华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 4.7 正常返与零常返

主讲：王湘君

正常返与零常返

定义4.7.1 设i为常返态，以μ_i记$\{X_n\}$从i出发首次返回i的平均步数，即

$$\mu_i = E(T_{ii}|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)} .$$

◆若$\mu_i < +\infty$, 则称i为正常返态(positive recurrent)；

◆若$\mu_i = +\infty$, 则称i为零常返态(null recurrent).

例4.7.2 图4.3.1对状态3，

$$f_{33}^{(1)} = 0.8, \quad f_{33}^{(n)} = 0.2(0.6)^{n-2}0.4, n \geq 2$$

$$\mu_3 = 0.8 + 0.08 \sum_{n=2}^{+\infty} n(0.6)^{n-2} = \frac{3}{2} .$$

正常返与零常返判别准则

定理4.7.3 设i为常返态，则i为零常返态的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$$

这个定理的证明比较繁琐，我们略去.

推论4.7.4

若j为零常返态, 则对任意$i \in I$, $\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

这个证明我们留作练习.

状态的类性质

定理4.7.5 若$i \leftrightarrow j$，则i,j具有相同的状态分类.

证明 由于$i \leftrightarrow j$，则$\exists l,n \geq 1, s.t.\ p_{ij}^{(l)} = \alpha > 0, p_{ji}^{(n)} = \beta > 0.$

由C-K方程，有

$$p_{ii}^{(l+m+n)} = \sum_{s,t \in I} p_{is}^{(l)} p_{st}^{(m)} p_{ti}^{(n)} \geq \alpha\beta p_{jj}^{(m)}, \qquad (4.7.1)$$

$$p_{jj}^{(n+m+l)} = \sum_{s,t \in I} p_{js}^{(n)} p_{st}^{(m)} p_{tj}^{(l)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(m)}, \qquad (4.7.2)$$

对m求和，有

状态的类性质

证明

$$\sum_{m=1}^{+\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \sum_{m=1}^{+\infty} p_{jj}^{(m)},$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \sum_{m=1}^{+\infty} p_{ii}^{(m)},$$

可见, $\sum_{m=1}^{+\infty} p_{ii}^{(m)}$，$\sum_{m=1}^{+\infty} p_{jj}^{(m)}$同时收敛或发散，即$i,j$同为常返或非常返.

若i,j同为常返，(4.7.1) (4.7.2)对m取极限，有

$$\lim_{m\to+\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \lim_{m\to+\infty} p_{jj}^{(m)},$$

$$\lim_{m\to+\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \lim_{m\to+\infty} p_{ii}^{(m)},$$

可见 $\lim_{m\to+\infty} p_{ii}^{(m)}$，$\lim_{m\to+\infty} p_{jj}^{(m)}$同为0或非0，即$i,j$同为正常返或零常返.

作业

证明

推论4.7.4.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢