华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 3.7 Poisson过程的推广

主讲：王湘君

非齐次Poisson过程

用Poisson过程做一些实际的计数过程的模型会有一些局限性.

电话交换台收到的呼叫次数

服务机构的顾客数

这些经常会与时刻有关，事件发生的强度不是一个常数.

解决方式 把λ换成$\lambda(t)$. 由此我们引入如下的定义:

非齐次Poisson过程

定义3.7.1 若$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个计数过程，满足：

1. $N_0 = 0$;
2. $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一独立增量过程;
3. $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h), \qquad P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h),$

则我们称$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程.

非齐次Poisson过程的一些注记

01 (3) 可以换成 $N_t - N_s \sim P\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$. 等价性的证明与**定理3.2.1**类似.

02 非齐次Poisson过程保留了Poisson过程的独立增量性，但没有了平稳增量性.

03 强度函数$\lambda(t)$一般由实际背景给出.

04 非齐次Poisson过程的时间间隔不再服从指数分布，也不相互独立.

$$f_{W_1}(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t<W_1<t+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_t=0)P(N_{t+h}-N_t=1)}{h} = \lambda(t)\exp\{-\int_0^t \lambda(u)du\},$$

$$P(T_2 \le t | T_1 = s) = P(N_{s+t} - N_s \ge 1 | T_1 = s) = 1 - P(N_{s+t} - N_s = 0)$$
$$= 1 - \exp\left\{-\int_s^{s+t} \lambda(u)du\right\}.$$

复合Poisson过程

定义3.7.2 设$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个强度为$\lambda$的Poisson过程, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $i.i.d.$, 且$\{\xi_n\}$与$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$相互独立，令

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

我们称$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个复合Poisson过程.

注

复合Poisson过程是一个在保险中最基本的一个模型，在很多应用领域也经常用到.

复合Poisson过程的性质

定理3.7.3 若$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个复合Poisson过程，则

1. $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个独立平稳增量过程；
2. $m_X(t) = \lambda t E(\xi)$；$D_X(t) = \lambda t E(\xi^2)$.

证明 由例1.6.3（随机个R.V.s的和），有

$$X_t - X_s = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} \xi_k \ ,$$

$$\phi_{X_t - X_s}(u) = E\left(\left(\phi_\xi(u)\right)^{N_t - N_s}\right) .$$

例子

例3.7.4 设$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $i.i.d\sim B(1,p)$, 则复合Poisson过程$\{X_t, t\in\mathbb{R}_+\}$实际上就是Poisson过程$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$以概率$p$做了一次随机筛选，见定理3.3.2.由

$$\phi_\xi(u)=pe^{iu}+q,$$

有

$$\phi_{X_t}(u)=E\left(\left(pe^{iu}+q\right)^{N_t}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(pe^{iu}+q\right)^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$
$$=\exp\{-\lambda pt(1-e^{iu})\},$$

所以，$X_t\sim P(\lambda pt)$, 我们重新证明了定理3.3.2.

条件Poisson过程

有的计数过程，其事件发生的强度与时刻关系不大，但依赖于一个环境变量，如高速公路的事故数与天气情况相关.

为此，我们引入如下的定义：

定义3.7.5 若$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个计数过程，$\Lambda$为一个非负的R.V., 若在已知$\Lambda = \lambda$的条件下，$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，则我们称$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个条件Poisson过程（或混合Poisson过程）.

注3.7.6

条件Poisson过程保留了Poisson过程的平稳增量性，但没有了独立增量性.

更新过程

可以证明

- 一个计数过程，如果相邻事件的时间间隔独立同分布于$E(\lambda)$，则这个计数过程为一个参数为λ的Poisson过程.这是Poisson过程第三个等价的定义.
- 现在我们推广这个时间间隔的分布，得到更新过程.

定义3.7.7 设$\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}$为独立同分布的非负的随机变量序列，令$W_0 = 0, W_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$，且对任意$t \geq 0$, 令

$$N_t = \sup\{n: W_n \leq t\},$$

或

$$N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{\{W_n \leq t\}},$$

则我们称$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个更新过程.

作业

1 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次Poisson过程，

（1）求$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$的到达时刻$W_n$的密度函数；

（2）给出时间间隔T_2的密度函数表达式.

2 求复合Poisson过程的相关函数.

3 证明注3.7.6 的结论.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢