華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 2.5 Wiener过程的构造与性质

主讲：王湘君

Wiener过程的构造

- 考虑实轴上对称的随机游动：质点经过Δt的时间，等可能向左或右移动Δx，且每次移动相互独立.令ξ_n表示第n次质点运动的方向，即

$$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}\ i.i.d.,P(\xi_n=1)=P(\xi_n=-1)=\frac{1}{2},$$

- 以X_t表示t时刻质点的位置，$X_0=0$,则

$$X_t=\Delta x\left(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\right),$$

- $\{X_t\}$为一个独立平稳增量过程.

$$E(X_t)=0,\qquad D(X_t)=(\Delta x)^2\left[\frac{t}{\Delta t}\right].$$

Wiener过程的构造

统计力学、热力学的理论和实验（花粉颗粒受到液体分子的无序撞击）告诉我们：

$$\Delta t \to 0\text{时}, \Delta x \to 0, \text{且 } \Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}\,,$$

$$(\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \to \sigma^2 t\,.$$

由中心极限定理，$\Delta t \to 0$时，$X_t \sim N(0, \sigma^2 t)$.

所以，$\Delta t \to 0$时, $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\sigma^2$的Wiener过程.

注

金融上的解释是股票价格的波动由投资者的买卖（相当于撞击）所引起.

Wiener过程的性质

定理2.5.1 若$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的一个标准Brown运动，

1. 对给定$s > 0$，令 $X_t = W_{s+t} - W_s$；
2. 对给定的常数$c > 0$，令 $X_t = \frac{1}{c} W(c^2 t)$;
3. 令$X_0 = 0$，$X_t = tW(\frac{1}{t})$，

则$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$都为标准Brown运动.

证明： $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$都为正态过程，且

$$m_X(t) = 0, R_X(s,t) = s \wedge t.$$

例2.5.1

若$\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个标准Brown运动，求$P(W_1\le 0, W_2\le 0)$.

解 $P(W_1\le 0, W_2\le 0)=P(W_1\le 0,\ W_2-W_1\le -W_1)$

$$=\int_{-\infty}^{0}P(W_2-W_1\le -x)\phi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\Phi(-x)\phi(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\Phi(x)\phi(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}ydy=\frac{3}{8}\ .$$

其中，$\Phi(x),\phi(x)$分别为标准正态分布的分布函数和密度函数.

例2.5.2

若$W_t=\left(W_1(t),W_2(t)\right)^T$为一个2 维Brown运动，求$P(|W_t|<r)$, 其中$|\cdot|$为Eclidean范数, 常数$r>0$.

解 $P(|W_t|<r)=P(W_1^2(t)+W_2^2(t)<r^2)$

$$=\iint_{x^2+y^2<r^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2<r^2} \frac{1}{2\pi t}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2t}\}\,dxdy$$

$$=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi t}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2t}\right\}\rho d\rho d\theta=1-\exp\left\{-\frac{r^2}{2t}\right\}.$$

作业

1 若$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个标准Brown运动, 令$X_t = |W_t|$, 求$X_t$的密度函数.

2 若$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个标准Brown运动, 令$X_t = ye^{W_t}, y > 0$常数， 证明：对任意$K > 0$,

$$E(\max\{X_t - K, 0\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} \int_{\ln\frac{K+u}{y}}^{+\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\} dxdu .$$

華中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢