华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 5.5 连续时间 Markov链的状态分类

主讲：王湘君

状态的可达、闭集

定义5.5.1 设$\{X_t, t \geq 0\}$为连续时间Markov链，对$i, j \in I$,

1. 若$\exists t > 0, s.t. p_{ij}(t) > 0$, 则称$i$可达$j$，记为$i \rightarrow j$;
2. 若$\forall t > 0, p_{ij}(t) = 0$, 则称$i$不可达$j$，记为$i \nrightarrow j$;
3. 若$i \rightarrow j, j \rightarrow i$, 则称$i, j$互通，记为$i \leftrightarrow j$.

注

实际上可以证明若$\exists t > 0, s.t. p_{ij}(t) > 0$，则$\forall t > 0$，$p_{ij}(t) > 0$.

状态的可达、闭集

定义5.5.2 设C为状态空间I的一个子集，

若 $\forall i \in C, j \notin C, i \nrightarrow j$，则我们称$C$为$I$的一个闭集；

若 闭集C中不含有更小的闭集，则我们称C为一个不可约闭集；

若 I为一个不可约闭集，则我们称$\{X_t, t \geq 0\}$为一不可约Markov链.

状态分类

定义常返、非常返手续相对复杂.

定义5.5.3 设$X_0=i$, 令$T_i^1=\inf\{t>0|X_t\neq i,X_0=i\}$, $T_{ii}=\inf\{t>T_i^1|X_t=i,X_0=i\}$,

令$f_{ii}\triangleq P(T_{ii}<+\infty|X_0=i)$,

◆若$f_{ii}<1$, 我们称状态i为非常返态; ($\Leftrightarrow \int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt<+\infty$)

◆若$f_{ii}=1$, 我们称状态i为常返态; ($\Leftrightarrow \int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$)

◆若i为常返态，再令$\mu_i\triangleq E(T_{ii}|X_0=i)$,

01 若$\mu_i<+\infty$, 则称i为正常返态；($\Leftrightarrow \int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}p_{ii}(t)\neq 0$)

02 若$\mu_i=+\infty$, 则称i为零常返态. ($\Leftrightarrow \int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}p_{ii}(t)=0$)

平稳分布

定义5.5.4 设$\{X_t, t \geq 0\}$为连续时间Markov链，若存在$\{\pi_j, j \in I\}$，满足

1. $\pi_j \geq 0$;
2. $\sum_{j\in I} \pi_j = 1$;
3. $-\pi_j q_{jj} + \sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij} = 0$.

我们称$\{\pi_j, j \in I\}$为$\{X_t, t \geq 0\}$的一个平稳分布.

注

若记向量$\pi = (\cdots, \pi_j, \cdots)$, 则(3)的矩阵形式是$\pi\mathbb{Q} = 0$.

作为平稳分布，$\forall t \geq 0, j \in I$, 有$p_j(t) = \pi_j$, 由Fokker-Planck方程得到(3).

$$p_j'(t) = p_j(t)(-q_{jj}) + \sum_{i\neq j} p_i(t) q_{ij}.$$

正常返判别准则

定理5.5.5

若$\{X_t, t \geq 0\}$为连续时间不可约Markov链，

则$\{X_t, t \geq 0\}$为正常返链的充要条件是存在平稳分布$\{\pi_j, j \in I\}$.

并且，我们有平稳分布唯一，$\pi_j = \dfrac{1}{\mu_j}$.

作业

设连续时间Markov链$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间$I = \{1,2,3\}$, 转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -4 & 2 \\ c & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

01 求$\{X_t, t \geq 0\}$的平稳分布;

02 求$P_{21}(t)$.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢　　谢　　！