



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 5.6 生灭过程

主讲：王湘君



生灭过程



生灭过程

是一类特殊的连续时间Markov链，
有很多的实际应用。



生灭过程



定义5.6.1

若连续时间Markov链 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间 $I = \mathbb{N}_0$, 且满足

$$p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \in I$$

$$p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h),$$

则我们称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为一生灭过程, $\lambda_i \geq 0$ 称为出生率, $\mu_i \geq 0$ 称为灭亡率.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



生灭过程的前(后)向方程



前程方程

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}.$$

后向方程

$$p'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t).$$

Fokker-Planck方程

$$p'_j(t) = -p_j(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{j+1}(t)\mu_{j+1}.$$



例：Poisson过程



Poisson过程
就是一个

生 灭
过 程

出生率 $\lambda_i \equiv \lambda;$

死亡率 $\mu_i \equiv 0$

- ◆ 我们称这样的生灭过程为纯生过程或Yule过程.
- ◆ 第3章中我们证明Poisson过程两个定义的等价性，实际上就是在递推求解其转移概率.



生灭过程的平稳分布



若生灭过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 存在平稳分布, 则

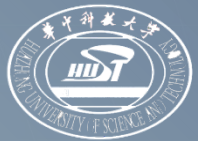
$$\lambda_0 \pi_0 - \mu_1 \pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0,$$

$$\lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 + \mu_2 \pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{\mu_2} ((\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 - \lambda_0 \pi_0) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0,$$

$$\text{递推有, } \pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \pi_0,$$

由 $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$, 可知,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \right)^{-1}$$



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

!