차 례

CHAPTER 1

균형경기변동이론

이 글은 남상호의 《현대경제변동론》(박영사, 2003)에서 발췌하였다.

1.1 서론

앞에서 살펴본 케인지언 경기변동이론의 특징은 경기변동을 시장의 실패 혹은 경제의 불균형 상태로 인하여 발생한 것으로 파악하는데 있었다. 그런데 이들 케인즈학파의 경기변동이론은 1970년대에 발생한 스태그플레이션 현상을 예측하지 못하였을 뿐만 아니라, 사후적인 설명을 제공하는데에도 성공하지 못하였다. 그 중에서 가장 큰 문제점은 (1) 경제상황에 따라 사람들의 예측이 달라질 수 있다는 점과, (2) 경기변동모형의 핵심을 이루는 구조 파라메터의 값을 고정된 것으로 처리하였다는 점이다.

이러한 문제점을 보완하려는 노력의 일환으로 대두된 새로운 이론이 바로 균형경기변동이론(equilibrium business cycle theory)이다. 균형경기변동이론은 합리적 기대(rational expectation), 시장청산(market clearing), 그리고 개별 경제주체의 최적화 원리(optimization principle)로부터 경기변동 현상이 도출된다고 본다.

개별 경제주체의 최적화 행위란 소비자는 주어진 예산제약하에서 효용을 극대화하고, 기업은 주어진 생산기술제약하에서 이윤을 극대화하는 것을 의미한다. 루카스(Robert E. Lucas, Jr.)나 사전트(Thomas J. Sargent) 등은 예상하지 못한 통화량의 변동이나 외부로부터의 공급충격 등과 같은 교란요인이 발생하면 이 교란이 경제의 각 부문으로 전파되면서 개별 경제주체의 최적화 행동으로부터 경기변동이 발생한다고 본다. 결국 사람들이 미래에 대하여 합리적인 기대를 갖고, 미시경제학에 바탕을 둔 개별 경제주체의 최적화 행동 원리로부터 경기변동 현상을 설명한다는 점에서 이들의 이론을 균형경기변동이론이라고 부른다.

균형경기변동이론은 경기변동의 발생원인이 무엇인가를 기준으로 화폐적 균형경기변동이론, 실물적 균형경기변동이론, 그리고 무역경기변동이론 등으

로 구분된다. 화폐적 경기변동이론은 예상하지 못한 통화충격이 경기변동의 원인이라고 보는 견해이고, 실물적 경기변동이론은 생산성 충격이나 석유파동 등과 같은 실물적 요인을 경기변동의 원인이라고 보며, 외국과의 무역으로부터 경기변동이 발생한다고 보는 견해가 무역경기변동이론이다.

다음 절에서는 화폐적 경기변동이론을 살펴보고, 3절에서는 실물적 경기변동이론을, 그리고 4절에서는 기타 경기변동이론을 개관하고자 한다.

1.2 화폐적 경기변동이론

다음과 같은 단순한 총수요–총공급 모형을 이용하여 화폐적 경기변동이론을 살펴보기로 하자:

$$(AD) \quad y_t^d = \beta_1 i_t + \beta_2(m_t - m_{t-1,t}^e) + \epsilon_t \quad \beta_1, \beta_2 > 0 \tag{1.1}$$

$$(AS) \quad y_t^s = \gamma_1 i_t + \gamma_2(m_t - m_{t-1,t}^e) + \eta_t \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \tag{1.2}$$

여기서 i_t는 t기의 이자율, m_t은 t기의 통화량(자연대수값), $m_{t-1,t}^e$은 $t-1$기에 예측한 t기의 통화량(자연대수값), 그리고 ϵ_t와 η_t는 평균이 0이고 서로 독립인 확률적 교란항을 각각 나타낸다.

균형조건($y_t^d = y_t^s$)을 이용하여 위 식을 풀면 내생변수인 i_t, y_t는 예상하지 못한 통화충격인 $m_t - m_{t-1,t}^e$ 및 확률적 교란항인 ϵ_t, η_t의 함수로 나타낼 수 있다:

$$y_t^* = f(m_t - m_{t-1,t}^e, \epsilon_t, \eta_t) \tag{1.3}$$

$$i_t^* = g(m_t - m_{t-1,t}^e, \epsilon_t, \eta_t) \tag{1.4}$$

결과적으로 예측하지 못한 통화공급량($m_t - m_{t-1,t}^e$)의 변화나, 수요충격(ϵ_t) 또는 공급충격(η_t)이 균형산출량과 균형이자율에 영향을 미치게 된다. 만일 통화당국이 프리드먼(Milton Friedman)의 권고에 따라 k% 규칙을 준수한다면 예측하지 못한 통화량의 변화는 발생하지 않으므로 통화충격으로 인한 경기변동은 발생하지 않게 된다. 그러나 현실에서는 통화당국이 준칙에 입각한 통화정책을 수행하지 않거나 또는 민간 경제주체보다 우월한 정보집합을 가지고 있는 경우가 많아서 예측하지 못한 통화공급량의 변화가 존재하게 되고, 이러한 통화충격이 바로 경기변동의 원인이 되기도 한다. 다음으로 수요충격은 소비자 선호의 변화 등을 들 수 있고, 공급충격으로는 1970년대의 석유파동, 1980년대의 노동조합 파업, 1990년 및 2003년의 미국과 이라크간 전쟁 등이 여기에 속한다.

프리드먼을 주축으로 하는 통화주의자들은 광범위한 실증분석을 바탕으로 통화량의 급격한 변동이 경제를 불안정하게 만든다고 본다. 이들이 발견한 주요 실증적 증거는 다음과 같다:

(1) 통화공급량의 변화는 경기의 순환주기, 화폐의 유통속도, 인플레이션 등과 강한 양(+)의 상관관계가 존재한다.

(2) 통화공급량의 변화는 생산량의 변화에 선행(lead)하는 경향이 있다.

(3) 통화량을 주어진 것으로 보면 독립투자, 소비, 생산량 등은 유의적인 상관관계를 갖지 못한다.

1970년대에 들어와서 사전트(T.J. Sargent)와 노벨상 수상자인 루카스(R.E. Lucas, Jr.)는 통화주의자들의 주장을 계승 · 발전시켜 화폐적 균형경기변동이론을 제시하였다.

1.2.1 총수요–총공급 모형과 화폐적 균형경기변동이론

경제의 총공급은 총생산함수로부터 구할 수 있으며, 총수요는 소비와 투자의 합으로 얻어진다. t기의 총생산량은 다음과 같이 노동과 자본스톡의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_t = f(L_t, K_{t-1})Y_t^s &= f\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big)Y_t^d \\ &= C\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big) + I\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big) \end{aligned} \tag{1.5}$$

여기서 $P_t/P_{t-1,t}^e$는 실제물가와 기대물가의 비율(상대가격)을, 그리고 i_t는 이자율을 각각 나타낸다.

균형조건은 다음과 같다.

$$f\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big) = C\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big) + I\Big(\frac{P_t}{P_{t-1,t}^e}, i_t\Big) \tag{1.6}$$

기대물가가 실제물가와 일치할 때, 즉 $P_{t-1,t}^e = P_t$가 성립할 때, 균형이 성립한다. 이 균형을 우리는 합리적 기대($P_{t-1,t}^e = P_t$)하의 거시경제균형이라고 부른다.

$P_{t-1,t}^e = P_t$가 성립하면 균형소득은 일정한 값을 갖지만 그렇지 않을 때에는 균형소득 수준은 변동한다. 구체적으로 $P_{t-1,t}^e < P_t$ 또는 $P_{t-1,t}^e > P_t$가 성립하면 균형소득은 진동하게 된다.

화폐수량설에 의하면 통화량은 물가와 1:1 대응관계를 가지므로 예기하지 못한 통화량의 변화는 곧 기대물가와 실제물가의 괴리를 초래하게 된다. 예기하지 못한 통화량의 증가가 발생하는 경우, 실제물가 수준은 상승하지만 기대물가 수준은 이전 수준에 그대로 머물러 있게 되어 과소기대현상이 발생한다. 이렇게 되면 총공급이 총수요보다 크게 되어 이자율이 하락하고, 이자율의 하락은 소비와 투자를 증대시켜 총수요곡선을 오른쪽으로 이동시킨다.

표 1.1 노동증가율의 변화와 경제변수의 성장경로

경제변수	변화방향	경제변수	변화방향
근로자당 자본(k)	증가	자본(K)	불분명
근로자당 자본증가율 ($\hat{k}$)	불변	자본증가율($\hat{K}$)	감소
근로자당 소득(y)	증가	이자율(r)	하락
근로자당 소득증가율 ($\hat{y}$)	불변	임금(w)	증가
자본계수(v)	증가	소득분배 비율(rK/wL)	불분명
국민소득(Y)	불분명	근로자당 소비(C/L)	증가
국민소득증가율($\hat{Y}$)	감소		

한편 이자율의 하락은 자본의 한계생산물을 하락시켜 총공급곡선을 왼쪽으로 이동시킨다. 그런데 총수요곡선의 이동폭보다 총공급곡선의 이동폭이 더 작기 때문에 예측하지 못한 통화량의 증가는 균형소득을 증가시키는 결과를 가져오게 된다.

한편, 예측하지 못한 통화량의 감소는 실제물가와 기대물가간의 괴리 ($P^e_{t-1,t} > P_t$)를 발생시켜 총수요가 총공급을 초과하게 된다. 따라서 총수요곡선은 왼쪽으로 이동하고, 총공급곡선은 오른쪽으로 이동하여 궁극적으로 균형생산량이 감소하게 된다.

CHAPTER 2

여러 가지 곡면

함수의 연속성이나 미분가능성은 각각의 점에서 정의하기 때문에 국소적 개념이라고 말한다. 하지만 이를 이용하여 주어진 함수의 정의역 전체에서 연속성이나 미분가능성을 정의하므로 함수의 대역적 성질에 대해서도 이야기 할 수 있다. 같은 이유에 의해 가우스곡률과 평균곡률도 국소적 개념이라고 할 수 있지만 이러한 기하학적 개념이 곡면의 국소적 성질이나 모양에만 영향을 미치는 것만은 아니다. 예를 들어, 주어진 곡면의 모든 점에서 가우스곡률이 0이면 이 곡면은 평면이 된다. 가우스곡률이 모든 점에서 0이 아닌 상수이면 이 곡면은 구면 또는 구면의 일부가 된다. 이 장에서는 4장에서 배운 내용을 기초로 곡면의 대역적(global) 성질을 살펴보고 여러가지 곡면의 예를 통하여 한 단계 더 심화된 곡면이론에 대하여 알아본다. 1절에서는 곡면의 대역적 성질에 관한 몇 가지 정리를 소개하고 2절에서는 곡면이론에서 매우 중요한 역할을 하는 회전면(surface of revolution)에 대하여 다룬다. 회전면은 한 곡선을 고정된 한 축을 중심으로 회전시켰을 때 얻어지는 곡면으로 가우스곡률을 비교적 쉽게 구할 수 있다. 또한, 어떤 함수가 주어졌을 때 그 함수를 가우스곡률로 갖는 곡면의 존재성에 관한 문제를 해결해 줄 수 있는 곡면이기도 하다. 3절에서는 곡면의 또다른 예인 선직면(ruled surface)에 대하여 알아본다. 선직면은 한 곡선과 그 곡선 위에 정의된 벡터장에 의해 만들어지는 곡면으로 가우스곡률이 항상 0보다 작거나 같다. 끝으로 4절에서는 극소곡면(minimal surfaces)에 대하여 알아보기로 한다. 극소곡면은 국소적으로 경계를 고정했을 때 넓이가 최소가 되는 곡면이라고 말할 수 있다.

2.1 대역적 곡면이론

이 절에서는 대역적(global) 곡면이론에 관한 몇 가지 정리를 소개하고자 한다. 여기서는 주로 가우스곡률이 곡면의 위상구조에 어떤 영향을 미치는지에 대하여 알아보기로 한다. 지금까지 그래 왔듯이 앞으로도 정칙곡면 M은 항상 연결집합이라는 것을 가정한다.

정리 2.1 (배꼽점) $M \subset \mathbf{R}^3$을 가향 정칙곡면이라 할 때, 가우스함수 Z의 미분이 0이면, 즉 $\mathrm{d}Z = 0$이면 M은 평면 또는 평면의 일부분이다.

증명 한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하자. $\mathrm{d}Z = 0$이라는 것은 가우스함수 Z가 상수함수임을 나타낸다. 따라서 M이 $\mathbf{p}$를 지나고 Z에 수직인 평면에 포함되는 것을 보이면 된다. $\mathbf{q} \in M$를 임의의 점이라 하면, M은 연결집합이므로 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재하여 $\alpha(0) = \mathbf{p}, \alpha(1) = \mathbf{q}$이다. 이제 함수 h를

$$h(t) = \langle \alpha(t) - \mathbf{p}, Z \rangle$$

라 정의하면, $h(0) = 0$이고 함수 h를 $t \in (0,1)$에 대하여 미분하면

$$h'(t) = \langle \alpha'(t), Z \rangle = 0.$$

따라서 h는 열린구간 $(0,1)$에서 상수함수이고 $[0,1]$에서 연속함수이므로 닫힌구간 $[0,1]$에서 상수함수이다. $h(0) = 0$이므로 $h(t) = 0$. 특히 $h(1) = \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, Z \rangle = 0$이다. 그러므로 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$는 우리가 원하는 평면에 놓인다. ■

정의에 의해 점 $\mathbf{p} \in M$가 평면점이면 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$이다. 그리고 이것은 $\mathrm{d}Z_{\mathbf{p}} = 0$인 것과 동치이다. 정리 1은 정칙곡면 M의 모든 점이 평면점이면 M은 평면이라는 것을 보여준다.

법곡률의 최대값과 최소값이 일치하는 점을 배꼽점이라 말한다. 예를 들어 평면이나 구면의 모든 점은 배꼽점이다 (4장1절 참고). 중요한 것은 그것의 역 또한 성립한다는 사실이다.

정리 2.2 $M \subset \mathbf{R}^3$을 연결 정칙곡면이라 하자. 만일 M의 모든 점이 배꼽점이면 M은 구면이나 평면, 또는 그것의 일부분이다.

증명 **첫째단계:** 점 $\mathbf{p} \in M$가 배꼽점이면 모든 접벡터 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}$는 주곡률 방향임을 보이자.

$\mathbf{p} \in M$에서 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = k$이고 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$를 주곡률 방향이라고 하자. 그러면 임의의 접벡터 $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \in T_{\mathbf{p}}M$에 대하여

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= a\,\mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_1) + b\,\mathrm{d}Z_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_2) && (2.1)\\ &= -a\,k\,\mathbf{e}_1 - b\,k\,\mathbf{e}_2 && (2.2)\\ &= -k\,\mathbf{v}. && (2.3) \end{aligned}$$

둘째단계: $\mathbf{x} : D \subset \mathbf{R}^2 \to M$ 을 좌표함수라 하고 $V = \mathbf{x}(D)$ 라 놓자. 그러면 V 는 평면 또는 구면의 일부분임을 증명하자.

가정에 의해 각 점 $\mathbf{q} \in V$ 가 배꼽점이므로 **첫단계**에 의해 임의의 접벡터 $\mathbf{v} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \in T_{\mathbf{q}}M$ 에 대하여

$$\mathrm{d}Z_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{q})\mathbf{v}. \tag{2.4}$$

여기서 $\lambda(\mathbf{q}) = -\kappa_1(\mathbf{q}) = -\kappa_2(\mathbf{q})$ 는 V 에서 정의된 미분가능한 함수이다.

(i) λ 는 상수함수이다. 식 (2.4)를 풀어쓰고 도움정리를 이용하면

$$adZ(\mathbf{x}_u) + bdZ(\mathbf{x}_v) = \lambda(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \tag{2.5}$$

$$\Leftrightarrow aZ_u + bZ_v = \lambda(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v). \tag{2.6}$$

$\mathbf{v}$ 는 임의의 접벡터이므로

$$Z_u = \lambda\mathbf{x}_u, \qquad Z_v = \lambda\mathbf{x}_v.$$

첫째 식을 v 에 대하여 미분하고 둘째 식을 u 에 대하여 미분하면

$$Z_{uv} = \lambda_v\mathbf{x}_u + \lambda\mathbf{x}_{uv} \tag{2.7}$$

$$Z_{vu} = \lambda_u\mathbf{x}_v + \lambda\mathbf{x}_{vu}. \tag{2.8}$$

이 두 식의 뺄셈을 하면

$$\lambda_v\mathbf{x}_u - \lambda_u\mathbf{x}_v = 0$$

을 얻는다. $\mathbf{x}_u$ 와 $\mathbf{x}_v$ 는 각각의 접평면에서 일차독립이므로 각 점 $\mathbf{q} \in V$ 에 대하여

$$\lambda_u = \lambda_v = 0$$

을 만족한다. V 연결집합이므로 다변수해석학의 이론에 의해 λ 는 집합 V 위에서 상수함수이다.

(ii) $\lambda = 0$ 이면 V 는 평면의 일부이다.
이 경우 $\mathrm{d}Z = 0$ 이므로 정리 1에 의해 V 는 평면 또는 평면의 일부이다.

(iii) $\lambda \neq 0$ 이면 V 는 구면의 일부이다.
다음 벡터방정식

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}Z(u, v) \tag{2.9}$$

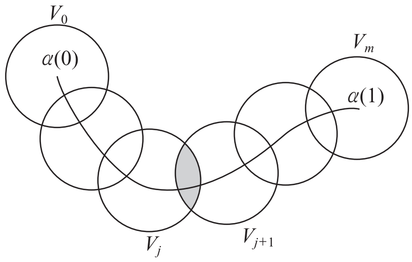

그림 2.1 멋진 그림

을 생각하자.

$$\mathbf{y}_u = \mathbf{x}_u - \frac{1}{\lambda} Z_u = \mathbf{x}_u - \frac{1}{\lambda} \mathrm{d}Z(\mathbf{x}_u) \tag{2.10}$$

$$= \mathbf{x}_u - \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{x}_u) = 0. \tag{2.11}$$

같은 방법으로

$$\mathbf{y}_v = 0$$

임을 보일 수 있다. 따라서 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$는 상수벡터이다. 그러므로 식 (2.9)에서

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 상수$$

즉, $V = \mathbf{x}(D)$는 반지름이 $\dfrac{1}{|\lambda|}$인 구면의 일부분이다.

셋째단계: M 전체가 평면이나 구면 또는 그것의 일부분임을 증명하자.

둘째 단계에서 좌표함수로 나타낼 수 있는 영역에 대하여 정리가 성립하는 것을 보였다. 셋째 단계에서는 국소적 성질을 대역적 성질로 확장시키는 방법을 이용하여 곡면 전체에 대하여 정리가 성립함을 보이자.

한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하고 $V \subset M$을 $\mathbf{p}$의 근방으로 하나의 좌표함수로 나타낼 수 있는 영역이라고 하자. $\mathbf{q} \in M$를 $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$인 임의의 점이라고 하면 연결집합의 정의에 의해 $\alpha(0) = \mathbf{p}$이고 $\alpha(1) = \mathbf{q}$를 만족하는 연속인 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재한다. 각각의 $\alpha(t)$에 대하여 $V_t \subset M$를 하나의 좌표함수로 나타낼 수 있는 $\alpha(t)$의 근방을 택하자. 그러면

$$\bigcup_{t \in [0,1]} \alpha^{-1}(V_t)$$

는 닫힌구간 $[0,1]$의 열린덮개(open covering)가 된다. $[0,1]$이 옹골집합이므로 유한개의 열린덮개 $\alpha^{-1}(V_1), \cdots, \alpha^{-1}(V_m)$, $V_1 = V$가 존재하여

$$\bigcup_{j=1}^{m} \alpha^{-1}(V_j) = [0,1]$$

이고, 각 $j = 1, \cdots, m$에 대하여

$$\alpha^{-1}(V_j) \cap \alpha^{-1}(V_{j+1}) \neq \emptyset \tag{2.12}$$

를 만족한다(그림 2.1). 따라서

$$\alpha([0,1]) \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j.$$

둘째 단계에 의해 $V_1 = V$는 평면의 일부이거나 구면의 일부이다. 만일 $V_1 = V$가 평면의 일부이면 식 (2.12)에 의해 모든 $j = 1, \cdots, m$에 대하여 V_j는 **같은** 평면의 일부이어야 한다. 따라서 점 q의 근방인 V_m도 같은 평면의 일부이다. 만일 V_1이 구면의 일부이면 같은 이유에 의해 모든 j에 대하여 V_j도 같은 구면의 일부이어야만 한다. 결과적으로 M 전체는 평면이거나 구면 또는 그것의 일부분이다. ■

정리 2에 의하면 연결집합인 정칙곡면 M의 모든 점이 배꼽점이면 M은 구면 또는 평면이 된다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

보조정리 2.2 정칙곡면 M의 모든 점이 배꼽점이면 M은 상수인 가우스곡률 $K \geq 0$을 갖는다.

정리 2.3 (정칙곡면과 구의 관계) 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$이면 M은 반지름이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$인 구면 또는 구면의 일부분이다.

보조정리 2.3 (당연한 따름정리) 정칙곡면 $M \subset \mathbf{R}^3$의 모든 점이 배꼽점이고 $K > 0$이면 M은 반지름이 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$인 구면 또는 구면의 일부분이다.

증명 (날쌘 정리의 증명) 이 정리는 정리 2와 따름정리 2.1에 의하여 성립한다. 또한 다음과 같은 방법으로 직접 보일 수도 있다.

가정에 의해 각 점 $\mathbf{p} \in M$에서 $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = k(\mathbf{p}) \neq 0$이므로 $\kappa(\mathbf{p}) > 0$을 가정해도 된다. 한 점 $\mathbf{p} \in M$을 고정하고 점 $\mathbf{c}$를

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{k(\mathbf{p})} Z(\mathbf{p})$$

라 놓자. 곡면 위의 임의의 점 $\mathbf{q} \in M$에 대하여 M이 연결집합이므로 $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha(1) = \mathbf{q}$인 곡선 $\alpha : [0,1] \to M$이 존재한다. 이제 곡선 γ를

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(\alpha(t))} Z(\alpha(t)) = \alpha(t) + \frac{1}{k} Z(t)$$

라 정의하자. 그러면 도움정리 2.1에 의해 $K = k^2$이 상수이므로,

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k} Z'(t)$$

이다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k} Z(\mathbf{q}).$$

다시 말해서, $\|\mathbf{q} - \mathbf{c}\| = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{K}}$이다. ■

증명 이 정리는 따름정리 2.1에 의하여 성립한다. 한편, M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k} Z(\mathbf{q}).$$

■

증명 M의 모든 점이 배꼽점이므로 모든 방향이 주곡률 방향이 된다. 따라서

$$Z'(t) = dZ(\alpha'(t)) = -k\alpha'(t).$$

그러므로 $\gamma'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k}(-k\alpha'(t)) = 0$. 결과적으로 γ는 상수곡선이 되고, 따라서

$$\mathbf{c} = \gamma(0) = \gamma(1) = \mathbf{q} + \frac{1}{k} Z(\mathbf{q}).$$ ■

CHAPTER 3

일야구도하기(一夜九渡河記)

이 글은 박지원의《열하일기》(1780년 6월부터 2개월간 겪은 일) 중 발췌하였다.
jiwonlipsum 패키지를 이용한다.

3.1 한글 번역

하수는 두 산 틈에서 나와 돌과 부딪쳐 싸우며, 그 놀란 파도와 성난 물머리와 우는 여울과 노한 물결과 슬픈 곡조와 원망하는 소리가 굽이쳐 돌면서, 우는 듯, 소리치는 듯, 바쁘게 호령하는 듯, 항상 장성을 깨뜨릴 형세가 있어, 전차 만승과 전기 만대나 전포 만가와 전고 만좌로써는 그 무너뜨리고 내뿜는 소리를 족히 형용할 수 없을 것이다. 모래 위에 큰 돌은 홀연히 떨어져 섰고, 강 언덕에 버드나무는 어둡고 컴컴하여 물지킴과 하수 귀신이 다투어 나와서 사람을 놀리는 듯한데, 좌우의 교리가 붙들려고 애쓰는 듯싶었다. 혹은 말하기를, "여기는 옛 전쟁터이므로 강물이 저같이 우는 것이다" 하지만 이는 그런 것이 아니니, 강물 소리는 듣기 여하에 달렸을 것이다.

산중의 내 집 문 앞에는 큰 시내가 있어 매양 여름철이 되어 큰 비가 한번 지나가면, 시냇물이 갑자기 불어서 항상 차기와 포고의 소리를 듣게 되어 드디어 귀에 젖어 버렸다. 내가 일찍이 문을 닫고 누워서 소리 종류를 비교해 보니, 깊은 소나무가 퉁소 소리를 내는 것은 듣는 이가 청아한 탓이요, 산이 찢어지고 언덕이 무너지는 듯한 것은 듣는 이가 분노한 탓이요, 뭇 개구리가 다투어 우는 것은 듣는 이가 교만한 탓이요, 천둥과 우레가 급한 것은 듣는 이가 놀란 탓이요, 찻물이 끓는 듯이 문무가 겸한 것은 듣는 이가 취미로운 탓이요, 거문고가 궁우에 맞는 것은 듣는 이가 슬픈 탓이요, 종이창에 바람이 우는 것은 듣는 이가 의심나는 탓이니, 모두 바르게 듣지 못하고 특히 흉중에 먹은 뜻을 가지고 귀에 들리는 대로 소리를 만든 것이다.

지금 나는 밤중에 한 강을 아홉 번 건넜다. 강은 새외로부터 나와서 장성을 뚫고 유하와 조하·황화·진천 등의 모든 물과 합쳐 밀운성 밑을 거쳐 백하가 되었다. 나는 어제 배로 백하를 건넜는데, 이것은 하류였다.

내가 막 요동 땅에 들어왔을 때는 바야흐로 한여름이라, 뜨거운 볕 밑을 가노라니 홀연 큰 강이 앞에 당하였다. 또한 물결이 산같이 일어나 끝을 볼 수 없으니, 이것은 대개 천리 밖에서 폭우가 온 것이다. 물을 건널 때는 사람들이 모두 머리를 우러러 하늘을 보는데, 나는 생각하기에 사람들이 머리를 들고 쳐다보는 것은 하늘에 묵도하는 것인 줄 알았더니, 나중에 알고 보니 물을 건너는 사람들이 물이 돌아 탕탕히 흐르는 것을 보면 자기 몸은 물이 거슬러 올라가는 것 같고 눈은 강물과 함께 따라 내려가는 것 같아서 갑자기 현기가 나면서 물에 빠지는 것이기 때문에, 그들이 머리를 들어 우러러보는 것은 하늘에 비는 것이 아니라 물을 피하여 보지 않으려 함이었다. 또한 어느 겨를에 잠깐 동안의 목숨을 위하여 기도할 수 있겠는가.

그 위험함이 이와 같으니, 물 소리를 들어보지 못하고 모두 말하기를, “요동 들은 평평하고 넓기 때문에 물 소리가 크게 울지 않는 것이다” 하지만 이것은 물을 알지 못하는 것이다. 요하가 울지 않는 것이 아니라 특히 밤에 건너 보지 않은 때문이니, 낮에는 눈으로 물을 볼 수 있으므로 눈이 오로지 위험한 데만 보면서 무서움을 느껴 도리어 눈이 있는 것을 걱정하는 판인데, 어찌 또 들리는 소리가 있겠는가. 지금 나는 밤중에 물을 건너는지라 눈으로 위험한 것을 볼 수 없으니, 위험은 오로지 듣는 데만 있어 바야흐로 귀로 무서움을 느끼니 걱정을 이기지 못하는 것이다.

나는 이제야 도를 알았도다. 마음이 어두운 자는 이목이 누가 되지 않고, 이목만을 믿는 자는 보고 듣는 것을 더욱 밝혀서 병이 되는 것이다. 이제 내 마부가 발을 말굽을 밟혀서 뒷차에 실리었으므로, 나는 드디어 혼자 고삐를 늦추어 강에 띄우고, 무릎을 구부려 발을 모으고 안장 위에 앉았으니, 한번 떨어지면 강이나 물로 땅을 삼고 물로 옷을 삼으며 물로 몸을 삼고 물로 성정을 삼으니, 이제야 내 마음은 한번 떨어질 것을 판단한 터이므로 내 귓속에 강물 소리가 없어지고, 무릇 아홉 번 건너는데도 걱정이 없어 의자 위에서 좌와하고 기거하는 것 같았다.

옛날 우는 강을 건너는데, 황룡이 배를 등으로 져서 지극히 위험했으나 사생의 판단이 먼저 마음 속에 밝고 보니, 용이거나 지렁이거나, 크거나 작거나 족히 관계될 바 없었다. 소리와 빛은 외물이니 외물이 항상 이목에 누가 되어 사람으로 하여금 똑바로 보고 듣는 것을 잃게 하는 것이 이같거든, 하물며 인생이 세상을 지나는 데 그 험하고 위태로운 것이 강물보다 심하고, 보고 듣는 것이 문득 병이 되는 것임에랴.

나는 산중의 내 집에 돌아와 다시 앞 시냇물 소리를 들으면서 이것을 증험해보고, 몸 가지는 데 교묘하고 스스로 총명한 것을 자신하는 자에게 경고하는 바이다.

정사 박명원과 같은 가마를 따고 삼류하를 건너 냉정에서 아침밥을 먹었다.

십여 리 남짓 가서 한 줄기 산기슭을 돌아 나서니 태복이 국궁을 하고 말 앞으로 달려나와 땅에 머리를 조아리고 큰 소리로, “백탑이 현신함을 아뢰오.” 한다. 태복이란 자는 정 진사의 말을 맡은 하인이다. 산기슭이 아직도 가리어 백탑은 보이지 않았다. 말을 채찍질하여 수십 보를 채 못 가서 겨우 산기슭을 벗어나자 눈앞이 아찔해지며 눈에 헛것이 오르락내리락하여 현란했다. 나는 오늘에서야 비로소 사람이란 본디 어디고 붙어 의지하는 데가 없이 다만 하늘을 이고 땅을 밟은 채 다니는 존재임을 알았다.

말을 멈추고 사방을 돌아 보다가 나도 모르게 손을 이마에 대고 말했다. “좋은 울음터로다. 한바탕 울어볼 만하구나!” 정 진사가, “이 천지간에 이런 넓은 안계를 만나 홀연 울고 싶다니 그 무슨 말씀이오?” 하기에 나는, “참 그렇겠네, 그러나 아니거든! 천고의 영웅은 잘 울고 미인은 눈물이 많다지만 불과 두어 줄기 소리 없는 눈물을 그저 옷깃을 적셨을 뿐이요, 아직까지 그 울음 소리가 쇠나 돌에서 짜 나온 듯하여 천지에 가득 찼다는 소리를 들어 보진 못했소이다. 사람들은 다만 안다는 것이 희로애락애오욕 칠정 중에서 ‘슬픈 감정[哀]’만이 울음을 자아내는 줄 알았지, 칠정이 모두 울음을 자아내는 줄은 모를 겝니다. 기쁨[喜]이 극에 달하면 울게 되고, 노여움[怒]이 사무치면 울게 되고, 즐거움[樂]이 극에 달하면 울게 되고, 사랑[愛]이 사무치면 울게 되고, 미움[惡]이 극에 달하여도 울게 되고, 욕심[欲]이 사무치면 울게 되니, 답답하고 울적한 감정을 확 풀어버리는 것으로 소리쳐 우는 것보다 더 빠른 방법은 없소이다. 울음이란 천지간에 있어서 뇌성벽력에 비할 수 있는 게요. 복받쳐 나오는 감정이 이치에 맞아 터지는 것이 웃음과 뭐 다르리요? 사람들의 보통 감정은 이러한 지극한 감정을 겪어 보지도 못한 채 교묘하게 칠정을 늘어놓고 ‘슬픈 감정[哀]’에다 울음을 짜 맞춘 것이오. 이러므로 사람이 죽어 초상을 치를 때 이내 억지로라도 ‘아이고’, ‘어이’라고 부르짖는 것이지요. 그러나 정말 칠정에서 우러나오는 지극하고 참다운 소리는 참고 억눌리어 천지 사이에 쌓이고 맺혀서 감히 터져나올 수 없소이다. 저 한나라의 가의는 자기의 울음터를 얻지 못하고 참다 못하여 필경은 선실을 향하여 한번 큰 소리로 울부짖었으니, 어찌 사람들을 놀라게 하지 않을 수 있었으리요.”

“그래, 지금 울 만한 자리가 저토록 넓으니 나도 당신을 따라 한바탕 통곡을 할 터인데 칠정 가운데 어느 ‘정’을 골라 울어야 하겠소?”

“갓난아이에게 물어보게나. 아이가 처음 배 밖으로 나오며 느끼는 ‘정’이란 무엇이오? 처음에는 광명을 볼 것이요, 다음에는 부모 친척들이 눈앞에 가득히 차 있음을 보리니 기쁘고 즐겁지 않을 수 없을 것이오. 이 같은 기쁨과 즐거움은 늙을 때까지 두 번 다시 없을 일인데 슬프고 성이 날 까닭이 있으리오? 그 ‘정’인즉 응당 즐겁고 웃을 정이련만 도리어 분하고 서러운 생각에 복받쳐서 하염없이 울부짖는 것이라, 혹 누가 말하기를 인생은 잘나나 못나나

죽기는 일반이요, 그 중간에 허물·환란·근심·걱정을 백방으로 겪을 터이니 갓난아이는 세상에 태어난 것을 후회하여 먼저 울어서 제 조문(弔問)을 제가 하는 것이라고 한다면 이것은 결코 갓난아이의 본정이 아닐 겝니다. 아이가 어미 태 속에 자리잡고 있을 때는 어둡고 갑갑하고 얽매이고 비좁게 지내다가 하루 아침에 탁 트인 넓은 곳으로 빠져 나오자 팔을 펴고 다리를 뻗어 정신이 시원하게 될 터이니, 어찌 한번 감정이 다하도록 참된 소리를 질러 보지 않을 수 있으리오! 그러므로 갓난아이의 울음소리에는 거짓이 없다는 것을 마땅히 본받아야 하리이다. 비로봉 꼭대기에서 동해 바다를 굽어보는 곳에 한바탕 통곡할 '자리'를 잡을 것이요, 황해도 장연의 금사 바닷가에 가면 한바탕 통곡할 '자리'를 얻으리니, 오늘 요동 벌판에 이르러 이로부터 산해관 일천이백 리까지의 어간은 사방에 도무지 한 점 산을 볼 수 없고 하늘가와 땅끝이 풀로 붙인 듯, 실로 꿰맨 듯, 고금에 오고 간 비바람만이 이 속에서 창망할 뿐이니, 이 역시 한번 통곡할 만한 '자리'가 아니겠소."

3.2 한글에 한자 병기

하수(河水)는 두 산 틈에서 나와 돌과 부딪쳐 싸우며, 그 놀란 파도와 성난 물머리와 우는 여울과 노한 물결과 슬픈 곡조와 원망하는 소리가 굽이쳐 돌면서, 우는 듯, 소리치는 듯, 바쁘게 호령하는 듯, 항상 장성을 깨뜨릴 형세가 있어, 전차(戰車) 만승(萬乘)과 전기(戰騎) 만대(萬隊)나 전포(戰砲) 만가(萬架)와 전고(戰鼓) 만좌(滿座)로써는 그 무너뜨리고 내뿜는 소리를 족히 형용할 수 없을 것이다. 모래 위에 큰 돌은 홀연히 떨어져 섰고, 강 언덕에 버드나무는 어둡고 컴컴하여 물지킴과 하수 귀신이 다투어 나와서 사람을 놀리는 듯한데, 좌우의 교리(蛟螭)가 붙들려고 애쓰는 듯싶었다. 혹은 말하기를, "여기는 옛 전쟁터이므로 강물이 저같이 우는 것이다" 하지만 이는 그런 것이 아니니, 강물 소리는 듣기 여하에 달렸을 것이다.

산중의 내 집 문 앞에는 큰 시내가 있어 매양 여름철이 되어 큰 비가 한번 지나가면, 시냇물이 갑자기 불어서 항상 차기(車騎)와 포고(砲鼓)의 소리를 듣게 되어 드디어 귀에 젖어 버렸다. 내가 일찍이 문을 닫고 누워서 소리 종류를 비교해 보니, 깊은 소나무가 통소 소리를 내는 것은 듣는 이가 청아(淸雅)한 탓이요, 산이 찢어지고 언덕이 무너지는 듯한 것은 듣는 이가 분노(憤怒)한 탓이요, 뭇 개구리가 다투어 우는 것은 듣는 이가 교만(驕慢)한 탓이요, 천둥과 우레가 급한 것은 듣는 이가 놀란 탓이요, 찻물이 끓는 듯이 문무(文武)가 겸한 것은 듣는 이가 취미로운 탓이요, 거문고가 궁우(宮羽)에 맞는 것은 듣는 이가 슬픈 탓이요, 종이창에 바람이 우는 것은 듣는 이가 의심나는 탓이니, 모두 바르게 듣지 못하고 특히 흉중(胸中)에 먹은 뜻을 가지고 귀에 들리는 대로

소리를 만든 것이다.

지금 나는 밤중에 한 강을 아홉 번 건넜다. 강은 새외(塞外)로부터 나와서 장성을 뚫고 유하(楡河)와 조하(潮河)·황화(黃花)·진천(鎭川) 등의 모든 물과 합쳐 밀운성 밑을 거쳐 백하(白河)가 되었다. 나는 어제 배로 백하를 건넜는데, 이것은 하류(下流)였다.

내가 막 요동(遼東) 땅에 들어왔을 때는 바야흐로 한여름이라, 뜨거운 볕밑을 가노라니 홀연 큰 강이 앞에 당하였다. 또한 물결이 산같이 일어나 끝을 볼 수 없으니, 이것은 대개 천리 밖에서 폭우(暴雨)가 온 것이다. 물을 건널 때는 사람들이 모두 머리를 우러러 하늘을 보는데, 나는 생각하기에 사람들이 머리를 들고 쳐다보는 것은 하늘에 묵도(默禱)하는 것인 줄 알았더니, 나중에 알고 보니 물을 건너는 사람들이 물이 돌아 탕탕히 흐르는 것을 보면 자기 몸은 물이 거슬러 올라가는 것 같고 눈은 강물과 함께 따라 내려가는 것 같아서 갑자기 현기(眩氣)가 나면서 물에 빠지는 것이기 때문에, 그들이 머리를 들어 우러러보는 것은 하늘에 비는 것이 아니라 물을 피하여 보지 않으려 함이었다. 또한 어느 겨를에 잠깐 동안의 목숨을 위하여 기도할 수 있겠는가.

그 위험함이 이와 같으니, 물 소리를 들어보지 못하고 모두 말하기를, "요동 들은 평평하고 넓기 때문에 물 소리가 크게 울지 않는 것이다" 하지만 이것은 물을 알지 못하는 것이다. 요하(遼河)가 울지 않는 것이 아니라 특히 밤에 건너 보지 않은 때문이니, 낮에는 눈으로 물을 볼 수 있으므로 눈이 오로지 위험한 데만 보면서 무서움을 느껴 도리어 눈이 있는 것을 걱정하는 판인데, 어찌 또 들리는 소리가 있겠는가. 지금 나는 밤중에 물을 건너는지라 눈으로 위험한 것을 볼 수 없으니, 위험은 오로지 듣는 데만 있어 바야흐로 귀로 무서움을 느끼니 걱정을 이기지 못하는 것이다.

나는 이제야 도(道)를 알았도다. 마음이 어두운 자는 이목(耳目)이 누(累)가 되지 않고, 이목만을 믿는 자는 보고 듣는 것을 더욱 밝혀서 병이 되는 것이다. 이제 내 마부가 발을 말굽을 밟혀서 뒷차에 실리었으므로, 나는 드디어 혼자 고삐를 늦추어 강에 띄우고, 무릎을 구부려 발을 모으고 안장 위에 앉았으니, 한번 떨어지면 강이나 물로 땅을 삼고 물로 옷을 삼으며 물로 몸을 삼고 물로 성정(性情)을 삼으니, 이제야 내 마음은 한번 떨어질 것을 판단한 터이므로 내 귓속에 강물 소리가 없어지고, 무릇 아홉 번 건너는데도 걱정이 없어 의자 위에서 좌와(坐臥)하고 기거(起居)하는 것 같았다.

옛날 우(禹)는 강을 건너는데, 황룡(黃龍)이 배를 등으로 져서 지극히 위험했으나 사생(死生)의 판단이 먼저 마음 속에 밝고 보니, 용이거나 지렁이거나, 크거나 작거나 족히 관계될 바 없었다. 소리와 빛은 외물(外物)이니 외물이 항상 이목(耳目)에 누(累)가 되어 사람으로 하여금 똑바로 보고 듣는 것을 잃게 하는 것이 이같거든, 하물며 인생이 세상을 지나는 데 그 험하고 위태로운

것이 강물보다 심하고, 보고 듣는 것이 문득 병(病)이 되는 것임에랴.

나는 산중의 내 집에 돌아와 다시 앞 시냇물 소리를 들으면서 이것을 증험(證驗)해보고, 몸 가지는 데 교묘하고 스스로 총명한 것을 자신하는 자에게 경고하는 바이다.

3.3 원문

河出兩山間, 觸石鬪狼, 其驚濤駭浪, 憤瀾怒波, 哀湍怨瀨, 犇衝卷倒, 嘶哮號喊, 常有摧破長城之勢. 戰車萬乘, 戰騎萬隊, 戰砲萬架, 戰鼓萬坐, 未足喩其崩塌潰壓之聲. 沙上巨石, 屹然離立, 河堤柳樹, 窅冥鴻蒙, 如水祇河神爭出驕人, 而左右蛟螭試其拏攫也. 或曰:「此古戰場, 故河鳴然也」. 此非爲其然也, 河聲在聽之如何爾.

余家山中, 門前有大溪. 每夏月急雨一過, 溪水暴漲, 常聞車騎砲鼓之聲, 遂爲耳祟焉. 余嘗閉戶而臥, 比類而聽之. 深松發籟, 此聽雅也; 裂山崩崖, 此聽奮也; □蛙爭吹, 此聽驕也; 萬筑迭響, 此聽怒也; 飛霆急雷, 此聽驚也; 茶沸文武, 此聽趣也; 琴諧宮羽, 此聽哀也; 紙窓風鳴, 此聽疑也. 此皆聽不得其正, 特胸中所意設而耳爲之聲焉爾.

今吾夜中, 一河九渡. 河出塞外, 穿長城, 會楡河潮河黃花鎭川諸水, 經密雲城下, 爲白河. 余昨舟渡白河, 乃此下流.

余始入遼時, 方盛夏, 行熱陽中, 而忽有大河當前. 赤濤山立, 不見涯□, 蓋千里外暴雨也. 渡水之際, 人皆仰首視天. 余意諸人者仰首默禱于天. 久乃知渡水者視水洄駛洶蕩. 身若逆泝, 目若沿流, 輒致眩轉墮溺. 其仰首者, 非禱天也, 乃避水不見爾. 亦奚暇默祈其須臾之命也哉.

其危如此, 而不聞河聲. 皆曰:「遼野平廣, 故水不怒鳴.」此非知河也. 遼河未嘗不鳴, 特未夜渡爾. 晝能視水, 故目專於危, 方惴惴焉, 反憂其有目, 復安有所聽乎? 今吾夜中渡河, 目不視危, 則危專於聽, 而耳方惴惴焉, 不勝其憂.

吾乃今知夫道矣! 冥心者, 耳目不爲之累; 信耳目者, 視聽彌審而彌爲之病焉. 今吾控夫, 足爲馬所踐, 則載之後車, 遂縱□浮河, 攣膝聚足於鞍上. 一墜則河也. 以河爲地; 以河爲衣; 以河爲身; 以河爲性情. 於是心判一墜, 吾耳中遂無河聲, 凡九渡無虞, 如坐臥起居於几席之上.

昔禹渡河, 黃龍負舟, 至危也. 然而死生之辨, 先明於心, 則龍與□□, 不足大小於前也. 聲與色, 外物也. 外物常爲累於耳目, 令人失其視聽之正如此, 而況人生涉世, 其險且危, 有甚於河, 而視與聽, 輒爲之病者乎?

吾且歸吾之山中, 復聽前溪而驗之. 且以警巧於濟身而自信其聰明者.

3.4 두보의 絶句

江碧鳥逾白 강이 푸르니 새 더욱 희고
강벽조유백
山青花欲然 산이 푸르니 꽃 빛이 불 붙는듯하다.
산청화욕연
今春看又過 올봄이 또 지나가니
금춘간우과
何日是歸年 어느 날이 이 돌아갈 해오.
하일시귀년

3.5 I talk to the wind

King Crimson

Said the straight man to the late man
“Where have you been?”
I’ve been here and I’ve been there
And I’ve been in between

(repeat) I talk to the wind
My words are all carried away
I talk to the wind
The wind does not hear, the wind cannot hear

I’m on the outside looking inside
What do I see
Much confusion, disillusion
All around me

I talk to the wind
My words are all carried away
I talk to the wind
The wind does not hear, the wind cannot hear

You don’t possess me don’t impress me
Just upset my mind
Can’t instruct me or conduct me
Just use up my time

I talk to the wind
My words are all carried away
I talk to the wind
The wind does not hear, the wind cannot hear

I talk to the wind
My words are all carried away
I talk to the wind
The wind does not hear, the wind cannot hear

CHAPTER 4

S자 이야기 (Letter S)

이 글은 도널드 크누스가 쓴 *Digital Typography*(CSLI, 1999)에서 발췌하였다.

도널드 크누스(Donald E. Knuth) 교수가 쓴 *Digital Typography*에 재미있는 꼭지가 있습니다. "S자 이야기(The Letter S)"인데요, 프란체스코 토르니엘로(Francesco Torniello)라는 이탈리아의 한 타이포그래퍼가 쓴 알파벳 도해법에서 S자 도해를 수학적으로 계산하여 설명하고 있습니다. 재미있는 부분이라는 생각이 들어서 조금 인용해봅니다. 원문 그대로 옮기지는 않았고요, 제가 중간중간에 이해를 돕기 위해 추가한 부분이 있습니다만 따로 명기하지는 않았습니다.

4.1 S자 이야기 중

몇 년 전 최신 프린트 장비에 사용할 적당한 알파벳을 디자인해야하는 문제가 있었는데 문자 스물다섯 개는 비교적 다루기가 쉬웠다. 그렇지 않은 다른 하나는 바로 'S'자였다.

(중략)

프란체스코 토르니엘로가 1517년에 쓴《알파베토》(*L'Alfabeto*)라는 책에는 알파벳 작도법이 소개되어 있다. 이 가운데 'S'자 작도법을 요즘 수학 용어로 바꾸면 다음과 같다.

> 'S'자는 9×9 데카르트 좌표 평면에 그린다. 여기서 $0\le x\le 9$, $0\le y\le 9$이다. 'S'를 그리기 위한 경계점 14개를 정의한다. 편의상 이것들을 $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$, …, $P_{14}=(x_{14},y_{14})$로 정의한다.

1. 중심이 $(4.5, 5.5)$이고 반지름이 3.5인 원호를 그린다. 이때 P_1은 원호상의 점 $(4.5, 9)$이다.

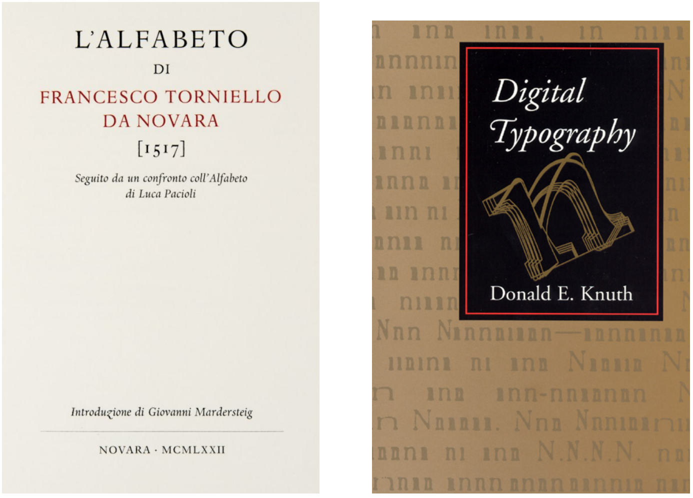

그림 4.1 프란체스코 토르니엘로, 《알파베토》, 1517(왼쪽)와 도널드 크누스, 《디지털 타이포그래피》, 1999

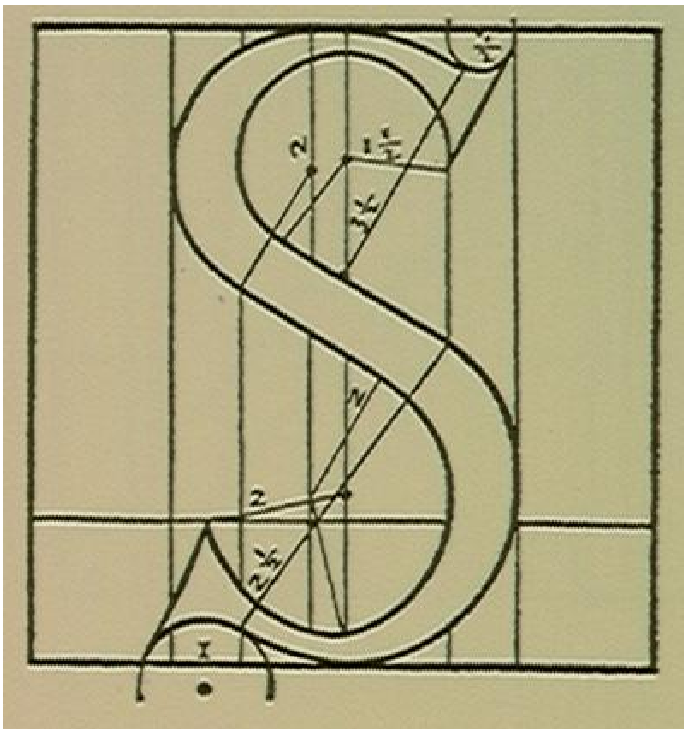

그림 4.2 토르니엘로의 S자 도해

2. 이때 1에서 그린 원호가 직선 $x = 6$와 만나는 점을 P_2라 하자. 그러면 P_2는 $(6, 5.5 + \sqrt{(3.5)^2 - (1.5)^2}) = (6, 5.5 + \sqrt{10})$이다.

3. 중심이 $(6.5, 9)$이고 반지름이 0.5인 원호를 그릴 차례다. 원호상의 점 $(6.5, 8.5)$를 P_3이라 하고 P_3에서 $(7, 9)$까지 원호를 그린다.

4. 점 $(6, 7)$를 P_4이라 하고, P_4에서 방금 그린 원호에 접하는 직선을 긋는다.

5. 4에서 원호와 직선의 접점을 P_5라 하면 P_5는 $\left(6\frac{16}{17}, 8\frac{13}{17}\right)$이다. (원의 성질과 닮음비, 삼각비를 이용하여 방정식을 푼다.)

6. 중심이 $(4, 7)$이고 반지름이 2인 원호를 그린다. 이때 P_6과 P_7은 각각 $(4, 9)$, $(3, 7 - \sqrt{3})$이다. 이 두 점 사이 만큼 원호를 그린다.

7. $(5, 4)$를 P_8이라 하고 P_7에서 P_8까지 직선을 긋는다.

8. 중심 $(4.5, 7\frac{1}{8})$에서 P_4를 지나는 원호를 $P_9 = (3.5, 6)$까지 긋는다.

9. $(6, 4.5)$를 P_{10}이라 하고 P_9에서 P_{10}까지 직선을 긋는다.

10. P_{10}을 지나고 중심이 $(4.5, 2.5)$이고 반지름이 2.5인 반원을 그린다. P_{11}은 $(3, 0.5)$이다.

11. P_{11}과 P_{12}를 잇는 다른 작은 원호를 그린다. 이 원호의 중심은 $(2.5, y)$이고 반지름은 1인데, P_{12}의 x_{12} 좌표는 $1\frac{7}{8}$이다. 따라서 $y = (1 - \sqrt{3})/2 \approx -0.37$이고 $y_{12} = (\sqrt{39} + 4 - 4\sqrt{3})/8 \approx 0.41$이다. (원의 방정식을 풀어야 한다.)

12. P_8에서 (아직 정의되지 않은) P_{13}을 잇는 반지름이 2인 원호를 그린다. 이 원호의 중심의 x 좌표는 4이고 $x_{13} = 4.5$이다. 원의 방정식을 풀면 중심은 $(4, 4 - \sqrt{3}) \approx (4, 2.27)$이고 $y_{13} = 4 - \sqrt{3} - \sqrt{3.75} \approx 0.33$이다.

13. P_{13}에서 (아직 정의되지 않은) P_{14}를 잇는 반지름이 2인 원호를 그린다. 이 원호의 중심의 y 좌표는 4.5이고 $y_{14} = 2$이다. 원의 방정식을 풀면 중심은 $(4.5, 6 - \sqrt{3} - \sqrt{3.75}) \approx (4.5, 2.33)$이고 $x_{14} = 4.5 - \sqrt{4 - (4 - \sqrt{3} - \sqrt{3.75})^2} \approx 2.53$이다.

14. 마지막으로 P_{14}와 P_{12}를 잇는다.

(인용 끝)

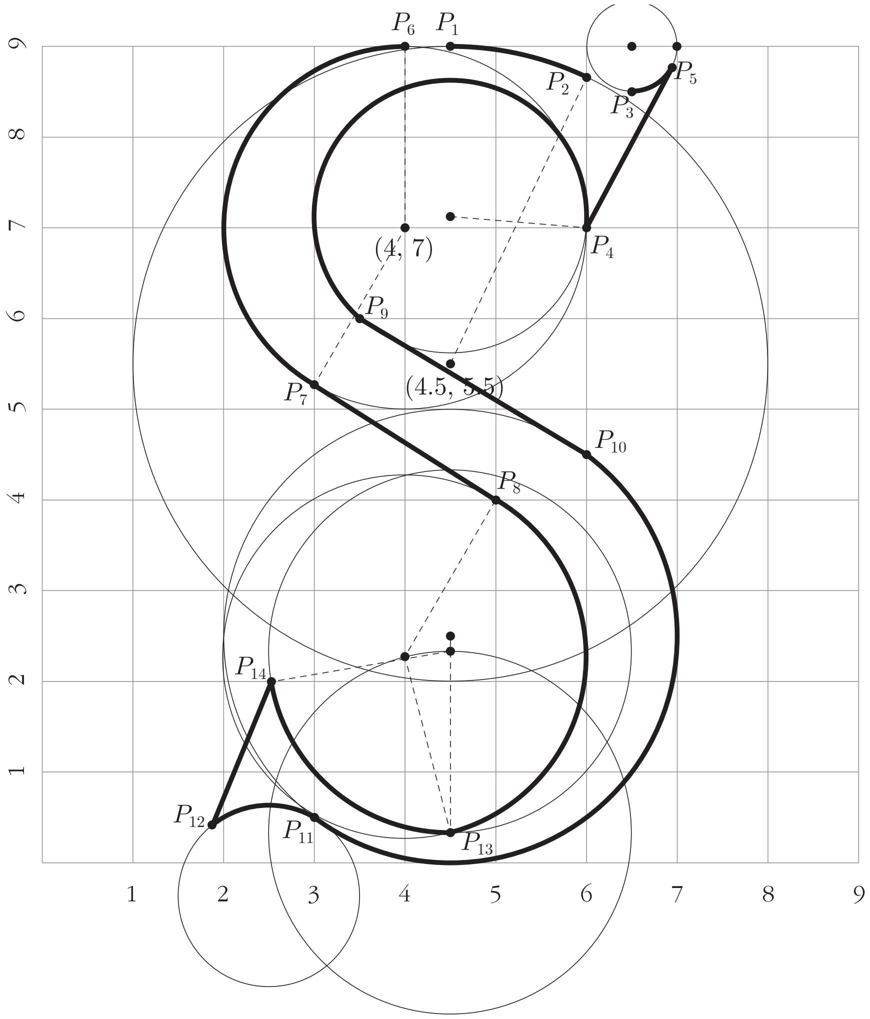

그림 4.3 크누스가 소개한 작도 방법으로 그려본 토르니엘로의 S자

4.2 그려보기

- 그림 4.3은 Adobe Illustrator에서 크누스 교수가 소개한 방법으로 그렸는데, 정확한 작도를 위해 약간의 원의 방정식을 풀어야 했습니다.
- 토르니엘로가 그린 다른 문자를 볼 수 있는 곳
  `http://rubens.anu.edu.au/htdocs/bytype/typefaces/torniello`

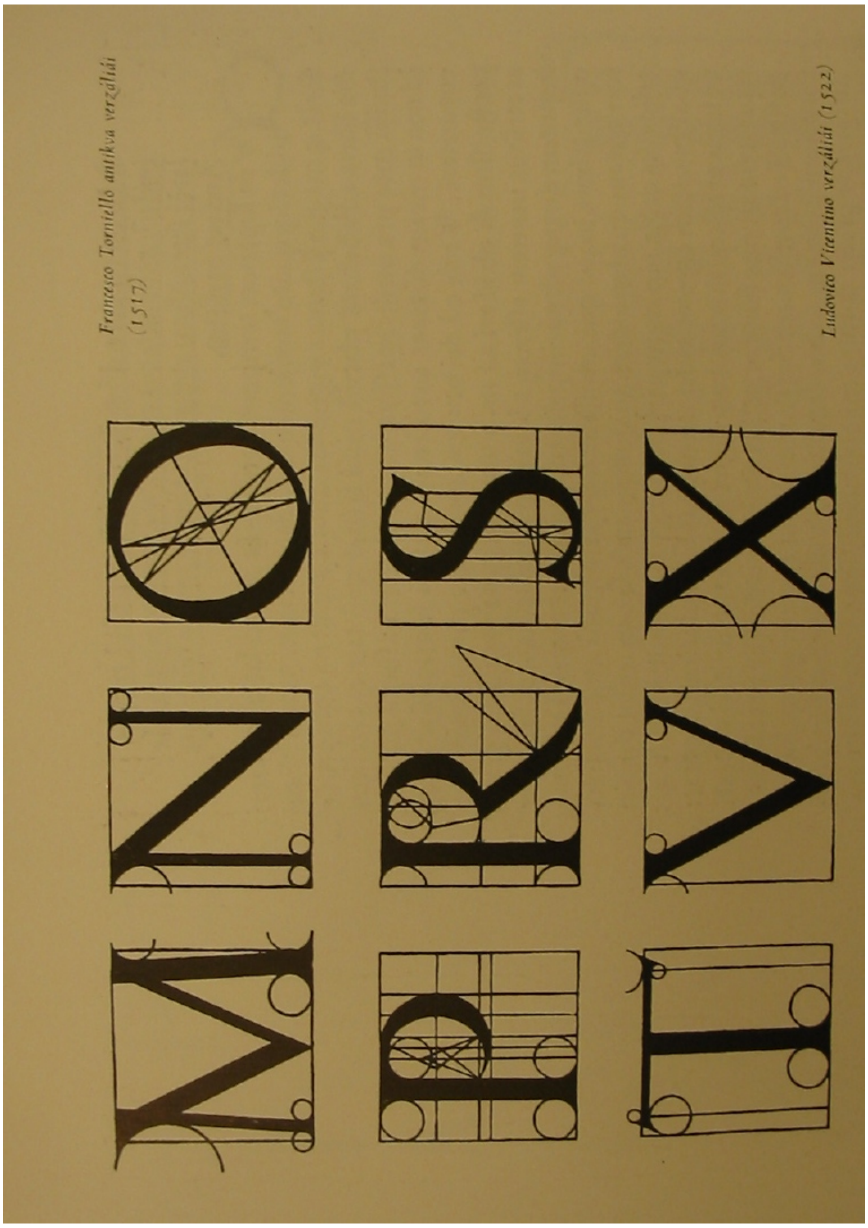

그림 4.4 토르니엘로의 다른 문자