

道机 Stochastic Process Fig. 19

§ 4.13 Markov链的应用案例

主讲: 王湘君



赌徒输光问题



甲乙两人对赌,两人总的资本是N元钱,每局输赢1元钱,每局甲获胜的概率是p,输的概率是q = 1 - p,如有一方输光,则赌博结束.

- 以 X_n 记n时刻甲的资本,则 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 就是带两个吸收壁的随机游动.
- 由有限状态Markov链的知识,我们知道0, N是两个吸收态, $1, 2, \dots, N-1$ 是非常返态.
- 这说明游戏会在有限的时间内结束. 那么若初始时刻甲有*i*元钱, 最终甲获胜的概率是多少?
- 我们实际要求的是

 $\lim_{n\to+\infty}p_{iN}^{(n)}$



赌徒输光问题



$$lack$$
 设 $p_i = \lim_{n \to +\infty} p_{iN}^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$,

◆由C-K方程,

$$p_{iN}^{(n)} = pp_{i+1,N}^{(n-1)} + qp_{i-1,N}^{(n-1)},$$

$$p_{i} = pp_{i+1} + qp_{i-1},$$

$$p_{i+1} - p_{i} = \frac{q}{p}(p_{i} - p_{i-1}),$$

$$p_{i+1} - p_{i} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i}(p_{1} - p_{0}),$$



赌徒输光问题



- ◆求和,有

$$p_{i} = \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{j} p_{1} = \begin{cases} ip_{1}, & p = q, \\ \frac{1 - (q/p)^{i}}{1 - q/p} p_{1}, & p \neq q, \end{cases}$$

◆由于 $p_N = 1$,有

$$p_i = \begin{cases} i/N, & p = q, \\ \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q. \end{cases}$$



讨论



$$p_{i} = \begin{cases} i/N, & p = q, \\ \frac{1 - (q/p)^{i}}{1 - (q/p)^{N}}, & p \neq q. \end{cases}$$

- p_i 关于i是单调递增的吗? 是.
- **02** 对 p_i 的影响是p大还是i大? 例 取 N=15,i=5,p=0.6, p_i ≈0.87 取 N=30,i=10,p=0.6, p_i ≈0.98
- 03 什么条件下, $\lim_{N\to+\infty} p_i$ 存在? p>q.



在药物疗效检验中的应用



考虑治疗某种疾病的 两种新药,治愈率分别为 p_i ,i=1, 2, 未知,检验哪种 新药的疗效好?即 $p_1 > p_2$ 还是 $p_2 > p_1$? ▶ 考虑如下的检验方法:随机选取病人对依次分别接受两种药物的治疗,当一种药物的累积治愈数超过另一种药物的累积治愈数达到事先给定的正整数 M 时,检验结束。

该方法是否为一个好的检验方法?



在药物疗效检验中的应用



◆剔除治疗结果相同的检验对,记

◆ 检验在首次使得

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = M \text{ or } - M$$
时结束.

◆累积治愈数之差每次变化±1.



在药物疗效检验中的应用



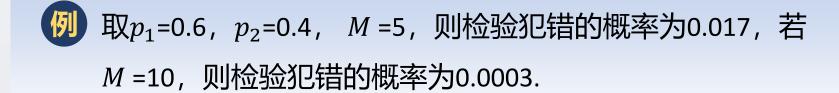
◆注意到

$$p = P(X_n - Y_n = 1) = \frac{P_1(1 - P_2)}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2},$$

$$q = P(X_n - Y_n = -1) = \frac{(1 - P_1)P_2}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2},$$

◆则检验结果为P1>P2的概率为

$$\frac{1-(q/p)^M}{1-(q/p)^{2M}}.$$





市场份额



》设市场上有4个品牌的某种产品,调查 发现顾客的消费意愿矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.05 & 0.05 \\ 0.08 & 0.10 & 0.80 & 0.02 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.70 \end{pmatrix},$$

则最终的市场份额

 $\pi = (0.482, 0.253, 0.179, 0.086).$





作业





◆考虑一个有限状态Markov链 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$,非常返态的集合 $I_N = \{1,2,\cdots,t\}$,转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & Q_+ \\ 0 & R_+ \end{pmatrix},$$

- ◆其中 $Q = (p_{ij})_{t \times t}$.
- ◆以 s_{ij} 记{ $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ } 从非常返i出发, 在非常态j停留的平均次数,令 $S = (s_{ij})_{t \times t}$,
- ◆证明 $S = (E Q)^{-1}$.



塘 塘 临