Salute to 孔庆海(老孔)

1.2数列的极限

1.2.1数列

1.若y=f(x)在N(自然数集合)上定义，则称y=f(n)=为数列。

2.对于数列{}，若存在M>0，对于任意正整数n，，则称数列{}为有界数列，如果这样的M不存在，则称{}为无界数列。

\*若存在M，对于任意正整数n，，则称数列{}上方有界。若∈集合{|}的M进一步满足M=min{}，则称M为集合{}的最小上界(上确界)。

3.若对于任意n，都有，则称{}是一个单增数列。

\*{}单调

1.2.2数列的极限

1.分析定义：对，(都)，(使得)当时，(都有)||<=a

2.模板：对，要使||≤<，只要~，即。于是取N=【或取N=[]】，当n>N时，必有||<。

【绿色字体为个人添加，可看作注释，某些情况下不适用或不需要，可有可无。】

3.数列极限的基本性质：

(1).极限的唯一性：

\*反证法：设结论不真，即不妨设=a<b=，则在任意小正常数中取，存在，当n>时，有||<

同理，存在，当n>时，有||<

则当n>max{,}时，二式同时成立，矛盾。

(2).收敛数列必有界(无界必发散；有界未必收敛)：设=a，则{}有界，即存在M>0，对任意的n，有||≤M。

\*对，都，当时，(都有)||<，不妨取，则||<，则||<|a|+，取M=max{||,||,···||,|a|+}，则对于任意n，有||≤M。

(3).若=a，则其任何子列{}与母列有相同的极限，即=a。【以集合或数列的观点：{}{}，且{k}={n}】

\*对，>0，(使得)当>k>N时，(都有)||<，即=a。

\*其逆否命题常用于说明母列{}发散：

.找到一个子列无极限。

.两个子列有不同极限。

(4).收敛数列的保号性：设=a>0，则存在，当n>时，有。

\*像(1).或者(2).一样，取，极限的定义的末尾部分便变为了||<a，即有>0成立。

\*推论1：设=a>b，则存在，当n>时，有。

将极限=a的定义的末尾部分修改为||=||<，则有=a-b>0，于是存在，当n>时，有。

(5).收敛数列的保序性：设≥(>)，若=a，=b，则a≥b。

\*条件≥(>)可从第i项(才)开始成立。

\*类似其逆命题地：若=a，=b，且a(>)>b，则根据性质(4).的推论：存在，当n>时，有。【大条件不是“≥(>)”，而是“=a，=b”。】

\*利用上一条，可知该命题(收敛数列的保序性)的否命题(即若其结论为a<b则)不成立，于是此即利用反证法证明了此命题的正确性。

(6).极限的夹逼定理：设≤≤，且==a，则存在，且。

\*由题，极限的定义的末尾部分为||<和||<，则<≤≤<，于是就有||<，于是根据定义，。

\*同样，≤≤也只需要从某一项开始成立即可。

1.3数列的极限

1.3.1自变量趋于有限值时函数的极限

1.分析定义：将以前的：序列号→自变量：N→，n→x，并且：→△f。

设f(x)在的去心领域内有定义，对，(你得找出)(一个)()，(使)当时，(该定义域内x所对应的)||<=A

2.模板：对，要使||≤<，只要~，即()。于是取=，则当()时，必有||<。

【N越大越好、越小越好，均是为了使得N()<n<∞以及区间更小】

\*左极限的定义：f(x)在的取心领域内有定义，对，()，当时， ||<=A【也有的记为=f()=A】

1.3.2自变量趋于无穷大时函数的极限

1.分析定义：与n→∞不同，x→∞像x→一样，有双向性：x→+∞、x→-∞。

设f(x)在|x|>m上有定义，对，()>0，当时，||<=A

2.模板：对，要使||≤<，只要~，即()。于是取=，则当()时，必有||<。

\*设f(x)在x>m上有定义，对，()>0，当时，||<=A

1.3.3函数极限的性质(以自变量趋于有限值为例)

(1).极限唯一性：若存在，则极限唯一。

(2).局部有界性：若存在，则存在>0，M>0，当0<<时，|f(x)|≤M。

(3).存在的充要条件为：、存在且相等，且有f()=f()。

(4).极限的保号性。

(5).极限的保序性。

(6).夹逼定理。

1.4极限的运算法则

1.4.1数列极限的运算法则

1.定理：若和存在，则：

(1).存在，且等于

(2).存在，且等于

\*证明：=A，=B，则a.对，，当N时， ||<，||<；b.由收敛数列的有界性，存在M>0，对于任意的n，||<M。

则||=||≤||||+|B|||<(M+|B|)

(3).若≠0，则存在，且等于

2.一些结论：

(1).若=A≠0，不存在，则不存在。

(2).若=0，有界，则=0。

1.4.2函数极限的运算法则

1.自变量趋于有限值或无穷大，均有类似的以上三条性质。

2.复合函数的极限计算公式：若存在，=，则。

\*证明：设=A，，，当时， ||<；同样，=，则，，当时， ||<=。

1.5极限存在准则 一个重要极限

1.定理：若{}为单调有界数列，则存在。

\*若{}单增且上方有界，则=c存在，且极限c为{}的最小上界。

\*有极限则有界，有界不一定有极限，但有界+单调有极限。

\*link to 1.2.1数列 中的3.\*{}单调

2.=e

\*二项式定理：

\*它是单增的：≤≤≤==

1.6无穷小与无穷大

1.6.1无穷小

1.定义：在自变量的某个变化过程中，极限为0的变量称为无穷小。【常数0以0为极限，但不是变量；但规定常数0是无穷小(量)】

2.定理：在自变量的同一变化过程中，f(x)的极限为A的充分必要条件是f(x)=A+α，其中α=α(x)，是无穷小。

1.6.2无穷大

1.定义：设函数f(x)在x的某个变化过程中有定义，如果任意M>0(无论多么大)，存在X>0或>0，使得当~时，恒有|f(x)|>M，则称f(x)为x在这个变化过程中的无穷大。记为：=∞。

2.无穷小的性质：

(1).有限个无穷小的和为无穷小。

(2).有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小。

1.6.3无穷小的比较

1. 在自变量的同一变化过程中：

(1).若，称β为α的高阶无穷小，记为β=o(α)。

(2). 若c，称β为α的同阶无穷小。(c≠0)

(3). 若1，称β与α是等价无穷小，记为β~α。

(4). 若c，称β为(关于)α的k阶无穷小。(c≠0，k>0)

【无穷小的商~无穷小的比较，并不是所有的无穷小都能进行比较，因为商的极限可能不存在】

2.β~αβ=α+o(α)

2700到2129？？？？不写了。