华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 6.7 均方微分与均方积分

主讲：王湘君

均方可微

定义6.7.1 设$\{X_t, t\in T\}$为二阶矩过程， T为 $\mathbb{R}$的一个连续区间，

- 若对$t\in T, \exists X_t'$, $s.t.$ $\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}=X_t'$, 则称$\{X_t, t\in T\}$在$t$点均方可微;
- 若对任意$t\in T$, $\{X_t\}$在t点均方可微, 则称$\{X_t\}$为一个均方可微的随机过程, 记为$\frac{dX_t}{dt}=X_t'$.

例6.7.2

Poisson过程和Wiener过程都不是均方可微的随机过程.

$$E\left(\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\right)^2=\frac{\sigma^2|h|}{h^2}\to+\infty;$$

$$E\left(\frac{N_{t+h}-N_t}{h}\right)^2=\frac{\lambda|h|+\lambda^2h^2}{h^2}\to+\infty.$$

均方可微的判别准则

定理6.7.3

$\{X_t, t\in T\}$在t点均方可微$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$(t,t)$点的广义二阶导数$\frac{\partial^2 R_X}{\partial t_1 \partial t_2}\big|_{(t,t)}$存在.

证明 $\{X_t, t\in T\}$在t点均方可微$\Leftrightarrow \underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}$存在

$$\Leftrightarrow \lim_{h,k\to 0} E\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\cdot\overline{\frac{X_{t+k}-X_t}{k}}\right)\text{存在},$$

$$\lim_{h,k\to 0} E\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\cdot\overline{\frac{X_{t+k}-X_t}{k}}\right)=\lim_{h,k\to 0}\frac{R_X(t+h,t+k)-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+k)+R_X(t,t)}{hk}=\frac{\partial^2 R_X}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_{(t,t)}.$$

均方可微的性质

定理6.7.4 设 $\{X_t, t\in T\}$为均方可微的随机过程, 则$\{X_t', t\in T\}$为二阶矩过程, 且

1. $m_{X'}(t)=\frac{dm_X(t)}{dt}$;
2. $\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}=R_{X'X}(s,t)$, $\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}=R_{XX'}(s,t)$;
3. $\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}=R_{X'}(s,t)$.

证明 只证(1), 其它类似. 由定理6.6.3 (5),

$$m_{X'}(t)=E\left(\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)=\lim_{h\to 0}E\left(\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)=\frac{dm_X(t)}{dt}.$$

均方可微的性质

推论 6.7.5

设 $\{X_t\}$为均方可微的平稳过程, 则$\{X_t'\}$也为平稳过程, 且

$$m_{X'}(t) = 0, \qquad R_{X'}(\tau) = -R_X''(\tau).$$

例6.7.6

$X_t = A\cos(\omega t + \Phi)$, $R_X(\tau) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\cos\omega\tau$,

则$\{X_t\}$为均方可微的平稳过程，且

$$X_t' = -\omega A\sin(\omega t + \Phi),$$

$$m_{X'}(t) = 0, R_{X'}(\tau) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\omega^2\cos\omega\tau.$$

均方可积

定义6.7.7 设$\{X_t, t\in T\}$为二阶矩过程, $[a,b]\subset T$为一个有限区间. 对$[a,b]$的分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b, \qquad \Delta_n=\max_{1\le i\le n}(t_i-t_{i-1}),$$

并取$t_{i-1}\le \xi_i\le t_i$, 若当$\Delta_n\to 0$时,

$$\sum_{i=1}^{n} X_{\xi_i}(t_i-t_{i-1})$$

均方收敛，且不依赖于分割及分点的选取，我们称$\{X_t, t\in T\}$ 在$[a,b]$上均方可积，并记这个均方极限为$\int_a^b X_t dt$.

注

1. 均方积分$\int_a^b X_t dt$为$L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$中的一个随机变量;
2. 若是无穷区间，还需要再取一次均方极限.

均方可积的判别准则及性质

定理6.7.8 $\{X_t, t\in T\}$ 在$[a,b]$上均方可积$\Leftrightarrow \int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt$ 存在.

推论 6.7.9

若$\{X_t, t\in T\}$ 在$[a,b]$上均方连续，则$\{X_t, t\in T\}$ 在$[a,b]$上均方可积.

定理6.7.10 若$\{X_t, t\in T\}$ 在$[a,b]$上均方可积，则

$$E\left(\int_a^b X_t dt\right) = \int_a^b m_X(t)dt\,,$$

$$E\left|\int_a^b X_t dt\right|^2 = \int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt\,.$$

作业

1 设$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$为均方可微的随机过程， $R_X(\tau) = \cos \omega\tau$，令$Y_t = 2X_t + 3X_t'$,

(1)证明$\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$为均方可微的平稳过程;

(2) 求$R_{XY}(s, t)$.

2 设$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为均方连续的平稳随机过程，令$Y_t = \int_0^t X_s ds$,

(1)问$\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$是否为平稳过程?

(2)需要附加什么条件，才能使$\{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为平稳过程?

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！