华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.10 Markov链状态的周期性

主讲：王湘君

状态的周期性

定义4.10.1 设 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，对$i \in I$, 记

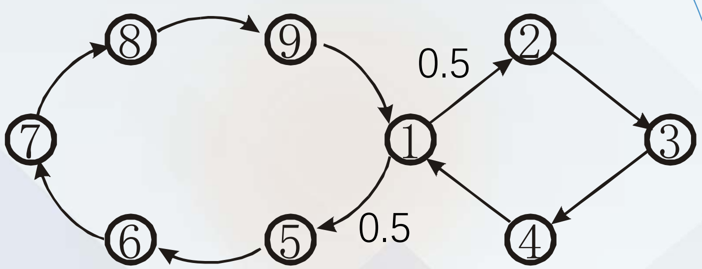
$$d(i) = G.C.D\left\{n \geq 1 \middle| p_{ii}^{(n)} > 0\right\},$$

其中$G.C.D$指最大公约数.

若$d(i) = 1$	我们称i为非周期状态;
若$d(i) > 1$	我们称i具有周期$d(i)$.

例4.10.2 随机游动所有态的周期为2.

例子



01

若一个态的周期为$d(i)$，则$\{X_n\}$从i出发回来的步数一定是$d(i)$的倍数，但不能保证经过$d(i)$的倍数步可以回来.

02

但可以证明，存在n, 对$k \geq n, p_{ii}^{kd(i)} > 0$.

周期的类性质

定理4.10.3 设$i \leftrightarrow j$,则$d(i) = d(j)$.

证明

由于$i \leftrightarrow j$, 我们还是来看 (4.7.1)和(4.7.2),

$$p_{ii}^{(l+m+n)} = \sum_{s,t\in I} p_{is}^{(l)} p_{st}^{(m)} p_{ti}^{(n)} \geq \alpha\beta p_{jj}^{(m)}, \qquad (4.7.1)$$

$$p_{jj}^{(n+m+l)} = \sum_{s,t\in I} p_{js}^{(n)} p_{st}^{(m)} p_{tj}^{(l)} \geq \alpha\beta p_{ii}^{(m)}, \qquad (4.7.2)$$

取$m = 0$, 有$p_{ii}^{(l+n)} \geq \alpha\beta > 0, p_{jj}^{(l+n)} \geq \alpha\beta > 0$, 所以，$d(i)|l+n, d(j)|l+n$.

对任意$m, p_{ii}^{(m)} > 0$, 由(4.7.2)有$p_{jj}^{(l+m+n)} > 0$, 则有$d(j)|l+m+n, d(j)|m$,

所以由最大公约数定义，$d(i) \geq d(j)$，同理，$d(j) \geq d(i)$, 所以，$d(i) = d(j)$.

遍历态

定理4.10.4 若j为非周期的常返态，则

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

特别地，若$i\in C_j$，则

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}.$$

注 以后我们只讨论非周期的状态.

定义4.10.5 我们称非周期的正常返态为遍历态.

華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢