华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 6.5 Wiener过程的平方变差

主讲：王湘君

Wiener过程二次变差的L^2性质

$\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个标准Brown运动，对任意给定的$t>0$，取$[0,t]$的分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t,\qquad \Delta_n=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$$

则我们有

定理6.5.1 当$\Delta_n\to 0$时，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2\xrightarrow{m.s.}t\,.$$

证明 即要证

$$\lim_{\Delta_n\to 0}E\left(\sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-t\right)^2=0.$$

Wiener过程二次变差的L^2性质

$$\sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-t=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-(t_k-t_{k-1})\right],$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-t\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-(t_k-t_{k-1})\right]^2$$

$$+2\sum_{1\le i<j\le n}\left[\left(W(t_i)-W(t_{i-1})\right)^2-(t_i-t_{i-1})\right]\left[\left(W(t_j)-W(t_{j-1})\right)^2-(t_j-t_{j-1})\right]$$

注意到Brown运动的独立增量性，$\left(W(t_i)-W(t_{i-1})\right)^2-(t_i-t_{i-1})$与$\big(W(t_j)-$

Wiener过程二次变差的L^2性质

$$E\left(\sum_{k=1}^{n}\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-t\right)^2$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2-(t_k-t_{k-1})\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^4-2(t_k-t_{k-1})\left(W(t_k)-W(t_{k-1})\right)^2+(t_k-t_{k-1})^2\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{3(t_k-t_{k-1})^2-2(t_k-t_{k-1})^2+(t_k-t_{k-1})^2\}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})^2\le 2\Delta_n\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})=2\Delta_n t\to 0\,.$$

作业

在定理6.5.1的条件下，当$\Delta_n \to 0$时，证明

1 $\sum_{k=1}^{n} W(t_{k-1})\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big) \xrightarrow{m.s.} \frac{1}{2}(W^2(t) - t)$;

2 $\sum_{k=1}^{n} W(t_k)\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big) \xrightarrow{m.s.} \frac{1}{2}(W^2(t) + t)$,

更一般地，对$0 \le \theta \le 1$,有

3 $\sum_{k=1}^{n} W\big(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})\big)\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big) \xrightarrow{m.s.} \frac{1}{2}(W^2(t) + (2\theta - 1)t)$.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！