华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.1 Markov链的定义

主讲：王湘君

历史人物介绍

A. A. Markov（1856.6.14－1922.7.20）

◆俄国数学家

◆1874年入圣彼得堡大学，师从Chebyshev

◆毕业后留校任教，任圣彼得堡大学教授（1893-1905）

◆研究数论和概率论，1886年当选为圣彼得堡科学院院士

Markov链定义

定义4.1.1 设S.P. $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的状态空间$I$离散（有限或可列），且满足Markov性，即对任意$n, i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in I$，有

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n),$$

则我们称$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链.

Markov链的有限维分布

注

由于

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$$
$$= P(X_0$$
$$= i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)P(X_2 = i_2 | X_0 = i_0, X_1 = i_1) \cdots P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})$$
$$= P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) \cdots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}),$$

所以，Markov链有限维分布列由它的初始分布和“转移概率”所决定.

Markov链的转移概率

定义4.1.2 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，我们称

$$p_{ij}(n) \triangleq P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的（一步）转移概率；

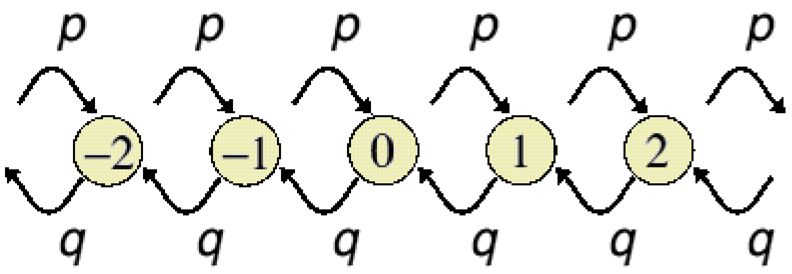
特别地，若$p_{ij}(n)$与n无关，则我们称$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一齐次Markov链；

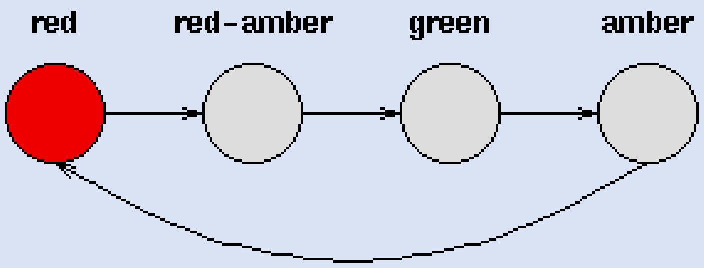
对齐次Markov链，我们记$\mathbb{P} = (p_{ij})$, 称之为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的转移概率矩阵.

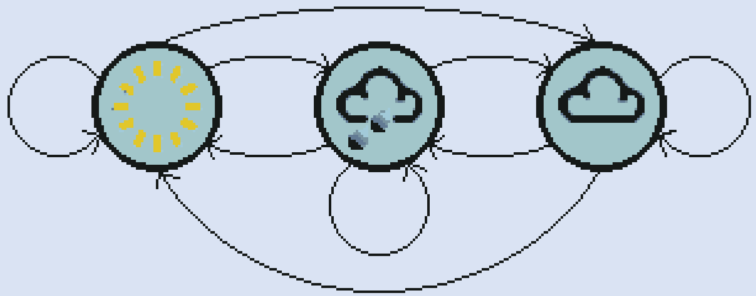
注

以后我们只讨论（齐次）Markov链.

状态转移图



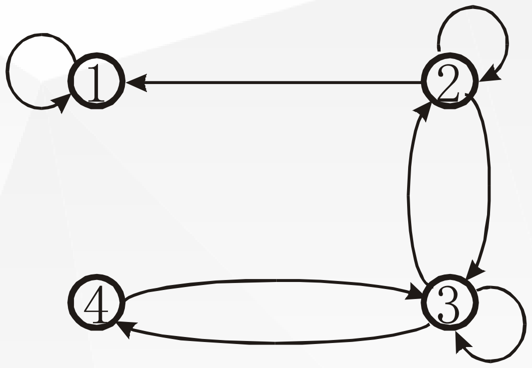




作业

1 若$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，状态空间$I = \mathbb{Z}$，令$Y_n = X_n^2$，$\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$是否为一Markov链？若是，证明之；若否，给出一个反例.

2 若Markov链$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的状态转移图如下，添加相应的概率，并写出转移概率矩阵.



华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！