华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§6.8 平稳过程的各态历经性

主讲：王湘君

随机过程的统计方法

对总体X, 从中抽取容量为n的样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$, 则可以取估计量 $\hat{\mu} = \bar{X}$.

对随机过程能否同样操作?

对随机过程$\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$做$n$次观测, $\{X_i(t), t \in [0, \infty), i = 1,2, \cdots, n\}$, 取估计量

$$\widehat{m_X(t)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i(t),$$

So easy!

但能实现吗?

能否只做一次观测?

一般不能

除非随机过程具有特殊的性质.

平稳过程的各态历经性

定义6.8.1 设$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程.

- 我们称$<X_t>\triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X_t dt$为$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$的时间均值,

✓若$P(<X_t>=m_X)=1$,则称$\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

- 我们称$<X_t\overline{X_{t-\tau}}>\triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X_t\overline{X_{t-\tau}}dt$为$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$的时间相关函数,

✓若$\forall\tau$，$P(<X_t\overline{X_{t-\tau}}>=R_X(\tau))=1$,则称$\{X_t\}$的相关函数具有各态历经性.

✓若$\{X_t\}$的均值和相关函数都具有各态历经性，则我们称$\{X_t\}$为一个各态历经的平稳过程.

反例

例6.8.2

设$Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$非退化，令$X_t = Y, \forall t$, 则$m_X(t) = E(Y), R_X(s,t) = E(Y^2)$,

- 显然，$\{X_t, t \in (-\infty, +\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程，
- 但$< X_t > \triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_t dt = Y$, 不具有各态历经性.
- 实际上，我们对$\{X_t, t \in (-\infty, +\infty)\}$做一次观测，只能观测到一条直线.

注6.8.3

若$\{X_t\}$的均值具有各态历经性，则我们可以构造估计量, 对充分大的T,

$$\widehat{m_X}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X_t dt\,.$$

当然做不到连续观测，需要把上面的积分离散化，这涉及取多大时间间隔的问题，这需要用到平稳过程的谱.

离散时间平稳过程的各态历经性

定义6.8.4 设$\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$为一个平稳过程.

- 我们称$< X_n >\triangleq \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}X_k$为$\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$的时间均值,

✓若$P(< X_n >=m_X)=1$,则称$\{X_n\}$的均值具有各态历经性.

- 我们称$<X_n\overline{X_{n-m}}>\triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}X_k\overline{X_{k-m}}$为$\{X_n\}$的时间相关函数,

✓若$\forall m$, $P(<X_n\overline{X_{n-m}}=R_X(m))=1$,则称$\{X_n\}$的相关函数具有各态历经性.

✓若$\{X_n\}$的均值和相关函数都具有各态历经性，则我们称$\{X_n\}$为一个各态历经的平稳过程.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！