華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 1.6 条件期望的应用

主讲：王湘君

例子

例1.6.1 若$A \in \mathcal{F}, Y$为一$\mathcal{F}$可测C.R.V., 则

$$P(A) = E\big(E(\chi_A|Y)\big) = \int_{\mathbb{R}} E(\chi_A|Y=y) f_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}} P(A|Y=y) f_Y(y)dy.$$

例1.6.2 设X, Y独立，且$X \sim N(0,1), Y \sim P(\lambda), Z = X + Y$, 求Z的分布。

解： $F_Z(z) = P(X + Y \leq z)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X + Y \leq z|Y = k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \leq z - k|Y = k)P(Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \leq z - k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(z - k)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} .$$

随机个R.V.s的和

例1.6.3 设$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $i.i.d$, N为一个取值于$\mathbb{N}_0$的 R.V.，且$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$与$N$相互独立, 令

$$X=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\,,$$

称之为随机个R.V.的和。由

$$E(X|N=n)=E\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,|\,N=n\right)=E\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=nE(\xi),$$

有$E(X|N)=NE(\xi)$，所以,

$$EX=E\big(E(X|N)\big)=E(N)E(\xi).$$

随机个R.V.s的和（续）

一般地，我们来求X的特征函数，由

$$E\left(e^{iuX}\middle|N=n\right)=E\left(e^{iu\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\middle|N=n\right)=E\left(e^{iu\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\right)=\left(\phi_\xi(u)\right)^n,$$

有$\phi_X(u)=E\left(E\left(e^{iuX}\middle|N\right)\right)=E\left(\left(\phi_\xi(u)\right)^N\right)$，求导，$\phi_X'(u)=E\left(N\left(\phi_\xi(u)\right)^{N-1}\phi_\xi'(u)\right)$，

$$\phi_X''(u)=E\left(N(N-1)\left(\phi_\xi(u)\right)^{N-2}(\phi_\xi'(u))^2+N\left(\phi_\xi(u)\right)^{N-1}\phi_\xi''(u)\right),$$

令$u=0$，有$iE(X)=E\left(NiE(\xi)\right)\Rightarrow EX=E(N)E(\xi)$，

及$i^2E(X^2)=E\left(N(N-1)\left(iE(\xi)\right)^2+Ni^2E(\xi^2)\right)$，整理，有

$$D(X)=E(N)D(\xi)+D(N)\left(E(\xi)\right)^2.$$

作业

1. 定义条件方差 $D(X|Y)=E\left(\left(X-E(X|Y)\right)^2|Y\right)$, 证明:

$$D(X)=E\big(D(X|Y)\big)+D(E(X|Y)).$$

2. 在[0,1] 任取一点 X_1，以后对任意$n\geq 1$，从$[X_n,X_n+1]$中任取一点 X_{n+1}，

(1)求$E(X_n)$; (2)求X_2的密度函数.

華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！