}{2}]$ 、 I_{\perp} 、 $I_{//}$ 的强弱随着波长的不同而变化。若这些波长的光同时照射, 不同波长的光有不同程度的光强, 同一振动面上混合起来不再是白色而是彩色(白光是由各波长的光按照一定强度比例(不一定均匀, 即不一定每个波长(得说波段)的能量相等, 因为波段与波段能量相等会导致波段间隔长短不一, 因而比例均匀一词没有实际含义)混合而成的)。

对于同样的复色光如白光, 不同厚度的波片也会出现不同的彩色(各种色彩的光的强度比例发生了变化, 各波长的光的光强重新调整了); 同样的复色光+指定波片, 却转动 P_1 或 P_2 改变 θ 或 α 时, 彩色也跟着变化。——将 P_1 、 P_2 正交时所得的彩色光, 与 P_1 、 P_2 平行时所得的彩色光混合, 会重新恢复为入射波片前的白色光——这是因为 P_1 、 P_2 正交时所得的彩色光中, 每一单色光的光强 $I_{\perp}+P_1$ 、 P_2 平行时所得彩色光中同一单色光的光强 $I_{//}$ =原来的定值 A_1^2 。因此当这两群单色光混合时, 合成的每个波长的单色光, 其 $I=I_{\perp}+I_{//}$, 均与原来(A_1^2)一致对应, 总体上会恢复到原来的光强比例, 变成白色光。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

若两种彩色混合起来能够成为白色，则每一种彩色都称为另一种的互补色。同一块波片，白光照射下，偏振片正交和平行时，所见的彩色不同，但它们总是互补的。——把其中一块偏振片连续转动，则视场中的彩色也就跟着连续变化。

(5).偏振光干涉时出现彩色的现象称为显色偏振或色偏振。显色偏振是检验双折射现象极为灵敏的方法。当 $n_o - n_e$ 差值很小时，用直接观察 o 光和 e 光的方法，很难确定是否有双折射现象的存在。但只要把这种物质薄片放在两块偏振片之间，用白光照射，观察是否有彩色出现，即可鉴定是否存在双折射。——还可根据不同矿石晶体在两个偏振片之间形成不同的彩色干涉图像，精确地鉴别矿石种类。

在装置中波片厚度均匀的情况下，随着偏振片 P_2 的转动，视场中只有均匀的亮暗变化(单色光入射)或色彩的变换(白光入射)，若要在视场中出现干涉条纹，得将厚度均匀的波片换成一块上薄下厚的尖劈形波片。波片各处厚度 d 不同，其所造成的相位差 $\Delta\varphi$ 也不同，用透镜使波片的出射光成像于光屏上，屏上相应各点的强度也不同，形成平行于尖劈棱边的等厚干涉条纹。

当偏振片正交时，对于某波长 λ 的单色光，正射入放置了尖劈形波片的装置时，满足 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = 2k\pi$ 的 d 使得 $I_{\perp} = A_1^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 0$ ，对应该 λ 的暗条纹；不同 λ 在相同 d 处的 $\Delta\varphi$ 在非周期处均不是 $2k\pi$ ，此 d 处的这些光的 I_{\perp} 不见得都是 0，因此在某种颜色的光的暗纹处，会有其他颜色的光的非暗纹，因而屏上出现彩色条纹。

(6).该偏振光干涉装置可以作为一种双折射滤波器。使 P_1 和 P_2 正交并与光轴成 45° ，入射光经过 P_1 后成为振动方向在 P_1 透振方向上的线偏振光，若没有波片存在，光不能通过与 P_1 正交的 P_2 。现放入对于指定波长的半波片，经过该波片后，该波长的光的振动方向转至的 P_2 透振方向，因而可以通过 P_2 。——若入射光中有其他波长的组分，波片便不是对这些波长的半波片，经过此波片后，这些光将变成不同的椭圆偏振光，可通过部分分量。这种装置就成为对该波长的带通滤波器。

若对于某一波长，波片为全波片，该波长的光经过该波片后， P_2 振动方向与透振方向正交，因而不能通过。其他波长的光可能有部分分量通过 P_2 ，这种装置便成为对该波长的带阻滤波器。

Chapter07.光的量子性

7.1 光的相速度和群速度

在测定介质的折射率时，有两种方法。第一种方法利用折射定律 $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$ ，令 $n_1 = 1$ ， $n_2 = n$ ，得到 $n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$ ；第二种方法利用 $n = \frac{c}{v}$ 。在测量水的折射率时，这两种方法给出的结果均是 1.33；然而在测量二硫化碳时，前者给出的正确结果为 1.64，后者给出的结果却为 1.75，偏大，这说明光在介质中的传播速度 v ，有着更为复杂的定义，我们只是将表象上测得的速度——光的群速度 u ，给当作相速度 v 带进去了（这里的群速度较相速度更小，因此算得的折射率偏大）；而实际上，这里的 v 在含义上却是光的相速度。是瑞利找到了这种差别的原因。

在波函数 $y = A \cos[w(t - \frac{r}{v}) + \varphi]$ 中， φ 表示初相，并且指的是坐标原点的初相（“原点” $\rightarrow r=0$ ；“初” $\rightarrow t=0$ ），而不是波源的初相（波函数与波源无关）。所以在选取坐标系原点位置的时候，总可以将其置于传播方向上的某个位置，使得初相 $\varphi=0$ ，并不影响波函数对整个波动的描述。

于是 $E = A \cos[wt - kr]$ ，其中 $k = \frac{w}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，且 k 、 w 均为分别关于 λ 和 v 的常量，均不随着 t 和 r 改变。——现在我们令其中的相位 $= wt - kr$ 不发生改变，那么 t 和 r 必须协变，才能使之恒为常量（至于为什么要这样做，是因为我们想得到在这种条件下的 t 和 r 的协变关系，以此得到一种与此操作相关的物理量）。这样我们对方程两边求微分就能得到 $w dt - k dr = 0$ ，即有 $\frac{dr}{dt} = \frac{w}{k} = v$ 。在我们这样的操作下，其中 $\frac{dr}{dt}$ 的含义便为（恒定）相位的传播速度，即相速度，其值为波的传播速度 $v = u\lambda$ 。【由于求了导，其实 $wt - kr$ 加上上一段的 φ 也没关系】

在无色散介质中，再同一平面内，组成脉动的无限多个不同频率、不同振幅的单色平面波，都以同一相速度传播，该脉动在传播过程中形状和传播速度均保持不变。但除了真空以外，任何介质通常都有色散的特征。——此时各个单色平面波，因频率 ω 不同而分别以不同的相速度 v 传播，此时由这些不同 w 和 k 的它们叠加而成的脉动，在传播过程中将不断改变形状。

观察这种脉动时，可以先认定它上面的某一特殊点，例如振幅最大的一点，用这一点在空间的传播速度代表整个脉动的传播速度。不过由于脉动形状的改变，这一特

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

殊点在脉动范围内也将不断改变其位置。按照瑞利的说法，这个脉动称为**波群**，脉动的传播速度称为**群速度**。

设脉动为振动方向相同的，两个频率 ω 、 ω 相近且振幅 A 相等的单色波叠加而成。 $E_1 = A \cos[\omega_1 t - k_1 r]$, $E_2 = A \cos[\omega_2 t - k_2 r]$ 。并且设 $\omega_1 = \omega_0 + d\omega$, $\omega_2 = \omega_0 - d\omega$, $k_1 = k_0 + dk$, $k_2 = k_0 - dk$, 则 $E = E_1 + E_2 = A(\cos[\omega_1 t - k_1 r] + \cos[\omega_2 t - k_2 r]) = 2A \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) + (\omega_2 t - k_2 r)}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 r) - (\omega_2 t - k_2 r)}{2} = 2A \cos(\omega_0 t - k_0 r) \cdot \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot r)$, 令其中的 $2A \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot r) = A_0$, 将这个缓变量作为其振幅项。其 $d\omega$ 和 dk 相对于 ω_0 、 k_0 均很小，则虽振幅也随着时间和空间改变，但很缓慢。【这里链接到 2.5 平面衍射光栅、2.4.2 双圆孔衍射中所提到的“调制”——此处的图景： dk 小所对应的空间周期长的一个波峰稀疏的正弦虚线，与其关于 x 轴对称的镜像虚线，共同作为限制 k_0 大的、空间周期短的、波峰密集的正弦实线的振幅包络面，缓慢地向前以 $v = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot d\omega$ 的速度前进；而在缓慢移动的两条宽大的基因主旋链(虚线)间，正弦实线快速地以 $v = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \omega_0$ 向同一个方向运动】

则 $E = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 r)$ 。设在该脉动上选定一个具有一定数值的 A_0 点(比如最大值)，计算这一点向前移动的速度，这个速度就代表脉动的传播速度(群速度)。它既是波的一定振幅向前推进的速度，也是在一定条件下(脉动形变不大且正常色散介质)运动着的脉动所具有的能量的传播速度。—— A_0 不变即意味着 $d\omega \cdot t - dk \cdot r = \text{常量}$ ，而 $d\omega$ 、 dk 均为分别关于 ω 和 λ 的常量，均不随着 t 和 r 改变，因此 $d\omega \cdot dt - dk \cdot dr = 0$ ，(注：之前没有提及， $d\omega$ 与 dk 因关系 $k = \frac{\omega}{v}$ 而产生了纽带)因此 $u = \frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = v + \frac{dv}{d\lambda} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{-\lambda^2}\right) = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$ ，(而 $d\lambda$ 与 dk 又因 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 产生了联系)。【比较 $v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$ 与 $v + k \frac{dv}{dk}$ ，可以发现其实可以直接利用函数 $k = \frac{\text{Const.}}{\lambda}$ 的性质： $\frac{k}{dk} = -\frac{\lambda}{d\lambda}$ 】

因此我们得到了任何脉动的一般瑞利公式： $u = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$ 。该式给出了群速 u 与相速 v 的关系。在折射率的定义 $n = \frac{c}{v}$ 中， n 为相速之比(这也是为什么我们在开始把相速记为 v 的原因——为了和公式中的 v 相协调一致)，并因 v 随入射波长 λ 而不同， n 也随 λ 变化， $dn = -\frac{c}{v^2} \cdot dv$ ，于是 $\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{c}{v^2} \cdot \frac{dv}{d\lambda}$ 。只有在色散介质中，才必须区分群速和相速，真空中二者没区别，因为光只有在真空中才没有色散，即 $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ 。

瑞利指出，在测定光速的各种实验方法中，所用的都不是一列绵延不断的波，而是把波分割成许多小脉动。实际在色散物质中测量到的都是群速而不是相速。在水中，所测范围内 $\frac{dv}{d\lambda}$ 很小；而在二硫化碳中， $\frac{dv}{d\lambda}$ 较大。

7.2 经典辐射定律

7.2.1 热辐射

物体处于一定温度的热平衡状态下的辐射叫热辐射。太阳、白炽灯中光的发射即属此类。化学发光、场致发光、光致发光、阴极发光，均为非热辐射。用实验来观察热辐射现象，可以发现热辐射的光谱是连续光谱，并且辐射谱的性质与温度有关。当物体被加热到 500°C 时，开始发出暗红色的可见光。随着温度不断上升，波长较短的辐射越来越多。大约在 1500°C 时就变成明亮的白炽光。——这说明同一物体在一定的温度下所辐射的能量，在不同光谱波段的分布是不均匀的，并且温度越高，光谱中能量最大的辐射所对应的频率也就越高。——当温度一定时，不同物体所辐射的光谱成分也有显著的不同。

单位时间内，从物体单位面积，向各个方向发出的，频率在 ν 附近 $(\nu, \nu + d\nu)$ ，单位频率(间隔) $d\nu$ 的辐射能 dW ，与 ν 和 T 有关，记为 $M(\nu, T) = \frac{dW}{d\nu}$ ，叫做物体在温度 T 时，发射频率为 ν 的，单色辐出度。【在大物中，曾将其记为 $M_{\lambda}(T)$ 。由于 λ 与介质有关，而 ν 与介质无关，因此用 ν 来描述诸如可见光区的 $390\text{nm} \sim 750\text{nm}/400\text{nm} \sim 460\text{nm}$ 更科学，虽然麻烦了点】【定义记起来有点麻烦，用数学描述记更好： $M(\nu, T) = \left(\frac{dW}{d\nu \cdot dt \cdot dS} \right)$ 】

频率在 $(\nu, \nu + d\nu)$ 的辐射照到某一温度为 T 的物体的单位表面上的辐射能为 dW (这里是受照射的，与之前的略有不同——与照度类似)，一部分能量被反射或透射，另一部分 dW' 被该单位表面吸收。定义 $A(\nu, T) = \frac{dW'}{dW}$ 为物体的吸收比(即吸收本领)。 $0 < A(\nu, T) < 1$ ，量纲为 1。【用数学描述记为： (ν, T) 对应的 $\frac{dW'}{dS}$ 与 $\frac{dW}{dS}$ 之比(对 t 和 ν 进行了积分?)】

将温度不同的物体放在一个密闭的理想绝热容器里，若容器内部是真空的，则物体与容器间，以及物体与物体之间，只能通过辐射和吸收来交换能量。当单位时间内的辐射体发出的能量比吸收的能量多时，它的温度就下降，这时辐射就减弱。反之，温度升高，辐射也将增强。经过一段时间后，所有物体包括容器在内，都会达到相同的温度，建立热平衡。此时各物体在单位时间内发出的能量等于吸收的能量。由此可见，在热平衡的情况下，单色辐出度大的物体，其吸收比也一定较大(???)。

1859 年, 基尔霍夫根据热平衡原理得出这样一个定律: $\frac{M(\nu, T)}{A(\nu, T)} = f(\nu, T)$, 该比值与物体的性质无关, 只是 ν, T 的(普适)函数。【即对于不同的物体, 在 (ν_0, T_0) 处的 $f(\nu_0, T_0)$ 相同, 因此 $M(\nu_0, T_0)$ 大的物体, 其 $A(\nu_0, T_0)$ 也较大】

7.2.2 黑体辐射

有一类物体既不反射也不透射光, 在任何温度 (T) 下吸收一切 (ν) 射来的电磁辐射 (即不论 (ν, T) 是多少, $A(\nu, T) = 1$), 曾叫做**绝对黑体**, 现简称**黑体**。处于热平衡时, 黑体具有最大吸收比 $= 1$, 此时 $\frac{M(\nu, T)}{A(\nu, T)} = M(\nu, T) = f(\nu, T)$, 此时**普适函数** $f(\nu, T)$ 就是**黑体的单色辐出度** $M_b(\nu, T)$ 。

一个表面开有小孔的空腔, **洞**就是黑体(盒内表面有反射+吸收, 所以盒子并不是黑体)。

研究 $M_b(\nu, T)$ 就是研究 $f(\nu, T)$, 找出这个函数的形式, 就能从理论上解释实验所得的黑体辐射能量分布曲线, 这是热辐射的基本问题。1879 年, 斯特潘发现**总辐出度** $M(T) = \int_0^\infty M_b(\nu, T) \cdot d\nu = \sigma \cdot T^4$, 【数学的定义上, $M(T) = (\nu, T)$ 对应的 $\frac{dW}{dt \cdot dS}$, 有点像 dI , 能流密度的微分量】该规律叫做**斯特潘-波尔兹曼定律**。【高温时再想让温度升高则很困难——因为保持热平衡都很困难, 高温时辐射功率很大, 则补充功率也得很大, 才能至少保证温度不衰减】

1. 韦恩位移定律

维恩仅将 $M_b(\nu, T)$ 的形式稍微具体化了一点(——**短波一致**), 没有完全确定下来。不过通过它可知, 对于每个确定的温度 T , $M_b(\nu, T)$ 都有一个最大值, 对应其在光谱中的位置(横坐标) λ_m , 利用 $\frac{dM_b(\nu, T)}{d\lambda} = 0$, 可得到 $\lambda_m T = b$ 。【在 $\lambda - M_b(\lambda, T)$ 图中, $T \nearrow$ 时 $\lambda_m \searrow$, 最大值点左移←至红外光波段部分, 进入可见光区右区间端点, 然后继续左移, 出可见光区, 进入紫外光区。又由于 $M(T) = \sigma \cdot T^4$, 所以最大值点理也应**协调于曲线总面积** $M(T)$, 随着 T 的 \nearrow 而同时也上移↑; 因此总的来说, 最大值点向着左上↖移动。】

2. 瑞利-金斯公式

1900 年, 瑞利与金斯试图把能量均分定理应用到电磁辐射能量密度按频率分布的情况中。他们假设空腔处于热平衡时的辐射场将是一些驻波, 根据能量均分定理, 每一列驻波的平均能量都为 kT , 与频率无关, 这样可算出 $M_b(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot kT$, 于是根据

$M_{\lambda}(T) \cdot d\lambda = M_{\nu}(T) \cdot d\nu$, 以及 $\nu = \frac{c}{\lambda}$ 所限定的 $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} \cdot d\lambda$, 可得 $M_{\lambda}(T) = M_{\nu}(T) \cdot \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot kT \cdot \frac{c}{\lambda^2} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \cdot kT$ 。——长波一致。

7.3 普朗克辐射公式

7.3.1 能量量子假说

普朗克分析瑞利-金斯公式所揭露的矛盾, 指出“紫外灾难”这个“荒谬”是由在频率 $\rightarrow \infty$ 时, 驻波平均能量仍被看作 kT 所造成的——他发现经典辐射定律, 即能量均分定理所指出的驻波平均能量等于 kT 这一点, 只有在频率 $\rightarrow 0$ 时才是正确的; 当频率 $\rightarrow \infty$ 时, 要使得理论与实验相符合, 平均能量应当趋于零。

导致能量按频率均分的结果, 是因为在经典理论中, 认为振子的能量可连续变化的缘故。因此普朗克提出: 器壁振子的能量不能连续变化, 只能处于某些特殊的状态。(后来, 称这些可以允许的能量值为能级, 能量的不连续变化就叫做能量的量子化, 这个允许变化的最小能量单位为 E_0 称为量子或量子)

为了得到与实验相一致的理论公式, 普朗克还认为量子的能量 E_0 必须与频率成正比: $E_0 = h\nu$ 。其中 h 为一个与频率无关也与辐射性质无关的普适量, 叫做普朗克常量, 现在精确测定的 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ 。

根据波尔兹曼分布, 一个振子在一定温度 T 时, 处于能量为 E 的状态的概率正比于(我们不需要知道其系数 or 准确的概率分布, 看看我们接下来是怎么操作的) $e^{-\frac{E}{kT}}$ 。

而振子的能量只能取 $E = nE_0 = nh\nu$, 于是每个振子的平均能量为 $\overline{E_{\nu}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E \cdot e^{-\frac{E}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) \cdot e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{1/(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})} = \frac{h\nu \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{1/(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})} = \frac{h\nu \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{mh\nu}{kT}} / (1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})}{1/(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})} = h\nu \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{mh\nu}{kT}} = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 。【其中的 $\frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}}}$ 才相当于概率, 有了这样的分母才相当于将其归一化了】

当 $\nu \rightarrow 0$ 时, $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \rightarrow 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{(\frac{h\nu}{kT})^2}{2!} + \dots \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$, 此时 $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$, 这时 $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx kT$, 即此时 $\overline{E_{\nu}} \rightarrow kT$; 而当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 为幂函数比指数函数型, 极限为 0, 即此时 $\overline{E_{\nu}} \rightarrow 0$ 。 $\overline{E_{\nu}}$ 对 ν 的函数的普朗克结果表明, 随着频率的增加, $\overline{E_{\nu}}$ 从 kT 连续地降为 0; 而经典结果是个与 ν 无关的常量 kT 。

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

因此我们用 $\overline{E_v}$ 的普朗克结果去代替 $\overline{E_v}$ 的经典结果 kT 【以前的 $\overline{E_v}=kT$ 应该是以上类似过程的积分的结果，只需要过程上替换掉级数的求和，以及能量子假说】，便可得 $M_b(v, T) = \frac{2\pi v^2}{c^2} \cdot kT = \frac{2\pi v^2}{c^2} \cdot \overline{E_v} = \frac{2\pi v^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{kT}-1} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{kT}-1}$ 。——单色能量密度 $\omega(v) = \frac{4}{c} \cdot M_b(v, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{kT}-1}$ 。

7.4 光电效应

7.4.1 光电效应及其实验规律

1886~1887年，赫兹在证实电磁波的存在、以及光的麦克斯韦电磁理论的实验过程中，已经注意到：当两个电极之一受到紫外线照射时，两电极之间的放电现象就比较容易发生。直到发现电子后，人们才知道这是由于紫外线的照射使大量电子从金属表面逸出的缘故。电子在光的作用下从金属表面发射出来的现象称为**光电效应**，逸出的电子称为**光电子**。

研究光电效应的实验装置：阴极 K 和阳极 A 被封闭在真空管内，两极之间加一可变电电压，用于加速或阻碍释放出来的电子。光通过石英小窗照射到阴极 K 上，在光的作用下，**电子从阴极 K 逸出，并受到电场的加速而形成电流**。这种电流称为**光电流**。

光和光电流之间有一定的关系：在**入射光强度与频率不变**的情况下，**单位时间内从阴极 K 射出的光电子数不变**，**当加速电压 V 增加到一定值时，这些单位时间内射出的光电子(n 个)全部到达阳极 A**，光电流达到饱和值 $I_m = ne$ 。【加速电压 V 在非最大值时，各逸出电子方向不同，水平初速度不同，到达时间不同，且有些到不了阳极 A】

当电压 V 减小到零，且开始反向，发现光电流并没有降为 0，这说明从阴极 K 射出的光电子具有初动能。当反向电压等于**遏止电压 $-V_g$** 时，光电流降为 0，此时具有最大初速度的光电子也刚好不能到达阳极 A，此时 $\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_g$ 。【 $V_g > 0$ 】

在用**相同频率(>截止频率)不同强度(自变量 2)**的光去照射阴极 K 时，得到的各条 I-V**(自变量 1)**曲线显示出，对于不同强度的光，纵坐标**(因变量)**光电流 I=0 时，各强度光的 I-V 曲线与 V 轴交点相同，均为 **$(-V_g, 0)$** ，即它们的**遏止电压 $-V_g$** 均相同。这说明**同频率、不同强度的光产生的光电子的最大初动能是相同的**。——另外，还可看出，对于任何一个**相同的横坐标 V(自变量 1)值**，入射光强度更大的曲线所对应的纵坐标光电流的强度 I 均更高【之后才能解释：入射光强的功率大，即单位时间射入的能量 $h\nu$ 多，即单位时间入射的光子多，则单位时间吸收光子跑出的电子多~】。

[Every Mile away/...](#)

[This Empty Space Return Your Solitude/...](#)

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

由于在用相同频率、不同强度的光去照射阴极 K 时，遏止电压 $-V_g$ 均相同——因此我们在设计实验，用不同频率的光(自变量)，得到的 $u-V_g$ 曲线时(纵坐标 V_g 一般 >0)，不需要考虑入射光强度(因为对于每个 u 来说各强度的入射光对应的 V_g 相同)。实验结果发现，频率 u 越高， V_g 越大，并且它俩成线性关系；额外地，频率低于截止频率(红线频率) u_0 的光，不论强度多大，都不能产生光电子；对于不同的材料，截止频率不同。

1.总结所有的实验结果，光电效应的规律可归纳为如下四点：

(1).饱和电流 I_m 的大小与入射光的强度成正比。即单位时间内逸出的光电子数目与入射光的强度成正比(·对于不同的入射光强度，加速电压的饱和值可能不同(但差不多)，在对应的加速电压达到饱和值时(或者之后继续过饱和)，K 极逸出的=A 极接收的——因此饱和电流 $I_m \propto$ 接收的=逸出的 \propto 入射光强)。

(2).光电子的最大初动能(或遏止电压； $\frac{1}{2}mv_m^2=eV_g$)，与入射光强度无关，只与入射光频率有关。频率越高，光电子能量越大。

(3).频率低于 u_0 的入射光，无论光的强度多大，照射时间多长，都不能使光电子逸出。

(4).光的照射和光电子的逸出几乎是同时的。在测量的精度范围内($<10^8$)，观察不出这两者间存在滞后现象。

7.5 爱因斯坦的量子解释

7.5.1 爱因斯坦的光子假设及其光电方程

普朗克在处理黑体辐射问题时，只把腔壁的振子能量量子化，墙壁内部的辐射场仍然看作是电磁波。爱因斯坦在光电效应的研究中指出：光在传播过程中具有波动的特性，而光在和物质相互作用的过程中，其能量集中在一些叫做光量子(光子)的能量子上。从光子的观点来看，产生光电效应的光子是光子流，单个光子的能量 $E=h\nu$ 。

把光子的概念应用于光电效应时，爱因斯坦还认为一个光子的能量是传递给金属中的单个电子的。电子吸收一个光子后，把一部分能量用于挣脱金属对它的束缚，余下的一部分变为电子离开金属表面后的动能，按照能量守恒定律应有 $h\nu=\frac{1}{2}mv^2+W$ 。

由于 $\frac{1}{2}mv^2 + W$ 相加是个常量, W 的最小能量 W_{\min} 与光电子的最大动能 $\frac{1}{2}mv_m^2$ 相对应, 因此有 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W_{\min}$ 。又因 $\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_g$, 上式也可写作 $h\nu = eV_g + W_{\min}$ 。其中 W_{\min} 为光电子逸出金属表面所需的最小能量, 称为**逸出功**。

7.5.2 对光电效应的量子解释

(1).入射光的强度, 即光在单位时间单位面积内的能量【电磁波的观点: 强度 $I = \text{平均能流密度} \bar{S} = (\omega_e + \omega_m) \cdot v = EH = \frac{P}{ds} = \frac{W_e + W_m}{ds \cdot dt}$; 粒子观点: $I = Nh\nu$, $N = \frac{\uparrow}{ds \cdot dt}$ 】, 而每个光子的能量是确定的, 因此**入射光强度**正比于**单位时间到达金属表面的光子数目**, 而**逸出的光电子数**又与光子数目成正比(**一个电子吃一个光子**), 这些逸出的光电子全部到达阳极 A 便形成了**饱和电流**。

(2).由 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W_{\min}$ 可见, 对于给定的金属, W_{\min} 一定, 光子的 ν 越高, 光电子的最大动能 $\frac{1}{2}mv_m^2$ 就越大。

(3).若入射光频率 ν 过低, 使得 $h\nu < W_{\min}$, 则电子无法脱离金属表面。即使入射光很强, 即这种频率的光子数很多, 仍不会产生光电效应。只有当 $\nu > \nu_0 = \frac{W_{\min}}{h}$ 时, 电子才能脱离金属。这个极限频率 $\nu_0 = \frac{W_{\min}}{h}$ **对应的波长**称为光电效应的**红线**。

(4).金属中的电子能够一次全部吸收入射的光子, 因此光电效应的产生无需积累能量的时间。

7.5.3 遏止电压与入射光频率的关系

根据 $h\nu = eV_g + W_{\min}$, V_g 关于 ν 的函数, 在直角坐标系下为一条直线, 斜率与金属材料性质无关。并可利用此方程测得普朗克常量 h 。

一般来说, 阴极 K 和阳极 A 都是由金属材料制成的, 但所用材料并不一定相同。因此阴极和阳极的逸出功就不同。当两个电极用导线连接时, 会有**接触电势差**存在。电磁学中介绍过: 回路中的总接触电势差只决定于两端的金属电极。于是 $\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_g$ 会被修正为 $\frac{1}{2}mv_m^2 + W_k - W_a = eV_g$, 于是将 $\frac{1}{2}mv_m^2$ 带入 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W_{\min}$, 即有 $h\nu = eV_g + W_a$ 。【其中 $W_{\min} = W_k$, 表示阴极的逸出功, W_a 表示阳极的逸出功】

也就是说, 密立根所得的实验曲线, 直线的截距并不是阴极的逸出功, 而是阳极的逸出功。这一点密立根后来利用相同的阳极和不同的阴极的组合做了一系列实验,

证明是正确的。不过密立根通过斜率来确定 $\frac{h}{e}$ 值的主要成果并不受影响，因其与逸出功的正确与否无关。

7.5.4 光子的质量和动量

光子既然具有一定的能量，就必须有质量。根据质能关系式 $E=mc^2$ ，可知 $m=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}$ 。又因质速关系 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ，可得 $\frac{h\nu}{c^2}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ，因此 $m_0=0$ 。由于相对于光子静止的参照系是不存在的，所以光子的静止质量等于 0 也是合理的(因为你没法否定他，你无法观察到它的失败)。在 m_0 是否等于 0 这一点上，光子和普通的物质有显著的区别。

根据能量动量关系式： $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$ ，加上 $m_0=0$ ，可得 $p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}$ ；或者根据 $E=mc^2$ ，可得到 $p=mc=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}$ 。

7.5.5 光压

从光子具有动量这一假设出发，除了能解释康普顿效应之外，还可以直接说明光压的作用。当光子流遇到任何障碍物时，应当在障碍物上施加机械压力，正如气体分子在容器壁上的碰撞形成气体的压力一样。光压就是光子流产生的压强。

列别捷夫首先于 1900 年做了光压的实验，证明了光压的存在。光压存在这一事实本身具有十分重大的意义。这个事实证明，光不但具有能量，而且确实还有动量，这有力地直接证明了光的物质性——证明了光和电子、原子、分子等实物一样，是物质的不同形式。

从光子的观点来看，光压的产生是光子把它的动量传给物体的结果。那么单色电磁波的强度为 $I=Nh\nu$ (相当于能流密度)，其中 N 表示：单位时间内通过单位面积的光子数。同样的道理，由于单个光子的动量为 $\frac{h\nu}{c}$ ，因此动量流密度 $p=N\frac{h\nu}{c}=\frac{I}{c}$ 。

若单色光垂直入射到全反射镜面上，则动量流密度的改变量 $\Delta p=2p=2\frac{I}{c}$ 。根据 $F=\frac{dp}{dt}$ ，我们有压强 $=\frac{F}{S}=\frac{dp}{dt \cdot dS}=\Delta p=2\frac{I}{c}$ 。麦克斯韦也曾用电磁波的观点论证了光压的存在，并从理论上计算出了光压的值。但光压可更直接地用光子具有动量来解释。

7.6 康普顿效应

光的量子的、微粒的性质，尤其是光子具有能量、质量、动量以及光在和物质发生作用时上述量的守恒性，在康普顿于 1922 年观察的 X 射线散射中，更明显地表现出来。

康普顿在研究碳、石蜡等物质中的这种散射时，发现散射谱线中除了波长和原射线相同的成分以外，还有一些波长较长的部分，两者的波长差随着散射角的大小而变。这种波长改变的散射称为康普顿效应。

从波动理论来看，散射光是由电子受到入射光的作用做受迫振动，并向各个方向发出的次波所引起的。受迫振动的频率和散射光的频率都应与入射光频率相同。显然散射光波长发生改变的康普顿效应又是难以用波动观点来解释的。

7.6.1 康普顿效应

在轻原子中，电子和原子核的联系相当弱(电离能约为几个电子伏特)，其电离能量和 X 射线光子的能量($10^4 \sim 10^5 \text{ eV}$)相比，可忽略不计。因此对于所有的轻原子，都可以假设散射过程仅仅是光子和电子的相互作用。——认为电子是自由的(势能虽负，但不大；或理解成 W_{\min} 很小 -)、静止的(相对于光子而言，速度太小忽略不计)。假设光子与受原子(核和其他核外电子)束缚较弱的电子或自由电子之间的碰撞类似完全(能量守恒)弹性碰撞。并称电子被反冲、光子被散射，反冲角为 φ (对应 $m\mathbf{v}$ 与 $\frac{h\nu}{c}\mathbf{e}_0$ 的夹角)、散射角为 θ (对应 $\frac{h\nu'}{c}\mathbf{e}$ 与 $\frac{h\nu}{c}\mathbf{e}_0$ 的夹角)。在动量三角形中， φ 的邻边为 $m\mathbf{v}$ 与 $\frac{h\nu}{c}\mathbf{e}_0$ ，因此其对边为 $\frac{h\nu'}{c}\mathbf{e}$ ；同理 θ 的对边为 $m\mathbf{v}$ 。

入射光子的动量为 $\frac{h\nu}{c}\mathbf{e}_0$ ，散射光子的动量为 $\frac{h\nu'}{c}\mathbf{e}$ ，和碰撞之后的电子的动量 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ ，构成动量三角形。于是 $(p)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta$ ，于是有 $E^2 - E_0^2 = (pc)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta = (h\nu - h\nu')^2 + 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta)$ 【 E 、 E_0 、 p 均是指的电子的】，又因碰撞前后能量守恒： $h\nu + E_0 = h\nu' + E$ ，或者写成电子动能 $= E - E_0 = h\nu - h\nu'$ ，将两式相除，得：

$$E + E_0 = \frac{(h\nu - h\nu')^2 + 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta)}{h\nu - h\nu'} = h\nu - h\nu' + \frac{2h\nu\nu'}{v - v'}(1 - \cos\theta), \text{ 将其与: } E - E_0 = h\nu - h\nu' \text{ 相减, 得到 } E_0 = \frac{h\nu\nu'}{v - v'}(1 - \cos\theta), \text{ 于是 } \frac{v - v'}{\nu\nu'}c = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta), \text{ 即有 } \frac{c}{v'} - \frac{c}{v} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta), \text{ 即有 } \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta), \text{ 也写作 } \Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \text{ 其中 } \frac{h}{m_0c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m 称为康普顿波长 } \lambda_c \text{ (入射光子的能量 } h\nu = \text{ 电子的静止能量 } E_0 \text{ 时(碰撞后入射光子)}$$

Every Mile away/...

This Empty Space Return Your Solitude/...

其它作品下载链接. (click here) Turn up the sound. (my tunes) chzh_xie@foxmail.com. (contact)

将在 x 方向上相对静止), $\theta=90^\circ$ 所对应的入射光子的波长: 若 $\lambda=\lambda_c$, 则 $\lambda'=2\lambda$, 则 $\nu=2\nu'$, 又因 $\theta=90^\circ$, 则由 $E_0=\frac{h\nu\nu'}{\nu-\nu'}$ (1 - $\cos\theta$) 可得 $h\nu=E_0$; 反过来用 $h\nu=E_0$ 和 $\theta=90^\circ$, 也可得到 $\nu=2\nu'$ 、 $\lambda'=2\lambda$ 以及 $\lambda=\lambda_c$ 。——利用 θ 求出 $\Delta\lambda$ 、 λ' 后, 便得到了 $\frac{h\nu}{c}$ 、 $\frac{h\nu'}{c}$, 利用动量三角形中的 SAS 余弦定理求出 p , 以及正弦定理, 可求出 ϕ 。

可见散射波长改变量 $\Delta\lambda$ 的数量级为 10^{-12}m 。所以可见光以及波长更长的无线电波等电磁波来说, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ 很小, 康普顿效应不显著。只有波长较短的电磁波, 量子效应才较为显著。而当光子和原子中束缚很紧的电子发生碰撞时, 相当于与整个原子发生碰撞, 由于原子的质量很大, 根据碰撞理论, 光子碰撞后不会显著地失去能量, 因而散射波的频率几乎不变, 所以在散射波中也有与入射波波长相同的射线。重原子中内层电子束缚很紧, 相对原子质量大的物质康普顿效应不明显。

在光电效应中, 入射光是可见光和紫外线, 这些光子的能量不过几个电子伏, 和金属中电子的束缚能(逸出功)有相同的数量级。所以在光电效应中, 光子与物质相互作用时, 必须考虑光子、电子、原子核三者的能量和动量变化。但是由于原子核的质量比电子大几千倍以上, 核的能量变化很小。爱因斯坦方程只表现出光子和电子之间的能量守恒, 没有原子核的, 也没有光子电子的动量守恒关系, 就是因为这个。此时已经不是完全弹性碰撞而类似于完全非弹性碰撞了? ——可见光子能量和电子所受束缚能量相差不大时, 主要体现光电效应; 光子能量大大超过电子所受的束缚能量时, 主要出现的是康普顿效应。

7.7 德布罗意波

对于光子, $p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$, $E=h\nu$ 。对于实物粒子, 也应有如此的波动性。不过物质波是概率波, 与经典物理学中研究的波截然不同: 机械波是机械振动在空间的传播, 而德布罗意波则用于对微观粒子运动的统计描述。所以 $E=h\nu$ 和 $p=\frac{h}{\lambda}$ 中的频率 ν 和波长 λ , 均有崭新的物理意义: 它们用于描述微观粒子运动的统计规律。

Chapter08.现代光学基础

8.1 光与物质相互作用

8.1.1 原子发光机理

当固体和气体被加热到很高温度时，就会发光。太阳和遥远的星球，处在高温等离子态，是宇宙中最卓越的光源。但是有些物质并非因温度升高而发射可见光(eg:受激辐射)。从气体分子、液体和固体内部发出的光，在许多方面和单个原子发光类似。我们先简要介绍一下原子的发光机理，再讨论激光方面的问题。

波尔提出的理论中，①.定态(电子绕核运动时不辐射能量)②.角动量量子化 $mv \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi}$ (这是因为驻波假设：只有圆周运动周长为波长 λ 的整数倍的那些轨道才是稳定的，即根据 $p = \frac{h}{\lambda}$, $\lambda = \frac{h}{mv}$, $2\pi r = n \cdot \frac{h}{mv}$, 于是便有 $mv \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi}$)。

根据波尔理论，类氢原子的原子核带电 $+Ze$ ，原子核对电子 $-e$ 的静电吸引力=电子绕核向心力，即有 $m \frac{v^2}{r} = k \frac{Ze^2}{r^2}$ ，在国际单位制中， $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 。于是 $rmv^2 = k \cdot Ze^2$ ，一方面得 $E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{k \cdot Ze^2}{r}$ ，另一方面用其除以 $mv \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi}$ ，便得 $v = \frac{k \cdot Ze^2}{n \cdot \frac{h}{2\pi}} = \frac{2\pi e^2 Zk}{n \cdot h}$ ；将其代回 $rmv^2 = k \cdot Ze^2$ ，便有 $r = \frac{k \cdot Ze^2}{m \left(\frac{2\pi e^2 Zk}{n \cdot h} \right)^2} = \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot me^2 Zk}$ 。又因电子势能为 $E_p = -k \frac{Ze^2}{r}$ ，则电子总能量 $E_n = E_p + E_k = -k \frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k \cdot Ze^2}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k \cdot Ze^2}{\left(\frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot me^2 Zk} \right)} = -2\pi^2 \cdot \frac{me^4 Z^2 k^2}{n^2 \cdot h^2}$ 。

总能量是负值，表示电子要脱离原子，必须对其做功。 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, $r = \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot me^2 Zk}$ ， n 越大，能量越大，半径越大。电子从 i 能级跳跃到 j 能级($i > j$)时，电子会发射能量为 $h\nu = |E_i - E_j|$ 的光子；当电子吸收能量为 $h\nu = |E_i - E_j|$ 的光子时，电子从 j 能级跳跃到 i 能级($i > j$)。最低能量 $E_{\min} = E_1$ 对应的状态称为基态，其他状态称为激发态。

8.1.2 爱因斯坦关于受激辐射的预言

(1).**受激吸收、自发辐射、受激发射**：光与物质的相互作用，可以归结为光子被原子吸收，或者原子辐射光子。若一个原子开始处于基态 E_1 ，一个能量为 $h\nu_{21}$ 的光子接近这个原子，则原子可能吸收这个光子，使得其自身跃迁到激发态 E_2 。并非任何能量的光子均能被一个原子吸收，只有能量正好等于原子的能级间隔的光子才能被吸收。

受激吸收：设处于基态 E_1 的原子数密度为 n_1 ，光辐射能密度为 $u(\nu)$ ，(由于原子数密度和光子数密度互为过剩?)则单位体积单位时间内吸收光子而跃迁到激发态 E_2 去的原子数(or 单位时间内跃迁的原子数密度) n_{12} 应该与 n_1 和 $u(\nu)$ 成正比，因而有 $n_{12} = B_{12} \cdot n_1 \cdot u(\nu)$ 。其中 B_{12} 称为**受激吸收爱因斯坦系数**， $B_{12} \cdot u(\nu)$ 称为吸收速率，用 ω_{12} 表示；于是有 $n_{12} = \omega_{12} \cdot n_1$ 。

(2).依经典力学的观点，物体如果势能很高，它将是不稳定的。同样，处于激发态的原子也是不稳定的。它们在激发态停留的时间一般均非常短，约在 $10^{-8}s$ 的数量级。在不受外界的影响时，它们会自发地返回到基态去，并放出光子。这种自发地从激发态返回较低能态而放出光子的过程叫做**自发辐射**过程。

自发辐射：单位体积单位时间的自发辐射光子数为： $n_{21} = A_{21} \cdot n_2$ 。其中 A_{21} 称为**自发辐射爱因斯坦系数**。自发辐射的特点时这种过程与外界作用无关[所以式中没有出现 $u(\nu)$]。

各个原子的辐射都是自发地、独立地进行的，因而各个原子发出的光在**发射方向**和**初相位**上都是不同的。除激光器光源外，普通光源的发光都属于自发辐射。——加上了高压而放电时，部分氖原子被激发到**各个激发态**，从激发态跃迁回基态时，便发出多种频率的单色光。因而普通光源发出的光，**频率成分**十分复杂，**发射方向**也分散在 4π 球面度的立体角内，各成分的**初相位**也各不相同，因而不是相干光。

(3).处于激发态的原子，若在外来光子(外来电磁场)的影响下，引起从高能态向低能态的跃迁，并把两个状态之间的能量差以辐射光子的形式发射出去，则这种过程叫**受激发射**。**与自发辐射的区别**：①.光子频率 or 能量必须正好满足 $h\nu_{21} = E_2 - E_1$ ，才能引起**受激辐射**；②.并且**受激辐射**发射出来的光子与外来光子具有相同的**频率、发射方向、偏振态、相位**。

受激发射：单位体积单位时间的受激发射光子数为： $n'_{21} = B_{21} \cdot n_2 \cdot u(\nu) = \omega_{21} \cdot n_2$ 。

(4).光和原子作用时,必然同时存在受激吸收、自发辐射、受激发射三个过程。达到平衡时,单位体积单位时间内通过吸收过程从基态跃迁到激发态的原子数,等于从激发态通过自发辐射和受激辐射和跃迁回基态的原子数,即有: $n_{12} = n_{21} + n'_{21}$ 。

即有: $B_{12} \cdot n_1 \cdot u(\nu) = A_{21} \cdot n_2 + B_{21} \cdot n_2 \cdot u(\nu)$, 于是 $u(\nu) = \frac{A_{21} \cdot n_2}{B_{12} \cdot n_1 - B_{21} \cdot n_2} = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{n_1}{n_2} - B_{21}}$, 在热平衡状态下, 粒子数密度按照能量的分布遵从波尔兹曼定律, 即有 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_2}{kT}}} = e^{-\frac{E_1 - E_2}{kT}} = e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}$, 于是 $u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{21} \frac{B_{12}}{B_{21}} e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}} - 1}$ 。对于黑体辐射来说, 在热平衡条件下, 腔内的辐射场应是不随时间变化的稳定分布, 此时腔内的辐射能密度可认为是腔中心附近单位体积从周围腔壁所获得的辐射能量。现用其 $\omega(\nu) = u(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 对比 $[\nu_{21} = \nu]$, 即可得到: $\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1$, $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$ 。于是我们有 $B_{12} = B_{21} = B$ 。

8.2 激光原理

8.2.1 粒子数反转

一个光子 $h\nu$ 射入一个原子体系后, 在离开该原子体系时, 成了两个或更多个光子, 而且这些光子的特征是完全相同的, 这就是光放大。激光是通过辐射的受激发射来实现光放大。但是光与原子体系相互作用时, 总是同时存在受激吸收、自发辐射、受激发射三个过程。因此需要创造特定条件, 使得受激辐射胜过吸收和自发辐射, 在三个过程中占主导地位。

$\frac{dE}{dt \cdot S \cdot dz} = \frac{dE}{dt \cdot dV}$ = 单位时间单位体积内产生的净光能量 = 受激发射的 - 吸收的 = $(n'_{21} - n_{12})h\nu = (B_{21} \cdot n_2 \cdot u(\nu) - B_{12} \cdot n_1 \cdot u(\nu))h\nu = (n_2 - n_1)B \cdot u(\nu)h\nu$, 而光强 $I(\nu) = c \cdot u(\nu) = \frac{E}{dt \cdot S}$, 因此一方面 $u(\nu) = \frac{I(\nu)}{c}$, 另一方面 $\frac{dI(\nu)}{dz} = \frac{dE}{dt \cdot S \cdot dz} = (n_2 - n_1)B \cdot u(\nu)h\nu$, 联立这两个式子, 便有 $\frac{dI(\nu)}{dz} = (n_2 - n_1)B \cdot \frac{I(\nu)}{c} h\nu$ 。

又因之前得出过 $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$, 因此 $B = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \cdot A_{21}$, 代入即有 $\frac{dI(\nu)}{dz} = (n_2 - n_1) \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \cdot A_{21} \cdot \frac{I(\nu)}{c} h\nu = (n_2 - n_1) \frac{c^2 \cdot A_{21}}{8\pi \nu^2} \cdot I(\nu)$ 。令其中的 $(n_2 - n_1) \frac{c^2 \cdot A_{21}}{8\pi \nu^2} = \alpha(\nu)$, 则 $\frac{dI(\nu)}{dz} = \alpha(\nu) \cdot I(\nu)$ 。

该微分方程的解为: $I(\nu, z) = I_0(\nu) \cdot e^{\alpha(\nu)z}$ 。

当 $\alpha(\nu) > 0$ 时, 即 $n_2 - n_1 > 0$ 时, 才能使得光强按指数规律增强, 即受激发射起主导作用; 否则光强将按指数规律衰减。在通常情况下, 原子体系处于热平衡状态, 据

波尔兹曼能量分布, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_2}{kT}}} = e^{-\frac{E_1-E_2}{kT}} = e^{\frac{h\nu_{21}}{kT}} \gg 1$, 即 $n_2 \ll n_1$, 此时吸收的能量总是大于受激辐射的能量, 即吸收过程总是胜过受激辐射过程。

所以我们希望通过某种方法破坏粒子数的热平衡分布, 使得 $n_2 > n_1$, $\alpha(\nu) > 0$, 受激辐射过程胜过吸收过程, 此时粒子数分布不再是平衡分布, 这种分布称作**粒子数反转**。

8.2.2 实现粒子数反转的物质

首先要看这种物质是否具有合适的能级结构, 其次要看是否具备必要的能量输入系统——以便不断地从外界供给能量, 使得该物质中有尽可能多的粒子吸收能量后, 从低能级不断跃迁到高能级; 这一过程叫“激励”、“激发”、“抽运”、“泵浦”。现假定抽运过程能够保证满足, 看看什么样的能级结构才可能实现粒子数反转。

若某种物质只有两个能级, 用有效的抽运手段不断地向这个二能级系统提供能量, 使得处于 E_1 的原子, 尽可能多且快地激发到激发态 E_2 去, 那么是否有可能造成 $n_2 > n_1$ 的局面呢? ——达到稳定时, 粒子数密度 n_2 不再变化, 即有 $\frac{dn_2}{dt} = B_{12} \cdot n_1 \cdot u(\nu) - B_{21} \cdot n_2 \cdot u(\nu) - A_{21} \cdot n_2 = 0$, 由于 $B_{12} = B_{21} = B$, 且 $\omega_{12} = B_{12} \cdot u(\nu)$ 、 $\omega_{21} = B_{21} \cdot u(\nu)$, 所以 $\omega_{12} = \omega_{21} = \omega$, 因此有 $\omega(n_1 - n_2) - A_{21} \cdot n_2 = 0$ 。于是 $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega}{A_{21} + \omega}$ 。可见不论激励手段多么好, n_2 总小于 n_1 。因此对二能级物质来讲, 不能实现粒子数反转。

三能级系统(并非指物质的原子只含有三个能级, 而是指与激光器运转过程直接有关的能级)是否能在其中的某两个能级之间形成粒子数反转呢? 理论和实验结果都表明这是可行的。红宝石激光器就是一个三能级系统的激光器。——假定原子的各个自发辐射中, 从 E_3 回到 E_2 的速率 A_{32} 很大, 远远大于 A_{31} 和 A_{21} , 则当抽运速率 ω_{13} 远远大于 ω_{23} 和 ω_{12} 时, 能级 E_2 和 E_1 之间就可能形成粒子数反转。——达到稳定时, $\frac{dn_3}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$, 即有 $\frac{dn_3}{dt} = \omega_{13} \cdot n_1 + \omega_{23} \cdot n_2 - A_{31} \cdot n_3 - A_{32} \cdot n_3 = 0$, 以及 $\frac{dn_2}{dt} = \omega_{12} \cdot n_1 + A_{32} \cdot n_3 - A_{21} \cdot n_2 - \omega_{23} \cdot n_2 = 0$ 。可利用 $A_{32} \gg A_{31}$ 、 $\omega_{13} \gg \omega_{12}$ 化简得: $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_{13}}{A_{21}} \left[\omega_{13} = \omega \right]$ 。可见当外界抽运速率足够大时, 就有可能使得 $\omega > A_{21}$, 从而使得 $n_2 > n_1$, 这样就能实现 E_2 、 E_1 两能级间的粒子数反转。【三能级系统这儿, 像 8.2.1 粒子数反转一样忽略了自发辐射?】

四能级系统: 基态 E_1 粒子大量跃迁到 E_4 , 又迅速转移到 E_3 。 E_3 能级为亚稳态, 寿命较长; 相比起来, E_2 能级寿命较短, 到了 E_2 能级上的粒子很快便回到基态。——于是在四能级系统中, 粒子数反转是在 E_3 、 E_2 能级之间实现的。实现粒子数反转的下能

级不是基态 E_1 ，而是非基态 E_2 ，这样在室温下 E_2 能级上的粒子数非常少，比三能级系统更容易实现粒子数反转。

8.2.3 光学谐振腔

受激辐射除了与吸收过程相矛盾外，还与自发辐射相矛盾。处于激发态的原子，往往主要通过自发辐射回到基态，而不是受激辐射。受激辐射和自发辐射光子数之比 $R = \frac{n'_{21}}{n_{21}} = \frac{B_{21} \cdot n_2 \cdot u(\nu)}{A_{21} \cdot n_2} = \frac{B_{21} \cdot u(\nu)}{A_{21}}$ ，要想 $R \gg 1$ ， $u(\nu)$ 必须很大，而普通光源的能量密度 $u(\nu)$ 是很小的。但我们可以设计一种装置，使之在某一方向上的受激辐射不断得到放大和加强。——使受激辐射在某一方向上产生振荡，而其他方向传播的光很容易逸出腔外，以致在这一特定方向上超过自发辐射。这样我们就能在这一特定方向上实现受激辐射占主导地位的情况。这种装置叫做光学谐振腔。