華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§6.6 均方收敛与均方连续

主讲：王湘君

均方收敛性

定义6.6.1 设有$L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$中的R.V. 序列$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$及R.V. X，满足

$$\lim_{n\to+\infty} E|X_n - X|^2 = 0\ ,$$

我们称$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$均方收敛（或L^2）到X，记为$X_n \xrightarrow{m.s.(L^2)} X\ (\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X)$.

定理6.6.2 (均方收敛的Cauchy准则)

$$\exists X \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P), s.t.\ \underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X \iff \lim_{m,n\to+\infty} E|X_m - X_n|^2 = 0.$$

均方收敛的性质

定理6.6.3 设$\{X_n, n\in\mathbb{N}\}, \{Y_n, n\in\mathbb{N}\}$都是$L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$中序列，$U\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$，$\{c_n\}$为$\mathbb{C}$中常数列，$a,b,c\in\mathbb{C}$，$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X$，$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Y_n = Y$，$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$，则

1. $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$；

   证明 $E|c_n - c|^2 = |c_n - c|^2 \to 0.$

2. $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, U = U$；

3. $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, c_n U = cU$；

   证明 $E|c_n U - cU|^2 = |c_n - c|^2 E|U|^2 \to 0.$

均方收敛的性质

4 $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}(aX_n + bY_n) = aX + bY;$

证明 $E|(aX_n + bY_n) - (aX + bY)|^2 = E|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)|^2$

$$\le 2(|a|^2 E|X_n - X|^2 + |b|^2 E|Y_n - Y|^2) \to 0.$$

5 $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X) = E\left(\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n\right);$

证明 $|E(X_n - X)|^2 \le E|X_n - X|^2 \to 0.$

均方收敛的性质

6 $\lim_{m,n\to+\infty} E(X_m\overline{Y_n}) = E(X\bar{Y})$, 特别地 $\lim_{n\to+\infty} E|X_n|^2 = E|X|^2$.

证明

$$|E(X_m\overline{Y_n} - X\bar{Y})| = \left|E\left((X_m - X)(\overline{Y_n - Y}) + X(\overline{Y_n - Y}) + (X_m - X)\bar{Y}\right)\right|$$

$$\le |E(X_m - X)(\overline{Y_n - Y})| + |EX(\overline{Y_n - Y})| + |E(X_m - X)\bar{Y}|$$

$$\le \sqrt{E\left|X_m - X\right|^2 E\left|Y_n - Y\right|^2} + \sqrt{E\left|X\right|^2 E\left|Y_n - Y\right|^2} + \sqrt{E\left|X_m - X\right|^2 E\left|Y\right|^2}$$

$$\to 0.$$

均方收敛的判别准则

定理6.6.4 $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$均方收敛$\Leftrightarrow \lim\limits_{m,n\to+\infty} E(X_m\overline{X_n})$存在.

证明 $\Rightarrow$: **定理6.6.3**(6).

$\Leftarrow$: 由极限的唯一性,

$$\lim_{m,n\to+\infty} E|X_m - X_n|^2 = \lim_{m,n\to+\infty} E(X_m\overline{X_m} - X_m\overline{X_n} - X_n\overline{X_m} + X_n\overline{X_n}) = 0,$$

再由**定理6.6.2**均方收敛的Cauchy准则得证.

注 同样的性质可以推广到连续时间情形.

均方连续

定义6.6.5 设$\{X_t, t \in T\}$为二阶矩过程， T为 $\mathbb{R}$的一个连续区间，

- 若对$t \in T, \underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, X_{t+h} = X_t$, 则称$\{X_t, t \in T\}$在$t$点均方连续;

- 若对任意$t \in T$, $\{X_t, t \in T\}$在t点均方连续, 则称$\{X_t, t \in T\}$为一个均方连续的随机过程.

定理6.6.6 Poisson过程和Wiener过程都是均方连续的随机过程.

$$|N_{t+h} - N_t| \sim P(\lambda|h|), \qquad E(N_{t+h} - N_t)^2 = \lambda|h| + \lambda^2 h^2 \to 0;$$

$$W_{t+h} - W_t \sim N(0, \sigma^2|h|), \qquad E(W_{t+h} - W_t)^2 = \sigma^2|h| \to 0.$$

均方连续的判别准则

定理6.6.7 $\{X_t, t\in T\}$在t点均方连续$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$(t,t)$点连续.

这实际就是**定理6.6.4**的连续时间版本.

推论 6.6.8

$\{X_t, t\in T\}$为均方连续的随机过程$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$\{(t,t)|t\in T\}$上连续

$\Leftrightarrow R_X(t_1,t_2)$在$T\times T$上连续.

特别，$\{X_t, t\in T\}$为均方连续的平稳过程$\Leftrightarrow R_X(\tau)$在0点连续$\Leftrightarrow R_X(\tau)$在$T$上连续.

例6.6.9

随机电报信号过程为均方连续的平稳过程. $R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$.

$X_t=A\cos(\omega t+\Phi)$, $R_X(\tau)=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\cos\omega\tau$, $\{X_t, t\in\mathbb{R}\}$为均方连续的平稳过程.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！