华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 3.2 Poisson过程定义的等价性

主讲：王湘君

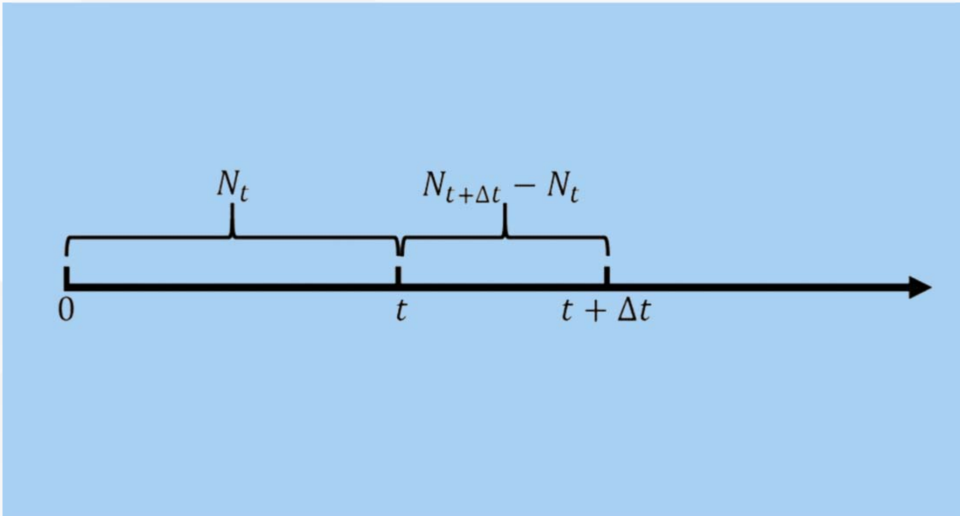
两个定义的等价性

定理3.2.1 定义3.1.2⇔定义3.1.3等价.

证明

⇒: 直接计算,

$$P(N_{t+h}-N_t=1)=e^{-\lambda h}\lambda h=\lambda h+o(h),$$
$$P(N_{t+h}-N_t\geq 2)=1-e^{-\lambda h}-e^{-\lambda h}\lambda h=o(h).$$



⇐: 记$P_k(t)=P(N_t=k)=P(N_{s+t}-N_s=k)$, 要证

$$P_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

$k=0$时，$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)=P_0(t)\big(1-\lambda h-o(h)\big)$,

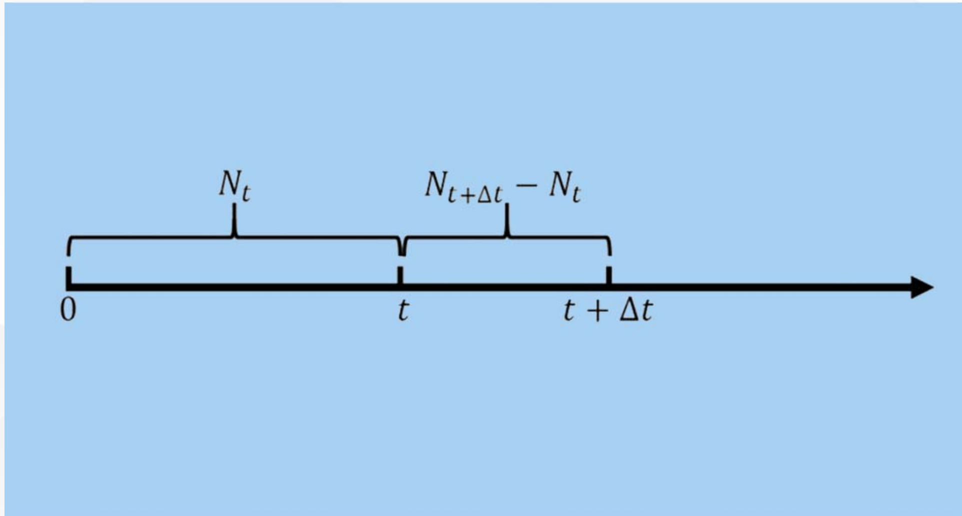
有，$P_0'(t)=\lambda P_0(t)$, 又因为$P_0(0)=1$, 解得$P_0(t)=e^{-\lambda t}$.

证明

设$P_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$,

$$P_{k+1}(t+h)=\sum_{l=0}^{k+1}P_l(h)P_{k+1-l}(t)$$

$$=\big(1-\lambda h+o(h)\big)P_{k+1}(t)+\big(\lambda h+o(h)\big)P_k(t)+o(h),$$



所以,

$$P_{k+1}'(t)=-\lambda\big(P_{k+1}(t)-P_k(t)\big),$$

又因为$P_{k+1}(0)=0$, 解得

$$P_{k+1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢