华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 1.1 概率与条件概率

主讲：王湘君

可测空间

定义1.1.1 设集合Ω为样本空间，$\mathcal{F}$为Ω的某些子集的集合，满足：

（1） $\Omega \in \mathcal{F}$;

（2）若$A \in \mathcal{F}$，则$\bar{A} \in \mathcal{F}$;

（3）若$A_n \in \mathcal{F}, n = 1,2,\cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

那么，我们称$\mathcal{F}$为一个事件σ域，称$\mathcal{F}$中的元素为随机事件，称$(\Omega, \mathcal{F})$为一个可测空间。

注1.1.2

样本空间Ω上的事件σ域不唯一！

例1.1.3 取$\Omega = [0,1)$，$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$，这是一个平凡的$\sigma$域；

对$n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), k = 1,2,\cdots,2^n\right\}$.

想一想！
这是干什么？

概率与概率空间

定义1.1.4 设$(\Omega,\mathcal{F})$为一个可测空间，$P:\mathcal{F}\to[0,1]$，满足：

（1）$P(\Omega)=1$;

（2）$\forall A\in\mathcal{F}, 0\le P(A)\le 1$;

（3） 对$A_n\in\mathcal{F}$且$A_iA_j=\emptyset, i\ne j$, 有$P(\sum_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)$,

则称 P为$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个概率（测度），称$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一个概率空间。

注1.1.5

（1）可测空间$(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率不唯一！

（2）概率的性质略。

练习

证明概率的（从下）连续性：若$\forall n, A_n\subset A_{n+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n).$$

条件概率

定义1.1.6 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一个概率空间，$A\in\mathcal{F},P(A)>0$，对$\forall B\in\mathcal{F}$，令

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，则$P(\cdot\,|A)$为$(\Omega,\mathcal{F})$上的一个概率测度，称之为条件概率测度。

由条件概率定义，容易推出下面简单但重要的结论：

定理1.1.7 （乘积公式）对$A,B\in\mathcal{F}$，有$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

定理1.1.8 （全概率公式）设$A_n,B\in\mathcal{F}$，$P(A_n)>0,n=1,2,\cdots,\Omega=\sum_n A_n$，则

$$P(B)=\sum_n P(A_n)P(B|A_n).$$

独立性

定义1.1.9 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为一个概率空间，I为一个指标集，$\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$为一族事件。若对任意$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,和任意$I$中互异的指标$i_1, i_2, \cdots, i_n$,都有：

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k}),$$

则我们称$\{A_i\}_{i\in I}$相互独立。

注1.1.5

独立性是依赖于概率测度的。

作业

1.证明条件概率下的全概率公式：$A_n, B, C \in \mathcal{F}, n = 1,2,\cdots,\Omega = \sum_n A_n$, 则

$$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_nC).$$

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，证明对任意 可测函数 $g_1, g_2, \cdots, g_n$, $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$相互独立.

谢 谢 ！