华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.13 Markov链的应用案例

主讲：王湘君

赌徒输光问题

甲乙两人对赌，两人总的资本是N元钱，每局输赢1元钱，每局甲获胜的概率是p，输的概率是$q = 1 - p$，如有一方输光，则赌博结束.

- 以X_n记n时刻甲的资本，则$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$就是带两个吸收壁的随机游动.
- 由有限状态Markov链的知识，我们知道$0, N$是两个吸收态，$1, 2, \cdots, N-1$是非常返态.
- 这说明游戏会在有限的时间内结束. 那么若初始时刻甲有i元钱，最终甲获胜的概率是多少？
- 我们实际要求的是

$$\lim_{n \to +\infty} p_{iN}^{(n)}.$$

赌徒输光问题

- 设$p_i = \lim_{n\to+\infty} p_{iN}^{(n)}, i = 1,2,\cdots,N-1,$
- 由C-K方程，

$$p_{iN}^{(n)} = pp_{i+1,N}^{(n-1)} + qp_{i-1,N}^{(n-1)},$$

- 令$n \to +\infty$, 则

$$p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1},$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}),$$

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i (p_1 - p_0),$$

赌徒输光问题

- 由于$p_0 = 0$, 所以$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i p_1$,
- 求和，有

$$p_i = \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j p_1 = \begin{cases} ip_1, & p = q, \\ \dfrac{1-(q/p)^i}{1-q/p} p_1, & p \neq q, \end{cases}$$

- 由于$p_N = 1$, 有

$$p_i = \begin{cases} i/N, & p = q, \\ \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & p \neq q. \end{cases}$$

讨论

$$p_i=\begin{cases} i/N, & p=q, \\ \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & p\neq q. \end{cases}$$

01 p_i关于i是单调递增的吗?

是.

02 对p_i的影响是p大还是i大?

例 取 N=15， i=5， p=0.6， p_i≈0.87

取 N=30， i=10， p=0.6， p_i≈0.98

03 什么条件下，$\lim\limits_{N\to+\infty} p_i$存在?

$p>q$.

在药物疗效检验中的应用

考虑治疗某种疾病的两种新药，治愈率分别为p_i，i =1，2，未知，检验哪种新药的疗效好？即$p_1 > p_2$还是$p_2 > p_1$？

- 考虑如下的检验方法：随机选取病人对依次分别接受两种药物的治疗，当一种药物的累积治愈数超过另一种药物的累积治愈数达到事先给定的正整数 M 时，检验结束。

- 该方法是否为一个好的检验方法？

在药物疗效检验中的应用

- 剔除治疗结果相同的检验对，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{对病人药物1治愈}, \\ 0, & \text{否}, \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{对病人药物2治愈}, \\ 0, & \text{否}, \end{cases}$$

- 检验在首次使得

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = M \ or \ -M\text{时结束}.$$

- 累积治愈数之差每次变化± 1.

在药物疗效检验中的应用

◆注意到

$$p = P(X_n - Y_n = 1) = \frac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2},$$

$$q = P(X_n - Y_n = -1) = \frac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2},$$

◆则检验结果为P1>P2的概率为

$$\frac{1-(q/p)^M}{1-(q/p)^{2M}}.$$

例 取p_1=0.6，p_2=0.4， M =5，则检验犯错的概率为0.017，若M =10，则检验犯错的概率为0.0003.

市场份额

- 设市场上有4个品牌的某种产品，调查发现顾客的消费意愿矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.05 & 0.05 \\ 0.08 & 0.10 & 0.80 & 0.02 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.70 \end{pmatrix},$$

- 则最终的市场份额

$$\pi = (0.482,0.253,0.179,0.086).$$

作业

◆ 考虑一个有限状态Markov链$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$，非常返态的集合$I_N = \{1,2,\cdots,t\}$, 转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & Q_+ \\ 0 & R_+ \end{pmatrix},$$

◆ 其中$Q = \left(p_{ij}\right)_{t\times t}$.

◆ 以s_{ij}记$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$从非常返$i$出发, 在非常态$j$停留的平均次数，令$S = \left(s_{ij}\right)_{t\times t}$,

◆ 证明 $S = (E - Q)^{-1}$.

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢