

## 一、选择题

1. 若  $f(x)$  在  $x_0$  的导函数  $f'(x_0)$  存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \right] = ( \quad \text{B} \quad )$$

- (A)  $f'(x_0)$                       (B)  $2f'(x_0)$   
(C)  $3f'(x_0)$                       (D)  $4f'(x_0)$

2. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有  $f''(x) > 0$ , 则有不等式 ( D ) 成立

- (A)  $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$   
(B)  $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$   
(C)  $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$   
(D)  $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$



3. 设  $f(x), g(x)$  有连续导函数, 则下列命题中, 正确的命题一共有 ( **B** )

(1) 若  $\int f(x)dx = g(x)$ , 则  $f(x) = g'(x)$

(2) 若  $f'(x) = g(x)$ , 则  $f(x) = \int g(x) dx$

(3)  $\int (f(x))' dx = f(x)$

(4)  $(\int f(x) dx)' = f(x)$

(5)  $f(x)dx = d[\int f(x) dx]$

(A) 3个

(B) 2个

(C) 1个

(D) 0个



4. 设  $f(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  是  $x^2$  的 ( **B** )  
无穷小

(A) 等价

(B) 高阶

(C) 同阶, 但非等价

(D) 低阶

5. 已知  $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$ , 则  $f(x) =$  ( **A** )

(A)  $x - \frac{1}{2}x^2 + C$

(B)  $x + \frac{1}{2}x^2 + C$

(C)  $x^2 + \frac{1}{2}x + C$

(D)  $x^2 - \frac{1}{2}x + C$



6. 关于反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^p}$  敛散性下列结论正确的是 ( **B** )

- (A)  $p < 1$  收敛 (B)  $p > 1$  收敛  
(C)  $p \in R$  都发散 (D)  $p \in R$  都收敛

7. 由  $y = e^x, y_2 = e^{-x}$  及  $x = 1$  所围成平面图区域的面积可表示为 ( **A** )

- (A)  $\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$  (B)  $\int_0^e (e^x - e^{-x}) dx$   
(C)  $\int_{e^{-1}}^e (1 - \ln y) dy$  (D)  $2 \int_{e^{-1}}^e (1 - \ln y) dy$



8. 对数螺线  $\rho = e^\theta$  (或记为  $\theta = \ln \rho$ ) 相应于  $\theta$  从 0 到  $\pi$  的弧长为 ( C )

(A)  $\sqrt{2}(\pi - 1)$  (B)  $2(e^\pi - 1)$

(C)  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$  (D)  $2(\pi - 1)$

9. 设连续函数  $f(x)$  满足  $\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1$ , 则  $f(x) =$  ( C )

(A)  $y = 2e^x$  (B)  $y = e^{2x}$

(C)  $y = e^x$  (D)  $y = e^{x^2}$



## 二、填空题

10. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{3}$

11.  $\int_{-2021}^{2021} \frac{x\sqrt{1+\sin^2 x}}{1+x^2} dx = 0$

12. 已知  $f(x) = \begin{cases} 1 - \arctan \frac{1}{x}, & x < 0 \\ a + e^{2\sqrt{x}}, & x \geq 0 \end{cases}$  是连续函数, 则  $a = \frac{\pi}{2}$



### 三、计算题

13. 计算  $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+3} dx$

$$\ln(x^2 - 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

14. 设隐函数  $y = y(x)$  由方程

$$e^y + \sin(xy) - \int_0^x e^t dt = e$$

所确定, 求  $y'(0)$

0



15. 已知  $\int \frac{f(x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = x + C$ , 求  $\int \frac{1}{f(x)} dx$

$$\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

16. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$  满足初始条件  $y(0) = 1$  的特解

$$e^y = e^x + e - 1$$



#### 四、综合题

17. 求曲线  $f(x) = \int_0^{x^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \right) dt$  的凹凸区间和拐点

凸区间  $(-\infty, -1]$  与  $[1, +\infty)$       凹区间  $[-1, 1]$

拐点  $(-1, \frac{5}{4})$  与  $(1, \frac{5}{4})$

18. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{-2ax} = \int_{-\infty}^a x e^{2x} dx$ , 求常数  $a$

$\frac{5}{2}$



19. 求定积分  $\int_1^3 f(x-2)dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e + \tan \frac{1}{2}$$

20. 求微分方程  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$  的通解

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \left( \frac{1}{2}x^2 + x \right) e^{2x}$$



## 五、应用计算题

21. 过坐标原点作曲线  $y = \ln x$  的切线，该切线与曲线  $y = \ln x$  及  $x$  轴围成的平面图形  $D$ . 试求

(1) 曲线  $y = \ln x$  过坐标原点的切线方程

(2) 平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积

$$(1) y = \frac{x}{e} \quad (2) \left( \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{2} \right) \pi$$



## 六、证明题

设  $a > 0$ , 求证  $\int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}$