杭州电子科技大学学生考试期终（A 卷）试题

考试课程：高等数学 A1	考试日期：2024 年 01 月 22 日	课程号：A0714201

注意：1. 本试题共 2 页，总分 100 分，考试时间 120 分钟

2. 答案做在答题纸上，答在本试题上无效。

一、单选题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 下列各式中正确的是（ C ）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=e$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. 若函数$f(x)$具有n阶导数，则$[f(2x+1)]^{(n)}=$（ B ）.

A. $f^{(n)}(2x+1)$　　B. $2^n f^{(n)}(2x+1)$

C. $2f^{(n)}(2x+1)$　　D. $n!\,f^{(n)}(2x+1)$.

3. 若函数$y=f(x)$是可微函数，则微分 dy（ C ）.

A. 与Δx无关　　B. 当$\Delta x\to 0$ 时为Δx的高阶无穷小

C. 为Δx的线性函数　　D. 与Δx为等价无穷小.

4. 已知函数$f(x)$满足$f''(x)+\cos^2 f'(x)=\sin x$，且$f'(0)=0$，则必有（ A ）.

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值　　B. $f(0)$是$f(x)$的极小值

C. $(0,f(0))$是$f(x)$的拐点　　D. $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是$f(x)$的拐点.

5. 若$f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，则$f(x)=$（ D ）.

A. $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$　　B. $x+\frac{1}{2}x^2+C$

C. $\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$　　D. $x-\frac{1}{2}x^2+C$.

6. 若函数$f(x)$的一个原函数是$\frac{\ln x}{x}$，则$\int xf'(x)dx=$（ A ）.

A. $\frac{1-2\ln x}{x}+C$　　B. $\frac{x}{2}+C$　　C. $\frac{\ln x}{x}+C$　　D. $\frac{1+\ln x}{x}+C$.

7. 定积分$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}|\cos 2x|dx=$（ C ）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$.

8. 设$f(x)$为连续函数，且$F(x)=\int_{x^2}^{e^{x-1}}f(t)dt$，则$F'(1)=$（ B ）.

A. $f(1)$　　B. $-f(1)$　　C. $f(1)-f(0)$　　D. $f(0)-f(1)$.

9. 下列反常积分发散的是（ A ）.

A. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$　　B. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$　　C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$　　D. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

10. 曲线$y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt\ (0\le x\le\frac{\pi}{2})$的长度为（ D ）.

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2.

11. 满足方程$f(x)+\int_0^x f(t)dt=x^2$的解$f(x)=$（ B ）.

A. $2e^x+2(x-1)$　　B. $2e^{-x}+2(x-1)$

C. $Ce^x+2(x-1)$　　D. $Ce^{-x}+2(x-1)$.

12. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则a,b,c依次为（ A ）.

A. 2,1,4　　B. 2,1,3　　C. 1,0,1　　D. 1,0,2.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

6或高

13. 设函数$f(x)=\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt$，则当$x\to 0^+$时$f(x)$是关于$x$的__6__阶无穷小.

14. 曲线$x+y+e^{xy}=0$ 在$(0,-1)$处的切线方程为__$y+1=0$__.

15. 函数$\varphi(x)=\int_0^x\frac{3t}{t^2+t+1}dt$在区间$[0,1]$内的最小值为__0__.

16. 定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+x)\cos x\,dx=$__4/3__.

17. 不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=$__$\arcsin\frac{x-1}{2}+C$__.

18. 由曲线$\rho=3\theta(0\le\theta\le 2\pi)$与极轴围成的平面区域的面积$S=$__$12\pi^3$__.

三、计算题（共5小题，19-20题，每小题8分；21-23题，每小题10分；共46分）

19. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(a+bx)e^x-1}{x}=2$，求常数$a,b$的值.

解：由已知得 $\lim\limits_{x\to0^+}[(a+bx)e^x-1]=0\Rightarrow a=1.$　4′(过程2分 + 结论2分)

$$\left.\begin{aligned}2&=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+bx)e^x-1}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}(1+b+bx)e^x\\&\Rightarrow b=1.\end{aligned}\right\}\ 4'(\text{过程2分 + 结论2分})$$

20. 已知$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x},x<0,\\ \frac{1}{1+x},x\ge0\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解：令$x-1=t$，则$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t$　4′（换元2分）

$$\left.\begin{aligned}&=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \quad \text{--- } 2'\\&=[\ln(1+e)-\ln2]+\ln2=\ln(1+e).\end{aligned}\right\}4'(2+2)$$

21. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$.

(1) 求函数$f(x)$的表达式.

(2) 问a,b取何值时$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且可导.

$$\text{解：}f(x)=\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=ax+b, & x<1,\\ \frac{x^2+ax+b}{2}=\frac{1+a+b}{2}, & x=1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=x^2, & x>1.\end{cases}\right\}6'(\text{一个结论2分})$$

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续$\Leftrightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\Rightarrow a+b=1$;　2′

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导$\Leftrightarrow f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2.$　2′

解得$a=2,b=-1.$　}4′

求对一个关系式2分，但没结论或求错一个关系式扣1分.

22. 已知连续函数$y=f(x)$满足条件

$$f(x)=x-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

求函数$f(x)$的表达式.

解：(1) 等式两边对x求导，得 $f'(x)=1+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，　2′

再求导得，$f''(x)=f(x).$　1′

所以$f(x)$满足微分方程：$\begin{cases}y''-y=0,\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$.　}3′

(2) 求微分方程$y''-y=0$,

特征方程：$r^2-1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm1$，　--- 3′

通解：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，　--- 2′　}5′

初始条件代入得$C_1=\frac{1}{2},C_2=-\frac{1}{2}$.

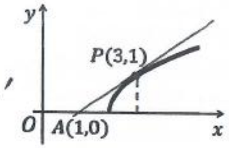
所以$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.　--　}2′(包含初始条件 + C_1. C_2的值 + 结论)

求对1个得1分.

注. 求对C_1. C_2的值. 但无$f(x)$表达式,不扣分.

23. 过点$A(1,0)$做抛物线$x=2+y^2(y\ge0)$的切线，该切线与抛物线及x轴围成一平面图形，求此平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：设切点为$P(x_0,y_0)(y_0\ge0)$,



则切线方程为$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$　2′

切线过点$A(1,0)$，且切点在抛物线上，得$\begin{cases}x_0=3\\ y_0=1\end{cases}$.　2′　}5′

切线方程：$x-2y-1=0$，　1′

旋转体体积$V_y=\int_0^1\pi(2+y^2)^2\mathrm{d}y-\int_0^1\pi(2y+1)^2\mathrm{d}y$　3′

$=\pi\int_0^1(y^4-4y+3)\mathrm{d}y=\frac{6}{5}\pi.$　2′(计算1′+结论1′)　}5′