第一章　线性方程组求解技术

在许多经济和管理问题中，经常需要求解含 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中，$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的系数，$b_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的右端. 上述方程组的矩阵形式可写成为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，即行列式 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，则方程组有唯一解

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

根据 Cramer 法则，方程组的解可表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中，行列式 $D = \det(\boldsymbol{A})$，D_j 是把 D 的第 j 列用右端向量 $\boldsymbol{b}$ 替换所得到的行列式. 用 Cramer 法则求解方程组时，要计算大量的行列式，所需乘法大约为 $N\ (= (n^2 - 1)n!)$ 次. 当 n 较大时，这个计算量是惊人的. 可见 Cramer 法则不是一种方便直接应用的方法.

本章讨论求解线性方程组的数值方法. 数值求解线性方程组，依其特点分为直接法和迭代法两大类.

直接法就是将线性方程组化成与之等价的上三角形式，然后求出其解，假设计算中没有舍入误差，经过有限次算术运算就能给出方程组的精确解. 直接法的

特点是,如果不考虑计算过程中的舍入误差,应用此类方法经过有限次算术运算就能求出线性方程组的精确解.需要指出,由于实际计算中舍入误差的存在,因此用直接法一般也只能求得方程组的近似解.

而迭代法则是给定初始解向量,反复使用迭代公式得出一列解向量,在一定的条件下,此解向量数列收敛于线性方程组的精确解.与直接法不同的是,即使在计算过程中无舍入误差,迭代法也难以获得精确解.所以,迭代法是一类逐次近似的方法.迭代法的特点是,算法简便,程序易于实现,特别适用于求解大型稀疏线性方程组.

§1.1 Gauss 消去法

一、从一个经济问题谈起

设某工厂有 3 个车间,各车间互相提供产品,已知 2008 年 3 个车间出厂产值及对其他车间的消耗如表 1-1 所示,其中第 1 列消耗系数 0.1, 0.2, 0.3 表示第 1 车间生产 1 万元的产品需分别消耗第 1、第 2、第 3 车间 0.1 万元、0.2 万元、0.3 万元的产品,第 2、第 3 列类同,求全年各车间的总产值.

表 1-1

车间 \ 消耗系数 \ 车间	1	2	3	出厂产值(万元)
1	0.1	0.3	0.4	2
2	0.2	0	0.1	7
3	0.3	0.2	0.1	4

设全年 3 个车间的总产值分别为 x_1, x_2, x_3,则由已知可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 = x_1 - 2, \\ 0.2x_1 \qquad\qquad + 0.1x_3 = x_2 - 7, \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 = x_3 - 4. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 0.9x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 = 2, \\ -0.2x_1 + x_2 - 0.1x_3 = 7, \\ -0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.9x_3 = 4. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 70, \\ -3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 40. \end{cases} \tag{1.1}$$

由此可见,解决此经济问题转化为解上述线性方程组(1.1)的问题.

下面介绍用 Gauss 消去法求解此线性方程组. Gauss 消去法是一种规则化的加减消元法. 其基本思想是:通过逐次消元计算把需求解的线性方程组转化成上三角形方程组,也就是把线性方程组的系数矩阵转化为上三角矩阵,从而使一般线性方程组的求解转化为等价(同解)的上三角形方程组的求解.

二、Gauss 消去法

给定方程组

$$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{n\times 1}, \tag{1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{x} = (x_i)_{n\times 1},\ \boldsymbol{b} = (b_i)_{n\times 1}, \tag{1.3}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.4}$$

则将方程组用初等行变换自上而下消去未知量,使得未知量逐渐减少,形成行阶梯形方程组;再逐渐自下而上回代未知量的值,得到行最简形方程组,从而得到方程组的唯一解.

Gauss 消去法的算法如下.

给定

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}^{(1)})_{m\times n},\ \boldsymbol{b} = (b_i^{(1)})_{n\times 1},$$

满足

$$|\boldsymbol{A}_k^{(1)}| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

取 $k = 1, 2, \cdots, n-1$; $i = k+1, k+2, \cdots, n$, 有

$$c_i^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}; \tag{1.5}$$

取 $j = i, i+1, \cdots, n$, 有

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + a_{kj}^{(k)} \cdot c_i^{(k)}, \tag{1.6}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + b_k^{(k)} \cdot c_i^{(k)}, \tag{1.7}$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}; \tag{1.8}$$

取 $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, 有

$$x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} \cdot x_j) / a_{ii}^{(i)}. \tag{1.9}$$

下面利用所介绍的 Gauss 消去法解线性方程组(1.1). 对于方程组(1.2), 这时

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = (a_{ij}^{(1)})_{3\times3} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -2 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = (b_i^{(1)})_{3\times1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix},$$

$$c_2^{(1)} = -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{9},$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + a_{12}^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = 10 + (-3) \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{3},$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} + a_{13}^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = -1 + (-4) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{17}{9},$$

$$c_3^{(1)} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} + a_{12}^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = -2 + (-3) \cdot \frac{1}{3} = -3,$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + a_{13}^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = 9 + (-4) \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{3},$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = 70 + 20 \cdot \frac{2}{9} = \frac{670}{9},$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = 40 + 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{140}{3},$$

$$c_3^{(2)} = -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-3}{\frac{28}{3}} = \frac{9}{28},$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \cdot c_3^{(2)} = \frac{23}{3} + \left(-\frac{17}{9}\right) \cdot \frac{9}{28} = \frac{593}{84},$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \cdot c_3^{(2)} = \frac{140}{3} + \frac{670}{9} \cdot \frac{9}{28} = \frac{2\,965}{42},$$

$$x_3 = b_3^{(3)}/a_{33}^{(3)} = \frac{\dfrac{2\,965}{42}}{\dfrac{593}{84}} = 10,$$

$$x_2 = (b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} \cdot x_3)/a_{22}^{(2)} = \left[\frac{670}{9} - \left(-\frac{17}{9}\right)\cdot 10\right]\Big/\frac{28}{3} = 10,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot x_2 - a_{13}^{(1)} \cdot x_3)/a_{11}^{(1)} \\ &= [20 - (-3)\cdot 10 - (-4)\cdot 10]/9 = 10. \end{aligned}$$

此时得到线性方程组(1.1)的唯一解为

$$x_1 = 10,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10.$$

即全年各车间的总产值均为10万元.

三、收敛性分析

对于方程组(1.2),由于

$$|\boldsymbol{A}_k| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

可证明按上述Gauss消去法求解,并且在计算过程中有

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0,$$

则方程组的解必唯一.

四、误差分析

不计舍入误差得到的应该是精确解.

五、上机实现

使用Mathematica软件,输入

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -2 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix};\ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix};\ \mathrm{LinearSolve}[\mathrm{A},\ \mathrm{b}];$$

运行结果为

{{10}, {10}, {10}}.

则线性方程组(1.1)的唯一解是

$$x_1 = 10,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10.$$

若读者有兴趣,可以按算法输入具体的语句,从而得出关于 $c_2^{(1)}$, …, x_1 的所有数据.

六、方法评价

使用 Gauss 消去法虽然简单易行,能较快得到方程组的解. 但是在条件减弱后该算法会变得复杂.

对于方程组(1.2),若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,则当出现 $a_{kk}^{(k)} = 0$ 时,需要经方程组的交换,使得第 k 行第 k 列元素不为零,仍然可得到方程组的唯一解;

否则若 $|\boldsymbol{A}| = 0$,则可得到方程组的无穷多解的表达式或判断方程组无解. 而当无解时,对于实际问题可改用最小二乘法求出其唯一解或无穷多解.

对于

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1}, \tag{1.10}$$

类似可得唯一解,或无穷多解的表达式,或判断其无解.

除 Gauss 消去法外,还有类似的列主元消去法、行主元消去法、全主元消去法、按比例列主元消去法以及 Gauss-Jordan 消去法. 在此不一一叙述.

§1.2 直接三角分解法

一、从一个经济问题谈起

已知 3 家公司 X, Y, Z 具有如图 1-1 所示的股份关系,即 X 公司掌握 Z 公司 50%的股份,Z 公司掌握 X 公司 30%的股份,而 X 公司 70%的股份不受另两家公司控制,等等.

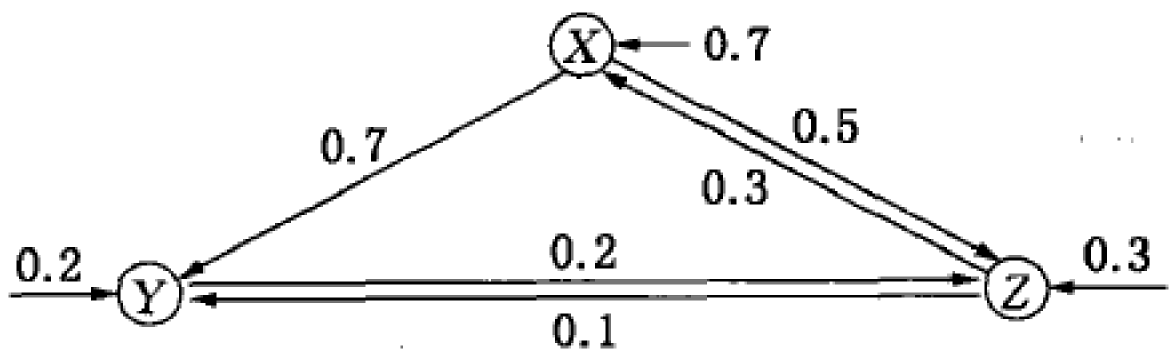

图 1-1

现设 X, Y 和 Z 公司各自的营业净收入分别是 12 万元、10 万元、8 万元,每家公司的联合收入是其净收入加上在其他公司的股份按比例的提成收入. 试确定各公司的联合收入及实际收入.

若设 X, Y, Z 这 3 家公司的联合收入分别为 x, y, z,则由已知可得

$$\begin{cases} x = 120\,000 + 0.7y + 0.5z, \\ y = 100\,000 + 0.2z, \\ z = 80\,000 + 0.3x + 0.1y. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x - 0.7y - 0.5z = 120\,000, \\ y - 0.2z = 100\,000, \\ -0.3x - 0.1y + z = 80\,000. \end{cases} \tag{1.11}$$

下面介绍用直接三角分解法求解上述线性方程组.

二、直接三角分解法

对于方程组(1.2),可进行各种三角分解,如 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$,其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵,则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{LU}, \tag{1.12}$$

于是,求解 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{n\times 1}$,就变为求解

$$\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}, \tag{1.13}$$

即先求解 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

再求解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$.

直接三角分解法的具体算法如下.

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解

取 $j = 1, 2, \cdots, n$,有

$$u_{1j} = a_{1j}; \tag{1.14}$$

取 $i = 2, 3, \cdots, n$,有

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \tag{1.15}$$

取 $k = 2, 3, \cdots, n-1$,以及 $j = k, k+1, \cdots, n$, 有

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt} u_{tj}; \tag{1.16}$$

取 $i = k+1, k+2, \cdots, n$, 有

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{it} u_{tk})/u_{kk}, \tag{1.17}$$

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{t=1}^{n-1} l_{nt} u_{tn}. \tag{1.18}$$

2. 求解 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$

$$y_1 = b_1,$$

取 $i = 2, 3, \cdots, n$, 有

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j. \tag{1.19}$$

3. 求解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$

$$x_n = y_n/u_{nn}, \tag{1.20}$$

取 $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, 有

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)/u_{ii}. \tag{1.21}$$

下面具体介绍使用 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解法求解线性方程组(1.11)的过程.

对于方程组(1.11),这时

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.7 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -0.3 & -0.31 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.7 & -0.5 \\ & 1 & -0.2 \\ & & 0.788 \end{pmatrix} = \boldsymbol{LU}.$$

求解

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 120\,000 \\ 100\,000 \\ 80\,000 \end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}120\ 000\\100\ 000\\147\ 000\end{bmatrix}.$$

再求解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$,得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}309\ 391\\137\ 310\\186\ 548\end{bmatrix}.$$

于是,可得到方程组(1.11)的唯一解为

$$\begin{cases}x=309\ 391,\\y=137\ 310,\\z=186\ 548.\end{cases}$$

可见,X, Y, Z 这 3 家公司的联合收入分别为 309 391 元,137 310 元,186 548 元,实际收入分别为 216 573.60 元,27 461.93 元,55 964.47 元.

三、收敛性分析

对于方程组(1.2),由于(1.4)式成立,因此可证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 这种分解式唯一,且方程组 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$ 的解都是唯一的.

四、误差分析

不计舍入误差得到的应该是精确解.

五、上机实现

1. 使用 Mathematica 软件

输入

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-0.7&-0.5\\0&1&-0.2\\-0.3&-0.1&1\end{bmatrix};\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}120\ 000\\100\ 000\\80\ 000\end{bmatrix};\ \mathrm{LinearSolve[A,\ b]};$$

运行结果为

{{309 391.}, {137 310.}, {186 548.}},

则方程组(1.11)的唯一解就是

$$x=309\ 391.\ ,\ y=137\ 310.\ ,\ z=186\ 548.$$

若读者有兴趣,还可以按算法输入上述具体的语句,从而得出相应的有关

数据：

$$u_{11},\ u_{12},\ u_{13},\ l_{21},\ l_{31},\ u_{22},\ u_{23},\ l_{32},\ u_{33},\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ x_3,\ x_2,\ x_1.$$

2. 使用 Matlab 软件

先输入矩阵 A, b,数据同上;再输入 lu(A),可得 A 的 LU 分解. 求解 Ly = b,只需输入 y = b/L;求解 Ux = y,则需输入 x = y/U.

六、方法评价

对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 分解法简单易行,且分解式是唯一的,而其计算量较 Gauss 消去法少.

类似地,还有不少三角分解法,例如:

(1) 对于方程组(1.2),若(1.4)式成立,则

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为单位上三角矩阵;

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵,$\boldsymbol{D}$ 为对角阵,$\boldsymbol{U}$ 为单位上三角矩阵;

(2) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为主对角元均为正数的下三角矩阵;

(3) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}$ 为三对角严格对角占优矩阵,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}, \tag{1.22}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & \\ & u_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix};$$

(4) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为上三角矩阵.

§1.3 Jacobi 迭代法

前面两节介绍了用直接法中的 Gauss 消去法和 LU 三角分解法求解方程组(1.2),从这一节开始将介绍 3 种求解方程组(1.2)的迭代法.

如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g}$, 则通常可以给定 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}_{n\times 1}$, 由迭代公式

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 可得数列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ 存在，则称数列收敛.

如果 B 的特征值中的模(或实特征值中的绝对值)最大的特征值为 $\rho(B) < 1$，则可以证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ 一定存在，$x^{(k)}$ 收敛于 $Ax = b$ 的解 x.

给定精度 $\varepsilon > 0$，如果

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} |\} < \varepsilon, \tag{1.23}$$

则方程组(1.2)的近似解 x 可取作 $x^{(k+1)}$.

根据 A 的分解形式不同可得到不同的迭代法.

以下将分别介绍 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和逐次超松弛(SOR)迭代法.

一、从一个经济问题谈起

一个城市有 3 个重要的企业:一个煤矿，一个发电厂和一条地方铁路. 开采一元钱的煤，煤矿必须支付 0.25 元的运输费. 而生产一元钱的电力，发电厂需支付 0.65 元的煤作燃料，自己亦需支付 0.05 元的电费来驱动辅助设备及支付 0.05 元的运输费. 而提供一元钱的运输费，铁路需支付 0.55 元的煤作燃料，0.10 元的电费驱动它的辅助设备. 某个星期内，煤矿从外面接到 50 000 元煤的定货，发电厂从外面接到 25 000 元钱电力的定货，外界对地方铁路没有要求. 问:这 3 个企业在那一个星期内总生产总值应达到多少时，才能精确地满足它们本身的要求和外界的要求?

对于一个星期的周期，用 x_1 表示煤矿的总产值，用 x_2 表示电厂的总产值，用 x_3 表示铁路的总产值. 根据题意建立方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 1-0.05 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 25\,000 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

为了求解方程组(1.24)，下面介绍 Jacobi 迭代法.

二、Jacobi 迭代法

对于方程组(1.2)，若 $|A| \neq 0$，且 $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，令

$$A = L + D + U, \tag{1.25}$$

其中 L 为下三角矩阵，D 为对角矩阵，U 为上三角矩阵，则

$$Ax = b$$

变为

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}. \tag{1.26}$$

由于

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

因此 $\boldsymbol{D}$ 可逆，有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}[-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}], \tag{1.27}$$

迭代公式记作

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}[-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}] \quad (k=0,1,\cdots), \tag{1.28}$$

其分量形式为

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}(i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots). \tag{1.29}$$

三、收敛性分析

由于

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U},$$

因此用 Jacobi 迭代法，有

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}), \tag{1.30}$$

若 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$，则可证明 $\{\boldsymbol{x}^{(k+1)}\}$ 收敛.

四、上机实现

线性方程组(1.24)的 Jacobi 迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.263\,158 & 0 & 0.105\,263 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 26\,315.8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

给定

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 26\,315.8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 67\,105.2 \\ 39\,473.7 \\ 13\,815.8 \end{pmatrix},$$

……

$$x^{(25)} = \begin{pmatrix} 102\,087.0 \\ 56\,162.9 \\ 28\,329.9 \end{pmatrix},$$

$$x^{(26)} = \begin{pmatrix} 102\,087.0 \\ 56\,163.0 \\ 28\,330.0 \end{pmatrix},$$

$$x^{(27)} = \begin{pmatrix} 102\,087.0 \\ 56\,163.0 \\ 28\,330.0 \end{pmatrix}.$$

使用 Mathematica 软件具体操作如下. 输入

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.263\,158 & 0 & 0.105\,263 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{g} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 26\,315.8 \\ 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{B.\,x} + \mathrm{g},$$

运行得

$$\{\{50\,000\},\ \{26\,315.8\},\ \{0\}\}.$$

复制

$$\mathrm{x} = \mathrm{B.\,x} + \mathrm{g},$$

运行得

$$\{\{67\,105.2\},\ \{39\,473.7\},\ \{13\,815.8\}\}.$$

依此类推.

§1.4　Gauss-Seidel 迭代法

为了加快迭代速度,可以将迭代公式(1.26)改写为

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \tag{1.31}$$

即

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(-\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}) \quad (k = 0, 1, \cdots). \tag{1.32}$$

这就是 Gauss-Seidel 迭代法.

一、从一个经济问题谈起

一个幼儿园的营养师安排幼儿的食谱由 3 种食物 A, B, C 构成. 幼儿的食谱要求包含 40 单位的钙,25 单位的维生素 A, 20 单位的铁. 表 1-2 给出的是每 100 g 食物 A, B, C 所含有的钙、铁、维生素 A 的量(单位). 写出幼儿食谱中所含食物 A, B, C 的重量.

表 1-2

食物	钙	维生素 A	铁
A	20	5	5
B	10	15	5
C	10	5	10

设幼儿食谱中所含食物 A, B, C 的量分别为 x_1, x_2, x_3,则

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 40, \\ 5x_1 + 15x_2 + 5x_3 = 25, \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 20. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases} \tag{1.33}$$

可用 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组,下面介绍这一方法.

二、Gauss-Seidel 迭代法

给定方程组(1.2), 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,且 $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵,$\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵,则

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

变为

$$(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Ux} + \boldsymbol{b},$$

迭代公式即为(1.31)式、(1.32)式,其分量形式为

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1, \cdots). \tag{1.34}$$

(1.31)式、(1.32)式还可以改写为

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b,$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g,$$

其中

$$B = -(D+L)^{-1}U,\ g = (D+L)^{-1}b.$$

三、收敛性分析

在 Gauss-Seidel 迭代法中，有

$$B = -(D+L)^{-1}U,$$

若

$$\rho(B) < 1,$$

则可证明$\{x^{(k+1)}\}$收敛.

四、上机实现

线性方程组(1.33)的 Gauss-Seidel 迭代公式为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/2 \\ (5 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/3 \\ (4 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)})/2 \end{pmatrix},$$

整理得

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

给定

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

……

$$x^{(26)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x^{(27)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

使用 Mathematica 软件具体操作如下.输入

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1/2 & -1/2\\0 & 1/6 & -1/6\\0 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}2\\1\\1/2\end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$x=B.x+g,$$

运行得

{{2}, {1}, {0.5}}.

反复复制

$$x=B.x+g$$

并运行,直到两次得到

{{1}, {1}, {1}}

为止.

线性方程组(1.33)的唯一解为

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1,$$

可知,幼儿食谱中所含食物 A, B, C 均需 100 g.

§1.5 逐次超松弛迭代法

一、从一个经济问题谈起

已知 3 种调味品分别为 A, B, C,每一包含甲、乙、丙 3 种成分的数量分别为 3, 1, 1; 1, 3, 1; 1, 1, 3. 而调味品 D,每一包含甲、乙、丙 3 种成分的数量分别为 5, 5, 5. 问调味品 D 能否由调味品 A, B, C 调制而成?

若能,一包调味品 D 分别由几包调味品 A, B, C 调制而成?

设一包调味品 D 分别由 x_1, x_2, x_3 包的调味品 A, B, C 调制而成,则由已知可得

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=5,\\x_1+3x_2+x_3=5,\\x_1+x_2+3x_3=5.\end{cases}\tag{1.35}$$

为了求解方程组(1.35),下面介绍逐次超松弛迭代法(即 SOR 法).

二、逐次超松弛迭代法

为了提高收敛速度,可以增加松弛因子 ω,将迭代公式(1.34)改写为含 ω 的式子.

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}, \tag{1.36}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}). \tag{1.37}$$

当 $\omega > 1$ 时,称为逐次超松弛迭代法.

给定方程组(1.2),若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,且 $a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则迭代公式(1.37)等价于

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.38}$$

当 $\omega = 1$ 时,称为 Gauss-Seidel 迭代法,当 $\omega > 1$ 时,就是 SOR 法.

三、收敛性分析

由于

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U},$$

分量形式的(1.38)式等价于

$$(\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})\boldsymbol{X}^{(k+1)} = ((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U})\boldsymbol{X}^{(k)} + \omega \boldsymbol{b},$$

则对逐次超松弛迭代法,有

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}),$$

若 $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$,则可证明 $\{\boldsymbol{X}^{(k+1)}\}$ 收敛.

还可以证明逐次超松弛迭代法收敛的必要条件为

$$0 < \omega < 2.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵且 $0 < \omega < 2$ 时,逐次超松弛迭代法收敛;

当 $\boldsymbol{A}$ 为对角占优矩阵且 $1 < \omega < 2$ 时,逐次超松弛迭代法也收敛.

四、上机实现

在求解关于调味品问题的方程组(1.35)中,令

$$\omega = \frac{3}{2},$$

可建立 SOR 迭代公式如下：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ 5 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ 5 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} \end{pmatrix}.$$

使用 Mathematica 软件具体操作如下：

直接输入

```
x1k=0; x2k=0; x3k=0;
x1k1=(5-x1k-x2k-x3k)/2;
x2k1=(5-x1k1-x2k-x3k)/2;
x3k1=(5-x1k1-x2k1-x3k)/2.
```

第一次得

x1k1=2.5, x2k1=1.25, x3k1=0.625.

再输入

```
x1k=x1k1; x2k=x2k1; x3k=x3k1;
x1k1=(5-x1k-x2k-x3k)/2;
x2k1=(5-x1k1-x2k-x3k)/2;
x3k1=(5-x1k1-x2k1-x3k)/2.
```

第二次得

x1k1=0.3125, x2k1=1.40625, x3k1=1.32813.

依此类推,反复使用上面 4 条语句,直到两次结果几乎相等为止.

第 13 次得

1.0009, 0.999622, 0.999315.

第 14 次得

1.00008, 1.00049, 1.00006.

为了达到所要的精度,例如精确到小数点后面 3 位,可使得最后两次的 3 个未知量的差的绝对值的最大值小于 $\varepsilon = 0.001$,即

$$\max\{|1.000\,08 - 1.000\,9|, |1.000\,49 - 0.999\,622|, |1.000\,06 - 0.999\,315|\} = 0.000\,868 < \varepsilon = 0.001.$$

其他两种迭代法也可类似地迭代到满足上述的精度为止.

第二章　非线性方程求根技术

在计算经济应用问题的数学模型中，经常需要解方程

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathbf{R},\ f(x) \in \mathbf{C}[a,\ b]$.

如果方程(2.1)是线性方程，则易得其解. 而对于非线性方程，就要根据背景资料粗略地判断出方程解的大致范围，并需要寻找满足一定精度要求的近似解.

本章讨论非线性方程 $f(x) = 0$ 的求根问题，其中 $f(x)$是非线性函数. 我们已知，高于四次的多项式方程没有解析形式的求根公式，而对超越方程则更难求出其精确解，所以对求非线性方程的根没有直接法可言. 因此，求解非线性方程常用的方法为迭代法. 但各种不同的迭代法都有一定的条件和适用范围，应根据问题的实际要求，择优选取求根的有效方法.

本章针对各种类型函数的均衡价格经济问题的数学模型，依次介绍二分法、试位法、逐次迭代法以及牛顿法求解非线性方程(2.1)的根.

§2.1　二　分　法

一、从一个经济问题谈起

设某商品的需求函数为

$$Q = Q(P) = -2P + 3.875,$$

供给函数为

$$Q = Q(P) = P^3 - 3P + 2,$$

称市场价格运行规律达到需求量与供给量相等时的价格为均衡价格 P，并要求准确到小数点后的第一位.

由该问题得到 P 满足

$$-2P + 1.875 = P^3 - 3P,$$

于是，得到等价的非线性方程

$$P^3 - P - 1.875 = 0. \tag{2.2}$$

设

$$f(P) = P^3 - P - 1.875,$$

则

$$f(1) = -1.875 < 0,\ f(2) = 4.125 > 0,$$

可证明方程(2.2)在区间[1, 2]内至少有一个实根.这是因为

$$f'(P) = 3P^2 - 1 > 0 \quad (P \in [1, 2]),$$

$f(P)$在区间[1, 2]上单调增加,所以在区间[1, 2]内方程(2.2)只有一个实根.

为了求解此非线性方程(2.2)的实根,引入二分法.设$[a, b]$为方程$f(x) = 0$的有根区间.所谓二分法就是将有根区间$[a, b]$逐次分半,使有根区间长度逐次缩小,从而得到根的近似值.下面介绍该方法.

二、二分法

设有方程

$$f(x) = 0,$$

其中$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$,且$f(a)f(b) < 0$,由连续函数的零点定理可知,方程在$(a, b)$内至少有一个实根,称$(a, b)$为方程的有根区间.

二分法是一个把有根区间不断缩短,使有根区间中点成为一个满足误差要求的近似解的方法.具体算法如下.

步骤1:计算$f(x)$在有根区间$[a, b]$端点处的值$f(a)$, $f(b)$;

步骤2:计算$f(x)$在区间中点$\frac{a+b}{2}$处的函数值$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$;

步骤3:若$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$,则$\frac{a+b}{2}$即是根,计算过程结束.否则检验:

若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$f(a)$异号,则根位于$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,令$\frac{a+b}{2}$代替$b$;

若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$与$f(a)$同号,则根位于$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,令$\frac{a+b}{2}$代替$a$.

反复执行步骤2和步骤3,直到区间$[a, b]$的长度缩小到允许误差ε的范围之内,此时区间中点$\frac{a+b}{2}$即可作为所求的根.

三、收敛性及误差分析

具体过程描述如下:

记 $a_0 = a$, $b_0 = b$. 将区间 $[a, b]$ 分成两半，其中记 $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$，计算 $f(x_0)$.

如果 $f(x_0) = 0$，则得到根 $x^* = x_0$. 否则

如果 $f(x_0)f(a_0) < 0$，则令 $a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$；

如果 $f(x_0)f(b_0) < 0$，则令 $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$.

这样得到长度缩短一半的有根区间 $[a_1, b_1]$.

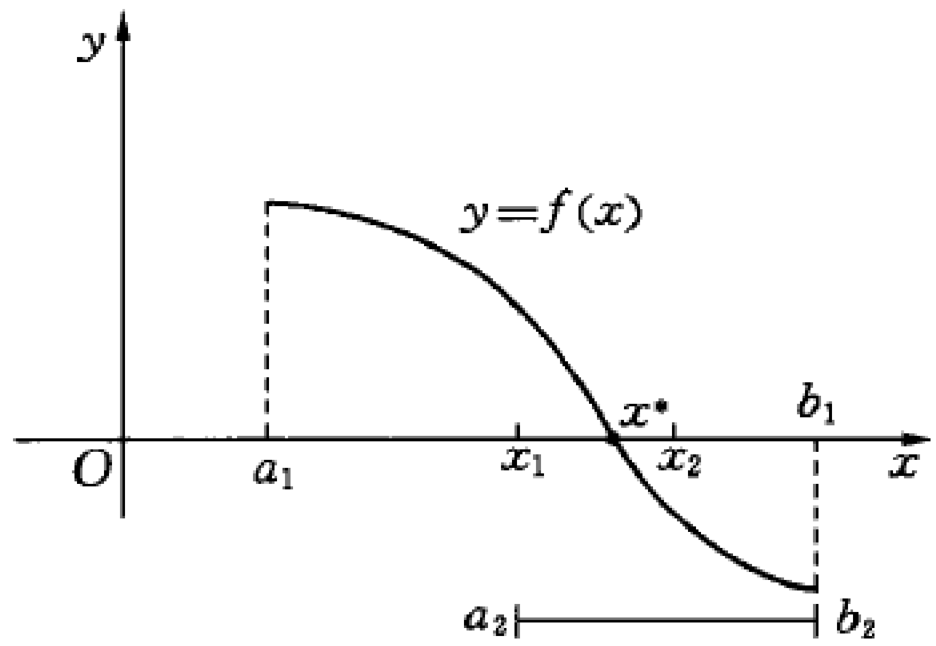

图 2-1

对区间 $[a_1, b_1]$ 施行同样的做法，又可得到新的有根区间 $[a_2, b_2]$，其长度是 $[a_1, b_1]$ 的一半. 如图 2-1 所示，如此反复二分下去，得到一系列有根区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

其中每个区间的长度都是前一个区间的一半，因此区间 $[a_k, b_k]$ 的长度

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k$$

当 $k \to \infty$ 时趋于零，就是说，如果二分过程无限地继续下去，这些区间最终必收缩于一点 x^*，该点显然就是所求的根.

每次二分后，取有根区间 $[a_k, b_k]$ 的中点

$$x_k = (a_k + b_k)/2$$

作为根的近似值，则在二分过程中可以获得一个近似根的序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots,$$

该序列必以根 x^* 为极限.

不过在实际计算时，人们不可能完成这个无限过程，其实也没有这种必要，因为数值分析的结果允许带有一定的误差.