華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 1.3 特征函数

主讲：王湘君

复值随机变量

定义1.3.1 设X,Y为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的两个一维实值R.V.，则我们称$Z=X+iY$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个复值R.V.；

称$E(Z)\triangleq E(X)+iE(Y)$为复R.V. Z 的期望；称$D(Z)\triangleq E|Z-E(Z)|^2$为复R.V. Z 的方差；

称$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)\triangleq E(Z_1-E(Z_1))\overline{(Z_2-E(Z_2))}$ 为两个复R.V. Z_1,Z_2的协方差.

注1.3.2

（1）以上的定义保持了期望的线性性，但协方差关于Z_1是线性的，关于Z_2是共轭线性的.

（2）有关复R.V.数字特征的性质与计算基本与实R.V.的一致.

特征函数的定义及例子（一）

定义1.3.3

设X为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个一维R.V.，称$\phi_X(u)\triangleq E\left(e^{iuX}\right),u\in\mathbb{R}$为$X$的特征函数.

例1.3.4

若 $X\sim B(n,p)$, 则

$$\phi_X(u)=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(pe^{iu})^k q^{n-k}=\left(pe^{iu}+q\right)^n .$$

例1.3.5

若 $X\sim P(\lambda)$，则

$$\phi_X(u)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{iuk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!}=e^{-\lambda(1-e^{iu})} .$$

特征函数的例子（二）

例1.3.6 若$X\sim U(-1,1)$, 则

$$\phi_X(u)=\int_{-1}^{1}e^{iux}\frac{1}{2}dx=\frac{\sin u}{u}.$$

例1.3.7 若$X\sim N(0,1)$，则

$$\phi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

这里采用微分方程的方法：

$$\phi_X'(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}ixe^{iux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ie^{iux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=-u\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

所以，$\phi_X'(u)+u\phi_X(u)=0$, 由$\phi_X(0)=1$，解得 $\phi_X(u)=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}$.

特征函数的性质（一）

定理1.3.8 设X为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的实值R.V., $F_X(x),\phi_X(u)$分别为X的分布函数和特征函数，则

（1）$F_X(x)$与$\phi_X(u)$一一对应，即X_1与X_2同分布 $\Leftrightarrow \phi_{X_1}(u)\equiv\phi_{X_2}(u)$；

（2）$\phi_X(0)=1, |\phi_X(u)|\le 1,\ \overline{\phi_X(u)}=\phi_X(-u)$，$\phi_X(u)$ 在$u\in\mathbb{R}$内一致连续；

证： $|\phi_X(u+h)-\phi_X(u)|=\left|\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i(u+h)x}-e^{iux}\right)dF_X(x)\right|\le\int_{\mathbb{R}}\left|e^{ihx}-1\right|dF_X(x).$

（3）ϕ_X非负定，即对任意$n\in\mathbb{N},c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{C},u_1,\cdots,u_n\in\mathbb{R},\sum_{k,j=1}^n c_k\,\overline{c_j}\phi_X\big(u_k-$

特征函数的性质（二）

定理1.3.8

（4）$\phi_{aX+b}(u) = e^{ibu}\phi_X(au)$；

（5）若$E|X|^k < +\infty$，则ϕ_X k次可微，且$\phi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right)$；

（6）若X,Y相互独立，则$\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$.

特征函数的应用例子

例1.3.9 若 $X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$, 且$X, Y$相互独立，则由例1.2.5 若及定理1.2.8 (6)有

$$\phi_{X+Y}(u)=e^{-\lambda_1(1-e^{iu})}\,e^{-\lambda_2(1-e^{iu})}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(1-e^{iu})},$$

由定理1.3.8 (1)有$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

例1.3.10 若 $X_1,\cdots,X_n\ i.i.d\sim E(\lambda)$, 我们称$Y=X_1+\cdots+X_n$ 服从Gamma分布$\Gamma(n,\lambda)$.

由于$X_1,\cdots,X_n$的特征函数

$$\phi(u)=\int_0^{+\infty}e^{iux}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda-iu},$$

所以，$\phi_Y(u)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)^n$，由反演公式，有$f_Y(x)=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\chi_{(0,+\infty)}(x)$.

多维R.V. 的特征函数

定义1.3.11 设$X=(X_1,\cdots,X_n)^T$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个n维R.V., $u=(u_1,\cdots,u_n)^T\in\mathbb{R}^n$,

我们称$\phi_X(u)\triangleq E(e^{iu^TX})$为$X$的特征函数。

多维R.V. 的特征函数的性质与一维类似，我们不一一列出，请自行补充。

例1.3.12 若 X为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个4维R.V., X的4阶矩存在，则

$$E(X_1X_2X_3X_4)=\frac{\partial^4\phi_X(u)}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3\partial u_4}\bigg|_{u=0}.$$

作业

1. 设$X \sim U(a,b)$，求X的特征函数.

2. 证明：若$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty} i.i.d$, 且$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$, 令$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$，则$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$依分布收敛于$U(-1,1)$.

3. 证明：若$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$为正态分布序列，且依分布收敛，则其极限分布为正态分布.

注

R.V.序列的依分布收敛等价于特征函数的逐点收敛性。

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！