



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

*Stochastic Process*

## § 5.3 转移速率矩阵

主讲：王湘君



# 转移概率矩阵的一致连续性



➤➤ **定义5.3.1** 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为连续时间Markov链, 且满足正则性条件, 则  
 $\forall i, j \in I, p_{ij}(t)$ 一致连续.

**证 明** 不妨设 $h > 0$ , 由C-K方程,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_{k \in I} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - (1 - p_{ii}(h))p_{ij}(t), \end{aligned}$$

所以, 一方面

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) \leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h),$$



# 转移概率矩阵的一致连续性



**定义5.3.1** 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为连续时间Markov链, 且满足正则性条件, 则

$\forall i, j \in I, p_{ij}(t)$ 一致连续.

**证**

**明**

另一方面,

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \geq -(1 - p_{ii}(h))p_{ij}(t) \geq -(1 - p_{ii}(h)),$$

所以,

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(h).$$

由正则性条件, 得证一致连续性.



# 转移概率在0点的导数



## 定理5.3.2

设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为一连续时间Markov链, 且满足正则性条件, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = v_i \triangleq q_{ii}, \quad (6.1.1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \triangleq q_{ij}, \quad i \neq j. \quad (6.1.2)$$

**证 明** 只证(6.1.1).

$$1 - p_{ii}(h) = 1 - P(\tau_i > h) = 1 - e^{-v_i h}.$$

(6.1.2)的证明可参见

[1] 复旦大学编, 概率论第三册 随机过程, 高等教育出版社, 1981.



# 转移速率矩阵



➤➤ **定义5.3.3** 我们称定理5.3.2中的 $q_{ij}$ 为 $\{X_t, t \geq 0\}$ 从状态 $i$ 到状态 $j$ 的转移速率.

令 $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & -q_{ii} & q_{ij} \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ , 我们称 $\mathbb{Q}$ 为 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵.

可见,

$$\mathbb{Q} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(h) - E}{h} = \mathbb{P}'(0).$$

我们用 $\mathbb{Q}$ 取代了离散情形下一步转移概率矩阵的地位.

那么能否用 $\mathbb{Q}$ 导出转移概率矩阵 $\mathbb{P}(t)$ ?





# 转移速率矩阵的性质



►► **定理5.3.4** 若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间有限, 则 $q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ , 即 $Q$ 的行和为0.

一般地, 我们有 $q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$ .

**证 明** 由于转移概率矩阵为随机矩阵, 则

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(h) = 1 \Rightarrow 1 - p_{ii}(h) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h),$$

两边除以 $h$ , 令 $h \rightarrow 0$ ,

若状态空间有限, 则极限与求和可交换, 有 $q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ .

一般地, 由Fatou引理, 有 $q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$ .





# Poisson过程的转移速率矩阵



Poisson过程的转移速率矩阵  
为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$



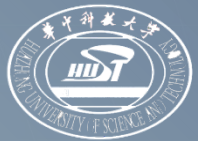


# 作业



求§5.1作业1中 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵.





华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

!