

§ 1. 紧曲面的分类和一般性质

我们称连通的二维流形为曲面,它是球面、环面、柱面等熟知概念的推广. 曲面 M 称为闭的, 如果 M 是紧的且无边界. 也就是说, 闭曲面是一个连通紧 Hausdorff 空间, 其中每一点有一邻域同胚于 Euclid 平面. 本节主要介绍闭曲面的一些熟知的基本性质, 以便将来可以应用. 由于这些结果都是古典的, 所以略去证明. 有兴趣的读者可以参阅文献[1], [2], [3], [4], [5], [6] 中的有关章节.

定理 1. 设闭曲面或带边界的紧曲面 M 被三角剖分而成为复形时, 其顶点数为 α_0 , 边数为 α_1 , 二维胞腔数为 α_2 . 以 R_p^0, R_p^1, R_p^2 分别表示此复形的零维, 一维, 二维的模 p (p 为素数或零) Betti 数. 则有

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = R_p^0 - R_p^1 + R_p^2. \quad (1)$$

等式(1)称为 M 的 Euler-Poincaré 关系式. 记其值为 $\chi(M)$, 称为 M 的 Euler 特征.

记:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \text{球面 } S^2, \\ T_1 &= \text{环面 } T^2, \\ T_2 &= T_1 \# T_1, \text{ 称为 } T_1 \text{ 与 } T_1 \text{ 的连通和}^1, \\ &\dots \\ T_g &= T_{g-1} \# T_1, \text{ 当 } g \geq 2 \text{ 为正整数时.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

它们被称为可定向闭曲面的模式. 易见 T_1 也可视为带有一个柄

1) 两个曲面 M_1 与 M_2 的连通和是指: 从每一曲面上各挖去一个开圆盘 D_1^1 与 D_2^1 , 然后把 M_1 与 M_2 沿着 D_1^1 与 D_2^1 的边界粘合而得的曲面, 记为 $M_1 \# M_2$. 严格定义见[3]或[4].

的球面¹⁾。一般地, T_g 可视为带有 g 个柄的球面。因此, 图 1.1 中的两种模式是一样的。

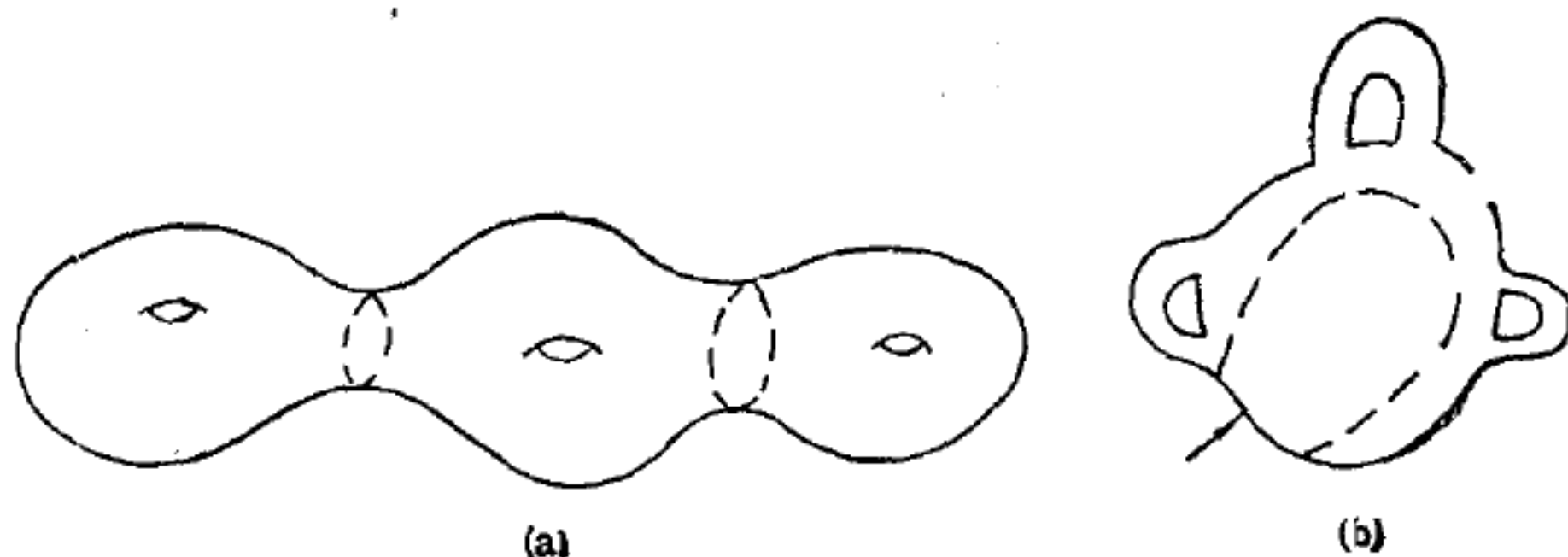


图 1.1

再记:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \text{射影平面 } PR^2, \\ P_2 &= P_1 \# P_1 = \text{Klein 瓶 } K^2, \\ &\dots \\ P_g &= P_{g-1} \# P_1, \text{ 当 } g \geq 2 \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

它们被称为不可定向闭曲面的模式²⁾。

最简单的带边可定向紧曲面是闭圆盘 \bar{D}^2 。最简单的带边不可定向紧曲面是 Möbius 带 B_2 。熟知的是 $\bar{D}^2, B_2, S^2, H_2, T^2, PR^2, K^2$ 有如下的表示图(图 1.2), 其中凡加箭头的实线对边都应沿箭头的正向叠合, 边界旁画着的虚箭头表示边界的某一正方向。

此外, 还有下列一些等式成立:

$$\bar{D}_1^2 \cup D_2^2 = S_1^2 \# S_2^2 = S^2, \quad (4)$$

1) 即从 S^2 上挖去两个开圆盘 D_1^2 与 D_2^2 (剩下的实际上是一带边柱面 H_2), 然后把另一带边柱面(柄)的两端与 $S^2 - D_1^2 - D_2^2$ 沿着两个圆盘的边界粘合。给曲面 M 加柄实际上是作 M 与 S^2 的双重连通和, 即从每一曲面上各挖去两个圆盘以后再彼此粘合。今后记之为 $M \# S^2$, 或记为 $M \#^2 H_2$, 这里 $\#$ 表示作连通和时 M 被挖去一个开圆盘, 而 H_2 本身带边, 未被挖去什么, 又 $\#$ 的右下角的 2 表示 M 被挖去的开圆盘个数。

2) P_g 可以看成是带有 g 个交叉帽的球面, 见图 10.16。

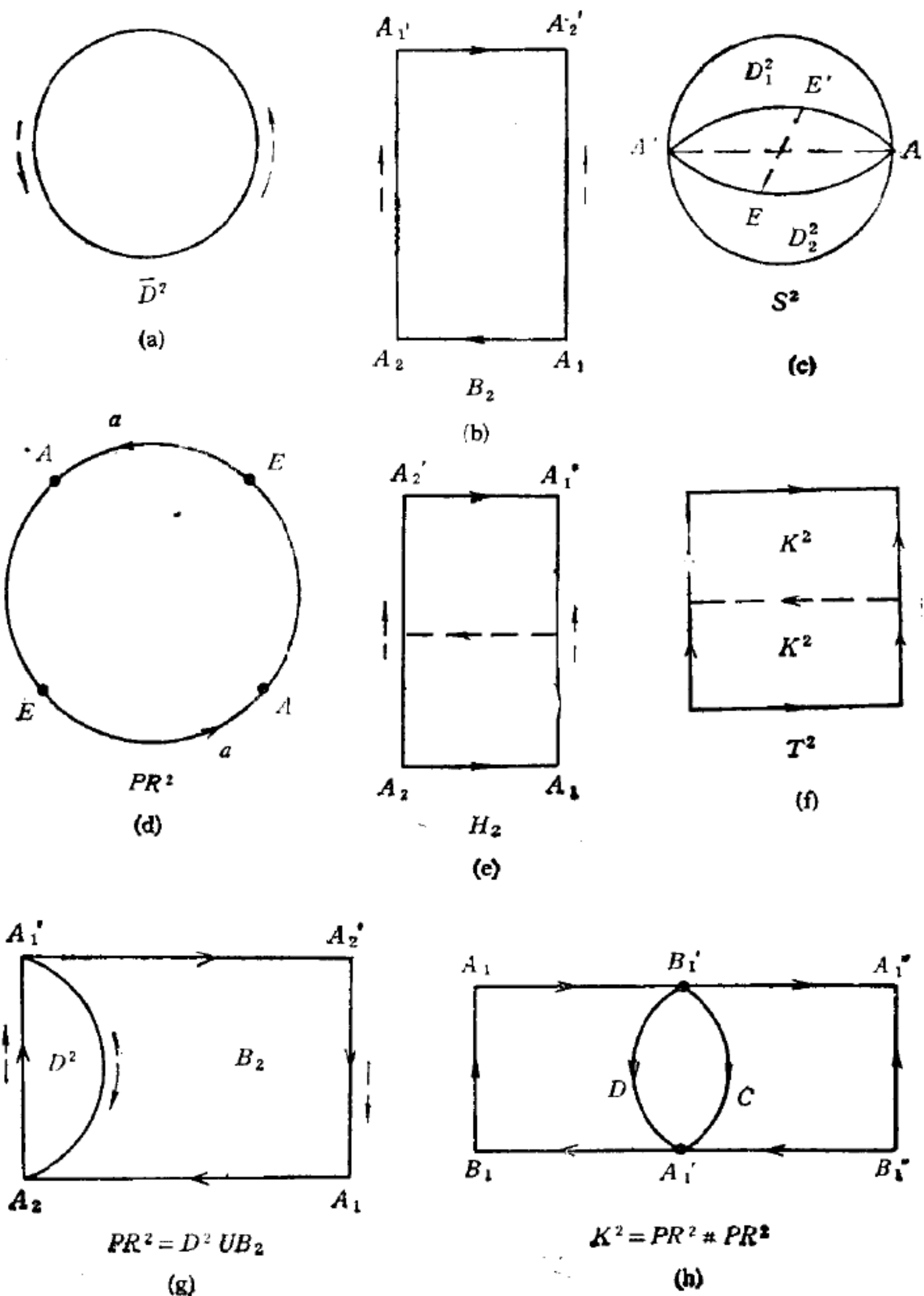


图 1.2

$$D^2 \cup B_2 = S^2 \#^* B_2 = S^2 \# PR^2 = PR^2. \quad (5)^{1)}$$

1) 若记 $P_0 = S^2$, 则此式亦可改写为 $P_0 \# P_1 = P_1$. 两式都是定理 3 后面的 $M \# S^2 = M$ 的特例.

注意图 1.2 中的 (c), (d), 可知 S^2 是 PR^2 的二重覆盖空间; 注意其中的 (f), 可知 T^2 是 K^2 的二重覆盖. 此外, 又易见: 实直线 \dot{H}_2 (不带边的圆柱) 和 R^2 分别是圆 S^1, T^2 和 \dot{H}_2 的可数无限重覆盖空间. 一般可证:

定理 2. 每一流形 M 必有一可定向的两重覆盖流形 \tilde{M} (见 [4] p. 106).

由定理 1 及 S^2 与 PR^2 的三角剖分, 易见:

$$\chi(S^2) = 2, \chi(PR^2) = 1. \quad (6)$$

又由连通和 $\#$ 的定义和定理 1, 易见对曲面 M, N ,

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2. \quad (7)$$

然后应用归纳法, 易证:

定理 3. T_g 与 P_g 的 Euler 特征分别为:

$$\chi(T_g) = 2 - 2g, \chi(P_g) = 2 - g. \quad (8)$$

注意: $\#, \#_2, \#^*$ 与 $\#_2^*$ 的定义以及 (7), (8) 两式, 可知下面一些性质成立.

性质 1. 对任何曲面 M 有

$$M \# S^2 = M. \quad (9)$$

性质 2. 给 T_g 加柄时有

$$T_g \#_2 S^2 = T_g \#_2^* H_2 = T_g \# T_1 = T_{g+1}, \quad (10)$$

$$\chi(T_{g+1}) = \chi(T_g) - 2. \quad (11)$$

性质 3. 给 P_g 加横截帽 (cross cap, 其意义见下式的第一项) 时有 (参考 (5) 式)

$$P_g \#^* B_2 = P_g \# PR^2 = P_{g+1}, \quad (12)$$

$$\chi(P_{g+1}) = \chi(P_g) - 1. \quad (13)$$

性质 4. 给 P_g 加柄等于给 P_g 加两个横截帽:

$$P_g \#_2^* H_2 = P_g \#_2 S^2 = P_{g+2} \quad (g \geq 1). \quad (14)$$

此式的证明见 [4], 亦可将 (7) 式推广到 $\#_2$ 再证明¹⁾.

性质 5. 给 T_g 加横截帽后得到 P_{2g+1} :

1) 即利用 $\chi(M \#_2 N) = \chi(M) + \chi(N) - 4$ 来证 (14) 式左边的 Euler 特征为 $-g$. 性质 5 亦可用同法证明, 但都要用到后面的定理.

$$\begin{aligned}
T_g \#^* B_2 &= T_g \# PR^2 = PR^2 \# T_g = PR^2 \#^* \sum_1^{2g} B_2 \\
&= PR^2 \# \sum_1^{2g} PR^2 = P_{2g+1}, \\
\chi(P_{2g+1}) &= \chi(T_g) - 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

定理 4 (可定向曲面的分类). 设 M 为可定向闭曲面, 则必存在唯一的非负整数 $g \geq 0$, 使 M 同胚于 T_g . 若 M 为可定向带边曲面, ∂M 有 b 个连通支, M 的 Euler 特征为 χ , 则 $\chi + b$ 为偶数. 记 $g = 1 - \frac{\chi + b}{2}$, 则 M 同胚于 T_g 上挖去 b 个互不相遇

的开圆盘而得到的可定向曲面(见[4]).

定理 5. 亏格为 g 的可定向曲面 M 上必存在 g 个互不相遇的圆, 使它们的和集在 M 上的余集仍为连通集; 但 M 上任何 $g + 1$ 个互不相遇的圆必定将 M 分割为不连通集.

定理 5'. 若 N 为不可定向闭曲面, 则必存在一正整数 g , 使 N 包含 g 个, 但不包含 $g + 1$ 个互不相遇的 Möbius 带. g 称为 N 的 Möbius 数.

由(5)及(12)式知 P_g 上至少包含 g 个 Möbius 带.

定理 4' (不可定向曲面的分类). 若 N 为不可定向闭曲面, 其 Möbius 数为 g , 则 N 必同胚于 P_g . 从 N 上除去一切 Möbius 带而代之以圆盘, 则所得为球面. 若 N 为不可定向带边曲面, 其 Möbius 数为 g , ∂N 有 b 个连通支, 则 N 同胚于 P_g 上挖去 b 个互不相遇的开圆盘.

系 1. P_g 上恰有 g 个 Möbius 带.

注意: 闭曲面 M 若挖去 b 个开圆盘而成为带边 (边界为 b 个连通支) 紧曲面时, 则其亏格不变, 而 Euler 特征 χ 则减少 b . 故由定理 3, 4, 4' 可得:

定理 6. 若带边紧曲面 M 有亏格 g , ∂M 有 b 个连通支, 每一个都是拓扑圆, 则

$$\chi(M) = 2 - 2g - b, \text{ 当 } M \text{ 为可定向时,} \tag{16}$$

$\chi(M) = 2 - g - b$, 当 M 为不可定向时.

系 2. 若闭曲面的 Euler 特征为奇数, 则它必为不可定向.

定理 7. 两个紧曲面互相微分同胚当且仅当它们有相同的亏格, Euler 特征, 以及相同个数的边界连通支.

系 3. 对定理 2 中的 M 与 \tilde{M} , 若 M 的亏格为 g , 则 \tilde{M} 的亏格为 $g - 1$ (因为 $\chi_{\tilde{M}} = 2\chi_M$).

系 4. 若曲面 M 与 N 同为可定向或同为不可定向, 则

$$g(M \# N) = g(M) + g(N). \quad (17)$$

若 M 为可定向而 N 为不可定向, 则

$$g(M \# N) = 2g(M) + g(N). \quad (18)$$

定理 8. 对亏格为 g 的可定向闭曲面有:

$$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2g, R_p^2 = 1, \chi = 2 - 2g \quad (p \text{ 为素数}). \quad (19)$$

对亏格为 g 的不可定向闭曲面有:

$$\begin{aligned} R_2^0 = 1, R_2^1 = g, R_2^2 = 1; \\ R_p^0 = 1, R_p^1 = g - 1, R_p^2 = 0 \quad (p \neq 2), \end{aligned} \quad \chi = 2 - g. \quad (20)$$

对于常见的亏格 ≤ 2 的各种曲面、单形与球, 可列表如下:

流形	各维 Betti 数	边界连通支数	亏格	Euler 特征
H_2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 2$	$g = 0$	$\chi = 0$
T^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2, R_p^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 0$
B_2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 1$	$g = 1$	$\chi = 0$
K^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 2, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 2$	$\chi = 0$
PR^2	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 0, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 1, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 1$
$n(\geq 0)$ 维胞腔 D^n	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i \leq n)$	$b = 1$	$g = 0$ (对 $n = 2$)	$\chi = 1$
$n(> 0)$ 维球 S^n	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i < n)$ $R_p^n = 1$	$b = 0$	$\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ (对 $n = 2$)	$\chi = 1 + (-1)^n$

定理 9. T_g 与 B_2 可嵌入 R^3 , PR^2 与 K^2 则不能. 一般, 一个无边、紧、不可定向 n 维流形不能嵌入一单连通的 $n+1$ 维流形(见[4]). 但对任何 $P_g, g \geq 1$, 总存在 R^4 中的可微曲面同胚于 P_g (见 [6]).

定理 10. 亏格为 g 的可定向闭曲面的标准记法为(见[1]):

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= 1 \quad (g=0, \text{球面}), \\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} &= 1 \quad (g \geq 1). \end{aligned} \quad (21)$$

亏格为 g 的不可定向闭曲面的标准记法为

$$a_1a_1 \cdots a_ga_g = 1, \quad (22)$$

或

$$\begin{aligned} a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_{g-1}^{-1}b_{g-1}^{-1}a_ga_g &= 1 \quad (\text{当 } g \text{ 为奇数时}), \\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g &= 1 \quad (\text{当 } g \text{ 为偶数时}). \end{aligned} \quad (23)$$

例 1. 对 PR^2 有 $a_1a_1 = 1$, 对 T^2 有 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} = 1$, 对 K^2 有 $a_1b_1a_1^{-1}b_1 = 1$, 这可由图 1.2(d), (f), (h) 容易地看出.

定理 11. 若 M 为连通复形, 则其一维同调群 $H_1(M)$ 同构于商群 $\pi_1(|M|)/F$, 其中 $\pi_1(|M|)$ 为 $|M|$ 的基本群, F 为 $\pi_1(|M|)$ 的换位子群. 特别地, 当 $\pi_1(|M|)$ 为交换群时, $\pi_1(|M|)$ 与 $H_1(M)$ 同构.

例 2. $\pi_1(T^2) \approx H_1(T^2)$ 为交换群, 而 $\pi_1(K^2)$ 则为非交换群, 故不同构于 $H_1(K^2)$. 一般地, $T_g (g \geq 2)$ 的基本群都不是交换群.

再仔细研究一下 K^2 的基本群. 以

$$h: (x, y) \mapsto (x+1, y) \quad (24)$$

记 R^2 中的平移, 以

$$k: (x, y) \mapsto (-x, y+1) \quad (25)$$

记 R^2 中的平移加对称. 由 h 与 k 所产生的群 G 不是交换群, 因为由定义易证

$$hk = kh^{-1}. \quad (26)$$

此式亦可由图 1.3 看出. 实际上, (26) 就是例 1 中的 $a_1b_1a_1^{-1}b_1 = 1$. 因为由 (26) 可得 $kh^{-1}k^{-1}h^{-1} = 1$, 再令 $h^{-1} = i$, 即得 $kjk^{-1}i = 1$.

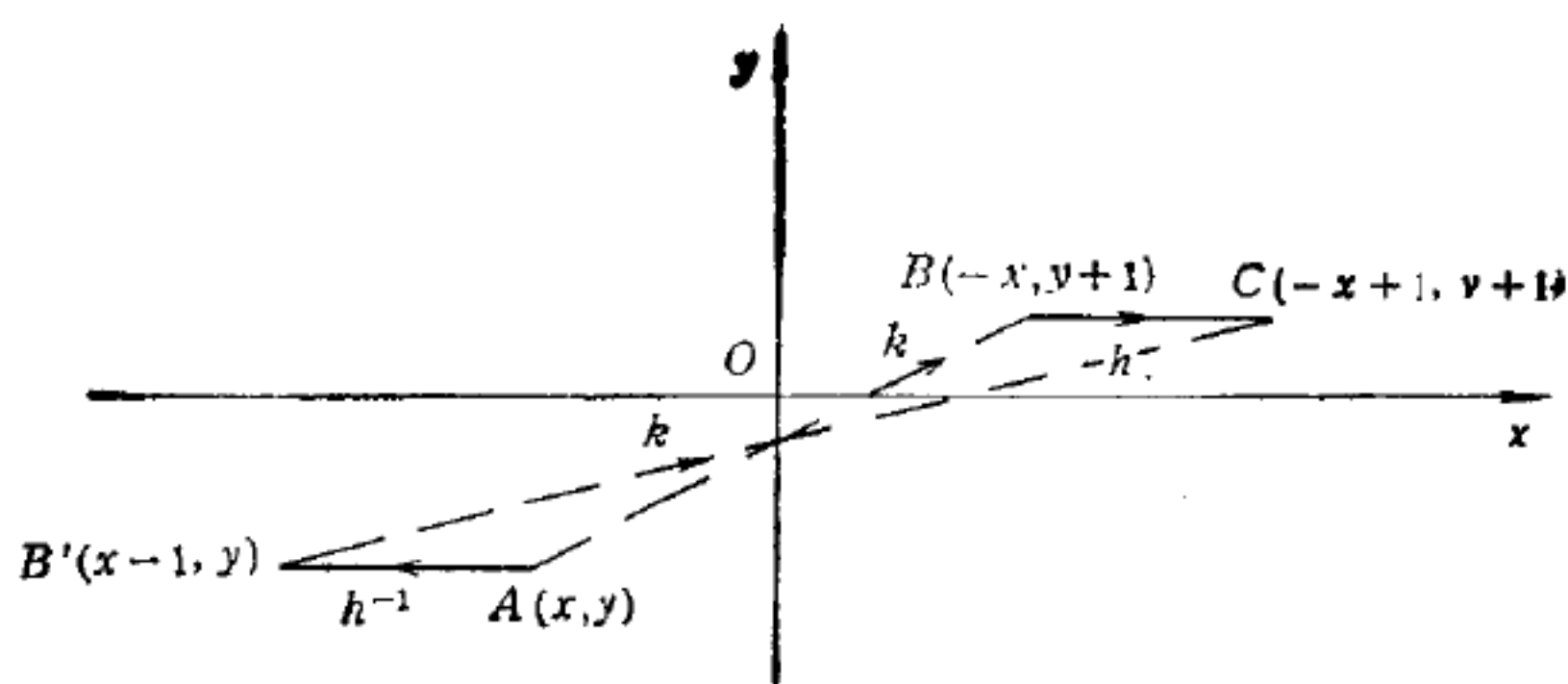


图 1.3

对 K^2 来说, $\pi_1(K^2)$ 的换位子群 F 由 h^2 所产生, 因为

$$hkh^{-1}k^{-1} = hhkk^{-1} = h^2.$$

由于 K^2 的基本群为 G , 故 K^2 同胚于商群 R^2/G , 而

$$\pi_1(K^2) = G \approx Z \oplus Z_2. \quad (27)$$

关于 H_2, T^2 与 K^2 的基本群有如下三个重要的定理, 以下都用 J 表示 Jordan 曲线.

定理 12. 设 J 位于开柱面 $R^2 - \{0\} = \dot{H}_2$ 上. 若 J 的内部包含 R^2 的原点 O , 则 J 表示 \dot{H}_2 的基本群的产生元; 否则, J 在 \dot{H}_2 中同伦于零. $\pi_1(\dot{H}_2) \cong Z$.

定理 13. 设 J 在 T^2 上不同伦于零, 则 J 在基本群 $\pi_1(T^2)$ 中所属的同伦类 i 可由一对互素整数 (m, n) 来表示. 易见

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong Z \oplus Z. \quad (28)$$

定理 14. 设 J 在 K^2 上不同伦于零, 则 J 必表示 $\pi_1(K^2)$ 中的下列元素之一:

$$h, h^{-1}, k^2, k^{-2}, kh^n, k^{-1}h^n \quad (n \in Z).$$

下面是上述一些元素的图示法, 易见图 1.4 中 k^2h 不是单闭曲线, 又每一元素的图示并不唯一.

推广(27)与(28)有:

定理 15. T_g 与 P_g 的基本群为

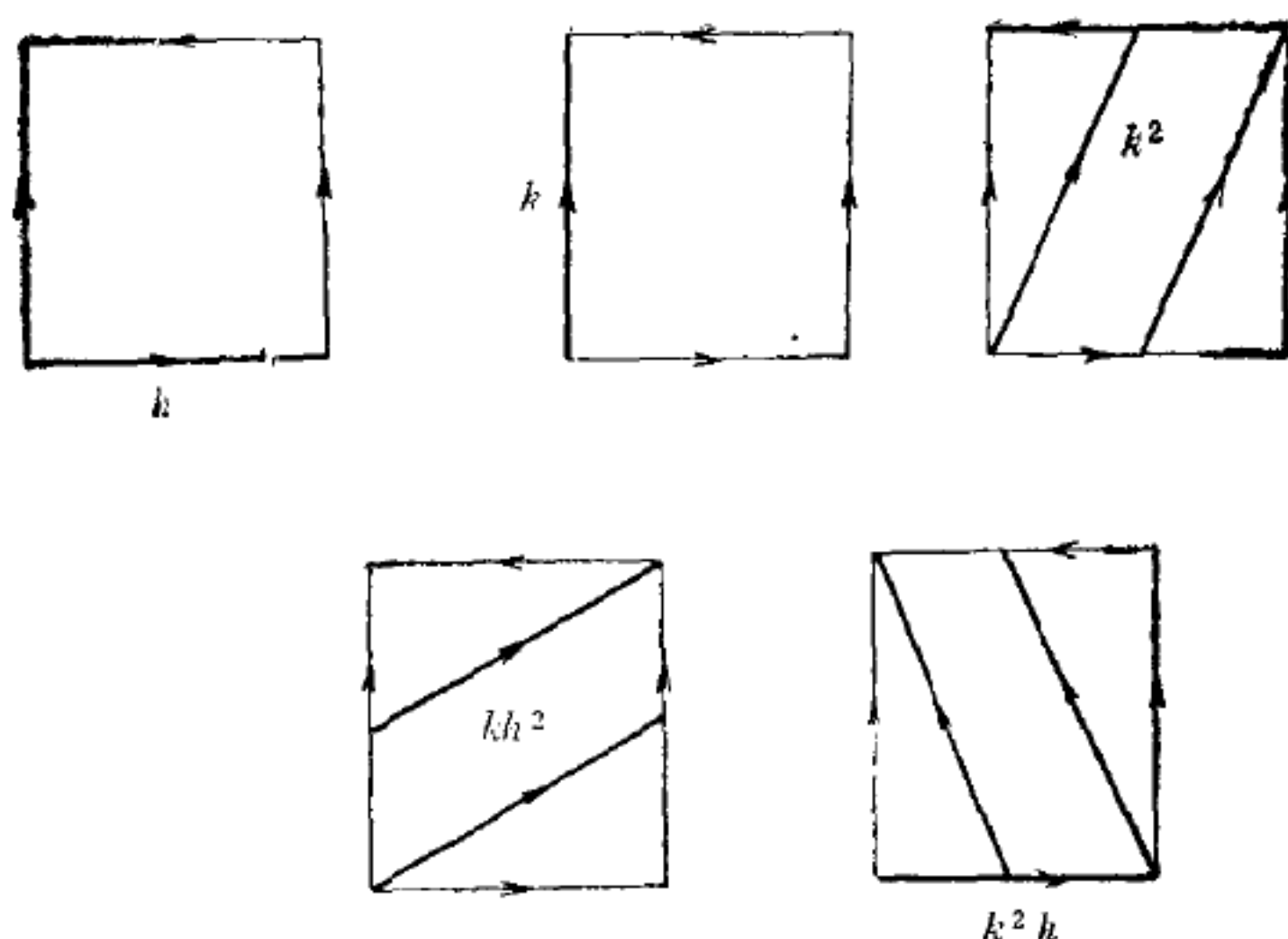


图 1.4

$$\pi_1(T_g) \approx Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \quad (2g \text{ 个}),$$

$$\pi_1(P_g) \approx \underbrace{Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z}_{g-1 \text{ 个}} \oplus Z_2.$$

定义 1. 曲面 M 上的 Jordan 曲线 J 称为是双边的, 如果 J 在 M 上有一开邻域同胚于 \dot{H}_2 . J 称为是单边的, 如果 J 在 M 上有一开邻域同胚于 \dot{B}_2 .

易见: 若 J 在 K^2 上所属的同伦类为 $h^{\pm 1}, k^{\pm 2}$, 则 J 是双边的; 否则, J 是单边的(由定理 14). 注意: 曲面上单边 Jordan 曲线的补集必为连通集; 但反之, 补集为连通集的 Jordan 曲线却可能是双边的. 在 S^2, H_2 与 T^2 上, 一 Jordan 曲线的补集是否为连通, 比较容易看. 在 K^2 上则否, 且情况比较复杂. 设 J 代表 $\pi_1(K^2)$ 的元素 i , 则有下列四种不同的情况:

1) 当 $i = 1$ (即 J 同伦于零) 时, $K^2 - J$ 有两个连通支, 其一同胚于 D^2 .

2) 当 $i = h^{\pm 1}$ 时 $K^2 - J$ 同胚于 \dot{H}_2 , 即只有一个连通支.

3) 当 $i = k^{\pm 2}$ 时 $K^2 - J$ 有两个连通支, 各同胚于 \dot{B}_2 (图 1.5(a)).

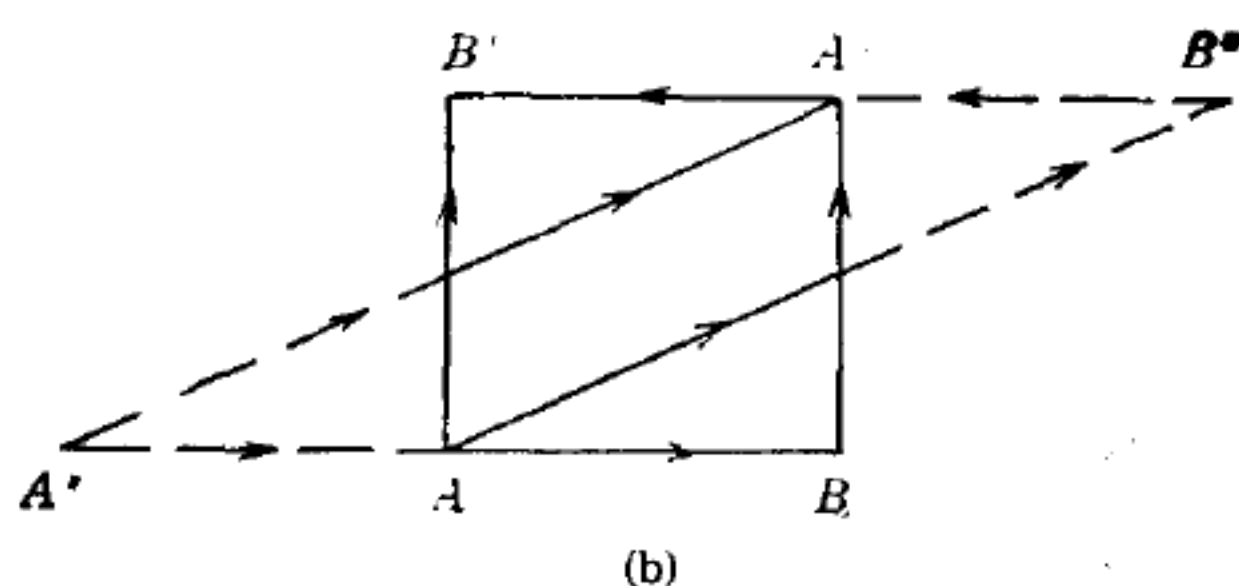
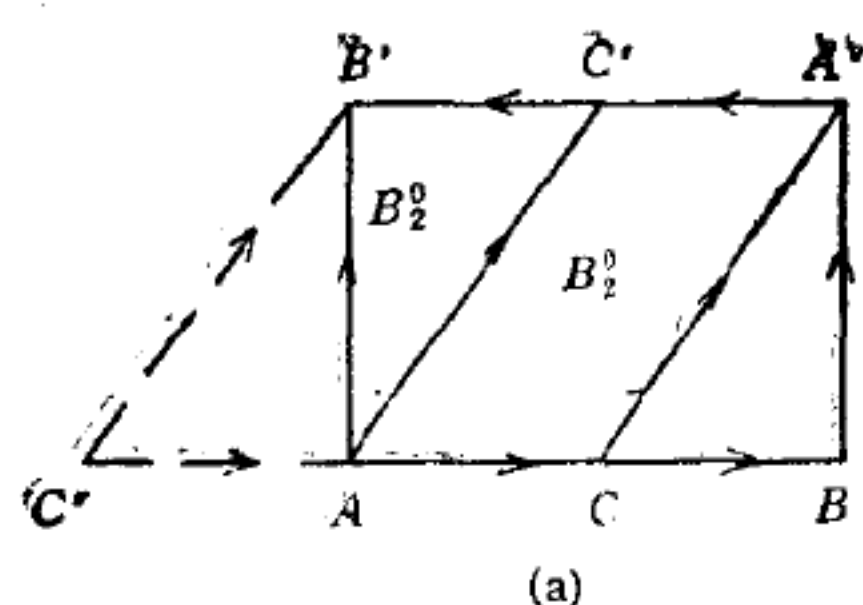


图 1.5

4) 当 $j = k \pm 1 h^*$ 时, $K^2 \sim J$ 同胚于 B_2^0 (图 1.5(b)).

定理 16. 设 \tilde{M} 为不可定向闭曲面 M 的可定向二重覆盖. J 是 M 上一单闭曲线, J_1 与 J_2 是 J 在 \tilde{M} 中的逆象 (称为 J 在 \tilde{M} 中的提升), 则当 J 为双边曲线时, J_1 与 J_2 各为单闭曲线; 当 J 为单边曲线时, J_1 与 J_2 都不是闭曲线, 但 $J_1 \cup J_2$ 是 \tilde{M} 中的单闭曲线.

对于非紧曲面, 也有类似于本节的分类定理, 见[7]; 这时亏格和边界连通支的个数都可以是无限的.

§ 2. 微分流形上动力系统的 一般性质

本节的内容仍是古典的、熟知的，读者除[3],[5]以外还可参阅[8],[9],[10]，证明从略。

设 M 为一微分流形， TM 是 M 的切丛。 M 上的一个向量场 X 就是一映射 $X:M \rightarrow TM$ ，使得对每一点 $x \in M$ 有 $X(x) \in T_x M$ 。这里 $T_x M$ 表示 M 在 x 的切空间， $X(x)$ 表示 M 在 x 的切向量。当 $X(x)$ 不为零向量时称 x 为 X 的常点；否则，称 x 为 X 的奇点。即使 M 的维数为2， TM 的维数也是4，故我们无法把 TM 嵌入到 R^3 中去。这一点就直观上看是很明显的。 R^3 中一曲面 S 在其上任二点的切平面必交于一直线（如果这两点处于曲面上的一般位置），这是和 TM 的定义相违背的。尽管如此，若在闭曲面 S 上给定一个向量场 X ，由于点 x 的切向量（包括零向量）可以用一由 x 出发的有向线段（包括一点）来表示，则 X 仍可在 R^3 中描绘出来。当映射 X 为可微时称 X 为 M 上的可微向量场。

定义 1. M 上可微向量场 X 的一条积分线 γ 是一个 C^1 类映射 $\gamma:I \rightarrow M$ ，使得对一切 $t \in I$ 都有

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad (1)$$

这里 I 表示实轴上一非零区间， $X(\gamma(t))$ 表示位于 M 上 $\gamma(t)$ 这一点的切空间 $T_{\gamma(t)} M$ 中的场 X 的向量。

特别地，若 x 为 X 的零点，则可定义一映射 γ ，使 $\gamma(I) \equiv x$ ，这时 $\gamma'(t) \equiv 0$ 。由此可见，奇点是向量场的特殊积分线。

如同欧氏空间中定常方程所确定的向量场一样，易证：若 $\gamma(t)$ 是 X 的积分线，则 $\gamma(-t)$ 和 $\gamma(t+\tau)$ （ τ 固定）也都是 X 的积分线。

由于微分流形本身一般只有局部坐标系,因而流形上的向量场 X 也只能有局部的坐标表示. 设 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为 n 维流形 M_n 在其上一开邻域 U 中的局部坐标, 则 X 可在 U 中用一算子

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

来表示, 而它的积分线则是自治方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

的轨线, 其中诸 f_i 至少为一次可微. 于是 X 在 M_n 上的积分线的存在性、唯一性和可延展性等等都可借助于 M_n 上的地图集和 R^n 中的微分方程理论而得到. 特别地, 若 M 为仿紧流形 (紧流形是其特例), 则由仿紧性和微分方程论知道总可作适当的时间变换, 使得沿着 X 的每一积分线向两个方向延展时, t 的变动范围为 $(-\infty, \infty)$. 此外, 常见的流盒 (flow box) 定理, 或流在常点邻域中的直化定理在 M_n 上也同样成立. 所有这些事实的证明都可以在 [3] 中找到.

这样, X 在 M_n 上的积分线全体, 或即方程 (1) 的轨线全体便确定 M_n 到它自身的一个单参数变换群, 或 M_n 上的一个动力系统.

反过来, 我们也可以在 M_n 上先抽象地定义一个流动 $\varphi(t, x)$, 或称之为实数群 R 对 M_n 的作用.¹⁾ 这就是一个连续映射 $\varphi: R \times M_n \rightarrow M_n$, 使得对一切 $x \in M_n$ 与一切 $t_1, t_2 \in R$ 都有:

$$\varphi(0, x) = x, \quad \varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x), \quad (4)$$

则称 $\varphi(t, x)$ 为 M_n 上的一个动力系统. 对固定的 x , 集合 $\{\varphi(t, x)\}_{t \in R}$ 称为过点 x 的轨线. 若 $\{\varphi(t, x)\}_{t \in R} = x$, 则称 x 为奇点. 当 φ 为可微映射时, 称 $\varphi(t, x)$ 为可微动力系统. 对于 M_n 上的可微动力系统 $\varphi(t, x)$, 经过任一非奇点有唯一的轨线以及

1) 对于更一般的群 G 在一集 E 上的作用以及由此产生的轨道空间的定义与性质可参考 [9] 卷 II, 12.10.

它在此点的有向切线。这些有向切线以及奇点的全体就构成 M_* 上的一个可微向量场。

注意：要描述 M_* 上的时变向量场，可以改为研究乘积流形 $N_{n+1} = M_* \times R$ 上的向量场

$$Z = X(x, u) + \frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (5)$$

其中 $X(x, u) \in T_x M$ ，此向量场局部地对应于非定常方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

关于曲面上的动力系统，利用局部坐标系，我们也可以象平面定常系统一样来定义每一个孤立奇点的指标，它是一个整数。熟知的有下一十分重要的 Poincaré 定理：

定理 1. 若闭曲面 M 上的向量场 X 有有限个奇点 O_1, O_2, \dots, O_k ，它们的指标分别用 $\text{ind } O_1, \dots, \text{ind } O_k$ 来记，则

$$\sum_{i=1}^k \text{ind } O_i = \chi(M). \quad (7)$$

推论 1. 闭曲面中只有 T^2 和 K^2 上才有可能存在无奇点的向量场。

系 1. 设 M 为有边界的紧曲面，若其上的可微向量场 X 与 M 的边界处处横截相交或处处相切，且只有有限个奇点，则定理 1 对 X 也成立。

推论 2. 在 H_2 与 B_2 上也可能存在无奇点的向量场 X ，如果 X 满足系 1 中的边界条件。

下面简要介绍有关流形上动力系统的七个问题，这些问题是研究曲面动力系统所必须知道的知识。

I. 轨道空间

前面已经提到， M 上的动力系统 φ 的轨线充满整个 M ，不同的轨线没有公共点。今把 M 上两点属于同一轨线看成是一种等价

关系, 则 M 被除于这种等价关系所得的商空间 V 称为 φ 的轨道空间, 记为 $V = M/\varphi$. 我们有:

定理 2. 曲面 M 上流 φ 的轨道空间 V 是连通一维流形, 具有可数基. 如果 φ 没有奇点, 则 V 中每一点的余集是一开集.

但即使是十分简单的曲面动力系统, 它的轨道空间也可能不是 Hausdorff 空间, 并且往往很难用一维图形把它恰当地表示出来. 例如图 2.1(a) 中所给的既无奇点亦无闭轨的平面动力系统, 其轨道空间只能用图 2.1(b) 或 (c) 之一来表示, 其中诸点 a, b, c, d 依次表示图 2.1(a) 中 A, B, C, D 诸点所在的轨线. 又图 2.1(b) 中的 $f(x)$ 表示 R 上开区间 $(a, +\infty)$ 的一个增同胚, 我们约定把 x 与 $f(x)$ 等同为一点. 图 2.1(c) 中铅直线下端的箭头表示其下端是开的, 但可进入 a 或 b 的任意小邻域. 由此可见在这个例子里, 轨道空间 V 中点 a 的任一邻域与点 b 的任一邻域必有公共点, 即 V 不是 Hausdorff 空间.

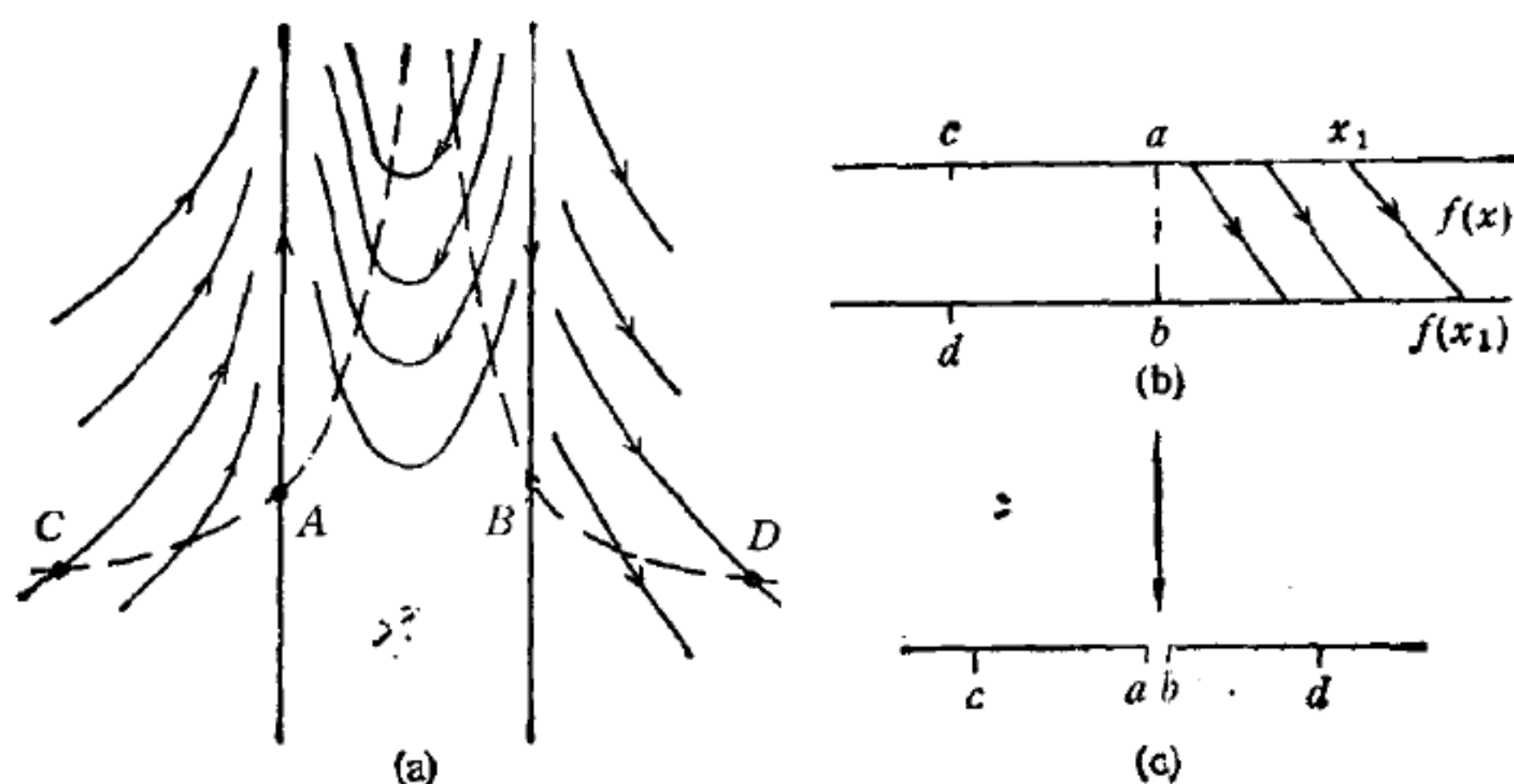


图 2.1

至于如图 2.2 所示的平面动力系统, 轨线 γ_1, γ_2 与奇点 O 所对应的轨道空间中的三点 P_1, P_2, P_0 的任何两点都不能用邻域来分开, 并且要象前例中那样用一个一维图形来表示轨道空间 V 也不

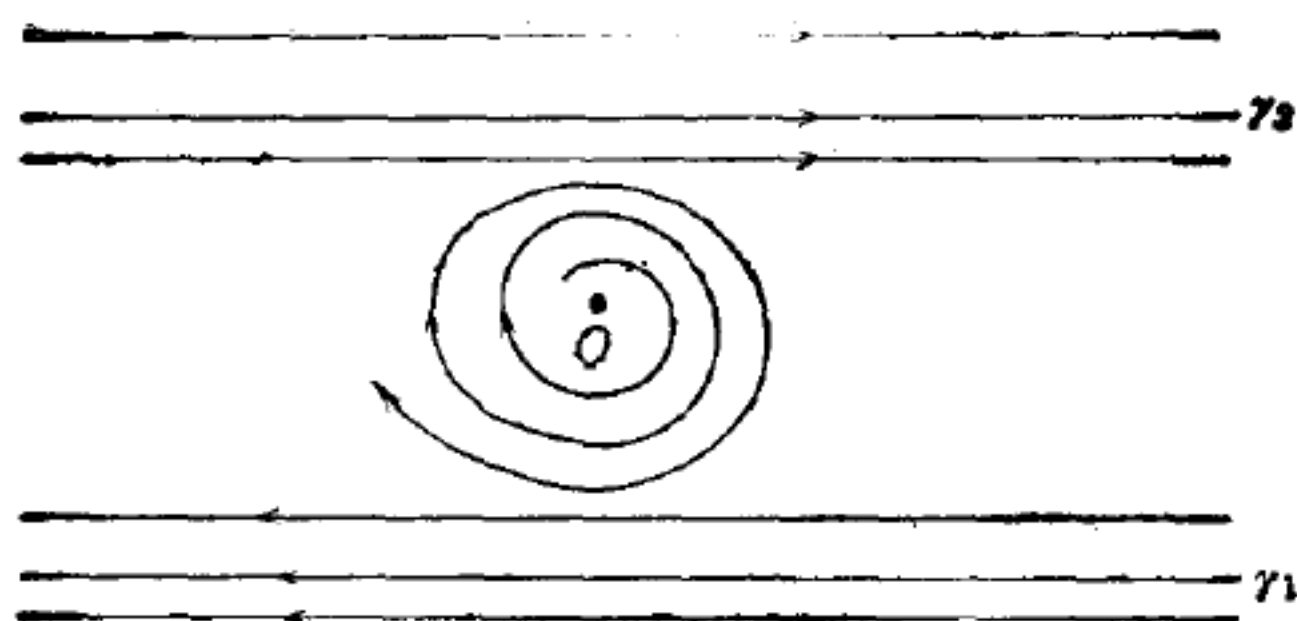


图 2.2

知道怎样画法。看来表示这个动力系统的轨道空间最好的办法还是用图 2.2, 只要我们约定“每一轨线都当做一点看待”, 并且知道这种新的点在轨道空间中的邻域是什么。

熟知的是: 一个连通仿紧一维流形必微分同胚于 S^1 , R , $[0, 1]$ 或 $[0, 1)$ (见[3])。但若在图 2.1(b) 的一维流形中先取 $f = f_1(x) = x^3$, 再取 $f = f_2(x) = x^2$, 则易见所得的两个一维非 Hausdorff 流形不是 C^1 微分同胚的, 因为 $f_1^{-1}(f_2(x)) = x^{\frac{2}{3}}$, 它在 $x = 0$ 不可微。换言之, 图 2.1(b) 所示的拓扑空间具有两个非微分同胚的光滑结构。但是要在 Hausdorff 空间中举出一个这样的例子却是非常困难的(见[4]第六章)。

II. 离散动力系统

设 $\phi(x)$ 是流形 M 到它自己的一个同胚, 则 $\{\phi^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 称为 M 上的离散动力系统。显见若 $\varphi(t, x)$ 是流形 M 上的动力系统, 则对任一 $t \neq 0$, $\{\varphi(kt, x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 也是 M 上的离散动力系统。事实上, M 上的离散动力系统乃是整数群 \mathbb{Z} 在 M 上的作用: $\mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ 。离散动力系统除了有许多与连续动力系统类似的性质, 如周期点, 极限集等以外, 我们还可以利用它的轨道(实际上, 每一轨道都是可数无限多个点所构成的双向无限点列) 定义等价关系和由

此而得到的轨道空间。这时，轨道空间与原空间维数相同。如：

$$\begin{aligned} S^1 &= R/Z, \quad \dot{H}_2 = S^1 \times R = R^2/Z \times \{0\}, \\ T^2 &= \dot{H}_2/Z = R^2/Z \times Z, \end{aligned} \quad (8)$$

等等。

此外，自 20 世纪 60 年代开始蓬勃发展起来的、以 S. Smale 为首的微分动力系统理论和从 A.N. Sarkovskii 开始的区间映射理论（半动力系统）所研究的对象也是流形或区间上的离散动力系统。另外，计算数学中的叠代步骤也可以看成是半离散动力系统。它们与连续动力系统之间的另一种联系可在下一段中看到。

III. 离散动力系统的扭扩 (suspension)

在 II 中我们已经看到，可以取流形 M 上微分动力系统所确定的变换群中的一员来产生 M 上的一个离散动力系统。反过来，我们也可以由 M 上一个离散动力系统（它由某一微分同胚所产生）通过扭扩的手段而得到比 M 高一维的流形上的一个可微动力系统。

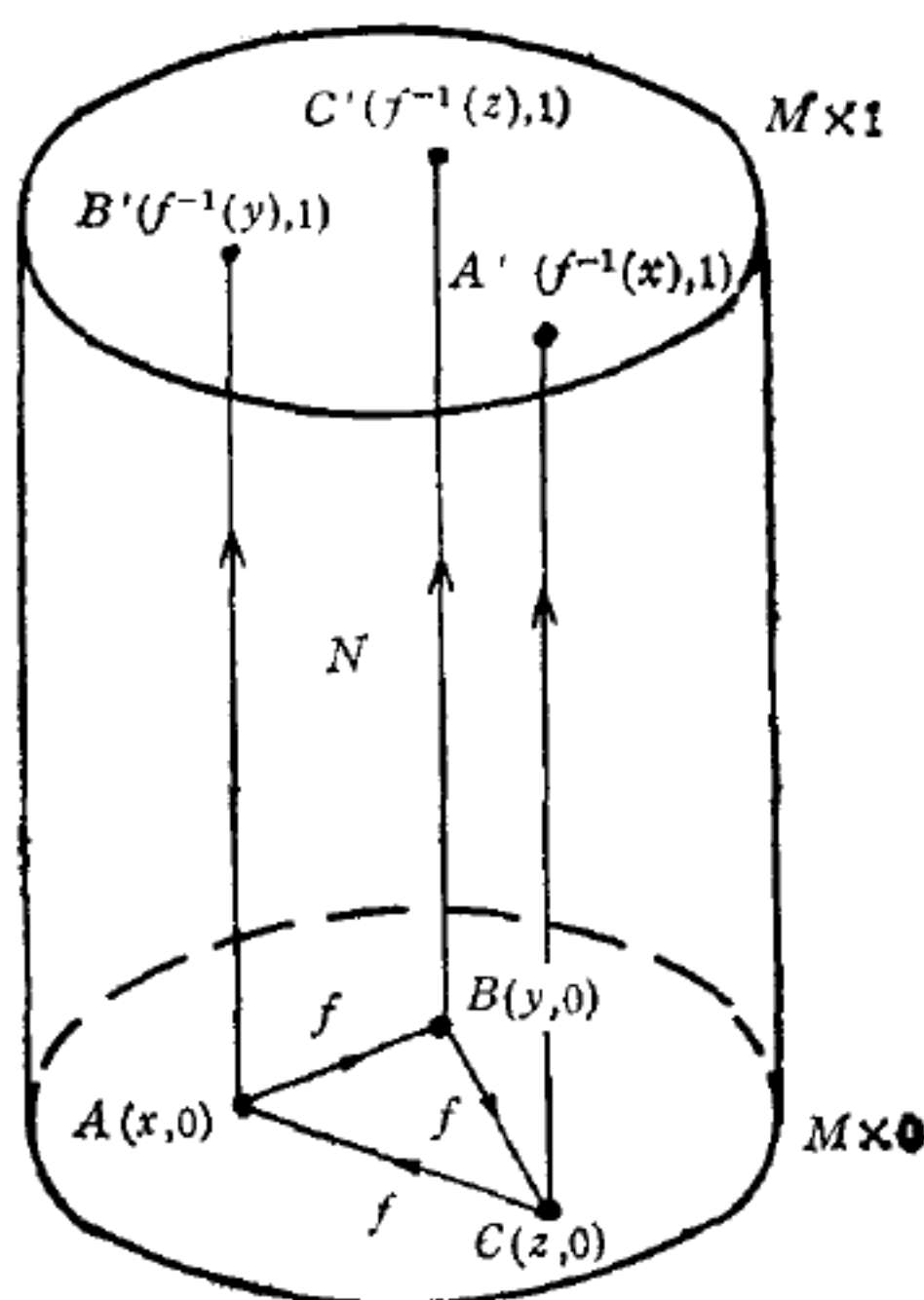


图 2.3

设 f 为微分流形 M 的一个微分同胚, 映象

$$(x, u) \rightarrow (f^{-n}(x), u + n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

定义 \mathbb{Z} 在乘积流形 $M \times \mathbb{R}$ 上的作用. 记

$$N = M \times \mathbb{R} / \mathbb{Z}$$

为商空间. 形象地说, 如果以 M 为底作高为 1 的柱体, 并且对任何 $x \in M$, 我们总把两点 $(x, 0)$ 与 $(f^{-1}(x), 1)$ 等同起来, 如此得到的空间就同胚于 N . N 上的动力系统 X 以平行于柱面的导线的直线段来构成它的轨线, 没有奇点. X 在 N 中的轨线与 f 在 M 中的 (离散) 轨道之间存在 1—1 对应, X 的周期轨线对应于 f 的周期点. 例如, 若 $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = x$, 则 x 是 f 的一个周期点. 按 (9) 式, 图 2.3 中的 $A(x, 0)$ 应等同于 $A'(f^{-1}(x), 1) = A'(z, 1)$, $B(y, 0)$ 应等同于 $B'(f^{-1}(y), 1) = B'(x, 1)$, $C(z, 0)$ 应等同于 $C'(f^{-1}(z), 1) = C'(y, 1)$, 故 $AB'BC'CA'$ 是扭扩动力系统的闭轨. 我们称 N 为 M 借 f 所得到的扭扩流形. 而 X 为 f 的扭扩场, 可用 $\frac{\partial}{\partial u}$ 表示之.

定义 2. 设 f_1, f_2 是把流形 M_1 嵌入流形 M_2 的两个映射. 如果存在同伦映射 $F: M_1 \times I \rightarrow M_2$, 其中 $I = [0, 1]$, 使得 $F(x, 0) = f_1(x)$, $F(x, 1) = f_2(x)$ 对 $x \in M_1$, 则称 f_1 合痕于 f_2 .

合痕的概念和理论在曲面的粘合和分类问题上很有用处, 读者可参阅 [4] 的第八、九两章. 这里只举三个简单的例子, 说明合痕与扭扩之间的联系.

例 1. S^1 到它自己的微分同胚 f 如果保持定向, 则 f 合痕于恒等映射; 如果 f 逆转定向, 则它合痕于对称映射 $\theta \rightarrow -\theta$, 这时 f 有两个不动点.

例 2. S^1 到自己的微分同胚 f 的扭扩流形 N 微分同胚于 T^2 , 当 f 保持 S^1 的定向时; N 微分同胚于 K^2 , 当 f 逆转 S^1 的定向时. 在后一情况扭扩场有两个周期为 1 的周期轨道.

例 3. 若 M 的微分同胚 f 合痕于恒等映射, 则它的扭扩流形

同构于乘积空间 $M \times S^1$.

IV. 动力系统的乘积与分解

定义 3. 设 $f_i: R \times M_i \rightarrow M_i$ ($i = 1, 2$) 是两个动力系统, 则在乘积流形 $M_1 \times M_2$ 上由

$F(t, x \times y) = f_1(t, x) \times f_2(t, y)$, $t \in R$, $x \in M_1$, $y \in M_2$ 所定义的动力系统 $F: R \times M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \times M_2$ 称为两动力系统 f_1 与 f_2 的乘积.

例 4. R 上的流 $\varphi_k(t, x) = e^{kt}x$ 是向量场 $kx \frac{\partial}{\partial x}$ 或定常方程 $\frac{dx}{dt} = kx$ 的轨线, 故一共只有三条, 即原点 (奇点), R^+ 和 R^- . 今若对非零实数 k_1, k_2 作 $\varphi_{k_1}(t, x)$ 与 $\varphi_{k_2}(t, y)$ 在 R^2 上的乘积流, 则得平面上的向量场 $k_1x \frac{\partial}{\partial x} + k_2y \frac{\partial}{\partial y}$, 或定常方程组

$$\frac{dx}{dt} = k_1x, \quad \frac{dy}{dt} = k_2y.$$

随着 $k_1k_2 > 0$ 或 < 0 , 我们可以得到具结点或鞍点的平面轨线族.

例 5. R 上的流 $\varphi(t, x) = e^t x$ 与 S^1 上的旋转 $\psi(t, y) = y + \theta t$ 的乘积是圆柱 $R \times S^1$ 上的流 f , 它有唯一的闭轨 $\{0\} \times S^1$, 而一切其它轨线都是柱面上的螺线, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时每一螺线都以此闭轨为其极限集, 即 $\{0\} \times S^1$ 是 f 的唯一的 (不稳定) 极限环.

例 6. S^1 上的旋转 $\varphi_1(t, x) = x + \theta_1 t$ 与另一 S^1 上的旋转 $\varphi_2(t, y) = y + \theta_2 t$ 的乘积是环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 上的流 $\varphi(t, x, y) = (x + \theta_1 t, y + \theta_2 t)$. 当 θ_1/θ_2 为有理数时称为有理流, θ_1/θ_2 为无理数时称为无理流. T^2 上的有理 (无理) 流也可以看成是 S^1 的有理 (无理) 旋转所产生的离散动力系统的扭扩. 熟知的是: 有理

流的轨线全是闭轨,而无理流的任一轨线在 T^2 上为遍历,即它的闭包是整个环面。

由例 4 可以看出,虽然因子空间中的动力系统的轨线族只有唯一的拓扑结构,但乘积流的轨线族却可以有不同的拓扑结构。

定义 4. 设 $f: R \times M \rightarrow M$ 是 M 上一动力系统, $\alpha: R \rightarrow R$ 是 R 的连续自同构 $t \rightarrow \alpha t$, $h: M \rightarrow N$ 为一同胚映射,则 $g = hf(\alpha h)^{-1}$ 是 N 上一动力系统,称 g 为由 f 借助于 (α, h) 诱导而得的动力系统。

例 7. 设 $h: R \times S^1 \rightarrow R^2 \setminus \{0\}$ 由

$$h(x, \theta) = e^{i\theta}, x \in R, \theta \in S^1$$

所定义, α 为恒等映射, f 是例 5 中 $R \times S^1$ 上的乘积流, 则 g 是 $R^2 \setminus \{0\}$ 上的动力系统, 若再规定 O 为 g 的奇点, 则 g 便成为 R^2 上的动力系统, 它有唯一的(稳定)奇点 O , 唯一的(不稳定)极限环, 即单位圆, 其它的轨线都是螺线。

最后提一下向量场在覆盖映射之下的提升 (lifting). 设 $f: \hat{M} \rightarrow M$ 为一覆盖映射, X 为 M 上的向量场, 则在 \hat{M} 上存在唯一的向量场 \hat{X} , 使

$$f^T \cdot \hat{X} = X \cdot f,$$

这里 f^T 是 f 所诱导出来的 $T\hat{M}$ 到 TM 上的映射. 又若 $\gamma = f\hat{\gamma}$, 则 $\hat{\gamma}$ 是 \hat{X} 的积分线当且仅当 γ 是 X 的积分线, \hat{X} 称为 X 在 \hat{M} 中的提升. 关于提升的其它性质可参阅[11].

V. 动力系统的等价

今介绍不同动力系统之间的三种意义不全相同的等价性。

a. 拓扑共轭

定义 5. 设 $f: M \rightarrow M$ 与 $g: N \rightarrow N$ 分别为两个流形 M 与 N 上的同胚映射, 或由它们所产生的离散动力系统. 如果存在同胚 $h: M \rightarrow N$ 使得 $hf = gh$, 则称 f 与 g 为拓扑共轭. 如果 f, g, h 皆为微分同胚, 例如都属于 $C^r(r \geq 1)$, 则称 f 与 g 为 C^r 共轭。

拓扑共轭将轨线映到轨线, 周期轨道映到周期轨道。但微分共轭的要求则更苛刻。例如, $x \mapsto \frac{1}{2}x$ 与 $x \mapsto \frac{1}{3}x$ 不是微分共轭。所以即使当 f 与 g 都是微分同胚时, 我们通常也只研究它们是否为拓扑共轭的问题。

b. 连续流的流等价

定义 6. 设 φ 与 ψ 分别为流形 M 与 N 上的流, $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 由 $t \mapsto \alpha t$, $\alpha > 0$ 定义。 $h: M \rightarrow N$ 是一同胚映射。 如果 $h\varphi = \psi h\alpha$, 则称 φ 与 ψ 为流等价。

显见, 连续动力系统的流等价相当于离散动力系统的拓扑共轭。但是由于 h 不但把奇点映到奇点, 开(或闭)轨线映到开(或闭)轨线, 而且它还保持闭轨的周期之间的比例。所以有时甚至两个流的相图有相同的拓扑结构, 但却非流等价。由此可见, 要求两个动力系统为流等价仍嫌过于苛刻。下面的等价性要比流等价的要求较弱一些。

c. 拓扑等价

定义 7. M 上的流 φ 与 N 上的流 ψ 称为在同胚 $h: M \rightarrow N$ 之下为拓扑等价, 如果 h 把 φ 的轨线映到 ψ 的轨线, 并且保持定向。 M 上的两个同胚 f 与 g 称为是拓扑等价, 如果存在 M 的另一同胚映射, 它把 f 的轨道映到 g 的轨道。

例 8. 稳定焦点邻域中的轨线图拓扑等价于稳定结点邻域中的轨线图。映射 $x \mapsto \frac{1}{2}x$ 与 $x \mapsto \frac{1}{3}x$ 是拓扑等价的。

不难证明 S^1 旋转 $\frac{1}{7}$ 周与旋转 $\frac{2}{7}$ 周是拓扑等价的, 但却不是拓扑共轭。关于在什么条件下可由离散动力系统的拓扑等价推出拓扑共轭的问题, 可以参考[12]。

对于例 6 中 T^2 上的有理流与无理流, 我们有:

定理 3. T^2 上一切有理流都是流等价。但对无理数 α 与 β , T^2 上的 α 无理流与 β 无理流为拓扑等价当且仅当存在以整数为

元素的二阶方阵 A 使得 $A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ (证明见[8]).

VI. 流形上轨线的分类

流形 M 上连续动力系统的轨线也和平面动力系统一样, 可以分为奇点、闭轨线和开轨线三种. 但现在开轨线中又有两类本质不同的轨线, 即一种是 R 到 M 中嵌入映射的象; 另一种则仅为单射浸入的象, 例如 T^2 上无理流的任一轨线就属于这一类.

其次, 按通常常微定性理论或动力系统专著上对于轨道回归性的定义来看, 奇点和周期轨线都具有回归性或非游荡性[8],[10]. [10]第五章还对一般度量空间中的非游荡运动作如下的细分:

奇点 \subset 周期运动 \subset 拟周期运动 \subset 概周期运动 \subset 回复运动 $\subset P$ 式稳定运动 \subset 非游荡运动.

其中包含范围最广的非游荡运动的定义如下:

定义 8. 动力系统 $f(q, t)$ 中的点 p 称为非游荡点, 如果对于任一包含它的邻域 $U(p)$, 总能找到足够大的 $|t|$, 使

$$U(p) \cap f(U(p), t) \neq \emptyset.$$

由此可见, 虽然从几何图形来看, 周期轨线应与普通轨线属于同一类, 但是从动力系统的观点来看, 则它应和 T^2 上处处稠密的无理流的轨线属于同一类, 因为它们都是非游荡的.

我们知道, 常微定性理论的创始人 H. Poincaré 在研究一般说来是无法求得通积分的一阶常微分方程(组)时, 人为地引进时间参数 t , 而把一阶方程(组)变为一阶定常动力系统, 把积分线变为轨线. 换言之, 即引进运动的观点. 这是一个伟大的创举, 自此以后的一百年来, 常微定性理论和抽象动力系统的理论就有了蓬勃的发展. 然而就定常方程组来说, 知道了原来未曾引进 t 时的方程(组)的积分线的全局拓扑结构以后, 可以说问题也就解决得差不多了¹⁾. 如果不论对于什么问题都要抓住 t 不放的话, 有时也

1) 当然, 在讨论奇点与孤立闭轨的稳定性, 等时中心等问题时仍须考虑时间 t 的大小及正负.