



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 5.4 Kolmogorov微分方程

主讲：王湘君



Kolmogorov后向方程



定理5.4.1

若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵 \mathbb{Q} 满足 $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$, $\forall i \in I$,

则 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移概率矩阵 $\mathbb{P}(t)$ 满足Kolmogorov 后向方程 $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$.

证 明 由定理5.3.1的证明,

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - (1 - p_{ii}(h))p_{ij}(t),$$

等式两边除以 h , 再令 $h \rightarrow 0$, 若极限与求和可以交换, 则有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + (-q_{ii})p_{ij}(t).$$

关于极限与求和可以交换的证明略去.



Kolmogorov前向方程



定理5.4.2

若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵 \mathbb{Q} 满足一定的条件（如状态空间有限），则 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移概率矩阵 $\mathbb{P}(t)$ 满足Kolmogorov 前向方程 $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q}$.

证

明

由C-K方程,

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h) - p_{ij}(t)(1 - p_{jj}(h)),$$

等式两边除以 h , 再令 $h \rightarrow 0$, 若极限与求和可以交换, 则有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} + p_{ij}(t)(-q_{jj}).$$



Fokker-Planck方程



若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间有限, 前向和后向方程都成立, 我们有

$$\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{Q}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\mathbb{Q})^n}{n!}.$$

推论5.4.3

若 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间有限, 则绝对概率分布 $P^T(t)$ 满足 Fokker-Planck方程

$$(P^T(t))' = P^T(t)\mathbb{Q}.$$



两状态的Markov链



设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间 $I = \{0, 1\}$, $\tau_0 \sim E(\lambda)$, $\tau_1 \sim E(\mu)$, 则转移速率矩阵 $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$,

设 $\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$, 由前向方程,

$$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) = -(\lambda + \mu)p_{00}(t) + \mu,$$

由初始条件 $p_{00}(0) = 1$, 有 $p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$. 所以,

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}.$$



作业

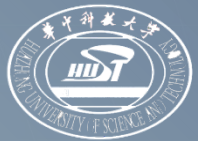


1

写出Poisson过程满足的前向方程和后向方程.

2

若连续时间Markov链 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, 且对 $i \neq j, q_{ij} = 1$, 求 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移概率矩阵.



华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

!