华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 6.2 平稳过程的例子（二）

主讲：王湘君

平稳增量过程的增量过程

例6.2.1

设$\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为一正态过程，其中$0 < H < 1$, 且

$$E(B_t^H) = 0, \qquad E(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}),$$

我们称$\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为一Hurst指数为$H$的分数Brown运动.

对给定$s > 0$, 对$t \in \mathbb{R}_+$，令$X_t = B_{s+t}^H - B_t^H$. 则$\{X_t, \ t \in \mathbb{R}_+\}$为平稳过程.

注6.2.2

对Poisson过程$\{N_t, \ t \in \mathbb{R}_+\}$、Wiener 过程$\{W_t, \ t \in \mathbb{R}_+\}$等平稳增量过程，我们可以采用类似的方式构造平稳过程.

基于Markov链的平稳过程

例6.2.3

设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链, $\{\pi_j, j \in I\}$为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的一个平稳分布.

取初始分布$P^T(0) = \pi$, 则$P^T(n) = \pi\mathbb{P}^{(n)} = \pi$, 我们有$\{X_n\}$为一个严平稳过程.

注6.2.4

对连续时间Markov链，我们也有类似的结果.

随机相位过程

例6.2.5

设$\phi \sim U[0,L]$, $S(t)$是一个以L为周期的连续函数,

令$X_t = S(t+\phi)$, 我们称$\{X_t, t\in\mathbb{R}\}$为一个随机相位过程. 则$\{X_t, t\in\mathbb{R}\}$平稳.

证明

$$\begin{aligned}E(X_t) &= ES(t+\phi)\\ &= \int_0^L S(t+x)\frac{1}{L}dx = \frac{1}{L}\int_t^{t+L} S(u)du\\ &= \frac{1}{L}\left(\int_t^L S(u)du + \int_L^{t+L} S(u-L)du\right) = \frac{1}{L}\int_0^L S(u)du\,.\end{aligned}$$

同理,

$$E(X_tX_{t+\tau}) = \frac{1}{L}\int_0^L S(t+x)S(t+\tau+x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L S(x)S(\tau+x)dx\ .$$

随机电报信号过程

例6.2.6

设$\{N_t, t \geq 0\}$为一参数为λ的Poisson过程, X_0与$\{N_t\}$相互独立，且

$$P(X_0 = -1) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{2},$$

令$X_t = X_0(-1)^{N_t}$, 我们称$\{X_t, t \geq 0\}$为一随机电报信号过程. 则$\{X_t, t \geq 0\}$平稳.

证明

$$E(X_t) = E(X_0)E\left((-1)^{N_t}\right) = 0.$$ 设$\tau \geq 0$,

$$E(X_t X_{t+\tau}) = E(X_0^2(-1)^{N_t + N_{t+\tau}}) = E\left((-1)^{N_{t+\tau} - N_t}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} = e^{-2\lambda\tau},$$

所以，$R_X(s,t) = e^{-2\lambda|t-s|}$.

作业

证明例6.2.1的$\{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$为平稳过程.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！