0 预备知识

0.1 集论基本概念

这里列出在我们的元语言中要用到的一些集论基本概念以及它们的符号表示。

集 A 是集 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，意思是：凡是 A 的元素，都一定是 B 的元素。即：

若 $x\in A$，则 $x\in B$。

$A=B$，是指 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即 A 与 B 有完全相同的元素。

集 A 的幂集用 $\mathscr{P}(A)$ 表示，它是由 A 的全体子集所形成的集。例如，若 $A=\{1,2,3\}$，则

$$\mathscr{P}(A)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\phi\},$$

其中 ϕ 是空集，即没有任何元素的集。ϕ 是任何集的子集。

集 A 与集 B 的并，指

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

集 A 与集 B 的交，指

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

作为集的运算，并和交都满足交换律、结合律和分配律。以后，我们把有限次的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；把有限次的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

设有一列集 $A_0,A_1,A_2\cdots,A_n,\cdots$。我们记

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i=\{x \mid 存在\ i\ 使\ x \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i=\{x \mid 对任意\ i\ 都有\ x \in A_i\}.$$

集B在集A中的余集，指

$$A-B=\{x \mid x \in A 且 x \notin B\}.$$

集A与集B的积集，指

$$A \times B=\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

它由以A的元素为第一元素，以B的元素为第二元素形成的有序对(a,b)所构成。有序对(a,b)的基本性质是：

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2) \quad \Rightarrow \quad a_1=a_2 且 b_1=b_2.$$

n个集$A_1,\cdots,A_n$的积集，指

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \times \cdots \times A_n \\ &=\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_1 \in A_1,\cdots,a_n \in A_n\}.\end{aligned}$$

n元有序对$(a_1,\cdots,a_n)$具有性质：

$$(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n) \quad \Rightarrow \quad a_1=b_1,\cdots,a_n=b_n.$$

用A^n表示n个A的积集$A \times A \times \cdots \times A$ $(n>0)$。

若$R \subseteq A \times B$，则说R是A到B的关系。若$R \subseteq A^n$，则说R是A上的n元关系。A上的一元关系就是A的子集。

A上的二元关系$R(\subseteq A \times A)$若具有以下三条性质，就叫做A上的等价关系。

1° 自反性：对任意$x \in A$，$(x,x) \in R$。

2° 对称性：对任意$x,y \in A$，

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R.$$

3° 可递性：对任意$x,y,z \in A$，

$$(x,y) \in R 且 (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R.$$

若R是A上的等价关系，且$(a,b) \in R$，则说a和b等价，记

作 $a \sim b$. A 中和 $a(\in A)$ 等价的所有元素形成的集叫做由 a 形成的 R 等价类，记作

$$[a] = \{x \mid x \in A, x \sim a\}.$$

不同的等价类之间没有公共元素，所以 A 上的任何等价关系 R 都确定了 A 的一个分类。

设 R 是 A 上的等价关系，我们把所有 R 等价类的集叫做商集，记作 A/R.

设 f 是集 X 到集 Y 的一个关系（即 $f \subseteq X \times Y$）。如果 f 还满足条件：对任意 $x \in X$，有且仅有一个 $y \in Y$ 使 $(x, y) \in f$，那么我们说 f 是从 X 到 Y 的函数或映射，记作 $f: X \to Y$；这时若 $(x_0, y_0) \in f$，则说 y_0 是 x_0 的象，x_0 是 y_0 的原象，并写 $x_0 \mapsto y_0$，或写 $y_0 = f(x_0)$. X 叫做 f 的定义域。X 中元素在 Y 中的象的全体是 Y 的一个子集，叫做 f 的值域。若 f 的值域就是 Y，则把 f 叫做从 X 到 Y 的满射。

如果映射 $f: X \to Y$ 满足对任意 x_1，$x_2 \in X$ 都有

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2),$$

则把 f 叫做从 X 到 Y 的单射。

如果 $f: X \to Y$ 既是单射又是满射，则叫做从 X 到 Y 的双射。此时我们说 X 与 Y 之间存在着一一对应，或者说 X 与 Y 等势，也说 X 与 Y 有相同的基数。这时，f 的逆映射 f^{-1}：$Y \to X$ 也是双射。（f^{-1} 是 f 的逆映射，意思是 f^{-1} 满足：$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$。）

若存在双射 $f: X \to Y$ 和双射 $g: Y \to Z$，则它们的复合映射 $g \circ f$：$X \to Z$ 也是双射（复合映射 $g \circ f$ 由下式定义：$g \circ f(x) = g(f(x))$）。

0.2 Peano自然数公理

按照“一切能证明的都要证明”这一想法，证明关于自然数

的命题，通常采用下面的 Peano 自然数公理（公理 1 —公理 5 ）作为出发点.

我们把自然数集 N 看成是满足以下五条公理的集.

公理 1 $0\in N$.

公理 2 **若** $x\in N$，**则** x **有一个后继** $x'\in N$.

公理 3 **对任意** $x\in N, x'\neq 0$.

公理 4 **对任意** $x_1, x_2\in N$，**若** $x_1\neq x_2$，**则** $x'_1\neq x'_2$.

公理 5 **设** $M\subseteq N$. **若** $0\in M$，**且当** $x\in M$ **时也有** $x'\in M$，**则** $M=N$.

五条公理中含有两个没有给出定义的概念：0 和后继. 公理 3 的意思是：0 是自然数集的开头元素，而不是任何自然数的后继. 公理 4 是说，不同的自然数有不同的后继. 公理 5 就是归纳法原理. 根据公理 5，要证明 N 的子集 M 与 N 相等，先证 $0\in M$，然后作归纳假设 $x\in M$，由此来证明 $x'\in M$ 便可. $0'$ 记作 1，$0''$ 记作 2，….

由以上五条公理出发，定义自然数的加法、乘法等运算以及序的概念，便能证明关于自然数性质的一系列结论，例如，“非空的自然数集一定含有该集的最小数”等等. 在自然数理论的基础上，可进一步建立起有理数、实数和复数的理论.

下面来证明一个常用的结论.

定理（强归纳法） **假设与自然数** n **有关的命题** $P(n)$ **满足以下两个条件：**

1° $P(0)$ **成立，**

2° **若** $k<m$ **时** $P(k)$ **都成立，则** $P(m)$ **也成立，**

那么 $P(n)$ **对所有自然数** n **都成立.**

证 只要证明下面的集合 S 是空集就可以了：

$$S=\{n\,|\,P(n)\text{不成立}\}.$$

假设 $S\neq\phi$，那么 S 必含有它的最小数. 设 S 的最小数是 m. 因 $m\in S$，故由 S 的定义知 $P(m)$ 不成立. 又已知 $P(0)$ 成立（条件

1°)，所以必有$m>0$。注意m在S中是最小的，故当$k<m$时，必有$k\notin S$，从而$P(k)$一定成立。再由已知条件2°知$P(m)$成立。但前面知$P(m)$不成立，矛盾。**证毕。**

作为一例，下面用强归纳法来证明不等式：

$$p_n\leqslant 2^{2^n},\quad n\in N$$

其中p_n表示第n个素数：$p_0=2, p_1=3, \cdots$.

$n=0$时，$p_0=2\leqslant 2^{2^0}$.

$n>0$时，

$$\begin{aligned}p_n&\leqslant p_0p_1\cdots p_{n-1}+1 && \text{（理由下面说明）}\\&\leqslant 2^{2^0}\times 2^{2^1}\times\cdots\times 2^{2^{n-1}}+1 && \text{（用了归纳假设）}\\&=2^{(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})}+1=2^{(2^n-1)}+1\\&=\frac{2^{2^n}+2}{2}\leqslant 2^{2^n}.\end{aligned}$$

上面第一步不等式$p_n\leqslant p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$成立的理由是：$p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$的素因子不能是$p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$中的任何一个，而只能$\geqslant p_n$（注意用$p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$分别去除$p_0p_1\cdots p_{n-1}+1$，所得的余数都是1）。强归纳法所要求的条件1°与2°都得到满足，故原不等式对任何自然数n都成立。

0.3 可 数 集

熟悉集论的读者可略去此节。

有限集，是指空集或与$\{0,1,\cdots,n\}$等势的集。

可数集，是指与自然数集N等势的集。换句话说，一个集合是可数集，当且仅当它的全部元素可形成不重复的无限序列。可数集彼此互相等势，与可数集等势的集也是可数集。自然数集N当然也是可数集。

命题 1　可数集的无限子集也是可数集。

证 设无限集$B\subseteq A$，且设A是可数集。A的全部元素形成不重复的无限序列：$a_0,a_1,a_2,\cdots$。在这个序列中，B的全部元素形成了不重复的无限子序列：$a_{n_0},a_{n_1},a_{n_2},\cdots$，所以$B$也是可数集。**证毕。**

命题 2 若存在无限集B到可数集A的单射，则B为可数集。

证 记B到A的单射为f，设f的值域为$C(\subseteq A)$。$f: B\to A$为单射，而$f: B\to C$则为双射。B是无限集，C也是无限集。由命题1，C作为A的无限子集是可数集。B与C等势，所以B也是可数集。**证毕。**

命题 3 1° **若A可数且B非空有限或可数，则$A\times B$和$B\times A$都可数。**

2° **若$A_1,\cdots,A_n$中至少有一个可数而其它为非空有限或可数，则$A_1\times\cdots\times A_n$可数。**

证 1° 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$或$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$。作映射$f: A\times B\to \mathrm{N}$，使$f(a_i,b_j)=2^i3^j$。于是$f$是单射（当$i\neq k$或$j\neq l$时总有$2^i3^j\neq 2^k3^l$）。由命题2知$A\times B$可数。类似可知$B\times A$也可数。

2° 对n归纳，利用1°的结论便可。**证毕。**

命题 4 若A可数，且若B有限或可数，则$A\cup B$也可数。

证 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$。

情形1 B为有限集。此时设$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$（$B=\phi$时$A\cup B=A$）。若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的无限序列，

$$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots,$$

所以是可数集。若$A\cap B\neq\phi$，则令$B_1=B-A$。这时$B_1\cap A=\phi$，故$A\cup B_1$为可数集，而$A\cup B=A\cup B_1$。

情形2 B为可数集。设$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$。若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的序列$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots$。若$A\cap B\neq\phi$，记$C=B-A$，则$C\subseteq B$，$A\cap C=\phi$且$A\cup B=A\cup C$。这时当

C 为有限集时，$A\cup C$ 可数（属情形 1），因而 $A\cup B$ 可数；当 C 为无限集时，由命题 1 知 C 可数，且因 $A\cap C=\phi$，故 $A\cup C$（从而 $A\cup B$）可数。**证毕。**

命题 5　若 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个可数，而其它为有限或可数，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 也可数。

证　对 n 归纳，用命题 4 便可。**证毕。**

命题 6　若每个 A_i 有限或可数，且 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$ 是无限集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$ 可数。

证　当 A_i 为有限集时，设 $A_i=\{a_{i0},\cdots,a_{in}\}$；当 A_i 为可数集时，设 $A_i=\{a_{i0},a_{i1},a_{i2},\cdots\}$。分以下两种情形来证明。

1°　如果不同的 A_i 之间没有共同元素，即当 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\phi$，就令 $f(a_{ij})=2^i3^j$，这样得到的 $f:\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i\to\mathrm{N}$ 是单射，利用命题 2 便可。

2°　如果某些不同的 A_i 之间有共同元素，则作出一列新的集 $A'_0,A'_1,A'_2,\cdots$，作的过程是：

$$A'_0=A_0,A'_1=A_1-A_0,\cdots,\ A'_n=A_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}A'_i,\cdots.$$

这样当 $i\neq j$ 时，$A'_i\cap A'_j=\phi$，由 1° 知 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A'_i$ 是可数集，而 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A'_i$。**证毕。**

命题 7　若 A 为可数集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A^i$ 也为可数集。（这里规定 $A^0=\{\phi\}$。）

证 由命题3知每个 A^i $(i>0)$ 为可数集，再用命题6便可。**证毕。**

命题 8 若 A 可数，则所有由A的元素构成的有限序列形成的集B也可数。

证 对任一由A的元素构成的有限序列 $a_{i_1},\cdots,a_{i_n}$，令

$$f(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})=(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})\in A^n.$$

这样的 $f:B\to\bigcup_{i=0}^{\infty}A^i$ 是单射。B是无限集，由命题2知B可数。**证毕。**

有没有不可数的无限集呢？

根据下面的Cantor定理，自然数集N的幂集 $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 就是不可数的无限集的一个例子。

定理 (Cantor) **集A和A的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 不等势。**

证。假设A与 $\mathscr{P}(A)$ 等势，即存在双射 $f:A\to\mathscr{P}(A)$。作一集

$$B=\{a\in A\mid a\notin f(a)\}.$$

注意$f(a)$是 $\mathscr{P}(A)$的元素，A的子集。因B也是A的子集，故$B\in\mathscr{P}(A)$。f 是满射，必然存在B在A中的原象 b，使$f(b)=B$。这时有两种可能：$b\in B$或$b\notin B$。但按B的定义都会导致矛盾：

$$b\in B \quad\Rightarrow\quad b\notin f(b)=B;$$

$$b\notin B \quad\Rightarrow\quad b\in f(b)=B.$$ **证毕。**

集$R\subseteq A^n$叫做A上的 n 元关系。R的特征函数 C_R: $A^n\to\{0,1\}$是由下式定义的：

$$C_R(a_1,\cdots,a_n)=\begin{cases}1, & (a_1,\cdots,a_n)\in R,\\ 0, & (a_1,\cdots,a_n)\notin R.\end{cases}$$

函数 $f:\mathrm{N}^k\to\mathrm{N}$叫做 k 元数论函数。

以下是不可数无限集的例子。

(1) N上所有二元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^2)$不可数。

(2) N上所有 n 元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^n)$不可数。

（3）N的子集的特征函数的全体构成的集 F_c 是不可数集。这是因为，N的不同子集有不同的特征函数，故存在双射 $f: \mathscr{P}(\mathrm{N}) \to F_c$，而 $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 是不可数集。

（4）所有一元数论函数的集不可数（因为不可数集 F_c 是它的无限子集），进而知所有数论函数的集不可数。

1 命题演算

命题演算是我们要建立的最简单、最基本的形式系统。这种系统是用来表现较为简单的逻辑推理的一种数学模型。研究这种系统，除去为了直接应用，还为研究谓词演算（用来表现更为复杂的推理的形式系统）打下基础。

1.1 真值函数

真值函数是用来研究命题演算的重要数学工具。

我们常把集A上的n元函数f：$A^n \to A$叫做A上的n元运算。

记$Z_2=\{0,1\}$。

定义 1（真值函数） 函数f：$Z_2^n \to Z_2$（即Z_2上的n元运算）叫做n元真值函数。

一元真值函数共有四个，分别用f_1,f_2,f_3,f_4表示：

$v \in Z_2$	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$	$f_4(v)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

f_1和f_4是常值函数。

f_2叫做坐标函数（或恒等函数），$f_2(v)=v$。

f_3叫做“非”运算或“否定”运算，常用$\neg$表示：

$$\neg v=f_3(v)=1-v.$$

二元真值函数一共有16个，可将它们的函数值列成下表：

v_1	v_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

在这 16 个二元真值函数中，f_4 和 f_6 是坐标函数：

$$f_4(v_1,v_2)=v_1,$$

$$f_6(v_1,v_2)=v_2.$$

f_5 叫做“蕴涵”运算，以后用符号→表示。它的计算公式为

$$v_1 \to v_2 = f_5(v_1,v_2)=1-v_1+v_1v_2.$$

现在把一元“非”运算┐和二元“蕴涵”运算→的表单独列出如下：

v	$\neg v$
1	0
0	1

v_1	v_2	$v_1 \to v_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

利用上面的表很容易验证以下公式成立：

公式 1 $\neg\neg v=v,$

公式 2 $1\to v=v,$

公式 3 $v\to 1=1,$

公式 4 $v\to 0=\neg v,$

公式 5 $0\to v=1.$

下面当我们说 n 元真值函数 f 可由一元运算┐和二元运算→表示出来，意思是说函数值 $f(v_1,\cdots,v_n)$ 可由 $v_1,\cdots,v_n$ 经有限次运算┐和运算→得到，这里 $v_1,\cdots,v_n \in Z_2$.

命题 1 任一真值函数可由一元运算┐和二元运算→表示出来。

证 对真值函数的元数 n 归纳.

$n=1$ 时，命题正确：

$$f_1(v)=1=v\to v,$$

$$f_2(v)=v,$$

$$f_3(v)=\neg v,$$

$$f_4(v)=0=\neg(v\to v).$$

$n>1$ 时，对任意 n 元函数 f：$Z_2^n\to Z_2$ 及任意 $v_1,\cdots,v_{n-1},v_n\in Z_2$，令

$$g(v_1,\cdots,v_{n-1})=f(v_1,\cdots,v_{n-1},1),$$

$$h(v_1,\cdots,v_{n-1})=f(v_1,\cdots,v_{n-1},0),$$

$$k(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n)=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to v_n)$$
$$\to(\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})\to\neg v_n)).$$

这样就定义了三个新的真值函数：g，h 和 k。g 和 h 是 $n-1$ 元的，k 是 n 元的。由归纳假设，g 和 h 可由 $\neg$ 及 $\to$ 表示出来，按照 k 的定义式，k 也具有这种性质。

下面证明 $k=f$，从而 f 也具有这种性质。

$$k(v_1,\cdots,v_{n-1},1)=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to 1)\to\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})$$
$$\to 0)=1\to\neg\neg g(v_1,\cdots,v_{n-1}) \qquad \text{（由公式 3，4）}$$
$$=1\to g(v_1,\cdots,v_{n-1}) \qquad \text{（由公式 1）}$$
$$=g(v_1,\cdots,v_{n-1}) \qquad \text{（由公式 2）}$$
$$=f(v_1,\cdots,v_{n-1},1). \qquad \text{（}g\text{的定义）}$$

$$k(v_1,\cdots,v_{n-1},0)=(h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to 0)$$
$$\to\neg(g(v_1,\cdots,v_{n-1})\to 1)$$
$$=\neg h(v_1,\cdots,v_{n-1})\to 0 \qquad \text{（由公式 4,3，及}\neg 1=0\text{）}$$
$$=\neg\neg h(v_1,\cdots,v_{n-1}) \qquad \text{（由公式 4）}$$
$$=h(v_1,\cdots,v_{n-1}) \qquad \text{（由公式 1）}$$
$$=f(v_1,\cdots,v_{n-1},0). \qquad \text{（}h\text{的定义）}$$

所得结果说明对任意 $v_1,\cdots,v_n\in Z_2$，都有

$$k(v_1,\cdots,v_n)=f(v_1,\cdots,v_n),$$

于是 $f=k$。**证毕。**

上面关于真值函数的讨论虽用了符号$\neg$和$\rightarrow$，但还不是逻辑，而是数学。

练　习　一

1. 对给定的$n>0$，有多少个不同的n元真值函数？

2. 证明任一真值函数可由$\neg$及二元运算$\vee$和$\wedge$表示出来。这里$\vee$和$\wedge$分别用来表示二元真值函数f_2和f_8：

$$v_1 \vee v_2 = f_2(v_1, v_2),$$

$$v_1 \wedge v_2 = f_8(v_1, v_2).$$

1.2　命题演算 L

1.2.1　自由命题代数 L(X)

定义 1　具有一元运算$\neg$和二元运算$\rightarrow$的集合叫做命题代数。

在这个定义中，集合是随意的，且只要求$\neg$是个一元运算，$\rightarrow$是个二元运算。除此之外，没有要求它们具有其他特殊性质。我们仍把$\neg$叫做"非"，把$\rightarrow$叫做"蕴涵"，这并不意味着它们一定要有什么逻辑性质。

在 1.1 中我们给集$Z_2=\{0,1\}$定义了运算$\neg$和$\rightarrow$，使Z_2成了一种特殊的命题代数。

下面我们要构造一种重要的、新的命题代数——自由命题代数 L(X)，以它作为建立命题演算 L 这个数学模型的基础。

设有可数集$X=\{x_1, x_2, \cdots\}$和只含有两个元素的集$\{a, b\}$。现在我们由这两个集（X 和$\{a, b\}$）出发构造出一列集$L_0, L_1, L_2, \cdots$，构造的方法如下。令

$$L_0 = X = \{x_1, x_2, \cdots\},$$

$$L_1 = \{a\} \times L_0 \cup \{b\} \times L_0 \times L_0 = \{(a, x_1), (a, x_2), \cdots, (b, x_1, x_1), (b, x_1, x_2), (b, x_2, x_1), \cdots\},$$

$$L_2 = \{a\} \times L_1 \cup \{b\} \times L_0 \times L_1 \cup \{b\} \times L_1 \times L_0$$

$$
\begin{aligned}
&=\{(a,(a,x_1)),(a,(a,x_2)),\cdots,(a,(b,x_1,x_1)),\cdots,\\
&\quad(b,x_1,(a,x_1)),\cdots,(b,x_1,(b,x_1,x_1)),\cdots,\\
&\quad(b,(a,x_1),x_1),\cdots,(b,(b,x_1,x_1),x_1),\cdots\},\\
&\quad\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

这样，我们就得到一列形式上一个比一个更为复杂的集。这一列集的定义可归纳写成：

$$L_0 = X,$$

$$L_k = \{a\}\times L_{k-1} \cup \Big(\bigcup_{i+j=k-1} \{b\}\times L_i \times L_j\Big),\ k>0.$$

最后把这一列集 $L_0, L_1, \cdots$ 全部并在一起，构成一个新的集 $L(X)$：

$$L(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k.$$

下面证明这样得到的集 $L(X)$ 有两条性质——可数性和分层性。分层性是指形成 $L(X)$ 的任意两个不同层次 L_i 与 L_j 没有公共元素。

命题 1　$L(X)$ 是可数集。

证　对层次数 k 归纳，由 0.3 命题 3、命题 4、命题 5 即可知每个层次 L_k 都是可数集。再由 0.3 命题 6 便知 $L(X)$ 是可数集。**证毕。**

命题 2　($L(X)$ 的分层性)　当 $0\leqslant i<j$ 时， $L_i\cap L_j=\phi$.

证　对 i 归纳，证明对于每一个 $i\geqslant 0$，只要 $j>i$，便有

$$L_i\cap L_j=\phi.$$

$i=0$ 时，$L_0=\{x_1,x_2,\cdots\}$，而 $L_j\,(j>0)$ 的元素只有两种形式 (a,p) 与 (b,p,q)，所以对于任何 $j>0$，L_0 与 L_j 没有公共元素。

$i>0$ 时，对任意 $j>i$，要证明 L_j 与 L_i 没有公共元素。事实上，L_i 的元素有两种类型：(a,p) 和 (b,p_1,p_2)；L_j 的元素有两种类型：(a,q) 和 (b,q_1,q_2)。因为 p,p_1,p_2 属于比 L_i 低的层次，所以对它们可用归纳假设。首先，p 属于 $i-1$ 层，而 q 属于 $j-1$ 层（见 L_k 的定义），又因 $j-1>i-1$，所以

$p\neq q$，进而 $(a,p)\neq(a,q)$. 剩下要证明 L_i 中另一种类型的元素 (b,p_1,p_2) 与 L_j 中相应类型的元素 (b,q_1,q_2) 不会相等。如果 $(b,p_1,p_2)=(b,q_1,q_2)$，便有 $p_1=q_1$ 且 $p_2=q_2$。这是不可能的，因为根据 L_k 的定义，p_1 与 p_2 所在层次数之和为 $i-1$，而 q_1 与 q_2 所在层次数之和为 $j-1$，所以 $p_1\neq q_1$ 与 $p_2\neq q_2$ 这二者必居其一，或同时出现。（这里再一次要用到归纳假设。）总之，当 $j>i$ 时，L_i 与 L_j 没有公共元素。**证毕**。

L(X) 的分层性是后面的一些归纳定义的依据。

有了集 L(X)，但它现在还不是命题代数。为了用它来构造命题演算，还要使它成为命题代数。为此，要在 L(X) 中定义一个一元运算$\neg$和一个二元运算$\rightarrow$。定义的方法如下。

对于任意 $p,q\in L(X)$，令

$$\neg p=(a,p),$$

$$p\rightarrow q=(b,p,q).$$

按以上定义我们可以看到，当 p 属于层次 L_i 时，$\neg p$ 便属于层次 L_{i+1}；当 p 属于层次 L_i 而 q 属于层次 L_j 时，$p\rightarrow q$ 便属于层次 L_{i+j+1}。

由于带有运算$\neg$和$\rightarrow$，集 L(X) 现在成了命题代数。

从现在起，我们可以把命题代数 L(X) 的各个层次按运算的定义如下写出：

$$L_0=\{x_1,x_2,\cdots\},$$

$$L_1=\{\neg x_1,\neg x_2,\cdots,x_1\rightarrow x_1,x_1\rightarrow x_2,x_2\rightarrow x_1,\cdots\},$$

$$\begin{aligned}L_2=\{&\neg\neg x_1,\neg\neg x_2,\cdots,\neg(x_1\rightarrow x_1),\neg(x_1\rightarrow x_2),\cdots,\\&x_1\rightarrow\neg x_1,\cdots,x_1\rightarrow(x_1\rightarrow x_1),\cdots,\\&\neg x_1\rightarrow x_1,\cdots,(x_1\rightarrow x_1)\rightarrow x_1,\cdots\},\end{aligned}$$

……。

L_k 中的元素叫做 L(X) 的第 k 层元素。它们都可以看作是由 L_0（即 X）的元素经 k 次运算得来的，毫无例外。对层次数 k 进行简单的归纳便可证明这一点。

注意，由命题 2 知$\neg\neg x_i\neq x_i$。试将这个事实与命题代数

Z_2加以比较。对于Z_2，我们有$\neg\neg v=v$。（1.1公式1.）

上面得到的$L(X)$通常叫做由集X生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型代数。以后出现“由某某集生成的某某型代数”这样的对象，指的都是由类似于上面的过程得到的代数系统。

把上面的X换成$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，用相同的方法可以构造出命题代数$L(X_n)$，即由集X_n生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型代数。不同的是，现在的$L_0=\{x_1,\cdots,x_n\}$。L_0是个有限集，$L(X_n)$仍是个可数集。$L(X_n)$同样具有分层性。从构造过程看出，$L(X_n)\subseteq L(X)$。$L(X_n)$叫做命题代数$L(X)$的子代数。

现在正式给出自由命题代数的定义。

定义 2 （自由命题代数） 设$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$，$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$。**命题代数**$L(X)$ **（即由X生成的**$\{\neg,\rightarrow\}$**型代数）叫做由集X生成的自由命题代数；**$L(X_n)$**叫做由集**X_n**生成的自由命题代数。我们还把X和**X_n**叫做命题变元集，把X和**X_n**的元素**x_i**叫做命题变元。**

总结一下以上过程，我们发现，下面两条就给出了自由命题代数$L(X)$的全部元素：

1° 每个命题变元$x_i\in L(X)$；

2° 若$p,q\in L(X)$，则$\neg p$，$p\rightarrow q\in L(X)$。

从一开始就可以把这两条拿出来，把整个过程省掉。但我们不想那样做，而是把$L(X)$作为一种代数系统建立起来，这样就可以用代数方法对它进行数学研究。

这里讨论的仍然是数学而不是逻辑。当然，我们可以去思考它们可能有什么样的逻辑意义。

练 习 二

1. 证明，$L(X)$的每个第k层元素（$k>0$）都可由命题变元经k次运算得到。

2. 写出由$X_1=\{x_1\}$生成的自由命题代数$L(X_1)$的前四个

层次 L_0, L_1, L_2 和 L_3。(将每个元素都作为运算的结果写出。)

3. 写出由 $X_2 = \{x_1, x_2\}$ 生成的自由命题代数 $L(X_2)$ 的前三个层次 L_0, L_1 和 L_2。

4. $L(X_3)$ 的 L_1, L_2 和 L_3 各有多少个元素?

1.2.2 命题演算 L 的建立

定义 1 (命题演算 L) 命题变元集 $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 上的命题演算 L，是指带有下面规定的“公理”和“证明”的自由命题代数 $L(X)$。

(1) “公理”

取 $L(X)$ 的具有以下形状的元素作为“公理”：

(L1) $p \to (q \to p)$， **(肯定后件律)**

(L2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$，**(蕴涵词分配律)**

(L3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$， **(换位律)**

其中 $p, q, r \in L(X)$.

(2) “证明”

设 $\Gamma \subseteq L(X)$，$p \in L(X)$。当我们说“p 是从 Γ 可证的”，是指存在着 $L(X)$ 的元素的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$，其中 $p_n = p$，且每个 p_k $(k = 1, \cdots, n)$ 满足：

(i) $p_k \in \Gamma$，**或**

(ii) p_k **是“公理”，或**

(iii) **存在** $i, j < k$ **使** $p_j = p_i \to p_k$。

具有上述性质的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 的“证明”.

让我们对这个定义作些解释和说明。

1° 命题演算 L 是用自由命题代数 $L(X)$ 定义的。简单地说，L 就是 $L(X)$。但 L 比 $L(X)$ 有更多的内容。L 以 $L(X)$ 为框架，同时又有一些 $L(X)$ 所没有的新的内部结构。

2° 定义中的“公理”和“证明”加上了引号，是为了说明这里的概念是命题演算 L 这个形式系统中的数学概念(“公理”

是 L(X) 的一些特殊元素；"证明"则是由 L(X) 的一些元素组成的具有特殊性质的有限序列），以便把它们和元系统中的公理和证明区别开来。以后在不引起混淆时，常把所加的引号去掉。这里的"证明"，通常也叫做形式证明。

3° "公理"中的 p,q,r 是 L(X) 的任意元素，故 L 的"公理"不是三条而是无穷多条，它们被分成 (L1)，(L2)，(L3) 这三种**模式**。例如，下面三个元素都是 (L1) 型的"公理"：

$$x_1 \to (x_1 \to x_1),$$
$$\neg x_7 \to (x_{10} \to \neg x_7),$$
$$(\neg x_2 \to x_3) \to (\neg\neg x_4 \to (\neg x_2 \to x_3)).$$

4° 取 L(X) 的一些特殊元素作为"公理"，取法不是唯一的。不同的取法可得到不同类型的命题演算。

5° 按定义，p 从 Γ 可证，是指存在着"证明"：$p_1,\cdots,p_n$。这样的证明如果存在，一定不是唯一的。比如，我们可以在任一个"证明"中多插进任一条"公理"而得到另一个"证明"。

6° 写出一个 L 中的"证明"，有三条规则，其中规则 (iii) 的意思是，如果在序列的前面已经写出了 p_i 和 $p_i \to p_k$，则可在后面写出 p_k：

$$\cdots, p_i \to p_k, \cdots, p_i, \cdots, p_k, \cdots,$$

其中 p_i 也可出现在 $p_i \to p_k$ 之前。

定义 2 （合式公式，语法推论） 建立了命题演算 L 之后，进一步规定：

(1) L(X) 的元素叫做命题演算 L 的合式公式，简称为公式。（于是下面两条给出了 L 的全部公式：(i) 命题变元都是公式；(ii) 若 p,q 是公式，则 $\neg p$，$p \to q$ 也是公式。）形为 $\neg p$ 的公式叫做否定式。形为 $p \to q$ 的公式叫做蕴涵式，其中 p 叫做蕴涵式的前件，q 叫做蕴涵式的后件。

(2) 如果公式 p 从公式集 Γ 可证，那么我们写 $\Gamma \vdash p$，必要时也可写成 $\Gamma \underset{L}{\vdash} p$。这时 Γ 中的公式叫做"假定"，p 叫做

假定集 Γ 的语法推论。

（3）若 $\phi\vdash p$，则称 p 是 L 的“定理”，记为$\vdash p$。p 在 L 中从 ϕ 的证明 $p_1,\cdots,p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明。

（4）在一个证明中，当 $p_j=p_i\to p_k$ （$i,j<k$）时，就说 p_k 是由 p_i，$p_i\to p_k$ 使用假言推理（modus ponens）这条推理规则而得，或简单地说“使用MP 而得”。

本章中出现的 p,q,r 等字母用于表示 L 的任意公式。注意它们和命题变元的关系。命题变元 x_i 是 L(X) 的零层公式，而 p,q,r 等则是 L(X) 的任意公式，可以是命题变元，也可以是其他层次的公式。

至此，我们关于命题演算 L所作的讨论尽管内容还是属于数学，但 L已经不同于一般的数学，而是一种具有特殊结构的代数系统，是为了研究命题逻辑而建立的一种具体数学模型。这种形式系统能不能用来表现实际的推理过程，在多大程度上能用来表现实际的推理过程，正是我们所要研究的事情。尽管现在就可以对 L 作逻辑解释，但我们还不急于立即这样做，而是先对 L 本身作些初步研究。

如果“证明”的定义搞清楚了，便可以立即得出以下几点结论。

1° 若 p 是 L 的公理，则 $\Gamma\vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立。

2° 若$\vdash p$（即 p 是 L 的定理），则 $\Gamma\vdash p$ 对于任一公式集 Γ 都成立。

3° 若 $p\in\Gamma$，则 $\Gamma\vdash p$。

4° $\{p,p\to q\}\vdash q$。

5° 若 $\Gamma\vdash p_n$，且已知 $p_1,\cdots,p_n$ 是 p_n 从 Γ 的证明，则当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，有 $\Gamma\vdash p_k$，且 $p_1,\cdots,p_k$ 是 p_k 从 Γ 的证明。

6° 若 Γ 是无限集，且 $\Gamma\vdash p$，则存在 Γ 的有限子集 Δ 使 $\Delta\vdash p$。

写出一个符合要求的 L中的证明，往往并不容易。下面先看

几个简单的例子。

例 1　证明$\{p\}\vdash q\to t$。

为证$\{p\}\vdash q\to p$，我们构造$q\to p$从$\{p\}$的一个“证明”如下：

（1）p　　　　假定

（2）$p\to(q\to p)$　　　　(L1)

（3）$q\to p$　　　　（1），（2），MP。**证毕.**

我们把“证明”中公式的编号写在该公式的左边，而把写出该公式的依据写在该行的最右端。这些编号和依据并不是“证明”的一部分。本例中的“证明”，是由三个公式构成的有限序列：

$$p,\ p\to(q\to p),\ q\to p.$$

例 1 的结论$\{p\}\vdash q\to p$是（L1）的变形，有时也叫做“肯定后件律”。

例 2　证明$\vdash(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$。

下面是$(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$在 L 中的一个证明：

（1）$x_1\to(x_2\to x_1)$　　　　(L1)

（2）$(x_1\to(x_2\to x_1))\to((x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1))$　　　　(L2)

（3）$(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_1)$　　　　（1），（2），MP。**证毕.**

例 3　证明$\{x_1, x_2\to(x_1\to x_3)\}\vdash x_2\to x_3$。

下面是所要的一个证明：

（1）$x_2\to(x_1\to x_3)$　　　　假定

（2）$(x_2\to(x_1\to x_3))\to((x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3))$　　　　(L2)

（3）$(x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3)$　　　　（1），（2）MP

（4）x_1　　　　假定

（5）$x_1\to(x_2\to x_1)$　　　　(L1)

（6）$x_2\to x_1$　　　　（4），（5），MP

（7）$x_2\to x_3$　　　　（3），（6），MP。**证毕.**

命题 1　$\vdash p\to p$　**（同一律）**

证　下面是$p\to p$在 L 中的一个证明：

(1) $p\to((p\to p)\to p)$ (L1)

(2) $(p\to((p\to p)\to p))\to((p\to(p\to p))\to(p\to p))$ (L2)

(3) $(p\to(p\to p))\to(p\to p)$ (1), (2), MP

(4) $p\to(p\to p)$ (L1)

(5) $p\to p$ (3), (4), MP. **证毕.**

命题 2 $\vdash\neg q\to(q\to p)$ **(否定前件律)**

证 下面是所要的证明：

(1) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ (L3)

(2) $((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))\to(\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p)))$ (L1)

(3) $\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))$ (1), (2), MP

(4) $(\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p)))\to((\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p)))$ (L2)

(5) $(\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p))$ (3),(4), MP

(6) $\neg q\to(\neg p\to\neg q)$ (L1)

(7) $\neg q\to(q\to p)$ (5), (6), MP. **证毕.**

命题 2 的证明中开始用了 (L3) 型公理，而以前的例题和命题并未用(L3)。

定义 3（无矛盾公式集）如果对任何公式 q，$\Gamma\vdash q$ 和 $\Gamma\vdash\neg q$ 二者不同时成立，就称公式集 Γ 是无矛盾公式集. 否则称 Γ 为有矛盾集.

命题 3 若 Γ 是有矛盾公式集，则对 L 的任一公式 p，都有 $\Gamma\vdash p$.

证 Γ 有矛盾，即存在公式 q 使 $\Gamma\vdash q$ 和 $\Gamma\vdash\neg q$ 同时成立. 于是对任一公式 p，存在着 p 从 Γ 的证明：

$\cdots,\ q,\ \cdots,\ \neg q,\ \cdots,\ \neg q\to(q\to p),\ q\to p,\ p.$

这里利用了命题 2 的结论（否定前件律）. **证毕.**

为从 Γ 可证的公式 p 写出一个符合定义要求的从 Γ 的证明，构造的方法往往不容易想出来. 这种证明往往还要写得很长. 例

如，可以证明，公式 $(\neg p\to p)\to p$ 是 L 的定理，但我们若要严格按照定义写出它在 L 中的一个证明，要写十九步。

下面介绍的三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律将会帮助我们建立 $\Gamma\vdash p$ 这种形式的结果。但在开头，还是有必要做一些按照定义写出证明的练习。

练　习　三

1．证明 L 中所有能写出的“证明”构成的集是可数集。

2．写出以下公式在 L 中的“证明”（即证明它们是 L 的定理）．

1° $(x_1\to x_2)\to((\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1))$，

2° $((x_1\to(x_2\to x_3))\to(x_1\to x_2))\to((x_1\to(x_2\to x_3))\to(x_1\to x_3))$，

3° $x_1\to(x_2\to(x_1\to x_2))$．

3．证明下面的结论．

1° $\{\neg p\}\vdash p\to q$，

2° $\{\neg\neg p\}\vdash p$，

3° $\{p\to q,\ \neg(q\to r)\to\neg p\}\vdash p\to r$，

4° $\{p\to(q\to r)\}\vdash q\to(p\to r)$，

5° $\{p\to q,\ q\to r\}\vdash p\to r$．

4．试证，若 $\Gamma\vdash q$ 且 $\Gamma\cup\{q\}\vdash p$，则 $\Gamma\vdash p$．

1.2.3 演绎定理

我们很快会看到，在研究命题演算 L 的过程中，下面的演绎定理是很有用的重要结论。

定理（演绎定理） $\Gamma\cup\{p\}\vdash q \quad\Leftrightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q$．

证 （$\Leftarrow$） 假定 $\Gamma\vdash p\to q$．由定义，$p\to q$ 在 L 中有一个从 Γ 的证明 $p_1,\ \cdots,\ p_n$，其中 $p_n=p\to q$．于是

$$p_1,\ \cdots,\ p_n,\ p,\ q$$

便是 q 在 L 中从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的证明。

($\Rightarrow$) 假定 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，并设 $q_1,\cdots,q_n(=q)$ 是 q 从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的一个证明.我们对这个证明的长度 n 用归纳法来证明 $\Gamma\vdash p\to q$.

1° $n=1$ 时，有三种可能：$q=p$，$q\in\Gamma$，或 q 是公理。不管哪种情况出现，都有 $\Gamma\vdash p\to q$。事实上，当 $q=p$ 时，由1.2.2命题 1 知 $\vdash p\to p$，于是有 $\Gamma\vdash p\to p$ 即 $\Gamma\vdash p\to q$；当 $q\in\Gamma$ 或 q 为公理时，序列

$$q,\ q\to(p\to q),\ p\to q$$

就是 $p\to q$ 从 Γ 的证明。

2° $n>1$ 时，有四种可能的情形：$q=p$，$q\in\Gamma$，q 是公理，或 q 由于使用 MP 而得。前三种情形与 1° 中的三种情形同样处理就可以了。下面只用讨论 q 由 q_i 及 $q_j=q_i\to q$ 使用 MP 而得的情形。因 $i,j<n$，由归纳假设，

$$\Gamma\cup\{p\}\vdash q_i \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q_i,$$

$$\Gamma\cup\{p\}\vdash q_j \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash p\to q_j \text{ 即 } \Gamma\vdash p\to(q_i\to q).$$

于是我们有 $p\to q$ 从 Γ 的证明：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\\ (k) & p\to q_i\end{array}\right\} p\to q_i \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k+1) & \cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\\ (l) & p\to(q_i\to q)\end{array}\right\} p\to(q_i\to q) \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$(l+1)$	$(p\to(q_i\to q))\to((p\to q_i)\to(p\to q))$	(L2)
$(l+2)$	$(p\to q_i)\to(p\to q)$	$(l),(l+1)$,MP
$(l+3)$	$p\to q$	$(k),(l+2)$,MP

这就完成了归纳过程。**证毕**。

推论（假设三段论） $\{p\to q,q\to r\}\vdash p\to r$。

证 根据演绎定理，为了证明 $\{p\to q,q\to r\}\vdash p\to r$，只用证明 $\{p\to q,q\to r,p\}\vdash r$ 就可以了。不难看出，

$$p,\ p\to q, q, q\to r, r$$

就是 r 从$\{p\to q, q\to r, p\}$的证明。**证毕**。

假设三段论 (Hypothetical Syllogism) 简记作HS，以后可作为一条新推理规则直接引用。

为了建立 $\Gamma\vdash p\to q$ 这种形式的结果，使用演绎定理往往是比较方便的。这是因为，引进了一个新假定 p 以后，证明 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 一般要比证明 $\Gamma\vdash p\to q$ 容易得多。为了看清这一点，只要把上面推论的证明与练习三题3－5°中的结论的证明加以比较就可以了。

注意，在证明演绎定理的过程中没有用到（L3）型公理。这说明如果在建立 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ 的过程中没有用（L3），那么不用（L3）就可以建立 $\Gamma\vdash p\to q$，而且反过来也是如此。换句话说，如果在命题演算L的定义中把（L3）去掉或换成别的公理，但其他都保持不变，那么演绎定理对新的命题演算系统仍然成立。

例 1 重新证明 $\vdash\neg q\to(q\to p)$。（试与1.2.2命题2的证明加以比较。）

根据演绎定理，只用证 $\{\neg q\}\vdash q\to p$。

下面是 $q\to p$ 从 $\{\neg q\}$ 的证明：

（1）	$\neg q\to(\neg p\to\neg q)$	(L1)
（2）	$\neg q$	假定
（3）	$\neg p\to\neg q$	(1),(2),MP
（4）	$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	(L3)
（5）	$q\to p$	(3),(4),MP

命题 1 **（否定肯定律）** $\vdash(\neg p\to p)\to p$。

证 由演绎定理，只用证明 $\{\neg p\to p\}\vdash p$。

下面是 p 从 $\{\neg p\to p\}$ 的一个证明。

（1） $\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p))$ （由1.2.2命题2）

（2） $(\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p)))$

$\to((\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to p)))$ (L2)

(3) $(\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to p))$ (1),(2),MP

(4) $\neg p\to p$ 假定

(5) $\neg p\to\neg(\neg p\to p)$ (3),(4),MP

(6) $(\neg p\to\neg(\neg p\to p))\to((\neg p\to p)\to p)$ (L3)

(7) $(\neg p\to p)\to p$ (5),(6),MP

(8) p (4),(7),MP。**证毕.**

命题1的证明中列出的"证明"已经不是原来定义所要求的严格意义下的"证明"，因为这里已经引用了前面建立的结论（即1.2.2命题2——否定前件律——的特殊情形）。尽管如此，仍足以证明所要建立的结论是正确的。（参见练习三题4.）

练　习　四

1．先根据定义直接证明

$$\vdash(x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_2),$$

然后再利用演绎定理来证明它。

2．利用演绎定理证明以下公式是L的定理。

1° $p\to\neg\neg p$。

2° $(q\to p)\to(\neg p\to\neg q)$。（换位律）

3° $((p\to q)\to p)\to p$。（Peirce律）

4° $\neg(p\to q)\to(q\to p)$．

1.2.4　反证律与归谬律

下面要建立的两个语法定理（反证律与归谬律）和演绎定理一样，对进行形式推理常有很大帮助。

定理 1（反证律）

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q\\ \Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q\end{array}\right\}\Rightarrow\Gamma\vdash p.$$

证 根据已知条件（q 和 $\neg p$ 都存在从 $\Gamma\cup\{\neg p\}$ 的证明），可以先写出 p 从 $\Gamma\cup\{\neg p\}$ 的证明如下：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (k) & q\end{array}\right\} q \text{ 从 } \Gamma\cup\{\neg p\} \text{ 的证明}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(k+1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (l) & \neg q\end{array}\right\} \neg q \text{ 从 } \Gamma\cup\{\neg p\} \text{ 的证明}$$

$(l+1)$	$\neg q\to(q\to p)$	否定前件律
$(l+2)$	$q\to p$	(l)，$(l+1)$，MP
$(l+3)$	p	(k)，$(l+2)$，MP

至此证明了 $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash p$。（尚未达到目的：$\Gamma\vdash p$。）用一次演绎定理，可得 $\Gamma\vdash\neg p\to p$。由此可将 p 从 Γ 的证明如下构造出来：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ (m) & \neg p\to p\end{array}\right\} \neg p\to p \text{ 从 } \Gamma \text{ 的证明}$$

$(m+1)$	$(\neg p\to p)\to p$	否定肯定律
$(m+2)$	p	(m)，$(m+1)$，MP

于是有 $\Gamma\vdash p$。**证毕。**

反证律与直观的反证法是一致的：为证明一个命题，先否定它；推出了矛盾，就可以肯定它。

在证明反证律的过程中并未直接用到（L 3），但用到了否定前件律和否定肯定律，这“二律”的证明都是要用（L 3）的。

下例用来说明反证律的应用。

例 1 证明 $\vdash(\neg p\to\neg q)\to((\neg p\to q)\to p)$。

由演绎定理，只用证 $\{\neg p\to\neg q,\ \neg p\to q\}\vdash p$。为用反证律，我们把 $\neg p$ 作为新假定。以下公式从 $\{\neg p\to\neg q, \neg p\to q,\ \neg p\}$ 都

是可证的。

（1）$\neg p$ 新假定

（2）$\neg p\to\neg q$ 假定

（3）$\neg p\to q$ 假定

（4）$\neg q$ （1），（2），MP

（5）q （1），（3），MP

由（4），（5）用反证律即得$\{\neg p\to\neg q,\neg p\to q\}\vdash p$。

作一比较，下面不用反证律给出p从$\{\neg p\to\neg q,\ \neg p\to q\}$的一个证明。

（1）$(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ （L3）

（2）$\neg p\to\neg q$ 假定

（3）$q\to p$ （1），（2），MP

（4）$\neg p\to q$ 假定

（5）$\neg p\to p$ （3），（4），HS

（6）$(\neg p\to p)\to p$ 否定肯定律

（7）p （5），（6），MP

这个证明更长。问题还在于这种构造证明的方法不容易想出来。

定理 1 推论（双重否定律）

1° $\{\neg\neg p\}\vdash p$，

2° $\vdash\neg\neg p\to p$。

证 用反证律证 1°（由 1°用演绎定理即可得出 2°），把$\neg p$作为新假定，便有

（1）$\{\neg\neg p,\ \neg p\}\vdash\neg p$，

（2）$\{\neg\neg p,\ \neg p\}\vdash\neg(\neg p)$。

由（1），（2）用反证律即得$\{\neg\neg p\}\vdash p$。证毕。（试与练习三题 3 - 2°未用反证律的证明加以比较。）

定理 2（归谬律）

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma\cup\{p\}\vdash q\\ \Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\Gamma\vdash\neg p.$$

证 因已知 $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，故存在 q 从 $\Gamma\cup\{p\}$ 的证明。在这个证明中所有出现的假定 p 之前，都插入 $\neg\neg p$ 和 $\neg\neg p\to p$ 这两项，于是该证明就变成了 q 从 $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}$ 的一个证明，从而得到

（1） $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash q$.

同理由已知条件 $\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q$ 可得

（2） $\Gamma\cup\{\neg\neg p\}\vdash\neg q$.

由（1），（2）用反证律得 $\Gamma\vdash\neg p$. 这样便由反证律推出了归谬律。证毕。

下例用来说明归谬律的应用。

例 2 证明 $\vdash p\to(\neg q\to\neg(p\to q))$.

由演绎定理，只用证 $\{p,\neg q\}\vdash\neg(p\to q)$。把 $p\to q$ 作为新假定，立即可得

（1） $\{p,\neg q,p\to q\}\vdash q$,

（2） $\{p,\neg q,p\to q\}\vdash\neg q$.

由（1），（2）用归谬律便得 $\{p,\neg q\}\vdash\neg(p\to q)$.

定理 2 推论（第二双重否定律）

1° $\{p\}\vdash\neg\neg p$,

2° $\vdash p\to\neg\neg p$.

证 因

（1） $\{p,\neg p\}\vdash p$,

（2） $\{p,\neg p\}\vdash\neg p$,

由（1），（2）用归谬律即得 $\{p\}\vdash\neg\neg p$. 证毕。

可以看出，演绎定理、反证律和归谬律的共同点是：用增加新假定的办法使形式证明更易于进行。

反证律和归谬律有什么不同？从形式上看，似乎差别不大。反证律是将待证公式先否定，把否定的待证公式作为新假定，若

推出矛盾，则肯定这个待证公式；归谬律是将待证的否定式先肯定，去掉前边的否定号后作为新假定，若推出矛盾，则证明了原否定式。对我们的系统来说，反证律和归谬律的差别是不重要的。前者常用来证明肯定式，后者常用来证明否定式。但对于其他某些系统来说，它们的差别是本质的。

前面我们曾多次提醒，有些证明用了（L 3），而有些证明则与（L 3）无关。许多不同的系统之间的差别，集中表现在对公理模式（L 3）态度上。

一些系统不承认（L 3），在这些系统中，（L 3）被换成了强弱不等但都比（L 3）较弱的形式。它们共同点往往是：不承认反证律，但承认归谬律。

现把一些重要结论列出如下，以后可以直接引用。

$\vdash p \to p$（同一律）

$\vdash \neg q \to (q \to p)$ （否定前件律）

$\vdash (\neg p \to p) \to p$ （否定肯定律）

$\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ （HS，即假设三段论）

$\vdash \neg\neg p \to p$ （双重否定律）

$\vdash p \to \neg\neg p$ （第二双重否定律）

$\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ （换位律，见练习四题2-2°。）

练　　习　　五

1. 证明

1° $\vdash (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$。

2° $\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$。

3° $\vdash \neg (p \to q) \to \neg q$。

4° $\vdash \neg (p \to q) \to p$。

5° $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$。

2. 不用（L 3），试由归谬律和定理 1 推论（即 $\vdash \neg\neg p \to p$）推出反证律。

1.2.5 析取，合取与等值

对于一个一般的命题代数A（它有一个一元运算$\neg$和一个二元运算$\to$），还可以在其中定义三个新的二元运算：$\vee$（析取），$\wedge$（合取）和$\leftrightarrow$（等值）。它们的定义式是：

$$a_1 \vee a_2 = \neg a_1 \to a_2,$$

$$a_1 \wedge a_2 = \neg(a_1 \to \neg a_2),$$

$$a_1 \leftrightarrow a_2 = (a_1 \to a_2) \wedge (a_2 \to a_1),$$

其中a_1，a_2是A的任意元素。

对于命题代数Z_2，根据原来1.1中$\neg$，$\to$的定义和现在$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$的定义，可算出下表：

v_1	v_2	$v_1 \to v_2$	$v_1 \vee v_2$	$v_1 \wedge v_2$	$v_1 \leftrightarrow v_2$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1

这里的$\vee$，$\wedge$和$\leftrightarrow$就是1.1中的二元真值函数表里的f_2，f_8和f_7。它们也可用以下公式来表示：

$$v_1 \vee v_2 = v_1 + (1 - v_1) v_2,$$

$$v_1 \wedge v_2 = v_1 v_2,$$

$$v_1 \leftrightarrow v_2 = v_1 v_2 + (1 - v_1)(1 - v_2).$$

对于自由命题代数L（X），在其中引进了运算$\vee$，$\wedge$和$\leftrightarrow$之后，便有以下关于命题演算L的结果。

命题 1

1° $\vdash p \to (p \vee q)$.

2° $\vdash q \to (p \vee q)$.

3° $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$.

4° $\vdash (p \vee p) \to p$.

5° $\vdash \neg p \vee p$. **（排中律）**

证 1° 由否定前件律（或 1.2.2 命题 3）即可得

$$\{p,\ \neg p\}\vdash q,$$

用两次演绎定理，便有$\vdash p\to(\neg p\to q)$，此即$\vdash p\to(p\vee q)$。

2° $q\to(\neg p\to q)$是(L1)型公理。

3° 留作练习。

4° $(p\vee p)\to p$ 就是否定肯定律 $(\neg p\to p)\to p$。

5° 排中律$\neg p\vee p$ 就是双重否定律$\neg\neg p\to p$。**证毕。**

命题 2

1° $\vdash(p\wedge q)\to p$。

2° $\vdash(p\wedge q)\to q$。

3° $\vdash(p\wedge q)\to(q\wedge p)$。

4° $\vdash p\to(p\wedge p)$。

5° $\vdash p\to(q\to(p\wedge q))$。

6° $\vdash\neg(p\wedge\neg p)$。**（矛盾律）**

证 要证$\vdash(p\wedge q)\to p$，即要证$\vdash\neg(p\to\neg q)\to p$。下面是所要的一个证明：

（1）	$\neg p\to(p\to\neg q)$	否定前件律
（2）	$(\neg p\to(p\to\neg q))\to(\neg(p\to\neg q)\to\neg\neg p)$	换位律
（3）	$\neg(p\to\neg q)\to\neg\neg p$	（1），（2），MP
（4）	$\neg\neg p\to p$	双重否定律
（5）	$\neg(p\to\neg q)\to p$	（3），（4），HS

矛盾律$\neg(p\wedge\neg p)$按$\wedge$的定义就是

$$\neg\neg(p\to\neg\neg p),$$

证明时要两次应用第二双重否定律。

其余结论的证明细节略去。方式是类似的，都是先把$\wedge$按定义换成用$\neg$和$\to$来表示。**证毕。**

命题 3

1° $\vdash(p\leftrightarrow q)\to(p\to q)$。

2° $\vdash(p\leftrightarrow q)\to(q\to p)$。

3° $\vdash (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)$.

4° $\vdash (p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow\neg q)$.

5° $\vdash (p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow p)\rightarrow(p\leftrightarrow q))$.

命题 4 (De•Morgan律)

1° $\vdash\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$.

2° $\vdash\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$.

练　　习　　六

1. 证明命题 1-3°.
2. 证明命题 2-2°,3°,4°.
3. 证明命题 3-4°.
4. 证明命题 4-1°.

*1.2.6 命题演算的其他系统介绍

本段内容与后文关系不大，可略去不读。

在建立命题演算时采用哪些公式作为公理，可以有不同的选择，从而可以得到不同的系统。

1) 古典命题演算系统

把L中的（L 3）型公理去掉，换上

（L′ 3） $\neg q\rightarrow(q\rightarrow p)$ （否定前件律）

（L′ 4） $(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$ （否定肯定律）

而其他皆保持不变，得到的命题演算记作L′.

把L中的(L3)去掉，但允许使用反证律，得到的系统记作F.

把L中的（L3)去掉，但允许使用归谬律，且以双重否定律（即$\neg\neg p\rightarrow p$）为公理，得到的系统记作F′.

这样我们就有了四个不同的命题演算系统，它们之间的区别是

L 有（L 3），

L′ 有（L′ 3），（L′ 4），

F　有反证律，

F′　有归谬律和$\neg\neg p\to p$。

定理 1　L,L′,F,F′**四个系统等价，即：对任一公式** $p\in L(X)$，

$$\vdash_{L} p \Leftrightarrow \vdash_{L'} p \Leftrightarrow \vdash_{F} p \Leftrightarrow \vdash_{F'} p.$$

证　因为（L 1）和（L 2）是这些系统共有的，所以演绎定理对它们都成立。（见 1.2.3 例 1 前的一段说明。）

先来证 F 和 F′ 的等价性。

由反证律可推出$\neg\neg p\to p$（1.2.4 定理 1 推论），并进而可推出归谬律（1.2.4 定理 2）。在证明过程中都没有直接使用（L 3）。这就说明，凡在 F′中能证的公式在 F 中也能证，即

$$\vdash_{F'} p \Rightarrow \vdash_{F} p.$$

反之，由归谬律和$\neg\neg p\to p$能推出反证律，证明过程中不用（L3）。（见练习五题 2。）于是有

$$\vdash_{F} p \Rightarrow \vdash_{F'} p.$$

下面证明 L,L′,F 三者等价。

前面已建立事实

$$\vdash_{L} \neg q\to(q\to p),\quad（否定前件律）$$

$$\vdash_{L} (\neg p\to p)\to p,\quad（否定肯定律）$$

这说明

$$\vdash_{L'} p \Rightarrow \vdash_{L} p.$$

在 L′ 中可以导出反证律(注意 1.2.4 定理 1 的证明和1.2.4 例 1 前的说明）。所以有

$$\vdash_{F} p \Rightarrow \vdash_{L'} p.$$

剩下只用证明$\vdash_{L} p \Rightarrow \vdash_{F} p$就可以了。

为此，只需要下面的结果：

$$\vdash_F (\neg p\to\neg q)\to(q\to p).\quad (\text{即}(L3))$$

事实上，我们有

1° $\{\neg p\to\neg q,\ q,\ \neg p\}\vdash_F q$,

2° $\{\neg p\to\neg q,\ q,\ \neg p\}\vdash_F \neg q$,

由 1°，2° 用反证律得

$\{\neg p\to\neg q, q\}\vdash_F p$,

再用两次演绎定理便可。**证毕。**

L，L'，F，F'以及任何与它们等价的系统都叫做古典命题演算系统。

$\neg\neg p\to p$ 由反证律（不直接用（L3））立即可证（见1.2.4定理 1 推论），但下面我们很快会看到，将反证律换成归谬律却办不到这一点。

2）极小系统

在 L 中去掉（L3），但允许使用归谬律，这样得到的系统（也可以说由 F'去掉$\neg\neg p\to p$所得的系统）叫做极小系统，记作 G。

因归谬律在 L 中成立，故有

$$\vdash_G p\ \Rightarrow\ \vdash_L p.$$

但反之不成立：存在着 L 的定理在 G 中得不到证明。

命题 1 $\vdash_G \neg\neg p\to p$ **和** $\vdash_G \neg q\to(q\to p)$ **不恒成立。**

证 先给每一个公式都规定一个"重量" w。规定的方式是

（1）命题变元的重量为 0，即 $w(x_i)=0$;

（2）否定式的重量为 1，即 w $(\neg p)=1$;

（3）若 $w(p)=1$ 且 $w(q)=0$，则 $w(p\to q)=0$，否则 $w(p\to q)=1$。

由简单的计算可知以下结论成立。

1°（L1）型和（L2）型公理的重量恒为 1。

2° 由重为1的公式经使用MP得出的公式重也恒为1，即

$$w(p)=w(p\to q)=1 \quad \Rightarrow \quad w(q)=1.$$

3° 用归谬律推出的公式（都是否定式）重恒为1。

由以上三个结论立即推出

$$\underset{G}{\vdash} p \quad \Rightarrow \quad w(p)=1.$$

但我们有

$$w(\neg\neg x_1\to x_1)=0$$
$$w(\neg\neg x_1\to(\neg x_1\to x_1))=0.$$

这说明$\neg\neg x_1\to x_1$和$\neg\neg x_1\to(\neg x_1\to x_1)$都不是G的定理，而前者是双重否定律$\neg\neg p\to p$的特例，后者是否定前件律$\neg q\to(q\to p)$的特例。**证毕。**

L与F等价，说明（L3）与反证律等价；L比G强，说明（L3）比归谬律强，即反证律比归谬律强。

注意，$\underset{G}{\vdash}\neg\neg p\to p$不恒成立。但$\underset{G}{\vdash} p\to\neg\neg p$却恒成立。（见1.2.4定理2推论及其证明。）所以双重否定律和第二双重否定律是有区别的。

3）Heyting 系统

把L中的（L3）换成

（L'3） $\neg q\to(q\to p)$，**（否定前件律）**

同时允许使用归谬律（即由极小系统G增加公理（L'3））得到的系统叫做Heyting系统，记作H。

命题2 $\underset{H}{\vdash}\neg\neg p\to p$**不恒成立。**

证 给每个公式规定重量如下：

（1） $w(x_i)=0.$

（2） $w(p)=0 \quad \Rightarrow \quad w(\neg p)=2,$

$w(p)=1 \quad \Rightarrow \quad w(\neg p)=2,$

$w(p)=2 \quad \Rightarrow \quad w(\neg p)=1.$

（3） $w(p)=1$且$w(q)=0 \quad \Rightarrow \quad w(p\to q)=0,$

$$\mathrm{w}(p)=0 \text{ 且 } \mathrm{w}(q)=2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{w}(p\to q)=2,$$
$$\mathrm{w}(p)=1 \text{ 且 } \mathrm{w}(q)=2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{w}(p\to q)=2,$$
其他情形规定 $\mathrm{w}(p\to q)=1$。

重量的取值范围是$\{0,1,2\}$。

注意，在演绎定理成立的任何系统中，允许使用归谬律，相当于增加形为

$$(p\to q)\to((p\to\neg q)\to\neg p)$$

的公式为公理。所有这些公式，（L1）型和（L2）型公理，以及所有形为$\neg q\to(q\to p)$的公式，它们的重量全都恒为1。（验证留给读者。）同时，由重为1的公式使用MP得到的公式重也为1。这些事实说明

$$\vdash_{\mathrm{H}} p \quad \Rightarrow \quad \mathrm{w}(p)=1,$$

但是我们有

$$\mathrm{w}(\neg\neg x_1\to x_1)=0\text{。}$$ **证毕。**

上面介绍了两种非古典命题演算系统：极小系统G和Heyting系统H。此外还有其他的非古典系统。它们强弱不等，但共同点是不承认双重否定律$\neg\neg p\to p$（即排中律$\neg p\vee p$）。

一种叫做直觉主义的学派，否认排中律在数学中可以无限制地运用；要求数学在涉及到一个对象的存在性时，应给出具体的构造方法；认为没有构造方法而只基于排中律给出的关于存在性的证明没有什么意义。

对于什么是数学上的“证明”，并不存在一个大家完全一致的回答。

1.3 命题演算L的语义学

命题演算L是用自由命题代数L(X)这种代数系统为框架建立起来的。从另一角度来看，又可以把它看成是一种形式语言，它的字母表包括：

运算符$\neg$和$\to$；

命题变元符$x_1, x_2, \cdots$；

右括号 ）和左括号（。

每个特定的公式（即L(X) 的一个特定元素）是一特定的有限字母串；而L中的“证明”$p_1, \cdots, p_n$则是字母串的有限序列，可以看成是用该字母表写出的文章。1.2中讨论的内容（包括L(X) 的构造以及L中证明的构造）相当于这种形式语言的语法——句法和文章构成法。

下面先转向这种形式语言的语义，给出它的逻辑解释。然后接着讨论它的语法和语义这两方面的关系。

1.3.1 L(X) 的赋值

L(X) 和Z_2是我们研究过的两种命题代数。为了给出L的逻辑解释，首先要建立起L(X) 和Z_2之间的适当联系。建立各种命题代数之间联系的桥梁是同态的概念。

定义 1（命题代数同态）设A，B都是命题代数。映射v：$A \to B$叫做A到B的（命题代数）同态，如果v满足：对任意$p, q \in A$，都有

$$v(\neg p) = \neg v(p),$$

$$v(p \to q) = v(p) \to v(q).$$

同态v具有的上述性质通常叫做“保运算性”。

例 1 Z_2到Z_2的恒等映射$I(I(x) = x)$是Z_2到自身的同态。

例 2 由$g(0) = 1$，$g(1) = 0$定义的Z_2到Z_2的映射g不是同态。事实上，

$$g(1 \to 1) = g(1) = 0,$$

$$g(1) \to g(1) = 0 \to 0 = 1 \neq g(1 \to 1),$$

这说明g不具有同态的保运算性。

命题 1 若v：$A \to B$是命题代数同态，则对任意$p, q \in A$，有

$$v(p\vee q)=v(p)\vee v(q),$$
$$v(p\wedge q)=v(p)\wedge v(q),$$
$$v(p\leftrightarrow q)=v(p)\leftrightarrow v(q).$$

证 $v(p\vee q)=v(\neg p\to q)$ （$\vee$的定义）

$=v(\neg p)\to v(q)$ （保运算性）

$=\neg v(p)\to v(q)$ （保运算性）

$=v(p)\vee v(q)$ （$\vee$的定义）

后两式的证法相同。**证毕。**

命题1是说，v对$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$也有保运算性。

命题 2 若 $u: A\to B$ 和 $v: B\to C$ 都是命题代数同态，则复合映射 $v\circ u$：$A\to C$ 也是同态。

证 对任意 $a, a'\in A$，按复合的定义和 u，v 的保运算性，有

$$\begin{aligned}v\circ u(\neg a)&=v(u(\neg a))\\&=v(\neg u(a))\\&=\neg v(u(a))\\&=\neg v\circ u(a),\\ v\circ u(a\to a')&=v(u(a\to a'))\\&=v(u(a))\to v(u(a'))\\&=v\circ u(a)\to v\circ u(a').\end{aligned}$$

故 $v\circ u$ 也有保运算性。**证毕。**

任意两个命题代数之间不一定能建立起同态映射（见练习七题2）。但对自由命题代数L(X) 和L(X_n) 来说，有下面的重要结论。这是我们选用自由命题代数来建立命题演算的重要原因。

定理 1 设X$=\{x_1, x_2, \cdots\}$，B为任一命题代数。任一映射 v_0：X$\to B$定可唯一地扩张成为从L(X) 到B的同态 v。

证 先构造映射 v：L(X)$\to B$。注意

$$L(X)=\bigcup_{k=0}^{\infty}L_k.$$

对 L_0 的元素 x_i，令 $v(x_i)=v_0(x_i)$。

对L_k的任一元素$p(k>0)$，

（i）当$p=\neg q$时，有$q\in L_{k-1}$，此时令

$$v(p)=\neg v(q);$$

（ii）当$p=q\to r$时，有$q\in L_i$，$r\in L_j$，且$i+j=k-1$，此时令

$$v(p)=v(q)\to v(r).$$

这样归纳定义的映射v：$L(X)\to B$自然满足了同态的要求。又因$v(x_i)=v_0(x_i)$，故v是v_0的扩张。（由于$L(X)$具有分层性，即它的不同层次之间没有公共元素，故映射v是合理定义的。）

v_0的这种同态扩张v是唯一的。假设有另外的映射v'：$L(X)\to B$也是v_0的同态扩张，则可证明对$L(X)$的任一元素p，都有$v(p)=v'(p)$。现对p所在的层次数k归纳证明。

$p=x_i$时，有$v'(x_i)=v_0(x_i)=v(x_i)$。（v和v'都是v_0的扩张。）

$k>0$时，若$p=\neg q$（此时$q\in L_{k-1}$），则有

$$\begin{aligned}v'(p)&=v'(\neg q)\\&=\neg v'(q)&&(v'\text{是同态})\\&=\neg v(q)&&(\text{归纳假设})\\&=v(\neg q)&&(v\text{是同态})\\&=v(p);\end{aligned}$$

若$p=q\to r$，则有

$$\begin{aligned}v'(p)&=v'(q\to r)\\&=v'(q)\to v'(r)&&(v'\text{是同态})\\&=v(q)\to v(r)&&(\text{归纳假设})\\&=v(q\to r)&&(v\text{是同态})\\&=v(p).\end{aligned}$$

这就得到$v=v'$。**证毕**。

把定理1中的X改为$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，我们有下面的定理1′，它的证明与定理1相同。

定理 1′ 设$X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$，B**为任一命题代数。任一映射** v_0**:** $X_n\to B$**定可唯一地扩张成为从**$L(X_n)$ **到**B**的同态** v**.**

把定理1和定理1′中的B换成命题代数Z_2，就有

（i）任一映射v_0: $X\to Z_2$定可唯一地扩张成$L(X)$到Z_2的同态v；

（ii）任一映射v_0:$X_n\to Z_2$定可唯一地扩张成$L(X_n)$到Z_2的同态v.

定义 2 （赋值） 同态v**:** $L(X)\to Z_2$**叫做**$L(X)$**的赋值.** $v(p)$ **叫做公式** p **的真值. 同样，同态**v**:** $L(X_n)\to Z_2$ **叫做** $L(X_n)$ **的赋值.**

定义 3 （真值指派）映射 v_0**:** $X\to Z_2$ **叫做命题变元的真值指派；映射** v_0**:** $X_n\to Z_2$ **叫做** $x_1,\cdots,x_n$ **的真值指派.**

引进了赋值和真值指派的概念以后，就可把上面的结论(i)与（ii）作为定理1与定理1′的推论分别写成

推论 1 命题变元的任一真值指派，定可唯一地扩张成 $L(X)$ **的赋值.**

推论 1′ $x_1,\cdots,x_n$ **的任一真值指派，定可唯一地扩张成** $L(X_n)$ **的赋值.**

简单地说，赋值就是同态——到Z_2的同态. 有了指派(对X的或对X_n的)，就有了赋值（$L(X)$的或$L(X_n)$的）. 赋值是由指派决定的. 不同的指派，有不同的赋值；不同的赋值，对应着不同的指派（因为同态扩张具有唯一性）.

设v是$L(X)$的赋值. 既然赋值就是到Z_2的同态，按Z_2中运算的定义以及同态的保运算性，就可以写出：

$v(p)$	$v(q)$	$v(\neg p)$	$v(p\to q)$	$v(p\vee q)$	$v(p\wedge q)$	$v(p\leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0		0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0		1	0	0	1

也可写出以下公式（参见1.1和1.2.5中相应公式）：

（1）$v(\neg p)=1-v(p)$,

（2）$v(p\to q)=1-v(p)+v(p)\cdot v(q)$,

（3）$v(p\vee q)=v(p)+(1-v(p))\cdot v(q)$,

（4）$v(p\wedge q)=v(p)\cdot v(q)$,

（5）$v(p\leftrightarrow q)=v(p)\cdot v(q)+(1-v(p))\cdot(1-v(q))$.

命题 3 **设 v 是 $L(X)$ 或 $L(X_m)$ （$m\geqslant n$）的赋值. 若 v 满足 $v(x_1)=v_1,\cdots,v(x_n)=v_n$，则对 $L(X_n)$ 的任一公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$，定有**

$$v(p(x_1,\cdots,x_n))=p(v_1,\cdots,v_n),$$

其中 $p(v_1,\cdots,v_n)$ 是用 $v_1,\cdots,v_n$ 分别代换 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 所得结果.

证明留作练习.

根据命题3，$L(X_n)$ 的公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 作为 $L(X)$ 的成员或作为 $L(X_m)$ （$m>n$）的成员，其真值只与它所含有的命题变元的真值指派有关，而与其他变元的真值指派无关.

我们已在自由命题代数 $L(X)$ 和命题代数 Z_2 之间建立了一定的联系. 正因为存在着这种联系，才使我们有可能给L以逻辑解释.

练　习　七

1. 详细写出命题3的证明. 若 v 是 $L(X)$ （或 $L(X_m)$）到任意命题代数 B 的同态，结论是否仍成立？

2. 任给命题代数 A 和 B，是否一定存在 A 到 B 的同态？

1.3.2 L的解释

命题演算L这个形式系统是我们给逻辑推理建立的一种简单的数学模型. L在一定程度上可用来表现实际的推理过程，是因为可对它作以下解释.

1° L(X) 中的公式解释为命题．（命题，指有所判断的自然语句．）命题变元可用来表示任意的简单命题，而L(X) 其他层次的公式可用来表示复合命题．

2° 设 $p\in L(X)$．对给定的赋值v: $L(X)\to Z_2$，若 $v(p)=1$，即 p 的真值为 1，则说 p 所表示的命题为真，简称 p 为真；若 $v(p)=0$，即 p 的真值为零，则说 p 所表示的命题为假，简称 p 为假．

3° L(X) 上的运算解释为命题连接词．1.3.1 命题 3 之前列出的公式（1）—（5）的逻辑意义是：用连接词连接而得到的复合命题的真假完全可由组成该命题的支命题的真假通过计算来确定．

4° L(X) 上的否定运算"$\neg$"解释为"否定"连接词．根据 1.3.1 公式（1），

$$\neg p\ 为真 \quad \Leftrightarrow \quad p\ 为假．$$

5° L(X) 上的蕴涵运算"$\rightarrow$"解释为蕴涵连接词，即用来表示"如果…，那么…"．根据 1.3.1 公式（2），

$$p\rightarrow q\ 为假 \quad \Leftrightarrow \quad p\ 为真且\ q\ 为假．$$

详细地说，当 $p\rightarrow q$ 的前件 p 为假时 $p\rightarrow q$ 为真；当 $p\rightarrow q$ 的后件 q 为真时 $p\rightarrow q$ 也为真；除此之外，$p\rightarrow q$ 为假．在数学上，这种表示是符合"如果…，那么…"的实际使用习惯的．例如，我们说命题

$$a^2<1 \quad \Rightarrow \quad a^2<8$$

是真命题，这是因为前件"$a^2<1$"真而同时后件"$a^2<8$"假的情形不会发生；只会发生以下三种情形中的一种：

$a^2<1$ 真且 $a^2<8$ 真（如 $a=0$）；

$a^2<1$ 假但 $a^2<8$ 真（如 $a=2$）；

$a^2<1$ 假且 $a^2<8$ 假（如 $a=3$）．

这与L中"$\rightarrow$"的性质是一致的．试想，如果我们对 Z_2 中运算"$\rightarrow$"作另一种不同的规定，用另外一种不同的计算公式，那就不能使

L(X) 的运算“→”用来表现上例的那种“蕴涵”在数学上的实际使用。但是，用“→”表示“如果…，那么…，”又是与日常对“如果…，那么…”的理解有差别。按日常的理解，前件与后件这二者之间有某种因果联系。在形式系统里，我们不对“→”提这种要求，而是把具体的内容撇在一边。关于这一点，以下几个运算的情形是类似的。

6° L(X) 上的析取运算“∨”解释为“或”。按 1.3.1 公式（3），

$p \vee q$ 为真 $\Leftrightarrow$ p 为真或 q 为真（可同时为真）。

换句话说，当且仅当 p 和 q 二者同时为假时 $p \vee q$ 为假。

日常对“或”有两种理解：可兼的和不可兼的。例如，“我用这只碗吃饭或用它喝水”这句话中的“或”可以理解成可兼的；而“或重于泰山，或轻如鸿毛”中的“或”则是不可兼的。

按我们这里的解释，析取“∨”用来表示可兼的“或”。这符合数学的使用习惯，且使用时更为方便。（参见 1.3.7 推论 2 之后的一段说明。）

7° L(X) 上的合取运算“∧”解释为“与”。按 1.3.1 公式（4），

$$p \wedge q \text{ 为真} \Leftrightarrow p \text{ 和 } q \text{ 皆为真.}$$

也就是说，当且仅当 p 与 q 二者至少有一为假时 $p \wedge q$ 为假。

8° L(X) 上的等值运算“↔”解释为“当且仅当”。按 1.3.1 公式（5），

$$p \leftrightarrow q \text{ 为真} \Leftrightarrow p \text{ 与 } q \text{ 同为真或同为假.}$$

9° L 中定义的“证明”，是对实际证明过程的一种简单的模拟。

例 将以下命题表示成L 中的公式。

（1）若 a 大于 b，c 不大于 0，则 ac 不大于 bc。

（2）$a>0$ 时 b 为偶数而 $c<0$ 时 d 为奇数，这两种情况恰有一种情况出现。

解 （1）用 x_1 表示“$a>b$”，x_2 表示“$c>0$”，x_3 表示 “$ac>bc$”，则原命题可翻译成

$$(x_1\wedge\neg x_2)\to\neg x_3.$$

（2）分别用 x_1，x_2，x_3，x_4 表示 “$a>0$”，“b 为偶数”，“$c<0$”，“d 为奇数”，则原命题可形式化为

$$(x_1\to x_2)\wedge(x_3\to x_4)\wedge(x_1\vee x_3)\wedge\neg(x_1\wedge x_3).$$

练　习　八

1. 把以下命题翻译成L(X) 中的公式。

（1）温度不变而压力加大，则体积减小。

（2）$x=0$ 或 $y=0$。

（3）若 $x\neq 0$，则 $y=0$。

（4）若 x 为有理数且 y 为整数，则 z 不是实数。

（5）在 x 是有理数的假定之下，若 y 为整数，则 z 不是实数。

（6）二数之和为偶数，当且仅当二数皆为偶数或二数皆为奇数。

（7）A 队若胜 B 队，则 B 队积分最少而 A 队积分最多，这时 C 队便取得小组第二名。

1.3.3　公式的真值函数

设公式 $p\in L(X_n)$ 已经给定。对这个给定的 p，自然地确定了一个 n 元真值函数 f_p：$Z_2^n\to Z_2$，确定的方法如下：

对任意 $v_1,\cdots,v_n\in Z_2$，将 $v_1,\cdots,v_n$ 分别指派给 $x_1,\cdots,x_n$，然后（唯一地）扩张成赋值 v：$L(X_n)\to Z_2$（其根据是1.3.1推论1′），这时 p 便有了确定的真值 $v(p)\in Z_2$。就用这个 $v(p)$ 来定义 $f_p(v_1,\cdots,v_n)$：

$$f_p(v_1,\cdots,v_n)=v(p).$$

定义 1　**（公式的真值函数和真值表）**

每一个公式 p 用上述方法自然地确定的真值函数 f，叫做 p 的真值函数。p 的真值表，指 p 的真值函数的函数值表。

例 1 设$\neg x_1 \vee x_2$ 的真值函数为 f。由定义

$$
\begin{aligned}
f(v_1, v_2) &= v(\neg x_1 \vee x_2) \\
&= \neg v(x_1) \vee v(x_2) \\
&= \neg v_1 \vee v_2.
\end{aligned}
$$

$\neg x_1 \vee x_2$ 的真值表为

v_1	v_2	$\neg v_1$	$\neg v_1 \vee v_2$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

以后这种表都简单地写成

$\neg$	x_1	$\vee$	x_2
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0

写的过程是这样的：先把所有可能的真值指派在该公式的命题变元下一一写出（若有 n 个命题变元，则有 2^n 种不同的真值指派，因而真值表有 2^n 行），每经一次运算所得的真值写在该运算符下。最后得到的一列结果写在最后实行的运算符号下，并用竖线标出。

例 2 公式 $(x_1 \vee x_2) \to (\neg x_3 \wedge x_2)$ 的真值表

该公式的真值函数是三元的，对命题变元的真值指派共有 8 种。真值表为

$(x_1$	$\vee$	$x_2)$	$\to$	$(\neg$	x_3	$\wedge$	$x_2)$
1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0

注意在同一公式中反复出现的同一个命题变元（如例 2 中的 x_2）的下面，指派的真值的写法应完全一样。

为了得到公式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的真值函数，根据同态的保运算性（见 1.3.1 命题 3），只用将 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 中出现的 $x_1,\cdots,x_n$ 分别改成 $v_1,\cdots,v_n$ 就可以了：$p(v_1,\cdots,v_n)$ 就是 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的真值函数在点 $(v_1,\cdots,v_n)$ 的函数值。

练　习　九

1. 写出下列公式的真值表。

　1° $\neg x_1\wedge\neg x_2$.

　2° $\neg((x_1\to x_2)\to(\neg(x_2\to x_1)))$.

　3° $x_1\to(x_2\to x_3)$.

　4° $(x_1\wedge x_2)\to x_3$.

　5° $(x_1\leftrightarrow\neg x_2)\vee x_2$.

　6° $(x_1\wedge x_2)\vee(x_3\wedge x_4)$.

　7° $(\neg x_1\wedge x_2)\to(\neg x_2\wedge x_3)$.

　8° $(x_1\to x_2)\to(x_1\to x_3)$.

　9° $\neg(x_1\vee(x_2\wedge x_3))\leftrightarrow((x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3))$.

　10° $(((\neg x_1\to(x_1\wedge\neg x_2))\to x_3)\wedge x_2)\vee\neg x_3$.

2. 证明以下各对公式有相同的真值函数。

1° $\neg x_1 \vee x_2$ 和 $x_1 \to x_2$。

2° $\neg x_1 \vee \neg x_2$ 和 $\neg(x_1 \wedge x_2)$。

3° $\neg x_1 \to (x_2 \vee x_3)$ 和 $\neg x_2 \to (\neg x_3 \to x_1)$。

4° $x_1 \leftrightarrow x_2$ 和 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$。

1.3.4 永真式和代换定理

对 $(x_1,\cdots,x_n)$ 可能给予的真值指派 $(v_1,\cdots,v_n) \in Z_2^n$ 共有 2^n 种，于是由指派扩张而成的 $L(X_n)$ 的不同赋值 v 也有 2^n 种。

定义 1 **设 $p = p(x_1,\cdots,x_n) \in L(X_n)$。对 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的真值指派 $(v_1,\cdots,v_n)$ 若使 $p(v_1,\cdots,v_n) = 1$，则叫做 p 的成真指派（此时由指派 $(v_1,\cdots,v_n)$ 所确定的 $L(X_n)$ 的赋值 v 使 $v(p) = 1$）；若使 $p(v_1,\cdots,v_n) = 0$，则叫做 p 的成假指派。**

例如，公式 $x_1 \to x_2$ 的成真指派是 (1,1)，(0,1)，(0,0)；成假指派是 (1,0)。

为求出一个公式的成真（或成假）指派，可以先写出它的真值表。例如，公式 $(x_1 \vee x_2) \to x_3$ 的真值表是

$(x_1$	$\vee$	$x_2)$	$\to$	x_3
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0

由表看出 $(x_1 \vee x_2) \to x_3$ 的成真指派是 (1,1,1)，(1,0,1)，(0,1,1)，(0,0,1) 和 (0,0,0)，其他指派都是成假指派。

公式 $(x_1 \wedge x_2) \to x_1$ 的所有指派都是成真指派。它没有成假指派，而它的否定 $\neg((x_1 \wedge x_2) \to x_1)$ 没有成真指派。

定义 2 （永真式）我们说公式$p=p(x_1,\cdots,x_n)$是命题演算L 的永真式（或重言式），记作$\vDash p$，是指$L(X_n)$的任何赋值v都使$v(p)=1$。

由定义立即可得

$\vDash p \Leftrightarrow p$ 只有成真指派

$\Leftrightarrow p$ 的真值函数取常值 1 。

根据 1.3.1 命题 3，若把定义 2 中的$L(X_n)$改为$L(X)$或改为$L(X_m)$ $(m>n)$，则新的定义和原定义是等价的。

用真值表法可知以下公式都是永真式。

$$x_1\to x_1,$$

$$\neg x_1\vee x_1,$$

$$\neg(\neg x_1\wedge x_1),$$

$$((x_1\vee x_2)\vee x_3)\leftrightarrow(x_1\vee(x_2\vee x_3)),$$

$$(x_1\vee x_2)\leftrightarrow(x_2\vee x_1),$$

$$((x_1\wedge x_2)\wedge x_3)\leftrightarrow(x_1\wedge(x_2\wedge x_3)),$$

$$(x_1\wedge x_2)\leftrightarrow(x_2\wedge x_1),$$

$$(x_1\wedge(x_2\vee x_3))\leftrightarrow((x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_3)),$$

$$(x_1\vee(x_2\wedge x_3))\leftrightarrow((x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3)),$$

$$\neg(x_1\vee x_2)\leftrightarrow\neg x_1\wedge\neg x_2,$$

$$\neg(x_1\wedge x_2)\leftrightarrow\neg x_1\vee\neg x_2.$$

下面的定理使我们可由已知的永真式得到更多的永真式。

定理 1（代换定理）

$$\vDash p(x_1,\cdots,x_n) \quad\Rightarrow\quad \vDash p(p_1,\cdots,p_n),$$

其中$p_1,\cdots,p_n$是$L(X)$中的任意公式；$p(x_1,\cdots,x_n)\in L(X_n)$，$p(p_1,\cdots,p_n)$是用$p_1,\cdots,p_n$分别全部替换$p(x_1,\cdots,x_n)$中的$x_1,\cdots,x_n$所得结果。

证 令$\varphi_0(x_1)=p_1,\cdots,\varphi_0(x_n)=p_n$，得到映射$\varphi_0:X_n\to L(X)$。按 1.3.1 定理1′（在其中取命题代数$B=L(X)$），可将映射$\varphi_0$扩张成同态$\varphi:L(X_n)\to L(X)$。再设$v:L(X)\to Z_2$是

L(X)的任一赋值。根据1.3.1命题2，同态的复合$v\circ\varphi$：L(X_n)$\to Z_2$也是同态，因而是L(X_n)的赋值。这样便有

$$\begin{aligned}
&\vDash\ p(x_1,\cdots,x_n) && \text{（已知）}\\
&\Rightarrow\ v\circ\varphi(p(x_1,\cdots,x_n))=1 && \text{（永真式定义）}\\
&\Rightarrow\ v(\varphi(p(x_1,\cdots,x_n)))=1 && \text{（复合的定义）}\\
&\Rightarrow\ v(p(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)))=1 && \text{（}\varphi\text{ 的保运算性）}\\
&\Rightarrow\ v(p(\varphi_0(x_1),\cdots,\varphi_0(x_n)))=1 && \text{（}\varphi\text{ 是 }\varphi_0\text{ 的扩张）}\\
&\Rightarrow\ v(p(p_1,\cdots,p_n))=1 && \text{（}\varphi_0\text{ 的定义）}
\end{aligned}$$

赋值v是任意的，故得$\vDash p(p_1,\cdots,p_n)$。证毕。

注意，定理1的逆定理不成立。原来不是永真式，经过代换却可能成为永真式。例如$x_1\to x_2$肯定不是永真式。但若在其中用公式$x_2\to x_2$去替换x_2，得到的$x_1\to(x_2\to x_2)$却成了永真式。$x_1\vee x_2$肯定不是永真式，但$p\vee q$却可能是永真式（例如取p，q都为x_1）。

定理中的代换只能对命题变元进行代换。用公式代换某个命题变元，是指用同一公式对所有在永真式中出现的该命题变元全部进行替换。

命题1　设p,q,r是L的任意公式。

1°　$\vDash p\to p$，**（同一律）**

2°　$\vDash \neg p\vee p$，**（排中律）**

3°　$\vDash \neg(\neg p\wedge p)$，**（矛盾律）**

4°　$\vDash ((p\vee q)\vee r)\leftrightarrow(p\vee(q\vee r))$，**（析取结合律）**

5°　$\vDash (p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$ **（析取交换律）**

6°　$\vDash ((p\wedge q)\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge(q\wedge r))$，**（合取结合律）**

7°　$\vDash (p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$，**（合取交换律）**

8°　$\vDash ((p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$，**（分配律）**

9°　$\vDash ((p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$，**（分配律）**

10°　$\vDash \neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$，　(De·Morgan律)

$\vDash \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$。

证 对代换定理之前所列出的永真式使用代换定理即得。**证毕。**

注意一个事实：以上这些语义结论都有相应的语法结论。对此事后面将作深入讨论。

命题 2 L 的所有公理都是永真式，即

$$\models p \to (q \to p),$$

$$\models (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)),$$

$$\models (\neg p \to \neg q) \to (q \to p).$$

证明留作练习。

定义 3（永假式与可满足公式）若$\neg p$是永真式，则p叫做永假式。非永假式叫做可满足公式。

永真式只有成真指派；永假式只有成假指派。可满足公式一定有成真指派，但也可以有成假指派，也可以没有成假指派。可满足公式可以是永真式，也可以不是。

练 习 十

1．证明 L 的所有公理都是永真式。

2．试证

1° 二永真式的合取仍是永真式，

2° 二永真式的析取仍是永真式，

3° 后件是永真式的蕴涵式是永真式，

4° 前件是永假式的蕴涵式是永真式。

3．下面的公式哪些恒为永真式？

1° $(p \wedge q) \to p$,

2° $(p \wedge q) \to q$,

3° $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$,

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$,

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$,

4．以下结论是否正确？为什么？