



华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.12 Markov链的极限分布

主讲：王湘君



极限概率分布



我们要考虑如下的极限概率

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)},$$

◆当 j 为非常返或零常返态时，显然为0.

◆当 i 为非常返态而 j 为非周期的正常返态时

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}. \text{ 但通常很难计算 } f_{ij}.$$

我们下面通过一个例子，运用C-K方程来算.

例 还是来看图4.5.1，求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{13}^{(n)}$.

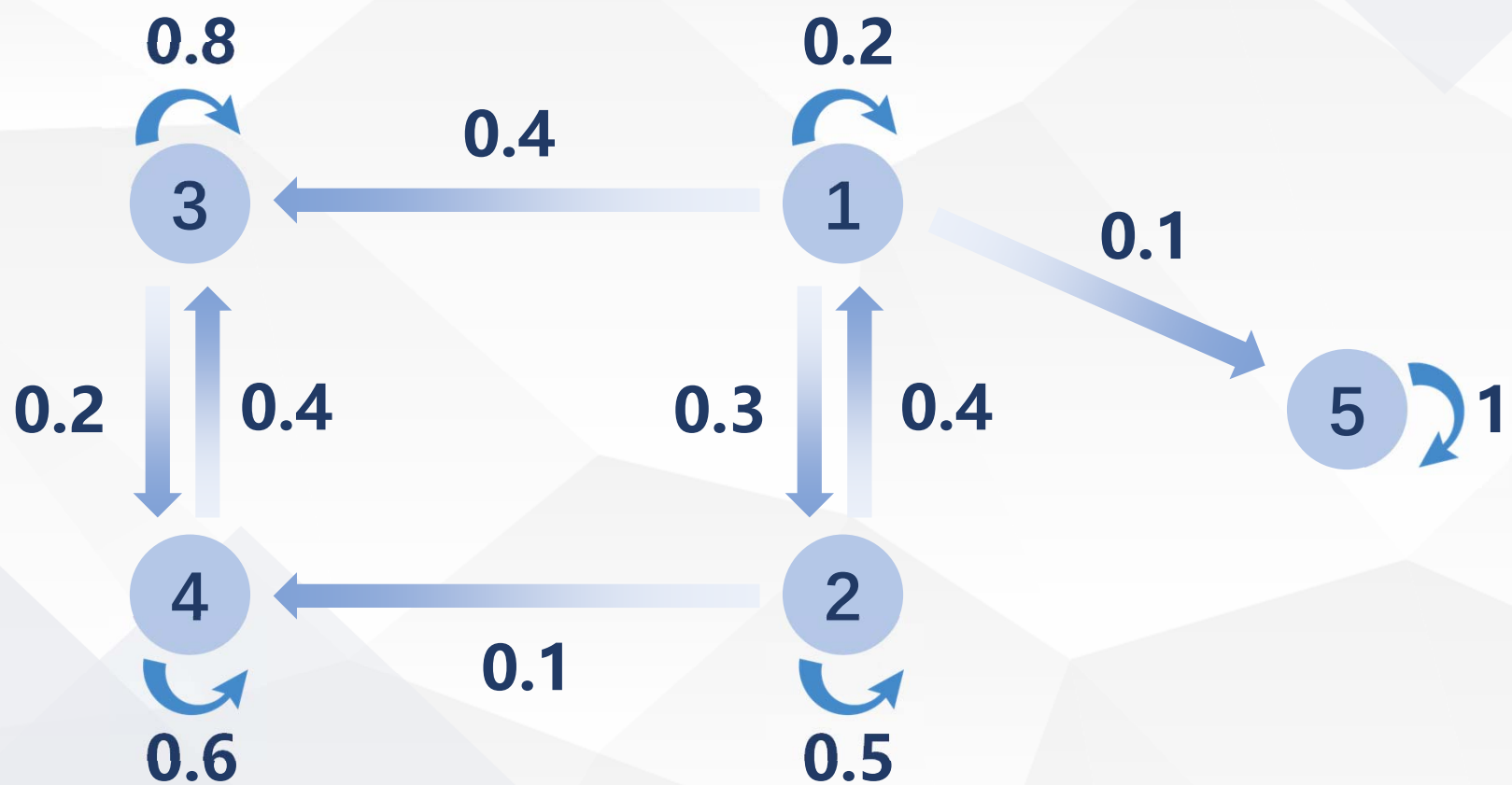


图4.5.1



由C-K方程,

$$p_{13}^{(n)} = \sum_{k=1}^5 p_{1k} p_{k3}^{(n-1)} = 0.2p_{13}^{(n-1)} + 0.3p_{23}^{(n-1)} + 0.4p_{33}^{(n-1)},$$

$$p_{23}^{(n)} = \sum_{k=1}^5 p_{2k} p_{k3}^{(n-1)} = 0.4p_{13}^{(n-1)} + 0.5p_{23}^{(n-1)} + 0.1p_{43}^{(n-1)},$$

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{13}^{(n)} = x$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{23}^{(n)} = y$, 上面两式中令 $n \rightarrow +\infty$, 有

$$x = 0.2x + 0.3y + 0.4\pi_3, \quad y = 0.4x + 0.5y + 0.1\pi_3,$$

解得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{13}^{(n)} = \frac{23}{42}$. 进一步, 有 $f_{13} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{13}^{(n)} \cdot \mu_3 = \frac{23}{28}$.

作业

1 考虑§4.9作业2, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{46}^{(n)}$ 及 f_{46} .

2 设有限Markov链 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 的转移概率矩阵 \mathbb{P} 为一个双随机正矩阵 (每个元素大于0) ,

(1)证明为 $\mathbb{P}^{(n)}$ 双随机正矩阵;

(2)证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^{(n)}$ 存在, 并给出其极限.



华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

