第4章　级　　数

无穷级数几乎与微积分同时诞生. 牛顿曾把二项式级数作为研究微积分的工具,拉格朗日也曾试图用无穷级数来构建微积分,莱布尼兹、欧拉、伯努利以及与他们同时代的许多数学家都大量使用级数. 在19世纪初之前,人们对无穷级数的认识是很肤浅的,直到19世纪中叶,无穷级数的严格理论才由柯西等人建立.

无穷级数是人们认识客观事物数量关系的重要工具之一,它是研究无限个离散量之和的数学模型. 无穷级数理论的本质是极限理论,确切地说是极限理论的另一种表述形式,但它的意义远不止是一种新的表述形式,而是对极限理论的进一步深化. 无穷级数的重要意义在于将复杂的量化为简单量的无穷和,例如将一个函数化为幂级数或三角级数,简言之就是把分析问题算术化. 无穷级数的方法是现代数学的重要方法之一,它已被广泛地应用于数学自身以及自然科学和社会科学的各个领域.

无穷级数通常包括常数项级数与函数项级数两大部分,函数项级数又以幂级数与傅里叶级数应用最广泛. 本章4.1将介绍数项级数(包括正项级数与一般项级数)的基本理论与基本方法;本章4.2将介绍函数列(函数项级数)一致收敛的基本理论与基本方法,这一内容是数学分析课程中较为困难的部分;本章4.3将介绍幂级数及函数展开为幂级数的基本理论与基本方法;本章4.4将介绍傅里叶级数的基本理论及基本方法;本章4.5将对建立级数理论体系的历史背景及相关人物作简单介绍.

关键词:数项级数、正项级数、条件收敛、绝对收敛、函数列(函数项级数)一致收敛、幂级数、傅里叶级数、正(余)弦级数.

本章预览:通过本章学习你应能够做到:

(1) 掌握收敛数项级数的基本概念与基本性质.

(2) 掌握正项级数的各种收敛判别法.

(3) 掌握一般项级数条件收敛判别法.

(4) 掌握幂级数的相关概念及基本性质.

(5) 掌握求幂级数和函数的基本方法.

(6) 掌握利用幂级数求数项级数和的基本方法.

(7) 掌握函数展开为幂级数的基本方法及其应用.

(8) 掌握傅里叶级数的概念及基本性质.

(9) 了解傅里叶级数收敛的各种判别条件.

(10) 掌握函数展开为傅里叶级数的基本方法.

4.1 数项级数

4.1.1 问题提出

(1) 何谓数项级数的敛散性?数项级数有哪些基本性质?

(2) 数项级数收敛有哪几种类型?它们之间有何关系?

(3) 判别正项级数收敛的常用方法有哪些?

(4) 一般项级数与交错级数的敛散性如何判别?

(5) 绝对收敛与条件收敛级数有哪些特性?

4.1.2 概念入门

4.1.2.1 数项级数的敛散性

设$\{u_n\}$是给定的数列. 称 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 为数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$(形式

和）的前 n 项部分和，称 u_n 为数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的通项；如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在而且是有限数，则称数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，并称 S 为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的和，即 $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$；如果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在或极限值为 ∞，则称数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散；如果数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，则称 S 与 S_n 的差 $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 为数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的余项.

注 讨论数项级数的敛散性与数列极限的存在性其本质是相同的(两者之间可以建立一一对应关系). 由于多了代数运算，数项级数的内容更为丰富多彩.

4.1.2.2 数项级数的类型

如果数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的各项符号相同，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为不变号级数，特别地，当 $u_k \geqslant 0(k = 1,2,\cdots)$ 时，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为正项级数；如果 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 各项的符号正负交错地出现，即 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$（其中 $a_k = |u_k|$ 或 $-|u_k|$），则称 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为交错级数；如果 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 各项的符号不呈现某种规律性，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 为任意项级数，并称 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^-$ 为 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的正、负部级数（其中 $u_k^+ = \frac{|u_k| + u_k}{2}, u_k^- = \frac{|u_k| - u_k}{2}$）.

4.1.2.3 绝对收敛与条件收敛

如果$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$收敛，则称$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$绝对收敛；如果$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$收敛，但$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$发散，则称级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$条件收敛.

4.1.2.4 级数重排(更序)

如果把数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$的某些项按照某种规则重新排列组成一个新的级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'$，则称$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'$为级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$的一个重排(更序).

4.1.2.5 级数乘积

设$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$与$\sum_{k=1}^{\infty}v_k$是给定的数项级数. 若记$c_k=u_1v_k+u_2v_{k-1}+\cdots+u_{k-1}v_2+u_kv_1$(等指标高作和法，即按对角线法排列作和)，则称$\sum_{k=1}^{\infty}c_k$为级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$与$\sum_{k=1}^{\infty}v_k$的柯西乘积；若记$c_k'=u_kv_1+u_kv_2+\cdots+u_kv_k+u_{k-1}v_k+\cdots+u_2v_k+u_1v_k$(爬山式作和，即按正方形方法排列作和)，则称$\sum_{k=1}^{\infty}c_k'$为级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$与$\sum_{k=1}^{\infty}v_k$的正方形乘积.

4.1.3 主要性质及结论

4.1.3.1 收敛级数的基本性质

(1)**(必要条件)** 若$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$(且$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$).

(2)(**线性运算不变性**) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 都收敛，则 $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{R}^1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 也收敛而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

(3)(**尾部决定性**) 数项级数不会因为改变有限项的值而改变其敛散性.

(4)(**加括号不变性**) 收敛级数不会因为加括号(不改变顺序)而更改其敛散性且其和不变，反之不真.

(5)(**柯西收敛准则**) 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $m>N$ 时，$\forall$ 正整数 p 都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon.$$

注 级数收敛的必要条件及加括号不变性可用来判别级数的发散性，柯西收敛准则可用来判别级数收敛，也可用来判别级数发散.

证明提示 性质(1) 由定义可得；性质(2)、(3) 考虑部分和即可；性质(4) 考虑部分和的子列及 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 即可；性质(5) 考虑级数的前 n 项部分和序列及数列的柯西收敛准则即得.

4.1.3.2 正项级数的敛散性判别法

(1)(**基本定理**) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

(2)(**比较判别法**)

不等式形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数. 如果存在常数

$c > 0$ 及正整数 N 使得 $u_n \leqslant cv_n (n \geqslant N)$，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛能推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散能推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

极限形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，则：

① 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性；

② 若 $l = 0$，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

③ 若 $l = +\infty$，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3)**(达朗贝尔比值判别法)**

不等式形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$r \in (0,1)$. 如果当 n 充分大时，有 $u_{n+1} < ru_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果当 n 充分大时，有 $u_{n+1} \geqslant u_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

极限形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，那么有：

① 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4)**(柯西根值判别法)**

不等式形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$q \in (0,1)$. 如果当 n 充分大时，有 $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果当 n 充分大时，有 $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$，

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n}$，那么有：

① 若 $r < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 若 $r > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(5)(**柯西积分判别法**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$f(x)$ 为$[1, +\infty)$ 上的非负减函数，而且 $u_n = f(n)$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

(6)(**拉贝判别法**)

不等式形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$r \in (1, +\infty)$. 如果当 n 充分大时，有 $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant r$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果当 n 充分大时，有 $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1$，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数且 $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = r$，则：

① 若 $r > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 若 $r < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注 正项级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 是单调递增的序列，比较判别法是基础判别法(其他判别法都可以由它推出). 正项级数收敛性判别法的主要工作是柯西完成的. 达朗贝尔比值判别法与柯西

根值判别法的实质是把欲判别的正项级数与几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ 作比较，而拉贝判别法的实质是把欲判别的正项级数与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 作比较.

证明提示 (1) 基本定理由单调数列的极限性质可得.

(2) 比较判别法的不等式形式可利用部分和作比较及基本定理可得，其极限形式可由极限的定义及不等式形式可得.

(3) 达朗贝尔比值判别法不等式形式：第一个结论应用连锁不等式($u_n \leqslant ru_{n-1} \leqslant r^2 u_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant r^{n-N} u_N$) 及比较判别法(不等式形式) 可得. 第二个结论由收敛级数的必要条件运用反证法可推得.

达朗贝尔比值判别法极限形式：① 由上极限的定义(上方不等式成立) 及达朗贝尔比值判别法(不等式形式) 可得；② 由下极限的定义(下方不等式成立) 及达朗贝尔比值判别法(不等式形式) 可得.

(4) 柯西根值判别法中不等式形式的证明类似于达朗贝尔比值判别法中不等式形式的证明；其极限形式中的 ② 由上极限定义(下方子列不等式成立) 及其不等式形式可得.

(5) 考虑部分和及积分单调性可得.

(6) 拉贝判别法不等式形式：① 设 $n > N_0$ 时，$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant r$，即 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1-\frac{r}{n}$，任取 $1 < p < r$，由

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right]}{r} = \lim_{x\to 0}\frac{[1-(1-x)^p]}{rx}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[p(1-x)^{p-1}]}{r} = \frac{p}{r} < 1,$$

存在 $N(\geqslant N_0)$，当 $n > N$ 时，$\frac{r}{n} > 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p$，从而 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^p = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$，于是有

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N < \frac{(N-1)^p}{n^p} u_N,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 由连锁不等式可得 $u_{n+1} \geqslant \frac{N_0-1}{n} u_{N_0}$（$n > N_0$ 时），从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4.1.3.3　一般项数项级数的收敛判别法

(1)**(莱布尼兹定理)** 如果交错项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$（或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n \geqslant 0$）同时满足下述两个条件：

① 数列 $\{u_n\}$ 单调递减；

② $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛，而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = s \leqslant u_1$.

(2)**(狄利克雷判别法)** 如果数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和序列 $\{S_n\}$ 有界，且数列 $\{a_n\}$ 单调递减收敛于 0，那么数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(3)**(阿贝尔判别法)** 如果数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛而且数列 $\{a_n\}$

单调有界，则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明提示 (1) 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k$，则由 $S_{2m} = \sum_{k=1}^{m}(u_{2k-1} - u_{2k})$ 可知 $\{S_{2m}\}$ 单调上升，再由 $S_{2m} = u_1 - \sum_{k=1}^{m-1}(u_{2k} - u_{2k+1}) - u_{2m}$ 可知 $S_{2m} \leqslant u_1$，从而 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ 存在，而且由 $S_{2m-1} = S_{2(m-1)} + u_{2m-1}$ 及条件可知 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}$，从而 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}$ 存在.

(2) 利用数项级数收敛的柯西收敛准则及分部求和公式即阿贝尔变换（$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^{p} a_{n+i}(\sigma_i - \sigma_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p-1}\sigma_i(a_{n+i} - a_{n+i+1}) + \sigma_p a_{n+p}$，其中 $\sigma_0 = 0, \sigma_i = \sum_{k=1}^{i} b_{n+k}$）可得.

(3) 若 $\{a_n\}$ 单调上升收敛于 a，则 $\{a - a_n\}$ 单调下降收敛于 0，再由收敛级数的性质及狄利克雷判别法即得.

4.1.3.4 绝对收敛与条件收敛级数的特性

(1)（**绝对收敛的必要条件**）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

(2)（**绝对收敛的充要条件**）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任何子级数（原级数的部分项组成）都收敛.

(3)（**条件收敛的必要条件**）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散.

(4)**(绝对收敛重排定理)** 绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任何重排级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 仍为绝对收敛级数，且其和不变(注：该定理由狄里克莱在 1837 年给出).

(5)**(条件收敛重排定理)** 条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 重排得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 可以收敛，也可以发散；而且重排收敛级数的和可以取遍全部实数(注：该定理由黎曼在 1854 年给出).

(6)**(绝对收敛乘积定理)** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛，那么由所有乘积 $u_iv_j(i,j=1,2,\cdots)$ 项重排的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛，而且 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = (\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n)$.

证明提示 (1) 由级数收敛的柯西准则可得.

(2) 由定义，并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n^-)$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的子级数可得.

(3) 由 u_n^+ 与 v_n^- 的定义与级数收敛的线性通过反证可得.

(4) 因重排正项级数的部分和必不超过原正项级数的某一部分和(取下标最大者)，从而重排正项级数的和不超过原正项级数的和，而且由对称性可知其和相等. 再考虑绝对值级数与正、负部级数的关系即得.

(5) 该定理的证明篇幅较长，这里不予介绍.

(6) 由乘积项组成的重排级数的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 的部分和必不超过 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 的某部分和的乘积(取下标最大

者)，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|w_n|$收敛；再用正方形排列法(考虑相对应的部分和)可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n)(\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n)$.

4.1.4 例题选讲

4.1.4.1 级数敛散性定义及基本性质应用举例

例 1 求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n(a\neq 0,|q|<1)$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2+n-2)^{-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(n+m)$($m$ 为自然数).

解 (1) $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}aq^k=a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}\to\dfrac{a}{1-q}$.

(2) $$S_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2+k-2}=\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\to\frac{11}{18}.$$

(3) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k},\ \frac{1}{3}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k+1}},$$
$$\frac{2}{3}S_n=S_n-\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\to\frac{2}{3},S_n\to 1.$$

(4) $$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(x^2)^n}{1+x^2} \mathrm{d}x \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(5) S_{im} = \sum_{k=1}^{im} \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{im} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right)$$

$$= \frac{1}{m} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{im+1} - \frac{1}{im+2} - \cdots - \frac{1}{im+m} \right] \to \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right)$$

$$(i \to +\infty),$$

易见$\{S_n\}$是单调增加数列，因而 $S_n \to \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$.

例 2 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha \ (\alpha \neq k\pi)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$;

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+3} \right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{n} \ (\alpha \neq 0)$.

解 (1) 当 $\alpha \neq k\pi$ 时反证得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\alpha \neq 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ 发散.

$$(2) S_{2^n} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

$$\geqslant \frac{n}{2} \to +\infty.$$

(3) 由 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)}$

$$\leqslant \frac{1}{n}-\frac{1}{(n+p)} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

及柯西准则可知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

(4) 由 $|S_{2N}-S_N| = \left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+2}-\frac{1}{3N+3}\right.$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-1}-\frac{1}{6N}\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{3N+3}+\frac{1}{3N+6}+\cdots+\frac{1}{6N}$$

$$\geqslant N \cdot \frac{1}{6N}=\frac{1}{6}$$

可知，原式发散.

(5) 由 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k\alpha-\cos(k+1)\alpha}{k}\right|$

$$=\left|\frac{\cos(n+1)\alpha}{n+1}-\sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{\cos(k+1)\alpha}{k(k+1)}-\frac{\cos(n+p+1)\alpha}{n+p}\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{n+1}$$

可知，原式收敛.

例 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i, r_n=\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$. 证明：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$ 收敛；

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散.

证明提示 (1) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_0}-\sqrt{r_n}\to\sqrt{r_0}.$$

(2) 由$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\geqslant\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_{k+p}}=\dfrac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}>\dfrac{1}{2}$(当$p$充分大)可得.

例 4 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛而且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$存在,证明:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛.

证明提示 令$\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})$,$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k$,则由

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\{[ka_k-(k-1)a_{k-1}]-a_{k-1}\}=na_n-\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}=na_n-S_n$$

即得.

例 5* 若对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$施加同号加括号后收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.即若存在$\{n_k\}$使得$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}})$收敛(其中$n_1=0$,同一个括号内的加数符号相同),则原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明提示 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$,$T_k=\sum\limits_{i=1}^{k}(u_{n_i+1}+u_{n_i+2}+\cdots+$

$u_{n_{i+1}}$)，由括号内的数同号，当 $n_k+1 \leqslant n \leqslant n_{k+1}$ 时，S_n 将单调地变化，即

$$T_{k-1} = S_{n_k} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{k+1}} = T_k \quad \text{或} \quad T_k \leqslant S_n \leqslant T_{k+1}.$$

由 $\lim\limits_{k\to+\infty} T_{k-1} = \lim\limits_{k\to+\infty} T_k = T$ 可知

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} T_k = T.$$

例 6 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $S_n = \arctan n$，试写出该级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$.

解 $u_1 = S_1 = \arctan 1$，$u_n = S_n - S_{n-1}$，

$$\tan u_n = \tan(S_n - S_{n-1}) = \frac{\tan S_n - \tan S_{n-1}}{1+\tan S_n \tan S_{n-1}} = \frac{1}{1+n(n-1)},$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{1+n(n-1)}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = S - u_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1}) = 2S - u_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

4.1.4.2 正项级数敛散性判别法应用举例

例 7 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$；

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n!)}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{n!}$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2\dfrac{2\pi}{n}}{2^n}$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2-1)^n}{(3n+1)^{2n}}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$;　　(12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$.

解答提示　(1) 收敛. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-n}=1$.

(2) 收敛. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n}+\sin n)}{n^2-n+1}=1$.

(3) 发散. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^2 n}=\infty$.

(4) 收敛. 因$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2}=0$.

(5) 发散. 因 $\ln(n!)<n\ln n$, 由$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散可知$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$发散.

(6) 收敛. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$.

(7) 发散. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=2>1$.

(8) 收敛. 因$\frac{n\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{2^n} \leqslant \frac{n}{2^n}$.

(9) 收敛. 因$\frac{2+(-1)^n}{2^n} \leqslant \frac{3}{2^n}$.

(10) 收敛. 因$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=\frac{2}{9}<1$.

(11)、(12) 用积分判别法. 当 $p>1$ 时,收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,发散.

例 8　判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\alpha}\ln(n!)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}[\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)]$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

(9) $1+b+bc+b^2c+b^2c^2+\cdots+b^nc^{n-1}+b^nc^n+\cdots$

$(0<b<c<1)$;

(10) $b+c+b^2+c^2+\cdots+b^n+c^n+\cdots$　　$(0<b<c<1)$.

解答提示　(1) 收敛. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=1$.

(2) 收敛. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}<1$.

(3) $\alpha>2$, 收敛; $\alpha\leqslant 2$, 发散. 因 $\frac{n-2}{n^{\alpha}}\leqslant\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}\leqslant\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$.

(4) $p<1$, 收敛; $p\geqslant 1$, 发散. 因 $n^{p}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{\pi^2}{n^{2-p}}$.

(5) $p>1$, 收敛; $p\leqslant 1$, 发散. 因

$$\lim_{n\to\infty} n^{p}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}=\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{p}.$$

(6) 收敛. 因令 $h=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $h-\sqrt{\ln(1+h^2)}=\frac{h^3}{4}+o(h^3)$.

(7) $a=-2, b=1$ 时收敛. 因

$$u_n=(1+a+b)\ln n+(a+2b)\frac{1}{n}-\frac{a+b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(8) 收敛. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{3}{2}>1$.

(9) 收敛. 因 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=c$.

(10) 收敛. 因$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=c<1$.

例 9 设$\{a_n\}$是递增有界正数列. 证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛.

证明提示 设$0<a_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 由

$$0<S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k^{-1}-a_{k+1}^{-1})$$
$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}(a_k^{-1}-a_{k+1}^{-1})=M(a_1^{-1}-a_{n+1}^{-1})\leqslant\frac{M}{a_1}$$

得证.

例 10* 设$a_1=1,a_2=2,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n=3,4,\cdots)$. 证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛.

证明提示 易见$\{a_n\}$单调增加,而且$\forall n>2,a_{n-2}<a_{n-1}<2a_{n-2}$,于是有

$$a_n>a_{n-1}+\frac{a_{n-1}}{2}=\frac{3a_{n-1}}{2},$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}}.$$

令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$,则由$S_n-1<\dfrac{2}{3}S_n-\dfrac{2}{3}a_n^{-1}$得

$$S_n<3-2a_n^{-1}<3(n=1,2,\cdots),$$

因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛.

例 11 设$\{a_n\}$为递减正项级数. 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^na_{2^n}$具有相同的敛散性.

证明提示 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,T_m=\sum\limits_{k=0}^{m}2^ka_{2^k}$,通过适当的加括

号与放大可得$\frac{T_m}{2} \leqslant S_{2^m} \leqslant T_m$，由此及比较法则即得证.

例 12* 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数而且$\{a_n\}$单调递减. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

证明提示 利用柯西准则及单调性可得 $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 2\lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0$，再由

$$0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = 2na_{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \to 0$$

得
$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

例 13* 证明：如果$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = l$，那么正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $l > 1$ 时收敛，而且当 $l < 1$ 时发散.

证明提示 当 $l > 1$ 时，任取 $p \in (1, l)$，存在 N，当 $n > N$ 时有
$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > p, \quad 即 \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\frac{p}{n}} \ (n > N).$$

再由$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调上升收敛于 e，当 n 充分大时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \frac{(n+1)^p}{n^p},$$

即$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}}$. 再由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛可推得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

当 $l < 1$ 时可由$\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right\}$单调递减收敛于 e 及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散推得.

例 14* 设 $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. 证明$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证 记 $x_0 = 0$，则由

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{-1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2} \sim -k^{-\frac{3}{2}}$$

可知$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1})$收敛,从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

存在.

例 15* 设$0 < x_1 < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1}(n = 2,3,\cdots)$. 证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$当$p > 2$时收敛,当$p \leqslant 2$时发散.

证明提示 由等价替代及洛必达法则可得$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x} = 3$,由斯笃兹定理(因为$\{x_n\}$单调下降趋于零)有

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{x_n^2}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}\right)^{-1} = 3,$$

于是有$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{2}} x_n^p = 3^{\frac{p}{2}}$,由此得证.

4.1.4.3 任意项级数敛散性判别法应用举例

例 16 讨论下列级数的收敛特性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2^n+\ln n)^{-1}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n}+(-1)^n]^{-1}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\frac{1}{n}$.

解答提示 (1) 由莱布尼兹法则可得,该级数条件收敛.

(2) 条件收敛. 因为

$$a_n = (-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi = (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$