



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.2 Markov链的例子

主讲：王湘君



随机游动 (一)



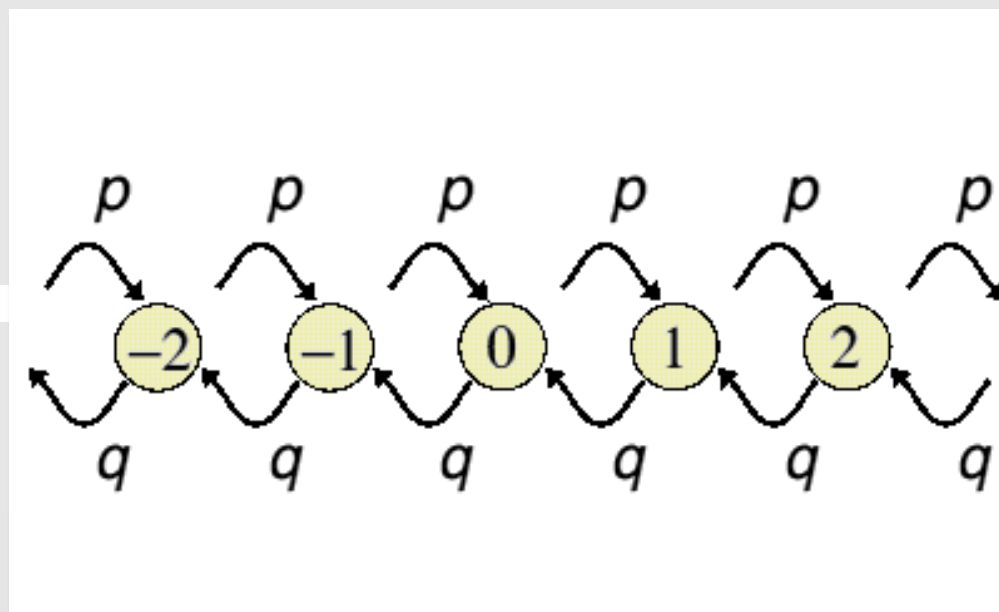
1 $I = \mathbb{Z}$ 上无限制的随机游动, 其转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

其中, $p + q = 1, p = q$ 时称为对称随机游动.

2 有粘性的随机游动, $p + q + r = 1$,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ q & r & p & 0 & \dots \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$





随机游动 (二)



3 带两个吸收壁的随机游动, $I = \{0, 1, \dots, N\}$, 转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 带一个反射壁的随机游动, $I = \{0, 1, \dots\}$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$



Ehrenfest模型



Ehrenfest模型

是一个著名的统计
力学的数学模型

- ▶ 考虑一个容器内有 $2a$ 个粒子, 一张薄膜将容器分成左右两部分. 经过一个单位时间任选一个粒子从左到右或从右到左. 以 X_n 记 n 时刻左右两部分粒子数之差.
- ▶ 作为练习, 请大家给出Ehrenfest模型的状态空间和转移概率矩阵.



离散分支过程

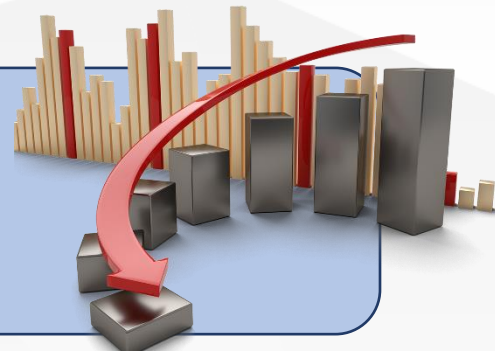


以 X_n 表示某种群第 n 代的数目，假设每个个体产生下一代的数目独立同分布，以 $\xi_{n,k}$ 表示第 n 代第 k 个个体产生的下一代数目，则

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k} ,$$

我们称 $\{X_n\}$ 为一个离散分支过程.

离散分支过程在生物学、医学、经济学、社会学等领域有重要的作用.





作业



- 1 给出Ehrenfest模型的状态空间和转移概率矩阵.
- 2 对离散分支过程, 若 $\xi_{n,k} \sim P(\lambda)$, 求 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 的转移概率 p_{ij} .



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢!