华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.5 常返态与非常返态

主讲：王湘君

状态之间的差异

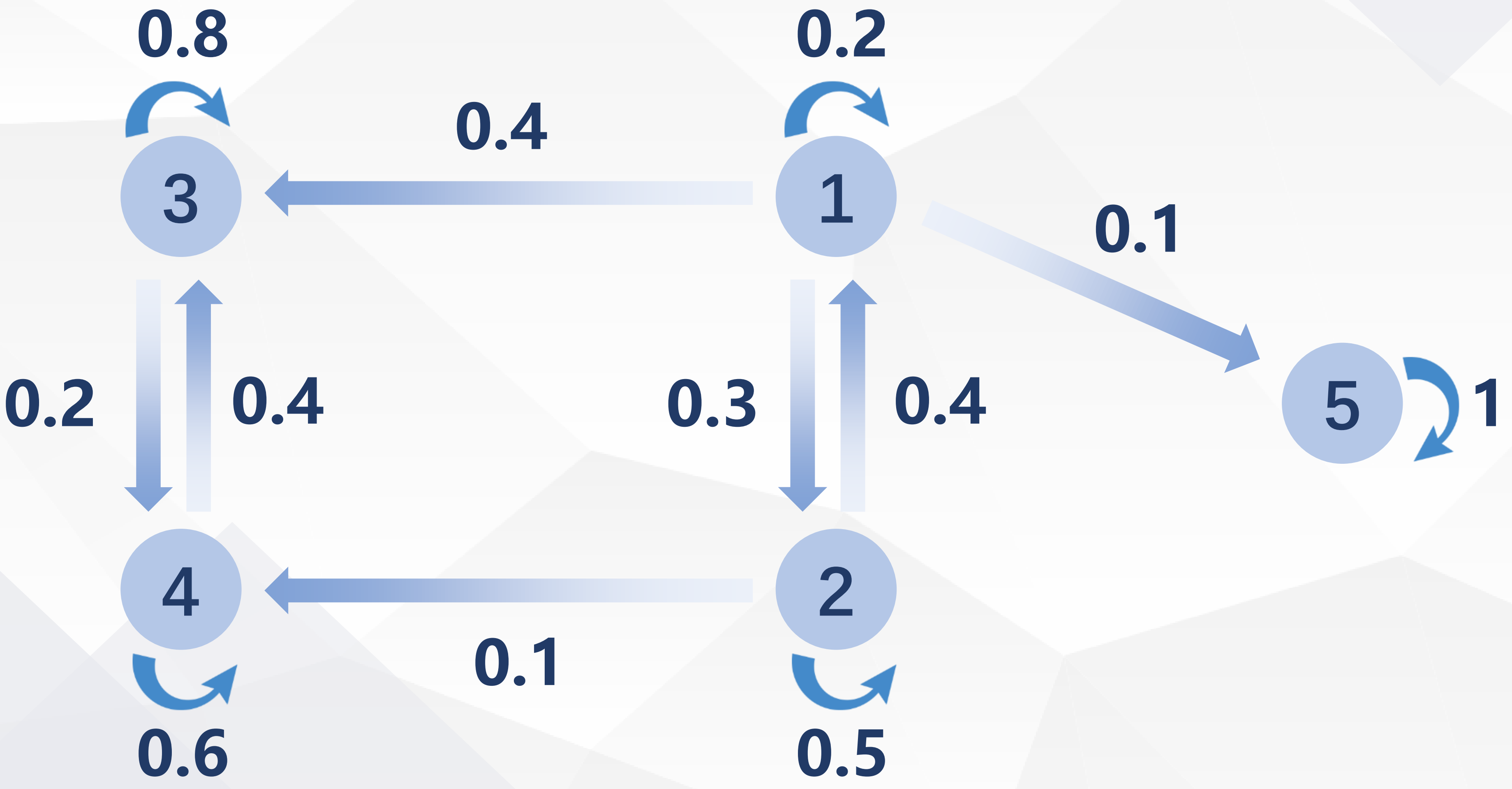

图4.5.1

状态的可达

定义4.5.1 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，对$i, j \in I$,

1. 若$\exists n \geq 1, s.t. p_{ij}^{(n)} > 0$,则称$i$可达$j$，记为$i \to j$;
2. 若$\forall n \geq 1, p_{ij}^{(n)} = 0$,则称$i$不可达$j$，记为$i \nrightarrow j$;
3. 若$i \to j, j \to i$,则称i, j互通，记为$i \leftrightarrow j$.

例 图4.5.1中$1 \leftrightarrow 2$，$3 \leftrightarrow 4$;

$\forall j, 1 \to j$

……

首达时及其概率分布

定义4.5.2 设 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，对$i, j \in I$, 令

$$T_{ij} \triangleq \inf\{n | X_0 = i, X_n = j\} = \inf\{n | X_m = i, X_{m+n} = j\},$$

约定$\inf \emptyset = +\infty$，T_{ij}为 $\{X_n\}$从状态i出发，首次到达状态j的步数，为一个广义的R.V..

若$i = j, T_{ii}$为 $\{X_n\}$从状态i出发，首次返回i的步数.

再令

$$f_{ij}^{(n)} \triangleq P(T_{ij} = n | X_0 = i),$$

$f_{ij}^{(n)}$为 $\{X_n\}$从状态i出发，经过n步首次到达状态j的概率.

常返与非常返

定义4.5.3 令

$$f_{ij} \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{ij}^{(n)},$$

则$f_{ij} = P(T_{ij} < +\infty | X_0 = i)$, 为$\{X_n\}$从状态$i$出发，在有限的时间内到达状态$j$的概率.

若$f_{ii} = 1$	我们称状态i为常返态(recurrent)
若$f_{ii} < 1$	我们称状态i为非常返态(transient)

图4.5.1中状态

显然，状态5为常返态，实际上，它是一个吸收态；

对状态 1

$$f_{11}^{(1)} = 0.2, \quad f_{11}^{(n)} = 0.3(0.5)^{n-2}0.4, n \geq 2$$

$$f_{11} = 0.2 + 0.12 * \frac{1}{1 - 0.5} = 0.44 < 1,$$

所以，1为非常返态；同样，2也为非常返态；

对状态 3

$$f_{33}^{(1)} = 0.8, \quad f_{33}^{(n)} = 0.2(0.6)^{n-2}0.4, n \geq 2$$

$$f_{33} = 0.8 + 0.08 * \frac{1}{1 - 0.6} = 1,$$

所以，3为常返态；同样，4也为常返态.

常返的直观含义

定义4.5.4 若i为常返态，则$\{X_n\}$从i出发，无穷多次返回i的概率为1；若i为非常返态，则$\{X_n\}$从i出发，无穷多次返回i的概率为0.

证明 以$Q_{ii}^{(m)}$记$\{X_n\}$从i出发，至少m次返回i的概率; 以Q_{ii}记$\{X_n\}$从i出发，无穷多次返回i的概率, 则$Q_{ii} = \lim\limits_{m\to+\infty} Q_{ii}^{(m)}$.

注意到 $Q_{ii}^{(1)} = f_{ii}$. 而

$$Q_{ii}^{(m+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)} Q_{ii}^{(m)} = f_{ii} Q_{ii}^{(m)},$$

递推，有$Q_{ii}^{(m)} = (f_{ii})^m \to \begin{cases} 1, & f_{ii} = 1, \\ 0, & f_{ii} < 1. \end{cases}$

作业

1 对图4.5.1，求$f_{14}^{(4)}$.

2 证明首步分解定理

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k:k\neq j} p_{ik} f_{kj} .$$

谢 谢 ！