华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 5.4 Kolmogorov微分方程

主讲：王湘君

Kolmogorov后向方程

定理5.4.1 若$\{X_t, t \geq 0\}$的转移速率矩阵$\mathbb{Q}$满足 $q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij}$, $\forall i \in I$, 则$\{X_t, t \geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbb{P}(t)$满足Kolmogorov 后向方程$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$.

证明 由定理5.3.1 的证明，

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - \big(1 - p_{ii}(h)\big)p_{ij}(t),$$

等式两边除以h，再令$h \to 0$, 若极限与求和可以交换，则有

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + (-q_{ii})p_{ij}(t) .$$

关于极限与求和可以交换的证明略去.

Kolmogorov前向方程

定理5.4.2 若$\{X_t, t\geq 0\}$的转移速率矩阵$\mathbb{Q}$满足一定的条件（如状态空间有限），则$\{X_t, t\geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbb{P}(t)$满足Kolmogorov 前向方程

$$\mathbb{P}'(t)=\mathbb{P}(t)\mathbb{Q}.$$

证明 由C-K方程，

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)p_{kj}(h)-p_{ij}(t)\left(1-p_{jj}(h)\right),$$

等式两边除以h，再令$h\to 0$, 若极限与求和可以交换，则有

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}+p_{ij}(t)(-q_{jj}).$$

Fokker-Planck方程

若$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间有限，前向和后向方程都成立, 我们有

$$\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{Q}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\mathbb{Q})^n}{n!}.$$

推论5.4.3

若$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间有限, 则绝对概率分布$P^T(t)$满足Fokker-Planck方程

$$(P^T(t))' = P^T(t)\mathbb{Q}.$$

两状态的Markov链

设$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间$I = \{0,1\}, \tau_0 \sim E(\lambda), \tau_1 \sim E(\mu)$，则转移速率矩阵$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$，

设$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$，由前向方程，

$$p_{00}'(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) = -(\lambda + \mu) p_{00}(t) + \mu,$$

由初始条件$p_{00}(0) = 1$，有$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$. 所以，

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}.$$

作业

1 写出Poisson过程满足的前向方程和后向方程.

2 若连续时间Markov链$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间$I = \{1,2,\cdots,m\}$, 且对$i \neq j, q_{ij} = 1$，求$\{X_t, t \geq 0\}$的转移概率矩阵.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！