華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§ 5.6 生灭过程

主讲：王湘君

生灭过程

生灭过程

生灭过程

是一类特殊的连续时间Markov链,

有很多的实际应用.

生灭过程

定义5.6.1 若连续时间Markov链$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间$I = \mathbb{N}_0$, 且满足

$$p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \qquad i \in I$$

$$p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \qquad i \in \mathbb{N}$$

$$p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h),$$

则我们称$\{X_t, t \geq 0\}$为一生灭过程，$\lambda_i \geq 0$称为出生率，$\mu_i \geq 0$称为灭亡率.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

生灭过程的前(后)向方程

前程方程

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)\big(\lambda_j + \mu_j\big) + p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}\,.$$

后向方程

$$p'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t)\,.$$

Fokker-Planck方程

$$p'_j(t) = -p_j(t)\big(\lambda_j + \mu_j\big) + p_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + p_{j+1}(t)\mu_{j+1}.$$

例：Poisson过程

出生率 $\lambda_i \equiv \lambda;$

灭亡率 $\mu_i \equiv 0$

Poisson过程

就是一个

生 灭

过 程

◆我们称这样的生灭过程为纯生过程或Yule过程.

◆第3章中我们证明Poisson过程两个定义的等价性，实际上就是在递推求解其转移概率.

生灭过程的平稳分布

若生灭过程$\{X_t, t \geq 0\}$存在平稳分布，则

$$\lambda_0\pi_0 - \mu_1\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0\,,$$

$$\lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{\mu_2}\big((\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 - \lambda_0\pi_0\big) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0\,,$$

递推有，$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\pi_0,$

由$\sum_{j\in I}\pi_j = 1,$可知，

华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！