



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 6.3 平稳过程相关函数的性质

主讲：王湘君



平稳过程相关函数的性质



➤➤ **性质6.3.1** 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一个平稳过程, 其相关函数为 $R_X(\tau)$, 则

1 $R_X(0) \geq |R_X(\tau)| \geq 0;$

证 明

由Cauchy-Schwartz不等式, $|R_X(\tau)|^2 = |E(X_{t+\tau}\overline{X_t})|^2 \leq E|X_{t+\tau}|^2 E|X_t|^2 = R_X^2(0).$

2 $R_X(\tau) = \overline{R_X(-\tau)}$; 若为实平稳过程, 则 $R_X(\tau)$ 为偶函数;



平稳过程相关函数的性质



►► **性质6.3.1** 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一个平稳过程, 其相关函数为 $R_X(\tau)$, 则

3 $R_X(\tau)$ 为非负定函数.

证 明 对任意 $n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, t_1, \dots, t_n \in T$,

$$0 \leq E \left| \sum_{k=1}^n c_k X_{t_k} \right|^2 = E \left(\sum_{k=1}^n c_k X_{t_k} \overline{\sum_{j=1}^n c_j X_{t_j}} \right) = \sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j R_X(t_k - t_j).$$

4 若 $\{X_t, t \in T\}$ 为一个以 L 为周期的平稳过程, 则 $R_X(\tau)$ 为一个以 L 为周期的函数.



平稳过程相关函数的说明



平稳过程相关函数的 Hermit 性和非负定性是平稳过程谱分解的根本.

➤ ➤ **定理6.3.2** (Bochner-Khintchine定理) 设 $R(\tau)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数, 则它是非负定函数的充要条件是存在一个分布函数 $F(\omega)$ ($\omega \in \mathbb{R}, F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$), 对 $\forall \tau \in \mathbb{R}$ 满足

$$\frac{R(\tau)}{R(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega),$$

而且这种表示式是惟一的.

➤ ➤ **定理6.3.3** (Herglotz定理) 设 $\{C_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是一个序列, 则它是非负定序列的充要条件是存在一个分布函数 $F(\omega)$ ($\omega \in (-\pi, \pi), F(-\pi) = 0, F(+\pi) = 1$), 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 满足

$$\frac{C_n}{C_0} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} dF(\omega).$$



联合平稳过程



性质6.3.4

设 $\{X_t, t \in T\}, \{Y_t, t \in T\}$ 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的平稳过程, 令 $Z_t = X_t + Y_t$, 若 $\{Z_t, t \in T\}$ 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的平稳过程, 则称 $\{X_t, t \in T\}, \{Y_t, t \in T\}$ 联合平稳.

✓ 由于 $m_Z(t) = m_X + m_Y$, 及

$$R_Z(s, t) = E(X_s + Y_s)(\overline{X_t + Y_t}) = R_X(s - t) + R_Y(s - t) + R_{XY}(s, t) + R_{YX}(s, t),$$

✓ 所以,

$\{X_t, t \in T\}, \{Y_t, t \in T\}$ 联合平稳 $\Leftrightarrow R_{XY}(s, t)$ 只依赖于 $s - t$.



联合平稳过程



例6.3.5

设 $A, B \text{ i.i.d.} \sim N(0,1)$, $X_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, $Y_t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$,

$Z_t = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$, 其中常数 $\omega \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

则 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}, \{Z_t, t \in \mathbb{R}\}$ 联合平稳, 但 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}, \{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ 非联合平稳.

证 明

$$R_{XZ}(s, t) = E((A \cos \omega s + B \sin \omega s)(-A \sin \omega t + B \cos \omega t)) = \sin \omega(s - t).$$

$$R_{XY}(s, t) = E((A \sin \omega s + B \cos \omega s)(-A \sin \omega t + B \cos \omega t)) = \cos \omega(s + t).$$



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢!