华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 5.1 连续时间的Markov链

主讲：王湘君

连续时间Markov链定义

定义5.1.1 设S.P. $\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间I离散（有限或可列），且满足Markov性，即对任意$n \in \mathbb{N}, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in I, 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$，有

$$P\left(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \middle| X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_n} = i_n\right) = P\left(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \middle| X_{t_n} = i_n\right),$$

则我们称$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链.

连续时间Markov链的有限维分布列

注

由于

$$P\left(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_n} = i_n\right)$$

$$= P(X_0 = i_0)P\left(X_{t_1} = i_1 \middle| X_0 = i_0\right) \cdots P\left(X_{t_n} = i_n \middle| X_0 = i_0, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)$$

$$= P(X_0 = i_0)P\left(X_{t_1} = i_1 \middle| X_0 = i_0\right) \cdots P\left(X_{t_n} = i_n \middle| X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right),$$

所以，连续时间Markov链的有限维分布列由它的初始分布和“转移概率”所决定.

连续时间Markov链的转移概率

定义5.1.2 设$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链，我们称

$$p_{ij}(s,t) \triangleq P(X_{s+t} = j | X_s = i)$$

为$\{X_t, t \geq 0\}$的转移概率；

◆特别地，若$p_{ij}(s,t)$与s无关，则我们称$\{X_t, t \geq 0\}$为一齐次连续时间Markov链；

◆对齐次连续时间Markov链，我们记$\mathbb{P}(t) = \left(p_{ij}(t)\right)$, 称之为$\{X_t, t \geq 0\}$的转移概率矩阵.

两点说明

注

1 以后我们只讨论（齐次）连续时间Markov链，并约定$\mathbb{P}(0) = E$;

2 连续时间Markov链没有最小单位时间的概念，所以也没有步数的概念，用什么来取代一步转移概率矩阵的地位，这是一个重要的问题.

例：Poisson过程

Poisson过程

是我们见过的连续时间Markov链.

设$\{N_t, t \geq 0\}$为一参数为λ的Poisson过程, 则对$j \geq i$，其转移概率

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P(N_{s+t} = j | N_s = i) \\
&= P(N_{s+t} - N_s = j - i | N_s = i) \\
&= P(N_{s+t} - N_s = j - i) \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.
\end{aligned}
$$

作业

1

设$\{N_t, t \geq 0\}$为一参数为λ的Poisson过程,

定义$X_t = \begin{cases} -1, & N_t\text{为奇数}, \\ 1, & N_t\text{为偶数}, \end{cases}$

证明

$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链,

并求其转移概率矩阵.

华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！