



# 随机 机 定 程

§ 4.7 正常返与零常返

主讲: 王湘君



#### 正常返与零常返





定义4.7.1 设i为常返态,以 $\mu_i$ 记 $\{X_n\}$ 从i出发首次返回i的平均步数,即

$$\mu_i = E(T_{ii}|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

- ◆若 $\mu_i$  < +∞,则称i为正常返态(positive recurrent);
- ◆若 $\mu_i = +\infty$ ,则称i为零常返态(null recurrent).

例4.7.2

图4.3.1对状态3,

$$f_{33}^{(1)} = 0.8, \quad f_{33}^{(n)} = 0.2(0.6)^{n-2}0.4, n \ge 2$$

$$\mu_3 = 0.8 + 0.08 \sum_{n=2}^{+\infty} n(0.6)^{n-2} = \frac{3}{2}.$$



### 正常返与零常返判别准则





定理4.7.3

设i为常返态,则i为零常返态的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty}p_{ii}^{(n)}=0.$$

这个定理的证明比较繁琐,我们略去.



若j为零常返态,则对任意 $i \in I$ ,  $\lim_{n \to +\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ .

这个证明我们留作练习.

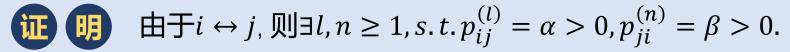


#### 火态的类性质





定理4.7.5 若 $i \leftrightarrow j$ ,则i,j具有相同的状态分类.



由C-K方程,有

$$p_{ii}^{(l+m+n)} = \sum_{i,j} p_{is}^{(l)} p_{st}^{(m)} p_{ti}^{(n)} \ge \alpha \beta p_{jj}^{(m)}, \tag{4.7.1}$$

$$p_{jj}^{(n+m+l)} = \sum_{s,t \in I} p_{js}^{(n)} p_{st}^{(m)} p_{tj}^{(l)} \ge \alpha \beta p_{ii}^{(m)}, \tag{4.7.2}$$

对m求和,有



#### 状态的类性质







$$\sum_{\substack{m=1\\+\infty\\ m=1}}^{+\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \ge \alpha\beta \sum_{\substack{m=1\\+\infty\\ m=1}}^{+\infty} p_{jj}^{(m)},$$

可见,  $\sum_{m=1}^{+\infty} p_{ii}^{(m)}$ ,  $\sum_{m=1}^{+\infty} p_{jj}^{(m)}$ 同时收敛或发散, 即i, j同为常返或非常返.

若i,j同为常返,(4.7.1)(4.7.2)对m取极限,有

$$\begin{split} &\lim_{m \to +\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha \beta \lim_{m \to +\infty} p_{jj}^{(m)} \,, \\ &\lim_{m \to +\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha \beta \lim_{m \to +\infty} p_{ii}^{(m)} \,, \end{split}$$

可见  $\lim_{m\to +\infty} p_{ii}^{(m)}$ ,  $\lim_{m\to +\infty} p_{jj}^{(m)}$ 同为0或非0,即i,j同为正常返或零常返.



#### 作业





证明

推论4.7.4.



## 塘 塘 临