



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 5.1 连续时间的Markov链

主讲：王湘君



连续时间Markov链定义



定义5.1.1

设S.P. $\{X_t, t \geq 0\}$ 的状态空间 I 离散（有限或可列），且满足Markov性，即对任意 $n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in I, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ ，有

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n),$$

则我们称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为一连续时间Markov链.



连续时间Markov链的有限维分布列



注

由于

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) \\ &= P(X_0 = i_0)P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i_0) \cdots P(X_{t_n} = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= P(X_0 = i_0)P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i_0) \cdots P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}), \end{aligned}$$



所以，连续时间Markov链的有限维分布列由它的初始分布和“转移概率”所决定.



连续时间Markov链的转移概率



定义5.1.2 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为一连续时间Markov链, 我们称

$$p_{ij}(s, t) \triangleq P(X_{s+t} = j | X_s = i)$$

为 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的**转移概率**;

◆特别地, 若 $p_{ij}(s, t)$ 与 s 无关, 则我们称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为一**齐次连续时间Markov链**;

◆对齐次连续时间Markov链, 我们记 $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t))$, 称之为 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的**转移概率矩阵**.



两点说明



注

1 以后我们只讨论（齐次）连续时间Markov链，并约定 $\mathbb{P}(0) = E$;

2 连续时间Markov链没有最小单位时间的概念，所以也没有步数的概念，用什么来取代一步转移概率矩阵的地位，这是一个重要的问题.



例：Poisson过程



Poisson 过程

是我们见过的连续时间Markov链.

设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 为一参数为 λ 的Poisson过程, 则对 $j \geq i$, 其转移概率

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= P(N_{s+t} = j | N_s = i) \\ &= P(N_{s+t} - N_s = j - i | N_s = i) \\ &= P(N_{s+t} - N_s = j - i) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}. \end{aligned}$$



作业



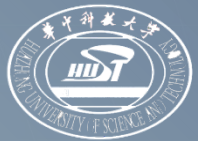
1

设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 为一参数为 λ 的Poisson过程,

$$\text{定义 } X_t = \begin{cases} -1, & N_t \text{ 为奇数,} \\ 1, & N_t \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

证 明

$\{X_t, t \geq 0\}$ 为一连续时间Markov链,
并求其转移概率矩阵.



华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

!