华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 3.5 到达时刻的条件分布

主讲：王湘君

C.R.V.顺序统计量的分布

引理3.5.1 设总体X为一C.R.V., 密度为$f(x)$，其简单随机样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的顺序统计量$(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*)$的联合密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n! \prod_{k=1}^{n} f(x_i) \cdot \chi_{\{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}} .$$

证明 对$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，由密度函数含义，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lim_{h_i \to 0, i=1,\cdots,n} \frac{P(x_i < X_i^* < x_i + h_i, i = 1,2,\cdots,n)}{h_1 h_2 \cdots h_n}$$

$$= \lim_{h_i \to 0, i=1,\cdots,n} \frac{P(X_i, i = 1,2,\cdots,n \text{ 有且仅有一个取值在}(x_i, x_i + h_i)\text{中})}{h_1 h_2 \cdots h_n} .$$

到达时刻的条件分布

定理3.5.2 若已知$N_t=n$，则$(W_1,W_2,\cdots,W_n)$与n个独立的$[0,t]$上的均匀分布的顺序统计量同分布.

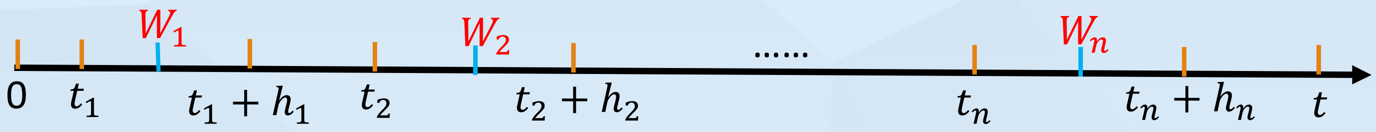
即：设总体$U\sim U[0,t]$, 简单随机样本$(U_1,U_2,\cdots,U_n)$, 顺序统计量$(U_1^*,U_2^*,\cdots,U_n^*)$，则

$$(W_1,W_2,\cdots,W_n)\Big|_{N_t=n}\sim(U_1^*,U_2^*,\cdots,U_n^*).$$

由引理3.5.1有$(W_1,W_2,\cdots,W_n)|_{N_t=n}$的条件密度

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n|N_t=n)=\frac{n!}{t^n}\chi_{\{0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t\}}.$$

证明



$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n|N_t=n)=\lim_{h_i\to 0,i=1,\cdots,n}\frac{P(t_i<W_i<t_i+h_i,i=1,2,\cdots,n|N_t=n)}{h_1h_2\cdots h_n}$$

$$=\lim_{h_i\to 0,i=1,\cdots,n}\frac{P\left(N_{t_1}=0\right)P\left(N_{t_1+h_1}-N_{t_1}=1\right)P\left(N_{t_2}-N_{t_1+h_1}=0\right)\cdots P\left(N_t-N_{t_n+h_n}=0\right)}{h_1h_2\cdots h_nP(N_t=n)}$$

$$=\lim_{h_i\to 0,i=1,\cdots,n}\frac{e^{-\lambda t_1}\cdot e^{-\lambda h_1}\lambda h_1\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1-h_1)}\cdot e^{-\lambda h_2}\lambda h_2\cdots e^{-\lambda h_n}\lambda h_n\cdot e^{-\lambda(t-t_n-h_n)}}{h_1h_2\cdots h_ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}=\frac{n!}{t^n}.$$

例子

例3.5.3 若观众以速率为λ的Poisson过程到达电影院，电影在t时刻上映，求观众等待时间和的期望.

解 以$\{W_n\}$记观众到达过程$\{N_t\}$的到达时刻，则所求为

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t}(t-W_k)\right).$$

由

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t}(t-W_k)\,|N_t=n\right)=E\left(\sum_{k=1}^{n}(t-W_k)\,|N_t=n\right)$$

$$=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}W_k|N_t=n\right)=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_k^*\right)=nt-E\left(\sum_{k=1}^{n}U_k\right)=\frac{nt}{2},$$

例子

例3.5.3 若观众以速率为λ的Poisson过程到达电影院，电影在t时刻上映，求观众等待时间和的期望.

解 所以，

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t}(t-W_k)\right)=E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N_t}(t-W_k)\,|N_t\right)\right)=E\left(\frac{tN_t}{2}\right)=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

注3.5.4

我们在作业中提供了另外的解法.实际上，我们还有一个更直观的解法

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t}(t-W_k)\right)=E\int_0^t N_s ds \quad ,$$

请大家结合 Poisson过程的轨道图思考为什么?

作业

1 由结论：对任意$[0,\infty)$上的可积函数g,有

$$E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g(W_n)\right) = \lambda \int_0^{+\infty} g(t)dt\,,$$

计算例3.5.3 .

2 求（1）$E(W_1W_2W_3)$；（2）$E(W_1W_2W_3|N_t = 3)$；（3）$E(W_2|N_t = 3)$.

3 模拟Poisson过程的轨道，并给出注3.5.4的意义.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢