第一章　线性规划的数学模型

§1.1　引言

线性规划是运筹学的一个重要分支。运筹学在近四十年来已发展成多分支的学科。它的主要分支有规划论（包括线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划、0-1规划、多目标规划等）、对策论、决策论、排队论、图论、存贮论、模型论。线性规划是其中应用最广泛、理论最成熟的一个分支，它在经济管理、军事作战、工程技术及社会科学中都得到广泛的应用。

线性规划最早是在1939年由苏联的康托洛维奇在《生产组织与计划的数学方法》一书中提出的。但他并没有提出一个统一的求解方法，当时未引起人们的注意。第二次世界大战期间，美国经济学家霍夫曼（Hoffman）研究了生产计划问题。1947年美国的丹捷克（G·B·Dantzig）提出了完整的线性规划问题的有效解法——单纯形法，被人们誉为“20世纪重大的创造”，使线性规划的理论和方法成为管理科学的重要内容。

线性规划就是研究如何从全局的观点出发，通过建立数学模型，对于要求解的问题得到最合理的决策。例如：

1，运输问题　某种产品的若干个产地与销地的交通网

中，如何合理地组织运输，才使总运费最省。

2. 组织生产问题　产值固定时，如何合理地利用有限的人力、设备、原料，使经济效益最高。或是利用一定数量的人力、设备、资源，如何安排它们，使产量提高。

3. 决策问题　当市场价格变动时，企业如何相应地调整生产计划，才使利润为最大。

4. 配料问题　如何搭配各种原料，使产品既符合质量标准，又要成本最低。

5. 库存问题　在仓库容量及其它条件的限制下，如何确定库存物资的品种、数量、期限，使库存效益为最高。

6. 投资问题　对于一定数量的资金，面向不同的企业，如何进行投资（即确定投资对象、投资金额和期限），使若干年后收益最大。

当实际问题的数学模型建立之后，线性规划就是求一组变量的值，使它满足一些线性式子（等式或不等式），并使一个线性函数的值最大（或最小）的数学方法。

线性规划问题的数学模型是由决策变量、约束条件和目标函数三个要素构成的。它的一般形式是：

求一组变量x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的值，使其满足的约束件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \ (\text{或} \geqslant b_i,\ \text{或} = b_i) \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

并使目标函数 $S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$的值最小（或最大）。其中 a^{ii}，b_i，c_j 均为已知量。

§1.2 线性规划问题的数学模型举例

1. 生产利润问题

某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，需在 A，B，C，D 四种不同的设备上加工，所用的加工时数，设备利用时数和单位产品获利润等如下表所列。

表 1-1

加工时数　设备 产品	A	B	C	D	单位产品获利润（元）
Ⅰ	2	1	4	0	2
Ⅱ	2	2	0	4	3
设备可利用时数	12	8	16	[illegible]	

问　各生产多少产品Ⅰ、Ⅱ，可获最大利润？

解　设生产产品Ⅰ：x_1件，生产产品Ⅱ：x_2件时可获最大利润，则该生产利润问题的数学模型为：

求一组变量x_1、x_2的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \leqslant 16 \\ \qquad\quad 4x_2\leqslant 12 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

并使目标函数$S=2x_1+3x_2$的值达最大。

2. 投资问题

某投资公司准备将1千万元的资金对 A、B 两个企业投

资。企业A每投资1元，一年后公司可获利0.7元，对企业B每投资1元，二年后公司可获利2元。对企业A、B投资期限必须分是别一年、两年的整数倍。为使该公司在第三年底收入最多，应怎样进行投资？

解　设x_{iA}和x_{iB}分别为第i年对企业A和B所投资的金额，那末，投资问题的数学模型为：

求一组变量x_{iA}、x_{iB}（$i=1, 2, 3$）的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{1A}+x_{1B}\leqslant 10^7 \\ x_{2A}+x_{2B}\leqslant 1.7x_{1A} \\ x_{3A} \qquad\quad \leqslant 3x_{1B}+1.7x_{2A} \\ x_{iA}\geqslant 0,\ x_{iB}\geqslant 0 \\ \qquad\qquad (i=1, 2, 3) \end{cases}$$

并使目标函数$S=3x_{2B}+1.7x_{3A}$的值最大。

3. 运输问题

有两个农场A_1、A_2产粮分别为23万吨与27万吨，要将粮食运往B_1、B_2、B_3三个城市，三个城市的粮食需要量分别为17万吨、18万吨、15万吨，农场到各城市的运价如下表所列：

表 1-2

运价 万元/万吨　城市 \ 农场	B1	B2	B3
A1	50	60	70
A2	60	110	160

问　应如何调运，才能使总运费最省？

解 设x_{ij}表示由农场A_i运往城市B_j的粮食数量（万吨）（$i=1$，2；$j=1$，2，3），见下表：

表 1-3

农场 \ 运量 \ 城市	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	收发平衡

该运输问题的数学模型为：

求一组变量x_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2，3）的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\
x_{11}+x_{21}=17 \\
x_{12}+x_{22}=18 \\
x_{13}+x_{23}=15 \\
x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)
\end{cases}
$$

使目标函数$S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$达到最小值。

4．生产计划问题

某精密仪器厂生产甲、乙、丙三种仪器，平均每生产一台甲种仪器需要7小时加工，6小时装配，售价3000元；每台乙种仪器需要8小时加工，4小时装配，售价2500元；丙种仪器需要5小时加工，3小时装配，售价1800元。每季度可供利用的加工时间为2000小时，装配时间为1000小时，三种仪器所

用的元件和材料基本相同。又据市场预测可知，对甲种仪器的需求每季度不超过200台，乙种仪器不超过180台，丙种仪器不超过300台。工厂应如何安排生产，才能获得最大产值。试写出这个问题的数学模型。

解 设每季度甲、乙丙三种仪器的生产量分别为x_1、x_2、x_3台。将已知条件列为下表：

表 1-4

单位工时（小时）＼产品 工序	甲	乙	丙	总工时
加工	7	8	5	2000
装配	6	4	3	1000
售价(元)	3000	2500	1800	
市场需求(台)	⩽200	⩽180	⩽300	

该生产计划问题的数学模型为：

求一组变量x_j（$j=1, 2, 3$）的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} 7x_1+8x_2+5x_3\leqslant 2000 \\ 6x_1+4x_2+3x_3\leqslant 1000 \\ x_1 \leqslant 200 \\ x_2 \leqslant 180 \\ x_3 \leqslant 300 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\text{应是整数} \end{cases}$$

使目标函数$S=3000x_1+2500x_2+1800x_3$达到最大值。

在这个数学模型中，全部变量要求取整数值，我们称之为全整数线性规划问题。如果只要求部分变量取整数值，则

称之为混合整数规划问题。

5. 销售问题

某商店制订某商品下半年进货售货计划，已知商店库存量不得超过700件，上半年已存货100件，每月初进货一次，该商品经市场预测，各月份买进售出的价规如下表所列。问各月进货售货各多少，才能使总收入达最多。

表 1-5

月	7	8	9	10	11	12
买　进（元）	27	24	25	27	24	23
售　出（元）	29	24	26	28	26	25

解　设7—12月各月初进货数量为x_i件，各月售货数量为y_i件（$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$），S为总收入。该销售问题的数学模型为：

求一组变量x_i，y_i（$i=1, 2, \cdots, 6$）的值，使其满足约束条件

$$\begin{cases} y_1 \leqslant 100+x_1 \leqslant 700 \\ y_2 \leqslant 100+x_1-y_1+x_2 \leqslant 700 \\ y_3 \leqslant 100+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3 \leqslant 700 \\ y_4 \leqslant 100+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_3 \leqslant 700 \\ y_5 \leqslant 100+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4 \\ \qquad +x_5 \leqslant 700 \\ y_6 \leqslant 100+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4 \\ \qquad +x_5-y_5+x_6 \leqslant 700 \\ x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots, 6)\ \text{整数} \end{cases}$$

并使目标函数 $S=29y_1+24y_2+26y_3+28y_4+26y_5+25y_6-(27x_1+24x_2+25x_3+27x_4+24x_5+23x_6)$ 的值为最大。

6。合理下料问题

要做100套钢架，每套由长为2.9米，2.1米和1.5米的圆钢各一根组成。已知原料长7.4米，应如何下料，使用的原料最省。

解 一种简单的想法是：在每根原料上截取2.9米，2.1米和1.5米的棒料各一根，这样每根原料剩下0.9米的料头。为了做100套钢架，要用原料100根，多余料头总数为90米。而考虑合理套裁，可以节省原料，归纳出以下几种套裁方案，都可采用。见表1-6所列。

表 1-6

下料数（根）＼方案 长度（米）	1	2	3	4	5
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了得到100套钢架，需要混合使用5种下料方案。设按第 j 种方案下料的原材料根数为 x_j，该问题的数学模型为：

求一组变量 x_j（$j=1$，2，3，4，5）的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
x_1+2x_2+ \qquad\qquad\quad x_4=100\\
\qquad\qquad 2x_3+2x_4+x_5=100\\
3x_1+x_2+2x_3 \quad +3x_5=100\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0
\end{cases}
$$

并使目标函数 $S=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$ 的值最小。

由计算得到最优下料方案是：按方案1下料30根；方案2下料10根；方案4下料50根，即只需要90根原材料就可以制造出100套钢架来。

由以上例子表明，许多生产实际问题都可用线性规划的数学模型来表示。但是由于实际问题往往较复杂，要考虑的因素很多，因此，建立一个实际问题的数学模型并不容易。这就要求我们深入了解实际问题，掌握全面可靠的统计资料，抓住主要矛盾，使建立的数学模型尽可能与实际情况相符合。

本书只讨论线性规划问题的数学模型及求解方法，对于其它形式的数学模型的解法不予讨论。

习 题 一

写出下列问题的数学模型：

1. 某化工厂要用三种原料C、P、H混合调配出三种不同规格的产品甲、乙、丙。已知产品规格要求、产品单价、每天能供应的原材料数量及原材料单价，分别见表1-7和表1-8，该厂应如何安排生产，才能使利润达最大？

2. 有两个煤厂A、B，每月进煤分别不少于60吨，100吨，它们担负供应三个居民区用煤任务，这三个居民区每月需用煤分别为45吨、75吨、40吨，A厂离这三个居民区分别为10公里、5公里、6公里，B厂离这三个居民区分别为4公里、8公里，、15公里，问这两个煤厂如何分配供煤量，才使运

表 1-7

产品名称	规格要求	单价（元/公斤）
甲	原材料C不少于50% 原材料P不超过25%	50
乙	原材料C不少于25% 原材料P不超过50%	35
丙	不限	25

表 1-8

原材料名称	每天最多供应量（公斤）	单价（元/公斤）
C	100	65
P	100	25
H	60	35

输量为最小？

3．某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；

项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；

项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；

项目D，五年内每年初可投资，当年末回收本利106%。

该部门现有资金10万元，问它应如何确定这些项目的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大？

4．对于重量在30—40公斤的瘦肉型猪，需要确定最佳

营养饲料。选用大麦、干草粉、鱼粉作成混合饲料，每公斤大麦加水泡胀成1.2公斤饲料，每公斤干草粉含纯干草饲料0.76公斤，每公斤鱼粉含净鱼粉饲料0.8公斤，每公斤大麦、干草粉、鱼粉中含蛋白质、钙、磷、胡罗卜素的量见下表：

表 1-9

名　　称	需　要　量	大　麦	干草粉	鱼　粉
饲料单位(公斤)	1.6(公斤/每日每只猪)	1.2	0.76	0.8
蛋白质(克)	200	80	200	530
钙　(克)	12	1.2	13.7	67
磷　(克)	9	3.3	1.7	32
胡罗卜素(毫克)	12	1.6	101.8	0

每公斤价格：大麦——0.60元，干草粉——0.50元，鱼粉——1.20元。问：每天喂100头猪的混合饲料应如何配制，才能既满足猪的营养需要，又使饲料成本最低？

5. 某中药厂用当归作原料，制成当归丸和当归膏打入国际市场。生产一盒当归丸和一瓶当归膏所需劳动力（单位：小时）和原料（单位：公斤）以及工厂现有的劳动力，原料的数量如表1-10所列。

表 1-10

每件产品所需资源 \ 产品 资源	当归丸	当归膏	现有资源数量
劳动力	4	2	4000　(小时)
原　料	2	4	5000　(公斤)
利　润(元)	100	80	

问　中药厂应如何安排生产，才能获利润最大？

6. 某冷饮厂用奶粉、糖、桔子粉为原料制作冰砖和冰棍两种产品，每只产品所含原料的量以及获利见下表所列。

表 1-11

每只产品含原料(克)＼产品／原料	冰　砖	冰　棍	每天的原料批发情况
奶　　粉	20	5	限量30公斤
糖	15	10	限量30公斤
桔 子 粉	0	10	搭配18公斤
获　　利(元)	0.30	0.13	

问　该厂每天应生产两种冷饮产品各多少，能获利最大？

7. 某建材厂用铝合金制门窗，用300厘米长的铝合金条材，截成长度分别为48厘米和18厘米二种毛坯，要求共截出48厘米的毛坯150根，18厘米的200根，问怎样截法，才使所用的原材料为最少？

8. 某木器公司有甲、乙、丙三个木工厂，接受了一项为合资饭店赶制一批高档沙发的任务，每个客房放置一只大沙发和二只小沙发，各木工厂的生产能力为：甲厂每日若只做大沙发，可做60个，若只做小沙发可做75个，乙厂做大沙发每日15个，小沙发每日30个，丙厂大沙发每日45个，小沙发每日50个，合同要求每日按套交一次货，问应如何组织生产，才使每日总产量为最大。

9. 有两个煤矿A、B，每月产煤分别不少于700吨、450吨，它们担负三个城市的用煤任务，这三个城市每月的

用煤量分别为380吨、240吨、450吨，A矿离个三个城市分别为280公里、125公里、74公里，B矿离这三个城市分别为90公里、300公里、120公里，问这两个煤矿如何分配供煤，才使运输量为最少？

10．某工厂产品试制组用铅锡合金制作重量为50克的产品，其中锡不得少于25克，铅不得多于30克，每克锡的成本是0.8元，每克铅的成本是0.12元，求铅、锡的使用量各是多少时，可以使成本为最小。

11．某厂生产A、B、C三种产品，每种产品都需经过车、刨、安装、油漆四道工序，每种产品每道工序加工工时、单位产品利润以及每天各工序可利用工时见下表所列。

表 1-12

单位产品所需工时 \ 产品 / 工序	A	B	C	每天可利用工时
车	1.5	2.3	2	4000
刨	0.5	0.7	1	6000
安装	2	3	0.5	3500
油漆	3	2	1.7	5000
单位产品利润(元)	10.4	8.5	4.3	

问：每天应生产产品A、B、C各多少单位，可使工厂获利最大？

12．某食品营养研究部门研制一种营养粉，由玉米面、大麦粉、黄豆粉混合而成。营养粉的营养标准为每100公斤配料中：蛋白质不得少于20公斤，脂肪不少于5公斤，铁不少于1公斤，但不多于1.2公斤，钙不少于0.4公斤，但不多

于0.6公斤。每种粮食的价格和所含养分如表1-13所列。

问：三种粮食各应取多少公斤，才能使营养粉既满足上述要求，又使总成本为最低。

表 1-13

养分 含量 粮食	蛋白质	脂肪	铁	钙	价格 (元/公斤)
玉米面	8.2%	3.6%	0.06%	0.22%	0.35
大麦粉	11%	1.7%	0.57%	0.12%	0.38
黄豆粉	48%	18.4%	0.24%	0.19%	0.57

第二章　线性规划问题解的性质

§2.1　两个变量的线性规划问题的图解法

为了从几何直观上分析线性规划题解的性质，我们先介绍二个变量的线性规划问题的图解法。

例1　求max　$S=3x_1+x_2$

$$满足\begin{cases}x_1\leqslant 4\\ x_2\leqslant 3\\ x_1+2x_2\leqslant 8\\ x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　建立直角坐标系$x_1 0 x_2$，$(x_1,\ x_2)$表示坐标平面上的点，由解析几何知识，我们知道：满足约束条件中每一个不等式的点集就是一个半平面，约束条件是由5个不等式组成的，这5个半平面的公共部分是同时满足5个约束条件的，如图2-1中凸多边形$OABCD$内任何一点的坐标，都同时满足约束条件中的5个不等式，每一个这样的点的坐标，叫做这个线性规划问题的一个可行解，可行解的全体，称为可行解集。

要在可行解集中找一个使目标函数值最大的可行解。为此，我们分析$S=3x_1+x_2$，当S取一组不同的数值时，得到一组平行直线，其斜率为-3，在x_2轴上的截距为S。因此，

我们可以这样来寻找使目标函数值最大的可行解：先令 $S=0$ 作出过原点的直线$3x_1+x_2=0$，然后以这条直线为准向上平移，作出一组平行线，当向上平移到直线在x_2轴上的截距尽可能大（即S尽可能大），而又与凸多边形$OABCD$有交点，则这样的交点的坐标是使目标函数值最大的可行解，称之为最优解。从图2-1可见，C点坐标是最优解。

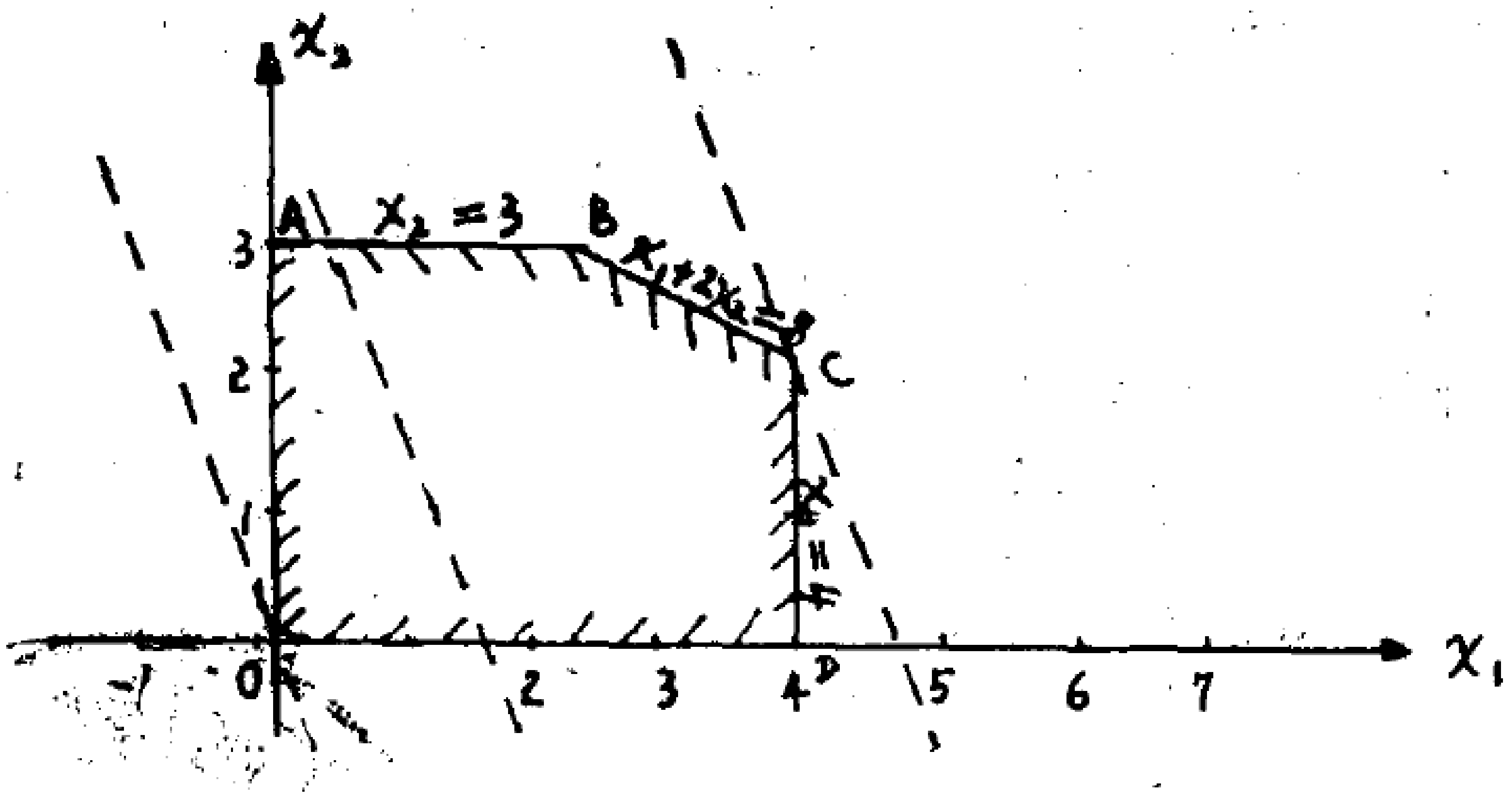

图 2-1

下面求C点坐标。

解 $\begin{cases} x_1=4 \\ x_1+2x_2=8 \end{cases}$ 得最优解为$x_1=4$，$x_2=2$，

最优值$S=3\times4+2=14$

例2 求max $S=x_1+2x_2$

满足 $\begin{cases} x_1\leqslant4 \\ x_2\leqslant3 \\ x_1+2x_2\leqslant8 \\ x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0 \end{cases}$

解 该题的约束条件与例1同，而目标函数的平行线族

与BC边平行（见图2-2），BC边上每一点的坐标都是最优解，即最优解有无穷多个。特别地，C点的坐标$x_1=4$，$x_2=2$也是最优解，最大值$S=4+2\times 2=8$。

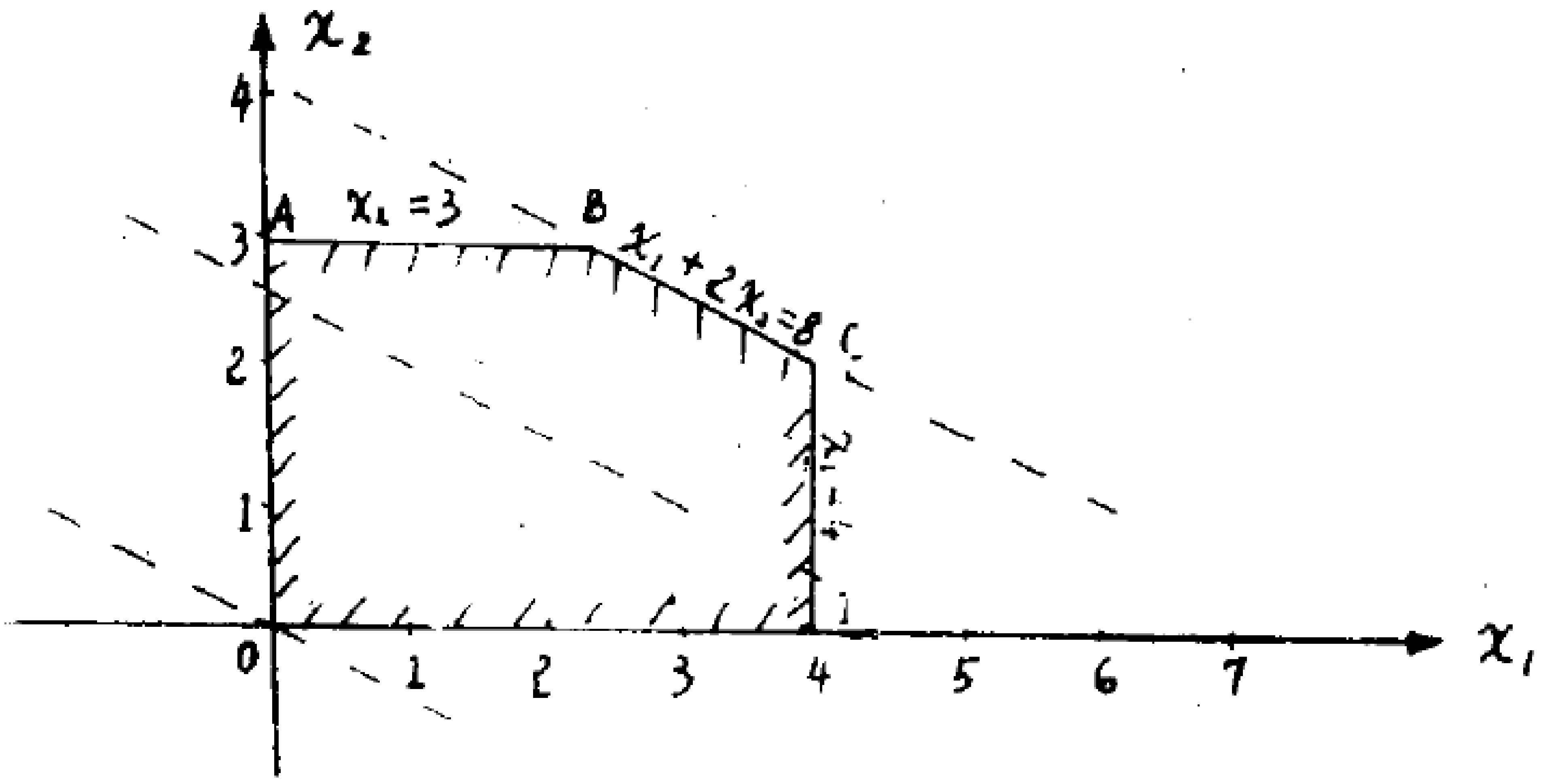

图 2-2

例3 求min $S=3x_1+x_2$

$$满足\begin{cases}x_1\leqslant 4\\x_2\leqslant 3\\x_1+2x_2\leqslant 8\\x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 该题与例1的约束条件同，只是目标函数由求最大值改为最小值，由图2-2可见最小值在0点达到，最优解为$x_1=0$，$x_2=0$，最优值$S=0$

解4 求min $S=4x_1-5x_2$

$$满足\begin{cases}x_1-3x_2\geqslant 2\\x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：由图2-3可见满足约束条件的点都在一个无界区域内，目标函数的平行线族中，过A点的一条使S达到最小值。

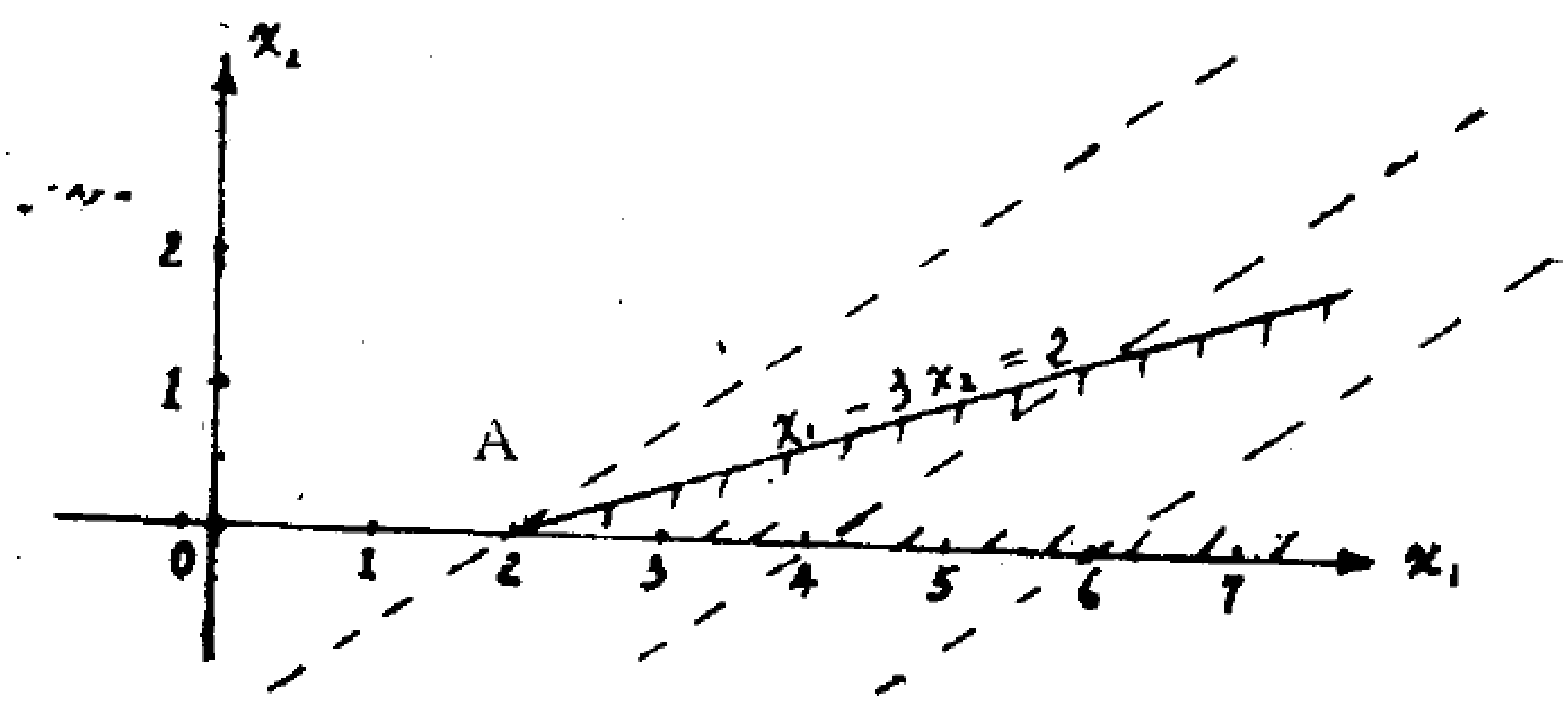

图 2-3

解5 求min $S=3x_1-8x_2$

$$满足\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 \\ 2x_1+4x_2\leqslant 1 \\ x_1\geqslant 0,\ \ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 由图2-4可见，可行解不存在（即同时满足所有约束条件的点不存在），那么没有最优解，这时称线性规划问题无解。

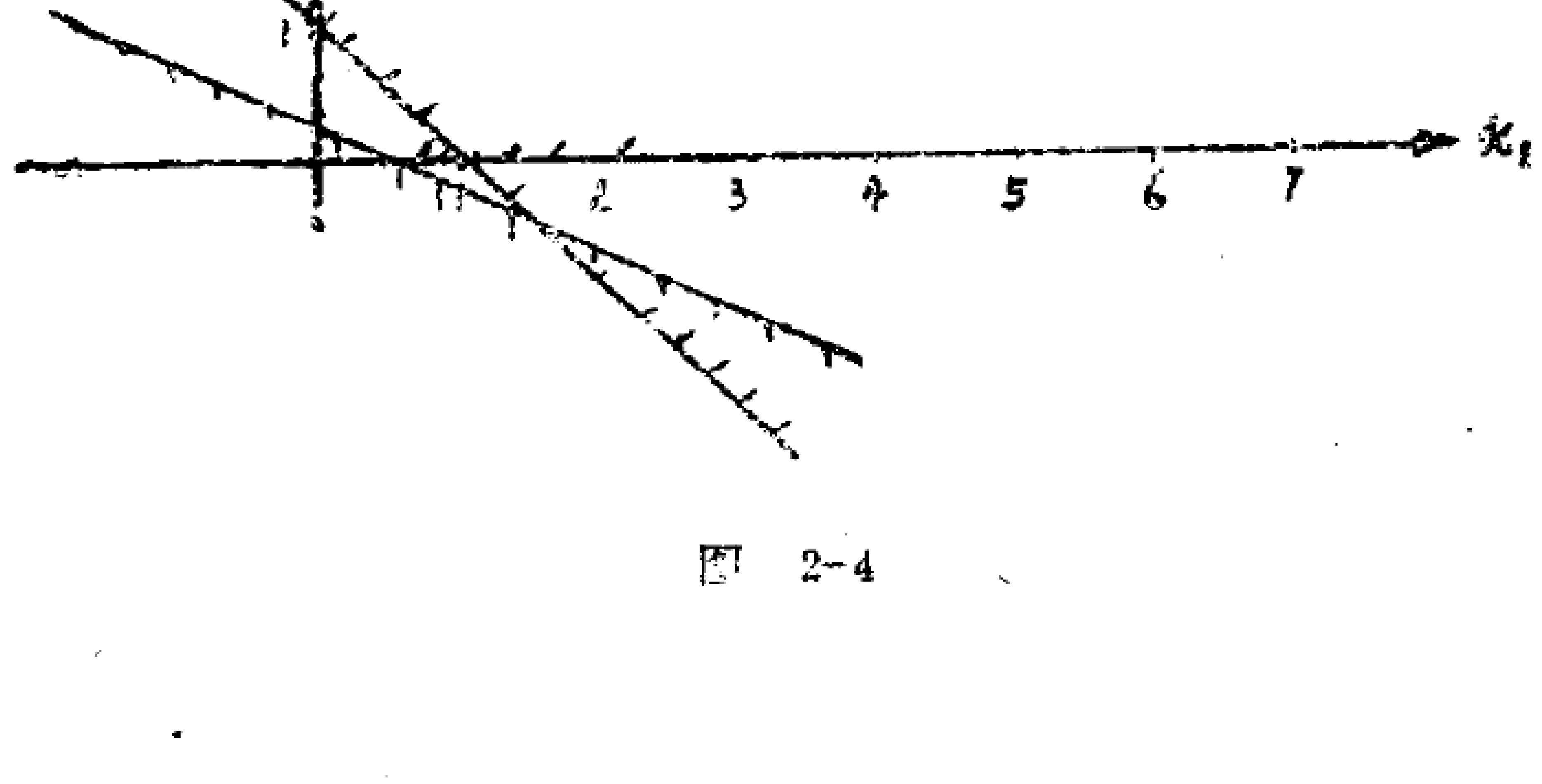

图 2-4

从以上例子可见，线性规划问题解可以归纳为：

$$\begin{cases} \text{有可行解} \begin{cases} \text{有最优解} \left\{\begin{array}{l}\text{最优解唯一}\\ \text{最优解无穷多}\end{array}\right\} \text{最优值唯一} \\ \text{无最优解} \end{cases} \\ \text{无可行解-无最优解} \end{cases}$$

从上面例子的几何直观，还可得两条结论：

1°线性规划问题的任意两个可行解联线上的点都是可行解。

2°线性规划问题的最优值如果存在，必然可在某个“顶点”达到。

§2.2 线性规划问题的标准形式

由前节可知，线性规划问题可能有各种不同的形式。目标函数，有的要求实现最大化，有的要求最小化；约束条件可以是“≤”形式的不等式，也可以是“≥”形式的不等式，还可以是等式。这种多样性给讨论问题带来不便。于是我们规定线性规划问题的标准形式（标准型）为：

目标函数　$\max S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

满足于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其缩写形式表示为：

$$\max \quad S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s \cdot t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

这里我们假定$b_i \geqslant 0$（否则等式两端乘以 -1）

有时线性规划问题的标准型用向量和矩阵符号来表述比较方便。

用向量表述：

$$\max \quad S = CX$$

$$s \cdot t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

其中：$C=(c_1, c_2, \cdots c_n)$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad P_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

向量p_j是其对应变量x_j的系数列向量。

用矩阵表述：

$$\max \quad S = CX$$

$$s \cdot t \begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & a_{1n} \\ \vdots \quad \cdots & \vdots \\ a_{m1} a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们称A为约束方程组的系数矩阵($m\times n$)，一般情况下$m\leqslant n$；m、n为正整数，并假定A的秩为m；

b为限定向量；一般情况下$b_i\geqslant 0$

C为价值向量；

X为未知数向量；将$x_i\geqslant 0$（$i=1, 2, \cdots, n$）记作$X\geqslant 0$，通常a_{ij}，b_i和c_j（$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1,2,\cdots,n$）为已知常数。

具体问题的线性规划数学模型是各式各样的，需要把它们化成标准型，并借助标准型的求解方法进行求解。

下面讨论如何化标准型的问题。

（1）若要求目标函数

$$\min \quad S=CX$$

这时只需要将求目标函数的最小值变为求目标函数的最大值，即

$$\min \quad S=-\max(-S)$$

令$S'=-S$，于是就得到

$$\max \quad S'=-CX$$

这就同标准型的目标函数的形式一致。

（2）约束方程组为不等式，分两种情况：

当不等号是"$\leqslant$"时，则可在"$\leqslant$"号的左端加入非负的松弛变量，把不等式变为等式；

当不等号是"$\geqslant$"时，则可在"$\geqslant$"号的左端减去一个