華中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.8 无限制随机游动

主讲：王湘君

$\mathbb{Z}$上无限制随机游动

对于$\mathbb{Z}$上无限制的随机游动

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ C_{2k}^{k} p^k q^k, & n = 2k, \end{cases}$$

考虑幂级数$\sum_{k=1}^{+\infty} C_{2k}^{k} x^k$, 由于

$$\frac{C_{2(k+1)}^{k+1}}{C_{2k}^{k}} = \frac{\dfrac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+1)!}}{\dfrac{(2k)!}{k!\,k!}} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 4,$$

所以，$\sum_{k=1}^{+\infty} C_{2k}^{k} x^k$的收敛半径为$\frac{1}{4}$.

由于$p+q=1$, 所以$pq \le \frac{1}{4}$, 当且仅当$p=q$时等号成立，

所以对于非对称的随机游动，所有态都是非常返态.

对称随机游动

对于对称的随机游动　$pq = \frac{1}{4}$.　　这需要用到 Sterling公式

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

$$\therefore \quad C_{2k}^{k} = \frac{(2k)!}{k!\,k!} \approx \frac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{2\pi k k^{2k} e^{-2k}} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}},$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{+\infty} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k = +\infty.$$

所以对于对称的随机游动，所有态都是常返态.

对称随机游动

进一步，

$$\lim_{k\to+\infty} p_{ii}^{(2k)} = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{C}_{2k}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = 0\,,$$

所以，对称随机游动所有态为零常返态.

作业

1. 考虑平面整数格点上的对称随机游动，即$I=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\{X_n\}$从(i,j)出发，经过一个单位时间等可能地到达$(i,j\pm 1),(i\pm 1,j)$. 问$\{X_n\}$的状态分类?

2. 如果考虑空间整数格点上的对称随机游动，问$\{X_n\}$的状态分类?

華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢