华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.9 Markov状态空间的分解

主讲：王湘君

闭集

定义4.9.1 设C为状态空间I的一个子集，

◆若$\forall i \in C, j \notin C, i \nrightarrow j$, 则我们称$C$为$I$的一个闭集；

◆若闭集C中不含有更小的闭集，则我们称C为一个不可约闭集；

◆若I为一个不可约闭集，则我们称$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一不可约Markov链.

以下，我们以I_N记所有非常返态的集合，以I_R记所有常返态的集合，以I_R^+记所有正常返态的集合，以I_R^0记所有零常返态的集合

定理4.9.2 I_R, I_R^+, I_R^0都是闭集.

定理4.9.3 若i为常返态，记$C_i = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则$C_i$为一个不可约闭集.

我们称C_i为一个基本的常返闭集.

状态空间的分解

- 我们可以对状态空间做如下的分解：

$$I = I_N + I_R = I_N + I_R^+ + I_R^0 = I_N + R_1^+ + R_2^+ + \cdots + R_1^0 + R_2^0 + \cdots.$$

- 如果我们对转移概率矩阵作分块，$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & Q_+ & Q_0 \\ 0 & P_+ & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{pmatrix}$，则

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & QQ_+ + Q_+P_+ & QQ_0 + Q_0P_0 \\ 0 & P_+^2 & 0 \\ 0 & 0 & P_0^2 \end{pmatrix}.$$

……

有限状态情形

定理4.9.4 若Markov链$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的状态空间$I$为一有限集合，则

1. $I \neq I_N$, 即有限Markov链不可能所有态都是非常返态;
2. $I_R^0 = \emptyset$,即有限Markov链没有零常返态;
3. 有限Markov链从任意状态出发，一定会在有限的时间里进入某个正常返的闭集.

证明

（1）有限Markov链只能有限次返回非常返态，所以I_N不可能为闭集；

（2）反证，设$i \in I$为零常返态，由定理4.9.3 , $C_i = \{j | i \leftrightarrow j\}$一个基本的零常返闭集，

$$\sum_{j \in C_i} p_{ij}^{(n)} = 1,$$

再由推论4.7.4, 则对任意$i, j \in C_i$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, 取极限得到矛盾.

例子

1

一维无限制情形，对称随机游动是一个不可约的零常返链，非对称随机游动是一个不可约的非常返链.

2

带两个吸收壁的随机游动，$0, N$为两个吸收态，$1,2,\cdots,N-1$都是非常返态.

3

Ehrenfest链是一个不可约的正常返链.

作业

1 给出$\mathbb{P}^n$的分块矩阵表示.

2 设Markov链$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的状态空间$I = \{1,2,\cdots,7\}$,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

做$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$状态的分类.

華中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢