第一章 行 列 式

行列式是线性代数的一个重要内容，也是经济研究中常用的数学工具。本章在复习二、三阶行列式的基础上，把行列式的概念推广到高阶行列式中去。

§1—1 二阶和三阶行列式

在初等数学中，已经由求解二元和三元线性方程组问题引出了二阶和三阶行列式。它们的展开式分别如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

其中元素a_{ij}的两个下标i与j分别表示a_{ij}所在的行与列的序数。

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达成简洁的形式。

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1\cdot1)$$

的系数行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \text{ 又设 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix};$$

其中D_1与D_2分别是在D中把第1列与第 2 列元素换成(1 • 1)式中的常数项得到的。

那么当$D\neq0$时，方程组（1 • 1）有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}。 \qquad (1\cdot2)$$

同样设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1\cdot3)$$

的系数行列式为D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{又设} D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中D_1，D_2，D_3分别是D中把第1列，第2 列，第 3 列换成（1·3）式中的常数项得到的。

则当$D\neq 0$时，方程组（1·3）有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}; \quad x_2=\frac{D_2}{D}; \quad x_3=\frac{D_3}{D} \qquad (1\cdot 4)$$

以上就是解二元与三元线性方程组（1·1）与（1·3）的Cramer法则。

〔例1〕 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1-\ x_2=2 \end{cases}$$

解：系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0$

该方程组有唯一解。

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

根据Cramer法则知该方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{5}{7}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{7}。$$

〔例2〕 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3=0 \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3=1 \\ x_1-\ x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

解：系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-8\neq 0$

该方程组有唯一解。

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-12$$

根据*Cramer*法则知该方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{2}; \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2};$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{2},$$

§1—2　n 阶行列式的定义

利用二阶与三阶行列式，得到了解二元和三元线性方程

组的Cramer法则。为了求解n元线性方程组，需要进一步讨论n阶行列式的问题。为此，先讨论全排列及其逆序数，然后引出n阶行列式的概念。

把n个自然数1，2，…，n排成一列，就叫这n个自然数的全排列，简称排列。

按自然顺序排列的n个自然数1，2，…，n，称为n个自然数的标准排列。

例如把1，2，3三个数字排成一列，不同的排列有六种，它们是123，132，213，231，312，321。其中排列123是三个自然数的标准排列。

同样，把1，2，…，n，这n个数字排成一列，不同的排列共有$P_n=n(n-1)\cdots2\cdot1=n!$种。

定义 1.2.1 如在1，2，…，n，的一个全排列$p_1p_2\cdots p_n$中，当$i<j$时，$p_i>p_j$，这时p_i与p_j违反了自然顺序，就说p_ip_j构成一个逆序。排列$p_1p_2\cdots p_n$中所有逆序的总数叫该排列的逆序数。

$p_1p_2\cdots p_n$是自然数1，2，…，n这n个数的一个排列。考虑元素p_i ($i=1$，2，…，n)，如果比p_i大的且排在p_i前面的元素有t_i个，那么该排列的逆序数

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i。$$

〔例1〕 求下列排列的逆序数。

(1) 32514　　　(2) 23451

解：(1) 3排在首位，比3大且排在3前面的数的个数$t_1=0$，

2前面比2大的有一个，故$t_2=1$，

5前面比5大的没有，故$t_3=0$，

1前面比1大的有三个，故$t_4=3$，

4前面比4大的有一个，故$t_5=1$。

排列32514的逆序数$t=0+1+0+3+1=5$。

(2) 同样方法计算知，排列23451的逆序数

$$t=0+0+0+0+4=4。$$

逆序数为偶数的排列称为偶排列。逆序数为奇数的排列称为奇排列。

易知例1中32514是奇排列。23451是偶排列。

标准排列的逆序数为零，规定它是偶排列。

为了给出n阶行列式的定义，下面考察三阶行列式展开式的结构所具有的特点。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1·5}$$

容易看出：

(1) 不考虑正负号，（1·5）式右边每一项恰为三个元素的乘积，这三个元素来自不同的行，不同的列。所以每一项总可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里第一个下标（又称行标）排成自然顺序123，而第二个下标（又称列标）排成$p_1p_2p_3$，它是1，2，3三个自然数的某个排列，这种不同的排列共有六种，对应（1·5）式右端的六项。

(2) （1·5）式右端各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的项三个列标排列是：123，231，312。

带负号的项三个列标排列是：132，213，321。

经计算知，前三个排列均为偶排列，后三个排列均是奇排列。因此各项所带正负号可表为$(-1)^t$，其中t为该项列标排列的逆序数。

综上可知，三阶行列式展开式可写成。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中t为列标排列$p_1p_2p_3$的逆序数，Σ表示对1，2，3，三个数的所有排列$p_1p_2p_3$取和。

仿此，可以把行列式推广到一般情况。

定义 1.2.2 设有n^2个数，排成n行n列的表。

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并加以符号$(-1)^t$得到形如 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的项，其中$p_1 p_2 \cdots p^n$是自然数1，2，…，n的一个排列，t为该排列的逆序数。由于这样的排列有 $n!$ 个，所以形如 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的项共有 $n!$ 项。所有这 $n!$ 项的代数和 $\Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 称为n阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$。数a_{ij}称为行列式D的元素。

当$n=2$，3时，可以验证用定义1.2.2给出的二阶与三阶行列式和上节给出的展开式是一致的。

〔例2〕证明对角行列式（其中对角线上的元素是λ_i，未写出的数都是零）。

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n。$$

证：第一式显然成立，下面只证第二式。

若记 $D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$ 即$\lambda_i=a_{i,\ n-i+1}$

其它元素均为0。

那么D的$n!$项中只有一项不为零，即为：

$(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，其中$t$是排列$n(n-1)\cdots2,1$的逆序数。

由计算知$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

代入知：$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

对角线以上(下)的元素均为零的行列式称做下(上)三角形行列式，它的值与对角行列式一样。

〔例3〕证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证：由于当 $j>i$ 时 $a_{ij}=0$，所以 D 中可能不为零的元素 a_{ip_i} 其下标应满足 $p_i\leqslant i$ 即 $p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$。那么，在所有列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中能满足上述关系式只有一个标准排列 $12\cdots n$。D 中不为零的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，显然 $t=0$。故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

§1—3　行列式的性质

为了研究 n 阶行列式的性质，先讨论对换和排列奇偶性的关系。

在排列中，把任意两个数对调，其它数不动，这种作出新排列的手续称为对换。

定理 1.3.1　一个排列中的任意两个数对换，排列改变奇偶性。

证：先考虑相邻两数对换的情况。

设排列为$a_1\cdots a_n bab_1\cdots b_m$。显然，在新排列中，除$a$与$b$两个数的顺序改变外，其它任意两个数的顺序均未变。若a，b原来是自然顺序，对换后ba构成逆序，因此排列的逆序数增加1。反之，若a，b原来构成逆序，对换后ba便是自然顺序，于是排列的逆序数减少1。故对换a，b改变排列$a_1\cdots a_n bab_1\cdots b_m$逆序数的奇偶性。

再考虑任意两数对换的情况。

设排列为$a_1\cdots a_n ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_k$，把它作$m$次相邻两数的对换，调成$a_1\cdots a_n abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_k$，再作$m+1$次相邻两数的对换，调成$a_1\cdots a_n bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_k$。那么$a$，$b$的对换一共进行了$2m+1$次相邻两数的对换，所以$a$，$b$对换改变了排列的奇偶性。

【推论】 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数。偶排列调成标准排列的对换次数为偶数。

利用定理1.3.1，下面讨论n阶行列式的另一种表示法。

对于行列式的任一项$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，其中$1\cdots i\cdots j\cdots n$是标准排列，$t$为排列$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$的逆序数。

对换a_{ip_i}与a_{jp_j}成$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$，这时行标排列和列标排列同时作了一次相应的对换。设新行标排列$1\cdots j\cdots i\cdots n$的逆序数为$r$，则$r$为奇数；设新列标排列$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots n$的逆序数为$t_1$，则$(-1)^{t_1}=-(-1)^t$，故$(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$。于是有$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$
$=(-1)^{r+t}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$。

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆

序数之和并不改变奇偶性。于是经若干次对换使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（其逆序数为t）变为自然排列（其逆序数为 0）。行标排列相应从标准排列变为某个排列，设此新排列为$q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s。则有：$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$。易知，排列$q_1q_2\cdots q_n$由排列$p_1p_2\cdots p_n$所唯一确定。由此可得：

定理 1.3.2 n阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

其中，t为行标排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数。

证：按n阶行列式定义有$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。

记$D_1=\sum(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$

由上面讨论知：对D中任一项$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$D_1$中总有且仅有某一项$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$与之对应并相等。反之亦然。所以$D$与$D_1$中的项可以一一对应并相等。从而$D=D_1$。

把行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

的行列互换而不改变各行，各列的顺序，得到行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式。记为D'或D^{T}。

性质 1 行列式和它的转置行列式相等。即$D^{\mathrm{T}}=D$。

证：记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，即$b_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

按定义：$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$

$$=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}。$$

根据定理1.3.2知：$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$。

所以 $D^{\mathrm{T}}=D$

由性质 1 知，行列式中凡对行成立的性质对列也同样成立。反之亦然。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式仅改变符号。

证：设 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，是由行列式$D$交换

i，j两行得到的。即有当$k\neq i$，j时$b_{kp}=a_{kp}$；当$k=i$，j时$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$。于是有：

$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$。

其中$1\cdots i\cdots j\cdots n$为标准排列，$t$为排列$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$的逆

序数。设排列$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$的逆序数为$s$，则$(-1)^t=-(-1)^s$。

所以 $D_1=-\Sigma(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=-D$。

【推论】 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零。

证：把这两行(列)相换，有$D=-D$，

故知 $D=0$。

以下诸性质，作为练习，请读者自己证明。

性质 3 行列式某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k，等于用k乘此行列式。

【推论】 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式为零。

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和（如第j列元素都是两数之和）。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变。

利用这些性质可简化行列式的计算。特别是利用性质把行列式化成三角形行列式，然后计算行列式的方法应熟练掌握。

为便于说明行列式的计算过程，引进如下记号。

互换第i行(列)与第j行(列)，记作〔(i)，(j)〕。

用数k乘第i行(列)，记作$(i)k$。

用数k乘第i行(列)加到第j行(列)上去，记作$(j)+(i)k$。

若对行应用性质计算行列式，写在等号上面；若对列应用性质计算行列式，写在等号下面。

〔例 1〕计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解：$D \xlongequal[(①,②)]{} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{②+①(-1)\\④+①5}}$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{(②,③)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{④+②(-8)\\③+②4}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{④+③\frac{10}{8}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40$$

〔例 2〕 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解：$D \xlongequal{(①,②)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{③+①\\④+①(-2)}}$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{④}+\text{②}3]{\text{③}+\text{②}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{④}+\text{③}(-1)} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

〔例 3〕计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

解：$$D \xlongequal[\text{①}+\text{④}]{\text{①}+\text{②}\atop \text{②}+\text{③}} \begin{vmatrix} b+3a & b+3a & b+3a & b+3a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (b+3a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[\text{④}+\text{①}(-a)]{\text{②}+\text{①}(-a)\atop \text{③}+\text{①}(-a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$(b+3a)=(b-a)^3(b+3a)$$

〔例 4〕计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x & x+y & x+y+z & x+y+z+w \\ x & 2x+y & 3x+2y+z & 4x+3y+2y+w \\ x & 3x+y & 6x+3y+z & 10x+6y+3y+w \end{vmatrix}$$

解：$D\xlongequal{\substack{④+③(-1)\\③+②(-1)\\②+①(-1)}}\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 0 & x & x+y & x+y+z \\ 0 & x & 2x+y & 3x+2y+y \\ 0 & x & 3x+y & 6x+3y+z \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\substack{④+③(-1)\\③+②(-1)}}\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 0 & x & x+y & x+y+z \\ 0 & 0 & x & 2x+y \\ 0 & 0 & x & 3x+y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④+③(-1)}\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 0 & x & x+y & x+y+z \\ 0 & 0 & x & 2x+y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=x^4$$

§1—4　行列式按行(列)展开

通常，低阶行列式的计算较高阶行列式的计算要简便。所以，自然考虑到用低阶行列式来表示高阶行列式的问题。

首先，引进余子式和代数余子式的概念，然后介绍展开定理并举例介绍降阶求行列式的方法。

定义 1.4.1 在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}。记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式。

〔例 1〕求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素a_{32}的余子式和代数余子式。

解：根据定义1.4.1知：

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}。$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}。$$

引理 一个n阶行列式D，若其中第i行所有元素除a_{ij}外均为零。那么行列式D等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即$D=a_{ij}A_{ij}$。

证：先考察a_{ij}位于第1行第1列的情况。此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式的定义，并考虑到$p_1 \neq 1$时$a_{1p_1}=0$，故有

$$\sum_{p_1 \neq 1}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0。$$

而$D=\sum_{p_1=1}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}+\sum_{p_1\neq 1}(-1)^t a_{1p_1}$

$a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{11}\Sigma(-1)^t a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$，其中$t$是排列$p_1p_2\cdots p$的逆序数。当$p_1=1$时，$t$为排列$1p_2\cdots p_n$的逆序数，即等于排列$p_2\cdots p_n$的逆序数。因此，按行列式定义有：$\Sigma(-1)^t a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=M_{11}$，而$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，故有$D=a_{11}A_{11}$。

在考察一般情况。此时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用前面的结论，把D的行列作如下调换：D的第i行依次与第$i-1$行、第$i-2$行、……、第1行对调。这样a_{ij}就调到原来的a_{1j}的位置上，调换次数为$i-1$。再把第j列依次与第$j-1$列，第$j-2$列，…，第1列对调，这样a_{ij}就调到左上角，调换的次数是$j-1$次。总之，经$i+j-2$次调换，把a_{ij}调到左上角而所得的新行列式　$D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$。

易知D_1中第1行第1列元素a_{ij}的余子式就是D中第i行第j列元素a_{ij}的余子式M_{ij}。

利用前面的结论、$D_1=a_{ij}M_{ij}$，于是有

$$D=(-1)^{i+j}D_1=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}。$$

定理 1.4.1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。即：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(j=1,2,\cdots,n。)$$

证：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

根据引理知：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)。$$

类似地可证明，若按列进行可得：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(j=1,2,\cdots,n)。$$

该定理称为行列式按行(列)展开公式。在计算数字行列式时，直接应用行列式按行(列)展开公式并不一定简化计算。因为把一个n阶行列式的计算换成n个$n-1$阶行列式的计算并不减少计算量。只是在行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用展开公式才能减少计算量。但展开公式在理论上是重要的。

〔例2〕计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&3&-1&8&0\\1&7&2&5&7\\0&-2&3&0&0\\0&-4&-1&0&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}$$

解：$D=(-1)^{2+7}\cdot7\cdot\begin{vmatrix}5&3&-1&8\\0&-2&3&0\\0&-4&-1&0\\0&2&3&5\end{vmatrix}=-7\cdot5\cdot(-1)^{1+1}$

$$\begin{vmatrix}-2&3&0\\-4&-1&0\\2&3&5\end{vmatrix}=-7\cdot5\cdot5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2&3\\-4&-1\end{vmatrix}$$

$$=-175[(-2)(-1)-(-4)\cdot3]=-2450$$