华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 5.3 转移速率矩阵

主讲：王湘君

转移概率矩阵的一致连续性

定义5.3.1 设$\{X_t, t \geq 0\}$为连续时间Markov链，且满足正则性条件, 则$\forall i, j \in I, p_{ij}(t)$一致连续.

证明 不妨设$h > 0$, 由C-K方程,

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t)$$

$$= \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) - \big(1 - p_{ii}(h)\big) p_{ij}(t),$$

所以，一方面

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \leq \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h),$$

转移概率矩阵的一致连续性

定义5.3.1 设$\{X_t, t \geq 0\}$为连续时间Markov链，且满足正则性条件, 则$\forall i, j \in I, p_{ij}(t)$一致连续.

证明 另一方面,

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) \geq -\big(1 - p_{ii}(h)\big)p_{ij}(t) \geq -\big(1 - p_{ii}(h)\big),$$

所以,

$$\left|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)\right| \leq 1 - p_{ii}(h).$$

由正则性条件，得证一致连续性.

转移概率在0点的导数

定理5.3.2 设$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链，且满足正则性条件，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = v_i \triangleq q_{ii}\,, \qquad (6.1.1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h} \triangleq q_{ij}, \qquad i \neq j. \qquad (6.1.2)$$

证明 只证(6.1.1).

$$1-p_{ii}(h) = 1-P(\tau_i > h) = 1-e^{-v_i h}.$$

(6. 1. 2)的证明可参见

[1] 复旦大学编，概率论第三册 随机过程，高等教育出版社，1981.

转移速率矩阵

定义5.3.3 我们称定理5.3.2中的q_{ij}为$\{X_t,t\geq 0\}$从状态i到状态j的转移速率.

令$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & -q_{ii} & q_{ij} \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$,我们称$\mathbb{Q}$为$\{X_t,t\geq 0\}$的转移速率矩阵.

可见,

$$\mathbb{Q}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}(h)-E}{h}=\mathbb{P}'(0).$$

我们用$\mathbb{Q}$取代了离散情形下一步转移概率矩阵的地位.

那么能否用$\mathbb{Q}$导出转移概率矩阵$\mathbb{P}(t)$?

转移速率矩阵的性质

定理5.3.4 若$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间有限，则$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$，即Q的行和为0.

一般地，我们有$q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

证明 由于转移概率矩阵为随机矩阵，则

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(h) = 1 \Rightarrow 1 - p_{ii}(h) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h),$$

两边除以h，令$h \to 0$，

若状态空间有限，则极限与求和可交换，有$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

一般地，由Fatou引理，有$q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

Poisson过程的转移速率矩阵

Poisson过程的转移速率矩阵为

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

作业

求§5.1作业1中$\{X_t, t \geq 0\}$的转移速率矩阵.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢　谢　！