

# 随机 机 标题 Stochastic Process 近程

§ 1.1 概率与条件概率

主讲: 王湘君



## 可测空间





## 定义1.1.1

设集合 $\Omega$ 为样本空间,F为 $\Omega$ 的某些子集的集合,满足:

- (1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- (2) 若 $A \in \mathcal{F}$ , 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- (3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$ , 则 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ,

那么,我们称 $\mathcal{F}$ 为一个事件 $\sigma$ 域,称 $\mathcal{F}$ 中的元素为随机事件,称 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一个可测空间。



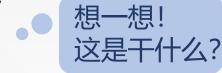
### 样本空间 $\Omega$ 上的事件 $\sigma$ 域不唯一!



### 例1.1.3

取 $\Omega = [0,1)$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ , 这是一个平凡的 $\sigma$ 域;

对 
$$n \in \mathbb{N}$$
,  $\mathcal{F}_n = \sigma\left\{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), k = 1, 2, \cdots, 2^n\right\}$ .





## 概率与概率空间





## 定义1.1.4

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间,  $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ , 满足:

- (1)  $P(\Omega) = 1$ ;
- (2)  $\forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- (3) 对 $A_n \in \mathcal{F} \coprod A_i A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , 有 $P(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ , 则称 P为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率(测度),称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间。



- (1) 可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率不唯一!
- (2) 概率的性质略。



证明概率的 (从下) 连续性: 若 $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$ , 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) .$$







定义1.1.6 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间, $A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$ ,对 $\forall B \in \mathcal{F}$ ,令

 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ,则 $P(\cdot|A)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一个概率测度,称之为条件概率测度。

由条件概率定义,容易推出下面简单但重要的结论:

定理1.1.7

(乘积公式) 对 $A,B \in \mathcal{F}$ , 有P(AB) = P(A)P(B|A).

定理1.1.8

(全概率公式) 设 $A_n, B \in \mathcal{F}, P(A_n) > 0, n = 1, 2, \dots, \Omega = \sum_n A_n,$ 则

$$P(B) = \sum_{n} P(A_n)P(B|A_n).$$







定义1.1.9 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间,I为一个指标集, $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ 为

一族事件。若对任意 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,和任意I中互异的指标 $i_1, i_2, \dots, i_n$ ,都有:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k}),$$

则我们称 $\{A_i\}_{i\in I}$ 相互独立。



独立性是依赖于概率测度的。





1.证明条件概率下的全概率公式:  $A_n, B, C \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots, \Omega = \sum_n A_n$ , 则

$$P(B|C) = \sum_{n} P(A_n|C)P(B|A_nC).$$

**>>** 2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,证明对任意 可测函数  $g_1, g_2, \dots, g_n, g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$ 相互独立.



# 塘 塘