华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.11 Markov链的平稳分布

主讲：王湘君

平稳分布

定义4.1.11 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，若存在$\{\pi_j, j \in I\}$，满足

1. $\pi_j \geq 0$;
2. $\sum_{j\in I} \pi_j = 1$;
3. $\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}$.

我们称$\{\pi_j, j \in I\}$为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的一个平稳分布.

注

1. 若记向量$\pi = (\cdots, \pi_j, \cdots)$, 则(3)的矩阵形式是$\pi = \pi\mathbb{P}$, 由C-K方程, 等价于$\pi = \pi\mathbb{P}^{(n)}$.
2. 若π为$\{X_n\}$的一个平稳分布，我们取初始分布$P^T(0) = \pi$, 则$P^T(n) = \pi\mathbb{P}^{(n)} = \pi$, 进一步，我们有$\{X_n\}$为一个严平稳过程.

例子

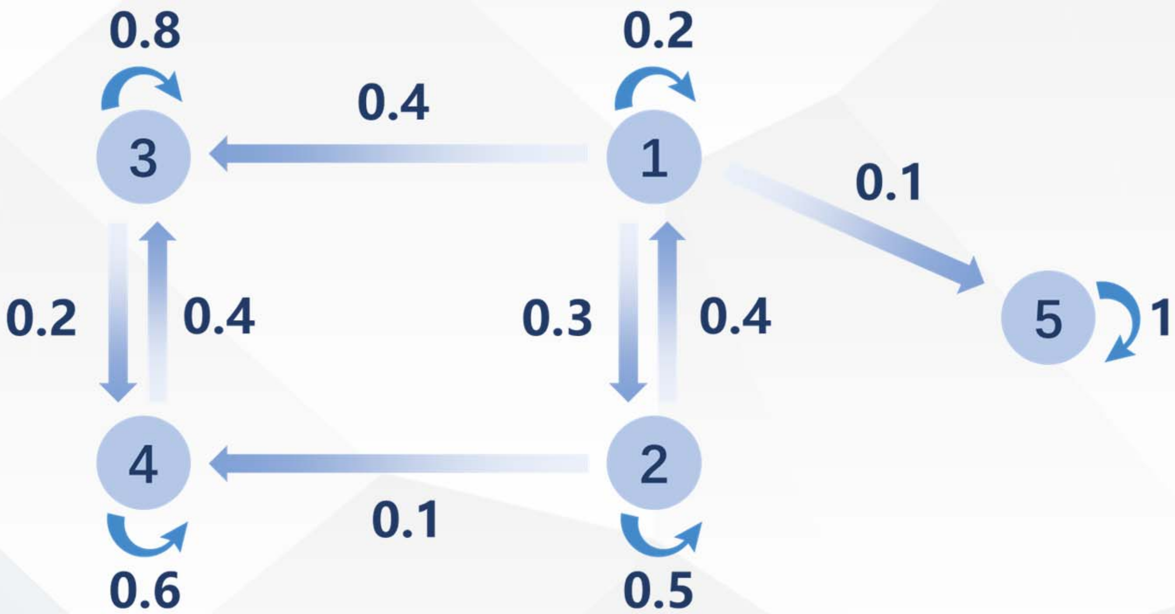

图4.5.1

$C_1=\{3,4\}$构成不可约闭集，由$(\pi_3,\pi_4)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}=(\pi_3,\pi_4)$及$\pi_3+\pi_4=1$,

得C_1上的平稳分布$(\pi_3,\pi_4)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. 所以$\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$为$\{X_n\}$的一个平稳分布.

遍历态的判别准则

定理4.11.2 若$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一不可约非周期Markov链，则$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为遍历链的充要条件是存在平稳分布$\{\pi_j, j \in I\}$. 并且，我们有平稳分布唯一，$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$.

证明 先证平稳分布的唯一性. 若存在平稳分布$\{\pi_j, j \in I\}$, 由注 1 $\pi = \pi \mathbb{P}^{(n)}$,

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)},$$

令$n \to +\infty$，由控制收敛定理及定理4.10.4，$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$.

再证充分性. 由于$\sum_{j \in I} \frac{1}{\mu_j} = 1$, 至少存在一个$k \in I, s.t. \frac{1}{\mu_k} > 0$, 即$\mu_k < +\infty$, k正常返，再由不可约性，所有态正常返，所以，$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为遍历链.

遍历态的判别准则

最后证必要性. 只需证$\left\{\pi_j=\frac{1}{\mu_j}, j\in I\right\}$为$\{X_n\}$的一个平稳分布.

条件 (1)显然满足，由C-K方程，

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)},$$

令$m\to+\infty$，还是由控制收敛定理及定理4.10.4，$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}p_{kj}^{(n)}$，条件(3)满足.

再令$n\to+\infty$，有$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}\frac{1}{\mu_j}$，所以$\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}=1$，条件(2)满足.

注

定理4.11.2只区分了正常返与否，非常返与常返与否的区分也有一个代数的方法，可见

[1] 复旦大学编，概率论第三册 随机过程，高等教育出版社，1981.

例：正半轴上的随机游动

- 考虑正半轴上的随机游动， $I=\{0,1,\cdots\}$, $\mathbb{P}=\begin{pmatrix} q & p & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.
- 取 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$, 由平稳方程，有

$$\pi_0=q\pi_0+q\pi_1 \Rightarrow \pi_1=\frac{p}{q}\pi_0,$$

$$\pi_1=p\pi_0+q\pi_2 \Rightarrow \pi_2=\frac{1}{q}(\pi_1-p\pi_0)=\frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\pi_0-p\pi_0\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^2\pi_0,$$

- 递推，有 $\forall n$, $\pi_n=\left(\frac{p}{q}\right)^n\pi_0$.

例：正半轴上的随机游动

- 又需要

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^n \pi_0 = 1,$$

所以，当$\frac{p}{q} < 1$时，$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$有平稳分布$\pi_n = \left(\frac{p}{q}\right)^n \left(1 - \frac{p}{q}\right)$，为遍历链.
我们可以有更进一步的结论，

$\frac{p}{q} = 1$时，$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为零常返链；
$\frac{p}{q} > 1$时，$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为非常返链.

作业

考虑§4.9作业2，

1. 求每个常返闭集上的平稳分布；
2. 求μ_1；

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢