华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 3.4 Poisson过程的到达时刻与时间间隔

主讲：王湘君

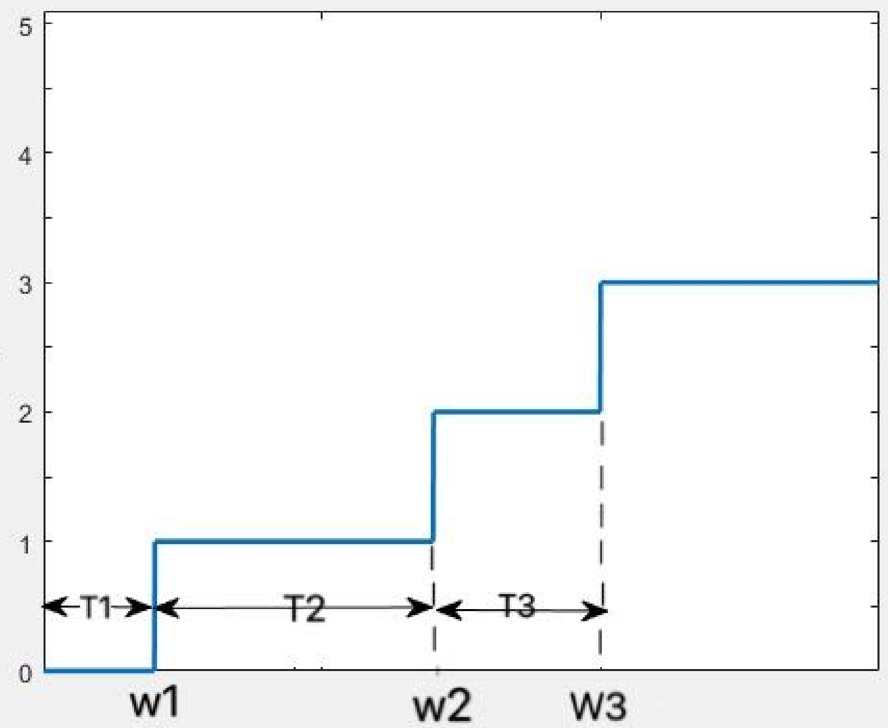
到达时刻与时间间隔

以W_n记“A”第n次发生的时刻，以T_n记“A”第$n-1$次发生到第n次发生的时间间隔.则有

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} T_k\ ,$$

$$T_n = W_n - W_{n-1},$$

我们需要找到$\{W_n\},\{T_n\}$的分布.



达到时刻的分布

定理3.3.1 $W_n \sim \Gamma(n,\lambda)$. （见例1.2.10）

证明 对$t \geq 0$,

$$f_{W_n}(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t < W_n < t+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_t = n-1)P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}(\lambda h + o(h))}{h} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

但我们还没有给出$\{W_n\}$的有限维分布.

时间间隔的分布

定理3.3.2 $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}\ i.i.d \sim E(\lambda)$.

证明 由于$T_1 = W_1$, 所以 $T_1 \sim E(\lambda)$.

由$\{N_t\}$的独立增量性，在已知$T_1 = s$(即“A”第一次发生在$W_1 = s$时刻)的条件下，T_2的条件分布

$$P(T_2 \le t | T_1 = s) = P(N_{s+t} - N_s \ge 1 | T_1 = s) = 1 - P(N_{s+t} - N_s = 0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

与s无关. 所以，T_2独立于T_1，且服从$E(\lambda)$.

同理，对任意n,

$$P(T_n \le t | T_1 = s_1, \cdots, T_{n-1} = s_{n-1}) = 1 - e^{-\lambda t},$$

所以$\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}\ i.i.d \sim E(\lambda)$.

作业

1 设$\{N_1(t), t\in\mathbb{R}_+\}, \{N_2(t), t\in\mathbb{R}_+\}$为两个独立的的Poisson过程，参数分别为$\lambda_1, \lambda_2$, 求在$\{N_1(t)\}$的任意两个相邻事件的时间间隔内，$\{N_2(t)\}$的事件发生次数的分布.

2 设$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，$\{W_n\}$为其到达时刻.

证明： 对任意$[0,\infty)$上的可积函数g, 有

$$E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g(W_n)\right) = \lambda\int_0^{+\infty} g(t)dt\,.$$

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢