第一章　n 阶行列式

行列式是线性代数中的重要概念之一，在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用.本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法以及利用行列式来求解一类特殊线性方程组的克拉默法则.

§1.1　n 阶行列式的概念

行列式的概念起源于用消元法解线性方程组.设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了进一步讨论方程组的解与未知量的系数和常数项之间的关系，引入下面记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

并称之为**二阶行列式**，它表示数值 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

行列式中横排的叫做**行**，纵排的叫做**列**，数 a_{ij}（$i,j = 1,2$）称为行列式的**元素**，i 为**行标**，j 为**列标**.

由上述定义得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1 - 1)的解可用二阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}\ (D \neq 0).$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1 - 2}$$

如果满足一定条件,则其解也可通过加减消元法求出,但解的表达式较为复杂,难于看出解与系数、常数项之间的规律性联系.为寻求这种联系,下面引入三阶行列式的概念.

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为**三阶行列式**,它由三行三列共 9 个元素组成,表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1 - 3}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1 - 4}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则容易验证,方程组(1 - 2)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D}\quad (D \neq 0).$$

引入了二阶、三阶行列式的概念之后，二元、三元线性方程组的解可以很方便地由二阶、三阶行列式表示出来. 那么对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1-5}$$

在一定条件下它的解能否有类似的结论?这里首先要解决的问题是定义 n 阶行列式. 为此我们观察方程组(1－1)、(1－2)的系数与对应的二阶、三阶行列式的元素的位置关系，暂且把记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

称为 n **阶行列式**(简记为 $\Delta(a_{ij})$)，它是由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成. 在明确(1－6)式的意义之前，我们先来定义 n 阶行列式中元素 a_{ij} ($i,j = 1,2,\cdots,n$) 的余子式、代数余子式.

定义 1.1.1 把 n 阶行列式(1－6)中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列删去后留下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

并称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1-7}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

第一行元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用以上结果可将(1－4)式化简为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1-8}$$

此式表明,三阶行列式的值等于它的第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 与所对应的代数余子式 A_{11},A_{12},A_{13} 乘积的和.这与(1－4)式的定义是一致的,这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法具有一般意义.按照这一思想我们给出 n 阶行列式(1－6)的归纳法定义.

定义1.1.2　n 阶行列式(1－6)是由 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所决定的一个数.

当 $n=2$ 时,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

假设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{1-9}$$

其中 A_{1j} $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 阶行列式中元素 a_{1j} $(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

显然,对任意自然数 n,由此归纳定义可求 n 阶行列式的值.特别地,当 $n=1$ 时,行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,不能与数的绝对值相混淆.

例 1　求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}+$

$0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\7&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=3\times(5\times1-2\times2)=3.$

(2) $\begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&2&1\\4&1&2\end{vmatrix}$

$=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&1\\4&2\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&2\\4&1\end{vmatrix}$

$=2(4-1)+(-2-4)+3(-1-8)=-27.$

例 2　用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**下三角行列式**,它的特点是当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ ($i、j=1,2,\cdots,n$).

解　由行列式的定义,得

$$D=a_{11}A_{11}+0A_{12}+\cdots+0A_{1n},$$

A_{11} 是一个 $n-1$ 阶下三角行列式,由定义

$$A_{11}=a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

依次类推,不难求出

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式等于主对角线上的诸元素的乘积.

作为下三角行列式的特例,主对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 3　证明

$$D=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_{1n}\\0&0&\cdots&a_{2\,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n\,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 由行列式的定义

$$D = (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3\,n-2} & a_{3\,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3\,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4\,n-3} & a_{4\,n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-3} & a_{n\,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地,此对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 4 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 $D = D_1 \cdot D_2$.

证 对 D_1 的阶数使用数学归纳法.当 D_1 阶数为 1 时,由行列式的定义知

$$D = D_1 \cdot D_2.$$

假设当 D_1 的阶数为 $k-1$ 时,结论成立.当 D_1 的阶数为 k 时,由行列式的定义

$$D=\sum_{j=1}^{k}a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1\,j-1} & c_{1\,j+1} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{n\,j-1} & c_{n\,j+1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

设D_1中元素$a_{1j}(j=1,2,\cdots,k)$的余子式为M_{1j},代数余子式为A_{1j},由归纳假设

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1\,j-1} & c_{1\,j+1} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{n\,j-1} & c_{n\,j+1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=M_{1j}D_2.$$

所以

$$D=\sum_{j=1}^{k}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}D_2=D_2\sum_{j=1}^{k}a_{1j}A_{1j}=D_1\cdot D_2.$$

行列式的定义表明,n 阶行列式是通过n 个 $n-1$ 阶行列式定义的,而每一个 $n-1$ 阶行列式又可用 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式来表示,…….如此进行下去,最后可将 n 阶行列式表示成$n!$项的代数和.为给出行列式这一形式的完全表达式,先介绍全排列与逆序数的概念.

在中学代数中,把 n 个不同的元素排成一列,叫做 n 个元素的**全排列**.如 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的全排列有 $n!$种.在这 $n!$个排列中,规定各元素间有一个标准次序(一般按从小到大排列的次序为标准次序),于是,在任一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,当某两个数的先后次序与标准次序不同时,就说有一个**逆序**.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$,即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=(p_2\text{前面比 }p_2\text{ 大的数的个数})+(p_3\text{ 前面比 }p_3\text{ 大的数的个数})+\cdots+(p_n\text{ 前面比 }p_n\text{ 大的数的个数}).$$

如果 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是偶数,称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列;如果 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数,称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列.

例 5 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1) 524179386;

(2) $n(n-1)\cdots321$.

解 (1) $\tau(524179386)=1+1+3+0+0+4+1+3=13$,

所给排列为奇排列.

(2)　$\tau(n(n-1)\cdots 21) = 1+2+\cdots+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k,4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,所给排列为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数,所给排列为奇排列.

定理 1.1.1　n 阶行列式可表示为如下形式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数1,2,…,n 的一个排列,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 n 个自然数1,2,…,n 所有排列求和.

证　用数学归纳法.当 $n=1$ 时,定理显然成立.

假设定理对 $n-1$ 阶行列式成立,对于 n 阶行列式,由行列式定义

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j},$$

由于 M_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式,根据归纳假设,得

$$M_{1j} = \sum_{p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$ 的一个排列.于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\sum_{p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{j\,p_2\cdots p_n}(-1)^{1+j}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{1j}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{j\,p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(1+j)}a_{1j}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

又因

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) = \tau(p_2p_3\cdots p_n) + p_1 - 1,$$

而

$$(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(j+1)} = (-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)+(j-1)}.$$

记 p_1 为 j ,得

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

定理1.1.1说明n阶行列式是$n!$项的代数和,每一项是位于不同行、不同列的n个元素的乘积,行标按从小到大的标准次序排列,若列标为偶排列,该项前面取正号;列标为奇排列,该项前面取负号.

例6 在六阶行列式中,项$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带什么符号?

解 对换项中元素的位置,使行标按从小到大的标准次序排列,即

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

列标所构成的排列为431265.

$$\tau(431265)=1+2+2+0+1=6.$$

故所给的项在六阶行列式的展开式中应带正号.

例7 确定

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & -x & 1 & 2\\ -1 & x & 1 & -1\\ 2 & 1 & -5x & 1\\ 1 & -1 & 2 & 3x\end{vmatrix}$$

中x^4与x^3的系数.

解 由于只有对角线的元素相乘才出现x^4,而且这一项带正号,即$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x\cdot x\cdot(-5x)\cdot 3x=-15x^4$.故$f(x)$中$x^4$的系数为$-15$.

同理含x^3的项也只有一项,即

$$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-x)\cdot(-1)\cdot(-5x)\cdot 3x=15x^3.$$

而列标所构成的排列的逆序数

$$\tau(2134)=1+0+0=1,$$

故$f(x)$中含x^3的项为$-15x^3$,系数为-15.

由定理1.1.1可知,三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

定理1.1.1虽然给出了n阶行列式的完全表达式,但在具体应用定理解决问题时比较困难.

§1.2 n阶行列式的性质

利用行列式的定义计算特殊类型的行列式比较简单,但对一般的行列式,特别

是高阶行列式,计算量相当大.为简化行列式的计算,下面我们来讨论行列式的性质.首先介绍一个重要的定理.

由上节 n 阶行列式的定义(1-9)式可知,n 阶行列式可表示为第一行的元素与其对应的代数余子式的乘积之和,因此,(1-9)式又称为行列式按第一行的展开式,事实上,行列式可按任意一行(列)展开.

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

证明略.

推论 如果 n 阶行列式中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,那么行列式就等于 a_{ij} 与其对应的代数余子式的乘积,即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

若把 D 中每一行元素换成同序数的列元素,则得新行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D'(或记为 D^{T})为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 用数学归纳法.

当 $n = 2$ 时, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立.对于 n 阶行列式 D 和 D',分别按第一行和第一列展开,得

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M'_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2\,j-1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{n\,j-1} \\ a_{2\,j+1} & \cdots & a_{i\,j+1} & \cdots & a_{n\,j+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由于 M_{1j} 和 M'_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式，且 M'_{1j} 是 M_{1j} 的转置行列式，根据假设 $M_{1j} = M'_{1j}$，于是 $D = D'$.

例如上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定理 1.2.1 的推论即得

$$D = D' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.2.1 表明，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 1.2.2 互换行列式两行(列)的元素，行列式变号.

证 用数学归纳法.

当 $n = 2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$，结论成立.

假设对于 $n-1$ 阶行列式结论成立，对于 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

互换 D 中的第 s 行和第 l 行，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别将 D 和 D_1 按第 i 行展开($i \neq s,l$),得

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij},\ D_1 = \sum_{j=1} a_{ij}(-1)^{i+j}N_{ij},$$

其中 M_{ij} 和 N_{ij} 分别为 D 和 D_1 中元素 a_{ij} 的余子式,并且 N_{ij} 是由 M_{ij} 互换两行得到的 $n-1$ 阶行列式,由归纳假设 $M_{ij}=-N_{ij}$,因此 $D=-D_1$.

通常以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列,交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,而交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 行列式中有两行(列)对应元素相等,行列式的值为零.

证 互换行列式 D 中对应元素相等的两行,则 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 1.2.3 行列式中某一行(列)的所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 将左边行列式按第 i 行展开即得.

第 i 行(列)乘以 k,记作 $kr_i(kc_i)$.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

推论 2 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式为零.

推论 3 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则行列式为零.

性质 1.2.4 若行列式中某一行(列)的元素 a_{ij} 都可分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和,即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$($j=1,2,\cdots,n,1 \leqslant i \leqslant n$),则该行列式可分解为相应的两个行列式之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　将 D 按第 i 行展开：

$$D = \sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}A_{ij} = D_1 + D_2,$$

其中 D_1 是上式右边第一个行列式，D_2 是第二个行列式.

例如，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2\sqrt{2}.$$

性质 1.2.5　把行列式任一行(列)的各元素同乘以一个常数后加到另一行(列)对应的元素上，行列式的值不变，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　由性质 1.2.4 得

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

上式右边第一个行列式为 D,第二个行列式两行成比例,由推论 3 知行列式为零,因此右边等于 D.

性质 1.2.5 是简化行列式的基本方法,若用数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上,简记为 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

由定理 1.2.1 和上述性质,可推出下面的定理.

定理 1.2.2　行列式中某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0\ (\ i \neq j\ ),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0\ (\ i \neq j\ ).$$

证　设

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

将 D 按第 j 行展开,有

$$D = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

在上式中以 a_{ik} 代换 a_{jk} ($k=1,2,\cdots,n$)，当 $i\neq j$ 时，则由性质 1.2.2 推论知 $D=0$，于是

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j).$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

综合定理 1.2.1 和定理 1.2.2，对于代数余子式有如下重要结论

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij},$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}.$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

§1.3 n 阶行列式的计算

本节将简单介绍利用行列式按行(列)展开的定理和行列式的性质计算行列式的方法.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\2&3&-1&2\\-1&1&1&0\\0&1&-2&1\end{vmatrix}.$$

解

$$D\overset{r_2-2r_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&1&-4\\-1&1&1&0\\0&1&-2&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&1&-4\\0&3&0&3\\0&1&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&1&-4\\3&0&3\\1&-2&1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}-1&1&-3\\3&0&0\\1&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}1&-3\\-2&0\end{vmatrix}=18.$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \\ a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_2}a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ a & 3a+b \end{vmatrix}=a^4.$$

以上两例都是首先通过性质 1.2.5 将行列式某一行(列)只保留一个非零元素,然后利用定理 1.2.1 的推论降阶计算行列式的值,这是计算行列式常用方法之一.

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_1]{\substack{r_3-4r_1\\ r_2+2r_1}}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-7r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -28 & -29 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -28 & -29 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-4r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-7)\times(-9)=63.$$

例 3 是利用行列式的性质 1.2.2、1.2.5 将行列式主对角线下方的元素全化为

零(即化为上三角行列式),行列式的值为主对角线上元素的连乘积.由于化简过程具有程序化,因此工程技术上,常用计算机编制程序计算高阶行列式的值.

例 4 设 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 求 $D = \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_3}{=} -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

例 5 设多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

试求 $f(x) = 0$ 的根.

解 解法一

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-3c_1]{\substack{c_3-2c_1 \\ c_2-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4-\frac{1}{3}c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(1-x^2)(4-x^2),$$

由 $f(x)=0$,即

$$-3(1-x^2)(4-x^2)=0,$$

求得 $f(x)=0$ 的根为 $x_1=-1, x_2=1, x_3=-2, x_4=2$.

解法二　由性质1.2.2推论3知,当 $2-x^2=1$ 或 $9-x^2=5$ 时,$f(x)=0$. 故 $x_1=-1, x_2=1, x_3=-2, x_4=2$ 为 $f(x)=0$ 的根. 由于 $f(x)$ 为 x 的4次多项式,因此 $f(x)=0$ 只有4个根.

n 阶行列式的计算除了利用行列式的展开定理和性质外,有些问题需要递推公式或利用数学归纳法解决.

例6　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解　行列式 D_n 的特点是每一行的 n 个元素之和相等,均为 $x+(n-1)a$. 因此将行列式 D 的第二列、第三列、…、第 n 列都加到第一列上,再从第一列中提取公因子 $x+(n-1)a$,则有

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-r_1}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

例 7　计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}.$$

解　将 D_{2n} 按第一行展开

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$+\,b(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \\ c & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=ad(-1)^{2n-1+2n-1}D_{2n-2}+bc(-1)^{2n+1}(-1)^{1+2n-1}D_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)D_{2n-2},$$

即

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

所以

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots$$

$$=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n.$$

例 8 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 按第一列展开,得

$$D_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3D_{n-1} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3D_{n-1} - 2D_{n-2},$$

即

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}.$$

由此递推公式得

$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= 2(D_{n-1} - D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - D_{n-3}) = \cdots \\ &= 2^{n-2}(D_2 - D_1) = 2^{n-2}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\right) = 2^n, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D_n &= 2^n + D_{n-1} = 2^n + (2^{n-1} + D_{n-2}) = \cdots \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + D_1 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 3 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

例 9 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j),$$

其中记号"$\prod$"表示$(x_i - x_j)$的全体同类因子的乘积.

证　用数学归纳法.因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j),$$

所以当 $n = 2$ 时结论成立.假设对 $n - 1$ 阶范德蒙德行列式结论成立,下面证明对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立.

为此,设法把 D_n 降阶,从第 n 行开始,后行减去前行的 x_1 倍,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

按第一列展开,并分别提出每一列的公因子$(x_i - x_1)$,得

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式是 $n - 1$ 阶范德蒙德行列式,由归纳假设得

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \geqslant i > j \geqslant 2}(x_i - x_j) \\ &= \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1}(x_i - x_j). \end{aligned}$$

§1.4　克拉默法则

前面我们研究了 n 阶行列式的定义、定理、性质及行列式的计算.像 §1 所讨论的用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解一样,现在我们就利用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组.

对(1 - 5) 式表示的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

其未知量的系数构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1 - 5) 的**系数行列式**.

定理 1.4.1 (克拉默法则) 如果线性方程组(1 - 5) 的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组(1 - 5) 有惟一的解,且

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{1 - 10}$$

其中 D_j 是把系数行列式D 中第j 列的元素用常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

证 按通常的方式,先从方程(1 - 5) 推出(1 - 10) 式. 对于方程(1 - 5) 中未知量 x_j($j=1,2,\cdots,n$),由

$$x_jD=x_j\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & x_ja_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & x_ja_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_ja_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n)]{c_j+x_ic_i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_j,$$

即

$$x_jD = D_j \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{1-11}$$

当 $D \neq 0$ 时,得(1－11)式的解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

由于(1－11)式是由方程组(1－5)的系数行列式经行列式的性质运算而得,故方程组(1－5)的解一定是(1－11)式的解,现在(1－11)式仅有一个解(1－10),故方程组(1－5)如果有解,就只能是解(1－10).

下面验证(1－10)式一定是方程组(1－5)的解.将(1－10)式代入方程组(1－5)中第 i 个方程的左边并化简

$$\begin{aligned}
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\
&= a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} \\
&= \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + a_{in}D_n) \\
&= \frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}) + a_{i2}(b_1A_{12} + \cdots + b_nA_{n2}) \\
&\quad + \cdots + a_{in}(b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn})] \\
&= \frac{1}{D}[b_1(a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{in}A_{1n}) + \cdots + b_i(a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\
&\quad + \cdots + b_n(a_{i1}A_{n1} + \cdots + a_{in}A_{nn})] \\
&= \frac{1}{D}(0 + \cdots + 0 + b_iD + 0 + \cdots + 0) = b_i.
\end{aligned}$$

这说明(1－10)式是方程组(1－5)的解.

例1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7, \\ \qquad 3x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 5 & -8 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-3c_3}{\underset{c_2-c_3}{=}} \begin{vmatrix} 19 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 19 & -3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 .$$

故方程组有惟一解.又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39 ,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -117 ,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -78 ,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 39 ,$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 3,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = 2,\ x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

克拉默法则仅适用于解方程的个数与未知量的个数相等,且系数行列式不为零的线性方程组,它的主要优点在于给出了方程组的解与方程组的系数及常数项之间的关系式,因此具有重要的理论价值.

当方程组(1 - 5)的右端常数项 $b_1,\cdots,b_n$ 不全为零时,称方程组(1 - 5)为**非齐次线性方程组**.当 $b_1,\cdots,b_n$ 全为零时,方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1 - 12}$$

称为**齐次线性方程组**.显然,齐次线性方程组一定有解,$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$,即为方程组(1 - 12)的解,这个解叫做方程组(1 - 12)的**零解**.

对于齐次线性方程组(1 - 12),根据克拉默法则得下面推论.

推论 如果齐次线性方程组(1 - 12) 的系数行列式不等于零,则(1 - 12) 只有零解.

换言之,如果齐次线性方程组(1 - 12) 有非零解,则其系数行列式必为零. 反之,如果齐次线性方程组(1 - 12) 的系数行列式为零,则齐次线性方程组(1 - 12) 必有非零解. 于是有下面定理,这将在第二章中给予证明.

定理 1.4.2 齐次线性方程组(1 - 12) 有非零解的充要条件是(1 - 12) 的系数行列式等于零.

例 2 问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

有非零解?

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-2)\lambda,$$

由 $D = 0$ 得 $\lambda = 0$, 2 或 3 .

不难验证,当 $\lambda = 0,2$ 或 3 时,齐次线性方程组确有非零解.

习 题 一

1. 求下列行列式中元素 a_{12}, a_{31}, a_{33} 的余子式和代数余子式.

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

2. 用行列式定义计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 举例说明下式一般不成立.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

4. 证明.

(1) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & a+b \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

5. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

6. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$；

(6) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$；

(7)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1\,n-1} & -a_{2\,n-1} & -a_{3\,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1\,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & -a_{n-1\,n} & 0 \end{vmatrix} \quad (n \text{ 为奇数})；$$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$;

(9) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}$;

(10) $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & ax & a \end{vmatrix}$.

7. 用克拉默法则求解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 5y - 3z = 10, \\ 4x + 8y + 2z = 4. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}. \end{cases}$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 互不相等.

$$(5)\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5=-1,\\2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8,\\3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3,\\4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2,\\x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3.\end{cases}$$

8. 若三次多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，当 $x=1,2,3,-1$ 时，其值分别为 $-3,5,35,5$，试求 $f(x)$ 在 $x=4$ 时的值.

9. 某工厂生产甲、乙、丙三种钢制品，已知甲、乙、丙三种产品的钢材利用率分别为60%，70%，80%，年进钢材总吨位为100吨，年产品总吨位为67吨，此外甲、乙两种产品必须配套生产，乙产品成品总重量是甲产品总重量的70%，此外还已知生产甲、乙、丙三种产品每吨可获利分别是1万元、1.5万元、2万元，问该工厂本年度可获利润多少万元？

10. 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0,\\2x_1+(6-\lambda)x_2=0,\\2x_1+(4-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

第二章　矩阵与向量

矩阵与向量是解决数学问题时常用的工具，也是线性代数学习的主要内容之一. 本章将重点介绍向量组的线性相关性以及矩阵的秩的概念，并通过矩阵的初等变换对这两个基本问题进行讨论.

§2.1　消元法与矩阵的初等变换

在中学代数里我们学过用加减消元法解二元及三元线性方程组. 实际上，用消元法比用行列式解线性方程组更具有普遍性. 为了说明这一点，下面我们通过一个例子来考察加减消元法解线性方程组的一般规律.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \tag{2-1}$$

先将方程组的第一，二两个方程的位置互换，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \tag{2-2}$$

将方程组(2－2)的第一个方程的 －2 倍加到第二个方程上，－4 倍加到第三个方程上，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -3x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases} \tag{2-3}$$

将方程组(2－3)的第二个方程的 －1 倍加到第三个方程上，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_3 = -4. \end{cases} \tag{2-4}$$

再将方程组(2－4)的第三个方程的 －1 倍加到第二个方程上，＋1 倍加到第一个方程上，得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad = -3, \\ \quad -3x_2 \quad = 6, \\ \qquad -2x_3 = -4. \end{cases} \tag{2-5}$$

最后,将方程组(2 - 5)的第二个方程的$\frac{1}{3}$倍加到第一个方程上,将第二,三个方程分别乘以数 $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$,便得到方程组

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 2. \end{cases} \tag{2-6}$$

由初等代数知道,以上各方程组同解,所以由方程组(2 - 6)得到方程组(2 - 1)的解为 $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

通过上面的过程不难看出,加减消元法求方程组(2 - 1)的解,总可以通过对方程组反复实施下列三种变换得到.

(1) 交换两个方程的位置;

(2) 用一非零数乘以某一个方程;

(3) 把某个方程乘以一个常数后加到另一个方程上去.

我们把以上三种变换叫做线性方程组的初等变换.于是,加减消元法解线性方程组就是用初等变换来化简方程组.

由于方程组由未知量的系数和常数项所确定,因此,对方程组的讨论可转化为对这样一些数的研究.

定义 2.1.1 由 $m \times n$ 个数a_{ij}($i = 1,2,\cdots,m$; $j = 1,2,\cdots,n$)排成的 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

叫做 m **行** n **列矩阵**,简称 $m \times n$ **矩阵**. 这 $m \times n$ 个数叫做矩阵A 的**元素**,a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.元素是实数的矩阵称**实矩阵**,元素是复数的矩阵称**复矩阵**.本书中的矩阵除特别说明者外,都指实矩阵.(2 - 7)式也简记为

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{或} A = (a_{ij}).$$

$m \times n$ 矩阵A 也记作 $A_{m\times n}$.

当 $m = n$ 时,A 称为 n **阶方阵**.

例如,一般 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2-8}$$

的未知量的系数可以用矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 来表示,此时称 A 为方程组(2 - 8) 的**系数矩阵**. 方程组(2 - 8) 的系数和常数项可以用一个 $m \times (n+1)$ 矩阵

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

来表示,并称 $\overline{A}$ 为线性方程组(2 - 8) 的**增广矩阵**.

增广矩阵完全可表示线性方程组,因此可以利用矩阵来研究线性方程组. 由于对线性方程组作初等变换就相当于对它的增广矩阵的行作相应的变换,于是有下面的定义.

定义 2.1.2　下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 对调两行(对调 i,j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 以非零数 k 乘以某一行的所有元素(第 i 行乘以数 k,记作 $r_i \times k$);

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去,记作 $r_i + kr_j$).

把定义 2.1.2 中的"行"换成"列",即得矩阵的**初等列变换**的定义(所用记号是把"r"换成"c"). 矩阵的初等行变换与矩阵的初等列变换,统称为矩阵的**初等变换**. 今后我们将会看到,矩阵的初等变换是用以揭示线性方程组中各种关系的一个重要方法.

一般说来,一个矩阵经过初等变换后,就变成了另一个矩阵. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B,就称矩阵 A 与矩阵 B **等价**,记作 $A \sim B$.

由于矩阵的初等行变换对应于线性方程组的初等变换,因此,若矩阵 A 只经过有限次初等行变换变成矩阵 B,则 A 与 B 对应的线性方程组同解.

例 1　对线性方程组(2 - 1) 的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换如下:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{r_3 - 4r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{r_1+r_3}{\overset{r_2-r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\0 & -3 & 0 & 6\\0 & 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\underset{\substack{r_2\times(-\frac{1}{3})\\r_3\times(-\frac{1}{2})}}{\overset{r_1+(\frac{1}{3})r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

以上矩阵依次对应于线性方程组(2－1)至(2－6).

形如

$$\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1n}\\0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{rn}\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

的矩阵称为行阶梯形矩阵,简称**阶梯形矩阵**.其特点为:每个阶梯只有一行;元素不全为零的行(非零行)的第一个非零元素所在列的下标随着行标的增大而严格增大(列标一定不小于行标);元素全为零的行(如果有的话)必在矩阵的最下面几行.例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

以及

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

均为阶梯形矩阵.

定理 2.1.1 任一矩阵可经有限次初等行变换化成阶梯形矩阵.

证 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

若 A 中的元素 a_{ij} 都等于零,那么 A 已是阶梯形矩阵了.

若 A 中至少有一元素 a_{ij} 不为零,且不为零的元素在第一列时,不妨设 $a_{11}\neq 0$(否则对 A 进行第一种初等行变换总可将不为零的元素换到 a_{11} 的位置上),用 $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 乘以第一行各元素加到第 i 行($i=2,3,\cdots,m$)的对应元素上,得矩阵 A_1,即有

$$A \sim A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

若 A_1 中除第一行外其余各行元素全为零，那么 A_1 即为阶梯形矩阵. 如若不然，不妨设 $a'_{22} \neq 0$，可仿照上面的方法将 A_1 的第三行至第 m 行的第二列元素化为零，即有

$$A_1 \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{bmatrix}.$$

按上述规律及方法继续下去，最后可将 A 化成阶梯形矩阵.

如果 A 的第一列元素全为零，那么依次考虑它的第二列，等等.

在阶梯形矩阵中，若非零行的第一个非零元素全为 1，且非零行的第一个元素 1 所在列的其余元素全为零，就称该矩阵为**行最简形**.

如例 1 中的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

以及矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

都是行最简形.

由定理 2.1.1 的证明过程，容易推得以下常用结论.

推论　任一矩阵可经有限次初等行变换化成行最简形.

例 2　用初等行变换化矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

为阶梯形矩阵及行最简形.

解

$$A \overset{r_3-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

继续进行初等行变换,可得

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{r_3\times\frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_1-2r_3}{\underset{r_2-5r_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{r_1-\frac{1}{2}r_2}{\underset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $A_{m\times n}$ 经过初等行变换可化为阶梯形矩阵以及行最简形. 若再经过初等列变换,还可化为以下的最简形式:

$$I_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $I_{m\times n}$ 称为矩阵 $A_{m\times n}$ 的**标准形**.

定理 2.1.2 任一矩阵可经有限次初等变换化为标准形.

定理 2.1.2 的证明留给读者来完成.

例 3 求例 2 中矩阵 A 的标准形.

解

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{c_5 - c_1 - 2c_2 + c_3}{\overset{c_4 - \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I.$$

§2.2　向量及其线性运算

定义 2.2.1　n 个有顺序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

叫做 n **维向量**. 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**分量**(或坐标), a_j($j = 1,2,\cdots, n$) 叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 j 个分量(或坐标).

若以 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合,分量 $a_j \in \mathbf{R}(j = 1,2,\cdots,n)$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称实向量. 本章只讨论定义在 $\mathbf{R}$ 上的向量.

例如, n 元线性方程组(2 - 8) 中第 i ($1 \leqslant i \leqslant m$) 个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

的系数和常数项对应着一个 $n + 1$ 维向量

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, b_i).$$

而该方程的一个解 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 可用一个 n 维向量

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

来表示. 方程组(2 - 8) 的解构成的 n 维向量叫做该方程组的**解向量**.

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 都是 n 维向量. 当且仅当分量 $a_j = b_j$($j = 1,2,\cdots,n$) 时,称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

分量都是 0 的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0).$$

注意维数不同的零向量不相等. 如 $\mathbf{0}_1 = (0,0)$, $\mathbf{0}_2 = (0,0,0)$ 都是零向量,但 $\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$. 因为它们的维数不同.

向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的**负向量**,记作

$-\boldsymbol{\alpha}$. 显然,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可称为向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

定义 2.2.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)$ 都是 n 维向量. 向量$(a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和,记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n).$$

由负向量即可定义向量的**减法**:

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1, a_2-b_2,\cdots, a_n-b_n).$$

定义 2.2.3 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$ 为 n 维向量, $\lambda\in\mathbf{R}$. 向量$(\lambda a_1, \lambda a_2,\cdots, \lambda a_n)$叫做**数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积**,记作 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1, \lambda a_2,\cdots, \lambda a_n).$$

根据定义 2.2.3,有

$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;

$\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$;

如果 $\lambda\neq 0, \boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,那么 $\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

向量相加及向量乘数两种运算合起来,统称为**向量的线性运算**. 它满足以下八条运算规律(设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 都是 n 维向量, λ、$\mu\in\mathbf{R}$):

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

在数学中,把具有上述八条规律的运算称为**线性运算**. 其中规律(3)与(4)保证加法有逆运算,即:若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$,则 $\boldsymbol{\gamma}+(-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$. 规律(5)与(6)保证乘非零数有逆运算,即:当 $\lambda\neq 0$ 时,若 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}$,则 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}$.

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,-2,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(5,1,-2,0)$. 若已知 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$,求向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

解 由 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}[(15,3,-6,0)-(1,3,-2,2)]$$

$$= \frac{1}{2}(14,0,-4,-2) = (7,0,-2,-1).$$

定义 2.2.1 是将 n 维向量写成行的形式,即 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.但有时也写成列的形式:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

作为向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 写成行(行向量)还是写成列(列向量)只是写法上的不同而没有本质的区别.

例 2　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $3\boldsymbol{\alpha}_1 - 4\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 17 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$, 求向量 $2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2$.

解　由

$$3\boldsymbol{\alpha}_1 - 4\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 17 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{4}\left(3\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 17 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ -8 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

定义 2.2.4　设 V 为 n 维向量集合.如果 V 非空,且 V 对于向量的加法及数与向量的乘法运算封闭,那么就称集合 V 为**向量空间**.

所谓集合 V 对于向量的加法及数与向量的乘法运算封闭是指，若 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，$\boldsymbol{\beta} \in V$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$，以及若 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，$\lambda \in \mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$.

例 3　集合

$$V_1 = \{(0, x_2, \cdots, x_n) \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

是一个向量空间. 因为若 $\boldsymbol{\alpha} = (0, a_2, \cdots, a_n) \in V_1$，$\boldsymbol{\beta} = (0, b_2, \cdots, b_n) \in V_1$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = (0, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n) \in V_1$，$\lambda\boldsymbol{\alpha} = (0, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n) \in V_1$.

例 4　集合

$$V_2 = \{(1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

不是向量空间. 因为若 $\boldsymbol{\alpha} = (1, a_2, \cdots, a_n) \in V_2$，则 $2\boldsymbol{\alpha} = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n) \notin V_2$.

全体 n 维实向量构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

容易验证，$\mathbf{R}^n$ 是一向量空间.

设有向量空间 V_1 及 V_2，若 $V_1 \subset V_2$，则称 V_1 是 V_2 的**子空间**.

例如任何由 n 维向量所组成的向量空间 V，总有 $V \subset \mathbf{R}^n$，所以这样的向量空间总是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

向量的应用是广泛的. 几何、物理以及国民经济等问题中都经常用到它. 在解析几何中，以坐标原点 O 为起点，以任一点 $P(x, y, z)$ 为终点的有向线段与 3 维向量 $\overrightarrow{OP} = \{x, y, z\}$ 对应. 那时为了分清点 (x, y, z) 与向量 $\{x, y, z\}$，故用两种不同的括号以示区别. n 维向量是 3 维向量的推广，只是当 $n > 3$ 时，n 维向量就没有直观的几何意义了.

在形式上，向量与矩阵之间也有一定的联系. 如 $m \times n$ 矩阵 A 的每一行可以看成是 $\mathbf{R}^n$ 的一个向量，而每一列可以看成是 $\mathbf{R}^m$ 的一个向量. 反之，一个行(列)向量亦可看做一个只有一行(列)的矩阵.

§2.3　向量组的线性相关性

在向量线性运算的基础上，本节来讨论向量之间的关系.

定义 2.3.1　对于向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，如果有一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的**线性组合**，或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表示**.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，实际是指 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 经线性运算得到. 显然，零向量是任何一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

例 1　设 n 维向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= (1,0,\cdots,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= (0,1,\cdots,0),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= (0,0,\cdots,1),\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是任意一个 n 维向量. 由于

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性组合.

同维数的向量所组成的集合称为向量组. 通常称 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 **n 维单位坐标向量组**. 例 1 表明,任何一个 n 维向量必可由 n 维单位坐标向量组线性表示.

例 2　证明向量 $\boldsymbol{\alpha} = (0,4,2)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,1,2)$ 的线性组合,并将 $\boldsymbol{\alpha}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解　先假定 $\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 即

$$\begin{aligned}(0,4,2) &= \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(2,3,1) + \lambda_3(3,1,2)\\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3,\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3,\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0,\\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4,\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2.\end{cases}$$

由于该线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} = -18 \neq 0,$$

由克拉默法则知,方程组有惟一的解,可以求出 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合,且表示式为

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3.$$

一般地, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的关系必为且仅为以下三种情形之一:

1°　$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表达式惟一;

2°　$\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示时,表达式不惟一,如 $(0,0) = (1,-1) + (-1,1) = 0(1,-1) + 0(-1,1)$;

3°　$\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

对于 n 元线性方程组(2-8),若以 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 表示其中第 j 个未知量的系数构成的 m 维列向量,即

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \ j = 1,2,\cdots,n,$$

且令

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

那么,方程组(2－8)可以表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}.$$

于是,方程组(2－8)有没有解的问题就转化为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.当 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示且表达式惟一时,方程组(2－8)有解且解惟一.

定义 2.3.2 设有 n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \tag{2-9}$$

如果存在不全为零的 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称向量组(2－9)**线性相关**.

如果上式仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时才成立,那么称向量组(2－9)**线性无关**.

换句话说,当零向量 $\mathbf{0}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,表达式不惟一时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;而当零向量 $\mathbf{0}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表达式惟一(线性组合系数全为零)时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例如,对 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0)$,当 $k_1 = k_2 = 0$ 时,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$ 成立.但不能由此推出向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.事实上,取 $k_1 = 2, k_2 = -1$ 时,亦有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$ 成立.所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

一组向量不是线性相关,就是线性无关.根据定义 2.3.2,可以直接得到以下结论.

(1) 只有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有某两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_j \ (i \neq j)$,那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;

(3) 含有零向量的向量组必线性相关.

在一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中,任取若干个向量组成的向量组,叫做 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的部分向量组,简称**部分组**.

(4) 向量组的一个部分组线性相关,那么这向量组线性相关.其逆否命题是:线性无关向量组的任意一个部分组也是线性无关的.

例 3 讨论 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性相关性.

解 设 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使

$$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0},$$

即

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (0, 0, \cdots, 0)$$

成立,则必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.所以向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

例 4 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$.试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证 设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$,即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}.$$

于是

$$(k_1 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故必有

$$\begin{cases} k_1 \phantom{{}+k_2} + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 \phantom{{}+k_3} = 0, \\ \phantom{k_1+{}} k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

该齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,从而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

例 5 设 r 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

及 $r + 1$ 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}'_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}, a_{i\,r+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}'_i$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 加上一个分量而得.若 r 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,试证:$r + 1$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}'_m$ 线性无关.

证 用反证法.若向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}'_m$ 线性相关,即存在 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}'_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}'_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}'_m = \mathbf{0}$$

成立.将上式按分量写出后即得

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{m1}k_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1r}k_1 + a_{2r}k_2 + \cdots + a_{mr}k_m = 0, \\ a_{1\,r+1}k_1 + a_{2\,r+1}k_2 + \cdots + a_{m\,r+1}k_m = 0. \end{cases}$$

该方程组的前 r 个方程对应于等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零,由上式必推出向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.此与已知矛盾.所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}'_m$ 线性无关.

由以上证明过程不难推知,由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 得向量 $\boldsymbol{\alpha}'_i$ 时,添上的分量无论加在什么位置,例 5 的结论都成立.此外,该结论可以推广到增加有限个分量的情形.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有没有某个向量能由其余向量线性表示,是线性相关组与线性无关组的本质的区别.对此我们有以下定理.

定理 2.3.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证 充分性 设向量组中有一个向量,例如 $\boldsymbol{\alpha}_m$,能由其余 $m-1$ 个向量线性表示,即有一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

那么就有

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1} + (-1)\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}, -1$ 这 m 个数不全为零,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

必要性 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,即存在 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

因为 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中至少有一个不为零,不妨设 $k_m \neq 0$,于是

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \left(-\frac{k_1}{k_m}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-\frac{k_2}{k_m}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_{m-1}}{k_m}\right)\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

定理 2.3.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表示式是惟一的.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关,所以存在不全为零的 $m+1$ 个数 k_1,

$k_2,\cdots,k_m,k$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.$$

如果 $k=0$,则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,且有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,这与已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾.因此 $k\neq 0$,从而

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\boldsymbol{\alpha}_m.$$

再证表示式是惟一的.设有两个表示式

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

及

$$\boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m.$$

两式相减得

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以 $\lambda_i-\mu_i=0$,即有 $\lambda_i=\mu_i\ (i=1,2,\cdots,m)$.

例 6　设 n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

证明:(1) $m=n$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq \boldsymbol{0};$$

(2) $m>n$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必线性相关.

证　(1) 必要性　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立,或齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{n1}k_n=0, \\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{n2}k_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0 \end{cases}$$

只有零解.由定理 1.4.2 知,方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D' \neq 0.$$

充分性　由克拉默法则可知,以上过程反之亦然.

(2) $m > n$ 时,若向量组的前 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,则原向量组线性相关.若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,由(1)知,行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

而 D 是与 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 对应的线性方程组的系数行列式,由克拉默法则知该方程组有惟一的解,从而 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.再由定理2.3.1知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关,故原向量组线性相关.

这个结果表明,当向量组中向量的个数大于向量的维数时,向量组必线性相关.特别地, $n+1$ 个 n 维向量线性相关.

例 7　确定 c 的值,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, 4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-2, 3, c)$ 线性相关.

解　要使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,只要行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & c \end{vmatrix} = 10 + c = 0,$$

所以 $c = -10$.

定义 2.3.3　设有两个 n 维向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \tag{2-10}$$

及

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \tag{2-11}$$

如果向量组(2-10)中的每个向量都能由向量组(2-11)中的向量线性表示,则称**向量组(2-10)能由向量组(2-11)线性表示**.如果向量组(2-10)能由向量组

(2－11)线性表示,且向量组(2－11)也能由向量组(2－10)线性表示,则称**向量组(2－10)与向量组(2－11)等价**.

向量组的等价具有以下性质:

(1) 反身性:向量组与其自身等价;

(2) 对称性:向量组(2－10)与向量组(2－11)等价,向量组(2－11)亦与向量组(2－10)等价;

(3) 传递性:向量组(2－10)与向量组(2－11)等价,而(2－11)与第三组向量等价,则向量组(2－10)亦与第三组向量等价.

在数学中,凡具有上述三条性质的关系都称为**等价关系**.如前面已遇到过的方程组的等价,矩阵的等价,等等.

向量组的等价是向量组线性相关性的又一重要概念,以下是其中关键性的定理.

定理 2.3.3　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 中向量的个数不大于向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 中向量的个数,即 $r \leqslant s$.

证　因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,故有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1s}\boldsymbol{\beta}_s, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2s}\boldsymbol{\beta}_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r = a_{r1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{r2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{rs}\boldsymbol{\beta}_s. \end{cases}$$

设向量组

$$\boldsymbol{\gamma}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}), \quad i = 1,2,\cdots,r.$$

要证 $r \leqslant s$.用反证法.假设 $r > s$,由例6(2)知,s 维向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_r$ 线性相关,于是存在不全为零的 r 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$,使得

$$k_1\boldsymbol{\gamma}_1 + k_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\gamma}_r = \mathbf{0}$$

成立,即有

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \cdots + a_{rs}k_r = 0. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} & k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \\ = {} & k_1(a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1s}\boldsymbol{\beta}_s) + k_2(a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 \\ & + \cdots + a_{2s}\boldsymbol{\beta}_s) + \cdots + k_r(a_{r1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{r2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{rs}\boldsymbol{\beta}_s) \end{aligned}$$

$$= (a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r)\boldsymbol{\beta}_1 + (a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r)\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + (a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \cdots + a_{rs}k_r)\boldsymbol{\beta}_s$$
$$= \mathbf{0}.$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. 这与已知的 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾. 因此 $r \leqslant s$.

推论 1 两个等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是两个等价的线性无关向量组. 于是，由定理 2.3.3 知，$r \leqslant s$ 且 $s \leqslant r$. 所以 $r = s$.

设 T 是一个 n 维向量组，我们希望从中选出一个与之等价的，并且含有尽可能多个向量的线性无关的部分组来. 具有这样性质的部分组对于许多问题的讨论是十分必要的. 为此，我们引入以下定义.

定义 2.3.4 设有向量组 T，如果：

(1) 在 T 中有 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) T 中任意 $r + 1$ 个向量(如果有的话)都线性相关，

那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 T 的一个**最大线性无关向量组**，简称**最大无关组**.

根据定理 2.3.1，定义 2.3.4 的条件(2)亦可叙述为：T 中任一向量可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 显然，任一向量组必与其最大无关组等价.

例 8 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,0)$ 的一个最大无关组.

解 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，事实上，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个最大无关组.

容易看出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的最大无关组.

由于 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，而任一 n 维向量可由该组向量线性表示，因此，$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是向量空间 R^n 的一个最大无关组.

由等价具有传递性以及推论 1，即得：

推论 2 等价的向量组的最大无关组含有相同个数的向量. 特别地，一个向量组的任意两个最大无关组含有相同个数的向量.

该结论表明，虽然一个向量组的最大无关组可以不惟一，但最大无关组所含向量的个数是惟一确定的.

定义 2.3.5 向量组 T 的最大无关组所含向量的个数 r 称为**向量组的秩**，记

作 R(T),即 R(T) = r.

规定,只含零向量的向量组的秩为零.

由定义2.3.5知,向量组 R^n 的秩为 n,而例8中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为2.

推论 3 等价向量组的秩相等.

证明由推论 2 及定义 2.3.5 即得.

由于线性无关向量组本身就是一个最大无关组,于是有以下推论.

推论 4 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = m$.

向量组的秩从数量上刻化了向量组的线性相关性.把向量空间 V 看做一个向量组,那么,V 的一个最大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 称为向量空间的一个**基**,r 称为向量空间 V 的**维数**,并称 V 为 r 维向量空间.由于

$$V = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r \quad \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r \in \mathbf{R}\},$$

此时,称 V 为**由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 所生成的向量空间**.有序数组 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的**坐标**.

由于向量空间 R^n 的秩为 n,故称 R^n 为 n 维向量空间.若取 n 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 做为 R^n 的一个基,则对任一 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$,有

$$R^n = \{x \mid x = x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{R}\}.$$

此时,有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 既是向量 x 的分量,又是向量 x 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标.

一般情况下,一个向量在不同的基下的坐标是不同的.例如,由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 R^3 的一个基.若取 $x = (1,-1,0)$,由 $x = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ 知,x 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是$(1,-2,1)$.这与 x 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标是$(1,-1,0)$不同.

§2.4 矩 阵 的 秩

定义 2.4.1 设 $m \times n$ 矩阵 A,称 A 的行向量组的秩为 A 的**行秩**,列向量组的秩为 A 的**列秩**.

例 1 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

的行秩和列秩.

解 A 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,4)$,由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的行向量组的一个最大无关组.所以矩阵 A 的行秩等于 2.

同样方法可以求出 A 的列秩等于 2.

例 2 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

的行秩和列秩.

解 A 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,3,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,2,-1,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0,5)$.去掉第三个分量后得向量 $\boldsymbol{\alpha}'_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}'_2 = (0,2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}'_3 = (0,0,5)$.由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1$, $\boldsymbol{\alpha}'_2$, $\boldsymbol{\alpha}'_3$ 线性无关.由 §2.3 例 5 知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 亦线性无关.所以 A 的行秩等于 3.

A 的列向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

4 个三维向量必线性相关,而其中 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关,事实上

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

所以 A 的列秩亦等于 3.

例 1 和例 2 中矩阵的行秩等于列秩并非是偶然的.为了证明这一点,我们有以下两个定理.

定理 2.4.1 初等行(列)变换不改变矩阵的行(列)秩.

证 此处只就第三种初等行变换不改变矩阵的行秩证明之,其余两种留给读者自己来完成.

设 $m \times n$ 矩阵 A 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$,且

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}\overset{r_i+kr_j}{\sim}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=B,$$

由

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j)-k\boldsymbol{\alpha}_j,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\alpha}_m\end{aligned}$$

可知,矩阵 A 的行向量组可由 B 的行向量组线性表示.

显然,矩阵 B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表示.所以,矩阵 A、B 的行向量组等价.从而矩阵 A、B 的行向量组的秩相同.

定理 2.4.1 亦可做为初等变换不改变线性方程组中独立方程的个数的理论依据.

定理 2.4.2 初等行(列)变换不改变矩阵列(行)向量间的线性关系.

为了弄清定理 2.4.2 的含义,我们看以下例题.

例 3 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&-1&5\\6&0&2&4\end{bmatrix},$$

其列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 间有线性关系:$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,矩阵 B 由矩阵 A 经过有限次初等行变换得到.验证 B 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 间亦有线性关系

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3.$$

解 对矩阵 A 作初等行变换如下:

$$A\overset{r_3-6r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&-1&5\\0&-6&-16&4\end{bmatrix}\overset{r_3+3r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&-1&5\\0&0&-19&19\end{bmatrix}$$

$$\overset{r_3\times(-\frac{1}{19})}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&-1&5\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\underset{r_2+r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&2&0&4\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$