第三章 流 体 力 学

流体是液体和气体的总称。流体的特点是流动性，流体与固体的一个重要区别是它在静态时不可能维持剪切应力。因此静止流体作用于流体内任一面元上只有法向力或正压力。

主要内容：

（1）流体动力学—伯努利方程及其应用。

（2）粘性流体运动的基本规律

返回

§3-1 理想流体的定常流动：

一、基本概念：

1、理想流体：

完全不可压缩的无粘滞流体称为理想流体。

液体不易被压缩，而气体的可压缩性大。但当气体可自由流动时，微小的压强差即可使气体快速流动，从而使气体各部分的密度差可以忽略不计。

流体内各部分间实际存在着内摩擦力，它阻碍着流体各部分间的相对运动，称为粘滞性。但对于很“稀”的流体，可近似看作是无粘滞的。

忽略内摩擦的作用，实际上是假定流体流动时无能量的损耗。很多实际流体（水、酒精、气体等）可近似看作无粘滞流体。

2、定常流动：

流动的流体中每一点的流速矢量 $\vec{v}$ 构成一个流速场。

一般，空间各点的流速随时间变化：

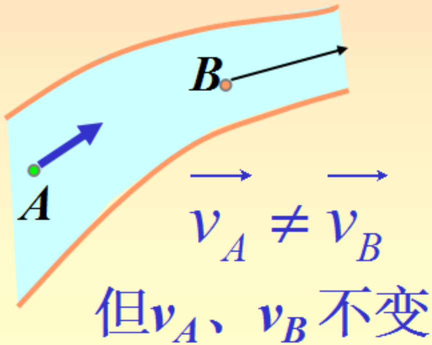
$$\vec{v}=\vec{v}(x、y、z、t)$$

称为流体的不定常流动。

特殊情况下，流速不随时间变化：

$$\vec{v}=\vec{v}(x、y、z)$$

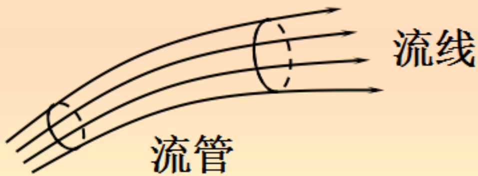
称为流体的定常流动，或稳定流动。



2、流线和流管：

为直观描述流体流动的情况，引入流线的概念：在流速场中画出一系列曲线，曲线上每一点的切线方向即为该点流速矢量的方向。

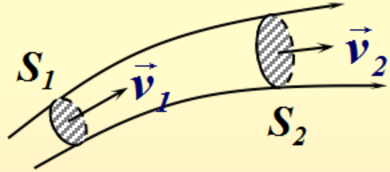
➢流速场中每一点都有确定的流速方向，所以流线不会相交。



在流体内某点附近取垂直于流线的面元，则通过该面元边界的流线围成一细管，称为流管。

➢由于流线不相交，所以流管内、外的流体都不会穿过流管壁。

二、流体的连续性原理：



在定常流动的理想流体内任取一流管。

因为流体不可压缩，所以流体密度 ρ 不变。

单位时间内从流管一端流入的流体等于从另一端流出的流体：

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 = 常量$$

或：

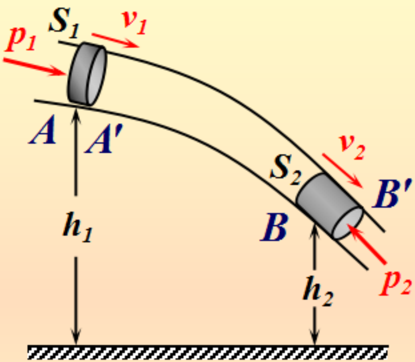
$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = 常量$$

其中ρvs为单位时间内流过流管任一横截面的流体质量，称为质量流量。而vs则称为体积流量。

以上两个方程称为流体的连续性原理。其物理实质为质量守恒。

返回

三、伯努利方程：



在作定常流动的理想流体中任取一流管，用截面S_1、S_2截出一段流体。

在Δt时间内，S_1由A移至A'，S_2由B移至B'。

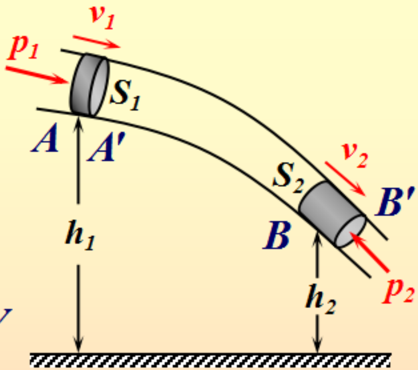
令： $AA'=\Delta l_1$，$BB'=\Delta l_2$。

则：$\Delta V_1=S_1\Delta l_1$，$\Delta V_2=S_2\Delta l_2$。

因流体不可压缩，所以：$\Delta V_1=\Delta V_2=\Delta V$ 。

$A'B$段内流体在Δt时间内运动状态不变（定常流动），能量也不变。所以要计算Δt时间内整段流体的能量变化，只需要计算体积元ΔV_2与ΔV_1之间的能量差。

动能增量：$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_1^2$



势能增量：$\Delta E_p = \rho g(h_2 - h_1)\Delta V$

外力作功：

$$\Delta W = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1\Delta V - p_2\Delta V$$

根据功能原理：

$$p_1\Delta V - p_2\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V \cdot v_1^2 + \rho g h_2\Delta V - \rho g h_1\Delta V$$

即：$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2}$$

或：$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{常量}}$$ 称为伯努利方程。

➤伯努利方程对定常流动的流体中的任一流线也成立。

讨论

1. v=0, P和h的关系如何？

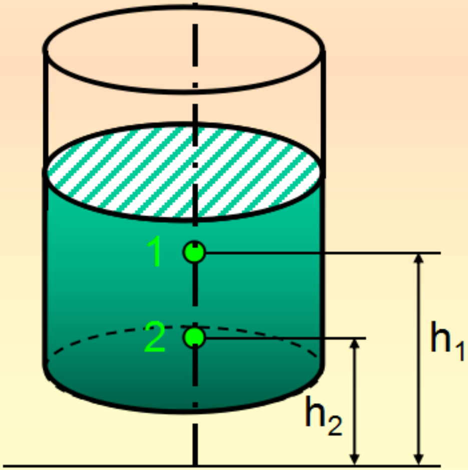
根据伯努利方程

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2=\text{常量}$$

$$P_1+\rho g h_1=P_2+\rho g h_2$$

$$P_1-P_2=\rho g(h_2-h_1)$$

❖流体静力学

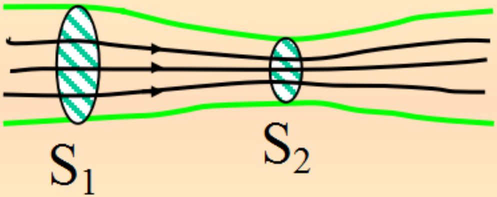


2. $h_1=h_2$（水平流管）， P和v的关系如何？

根据伯努利方程

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2=\text{常量}$$

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$



$v_1 < v_2$　　$P_1 > P_2$

∴ P 大处, v小

又根据流体的连续性原理

S 大处，v 小，P 大

S 小处，v 大，P 小

3. 粗细均匀的流管内压强与高度的关系

$\because\ S_1=S_2 \qquad \therefore\ v_1=v_2$

根据伯努利方程得

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2=\text{常量}$$

$$\boldsymbol{P_1+\rho g h_1=P_2+\rho g h_2}$$

$$\boldsymbol{P+\rho g h}=\text{常量}$$

⇨ h 大处，P 小

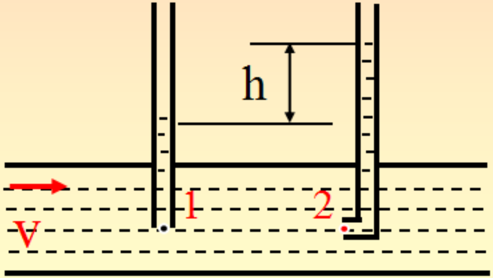
h 小处，P 大

皮托管 ——流速计

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2=\text{常量}$$

$v_2 \approx 0, v_1 = v$ ， 且 $\boldsymbol{P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2}$

$$\therefore P_2-P_1=\frac{1}{2}\rho v_1^2-\frac{1}{2}\rho v_2^2$$



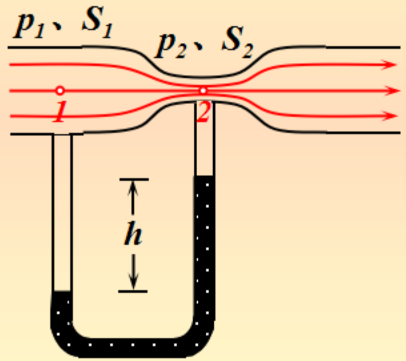
$$\boldsymbol{P_2-P_1=\rho g h}$$

$$\boldsymbol{\therefore v=\sqrt{2gh}}$$

例题： 文丘里流量计。U形管中水银密度为ρ'，流量计中通过的液体密度为ρ，其他数据如图所示。求流量。

取水平管道中心的流线。

由伯努利方程：$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$



由连续性方程：$v_1S_1=v_2S_2$

由压强关系：$p_1-p_2=(\rho'-\rho)gh$

由以上三个方程得：

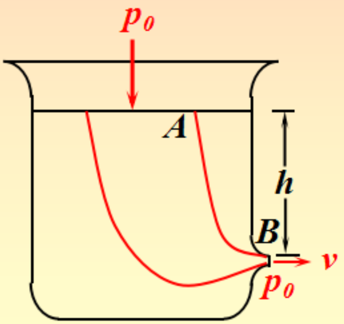
$$Q=v_1S_1=v_2S_2=\sqrt{\frac{2(\rho'-\rho)gh}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}\cdot S_1S_2$$

例题： 一大容器中装满水，水面下方h处有一小孔，水从孔中流出。求：水的流速。

取一根从水面到小孔的流线AB，在A端水的流速近似为0，此流线两端压强均为大气压。

由伯努利方程：

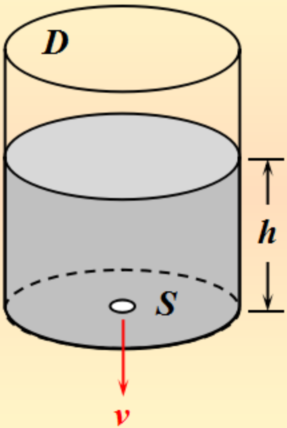
$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$



由上式求得：

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

例题： 直径为$0.10m$，高为$0.20m$的圆筒形容器底部有$1cm^2$的小孔。水流入容器内的流量为$1.4\times10^{-4}m^3/s$ 。求：容器内水面能上升多高？



由伯努利方程： $v=\sqrt{2gh}$

当水面升至最高时： $Q_V=vS=S\sqrt{2gh_m}$

$$\therefore\quad h_m=\frac{Q_V^2}{2gS^2}=0.10m$$

返回

例题： 在一水平管中，某一处的压强 P_1 为 $64.28\times10^4 Pa$，另一处的压强 P_2 为 $43.12\times10^4 Pa$ 若管子的横截面在这两处分别为 $S_1=3cm^2$；$S_2=1.5cm^2$ 问每分钟流过水管的水是多少？

解：

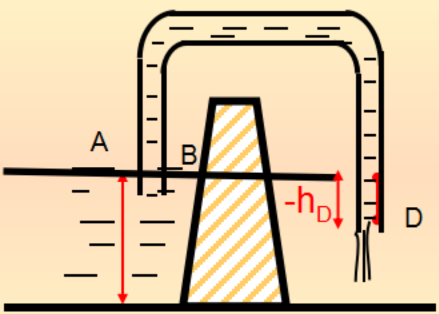
$$\begin{cases} S_1\cdot V_1=S_2\cdot V_2 \\ P_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2 \end{cases}$$

$$V_1=\sqrt{141.07}=11.88m/s$$

$$Q=S_1\cdot V_1=3.563\times10^{-3}m^3/s$$

$$V=Q\cdot t=0.214m^3$$

例题：如图从水库取水，已知虹吸管的最高点C比水库水面高2.5m，管口出水处D比水库水面低4.5m，虹吸管的内径为$1.5\times10^{-2}m^2$，设水在虹吸管内作定常流动。求：（1）从虹吸管流出水的体积量。（2）虹吸管内B、C两处的压强。



解：（1）设水面为参考面，$h_A = h_B = 0$

$$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g h_A = P_D + \frac{1}{2}\rho V_D^2 + \rho g h_D$$

$$V_D == \sqrt{2g(-h_D)} = 9.4m/s$$

$$Q_D = S_D \cdot V_D = 1.7\times10^{-3}m^3/s$$

（2）$P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g h_B = P_D + \frac{1}{2}\rho V_D^2 + \rho g h_D$

$$V_B = V_c = V_D$$

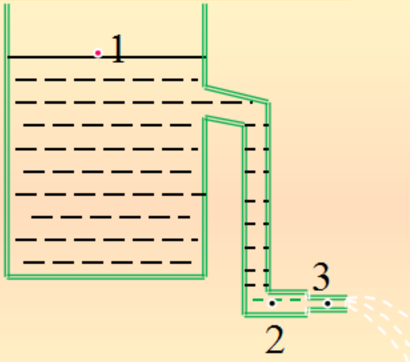
$$P_C + \frac{1}{2}\rho V_C^2 + \rho g h_C = P_D + \frac{1}{2}\rho V_D^2 + \rho g h_D$$

$$P_B = 5.7\times10^4 Pa$$

$$P_C = P_D + \rho g(h_D - h_D) = 3.2\times10^4 Pa$$

习题3-12： 水从蓄水池中稳定流出，如图所示，点1的高度为10m，点2的高度为2m，点2处管子的横截面积为0.04m²，在点3处为0.02m²，设蓄水池的面积比管子的横截面积大得多，求水的流量是多少？点2处的压强是多少？

分析：



$$P_3+\frac{1}{2}\rho v_3^2+\rho g h_3=P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1$$

$$P_3\approx P_0, P_1\approx P_0, v_1\approx 0$$

$$Q=S_3 v_3=S_3\sqrt{2g(h_1-h_3)}$$

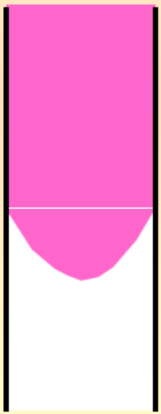
$v_2S_2=v_3S_3$

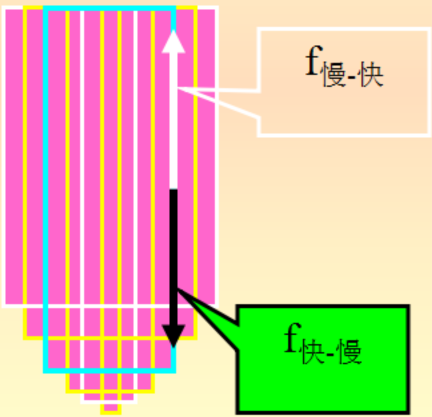
$$P_3+\frac{1}{2}\rho v_3^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad P_3\approx P_0$$

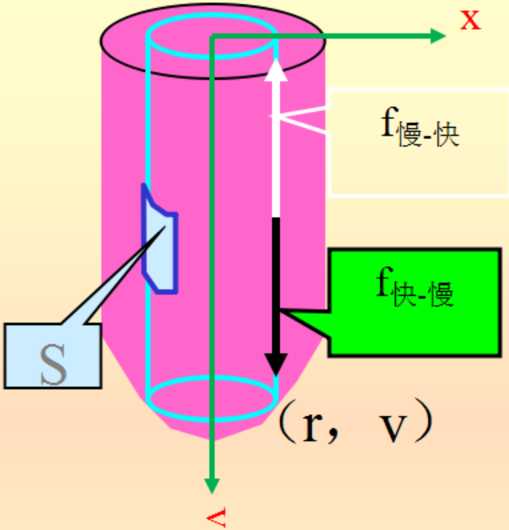
§3-2　粘性流体的流动：

一、牛顿粘滞定律

- 实际流体内部存在内摩擦力 ——粘滞力



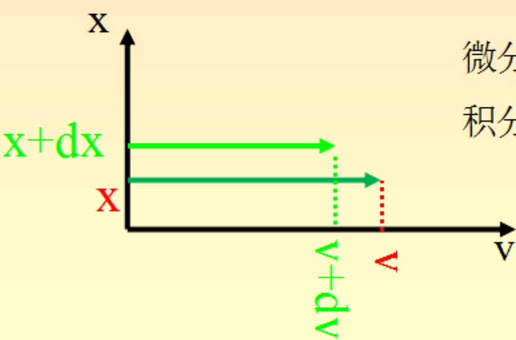




S上内摩擦力大小：

$$f = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dx}$$

——牛顿粘滞定律



微分

积分

式中：

S 为流层的接触面积

$\frac{dv}{dx}$为x处的速度梯度

η 为流体的黏度系数

流体的黏度系数 η

- 黏度的大小表征粘滞流体粘滞性的强弱
- 黏度与温度有关
  - 液体的黏度随温度升高而减小
  - 气体的黏度随温度升高而增大
- 单位：Pa·s 或 $N \cdot s/m^2$
- 牛顿流体和非牛顿流体

二、湍流　雷诺数

- 层流

- 湍流

雷诺数：

$$\boxed{R_e = \frac{\rho r v}{\eta}}$$

- Re<1000，　层流
- Re>1500，　湍流
- 两者之间，不确定

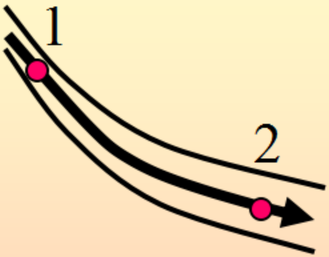
例题：设主动脉的横截面积为3cm²，黏度为3.5×10⁻³Pa．s的血液以30cm/s 的平均速度在其中流过，如血液的密度为1.05g/cm³，求（1）雷诺数是多少？（2）这时血液做层流还是湍流？

分析：

$$R_e = \frac{\rho r v}{\eta}$$

- Re<1000， 层流
- Re>1500， 湍流
- 两者之间，不确定

三、粘滞流体的伯努利方程



∵粘滞流体内部有粘滞力

∴ 1→2 过程中有能量损耗

伯努利方程变为：

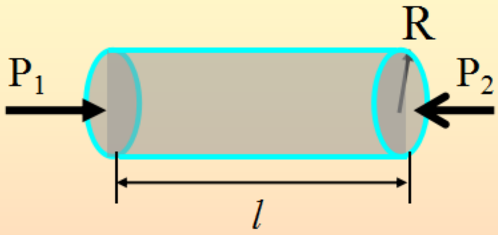
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + w_{12}$$

w_{12}— 单位体积流体由1→2 过程中克服内摩擦力所做的功

四、泊肃叶定律

- 实验表明：

$$Q \propto \frac{R^4(P_1 - P_2)}{l}$$



- 理论推导得系数：

$$\frac{\pi}{8\eta}$$

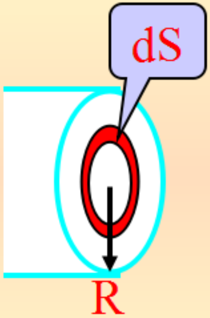
$$\therefore \quad Q = \frac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$$

——泊肃叶定律

泊肃叶定律推导思想：

水平管两端的 压强在液柱两端面的合力与相邻流层之间的内摩擦力相等

$\sum F = 0$ ⇨ 流速分布



$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

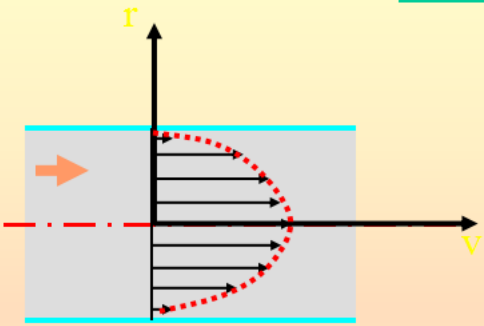
dQ=vdS ⇨ 流量

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta l}$$

泊肃叶定律推导（略）

流速分布：

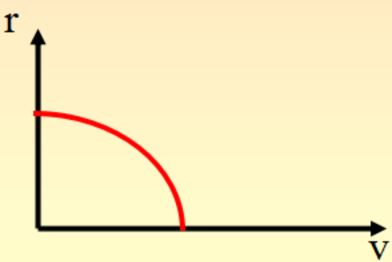
$$v=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}(R^2-r^2)$$



☞ 各流层流速沿径向呈抛物线分布

☞ 管轴中心处，流速最大

$$v_{\max}=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}R^2$$



☞ 管壁处，流速最小 $v_{\min}=0$

☞ 平均速度 $\bar{v}=\frac{P_1-P_2}{8\eta l}R^2$

泊肃叶定律还可写成： $Q=\dfrac{\pi R^4(P_1-P_2)}{8\eta l}=\dfrac{P_1-P_2}{Z}$

式中： $Z=\dfrac{8\eta l}{\pi R^4}$ ——流阻（Pa·s /m³）

➢Z 由流体的性质及流管的条件决定

$Q=\dfrac{\Delta P}{Z}$ ~ $I=\dfrac{\Delta U}{R}$

1）R, l 定： η↑， → Z↑

2）η 定: l ↑， R↓， →Z↑

❖R的影响非常显著

人体心血管系统中：

$$Q = \frac{\Delta P}{Z}$$

Q：心输出量（血流量）

ΔP：血压降

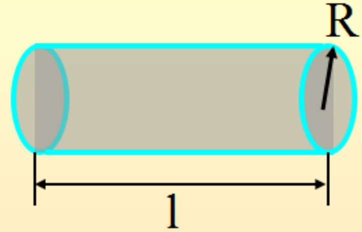
Z：外周阻力

血压、血黏度、血管条件对血流量都有影响

血管直径对血流量的影响非常显著

讨论

设粘滞流体在粗细均匀的水平圆管中流动



$h_1=h_2$，$v_1=v_2$

由粘滞流体的伯努利方程

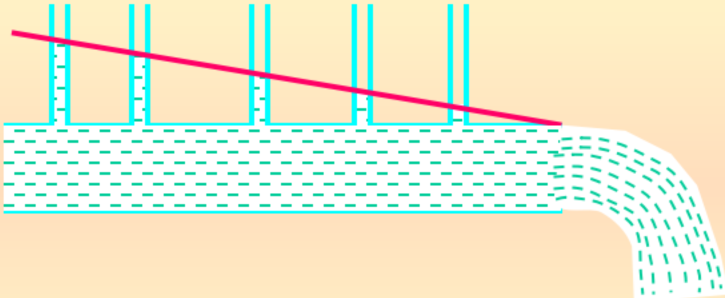
$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2+w_{12}$$

得: $w_{12}=P_1-P_2$

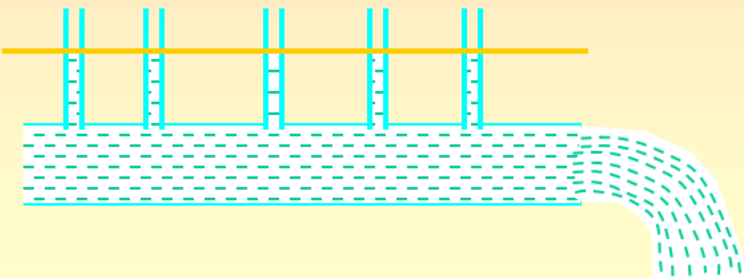
又根据泊肃叶定律: $Q=\dfrac{\pi R^4(P_1-P_2)}{8\eta l}$

$$\Rightarrow w_{12}=\frac{8\eta l}{\pi R^4}Q \xrightarrow{Q=\pi R^2\bar{v}} w_{12}=\frac{8\eta l}{R^2}\bar{v}$$

$$w_{12} = \frac{8\eta l}{R^2}\bar{v}$$ 或 $$w_{12} = \frac{8\eta l}{\pi R^4}Q$$



粘性流体



理想流体

例题：成人主动脉的半径为R=1.0×10^{-2}m，长为L=0.20m，设心输出量Q=1.0×10^{-4}m^3/s。血液粘度η=3.0×10^{-3}Pa·S。问：（1）这段主动脉的流阻是多大？（2）这段主动脉两端的压强差是多少？

解：

$$Z = {}^{8\eta L}\!/_{\pi r^4} = 1.5\times10^5 ({}^{Pa\cdot S}\!/_{m^3})$$

$$\Delta P = Q\cdot Z = 15(Pa)$$

五、斯托克司定律

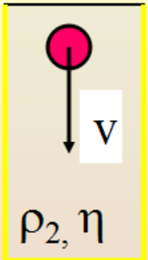
半径为 r 的小球以速度 v 在黏度为 η 的流体中运动时，受到粘滞阻力为

$$f = 6\pi\eta rv$$

——斯托克斯定律

流体黏度测定法之一：小球沉降法

小球沉降法:

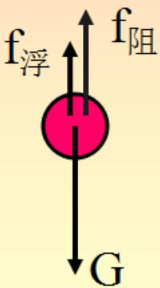


设小球半径为 r 、密度为ρ_1

$\rho_1>\rho_2$, 小球一开始加速下降

$v=v_s$时， $\sum F=0$ ，匀速运动

v_s——沉降速度（收尾速度）

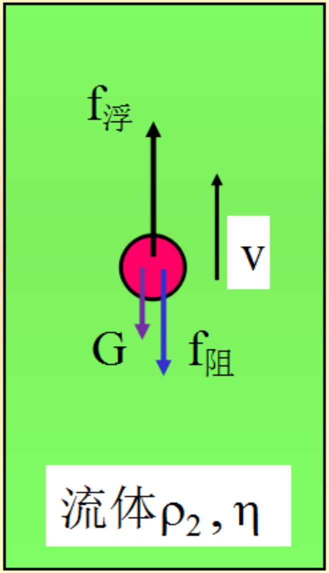


$f_{浮}+f_{阻}=G$

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g+6\pi\eta r v_s$$

$$\Rightarrow \quad v_s=\frac{2g}{9\eta}(\rho_1-\rho_2)r^2$$

仍设小球半径为 r 、密度为ρ_1



若$\rho_1 < \rho_2$， 小球(气泡)上浮

$v=v_s$时，$\sum F=0$ ，匀速运动

$G+ f_{阻}= f_{浮}$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g + 6\pi\eta r v_S = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g$$

$$\Rightarrow \quad v_S = \frac{2g}{9\eta}(\rho_2 - \rho_1) r^2$$

若$\rho 1 \ll \rho 2$，

$$v_S = \frac{2g}{9\eta}\rho_2 r^2$$

例题：一个半径为1mm的钢球，在盛有甘油的槽中下落，当钢球的加速度恰好为自由落体加速度的一半时，求钢球此刻的速度（钢球的密度8.5g/cm³，甘油的密度1.32 g/cm³，甘油的粘度830×10⁻³Pa·s）

解：
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g - 6\pi\eta v r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{2} g$$

V=0.77cm/s