華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 2.3 随机过程的分类（一）

主讲：王湘君

S.P.的增量

定义2.3.1 设 $\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个随机过程，

对$s<t$, 我们称X_t-X_s为X_T在时间区间$(s,t]$上的增量；

若X_T在不相交的时间区间上的增量相互独立，即对任意 $n\geq 3, t_1<t_2<\cdots<t_n$，$X_{t_2}-X_{t_1}, X_{t_3}-X_{t_2},\dots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$相互独立，则我们称$X_T$为独立增量过程；

若X_T的增量的分布只与时间区间的长度有关，即$\forall\ s,t,\tau\in T, X_t-X_s\sim X_{t+\tau}-X_{s+\tau}$, 我们称$X_T$为平稳增量过程；

若X_T既为独立增量过程，也为平稳增量过程，则我们称X_T为独立平稳增量过程（可加过程、Lévy过程）.

例子

例2.3.2 若$X_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$相互独立，$X_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，则$\{X_n\}$为独立增量过程，若进一步要求$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$独立同分布，则$\{X_n\}$为独立平稳增量过程.

注意：

平稳增量并不需要以独立增量为前提，我们将在后面给出例子.

例2.3.3 若X_T为独立平稳增量过程，令$Y_t=\alpha X_t+\beta t+\gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$为常数，则$Y_T$为独立平稳增量过程.

例子

例2.3.4 若X_T, Y_T为两个独立的独立平稳增量过程，$Z_t = X_t + Y_t$, 则Z_T为独立平稳增量过程.

后面我们将学习到两个基本且重要的独立平稳增量过程

Poisson过程

Winner过程

构成了现代随机过程的两大支柱.

Markov过程

定义2.3.5 设 $\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个随机过程, 若对任意 $n\geq 2$, $t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}\in T$, $i_1,i_2,\cdots,i_n,i_{n+1}\in I$, 有

$$P\left(X_{t_{n+1}}\leq i_{n+1}\middle|X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_n}=i_n\right)$$
$$=P\left(X_{t_{n+1}}\leq i_{n+1}\middle|X_{t_n}=i_n\right),$$

则称 $\{X_t,\ t\in T\}$为一Markov过程，称上式为Markov性.

注2.3.6

Markov性的直观解释是已知“现在”的条件下，
“过去”与“将来”无关，它反应的是条件独立性.

例子

例2.3.7 设 $\{X_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个独立增量过程，且初值$X_0$与增量相互独立，则

$$P\left(X_{t_{n+1}}\le i_{n+1}\middle|X_0=i_0,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_n}=i_n\right)$$

$$=P\left(X_{t_{n+1}}-X_{t_n}\le i_{n+1}-i_n\middle|X_0=i_0,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1},X_{t_n}=i_n\right)$$

$$=P\left(X_{t_{n+1}}-X_{t_n}\le i_{n+1}-i_n\right)$$

$$=P\left(X_{t_{n+1}}\le i_{n+1}\middle|X_{t_n}=i_n\right).$$

这说明了独立增量过程的Markov性.

作业

1 设反复地投掷一枚硬币，令$X_0 = 0, X_n$为第n次掷出正面的总投掷次数，证明$\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$为独立平稳增量过程.

2 设$\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ $i.i.d, P(\xi_n = 1) = \frac{1}{3}, P(\xi_n = -1) = \frac{2}{3}, X_n = \xi_n\xi_{n+1}$,

（1）求$P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1)$;

（2）$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$是否为Markov过程？证明你的结论.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！