華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

Stochastic Process

## § 2.2 S.P.的数字特征

主讲：王湘君

# S.P.的数字特征

**定义2.2.1** 设 $\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个S.P.,

1. 若$\forall t\in T, E|X_t|<+\infty$,则我们称 $m_X(t)\triangleq E(X_t)$为$X_T$的均值函数;
2. 若$\forall t\in T, E|X_t|^2<+\infty$,则我们称$X_T$为一个二阶矩过程，并

称$D_X(t)=D(X_t)$为$X_T$的方差函数;

称$R_X(s,t)=E(X_sX_t)$为$X_T$的（自）相关函数;

称$B_X(s,t)=\mathrm{cov}(X_s,X_t)$为$X_T$的（自）协方差函数

# S.P.的数字特征

**定义2.2.2** 设 $\{X_t,\ t\in T\},\{Y_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的两个二阶矩过程，我们

称$R_{XY}(s,t)=E(X_sY_t)$为$X_T$和$Y_T$的互相关函数；

称$B_{XY}(s,t)=\mathrm{cov}(X_s,Y_t)$为$X_T$和$Y_T$的互协方差函数.

# 例子

**例2.2.1** 考虑例0.1, $\mathbb{Z}$上的随机游动.

$$m_X(n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = nE(\xi) = n(2p-1);$$

$$\begin{aligned} B_X(m,n) &= cov\left(\sum_{k=1}^{m} \xi_k, \sum_{l=1}^{n} \xi_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} cov(\xi_k, \xi_l) \\ &= \min(m,n)(1-(2p-1)^2). \end{aligned}$$

# 例子

**例2.2.2** 考虑例0.4，设$T=[0,+\infty)$，$X_t=A\cos(\omega t+\Phi)$，其中$A\sim N(\mu,\sigma^2),\Phi\sim U(0,2\pi)$，且$A,\Phi$相互独立．求$\{X_t\}$的均值函数与相关函数.

$$\begin{aligned}
m_X(t)&=E(A\cos(\omega t+\Phi))\\
&=E(A)E(\cos(\omega t+\Phi))\\
&=\mu\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_X(s,t)&=E(A^2\cos(\omega s+\Phi)\cos(\omega t+\Phi))\\
&=E(A^2)E(\cos(\omega s+\Phi)\cos(\omega t+\Phi))\\
&=(\mu^2+\sigma^2)\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+x)\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx\\
&=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\cos(\omega(s-t)).
\end{aligned}$$

# 作业

1 设$N\sim P(\lambda)$, $\xi\sim N(0,1)$, $X_n=(-1)^{nN}+\xi^n, n\in\mathbb{N}$, 求S.P. $\{X_n\}$的均值函数和相关函数.

2 设$A, B\ i.i.d\sim N(0,1), X_t=A\cos\omega t+B\sin\omega t\ , Y_t=A\sin\omega t+B\cos\omega t\ $, 求$X_T$和$Y_T$的互相关函数.

# 谢 谢 ！