



华中科技大学  
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

*Stochastic Process*

A diagram illustrating a stochastic process. It shows a coordinate system with a horizontal axis and a vertical axis. A curve starts at the origin and moves upwards and to the right, representing a random path. There are also some decorative white circles and a line on the right side of the slide.

## § 3.1 Poisson过程的定义

主讲：王湘君



# Poisson过程



**Simeon-Denis Poisson (1781 ~ 1840)**



- ◆ 法国数学家、几何学家和物理学家
- ◆ 他改进了概率论的运用方法，特别是用于统计方面的方法，建立了描述随机现象的一种概率分布— Poisson分布；
- ◆ 他推广了“大数定律”，并导出了在概率论、数理方程中有重要应用的Poisson积分。

## Poisson过程

是最重要的随机过程之一，它是计数过程、独立平稳增量过程、Markov过程.在随机过程的理论及排队论、计算机图像处理等诸多应用领域具有奠基性的作用。



# 计数过程



## 定义3.1.1

若对任意  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $N_t$  表示在时间区间  $[0, t]$  内 “随机事件  $A$ ” 发生的次数, 则我们称  $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  为一个计数过程.

显然:

01

计数过程的状态空间  $I = \mathbb{N}_0$ ;

02

计数过程的轨道单调非降, 即  $\forall s < t, N_s \leq N_t$ ;

03

计数过程的增量  $N_t - N_s$  表示在  $(s, t]$  内 “随机事件  $A$ ” 发生的次数.



# Poisson过程的第一个定义



➤➤ **定义3.1.2** 若 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个计数过程, 满足:

- 1  $N_0 = 0$ ;
- 2  $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一独立增量过程;
- 3  $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一平稳增量过程,  $N_t - N_s \sim P(\lambda(t - s))$ , 则我们称 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程.

由于 $\lambda = \frac{E(N_t - N_s)}{t - s}$ , 表示单位时间内“事件A”发生的平均次数, 所以我们也称 $\lambda$ 为“事件A”的强度或发生速率.

● 思考: Poisson过程的独立增量性和平稳增量性的直观含义是什么?





# Poisson过程的第一个定义



## Poisson过程的 独立增量性

在不相交的时间区间上, “事件 $A$ ” 发生次数相互独立.

## Poisson过程的 平稳增量性

“事件 $A$ ” 发生的次数只与时间区间的长度有关, 而与时刻无关.

# Poisson过程的第二个定义



**定义3.1.3** 若 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个计数过程, 满足:

- 1  $N_0 = 0$ ;
- 2  $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一独立增量过程;
- 3  $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一平稳增量过程, 且

$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h),$$

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h),$$

则我们称 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程.

思考: 上面两个式子的直观含义是什么?



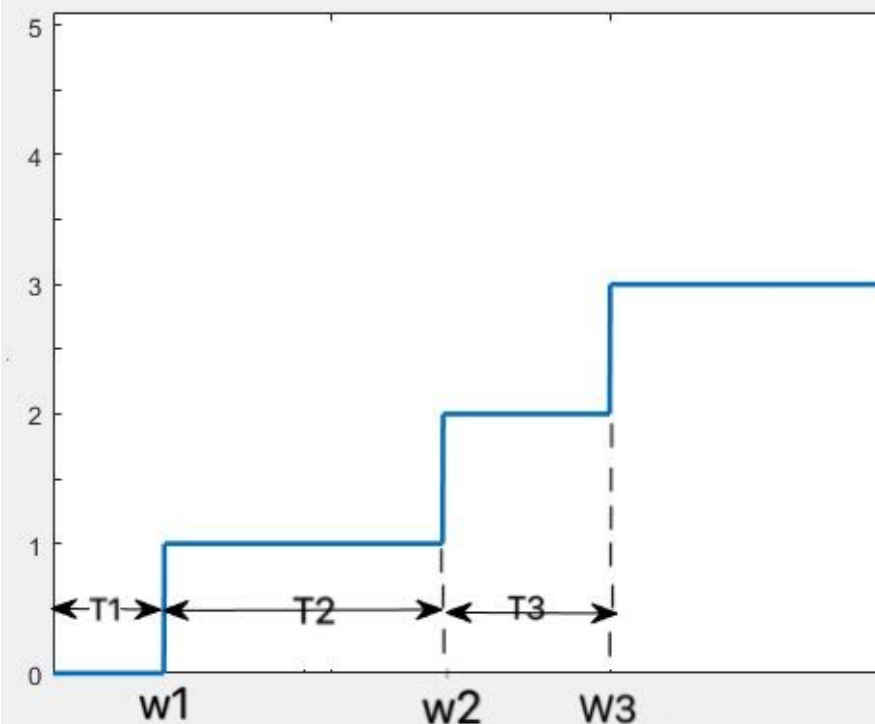


# Poisson 过程的轨道图



## 含义

在充分短的时间范围内,  
“事件A” 最多只发生1次.





# 作业



- 1 设顾客以速率为 $\lambda$ 的Poisson过程到达服务机构,
  - (1) 求第3位顾客是在第3个单位时间内到达的概率;
  - (2) 若已知在5个单位时间内来了8位顾客, 求这8位顾客都是在中间三个单位时间内达到的概率.
- 2 设 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程, 对 $0 < s < t$ , 求 $E(N_t|N_s)$ 和 $E(N_s|N_t)$ .





华中科技大学  
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 谢谢

