第1章　行　列　式

行列式(determinant)的概念是人们在求解线性方程组的过程中产生的,是一个重要的数学工具,在数学本身及其他学科的研究中都有广泛的应用.本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　数域与排列

在学习 n 阶行列式之前,我们先引入数域与排列的概念.

1.1.1　数域

我们知道,数是数学的一个最基本的概念,一切计算最终都归结为数的代数运算.因此,要定量地研究一个问题,就必须考虑所研究对象的取值范围.例如,方程 $x^2+1=0$,不仅在有理数范围内无解,就在实数范围内也无解,而在复数范围内有解,且解为 $\pm \mathrm{i}$.由此可见,同一个问题在不同的数的取值范围内可以有不同的结论.为了对不同的数的范围统一地讨论一些问题,提取有理数集、实数集、复数集所共有的特征,便有以下数域的概念.

定义 1.1.1　设 P 是至少含有两个不同复数的数集,如果 P 中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数,那么 P 就称为一个数域(field of numbers).

显然,有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域,而整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域,因为任两个整数的商不一定是整数.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算的结果都在 P 中,我们就说数集 P 对这一运算是封闭的.因此数域也可定义为:至少含有两个不同数的数集 P,如果对于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)的运算是封闭的,则称 P 为一数域.

性质 1.1.1　任意一个数域 P 必含 0 和 1.

证　由数域的定义知,P 中必含有两个不同数 a,b,所以 a,b 至少有一个不为零,不妨设 $b\neq 0$,根据数域 P 对于加法、除法运算的封闭性,所以 $b-b\in P$, $\dfrac{b}{b}\in P$,即 $0\in P,1\in P$.

性质 1.1.2　任何数域 P 都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证　P 为数域,则 P 中必含 0 和 1,再由 1 通过加法可得到一切正整数,而用 0 减去正整数可得到一切负整数,因而全体整数集 $\mathbf{Z}\subset P$,通过整数的除法可得一切有理数,即 $\mathbf{Q}\subset P$.

如果所讨论问题中只涉及数的加、减、乘、除运算且对其运算满足封闭性,我们就可以认为该问题所涉及的数的取值范围属于某一数域.

1.1.2　排列

把 $n(n\geqslant 2)$个不同的元素按一定的顺序排成一列,称为这 n 个元素的一个排列(permutation).若取 n 个不同的元素为 $1\sim n$ 这 n 个自然数,则有下面的定义.

定义 1.1.2　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$,称为一个 n 元排列.

例如,自然数 1,2,3 组成的 3 元排列共有六种:123,132,213,231,312,321.通常由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有 n 元排列的种数用 P_n 表示,容易计算得,$P_n=n(n-1)\cdots 2\times 1=n!$.

显然,$123\cdots n$ 是一个 n 元排列,它的特点是具有自然顺序,即从小到大递增的顺序,我们把这个排列称为自然排列或标准排列,而除此之外的其他的 n 元排列都或多或少地违反了这个顺序.

定义 1.1.3　在一个 n 元排列 $p_1\cdots p_k\cdots p_s\cdots p_n$ 中,按照排列中的顺序任取两个数 $p_k,p_s(1\leqslant k<s\leqslant n)$.若 $p_k>p_s$,那么 p_k,p_s 就构成了一个逆序,一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如,5 元排列 51423 中构成逆序的数对有 51,54,52,53,42,43,因此 $\tau(51423)=6$.

下面是计算 n 元排列的逆序数的方法.

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果位于 p_i 后面且小于 p_i 的数有 t_i 个,则元素 p_i 的逆序数为 t_i,那么全体元素的逆序数之和就是这个排列的逆序数,即 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$.

例 1.1.1　求(1) $\tau(52413)$;　(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解　(1) 在排列 52413 中,

5 的后面比 5 小的数有四个(2,4,1,3),故逆序数为 4;

2 的后面比 2 小的数有一个(1),故逆序数为 1;

4 的后面比 4 小的数有两个(1,3),故逆序数为 2;

1 为最小的数,故逆序数为 0;

3 排在最末位,故逆序数为 0.

于是排列的逆序数 $\tau(52413)=4+1+2+0+0=7$.

(2) 如同(1)中的分析,可得

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列(odd permutation),逆序数为偶数的排列称为偶排列(even permutation).

把一个排列中某两个元素的位置互换,而其余元素的位置不动,就得到了一个新的排列,这种变换称为对换(interchange).例如,经过 1,2 对换,排列 51423 就变成了 52413,从前面的例子知:51423 为偶排列,52413 为奇排列,施行一次对换改变了排列的奇偶性.事实上,这并不是偶然的.关于排列的奇偶性我们有以下的性质.

性质 1.1.3 排列中任意两个元素作对换,排列改变奇偶性.

证 先考虑相邻对换,即排列中对换的两个元素是相邻的,这时排列 $\cdots ij\cdots$ 经 i,j 对换后变成新的排列 $\cdots ji\cdots$.这里"…"表示那些位置不变的数,在这两个排列中,不同的只是 i,j 的次序,其余元素的逆序数没有变化.

若 $i<j$,则对换后的排列中元素 j 的逆序数就增加了一个,即 $\tau(\cdots ji\cdots)=\tau(\cdots ij\cdots)+1$;若 $i>j$,则对换后的排列中元素 j 的逆序数就减少了一个,即 $\tau(\cdots ji\cdots)=\tau(\cdots ij\cdots)-1$.所以,相邻对换改变排列的奇偶性.

再考虑一般情形.设对换的两个元素 i 与 j 中间还有 s 个元素($s>0$),即排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots. \tag{1.1.1}$$

这时,把元素 i 依次与右边的 $s+1$ 个元素 $k_1k_2\cdots k_sj$ 进行相邻对换,得

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots, \tag{1.1.2}$$

再把元素 j 依次与左边的 s 个元素 $k_sk_{s-1}\cdots k_1$ 进行相邻对换,于是经过 $2s+1$ 次相邻对换,完成了元素 i 与 j 的对换.而每作一次相邻对换排列的奇偶性改变一次,现经过奇数次相邻元素的对换,最终必改变排列的奇偶性.

推论 1.1.1 奇、偶排列变成标准排列的对换次数依次为奇数和偶数.

证 显然任一排列都可通过若干次对换变成标准排列,由排列奇偶性的性质知,对换的次数就是排列奇偶性变换的次数,由于标准排列为偶排列(逆序数为 0),由此可知奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数,偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

(**思考** 设 n 元排列 $\cdots i\cdots j\cdots$ 的逆序数为 k,那么,n 元排列 $\cdots j\cdots i\cdots$ 的逆序数为 $k+1$ 或 $k-1$ 吗?)

练 习 1.1

1. 判断下列数集是否是数域,并加以证明.

(1) $P_1=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$;

(2) $P_2=\{a+b\mathrm{i}\mid a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$.

2. 求下列各排列的逆序数.

(1) 3 1 5 4 6 2;　　(2) 3 6 5 4 1 2;

(3) 7 6 5 4 3 2 1;　　(4) 6 7 4 5 3 1 2.

3. 选取 i 与 k,使

(1) 1 2 7 4 i 5 6 k 9 成为偶排列;

(2) 1 i 2 5 k 4 8 9 7 成为奇排列.

4. 讨论排列 1 3 5 … $(2n-1)$ 2 4 6 … $(2n)$的奇偶性.

1.2　行列式的定义

从这节开始,我们总是在某一固定的数域 P 上讨论问题,所谈到的数均指这个数域 P 中的数.在给出 n 阶行列式的定义之前,首先让我们简单回顾一下二阶、三阶行列式的概念.

1.2.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中,我们曾学过二元和三元线性方程组的求解方法.例如,二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\tag{1.2.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时,用加减消元法可求得(1.2.1)的唯一解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\\[2ex] x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

为了方便记忆,引入记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\tag{1.2.3}$$

(1.2.3)称为二阶行列式,其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的元素.a_{ij}的第一个下标 i 表示它所在行的序号,称为**行标**,第二个下标 j 表示它所在列的序号,称为**列标**.例如,a_{21}就表示位于第 2 行、第 1 列处的元素.

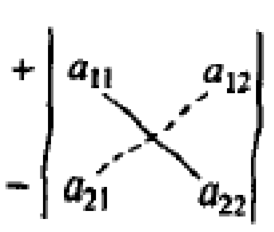

图 1.2.1

上述二阶行列式的定义,也可用对角线法则来定义,如图 1.2.1 中实线称为行列式的主对角线,虚线称为行列式的次对角线,即二阶行列式等于它的主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积.

根据定义,(1.2.2)中分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq0$ 时,方程组(1.2.1)的唯一解就可写为 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

上述公式中的 D 称作方程组(1.2.1)的**系数行列式**(determinant of coefficient matrix),$D_j(j=1,2)$就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式.

同样地,对三元线性方程组也有类似的结论.对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}\tag{1.2.4}$$

我们引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\tag{1.2.5}$$

显然,三阶行列式是由 9 个数排成 3 行 3 列构成的,它表示一个数,其值为 6 项代数和,其中正负项各半,每项均为取自行列式中位于不同行不同列的三个元素的乘积.其计算规律遵循图 1.2.2 所示的**对角线法则**.

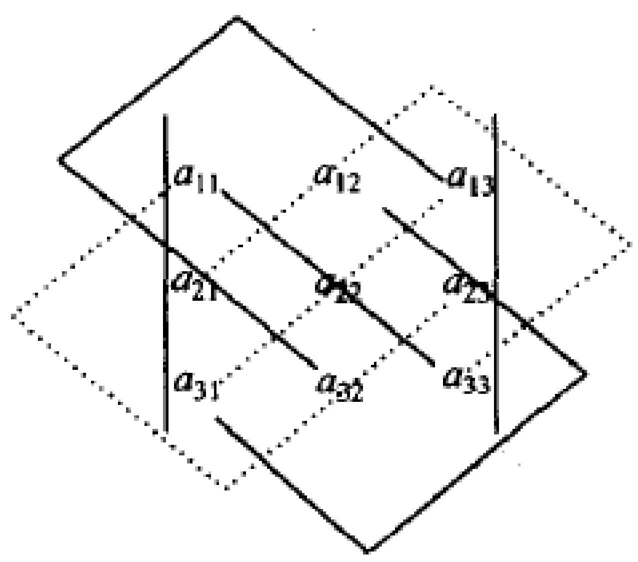

图 1.2.2

三条实线看作是平行于主对角线的联线,三条虚线看作是平行于次对角线的联线,实线上的三个元素的乘积赋予正号,虚线上的三个元素的乘积赋予负号.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

那么,当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2.4)的唯一解就可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2.1　求解方程组$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1. \end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1+1\times1\times(-1)-1\times(-5)\times1-1\times(-4)\times1-2\times(-1)\times3=-8\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5+12-2-5+8+3=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+3-1-2-1+6=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=10-8-1+5-4+4=6,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad z=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}.$$

综上所述,在引入了二阶、三阶行列式的概念以后,二元、三元线性方程组的解可以公式化.为了把这一思想推广到 n 元线性方程组,我们引入 n 阶行列式的概念.

1.2.2　n 阶行列式

在给出 n 阶行列式定义之前,让我们先分析一下三阶行列式的定义式(1.2.5)的结构.不难看出:

(1) (1.2.5)中右边的每一项都是取自行列式中不同行不同列的三个元素的乘积,因此,右边的任一项除正负号外均可写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$的形式,其中 $p_1\ p_2\ p_3$ 为一个三元排列.

(2) (1.2.5)中右边每一项的三个元素的行标排成标准排列 123 时,列标都是 1,2,3 的某一排列,这样的排列共有 3! 种,故三阶行列式共有 6 项.

(3) 容易算得,在(1.2.5)中,带正号的三项列标排列 123,231,312 全为偶排列;带负号的三项列标排列 132,213,321 全为奇排列.

因此,三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.2.1 设有数域 P 中 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,排成一个 n 行 n 列的正方形阵列,在正方形阵列的两边用竖线段括起来成为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.6}$$

(1.2.6)称为 n 阶行列式,它表示一个数,其值为

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有的 n 元排列求和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})_{n\times n}$或 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij}称为行列式D 的元素.

由定义 1.2.1 知,n 阶行列式值等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的代数和,这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一 n 元排列,当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时,该项前面带正号;当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时,该项前面带负号.

当 $n=2,3$ 时,按此定义的二阶、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的.但当 $n>3$ 时,已不再有相应的对角线法则.一阶行

列式 $|a_{11}| = a_{11}$，注意不要和绝对值记号相混淆.

例 1.2.2　(1) 计算 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，求 x^3 和 x^4 的系数.

解　(1) 在行列式中只有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素不为零，且恰处于不同行不同列，所以行列式中不为零的项只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}$，这时该项列下标排列的逆序数 $\tau(23\cdots n1) = n-1$，于是 $D = (-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1} = (-1)^{n-1}n!$.

(2) 根据行列式的定义，仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3 项，这时该项列下标排列的逆序数为 $\tau(2134) = 1$，故 x^3 的系数为 -1. 同理，x^4 的系数为 2.

例 1.2.3　证明 n 阶上三角行列式(其主对角线以下的元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由定义 1.2.1 知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

在此行列式中，当 $p_i < i$ 时，元素 $a_{ip_i} = 0$，从而在定义式中，可能不为零的项中的任意因子 a_{ip_i} 必须满足 $p_i \geqslant i$，即 $p_1 \geqslant 1$，$p_2 \geqslant 2$，…，$p_{n-1} \geqslant n-1$，$p_n \geqslant n$. 而能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，$\tau(12\cdots n) = 0$. 故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.2.4 计算 n 阶次下三角行列式(其次对角线以上的元素都为零)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 如同例 1.2.3 的分析,在 D_n 的 $n!$ 项中,仅剩下一项$(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$有可能不为零,该项列标排列的逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

(**思考** 在一个 n 阶行列式D 中等于零的元素如果比 n^2-n 还多,则这个行列式的值必为零,为什么?)

定义 1.2.1 表明,为了计算 n 行列式,首先作位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积(显然,所有这样的乘积共有 $n!$ 项),并把构成这些乘积的各个元素的行标排成标准排列,然后由其列标构成的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数确定每一项的符号,即

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

最后求代数和.由于数的乘法满足交换律,所以我们可以通过有限次元素的交换,把构成乘积的元素的列标排成标准排列,即

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

因 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换成标准排列与标准排列对换成 n 元排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的对换次数相同,故由 1.1 节的推论知,排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列$q_1q_2\cdots q_n$ 有相同的奇偶性,即

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)},$$

于是有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又因为,若 $p_i=j$,则 $q_j=i\,(a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj})$,可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定,反之亦然.因此,也可如下定义 n 阶行列式.

定义 1.2.1′　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

其中 $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有的 n 元排列求和，即行列式的每一项的列标排成标准排列时，该项的符号由行标构成的排列的奇偶性决定.

练　习　1.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ a+c & c \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \end{vmatrix}$　$(\mathrm{i}^2=-1)$.

2. 设方程为 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & x+1 \\ x & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$，试求其根.

3. 在 6 阶行列式中，$a_{21}a_{33}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号？

4. 求解下列各题：

(1) 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$；

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

1.3　行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题.由定义知，一个 n 阶行列式共有 $n!$ 项代数和，每一项又是 n 个数的乘积，若按定义式计算它就需要做 $n!(n-1)$ 次乘法，当 n 较大时，$n!(n-1)$ 是一个相当大的数字，于是直接按定义计算行列式的值几乎成了不可能的事.因此，我们下面介绍行列式的性质，利用这些性质来简化行列式的计算；另一方面，这些性质在行列式的理论研究中也发挥着重要的作用.

将行列式 D 的行和列互换后所得到的行列式，称为 D 的转置行列式

(determinant of transpose matrix),记作 D'或D^{T},即若

$$D=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$的转置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由定义 1.2.1′知

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}b_{q_11}b_{q_22}\cdots b_{q_nn} \\ &= \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}. \end{aligned}$$

又由定义 1.2.1 知

$$D = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n},$$

所以 $D'=D$.

例 1.3.1 计算 n 阶下三角行列式(其主对角线以上的元素都为零)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由性质 1.3.1 及例 1.2.3 的结果有

$$D = D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可以得到如下结论:**上三角行列式与下三角行列式的值都等于其各自主对角线上 n 个元素的乘积**. 性质 1.3.1 说明行列式中行与列具有同等的地位,凡是对行成立的性质,对列也成立,反之亦然. 因而下面讨论行列式性质时,只对行的性质加以证明.

性质 1.3.2 互换行列式两行(列),行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$交换 k , r $(k<r)$两行所得到的,即当 $i\neq k,r$ 时,$b_{ij}=a_{ij}$;当 $i=k,r$ 时,$b_{kj}=a_{rj}$, $b_{rj}=a_{kj}$. 由定义 1.2.1 有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_k\cdots p_r\cdots p_n)} b_{1p_1}\cdots b_{kp_k}\cdots b_{rp_r}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_k\cdots p_r\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{rp_k}\cdots a_{kp_r}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_k\cdots p_r\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{kp_r}\cdots a_{rp_k}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots k\cdots r\cdots n$ 为标准排列,这里"…"表示位置不动的元素. 由对换改变排列的奇偶性知

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_k\cdots p_r\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_r\cdots p_k\cdots p_n)},$$

所以 $D_1=-\sum (-1)^{\tau(p_1\cdots p_r\cdots p_k\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{kp_r}\cdots a_{rp_k}\cdots a_{np_n}=-D$.

推论 1.3.1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

(*思考* 在 n 阶行列式中,把第 1 列移到最后一列,而其余各列保持原来的次序向左移动,问行列式的值如何变化?)

性质 1.3.3 行列式的某一行(列)中的所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式. 也就是说,行列式的某一行(列)中的所有元素的公因子 k 可以提到行列式符号的外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3.4 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式值为零.

性质 1.3.5 行列式中如果某一行(列)(如第 i 行)的元素都是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.3.2 计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 由性质 1.3.5 得

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500+3 & 200+1 & 300-2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-70.$$

性质 1.3.6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 j 行加到第 i 行上,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(**思考** 在 n 阶行列式中,如果从第 2 列开始,每列加上前一列,而第 1 列加上最后一列,问行列式的值如何变化?)

性质 1.3.3～1.3.6 请读者自行证明.

利用行列式的性质可以简化行列式的计算，这是因为利用上述性质总可以将任意行列式化为上(下)三角行列式，从而使 n 阶行列式的计算变得既简便又程序化. 下面我们通过例子来说明如何利用这些性质计算行列式. 为了表述方便，我们用 $r_i(c_i)$表示行列式的第 i 行(列)；交换 i,j 两行(列)记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；第 i 行(列)乘以 k 记作$k\times r_i(k\times c_i)$；第 i 行(列)提取公因子 k 记作$r_i\div k(c_i\div k)$；把第 j 行(列)乘以 k 倍加到第i 行(列)记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

例 1.3.3　计算 $D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix}$.

解　$D\xlongequal{r_4\div\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+2r_1}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+6r_2]{r_3+7r_2}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+3r_3}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times(-1)\times(-3)\times34=-51.$$

该题先从第 4 行提出公因子$\frac{1}{2}$，把 D 化为元素全为整数的行列式，避免了复杂的分数运算，然后利用行列式的性质将 D 化为上三角行列式.

例 1.3.4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 $$D_n \xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{n}c_i} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

对于每行(列)元素的和都相等的行列式,常用的方法是,把第 2,3,$\cdots$,n 列(行)都加到第 1 列(行)上去,之后可以从第 1 列(行)提出公因子,然后再设法化成上(下)三角行列式.

例 1.3.5 计算下列行列式:

(1) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

(2) $$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant n).$$

解　(1) $$D_n \xlongequal[k=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{1}{k}c_k} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

此题中的行列式称为箭形行列式,可简单地用符号记为 $|\nwarrow|$. 其他的箭形行列式有 $|\nearrow|$, $|\searrow|$, $|\swarrow|$,它们均可以用类似的方法化为某种三角行列式.

(2) $$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_i\div a_i} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,3,\cdots,n]{c_1+c_k} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

该行列式中除主对角线上元素不同外,其余元素都是 1,所以可用行相减的方法把行列式化为箭形行列式.

例 1.3.6 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[i=1,2,\cdots,5]{(-1)\times r_i} (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d \\ a_4 & b_3 & c_2 & d & 0 \end{vmatrix}$

$= -D' = -D$,

故 $D=0$.

在一个 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中,若满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 D 为反对称行列式.本题中的 D 就是一个 5 阶反对称行列式(antisymmetric determinant).用同样的方法可以证明:**奇数阶反对称行列式的值为零**.

练 习 1.3

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

2. 若 n 阶行列式 $\det(a_{ij})=a$,则 n 阶行列式 $\det(-a_{ij})=$________.

3. 由 n $(n>1)$阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0,$$

说明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有的 n 元排列中,奇偶排列各半.

1.4　行列式按行(列)展开

简化行列式计算的另一种途径是降阶,即把高阶行列式的计算化为低阶行列式的计算.为此,先引入下面的概念.

定义 1.4.1　在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的位置排列构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**(cofactor),记作 M_{ij};把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**(algebraic cofactor),记作 A_{ij}.

例如,在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中,元素 a_{21},a_{22},a_{23} 的余子式分别为

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

而对应的代数余子式分别为

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}, \\ A_{23} &= (-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}. \end{aligned}$$

容易验证:$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$.这个结果并不是偶然的.为了把这个结果推广到 n 阶行列式,我们先证明一个引理.

引理 1.4.1　若 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的第 i 行中元素满足 $a_{ij}\neq 0$,$a_{ik}=0$ $(k\neq j)$,则 n 阶行列式 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证　(1) 当 $i=j=1$ 时,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

若 $p_1\neq 1$,则 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$.于是

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\ &= a_{11}\sum(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

(2) 当 $i\neq 1$(或 $j\neq 1$)时,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

先将行列式 D 第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行、…、第 1 行交换,交换次数为 $i-1$次;再将新行列式第 j 列依次与第$j-1$ 列、第 $j-2$ 列、…、第 1 列交换,交换次数为 $j-1$ 次.于是由行列式的性质 1.3.2 有

$$D = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1.4.1 n 阶行列式$D=\det(a_{ij})$等于它的任一行(列)的各元素与其对应元素的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n).$$

证 由行列式的性质知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据上述引理,即得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

类似可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\qquad(j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为行列式按行(列)展开法则,利用此定理,并结合行列式的性质,可以简化行列式的计算.但要指出的是,只有在行列式的某行(列)中含有较多的零时,按此行(列)将行列式展开,才可以达到简化的目的.为行文方便,按第 i 行(列)展开记为$(ri)((ci))$.

例 1.4.1　计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解　$D\xlongequal{(c_5)}2\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{(c_2)}(-2)\times4\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-2r_1}8\times\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{(c_1)} 8\times(-2)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}=96.$$

例 1.4.2 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

注 $\prod$ 是连乘的记号. $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$ 就表示满足条件 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的所有因子 (x_j-x_i) 相乘. 如

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j-x_i)=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\cdot(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$$

证 我们对行列式的阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时, $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$, 结论成立. 假设对 $n-1$ 阶行列式结论也成立, 即 $D_{n-1}=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)$.

对于 n 阶行列式 D_n, 我们有

$$D_n\xlongequal[k=n,n-1,\cdots,2]{r_k-x_nr_{k-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1-x_n & x_2-x_n & \cdots & x_{n-1}-x_n & 0\\ x_1(x_1-x_n) & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0\end{vmatrix}$$

$$=(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(c_n)}(-1)^{1+n}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)D_{n-1}$$

$$=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})D_{n-1}.$$

由假设知

$$D=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

例1.4.3 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1\cdot D_2$，其中 k 为任意正整数.

证 对行列式 D_1 的阶数 k 用数学归纳法.

当 $k=1$ 时，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}\xlongequal{(r_1)}a_{11}D_2=D_1\cdot D_2$，命题成立. 假设 $k=n-1$ 时，命题成立. 现证明命题对 $k=n$ 也成立. 将行列式 D 按第1行展开得

$$D\xlongequal{(r_1)}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r2} & \cdots & c_{rn} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,i-1} & c_{r,i+1} & \cdots & c_{rn} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,n-1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

由假设知命题对 $k=n-1$ 成立,所以

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot D_2$$

$$+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot D_2$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}\cdot D_2$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot D_2 = D_1\cdot D_2.$$

(思考

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{k1} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}=(-1)^{kr}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

为什么?)

定理 1.4.2 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0 \qquad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0 \qquad (i\neq j).$$

证　因为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+r_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(r_j)} \sum_{k=1}^{n}(a_{jk}+a_{ik})A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk},$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$.

类似地可证另一式.

综合定理 1.4.1 和定理 1.4.2,便可得到关于代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij},\qquad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij},$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 为克罗内克(Kronecker)符号函数.

例 1.4.4　已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$,求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$及 $A_{44}+A_{45}$.

解　由代数余子式的性质可得

$$\sum_{k=1}^{5}a_{4k}A_{4k}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=D=27,$$

$$\sum_{k=1}^{5}a_{2k}A_{4k}=2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0,$$

所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$, $A_{44}+A_{45}=18$.

例 1.4.5　设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解 由定理 1.4.1 可知

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&2&1\\0&-1&0&2\\0&1&3&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(c_1)}\begin{vmatrix}-1&2&1\\-1&0&2\\1&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&-2&1\\0&5&2\end{vmatrix}=9.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\-1&-1&2&1\\1&0&1&3\\-1&1&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&1&3&5\\0&-2&0&-1\\0&3&4&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(c_1)}\begin{vmatrix}1&3&5\\-2&0&-1\\3&4&5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&3&5\\0&6&9\\0&-5&-10\end{vmatrix}=-15.$$

练 习 1.4

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}5&3&-1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&-2&3&1&0\\0&-4&-1&4&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}-1&1&-1&2\\1&0&1&-1\\2&3&4&1\\-1&1&2&-2\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\-1&3&0&1\\2&-7&2&-2\end{vmatrix}$.

2. 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&a_0\\-1&x&0&\cdots&0&a_1\\0&-1&x&\cdots&0&a_2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&a_{n-2}\\0&0&0&\cdots&-1&x+a_{n-1}\end{vmatrix}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(n\geqslant2).$$

3. 已知四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 7\\ 3 & 1 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -2\end{vmatrix},$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$的值,其中 A_{ij}为D_4 中元素 a_{ij}的代数余子式.

1.5* 拉普拉斯定理

前面介绍了将行列式按一行(列)展开法则,把它推广到按多行(列)展开,这就是著名的拉普拉斯(Laplace)定理. 首先我们把余子式与代数余子式的概念推广如下.

定义 1.5.1 在 n 阶行列式$D=\det(a_{ij})$中任意选取 k 行k 列($1\leqslant k<n$),位于这些行和列的交叉处的 k^2 个元素按原来的相对位置构成的一个 k 阶行列式N,称为行列式 D 的一个k **阶子式**. 在 D 中划去这k 行k 列后余下的元素按原来的相对位置构成的一个 $n-k$ 阶行列式M,称为 k 阶子式N 的**余子式**. 如果 N 位于行列式D 的 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和$j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列,令 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$,则称 A 为k 阶子式N 的代数余子式.

例如,在五阶行列式 $D=\det(a_{ij})$中选定第一、三行和第三、四列便可得到一个二阶子式.

二阶子式 N 为

$$N=\begin{vmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}.$$

N 的余子式M 为

$$M=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{25}\\ a_{41} & a_{42} & a_{45}\\ a_{51} & a_{52} & a_{55}\end{vmatrix}.$$

N 的代数余子式A 为

$$A=(-1)^{(1+3)+(3+4)}M=-M.$$

定理 1.5.1(拉普拉斯定理)　在 n 阶行列式D 中任意选定$k(1\leqslant k<n)$行,由这 k 行元素构成的一切k 阶子式$N_1,N_2,\cdots,N_m$ 与它们所对应的代数余子式$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的乘积之和等于行列式D,即 $D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_mA_m=\sum\limits_{t=1}^{m}N_tA_t$,其中 $m=C_n^k$.

定理 1.5.1 与定理 1.4.1 的证明类似,限于篇幅,证明从略. 如例 1.4.3 直接

应用定理 1.5.1 便可得到证明(请读者自行验证).

例 1.5.1 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 在行列式 D_5 的第 2,3 行中,只有三个不为零的二阶子式,分别为

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad N_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad N_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1 = (-1)^{(2+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_2 = (-1)^{(2+3)+(1+5)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_3 = (-1)^{(2+3)+(2+5)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

所以

$$D_5 = N_1A_1 + N_2A_2 + N_3A_3 = 15.$$

例 1.5.2 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素均为零.

解 当选定行列式 D_{2n} 的第 1 行与第 $2n$ 行时,只有一个有可能不为零的二阶子式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,应用定理 1.5.1 展开行列式得

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+2n)+(1+2n)}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)},$$

利用递推关系知

$$\begin{aligned} D_{2n}&=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2 \\ &=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n. \end{aligned}$$

例 1.5.3　设 n 阶行列式 $D_1=\det(a_{ij})$，$D_2=\det(b_{ij})$，$C=\det(c_{ij})$，若 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明 $D_1\cdot D_2=C$.

证　作 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据例 1.4.3 的结果知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=D_1\cdot D_2.$$

另外，将行列式 D 的第 $n+1$ 行的 a_{i1} 倍、第 $n+2$ 行的 a_{i2} 倍、…、第 $2n$ 行的 a_{in} 倍都加到第 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 行，则行列式 D 化为

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 然后选定行列式的第 $1,2,\cdots,n$ 行，应用定理 1.5.1 展开得

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+2+\cdots+n)+(n+1)+\cdots+2n}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2n^2+n}\cdot(-1)^n\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=C,$$

所以 $D_1\cdot D_2=C$.

该例题给出了行列式的乘法法则,即乘积行列式的第 i 行第 j 列处的元素等于第一个行列式的第 i 行元素与第二个行列式第 j 列对应元素乘积之和.

例 1.5.4 设 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$,求 $D_1\cdot D_2$.

解 应用行列式的乘法法则得

$$D_1\cdot D_2=\begin{vmatrix} 1\times(-2)+2\times 1 & 1\times 1+2\times 0 \\ 3\times(-2)+4\times 1 & 3\times 1+4\times 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=2.$$

当然,该题也可以直接计算出 $D_1=-2$, $D_2=-1$,得出 $D_1\cdot D_2=2$.

例 1.5.5 设 $D_1=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,利用 D_1 与 D_2 的乘积证明等式:

$$D_1=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

证 易知 $D_2\neq 0$,而

$$D_1D_2=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ a+b+c+d & a+b-c-d & b-a+d-c & b-a-d+c \\ a+b+c+d & c+d-a-b & c-d+a-b & c-d-a+b \\ a+b+c+d & c+d-a-b & d-c+b-a & d-c-b+a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)D_2,$$

所以

$$D_1=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

*练　习　1.5

1. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

2. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} n & & & & & & & n+2 \\ & n-1 & & & & & n+1 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & 1 & 3 & & & \\ & & & 2 & 4 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & n & & & & & n+2 & \\ n+1 & & & & & & & n+3 \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素为零.

1.6　克拉默法则

现在我们介绍行列式在求解线性方程组中的应用,这里只讨论方程的个数与未知数的个数相等的情形.

设有 n 个方程构成的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

与二元、三元线性方程组相似,当它有唯一解时,其解可用 n 阶行列式简单表示,即有如下定理.

定理 1.6.1(克拉默法则)　如果线性方程组(1.6.1)的系数行列式不等于零,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组(1.6.1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \cdots, x_j = \frac{D_j}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.6.2}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将 D 中的第 j 列各元素替换成方程组(1.6.1)右端的常数列对应的元素后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 为书写简便，方程组(1.6.1)可简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n).$$

(1) 首先证明(1.6.2)是方程组(1.6.1)的解.将行列式 D_j 按第 j 列展开得

$$D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj},$$

其中 $A_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$是方程组(1.6.1)系数行列式 D 中第 j 列元素的代数余子式.故

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}\Big) \\ &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_kA_{kj} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} b_k\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\Big). \end{aligned}$$

根据代数余子式的性质知

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = D\delta_{ik}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}b_i \cdot D = b_i$，即(1.6.2)是方程组(1.6.1)的解.

(2) 然后证明(1.6.2)是方程组(1.6.1)的唯一解.

用反证法.假设 $x_1=c_1,\cdots,x_j=c_j,\cdots,x_n=c_n$ 是方程组(1.6.1)的另一个解.于是有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{1.6.3}$$

分别用 D 中第 j 列的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘(1.6.3)中各方程的两端并相加,左端为

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj}\right)c_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)c_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj}\right)c_n=D\cdot c_j,$$

右端为

$$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kj}=D_j.$$

于是 $c_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$ 与(1.6.2)为同一个解,与假设矛盾.所以(1.6.2)是方程组(1.6.1)的唯一解.

克拉默法则包含着两个结论:一是方程组有解且解是唯一的;二是方程组的解可用求解公式(1.6.2)给出.

例 1.6.1 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0,\\4x_1+9x_2+16x_3+25x_4=0,\\8x_1+27x_2+64x_3+125x_4=0.\end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\4&9&16&25\\8&27&64&125\end{vmatrix}$$

是一个四阶的范德蒙德行列式,从而得

$$D=(5-2)(5-3)(5-4)(4-2)(4-3)(3-2)=12\neq 0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&4&5\\0&9&16&25\\0&27&64&125\end{vmatrix}\xlongequal{(c_1)}\begin{vmatrix}3&4&5\\9&16&25\\27&64&125\end{vmatrix}=3\times4\times5\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&5\\9&16&25\end{vmatrix}$$

$$=60\times(5-3)(5-4)(4-3)=120,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&0&4&5\\4&0&16&25\\8&0&64&125\end{vmatrix}=-240,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&0&5\\4&9&0&25\\8&27&0&125\end{vmatrix}=180,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&0\\4&9&16&0\\8&27&64&0\end{vmatrix}=-48.$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=10$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-20$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=15$，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=-4$.

由定理 1.6.1 知，用克拉默法则解线性方程组时必须同时满足两个条件：一是方程的个数与未知数的个数相等；二是方程组系数行列式不等于零. 另外，用克拉默法则解 n 元线性方程组时，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，计算量相当大，所以在实际求解线性方程组时，很少使用克拉默法则. 尽管如此，克拉默法则仍具有很重要的理论价值，它不仅给出了线性方程组有唯一解的条件，揭示了线性方程组的解与方程组的系数和常数项的关系，而且对一般线性方程组的理论研究也起着重要的作用.

作为克拉默法则在理论上的一个应用，考察形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.6.4}$$

的线性方程组. 显然，这是方程组(1.6.1)中常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时的情形. 当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时，方程组(1.6.1)称为**非齐次线性方程组**，而方程组(1.6.4)则称为**齐次线性方程组**. 不难看出，$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 总是齐次线性方程组(1.6.4)的一个解，这个解称为零解(或平凡解). 然而，对于齐次线性方程组而言，我们更关心的是它除零解外是否还有其他解. 由定理 1.6.2 可得到齐次线性方程组(1.6.4)有非零解的一个必要条件，即有如下定理.

定理 1.6.2 如果齐次线性方程组(1.6.4)有非零解，则它的系数行列式 $D=0$.

证 反证法. 假设齐次线性方程组(1.6.4)的系数行列式 $D\neq0$，由定理 1.6.2 知，方程组(1.6.4)有唯一解，即只有零解. 这与方程组(1.6.4)有非零解矛盾. 所以 $D=0$.

在第 3 章中我们还将看到 $D=0$ 也是齐次线性方程组(1.6.4)有非零解的充分条件，即若 $D=0$，则方程组(1.6.4)必有非零解.

例 1.6.2 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解　由定理1.6.2知,要使齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式等于零,即

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)^2(3-\lambda)-2+8-4(3-\lambda)+4(1-\lambda)-(1-\lambda)\\&=(1-\lambda)^2(3-\lambda)-(3-\lambda)=-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda).\end{aligned}$$

所以,当$\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$时,方程组有非零解.

例1.6.3　求通过三点$(1,1,1),(2,3,-1),(3,-1,-1)$的平面方程.

解　设平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

代入平面上三点$(1,1,1),(2,3,-1),(3,-1,-1)$和平面上任一点$(x,y,z)$得

$$\begin{cases}A+B+C+D=0,\\2A+3B-C+D=0,\\3A-B-C+D=0,\\xA+yB+zC+D=0.\end{cases}$$

于是上述问题就转化为关于未知数A,B,C,D的四元齐次线性方程组有非零解.根据齐次线性方程组有非零解的充要条件知,其系数行列式$D=0$,即

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&-1&1\\3&-1&-1&1\\x&y&z&1\end{vmatrix}=4x+y+3z-8=0.$$

所以,所求的平面方程为$4x+y+3z-8=0$.

练　习　1.6

1. 用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\x_1-3x_2-6x_4=9,\\2x_2-x_3+2x_4=-5,\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

2. 问λ取何值时,齐次方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0,\\2x+(6-\lambda)y=0,\\2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$$

有非零解?

小结与点注

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具,是线性代数的一个重要组成部分.掌握行列式的概念与性质是本章的基本要求,如何灵活运用行列式的性质及其展开定理,提高计算行列式的能力是本章的重点和难点.

1. 对初学者而言,行列式的定义是一个难点,要掌握 n 阶行列式的定义就必须理解其包含的三层意思:

(1) 它是 $n!$ 项的代数和;

(2) 它的每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积;

(3) 它中每一项的符号与其行标、列标排列的逆序数有关,当其元素的行标按自然顺序排列后,如果列标排列为偶排列,则取正号;如果列标排列为奇排列,则取负号.这时 n 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 的一般项可写为 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$.

除了用 $\det(a_{ij})=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 定义 n 阶行列式外,还可采用按某一行(列)展开来递归定义 n 阶行列式.可以证明,这两种定义是等价的.

2. 行列式的计算是本章的重要内容之一.行列式计算的方法比较多,技巧性较强.掌握计算行列式的方法和技巧是本章乃至整个线性代数部分的难点、重点.要准确、快捷地计算出一个行列式的值,首先必须具体地分析所求行列式的特点及其元素的规律性,针对其特征采用适当的方法;其次是要不断总结、积累经验,且应不断提高自己的运算能力.

以下列出计算行列式的几种常用的公式和方法.

(1)对于一些特殊的行列式,直接计算.

① $$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&*&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&*&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中三个行列式依次为对角行列式、上三角行列式和下三角行列式.

② $$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & * & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & * & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

其中三个行列式依次为次对角行列式、次上三角行列式和次下三角行列式.

③ $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

④ 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

(2) 如果不能直接利用一些特殊的行列式的结果,我们就必须对行列式进行化简,因为任一个行列式都可利用行列式的性质化为上(下)三角形行列式,直接利用上(下)三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积,得出结果;或用行列式的性质,使某行(列)出现尽可能多的零,再按这行(列)展开降阶,如此重复,最终可将行列式化为若干个二、三阶行列式的和.这是计算行列式的两种基本方法.在实际计算中这两种方法是交叉进行的,如果行列式的各行(列)大部分元素相同,应首先考虑使用行列式性质化简;如果行列式中零元素较多,则应考虑使用按行(列)展开的方法.另外,在化简的过程中,又要随时注意新的行列式的特点,看是否能利用特殊的行列式.

(3) 对于某些较高阶的行列式,如果利用行列式的性质或行列式按行(列)展开公式可以将给定的 n 阶行列式 D_n 变换成用同样形式的 $n-1$ 阶(或更低阶)行列式表示出来,然后根据递推关系式求出 D_n.

3. 作为行列式在解线性方程组时的应用,克拉默法则给出在特定条件下线性方程组的求解公式.这个特定条件是指克拉默法则只适用于方程的个数与未知数的个数相等的情形,且方程组的系数行列式不等于零.克拉默法则的意义在于它给出了解与系数的显式关系,这对后面的一般类型的线性方程组的理论研究起着十分重要的作用.

习　题　1

1. 填空:

(1) 排列 217986354 的逆序数为________;

(2) 五阶行列式的项 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{13}a_{54}$ 的符号为______;

(3) $-a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$ 为五阶行列式展开中的一项,则 $i=$____,$j=$____;

(4) 若 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根,则行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_;$$

(5) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_;$

(6) 五阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 13 & 14 & 0 \\ 1 & 10 & 11 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$________；

(7) $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{11} \\ a_{n2} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$,

则 D_1 与 D_2 的关系为________；

(8) 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2x & 1 & -1 \end{vmatrix}$，则 x^3 项的系数为________.

2. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} -2 & 503 & 5 \\ 1 & 201 & 2 \\ 1 & 298 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 9 & 49 & 25 \\ 4 & 3 & 7 & -5 \\ 64 & 27 & 343 & -125 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$,其中 $a_i \neq x_i (i=1,2,3,4)$；　(8) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；　(10) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

3. 证明下列各题:

(1) 若 $abcd=1$,则

$$D = \begin{vmatrix} a^2+\dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2+\dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2+\dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2+\dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

(2) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$,证明:必存在 $\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi)=0$;

(3) 设 α,β,γ 为互不相等的实数,证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma=0$;

(4) 若 n 次多项式 $f(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ 对于 $n+1$ 个不同的 x 值都等于 0,则 $f(x)\equiv 0$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$.

4. 计算下列各行列式(其中 D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

(2) $D=\begin{vmatrix} x_1 & x & \cdots & x \\ x & x_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x_n \end{vmatrix}$,其中 $x\neq x_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(3) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0;

(4) $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$,$a\neq b$ 且其中未写出的元素为 0;

(5) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

(6) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=\max\{i,j\}$.

5. 解方程

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}=0.$$

6. 求解下列各题:

(1) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_3=0, \\ 2x_1-x_4=0, \\ \lambda x_1+x_2=0, \\ x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 有非零解,求 λ 的值;

(2) 问 λ,μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

(3) 求一个二次多项式 $f(x)$，使得 $f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28$.

7. 用克拉默法则求解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \quad + 3x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

第 2 章　矩阵及其运算

矩阵是研究和处理线性问题的重要工具，是线性代数的一个主要研究对象．由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可以转化或近似转化为线性问题，因此，矩阵方法具有十分广泛的应用．另一方面，矩阵是一种新的运算对象，读者应充分注意矩阵运算的一些特殊规律，并熟练掌握矩阵的各种基本运算方法，这对学好线性代数及运用线性代数理论解决一些实际问题是非常重要的．

本章从矩阵的实际背景入手，引出矩阵的概念，进而介绍矩阵的基本运算、逆矩阵、矩阵的分块和分块矩阵的运算、矩阵的初等变换和矩阵的秩．在此基础上，以矩阵为工具，介绍线性方程组的消元法．

2.1　矩阵的引入

2.1.1　矩阵问题的实例

为使读者对矩阵概念的实际背景有一些了解，我们先介绍两个有关矩阵问题的实例．

例 2.1.1　设某地区有 A_1, A_2, A_3 三种不同矿产，为一个工厂提供原材料，那么，矿物单价和营运单价可用下列数表：

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

表示，其中 a_{1j} 表示矿物 A_j 的单价，a_{2j} 表示矿物 A_j 的营运单价．

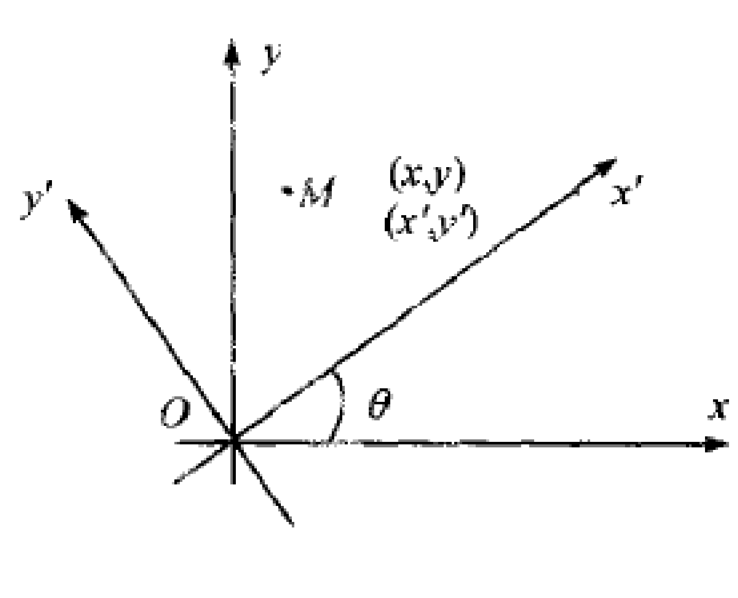

图 2.1.1

例 2.1.2　在平面解析几何中，如果坐标系 xOy 绕坐标原点按逆时针方向旋转 θ 角后成为 $x'Oy'$（图 2.1.1）．设平面上点 M 在这两个坐标系中的坐标分别为 (x, y) 和 (x', y')，则易知它们之间有如下关系：

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

显然，新旧坐标的关系 (2.1.1) 可用下面的数表

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

表示.

如果在平面同一个坐标系内,考察模为 r、倾角为 φ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 按逆时针方向转过角 θ 后成为 $\boldsymbol{\alpha}'$,它们的坐标分别为(x,y),(x',y').因为是旋转,所以 $\boldsymbol{\alpha}'$的模也为 r,而倾角为 $\theta+\varphi$,于是

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= r\sin(\theta+\varphi) = x\sin\theta + y\cos\theta, \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

尽管(2.1.1)与(2.1.2)的表达式相仿,但意义不同,(2.1.1)是同一点在不同坐标系下新旧坐标的联系式,而(2.1.2)是在同一坐标系下新旧向量之间坐标的联系式.

一般地,n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**,其中系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$均为常数. 线性变换(2.1.3)的系数也可以用下面的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

表示.

以上问题虽然有不同的背景,但都可以用一张“数表”刻画. 在科学技术的其他领域,还有大量的类似问题,而这些问题的解决,往往归结为对这种“数表”某些方面的研究. 于是,我们引入以下概念.

定义 2.1.1 数域 P 上 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成 m 行 n 列,并括以方括号(或圆括号)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 P 上的 $m\times n$ 型**矩阵**,常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$记之.有时也简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$等,其中 a_{ij}称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.当 $P=\mathbf{R}$ 时,称其为**实矩阵**,当 $P=\mathbf{C}$ 时,称其为**复矩阵**.

今后,为叙述方便,我们用 $P^{m\times n}$表示数域P 上的全体 $m\times n$ 型矩阵所组成的集合,即

$$P^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}\text{ 是}P\text{ 上的 }m\times n\text{ 型矩阵}\}.$$

本书主要讨论实数域上的矩阵,所以,除特别声明外,涉及的一般都是实矩阵,即 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$.

如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 的行数相同,列数也相同,且位于同样位置的元素对应相等,则称这两个矩阵相等,记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

即若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in P^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in P^{m\times n}$,且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.如由

$$\begin{pmatrix} x & 5 & -3 \\ 1 & 4 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 & z \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

立即可得 $x=8,y=-1,z=-3$.

2.1.2 一些特殊的矩阵

1. 行矩阵(row matrix).只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n)$$

称为**行矩阵**(也称行向量),为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

2. 列矩阵(column matrix).只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**(也称列向量).

3. 方阵(square matrix).行数与列数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为方阵,其行数称为 $\boldsymbol{A}$ 的阶,即若 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为n 阶**方阵**.

4. 零矩阵(zero matrix). 元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}$. 应该注意,不同型的零矩阵是不同的,这一点可结合上下文加以区别,或直接标明它的类型,如 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}\in P^{m\times n}$.

5. 上(下)三角矩阵. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的方阵称为 n 阶**上三角矩阵**(upper triangular matrix),而形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的方阵称为 n 阶**下三角矩阵**(lower triangular matrix),其中未写出的元素均为 0.

6. 对角阵(diagonal matrix). 形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

的方阵称为 n 阶**对角阵**,记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 对角线上的元素均为 1 的 n 阶对角阵称为 n 阶单位矩阵(identity matrix),记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$,即

$$\boldsymbol{E}=(\delta_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$

从线性变换(2.1.3)中可以看出,给定一个线性变换,它的系数矩阵也就确定;反之,如果给出一个矩阵,则以此矩阵作为系数矩阵也可以得到一个线性变换. 在这个意义上,线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系. 因此,可以利用矩阵来研究线性变换,也可以利用线性变换对矩阵的背景及运算作出解释,如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

表示坐标系的旋转变换或向量的旋转变换,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 表示恒等变换等.

练　习　2.1

1. 三个城市间的单向航线如图 2.1.2. 若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线}, \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线}.\end{cases}$$

试用矩阵表示这三个城市的单向航线状况.

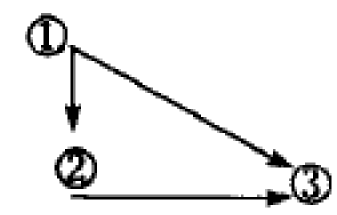

图 2.1.2

2. 试解释矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

所对应的线性变换的几何意义.

3. 写出下列线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1+a_1x_2 \\ y_2=x_2+a_2x_3 \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n=x_n+a_nx_1.\end{cases}$$

所对应的矩阵.

2.2　矩阵的运算

2.2.1　矩阵的加法

定义 2.2.1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in P^{m\times n}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

应该注意, 只有同型的两个矩阵才能相加. 由于矩阵的加法归结为它们对应元素相加, 所以, 不难验证矩阵的加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{m\times n}$):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(交换律);

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(结合律);

(3) 设 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$为零矩阵,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A};$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,矩阵

$$(-a_{ij})=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,记为 $-\boldsymbol{A}$. 于是,显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},$$

从而矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

2.2.2 数与矩阵相乘

定义 2.2.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in P^{m\times n}$, $\lambda\in P$,则称矩阵$(\lambda a_{ij})_{m\times n}$为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积,记为 $\lambda\boldsymbol{A}$,即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

由定义知,用数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是用数 λ 去乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素. 因此,矩阵与数量相乘满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in P^{m\times n}$, $\lambda,\mu\in P$):

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法运算与数乘矩阵运算结合起来,统称为矩阵的线性运算. 由以上讨论知,矩阵的线性运算满足上述 8 条运算规律. 需要指出的是,除矩阵外,还有许多数学对象,可以定义不同的加法与数乘运算,同样满足上述 8 条运算规律,抓住这些不同对象的共性,便可抽象出线性空间的概念,我们将在第 6 章详细讨论.

2.2.3 矩阵的乘法

矩阵乘法的定义,不像矩阵加法和数乘那么简单自然,是一种独特的乘法运

算,具有特殊的运算规律,因而这种乘法的定义初看似乎显得有些不自然,不易接受.鉴于此,在给出矩阵乘法定义之前,我们先考察两个例子.

例 2.2.1　在例 2.1.1 中,如果该厂对三种矿物两个月的需求量为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中两个月分别用 M_1, M_2 表示,b_{ij}表示矿物 A_i 第 M_j 月的需求量(单位:吨),则工厂的原材料成本可用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})$$

表示.这里矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的元素 c_{1j}是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的第 1 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$第 j 列对应元素乘积之和,表示工厂第 M_j 月所需支付的矿物成本,而 c_{2j}表示工厂第 M_j 月所需支付的营运成本.如果把 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$叫做单价矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$叫做需求量矩阵,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})$叫做成本矩阵,则自然可以将 $\boldsymbol{C}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

例 2.2.2　设有两个线性变换

$$\begin{cases} t_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ t_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \\ y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

为求出从 x_1, x_2 到 t_1, t_2 的线性变换,可将(2.2.2)代入(2.2.1),整理后便得

$$\begin{cases} t_1 = (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})x_1 + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})x_2, \\ t_2 = (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})x_1 + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})x_2. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

线性变换(2.2.3)实际上是先作线性变换(2.2.2),再作线性变换(2.2.1)的结果.我们把线性变换(2.2.3)叫做线性变换(2.2.1)与(2.2.2)的乘积.相应地把(2.2.3)所对应的矩阵也定义为线性变换(2.2.1)与(2.2.2)所对应的矩阵的乘积.一般地,我们有如下定义.

定义 2.2.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,那么,矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB},$$

其中 c_{ij}是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

由矩阵乘法的定义可知，只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘. 这时，乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的列数等于右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数. 图 2.2.1 是矩阵相乘的直观示意图.

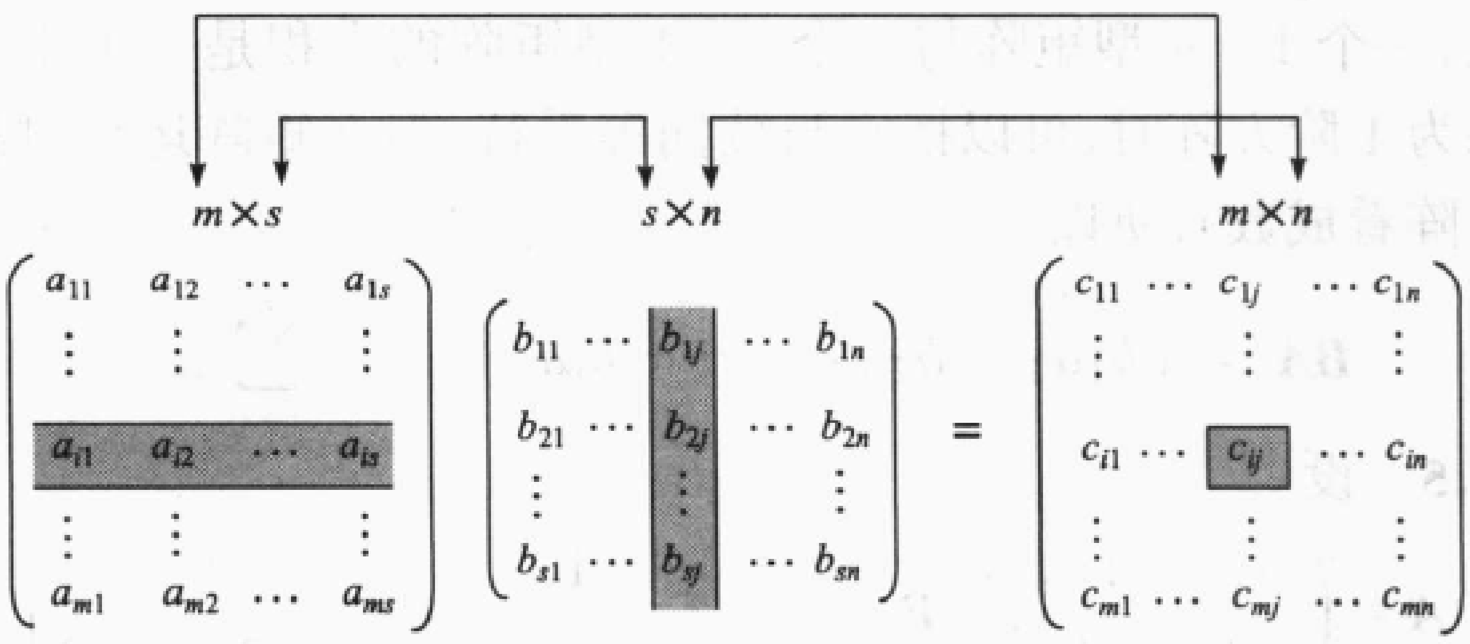

图 2.2.1

例 2.2.3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\\-1&2\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 型矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 4×2 型矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其积是一个 3×2 型矩阵，由定义 2.2.3 有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\times0+0\times1+(-1)\times3+2\times(-1) & 1\times3+0\times2+(-1)\times1+2\times2\\(-1)\times0+1\times1+3\times3+0\times(-1) & (-1)\times3+1\times2+3\times1+0\times2\\0\times0+5\times1+(-1)\times3+4\times(-1) & 0\times3+5\times2+(-1)\times1+4\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&6\\10&2\\-2&17\end{pmatrix}.$$

例 2.2.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1},\qquad \boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)_{1\times n},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

按定义,一个 $1\times n$ 型矩阵与一个 $n\times 1$ 型矩阵的乘积是一个 1 阶方阵(运算的最后结果为 1 阶方阵时,可以把它与数同等看待,但在矩阵运算过程中,一般不能把 1 阶方阵看成数),所以

$$BA=(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n)_{1\times 1}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

例 2.2.5　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

求 AB,BC 及 AC.

解

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=2A.$$

$$AC=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从上面的例子中可以看出,矩阵的乘法与我们熟悉的数的乘法的运算规则有以下明显区别:

(1) 矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下,$AB\neq BA$. 例 2.2.3 的情况是 AB 有意义,而 BA 无意义,当然无法谈论二者相等;例 2.2.4 的情况是虽然 AB 与 BA 都有意义,但二者不是同型矩阵,所以它们也不能相等;例 2.2.5 的情况是虽然 AB 与 BA 都有意义,且为同型矩阵,但二者仍不相等. 由此可见,在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序. 但同时应该指出,矩阵的乘法不满足交换律是就一般情况而言的,并不是说任意给定两个矩阵 A 和 B,就一定有 $AB\neq BA$,如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$AB=BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

所以,当 $AB\neq BA$ 时,称 AB 不可交换(或 A 与 B 不可交换);当 $AB=BA$ 时,称