华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 3.1 Poisson过程的定义

主讲：王湘君

Poisson过程

Simeon-Denis Poisson (1781～1840)

◆法国数学家、几何学家和物理学家

◆ 他改进了概率论的运用方法，特别是用于统计方面的方法，建立了描述随机现象的一种概率分布— Poisson分布;

◆ 他推广了“大数定律”，并导出了在概率论、数理方程中有重要应用的Poisson积分.

Poisson过程

是最重要的随机过程之一，它是计数过程、独立平稳增量过程、Markov过程.在随机过程的理论及排队论、计算机图像处理等诸多应用领域具有奠基性的作用.

计数过程

定义3.1.1 若对任意$t \in \mathbb{R}_+$, N_t表示在时间区间$[0, t]$内“随机事件A”发生的次数，则我们称$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个计数过程.

显然:

01 计数过程的状态空间$I = \mathbb{N}_0$;

02 计数过程的轨道单调非降, 即$\forall s < t, N_s \leq N_t$;

03 计数过程的增量$N_t - N_s$表示在$(s, t]$内“随机事件A”发生的次数.

Poisson过程的第一个定义

定义3.1.2 若$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个计数过程，满足：

1. $N_0=0$;
2. $\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一独立增量过程;
3. $\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一平稳增量过程，$N_t-N_s\sim P\big(\lambda(t-s)\big)$, 则我们称$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程.

由于$\lambda=\frac{E(N_t-N_s)}{t-s}$, 表示单位时间内“事件$A$” 发生的平均次数，所以我们也称$\lambda$为“事件A”的强度或发生速率.

思考：Poisson过程的独立增量性和平稳增量性的直观含义是什么?

Poisson过程的第一个定义

Poisson过程的独立增量性

在不相交的时间区间上，“事件A”发生次数相互独立.

Poisson过程的平稳增量性

“事件A”发生的次数只与时间区间的长度有关，而与时刻无关.

Poisson过程的第二个定义

定义3.1.3 若$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个计数过程，满足：

1. $N_0 = 0$;
2. $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一独立增量过程;
3. $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一平稳增量过程，且

$$P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h),$$

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h),$$

则我们称$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程.

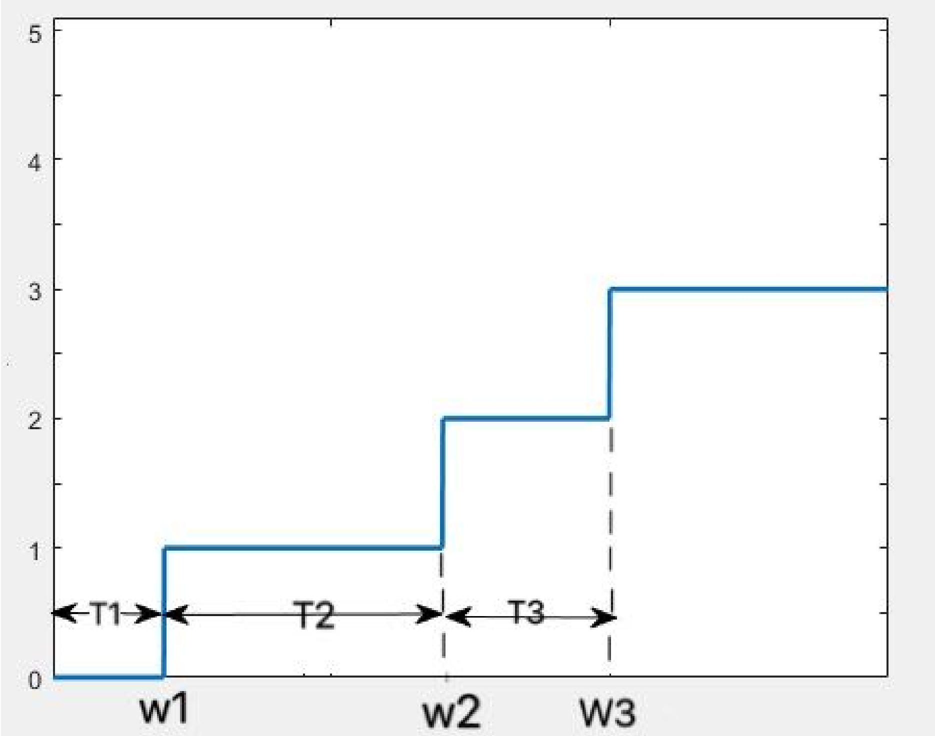
思考：上面两个式子的直观含义是什么？

Poisson 过程的轨道图

含义

在充分短的时间范围内，

“事件A” 最多只发生1次.



作业

1 设顾客以速率为λ的Poisson过程到达服务机构，

（1）求第3位顾客是在第3个单位时间内到达的概率；

（2）若已知在5个单位时间内来了8位顾客，求这8位顾客都是在中间三个单位时间内达到的概率.

2 设$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，对$0 < s < t$, 求$E(N_t|N_s)$和$E(N_s|N_t)$.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢