華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 1.4 多维正态分布

主讲：王湘君

多维正态分布

定义1.4.1 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个n维R.V.，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$为$X$的均值向量，$\Gamma=\left(\sigma_{ij}\right)_{n\times n}$为$X$的协方差矩阵, 且$|\Gamma|>0$, 若$X$的密度函数

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Gamma|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-(x-\mu)^T\Gamma^{-1}(x-\mu)\},$$

则称X服从n维（非退化）正态分布，记为$X\sim N(\mu,\Gamma)$.

练习： 对二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$验证上面的密度函数表达式.

命题1.4.2 若$X\sim N(\mu,\Gamma)$，则X的特征函数

$$\phi_X(u)=\exp\left\{iu^T\mu-\frac{1}{2}u^T\Gamma u\right\}.$$

多维正态分布的另一定义

定义1.4.3 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个n维R.V.， $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$为$X$的均值向量， $\Gamma=\left(\sigma_{ij}\right)_{n\times n}$为$X$的协方差矩阵,若$X$的特征函数

$$\phi_X(u)=\exp\left\{iu^T\mu-\frac{1}{2}u^T\Gamma u\right\},$$

则称X服从n维正态分布$N(\mu,\Gamma)$.

注1.4.4

以后对正态分布，我们只需指出其均值向量和协方差矩阵即可.

正态分布的性质

定理1.4.5 设X服从 n维正态分布$N(\mu,\Gamma)$，A为一个$m\times n$阶矩阵， $b\in\mathbb{R}^m$,则

$$Y=AX+b\sim N(A\mu+b,A\Gamma A^T).$$

定理1.4.6 设$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$服从 n维正态分布$N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}\end{pmatrix}\right)$，则

（1）$X_i\sim N(\mu_i,\Gamma_{ii}),i=1,2;$ 特别地，若有$\Gamma_{12}=0$, 则X_1，X_2 相互独立；

（2）$X_2|_{X_1=x_1}\sim N(\mu_2+\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}(x_1-\mu_1)$，$\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12})$.

作业

1. 若$X=(X_1,X_2,X_3,X_4)^T$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个4维正态R.V.，其均值向量$\mu=0$，证明：

$$E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3).$$

2. 上网搜索“正态分布的前世今生”并阅读相关资料.

谢 谢 ！