华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 6.4 随机变量序列的收敛性

主讲：王湘君

R.V.s序列的收敛性

定义6.4.1 设R.V.s序列$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$及R.V. X,

1. 若满足 $P\left(\omega: \lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$, 则我们称 $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 以概率1（或几乎处处）收敛到X，记为$X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

2. 若满足 $\forall\varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, 则我们称$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$以依概率收敛到$X$，记为$X_n \xrightarrow{P} X$.

注

概率论中大数定律用的是依概率收敛，强大数定律用的是几乎处处收敛.

R.V.s序列的收敛性

例6.4.2

设$\Omega = [0,1)$, P为几何概型，定义$\xi_{n,k} = \chi_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)}(\omega), n \in \mathbb{N}, k = 1,2,\cdots,n$,

将$\{\xi_{n,k}\}$按字典序(先n后k)排成R.V.序列$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 即

$$X_1 = 1, X_2 = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}, X_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)}, X_4 = \chi_{\left[0,\frac{1}{3}\right)}, \cdots$$

则(1) $X_n \xrightarrow{P} 0$, (2) $\forall \omega \in \Omega, \{X_n(\omega)\}$不收敛.

证明

$X_n = \xi_{m,m_k}, n \to +\infty$时$m \to +\infty$.

均方收敛

定义6.4.3 设有$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的R.V. 序列$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$及R.V. X，满足

$$\lim_{n\to+\infty} E|X_n-X|^2=0\ ,$$

我们称$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$均方收敛（或L^2）到X，记为$X_n\xrightarrow{m.s.(L^2)}X$ ($\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n=X$).

例6.4.4

$\{W_t,t\in\mathbb{R}_+\}$为一个Brown运动，$\{N_t,t\in\mathbb{R}_+\}$为一个Poisson过程，则

$$\underset{t\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{W_t}{t}=0\ ,\qquad \underset{t\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{N_t}{t}=\lambda,$$

$$\underset{h\to0}{\mathrm{l.i.m}}\, W_{t+h}=W_t\ ,\qquad \underset{h\to0}{\mathrm{l.i.m}}\, N_{t+h}=N_t.$$

均方收敛

例6.4.5

- 在例6.4.2 中$X_n^2 = X_n$, 设$X_n = \xi_{m,m_k}$, 则

$$E(X_n^2) = \frac{1}{m} \to 0.$$

- 所以,

$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = 0.$$

但$\forall\omega \in \Omega$, $\{X_n(\omega)\}$不收敛.

均方收敛

例6.4.6

设$\Omega=(0,1)$, P为几何概型，定义

$$X_n(\omega)=n^{\frac{1}{2}}\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(\omega), n\in\mathbb{N},$$

则

(1) $\forall\omega\in(0,1)$, $X_n(\omega)\to 0$,

(2) $\{X_n(\omega)\}$在L^2中不收敛.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！