第一章　函　数

函数是高等数学中一个重要的基本概念，也是微积分研究的对象。本章将在中学数学关于函数知识的基础上进行复习和补充，以便进一步加深对函数的认识，与此同时，介绍几种简单的经济类函数。

由于我们所论函数都是在实数范围内，所以本章先简要地复述一下实数。

§1.1　实　数

一　实数与数轴

人们对于数的认识是逐步发展起来的，首先认识的是自然数集$N=\{$自然数$\}$.为了实施减法运算，继而将自然数集扩展到整数集$Z=\{$正整数，零，负整数$\}$。为使除法运算得以进行，人们又将整数集再加以扩展，这就是有理数集$Q=\{x\,|\,x=p/q, p\in Z, q\in N, p、q$互质$\}$。这样，在有理数集范围内，就可以进行四则运算了。

有理数通常可用直线L上的点形象地表示出来.在一条水平放置的直线L上任意取定一点O，称为原点。规定一个正方向（习惯上规定原点向右的方向为正向），规定一个度量单位，称为单位长度。这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴，如图1-1。

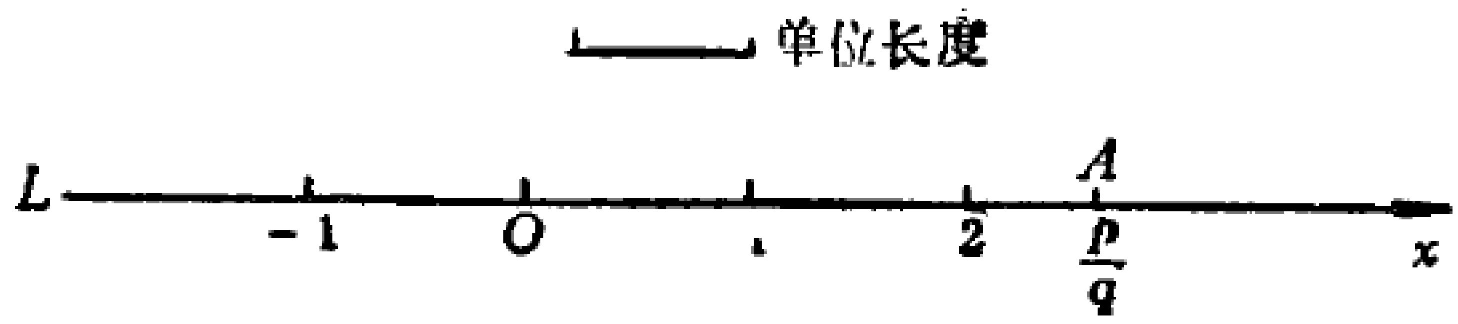

图1-1

任何一个有理数p/q表示的长度都可以用几何方法作出。在图1-1中，作出OA的长度等于p/q，所得到的点A称为有理点，它是有理数p/q的几何表示，而有理数p/q叫做点A的坐标。这就是说，对于任何一个有理数p/q，都可以在数轴上找到唯一的一个有理点A和它相对应。反之，对于数轴上任何一个有理点A，必对应于一个有理数p/q。

对于任意给定的两个有理数a和b（设$a<b$），至少可以找到一个有理数c，使得$a<c<b$，例如取$c=\dfrac{a+b}{2}$。同样，在a、c之间至少可以找到一个有理数$\dfrac{a+c}{2}$，有$a<\dfrac{a+c}{2}<c$。依此类推，可知在任意给定的两个有理数a、b之间，存在着无穷多个有理数。这就是有理数的稠密性。由于对于任一有理数，均可以在数轴上找到相应的有理点与其对应，所以数轴上的有理点也是处处稠密的。

虽然数轴上的有理点是处处稠密的，但是我们发现数轴上还有许多点没有相应的有理数与之对应。例如，以原点为中心，且以边长等于1的正方形的对角线的长度为半径($r=\sqrt{2}$)，在数轴上截取的两段所对应的两个点就没有相应的有理数与其对应（我们可以证明$\sqrt{2}$不是有理数)。又如坐标为$\sqrt{2}+1$、$\sqrt{2}-1$、$\sqrt{3}$、π等的点也都是非有理点。可见，非有理点在

数轴上不但存在，而且还有无穷多个，同有理点一样，也是处处稠密的，这样的点，我们称为无理点。无理点在数轴上的坐标称为无理数。

有理数与无理数统称为实数。全体实数组成实数集$R=\{$实数$\}$。在任意两个实数之间，存在着无穷多个实数，这样，数轴上的每一个点都有一个实数与其对应。反之，对于任意一个实数，总对应着数轴上的某一个点。从而，全体实数与数轴上的一切点形成一一对应关系，这就是实数的连续性。因此今后我们讨论问题时，常常将实数与数轴上的点混为一谈，不加区别。如实数a和点a表达同一层意思。

今后的章节里，我们都是在实数范围内讨论问题。

二 绝对值

我们在研究某些问题时，常常要用到实数绝对值的有关知识，下面叙述绝对值的定义及其性质。

定义1.1 实数x的绝对值，记为$|x|$，表示当x为正数或零时，指的是x本身；当x为负数时，指的是x的相反数。即

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0\text{时} \\ -x & x<0\text{时} \end{cases}$$

它的几何意义是：$|x|$表示数轴上的点x与原点之间的距离。而$|x-a|$表示数轴上点x与点a之间的距离，$|x+a|$表示点x与点$(-a)$之间的距离。

绝对值有如下几个性质：

(1) $|x|\geqslant 0$

(2) $|x|=|-x|$

(3) $|x|=\sqrt{x^2}$

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

证 由绝对值的定义可知

当$x>0$时 $-|x|<x=|x|$

当$x<0$时 $-|x|=x<|x|$

当$x=0$时 $-|x|=x=|x|$

所以，不论x为什么实数时，都有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$$

(5) 不等式

$|x|\leqslant a$ $(a>0)$与 $-a\leqslant x\leqslant a$等价。

(6) 不等式

$|x|\geqslant a$ $(a>0)$与 $x\geqslant a$或$x\leqslant -a$等价.

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

证 由性质(4)得

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$$

和 $$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$$

将上两式各端分别相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$$

由性质(5)即得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

此性质可以推广到有限个数相加的情形，即

$$|x+y+\cdots+z|\leqslant|x|+|y|+\cdots+|z|$$

(8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

证 因$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$

两边各减去$|y|$，即得

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$

此性质也可以推广到有限个数相乘的情形即

$$|xy\cdots z|=|x|\cdot|y|\cdots|z|$$

(10) $$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$$

三　区间

微积分里在两个实数之间讨论问题的情形很多，例如研究经济的增长速度时，它的时间间隔就可能是1个月、1个季度、或者是1年、5年，等等.研制发射人造地球卫星运行状况，就需要考虑随火箭发射后人造地球卫星运行的距离可能是无穷远.为了讨论方便，有必要规定数集里的另一名词——区间.下面我们介绍区间与邻域的概念及其记号.

定义1.2　介于某两个实数a、b($a<b$)之间的一切实数的集合称为区间.而实数a、b称为区间的端点.

设a、b为实数，且$a<b$

(1)　满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的集合，称为以a、b为端点的闭区间，记作$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

(2)　满足不等式$a<x<b$的实数x的集合，称为以a、b为端点的开区间，记作(a, b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

(3)　满足不等式$a<x\leqslant b$（或$a\leqslant x<b$）的实数x的集合，称为以a、b为端点的半开半闭区间，记作$(a,b]$（或$[a, b)$），即

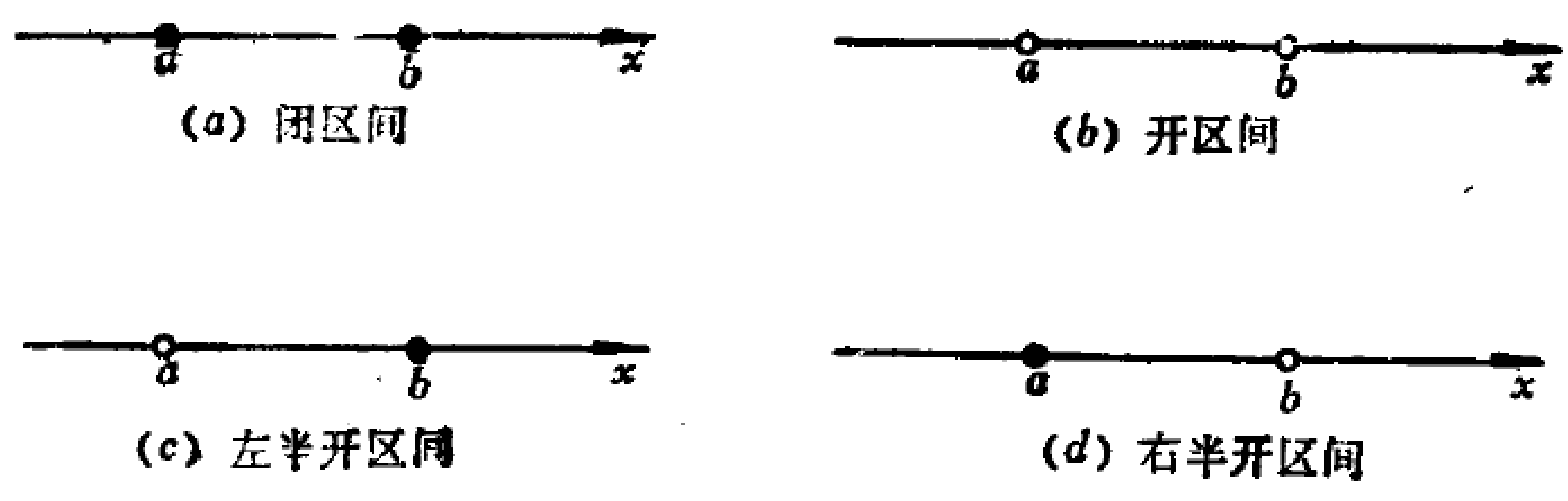

图1-2

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

以上三种区间称为有限区间。$b-a$称为该有限区间的长度。它们的几何形象如图1-2所示。

实数集R也可用区间$(-\infty, +\infty)$来表示，这种区间称为无限（或无穷）区间。无限区间还有以下几种情形：

(4) $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

(5) $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$

微积分里还经常用到邻域的概念

定义1.3 以点a为中心，长度等于2δ的开区间$(a-\delta, a+\delta)$叫做a点的δ邻域，δ称为该邻域的半径，即

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid \ |x-a| < \delta, \delta > 0\}$$

如图1-3所示。

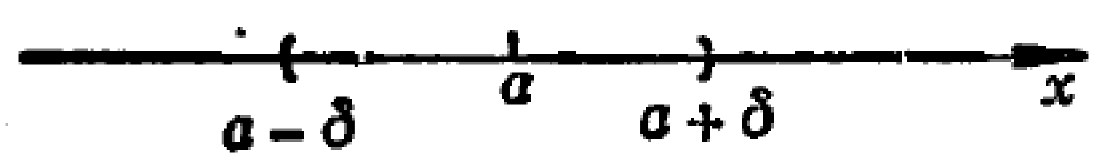

图1-3

如果去掉a点的δ邻域里的a点，则该邻域

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

称为a点的“空心邻域”，即开区间$(a-\delta, a)$或开区间$(a, a+\delta)$中的点x组成的集合。

§1.2 变量与函数

一 常量与变量

人们在考察某个自然现象或生产过程时，常常会遇到许多

不同的量，其中有些量在过程进行中都保持一定的数值，这种量称为常量，而另外一些量在过程进行中可以取不同的数值，这种量称为变量。

我们所说某个量是常量，总是相对于一定的问题或指在一定的条件下而言的。例如，火车在正常的行驶过程中，其速度被认为是匀速的，但实际上它每时每刻都在变化着。又如大家熟悉的重力加速度g，在不同的地区，其数值是变化的，但为了使问题简化，我们常常将其作为常量来处理。由于不变的相对性和变化的绝对性，今后，我们有时也把常量看作一种特殊的变量，即在所考察的过程中，始终只取同一数值的变量。

变量的每一个值都是一个数，所有这些数所构成的数集，称为这个变量的变化范围或变域。

本书里所述问题的许多情形中，变量的变化范围或变域主要是指一个区间。例如，在计算等边三角形面积的过程中，其边长的变化范围就是指一个区间$(0, +\infty)$.但并不是任何变量的变域都是一个区间，比如一个商店在预侧某收录机的销售收入时，其销售量就是一个变量，它的变域并不是一个区间，而是一个有限非负整数集。在第七章中我们还会看到，变量的变域可以是一个矩形、园形，甚至更为复杂的情形。

二　函数的概念

在某一现象或生产过程中，往往同时出现好几个变量，这些变量常常不是孤立地变化的，而是互相联系、相互依赖地遵循某一规律变化着。

例1·2·1　圆面积s随着半径r的变化而变化，其变化规律是

$$S=\pi r^2 \qquad r>0$$

例1·2·2 某商店以每台2200元的价格购进500台冰箱，其销售价为2500元，则销售收入R与销售量的关系是

$$R=2500Q-2200Q \quad 0\leqslant Q\leqslant 500 \quad Q\in N$$

例1·2·3 公路客运价为0.039元/公里，则乘车距离与票价之间有如下对应关系：

距离(S)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
票价(C)	0.39	0.78	1.17	1.56	1.95	2.34	2.73	3.12	3.51	3.90

根据上表，当S取定1-100之间任何一个整数S时，C就有一个确定的数与之对应。

例1·2·4 图1-4是气象台气温自动记录仪记录某地一昼夜的气温T与时间t之间的变化关系。

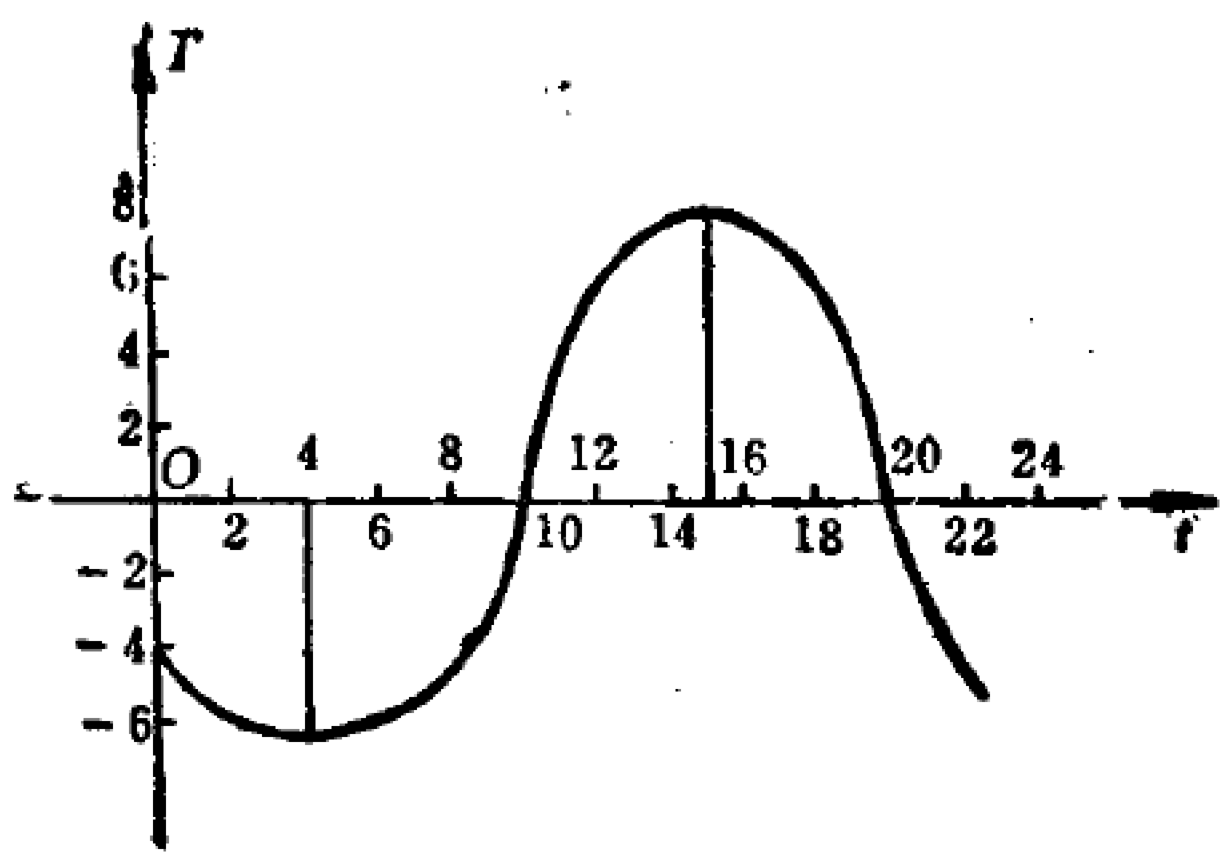

图1-4

根据这条曲线，可以确定任一时刻t($0\leqslant t\leqslant 24$)的气温T。

所举4例，虽然反映的问题不同，表达变量之间关系的形式各异，但有一个共同的特征："当一个变量在其变化范围内取定一个值时，另一个变量按照一定的规律总有一个确定的值与之对应"。反映变量之间的这种确定的对应关系就是函数关

系。

下面我们给出函数的定义。

定义1·4 设有两个变量x和y，变量x的变化范围为数集D，如果对于D中的每一个值x，按照某一法则，变量y有唯一确定的值与之对应，则称变量y为变量x的函数。记为

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

其中x称为自变量，y称为因变量。

自变量x的取值范围D称为函数的定义域，对定义域D中的每一个x的值，对应的y值的集合称为函数的值域。

函数$y=f(x)$中的“f”不是代表具体的数，而是代表变量x到变量y的对应法则，即函数关系。$f(x)$是一个完整的记号，表示将这个法则“f”作用到x上。例如$y=2x-1$，这里的“f”是指自变量x的两倍减1。其实，也可以用其他的字母来表示对应法则，如y、h、F、φ等等。因而y是x的函数也可记为$y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等等。不过，在同一场合，对于不同的函数，应该采用不同的记号。

确定一个函数，主要取决于定义域和对应法则两个因数，它们称为函数的两个要素。两个函数的两个要素都相同，即函数的定义域与对应法则都相同时，它们才是同一函数。而只要定义域和对应法则有一个不同，它们就是不同的函数。

为了进一步理解函数概念，兹再举数例。

例1·2·5 下列两式是否确定一个函数？

$$x^2-1$$

$$y=c \quad (c\text{为常数})$$

先看第一个式子，这里好象只有一个变量x，而没有变量y，会误认为不是一个函数。但是，对于自变量x的每一个值，都

有唯一确定的因变量的值x^2-1与之对应，只是没有用一个字母来表示因变量x^2-1而已。其对应法则是：自变量x的平方减去1，定义域为$(-\infty, +\infty)$，这符合函数的定义，因此，它是一个函数。

再看第二个式子，这里似乎也只有一个因变量y，而没有自变量x，其实，该式表示不论x取何值，对应的y值都是c。所以定义域为$(-\infty, +\infty)$，对应法则是：自变量x给定后，对应的y值就是c。因此，它也是一个函数。这种函数称为常数函数。

例1·2·6 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$是否为相同的函数？

这两个函数的定义域都是$(-\infty, 0)$或$(0, +\infty)$。根据绝对值的性质知$|x|=\sqrt{x^2}$，因而对应法则也是相同的。所以这两个函数是同一函数，只是同一法则用了两种不同的方式来表达，而同一法则的表达方式是可以不同的。

例1·2·7 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数？

两个函数的定义域是相同的，都是$(-\infty, +\infty)$，但对

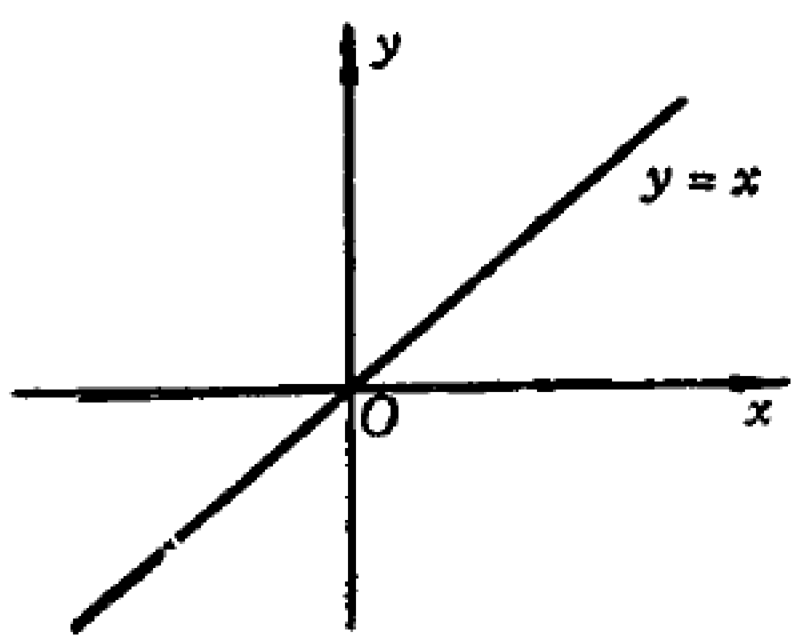

图1-5

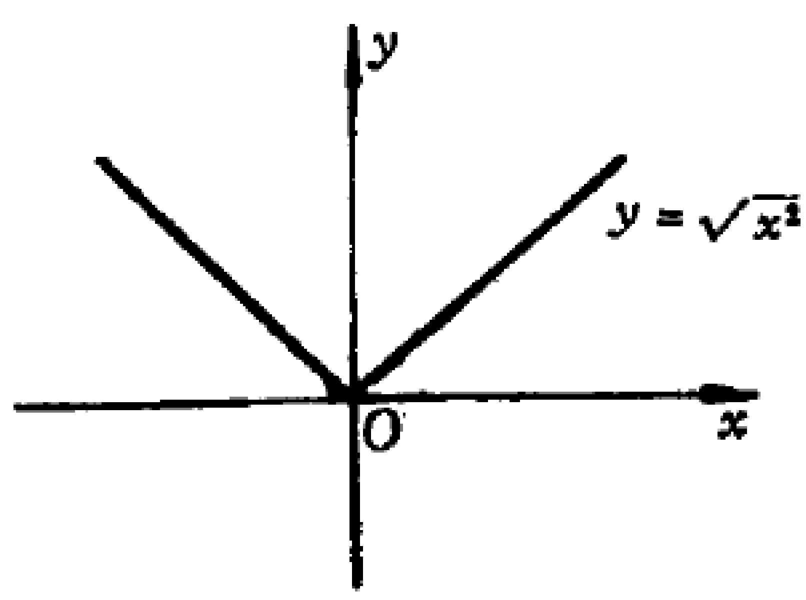

图1-6

应法则不相同，对于$y=x$，当$x\geqslant 0$时，对应的$y\geqslant 0$；当$x<0$时，对应的$y<0$；而对于$y=\sqrt{x^2}$，当$x\geqslant 0$时，对应的$y\geqslant 0$；当$x<0$时，仍然有对应的$y>0$。因而是不同的函数。由图1-5与图1-6也可知它们是不同的函数。

例1·2·8 $y=x+1$与$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$是否为相同的函数？

$y=x+1$的定义域为全体实数，而$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域是除$x=1$以外的一切实数，两者的定义域不相同，因而是不同的函数，不要以为从$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$中约去因子$x-1$就得到$y=x+1$，从而误认为它们是相同的函数。因为从$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$中约去因子$x-1$的前提就是$x-1\neq 0$，即$x\neq 1$，见图1-7和图1-8。

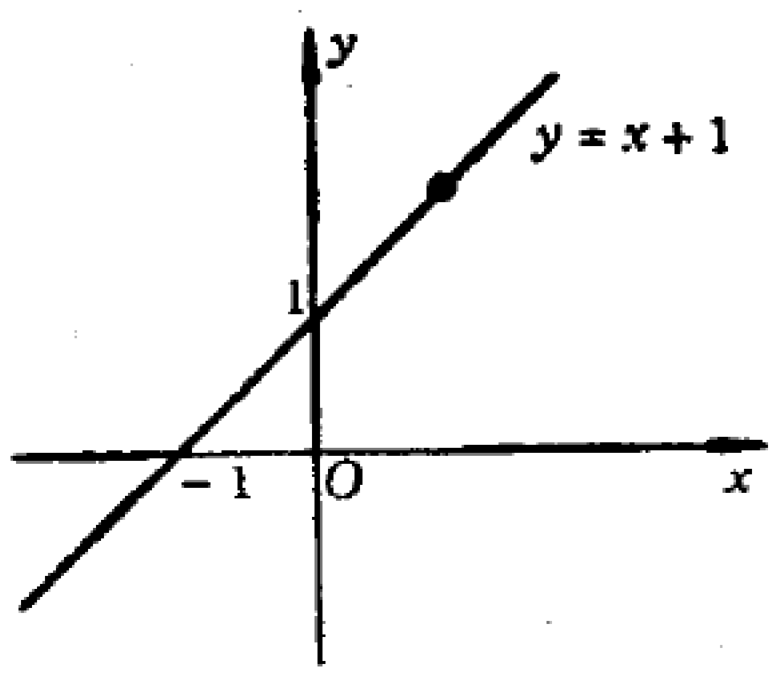

图1-7

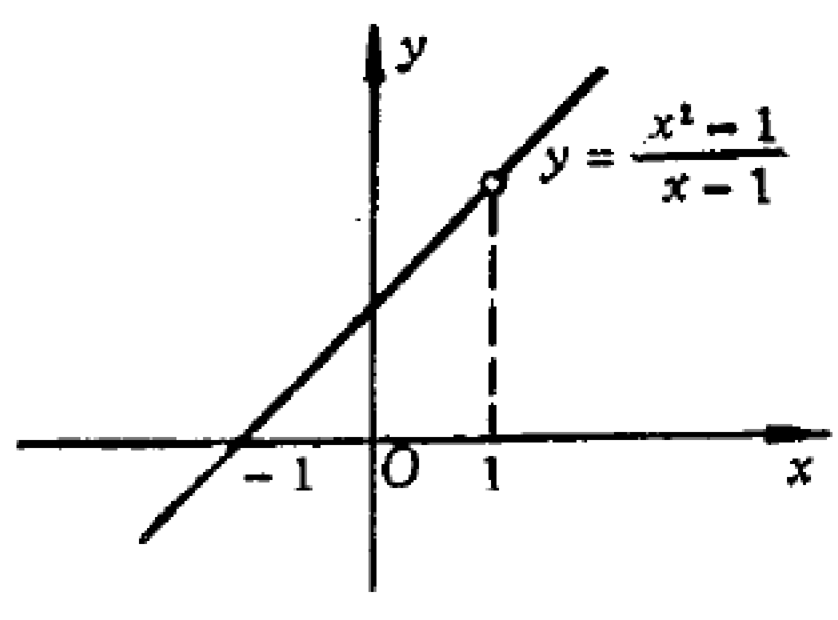

图1-8

如果两个函数相同，则它们的定义域和值域都应相同。但不能从两个函数的定义域和值域都相同来判定两个函数相同。例如$y=2x+1$与$y=2x-1$的定义域都是$(-\infty,\ +\infty)$，值域也

都是（$-\infty$，$+\infty$），显然它们是不同的函数。

三　定义域

在函数关系式$y=f(x)$中，当$x=x_0$时，对应的y_0称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的函数值．记为$y_0=f(x_0)$．若$f(x_0)$存在，就说函数$y=f(x)$在$x=x_0$处有定义．如果对于区间（a，b）内的每一点x_0，函数值$y_0=f(x_0)$都存在，则称函数$y=f(x)$在（a,b）内有定义，或者说（a，b）是函数$y=f(x)$的一个定义区间．如果当$x=x_0$时，$f(x_0)$不存在，就说函数$y=f(x)$在点x_0处无定义．

确定函数的定义区间，即函数的定义域，是研究函数性态的一个重要方面．因此，我们专门讨论如何求函数的定义域．

在实际问题中，函数的定义域由实际意义来确定，如例1.2.2中销售量的变化范围是从0变到500，因而销售收入R关于销售量的函数关系中的定义域是$[0,500]$．又如例1.2.4中记录的是气温T在一昼夜（24小时）的时间t内的变化情况．所以，气温T关于时间t的函数关系中的定义域应是$[0, 24]$．

如果函数关系式是以数学表达式出现时，则函数的定义域一般是指有关表达式中的运算在实数范围内有意义的数的全体．常称为自然定义域．

在本书范围内，所接触到的运算和所接触到的函数，所谓有意义（即函数有定义），指的是：

（1）　对于分式函数，分式的分母的取值应非零；

（2）　开偶次方时，被开方的式子的取值应非负；

（3）　对数式中，表达真数的式子的取值应大于零；

（4）　反正弦和反余弦表达式中的有关式子的绝对值不应超过1，例如$y=\arcsin(3x-1)$中，应使得$|3x-1|\leqslant 1$；

(5) 对于由几个数学式子进行加、减、乘、除运算得到的函数表达式，则指各个数学式子的允许值集的公共部分；

(6) 由实际问题所得出的函数，应由实际意义来确定。

例1.2.9 求下列函数的定义域

(1) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2-1}-\sqrt{x+2}$

(2) $y=\sqrt{1-x^2}+\lg(2x-1)+\dfrac{1}{x-1}$

解 (1) 要使y有定义，须满足

$$\begin{cases} x^2-1\neq 0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x\neq 1,-1 \\ x\geqslant -2 \end{cases}$$

故函数的定义域为$[-2,-1)$或$(-1,1)$或$(1,+\infty)$如图1-9所示的阴影部分。

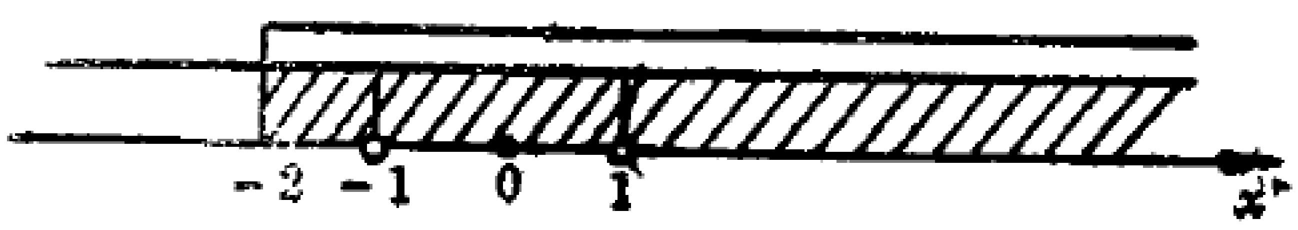

图1-9

(2) 要使函数表达式有意义，须满足

$$\begin{cases} 1-x^2\geqslant 0 \\ 2x-1>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \quad 解不等式组得 \quad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}$$

于是，函数y的定义域为$(\frac{1}{2},1)$，如图1-10所示。

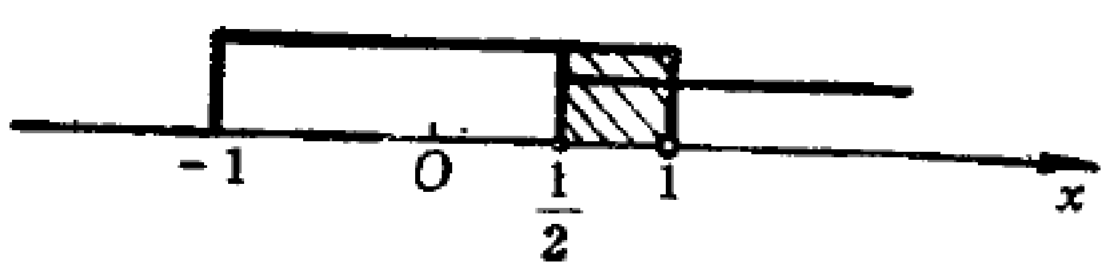

图1-10

例1.2.10 确定函数$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域。

解 由 $x^2-x-6\geqslant 0$ 即$(x-3)(x+2)\geqslant 0$

解上不等式得

$$x\geqslant 3 \quad 或 \quad x\leqslant -2 \qquad (1)$$

由 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1$

可得

$$-3\leqslant x\leqslant 4 \qquad (2)$$

由（1），（2）两式可知，所给函数的定义域为$[-3,\ -2]$或$[3,\ 4]$。

例1.2.11 确定函数$y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$的定义域。

解 由

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2K\pi<x<(2K+1)\pi \quad (K=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{cases}$$

它们的公共解如图1-11所示.所以，函数的定义域为$[-4,-\pi)$

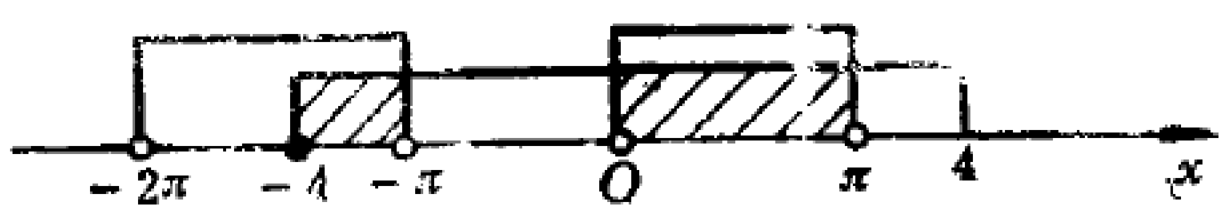

图1-11

或$(0,\pi)$

四　函数表示法

函数表示法，大致有以下3种：

（1）　解析法（公式法）

用一个或几个数学式子表达函数关系的方法，称为解析法（或公式法）．在本节的例子中，除例1.2.3、例1.2.4外，其他函数都是使用的解析表示法．它是微积分中表达函数的主要方法．

用解析法表示函数简单明确，便于研究函数的性态，也是进行理论推理极为有力的工具．为此，我们应引起足够的注意．

（2）　列表法

在实际问题中，根据问题的需要，常把函数的自变量的取值与其对应的因变量的值列成一表格，如此表示函数的方法称为列表法．如本节例1.2.3以及常用的三角函数表、对数表等都是用列表法表示函数关系的例子．

列表法的优点是不需计算就能知道函数的值．因此，在实际工作中常常使用列表法，但当函数值较多时，用列表法就不方便．同时，我们也不容易从列表法中了解函数的变化情况．因此，用列表法讨论函数的性态不够方便．

（3）　图象法

设有函数$y=f(x)$，对于函数$y=f(x)$的定义域中的每一个x，有相应的函数值y与其对应，此时，在平面上建立直角坐标系后，数对（x，y）就在平面上确定一个点，所有这些点的集合就形成平面上的一个图形，这个图形就称为函数$y=f(x)$的图象．

用图象表示函数关系的方法称为图象法，本节例1.2.4就是用图象法表示函数的例子．用图象法表示函数既形象又直观，

是研究函数性态的有力辅助工具。

顺便指出：这里所讨论的函数，由于自变量只有一个，所以称为一元函数，又由于对应于每个自变量的因变量要求是唯一的，所以又称为单值函数，即一元单值函数。在今后的章节里，除作特殊说明，所述函数均指单值函数。至于多值函数，也将定义域作适当地限制，化成某一适当定义域内的单值函数。

§1.3 建立函数关系式举例

建立函数关系式，就是用数学式子表达现实中的变化现象，这是用数学解决实际问题的重要一环。

从实际问题建立函数关系式，首先要分析各种量之间的关系，明确问题的自变量与因变量，并用字母表示出来，可能的情况下，画出其关系示意图；再根据实际问题列出数学表达式；最后由数学解析式和实际问题的意义确定函数的定义域。

例1.3.1 有一块边长为2米的正方形钢板，将其四角各截去一个边长相等的小正方形，制作成一个无盖的正方形水箱。试建立水箱容积与所截的小正方形边长之间的函数关系式。

解 设所截小正方形之边长为x米，水箱容积为V立方米。则水箱底面边长为

$$2-2x=2(1-x)\text{米}$$

由图1-12可知，水箱的高为x米，于是得

$$V=4x(1-x)^2$$

可见，其定义域为（0，1）。

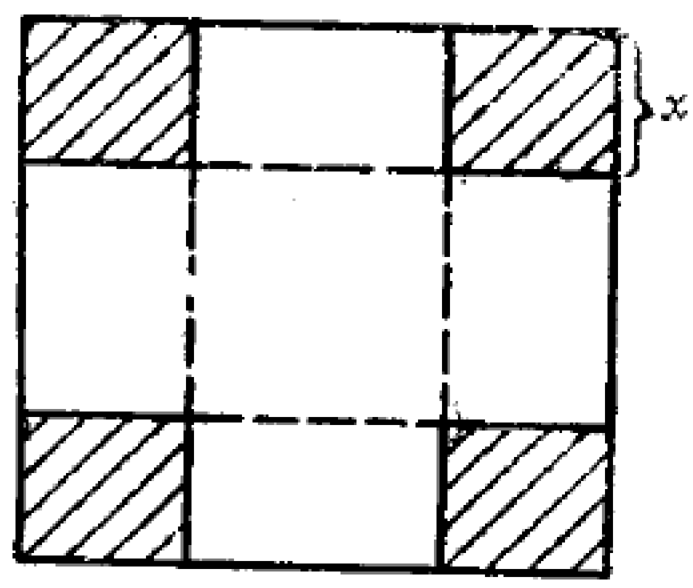

图1-12

例1.3.2 某一铁路（直线）经过相距d公里的A、B两城，在B城垂直于铁路的方向上距B城l公里处有一工厂C，从A城运原料到C工厂，一吨货物每公里铁路运费为a元，公路运费为b元，且$a<b$，为使运费最省，拟在A、B之间修一公路转运站，求从A城运原料到C工厂的总运费与转运站至B城之间距离的函数关系。

解 设转运站D到B城的距离为x公里，从A城运原料到工厂C的总运费为y元。

则

$$|AD| = d - x$$

$$|DC| = \sqrt{l^2 + x^2}$$

所以铁路运费为

$$a(d-x) \text{（元）}$$

公路运费为

$$b\sqrt{l^2+x^2} \text{（元）}$$

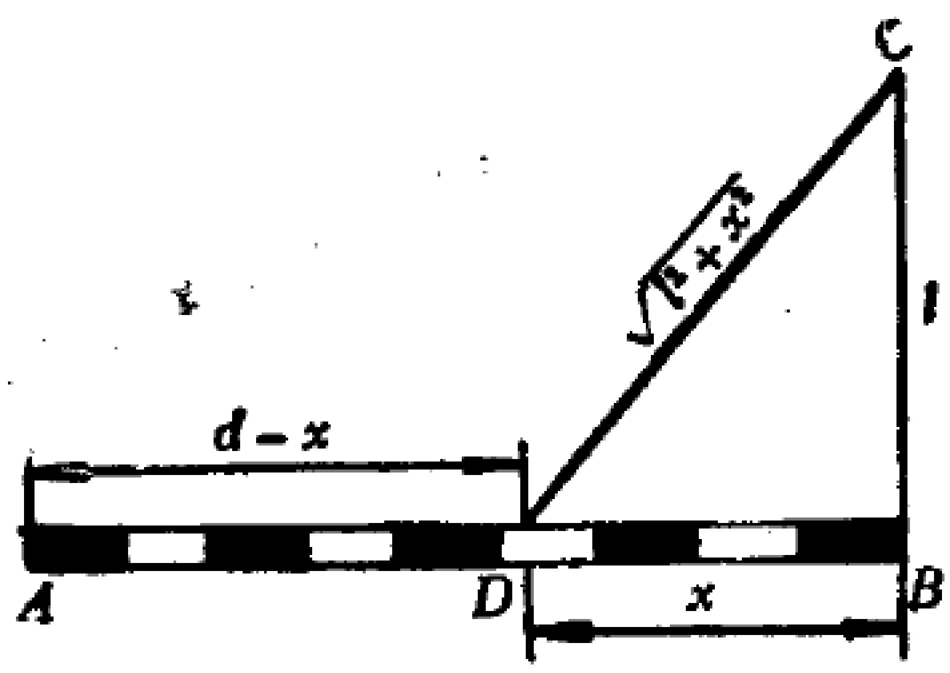

图1-13

因此 $y = a(d-x) + b\sqrt{l^2+x^2}$ （$0 \leqslant x \leqslant d$）

即为所求的函数关系。

例1.3.3 某商品出厂价为40元，如果销售价为52元时，则能售出200件。若该商品每件降价2元，则销售量就增加30件，试确定销售利润与售价之间的函数关系。

解 设利润为L元，每件售价为x元。

则每件商品利润为（$x-40$）元

而每件商品降价一个档次所增加的销售量为

$$30 \times \frac{52-x}{2} = 15(52-x) \text{（件）}$$

所以，对应于价格为x元的商品销售量为

$$15(52-x)+200\text{（件）}$$

因此，销售利润L与价格之间的函数关系为

$$L=(x-40)[15(52-x)+200]$$

该利润函数的定义域为$(40,\ 52]$。

§1.4 函数的简单性质

一 函数的奇偶性

定义1.5 设函数$y=f(x)$定义在以原点为中心的对称区间$(-a,\ a)$内（$a>0$），如果

(1) 对于$(-a,\ a)$内的一切x，恒有$f(-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为偶函数。

(2) 对$(-a,\ a)$内的一切x，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$为奇函数。

从定义可知，偶函数的图象关于y轴对称（图1-14），奇函数的图象关于原点对称（图. 1-15）

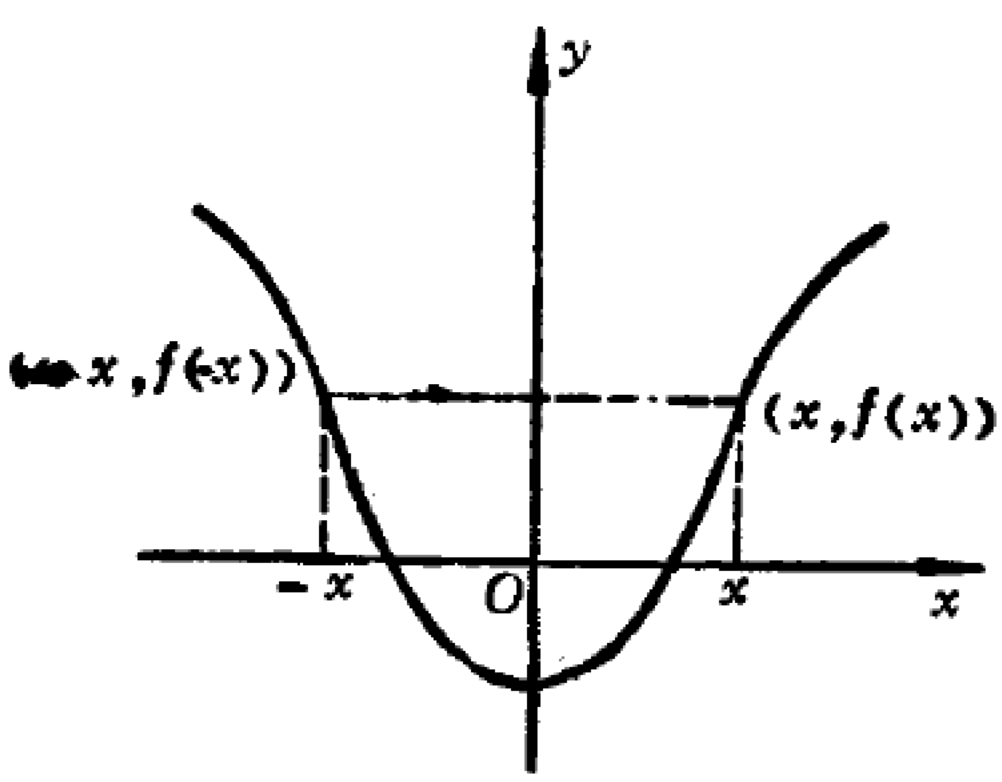

图1-14

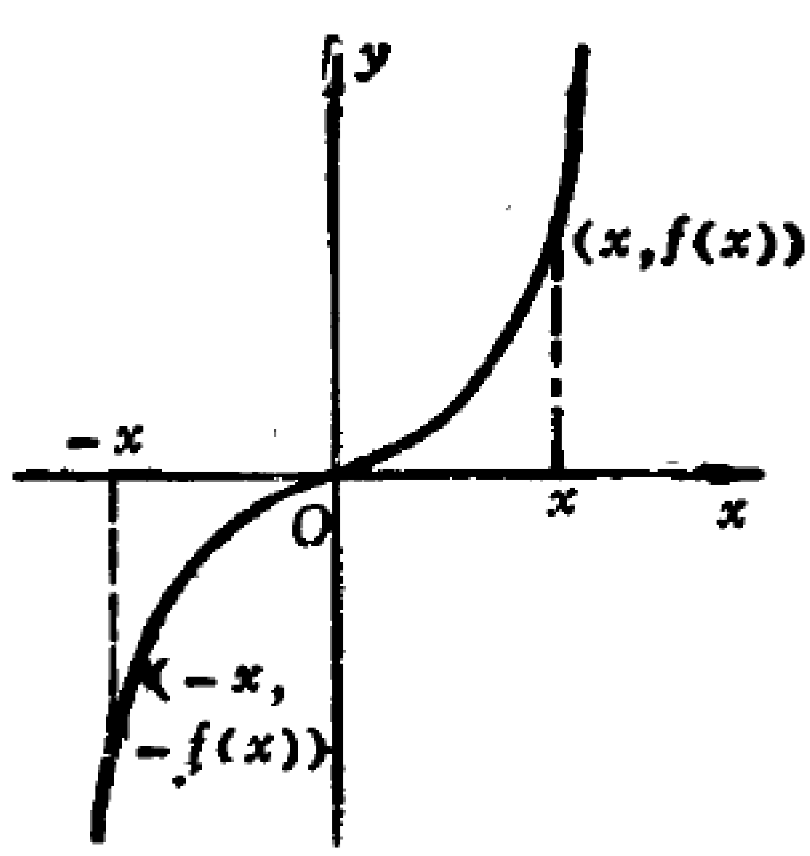

图1-15

例1.4.1 判别函数$y=\frac{1}{1+x^2}$（$-\infty<x<+\infty$）的奇偶性。

解 因为

$$f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$$

所以 $y=\frac{1}{1+x^2}$是偶函数

例1.4.2 判别函数$y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$（$a>1$）的奇偶性

解 由于$-\infty<x<+\infty$，

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{-(-x)})=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$$

$$=-\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-f(x)$$

所以 $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$（$a>1$）是奇函数。

例1.4.3 判别$y=x^2-2x+1$的奇偶性

解 因为定义域为（$-\infty$，$+\infty$），

$$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+1=x^2+2x+1$$

它既不等于$f(x)=x^2-2x+1$，也不等于$-f(x)=-x^2+2x-$

所以 $y=x^2-2x+1$是非奇非偶函数。

二 函数的单调增减性

定义1.6 设函数$y=f(x)$在（a，b）内有定义，若对于（a，b）内的任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在（a，b）内单调增加；当$x_1<x_2$时，有

$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少，区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调递增区间或单调递减区间。

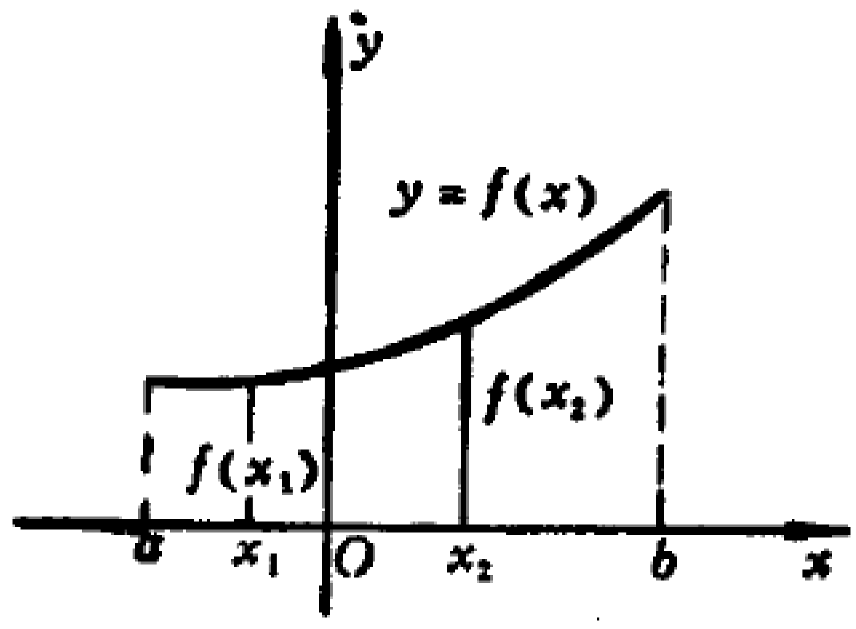

图1-16

单调递增函数 $y=f(x)$ 的图象如图1-16所示。

单调递减函数 $y=f(x)$ 的图象如图1-17所示。

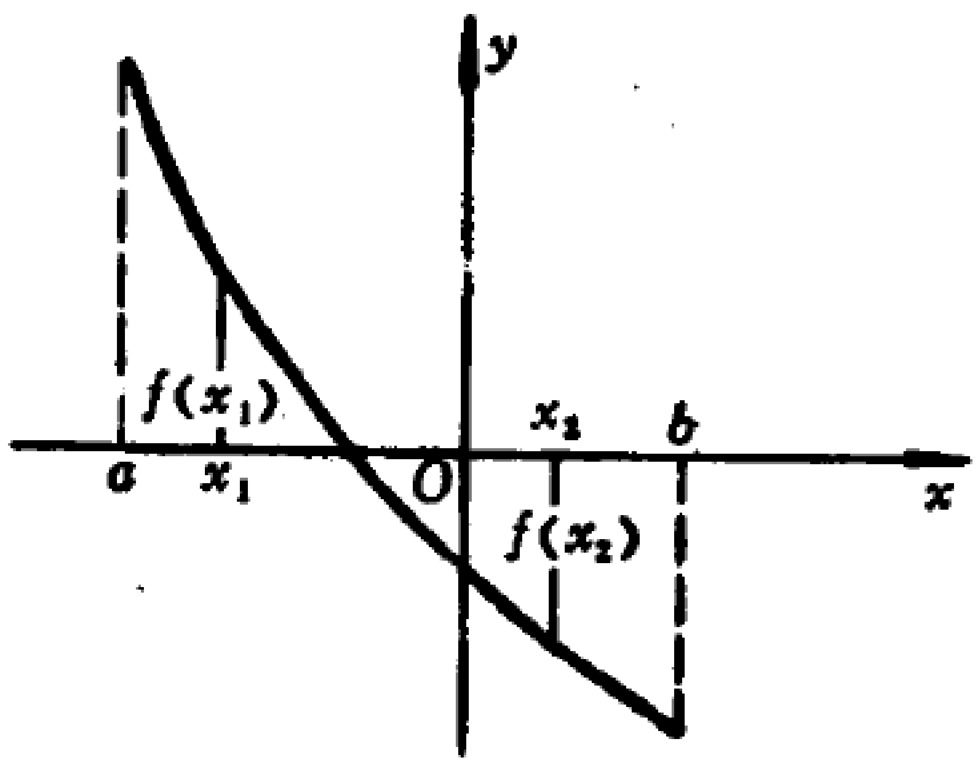

图1-17

例1.4.4 研究函数 $y=2x^2+1$ 的单调性

解 对任意的 x_1、x_2，有

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2^2+1)-(2x_1^2+1)$$

$$=2(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时， $x_2-x_1>0$、 $x_2+x_1>0$

于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 即 $f(x_2)>f(x_1)$

所以 函数 $y=2x^2+1$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增。

当$x_1<x_2\leqslant 0$时，$x_2-x_1>0, x_2+x_1<0$，于是$f(x_2)-f(x_1)<0$即$f(x_2)<f(x_1)$，所以函数$y=2x^2+1$在$(-\infty, 0]$内单调递减。因此 在$(-\infty, +\infty)$内，函数$y=2x^2+1$不是单调函数。

容易判断，函数$y=ax+b$（$a>0$）在$(-\infty, +\infty)$内单调增加；$y=ax+b$（$a<0$）在$(-\infty, +\infty)$内单调减少。

如果函数$y=f(x)$在它的整个定义域内单调增加或单调减少，则称该函数$f(x)$为单调函数。否则，不能笼统地称为单调函数。如$y=2x^2+1$在其定义域$(-\infty, +\infty)$内就不是单调函数。

例1.4.5 判定$y=x^3$的单调增减性。

解 对于定义域$(-\infty, +\infty)$内的任意两点x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$$

$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$

$$=(x_2-x_1)\left[(x_2+\frac{x_1}{2})^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$

所以 $y=x^3$在$(-\infty, +\infty)$内单调增加，这说明$y=x^3$是单调增加函数，该函数的图象如图1-18所示。称为立方抛物线。

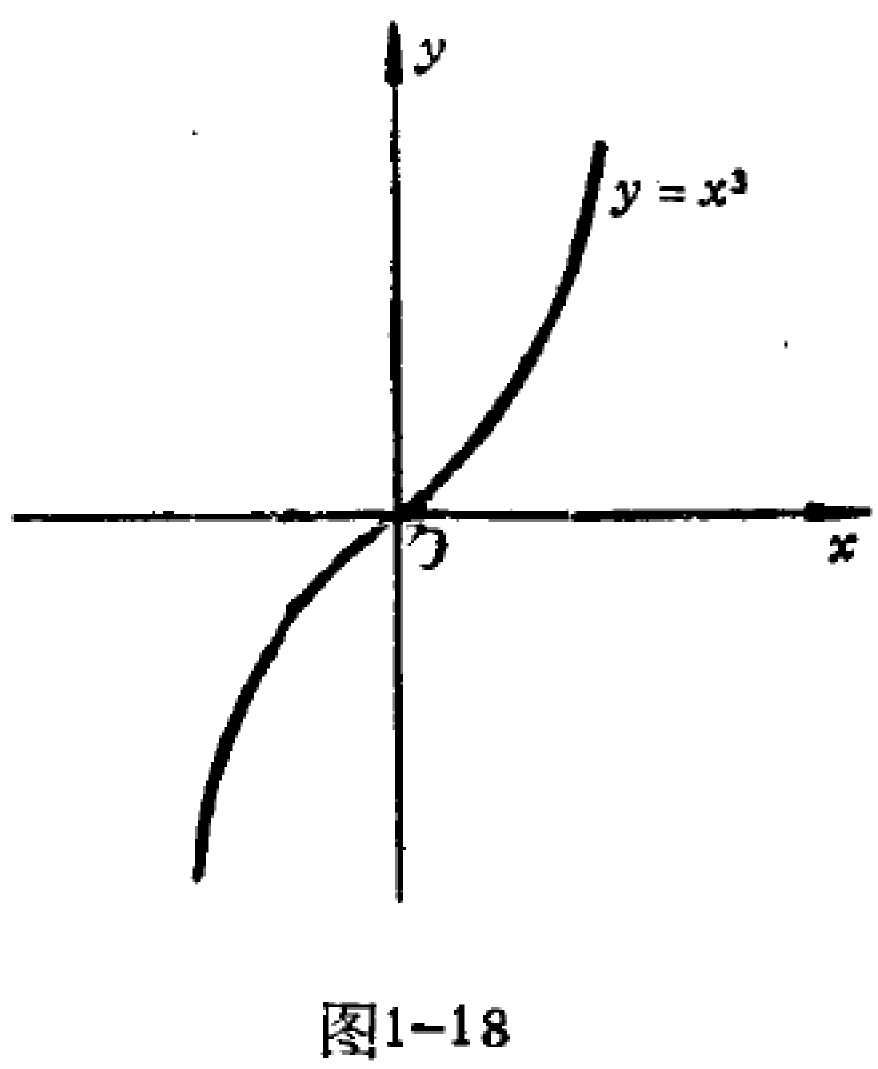

图1-18

三 函数的周期性

定义1.7 设有函数$y=f(x)$，如果存在常数T（$T>0$），对