華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

Stochastic Process

## § 1.2 随机变量

主讲：王湘君

# 随机变量

**定义1.2.1** 设$(\Omega,\mathcal{F})$为一个可测空间，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$为可测函数，则称$X$为一个$n$维（实值）随机变量。

**思考：**我们能定义复值随机变量，甚至取值于更一般抽象空间中的随机变量吗?

**定义1.2.2** 设$X$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个$n$维R.V.，对任意$B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$，令$\mu(B)=P(X^{-1}(B))$，则$\mu$定义了$(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$上的一个概率测度，称之为$X$的分布。

对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，令$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2\cdots,X_n\le x_n)$，称之为$X$的分布函数。

**注1.2.3**

（1）R.V.的定义是不依赖于概率测度的，但R.V.的分布是依赖于概率测度的。

（2） R.V.的分类有离散型（d.r.v.）、连续型（c.r.v.）、混合型等，请大家回顾其定义及相应的分布列和密度函数。

# 常用的一维分布

（1）二项分布 $B(n,p)$,  $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.$

（2）Poisson分布 $P(\lambda), P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,\cdots.$

（3）均匀分布 $U(a,b), f(x)=\frac{1}{b-a}\chi_{(a,b)}(x).$

（4）指数分布 $E(\lambda), f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\chi_{(0,+\infty)}(x).$

（5）正态分布 $N(\mu,\sigma^2), f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$

# 随机变量的独立性

**定义1.2.4** 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个$n$维R.V.，

若对任意$B_1,B_2,\cdots B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 有

$$P(X\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_n)=\prod_{k=1}^{n}P(X_k\in B_k),$$

或等价地

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x_k),$$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立。

# 随机变量的期望

**定义1.2.5** 设$X$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个一维R.V. 称

$$E(X)=\int_{\Omega}XdP=\int_{\mathbb{R}}xdF(x)=\begin{cases}\sum_{x}xP(X=x) & d.r.v.\\ \int_{\mathbb{R}}xf(x)dx & c.r.v.\end{cases}$$

为$X$的数学期望。

关于数学期望的计算，有下面重要的定理，其本质上是一个变量替换公式。

**定义1.2.6** 设$X$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个$n$维R.V.，$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为一个$n$元可测函数，则

$$E\big(g(X)\big)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x_1,\cdots,x_n)dF(x_1,\dots,x_n).$$

# 随机变量的数字特征

**定义1.2.7** 设$X$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个R.V.，称$D(X)=E\big(X-E(X)\big)^2$为$X$的方差；

设$(X,Y)$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个二维R.V.，称$\mathrm{cov}(X,Y)=E\big(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big)$为$X,Y$的协方差；

设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个$n$维R.V.，称$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$为$X$的均值向量，其中$\mu_i=E(X_i),i=1,2,\cdots,n$；称$\Gamma=\big(\sigma_{ij}\big)_{n\times n}$为$X$的协方差矩阵，其中$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}\big(X_i,X_j\big)$，$i,j=1,2,\cdots,n$ .

**注1.2.8**

数字特征的性质我们略去，请同学们回忆。请特别注意期望的线性性！

**思考：**如果你定义了复值随机变量，你能定义其数字特征吗？

# 作业

1. 在圆$x^2 + y^2 = 1$上任取一点，求所取点到点$A(-1,0)$的距离的期望。

2. 考虑引言中例0.4，设$T = [0, +\infty)$，$X_t = A\cos(\omega t + \Phi)$，其中$A \sim N(\mu, \sigma^2), \Phi \sim U(0, 2\pi)$，且$A, \Phi$相互独立，（1）对任意$t$，求$E(X_t)$；（2）对任意$s, t$，求$\mathrm{cov}(X_s, X_t)$.

# 谢 谢 ！