华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称 矩阵论　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生 考试日期 2022.12.03 学生院系________ 班级________

学号____________ 姓名______________ 任课教师_______________

题号	一	二	三	四	五	六			总分
分数									

分　数	
评卷人	

一、 填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 设 T 为 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换，且 $T((x_1,x_2)^T)=(x_1,0)^T$，则 $N(T)=$ ________________.

2. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为____________________.

3. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3\end{bmatrix}$,则$\sin(2I-A)=$ ________________.

4. 令$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 以及 I_3 表示三阶单位矩阵。

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(I_3+\frac{A}{n}\right)^n=$ ________________.

5. $A=\begin{bmatrix}-2 & 7 & -2\\ 1 & 6 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,则 $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}\otimes B)=$

____。

分　数	
评卷人	

二、(15 分)设 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$,求可逆矩阵 P 及 Jordan 阵 J_A,使得 $P^{-1}AP=J_A$.

分　数	
评卷人	

三、(15 分)设$T:P_3[x]\to P_3[x]$，且$T(p(x))=xp'(x)+p''(x)$，$\forall p(x)\in P_3[x]$.

(1)求在基$\{1,x,x^2\}$下的矩阵A;

(2)求在基$\{1,x,1+x^2\}$下的矩阵B;

(3)求一个方阵P,使$B=P^{-1}AP$;

(4)对于$p(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$，求$T^n\big(p(x)\big)$.

分　数	
评卷人	

四、(10 分)计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的奇异值(SVD)分解 $A=U\sum V^H$(请给出U,$\sum$,V具体矩阵形式)。

分　数	
评卷人	

五、 计算题 (1) (15 分) 给定向量 $\alpha_1=(1,1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,0,1,0)^T$ 并定义 $\mathbb{R}^4$ 中的子空间 $V=L\{\alpha_1,\alpha_2\}$。求 V 的正交补子空间 $V^\perp$ 中距离 $b=(3,3,2,1)^T$ 最近的向量。

(2) (15 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求解微分方程组$\boldsymbol{x}'(\mathrm{t})=A\,\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$,

$\boldsymbol{x}(0)=(1\quad 1\quad 1)^T$.

分　数	
评卷人	

六、 (1) (8 分)设 $U \in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，证明存在 Hermite 矩阵 A, 使得 $U = e^{\mathrm{i}A}$ 且 $UA = AU$, 这里 i 为虚数单位.

(2) (7 分) 设 A 和 C 为 n 阶方阵，A 的特征值 λ_i，$i = 1,2,\cdots n$ 都是实数，求证：下面的矩阵方程有唯一解

$$X + A^2XA^2 = C.$$