

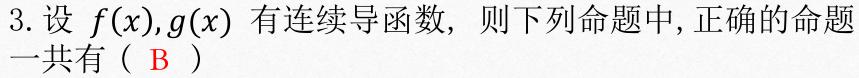
1. 若 f(x) 在 x_0 的导函数 $f'(x_0)$ 存在,则

$$\lim_{n \to \infty} n \left[f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \right] = (B)$$

- (A) $f'(x_0)$ (B) $2f'(x_0)$
- (C) $3f'(x_0)$ (D) $4f'(x_0)$

2. 设函数 f(x) 在 [0,1] 上有 f''(x) > 0,则有不等式(D) 成立

- (A) f'(1) > f'(0) > f(1) f(0)
- (B) f'(0) > f(1) f(0) > f'(1)
- (C) f(1) f(0) > f'(1) > f'(0)
- (D) f'(1) > f(1) f(0) > f'(0)



(1) 若
$$\int f(x)dx = g(x)$$
, 则 $f(x) = g'(x)$

(2) 若
$$f'(x) = g(x)$$
, 则 $f(x) = \int g(x) dx$

$$(3) \int (f(x))' dx = f(x)$$

$$(4) \left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x)$$

(5)
$$f(x)dx = d[\int f(x) dx]$$

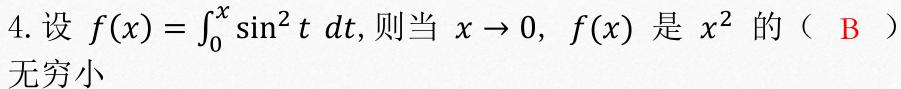
(A) 3个

(B) 2个

(C) 1个

(D) 0个





(A) 等价

- (B) 高阶
- (C) 同阶, 但非等价 (D) 低阶

5. 己知
$$f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$$
,则 $f(x) = (A)$

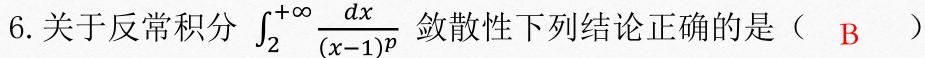
(A)
$$x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

(B)
$$x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

(C)
$$x^2 + \frac{1}{2}x + C$$

(D)
$$x^2 - \frac{1}{2}x + C$$





- (A) p < 1 收敛
 (B) p > 1 收敛

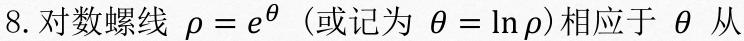
 (C) $p \in R$ 都发散
 (D) $p \in R$ 都收敛

7. 由 $y = e^{x}$, $y_{2} = e^{-x}$ 及 x = 1 所围成平面图区域的面积可 表示为(A)

- (A) $\int_0^1 (e^x e^{-x}) dx$
- (C) $\int_{e^{-1}}^{e} (1 \ln y) dy$

(B)
$$\int_0^e (e^x - e^{-x}) dx$$

(D)
$$2 \int_{e^{-1}}^{e} (1 - \ln y) dy$$



0 到 π 的弧长为 (C)

(A)
$$\sqrt{2}(\pi - 1)$$
 (B) $2(e^{\pi} - 1)$

(B)
$$2(e^{\pi}-1)$$

(C)
$$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$$
 (D) $2(\pi-1)$

(D)
$$2(\pi - 1)$$

9. 设连续函数 f(x) 满足 $\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1$, 则

$$f(x) = (\quad {}^{\mathbf{C}})$$

(A)
$$y = 2e^x$$

(B)
$$y = e^{2x}$$

(C)
$$y = e^x$$

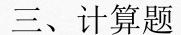
(D)
$$y = e^{x^2}$$

二、填空题

10. 极限
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{3}$$

11.
$$\int_{-2021}^{2021} \frac{x\sqrt{1+\sin^2 x}}{1+x^2} dx = 0$$

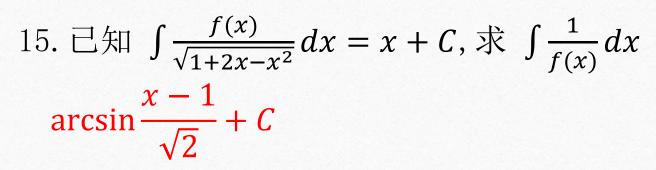
12. 已知
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \arctan\frac{1}{x}, & x < 0 \\ a + e^{2\sqrt{x}}, & x \ge 0 \end{cases}$$
 是连续函数,则 $a = x \ge 0$



13. 计算
$$\int \frac{2x-3}{x^2-2x+3} dx$$

$$\ln(x^2 - 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - 1}{\sqrt{2}} + C$$

14. 设隐函数
$$y = y(x)$$
 由方程 $e^y + \sin(xy) - \int_0^x e^t dt = e$ 所确定, 求 $y'(0)$



16. 求微分方程
$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$
 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解

$$e^{y} = e^{x} + e - 1$$

四、综合题

17. 求曲线
$$f(x) = \int_0^{x^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t\right) dt$$
 的凹凸区间和拐点

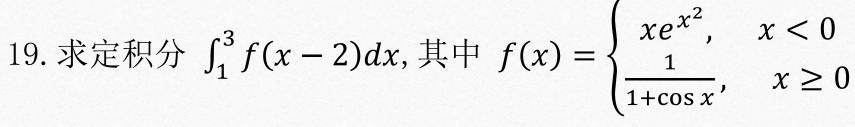
凸区间
$$(-∞, -1]$$
与 $[1, +∞)$ 凹区间 $[-1, 1]$

拐点
$$(-1,\frac{5}{4})$$
 与 $(1,\frac{5}{4})$

18. 己知
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-2ax} = \int_{-\infty}^{a} xe^{2x} dx$$
, 求常数 a

 $\frac{5}{2}$



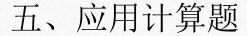


$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e + \tan\frac{1}{2}$$

20. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解

$$y = c_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}$$

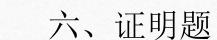




- 21. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成的平面图形 D. 试求
- (1) 曲线 $y = \ln x$ 过坐标原点的切线方程
- (2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积

(1)
$$y = \frac{x}{e}$$
 (2) $\left(\frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{2}\right)\pi$





设 a > 0, 求证
$$\int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \ge \frac{\pi^3}{4}$$