

第一章

数学与教育

——追溯历史

不管用什么样的观点来分析数学的起源,我们都不能不承认这样的事实:数学一旦产生后,就以各种方式成为人类教育的一个组成部分。因此,数学与教育的关系,无论是对于数学发展,还是教育发展,都是一个重要的问题。

为了探索数学与教育的关系,我们认为应先回顾一下历史。剖析各个不同历史时期,不同文化形态、文明传统下的数学教育或者数学与教育的关系,对于所讨论的问题是有意义的。下面的讨论将特别着重这样三个方面:(一)数学教育的内容;(二)人们对待数学以及数学教育的观点;(三)数学在整个文化教育中所起的作用,以及数学在教育中所占的地位。

第一节

古代东方的数学教育

我们不准备考虑原始社会教育中数学与教育的关系。因为在这种教育中,学校根本不存在。虽然原始教育是教育史的重要内

容之一，但我们认为它对本书要讨论的内容关系不大。

我们认为，对于一种文化处于蒙昧状态、数学不发达的文明，讨论这种文明中数学与教育的关系也是没有什么价值的。因此，我们的讨论仅限于数学比较发达的文明。

据考古文献记载，学校这种教育结构约在第一个法老时代(proto-Sumerion times)——公元前3000年前左右已经形成。古代的巴比伦、埃及、印度等国家都建立有学校。现在有可靠的证据表明，埃及的学校是人类最古老的学校。^① 这些学校有不同类型，主要包括宫廷学校、职官学校、寺庙学校、文士学校等等。

在古巴比伦，已经出现了较为发达的数学。古巴比伦人掌握了分数的运算，六十进位制，一、二次方程的解法和一些简单的求面积、体积的方法。

大约在公元前2500年，出现了专门训练土地测量和实物记载人员的学校。古巴比伦人的这类学校在公元前1200年左右达到鼎盛时期。一个明显的标志是，学校已经成为了一个独立的社会单位，相应地出现了一些专门从事“纯粹的”数学教学的人。

古代东方，埃及的数学教育是最有特色的。可以说这是整个古代东方文化的典型。

尼罗河是人类文明的摇篮之一，她养育了古埃及的人民，蕴育了古埃及文明。古埃及在公元前三千年产生了文字，在与尼罗河戚戚相关的生活中，随之产生了数学、天文学、医学等科学萌芽，与此同时也产生了学校。我们今天看到的最初关于学校的记载，就保存在埃及“古王国”史料中。

古埃及的数学教育主要是在寺庙学校——即大城市神庙中附设的僧侣学校，以及较为世俗化的文士学校中进行的。学校中的功课是抄录各种数学书籍和解答数学习题。最近一两个世纪考古学家发现的莱因特(Rhind)纸草书和莫斯科纸草书，据推测是那

① 曹孚等编：《外国古代教育史》第18页，人民教育出版社，1981。

时学生们学习时的题目。^①可以认为,世界数学教育从公元前 2500 年的埃及僧侣学校中就开始了。

当时数学教育的主要内容有:象形记数方法;各种特殊的加、减、乘、除算术运算;计算三角形、四边形、圆形等面积(计算圆面积时取 $\pi=3.16$);计算正棱锥和截头棱锥等的体积;推算日历(年、季、月和昼夜),预测日、月蚀;观察天象等等。

当时的数学教育主要为政教合一的古埃及王朝培养官吏和办事人员,因此数学教育完全以解决实用问题为目的,在学校进行的大量练习是为了积累实际计算的经验,所考虑的问题主要是关于金字塔、土地测量的,几何也是应用算术的主要内容。计算的规则大都是针对具体问题的。这种数学教育是古埃及文明高度发达的产物。

古埃及时期研究数学的动机,主要是出于实用的考虑,这几乎是古代数学的一大特征(古希腊除外)。古埃及对待数学教育也同样如此。狄奥多^②在论述古埃及僧侣学校讲授数学的观点时认为:“僧侣把算术和几何学传授给儿童;因为尼罗河的泛滥每年都要冲毁土地的界线,境界毗连的地主之间便时起纠纷,这些纠纷就是利用几何学来解决的。”据史料记载,由于尼罗河每年泛滥一次,因此社会上测量土地的任务是十分繁重的,而土地对于当时古埃及的社会政治是异常重要的问题,这样以测量土地为主要目的的数学教育占据着整个教育的重要地位。

僧侣学校是当时古埃及的主要教学机构,僧侣们在寺庙里培养新的僧侣。课程除了宗教科目之外,就是传授算术、天文学、几何和医学。所以僧侣们在人类文明史的早期充当着科学的保存者和教师的角色。由于僧侣们从事数学教学,因而他们在数学与教育中起了双重作用,既是数学知识的传播者,同时他们又促进了

① The International Encyclopedia of Education, vol. 6. p. 3236.
Porgamon press, 1985.

② 狄奥多(Theodore, 约公元前 80 年至 20 年)古希腊历史学家。

数学的发展。

我们认为，僧侣学校在数学发展中的重要作用是使得数学的学习、数学研究在某种程度上成为一种独立的、令人向往的事业，即学校的数学教育、数学学习成了脑力劳动与体力劳动分工的标志。因为从现存的古籍中我们发现，当时这类学校非常受重视，社会给予这类学校的师生以丰厚的待遇。这对于科学的发展、数学的发展是十分有利的。

脑力劳动、体力劳动的分离，刺激了人们研究学问的兴趣。对于这种状况，亚里斯多德，^①这位旷世奇才，有着比几乎任何人都深刻的理解。他认为，科学最先出现于人们开始有闲暇的地方，“之所以数学最先兴于埃及，就因为那里的僧侣阶级有闲暇。”^②历史的发展证明，只有形成知识分子阶层，出现一批与体力劳动者分离的脑力劳动者，人类知识的深化才有可能，数学、科学才能从生产技术中分离出来。虽然古埃及僧侣学校中所从事的数学与数学教育未能完全做到这一点，但已经有了雏形，为古希腊的数学及数学教育准备了积极的条件。

古埃及的数学教育对埃及文明发挥了巨大的影响和作用。首先，接受数学教育者在维持埃及的政局稳定方面起了一定的作用。埃及国王分配土地、纳税、补偿尼罗河洪水所造成的损失等都是依靠那些接受过数学教育的官吏来进行的。

古埃及的建筑堪称世界一大奇观，其中以举世闻名的金字塔为其卓越标志。今天的考古发现表明，在建筑金字塔的过程中大量地运用了数学，有些著名的考古学家和数学史家们指出，金字塔底边的长度几乎完全相等，每个角都非常接近 90° 。在这样的工程中，受过数学教育的监工、工程设计者起了重要作用。据史料记载，古埃及有一个家族为培养建设金字塔的设计者，开办了长

① 亚里斯多德 (Aristotle, 公元前 384—前 322 年) 古希腊著名学者。

② 亚里斯多德：《形而上学》。

达数世纪的学校。

天文学是古埃及的一大成就，而古埃及的天文学家、占星术家无一例外都接受过在当时看来是良好的数学教育。计算历法、航海都需要数学，人们求助于僧侣为他们计算各种日期，僧侣们当然知道历法对于民众的重要性。因此他们就利用这种知识获得了统治无知民众、在王公身边谋生的权利。他们通过精确的数学计算，知道洪水到来的日期，但却佯称是他们举行了虔诚的宗教仪式而带来的，由此让民众、君主为他们的仪式支付报酬。因此，我们看到，古代的天文学、占星术其实都是与数学密切相联的。数学知识在当时是一种权利，因此数学教育得以维持，同时也促进了天文学、占星术的发展。今天数学史家们强调，我们不能因为今天占星术名声不佳而抹煞它在古代文明中的积极作用。从某种程度上来说，古代的许多数学教育是在占星术教育中实施的。在古代，预先知道播种的季节、节日的时间和祭祀的日子，是十分必要的。当然，在现代还倡导占星术等各种巫术来预测，就只能是一种落后的、反科学的逆流。

古埃及的数学还与其文明的诸方面密切相关。在古埃及的绘画、雕塑、建筑、宗教中到处可见数学的影响。古埃及人甚至认为数学对于阐述文明中的许多问题是非常重要的。这一点，我们可以从莱因特纸草书的书名中看出，该书的书名是《阐明对象中一切黑暗的、秘密的事物的指南》。因此，数学教育被当作是掌握自然界秘密的一种关键。作为当时数学教材的莱因特纸草书，其中的编排方式的确适用于数学教育。

可以毫不夸张地说，数学在古埃及教育中占据主要地位，而数学及数学教育的发达促进了古埃及文明。要追溯数学对现代文化的影响，我们应该把注意力首先集中于埃及。^① 讨论数学与教育，也应该如此。古埃及的数学与教育作为与古希腊不同的方式，

^① M. Kline: *Mathematics in Western Culture* p. 29. Penguin Book, 1953.

在历史上具有典型的意义。

第二节 古代中国的数学教育

在中国古代科技发展史上，数学占有重要的地位。“天、算、农、医”四大学科，古代称为“算术”的数学居于其中。

中国古代数学，一般认为源于遥远的石器时代。根据典籍记载，从周代开始，在学校中开始有了数学教育。因此，中国古代数学教育与中国古代数学一样，也具有悠久的历史。

据《礼记·内则》第十二记载，周朝于小学时期，就开始注重对儿童的数学教育：“六年教之数与方名；九年教之数日；十年出外就傅，住宿于外，学书计。”^① 六岁学“数”，指学从1至10的数目，“方名”指辨识东南西北等方向；九岁学数日，指学古代的干支记日法；十岁出外拜师学“书计”，“计”指计算能力。此外还有《白虎通》：“八岁入小学”，“八岁毁齿，始有认知，入学，学算计。”

对儿童进行基本的数学教育，从周朝开始在我国各个历史时期都有记载，而且把这种数学教育作为启蒙教育的内容。《前汉书·食货志》：“八岁入小学，学六甲、五方、书记之事。”“六甲”即六十甲子。三国时魏国王粲著《儒史论》^② 中记载：“古者八岁入小学，学六甲、五方、书记之事。”《后汉书·杨终传》中有：“礼制：人君之子，年八岁为置少傅，教之书计，以开其明。”北魏著名农学家贾思勰在《齐民要术》中引后汉桓帝时代崔寔《四民月令》记载：“正月农事未起，命成童以上入太学，学五经，师法求

① 也有学者将此段标点为“九年教之数、日。十年出外就傅，住宿于外，学书，计。”指称内容区别不大。

② 王粲（177—217），《儒史论》见《太平御卷》卷六百三十。

备，习读书传。砚冰释，命幼童入学，学书篇章‘六甲、九九、急就、三苍之属’。”唐代，元代的典籍中也有类似记载。

这种对儿童的数学教育，明显地只是传授一些基本的日常生活中的数学常识。这种教育不需要专门的数学教员，附在一般文化教育中就行了。事实上，儿童所接受的数学知识是任何一位当时的文人所必备的。所以，在我国漫长的古代教育中，儿童教育中数学教育并不是独立的。儿童数学教育的这些内容已经是中国文化的一个组成部分。但不容否认，我国传统的学校教育中从周朝起确实有数学教育。对于中国古代大多数知识分子和官吏来说，启蒙时期所接受的儿童数学教育，差不多是他们一生中所接受的全部数学教育。

严格地说，中国古代儿童的数学教育只不过是一种常识教育。中国古代真正的数学教育是与中国古代数学的发展紧密相连的。

在中国教育史上，“六艺”是众所周知的。在《周礼》这部专门记述周朝百官制度的著作中，《地官·大司徒》篇中记载：“保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺，一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五御，五曰六书，六曰九数。”表明周朝时有一种称为“保氏”的官，负责对学生（国子）们进行教育，内容是“礼、乐、射、御、书、数”，数学也是教学科目之一。在这里，我们看到，数学处于和礼、乐、书等平等的地位。这种数学教育已经超出了一般常识教育。

作为数学教育的“九数”指的是哪些内容呢？据后汉郑玄^①注九数：“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，勾股。”这些内容与现今仍存有的《九章算术》各篇的名称相同，只不过《九章算术》以“勾股”代“旁要”。三国时著名数学家刘徽^②在《九章算术·注》序中说

① 郑玄：字康成，公元127—200年。

② 刘徽：魏晋时人。

更明确：“周公制礼而有九数，九数之流则《九章》是矣。”可以肯定九章的名称是所谓周礼九数的演变。周朝数学教学内容的“九数”，后来成为中国古代数学成熟标志的《九章算术》中的内容。对于这一点，明朝万历三十二年（1604），黄龙吟在《算法指南》的刻本中，根据周公制礼，《周髀算经》托为周公、商高问答之辩，断言“周公作九章之法，以教天下”，并且附了一张师徒传授、学习数学的插图。该图生动地描绘了古代中国数学教育的情景。

将周公封为中国古代数学教育的开山祖师，这与中国传统文化中的做法是颇为一致的。神农尝百草，仓颉造字，孔子教人识字，鲁班教天下木匠等等，每一行当都有一位历史上真实的人作为鼻祖。数学也不例外。在这个意义上，不妨称中国数学教育祖师是周公。

《九章算术》是一部现在有传本的、最古老的中国数学经典著作，^①而周朝数学教育的主要内容“九数”即为《九章算术》的内容。这表明，《九章算术》中所涉及的知识大都在周朝时中国人已经掌握了，同时《九章算术》的出现可以看作是该书以前^②数学成就、数学教学成就的总结。

不仅如此，《九章算术》成书以后，又影响了中国古代的数学教学、数学研究工作。在中国古代数学史上，《九章算术》的形成，标志着中国古代数学的形成^③，16世纪以前的中国数学著作大都遵照《九章算术》的体例。另一方面，我国古代数学教育一直以《九章算术》为主要内容。实际上，这两方面是互为因果的。

《九章算术》一直被我国古代数学家作为学习、研究数学的门径。刘徽自己曾说：“幼习九章，长更详览”，最后完成了名垂千

① 钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社1981年，第28页。

② 关于《九章算术》的成书年代，数学界分歧较大，一般认为成书在西汉公元50—100年之间。

③ 严敦杰：中国数学教育简史，载《数学通报》1965年第8期，第44页。

古的《九章算术注》。祖冲之、贾宪、杨辉等都详注、详解过《九章算术》，许多著作如唐代王孝通的《辑古算经》、明代程大位的《算法统宗》等都是受《九章算术》的启发而完成的。

中国古代数学教育自从有《九章算术》后，一直以该书作为基本教材，师徒数代一直学习、研究、注释该书，这一点和中国传统的学术、教学是完全一致的。这样一方面保留了中国数学从《九章算术》开始所具有的鲜明特点的连续性，使得中国数学没有象古巴比伦、古埃及的数学那样中断。但另一方面，也使得中国传统数学的发展在一定程度上受到了阻碍。

中国古代数学教育发展日趋成熟，到三国魏时有尚书算生、及诸寺算生，级别为从八品下。经过两晋、南北朝，发展到隋唐时出现了根本性的变化。隋朝对中国文化的重大影响之一，是开始了科举考试的时代。这样在选拔官吏方面部分地改变了依靠门阀、举孝廉等方式，从而为广大的文人骚客尤其是出身贫寒的文士开辟了一条进入仕途的道路，同时也为中国文化的发展产生了积极影响。唐宋诗、词的发达，宋元科技发展到一个高峰鼎盛时期，都与此密切相关。

隋朝建立完整的数学教育制度的标志，是在国家创办的最高学府——国子寺中第一次设立了明算学，在科举中设立了明算科。^①《隋书·志第二十三·百官志下》记载：“国子寺祭酒一人。属官有主簿、录事各一人。统国子、太学、四门、书、算学。各置博士（国子、太学、四门各五人，书、算各二人）、助教（国子、太学、四门各五人，书、算各二人）、学生（国子一百四十人，太学、四门各三百六十人，书四十人，算八十人），等员。”隋朝已有正式的高等教育机构，并给了算学以一席之地。而在隋朝以前，据史书记载，算学多在史之内，不列于国学。从这个意义上来说，数学教育已开始走出附属的境地，而成了一门独立的门类。在我

① 杜石然等《中国科学技术史稿》（上）第323页，科学出版社，1982。

国数学教育史上，数学课程的独立，大学数学部门（相当于今天的系）的出现当在隋朝。博士二人，助教二人，学生 80 人的明算科，在今天的标准看来，当然比较少，但毕竟在我国历史上是首创。

隋朝灭亡之后，唐朝在其基础上继续发展数学教育。在各个方面都进一步完善化了。

唐朝在最高学府——国子监里设有明算科，把数学继续作为一个专科。算学师生状况在唐初是这样的：“算学博士二人，从九品下；助教一人。掌教八品以下及庶人子为生者。”^① 明算科师生的社会地位都很低下，算学博士的官秩才是从九品下，算学助教则没有品级，而国子学博士官秩为正五品上，连助教也是从六品上，因此出现了“士族所趋唯明经、进士二科而已”的局面。

唐朝明算科学生是通过考试而选拔的“唐贡士之制，有秀才，有明经，有进士，有明法，有明书，有明算。每岁仲冬郡县馆监课试。”^② 由于种种原因，当时数学教育兴废无常，学习算学学生的人数也随之发生变化。唐初明算科有三十人，“贞观以后，太宗数幸国学，太学遂增学舍一千二百间。……其书、算各置博士，凡三千二百六十员”，书、算两科共有师生三千多员，足见当时盛况。^③ 但以后却发生了变化。“显庆二年（657 年）废书、算、律学”，“显庆三年（658 年）又废，龙朔二年（662 年）二月复律、书、算学。三年（663）以书隶兰台，算隶秘阁局，律隶详刑寺。”有时学生甚至减少到十名、两名，几乎与废置差不多。晚唐时期，明算科考试都停止了。尽管这样，唐代继隋所建立的数学教育功绩仍不可否认。

从现在所存资料看，唐代的数学教育有完整的一套体系，从教材的编撰、学生学习，到考核、分配及待遇，都有一套制度，这

① 《旧唐书》卷四十四，职官志上。

② 杜佑：《通典》。

③ 《唐会要》卷三十五。

是我国数学教育史上最早的、详细的数学教育计划，具有十分珍贵的价值。

在唐代的算学博士中，有著名数学家王孝通。据《旧唐书》记载，他在公元623年（唐高祖武德三年）即已为算学博士，他在数学上的卓越成就是著有《缉古算术》，其中介绍了求三次方程正根的方法（称为“开带从立方法”）。《缉古算术》（又称《缉古算经》）纠正了很多前代人的错误。很快，该书成了唐代数学教育的标准教材。他在“上《缉古算经》表”上说：“臣长自闾阎，少小学算。镌磨愚钝，迄将皓首。钻寻秘奥，曲尽无遗。代乏知音，终成寡和。伏蒙圣朝收拾，用臣为太史丞。比年以来，奉敕校勘傅仁均历，凡驳正术错三十余道，即付太史施行。”王孝通是有史可考的最早的职业数学教育家，后来官至太史令。

在中国历史上，第一位系统编撰、校点数学教科书的数学家当推李淳风。“李淳风岐州雍人，明天文、历算、阴阳之学。”^①关于《编撰数学教科书，有详细记载：“唐初太史监候王思辩表称：《五曹》、《孙子》十部算经，理多踳驳，李淳风复与国子监算学博士梁述，太学助教王真儒等受诏注《五曹》、《孙子》十部算经。书成，唐高祖令国学行用。”^②通过国家法令颁行数学教科书，这在中外历史上当推第一次。颁行的时间是公元656年：“显庆元年（656年），左仆射于志宁等奏以十部算经付国学行用。”现在有传本的算经十书每卷的第一页上都题“唐朝议大夫，行太史令，上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释。”奉旨编撰教科书，这是数学史上的一件大事。李淳风受诏注算经十书当在显庆元年（公元656年）前，因为“显庆元年，复以修国史，功封昌乐县男”，而古十书的官衔中没有这一名称。

经过李淳风等人注释的算经十书，在数学成就方面大大提高了，同时也更便于教学之用，对于初学者很有帮助。

^{①②}《旧唐书》卷七十九，李淳风传。

李淳风等人审定、注释的十部数学教材，今天已没有完整的全部传本了，根据史料记载，可以完全确定的有：《周髀算经》、《海岛算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》九部，另外一部可能是《夏侯阳算经》。此外，《数术记遗》、《三等数》二部书可能是作为课外参考书。

唐代的数学教学采取分组的方式。分为二组，唐初时每组十五人，每组的课程不相同。“二分其经，以为之业。习《九章》、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》十有五人，习《缀术》、《缉古》十有五人，其《纪遗》、《三等数》亦兼习之。”^①这种分组方式究竟是出于什么考虑，史书上没有记载。限定的学习时数表明，每组学习时间均为七年。

对每一门课程的学习时间长度也有明确规定：“凡算学，《孙子》、《五曹》共限一岁，《九章》、《海岛》共三岁，《张邱建》、《夏侯阳》各一岁，《周髀》、《五经算》共一岁，《缀术》四岁，《缉古》三岁，《记遗》、《三等数》等皆兼习之。”^②唐初确定的上述专业年限及所学课程，在唐贞观时期仍在施行。

唐代数学教育规定有十分明确的考试制度，基本目标是：“明数造术，详明术理，然后为通。”学生学完规定的时间与课程后，按照所学内容分两组进行考试。第一组“试《九章》三条、《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》各一条”，^③共考试十道试题。第二组试“《缀术》七条、《缉古》三条”，^④也是共十道试题。此外还要加试《记遗》、《三等数》。这种考试划定了考试范围，使学生能够有重点、有主次地进行复习。

成绩的评定也有明确的规定，两组十道试题的要求及附加内

① 《旧唐书》卷四十四，职官三。

②③④ 《新唐书》卷四十四，选举志上。

容的要求都是相同的，试题“十通六”、“《记遗》、《三等数》帖读十得九，为第，”^①相当于今天的六十分算及格。有时还进行口试，规定“得八以上为上，得六以上为中，得五以上为下。”

学生学完课程，经考试合格后，送吏部“铨叙”（即分配工作），给予从九品下的官阶。诸及第人并录奏，仍关送吏部。书、算为九品下叙排。

在算学考试中，没有学过国子监算学的人，也可以应试，^②这大致相当于今天的同等学历参加考试，或自学考试，表明唐代的算学考试的方法是多样的，考试合格者同样授予官职，予以录用。

唐代的一套数学教育制度即使在今天看来也是十分完备的，可以看作早期的数学专业化教育，从学生的选拔、培养、考试到去向都有详细的规定。可惜的是，这一套制度没有坚持下来。

唐朝的数学教育制度还对日本、朝鲜同时期的数学教育产生了影响。日本天智天皇时期（663—671），开始筹建学校，置算学博士二人，算学生二十人，所采取的数学教育制度也仿唐制，数学教科书、考试办法也大都一如唐朝。朝鲜也仿照隋唐数学教育制度，设置算学博士，采用唐朝钦定的数学教科书。作为封建盛世的唐朝，其数学、数学教育对东亚产生了积极深远的影响。

唐朝的数学教育制度对以后各朝代的数学教育有一定的影响，只可惜多半废弃不用。五代时期由于连年不断的战争，连学校都无法办，更谈不上数学教育了。

北宋初期，仿唐制设有“算学博士”，但并未兴办数学教育。到元丰六年（1083年）才正式创立国家学校——国子监，分为五科——国子、太学、武学、律学、算学，才有算学考试之举。教育制度，仿用唐制。宋史中记载：“算学。崇宁三年（1104年）始建学，生员以二百一十人为额，许命官及庶人为之。其业以《九

① 《新唐书》卷四十四，选举志上。

② 李俨、杜石然：《中国古代数学简史》，第141页，中华书局，1963年版。

章》、《周髀》乃假设疑数为算问，仍兼《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》算法并历算、三式、书为本科。本科外，人占一小经，愿占大经者听。公私试，三舍法略如太学。上舍三等推思，以通仕、登仕、将仕郎为次。大观四年（1110年）以算学生归之太史局。”^①崇宁三年才正式设置算学科，可是不久又废止。后因制定天文历法的需要，又复置。当时有算学博士及各种辅助人员十二人，学生最多时曾达二百六十人，比唐朝增多了。元丰七年重新刊印了数学教科书，基本上沿用唐代的教科书，这次刊印、注释也是一次较大规模的整理研究工作。^②在各门课程的学习年限及考试方法上也有些变化。学生修完课程考试合格后，所授官职和唐朝差不多。南宋时，数学教育更差，鲍澣之在1200年《九章序》中称：“自衣冠南渡以来，此学即废。非独好之者寡，而《九章算经》亦几泯没无传矣。”整个说来，宋朝的官方数学教育不如唐朝。尽管宋朝的数学水平比唐朝要高得多，是我国古代数学发展的顶峰时期。

元代的数学教育也有一定规模。元人以外族入主中华，但社会上却曾一度掀起过算学高潮，“方今崇尚算学，科目渐兴。”在官修的《通制条格》的“学令”、“选举”条目中，记载有有关算学的条文。元代马祖常（1279——1338）曾上表奏请设立算学：“伏诸闻奏设立律学算学博士”，结果在官办学校中出现了“习学书算，……交太史院里学算子呵，国子监里学文书呵”的局面。不过，元代的数学教育成就、影响都不大。

明代时，朱元璋洪武初年的科举考试中兼试算学。明《太祖实录》记载：“洪武三年（1370）八月，京师及各行省开乡试。……

① 《宋史》卷一百五十七，选举三。

② 李俨：《中国古代数学史料》第90—93页。科学出版社，1956。王国维在《五代两宋蓝本考》中认为北宋算经十书为《周髀算经》二卷、《九章算术》九卷，《孙子算经》三卷、《数术记遗》一卷、《海岛算经》一卷、《五曹算经》五卷、《夏侯阳算经》三卷、《张邱建算经》三卷、《五经算术》二卷、《缉古算经》一卷。

中式者后十日复以五事试之。曰：骑，射，书，算，律。……书，通于六义；算，通于九法。”^①《皇明太学志》中也记有：“原洪武二十五年（1392）所颁数法，凡生员，每日务要习学算法，必由乘、因、加、归、除、减，精通《九章》之数。昔之善教者，经义治事，贵在兼通，曾谓律令数学，切於日用，可忽而不之学乎”^②但过了不多久，算学就为人们忽略了。以至于“宣德四年（1429）九月乙卯，北京国子监助教王仙言，近年生员，止记诵文字，以备科贡，其于子学算法，略不晓习。考入国监，历事诸司，字画劣拙，算数不通，何以居官莅政。乞令天下儒学生员，并习书算。上从之。”^③但是，没过几年，数学教育依然为八股取士的风气冲淡了。明宣德、嘉靖以后，明代就不再有官办的数学教育了。^④

清初数学教育有较大起色。设立算学馆，选八旗世家子弟入学，这些都是具体措施。“康熙五十二年（1713）初设算学馆，选八旗世家子弟，学习算法。以大臣官员，精于数学者司其事。特命皇子亲王董之”^⑤由于天文历法的需要，清朝康熙、雍正、乾隆等诸皇帝都很重视数学，国子监算学馆一直较受重视。嘉庆、道光年间，数学教育也未间断，而且有人主其事。如乾隆五十年（1784）汤大猷任钦天监正，兼管国子监算学馆，嘉庆十三年（1808）福文高任钦天监正，道光三年（1823）李拱辰任钦天监正，并兼管国子监算学馆。数学教育亦有一定成就。

明末清初，出现了数学及近代科学的“西学东渐”。我们认为，清代中、后叶“西学东渐”后的数学与教育已经超出了古代中国数学与教育的讨论范围，留待后面专门讨论。

中国古代数学在相当长一段时间内占据世界领先地位。从中

①③《日知录》卷十一。

②《皇明太志学》十一卷。

④李俨，《中算史论丛》（四上）第284—285页，中华学艺社。

⑤《皇朝政典类纂》卷二百十七。

国古代的数学教育来看，也是世界上较早、较完备的，中国的数学与教育堪称历史悠久、成果辉煌。那么是否可以说中国古代的国家数学教育制度促进了中国古代的数学发展呢？

问题远不如人们想象的这么简单。注意这样一个事实也许会很快地否定这种想象：中国古代通过国家数学考试及格受了好几年数学教育的人，很少在数学上有所造诣。^①唐宋的著名数学家没有一位是靠国家数学教育培养出来的，这与唐宋时期中国古代数学十分发达，又有一套完整的数学教育制度是极不相称的。

造成这种状况的原因是多方面的。其中重要的一条恐怕就是死啃书本、教学方式刻板所造成的。学生只需要背诵、记住算经十书的内容即可，因此将数学教育也等同于其他经文教学。在中国古代教学中，首要倡导的是背诵经典，背《论语》、《孟子》、《大学》、《中庸》等等。这种方式也许对于一般教育还有所帮助，但对于数学教育难以奏效，数学教学最关键的是要掌握其思想和方法实质。而那时的数学教育采用的是背诵经书的方式，只要求学生死记住十部算经的条文，不是提倡创造而是提倡背诵，这样培养出来的学生怎么会有重大的数学成果呢？

总的说来，中国古代的国家数学教育在世界数学教育史上独具特色。通过国家的法令颁布数学教育计划，从学生来源、教科书的编注、修业年限、考试及分配方面都有明确规定，使中国数学教育在公元7世纪就具有相当完备的形式。国家数学教育制度对于保存中国优秀的数学成果起了巨大作用。唐代、宋代把必修的数学教科书叫做十部算经，就是今天《算经十书》的由来。但是，这种数学教育制度对中国古代数学发展的积极影响不大。

中国古代数学教育的另一个重要方面是私家的数学传授，这种数学教育方式对中国古代数学发展的作用，远远超出了官办的数学教育。

① 严敦杰：《中国数学教育史》（上），载《数学通报》，1965年第8期第46页。

中国古代有成就的数学家许多是私家数学教育、靠学艺的方式造就出来的。刘徽曾“幼习九章、长更详览。”《后魏书》记载，殷绍要学《九章算术》，曾拜在道人法穆门下师承《九章》数学法要。郑玄师事京兆第五元先，始通《三统历》、《九章算术》；祖暅先后将数学知识传授给信都芳、毛栖成。南宋秦九韶曾从隐君子学习数学。关于唐代僧一行拜师求教数学，历史上还记有一段有趣的故事：“一行因穷大衍。自此访求师资，不远数千里。尝至天台县清寺，见一院，古松数十步，门有流水。一行立于门屏间。闻院中僧于庭布算，其声簌簌，既而谓其徒曰：‘今日当有弟子求吾算法，已合到门，岂无人导达耶？’即布一算，又谓曰：‘门前水合却西流，弟子当至。’一行承言而入，稽首请法，尽授其术焉，而门水旧东流，忽改为西流矣。”英国著名中国科学史家李约瑟博士在援引这个故事时叹曰：这个迷人的故事说明了当时数学家相互传授知识的困难，也表明了科学上的发明和改进是多么容易和它们的作者一同湮没。^①

古代私传数学教育还有一种云游学者或书院式的讲学方式。宋元最著名的数学家之一的朱世杰，就是一个到处云游讲学的学者，平生以数学研究、数学教育为其职业，周游天下二十余年教授数学，颇受欢迎，“复游广陵（杨洲），踵门而学者云集。”他的数学著作《算学启蒙》（写成于1299年）是一部较好的启蒙算术，内容从乘除直到开方、天元术，体系完整，深入浅出。书院式方式，如金代武元和他的学生“终日相对，握筹布画，”讨论数学问题，元代郭守敬在磁州（今邢台）紫金山紫金书院，与王恂一起向刘秉忠学习数学。在这种书院中学习数学，强调领会数学思想实质，能有较大收获。

家学相传，在中国古代数学教育中占据了重要的地位，这也是中国古代教育、中国文化的一大特色。刘歆“与父向领校秘书，

^① 李约瑟：《中国科学技术史》第三卷，科学出版社，1978。

数术方技、无所不究。”南北朝的祖冲之、祖暅、祖皓，诸代相传。史载：祖暅“少传家业，究极精微，亦有巧思入神之妙……子皓……少传家业，善算历。”^①清代的梅文鼎、梅以燕、梅谷成祖孙三代也都通数学。此外，历史上家学相传著名的还有宋代楚衍传其女儿，郭守敬幼时接受其祖父郭荣的数学教育，清代汪莱与汪光恒。在中国历史上最著名的当推祖冲之父子。

在中国古代数学教育史上，有一位杰出的数学教育家，他就是南宋末年的著名数学家杨辉。

杨辉（约13世纪中世纪人），字谦光，杭州人。著有《详解九章算法》12卷（1261年写成，现存残缺）、《日用算法》2卷（1262年写成，现存残缺）和《杨辉算法》7卷（1274—1275年写成）、（即《乘除通变本末》三卷（1274）、《田亩比类乘除捷法》二卷、《续古摘奇算法》二卷，共五种二十一卷）。

杨辉走到哪里，都有人向他请教数学问题，他总是乐于解答。不仅如此，他还特别重视数学的普及教育工作。他的许多著作都是为普及数学教育而编写的教科书。他认为唐代官方编注的《九章》等教科书“无启蒙之术，初学病之，”决心改变这种状况。

在三卷本《乘除通变本末》的上卷中，他提出了“习算纲目，”这篇文章是中国数学教育史上的重要文献，是他多年来从事数学教育工作的经验总结。他的许多重要的教育思想都反映在这篇文章中。

杨辉主张，数学教育与学习要循序渐进、熟读审思。他订出了一张详备的学习计划。“习算纲目”的开头是“先念九九合数”，他提出要“至小至大地由一一如一，至九九八十一”的学习九九口诀，而不能象以前那样由“九九八十一”开始（古代是由“九九八十一”开始的，故称为“九九”），由九九合数开始，一直到学通《九章算术》的程序和期限，他都做了详细安排。相当于编

^①《南史》卷七十二。

定了一份详细的数学教学大纲。在“习算纲目”中，他还对每种新内容学习之后都安排了“温习”，还安排指定了参考书目。

在数学教学上，他主张诱导学习者积极地学习，从而提高计算能力；强调通过习题的演算，来领会个中奥秘。认为“好学君子，自能触类而考”，从而达到学习的要求。如对于海岛题法“今卷后立望竿二题，引证海岛之法，亦循循诱人之意”，从根本上摒弃了官方数学教育中的死记硬背。

杨辉强调在数学教学、学习中要一丝不苟，严谨治学，不放松数学中的任何细小环节，数学书中的注解部分也要细心研读。

最为难得的是，他对做好数学习题与学习基础理论的关系，以及按什么标准选择习题有深刻的认识，^① 强调：“夫学算者，题从法取，法将题验，凡欲明一法，必设一题。”“题繁难见法理，定撰小题验法理，义既通虽用繁题了然可见也，”这种数学教育原则至今天仍是十分重要的。由此可见，他的数学教育思想、教学方法是十分先进的。

中国古代的私家数学传授，或者说民间数学教育，在中国古代数学发展中起了重要的、甚至是主要的作用。在这种民间数学教育中，学习内容完全可以凭个人爱好、兴趣自由选择，学习风气十分浓厚，无死记硬背之苦，也无考试、出路之忧，有些人如隐士、和尚、道士，甚至把推演数算之理当作一种人间乐趣。从科学研究动力的角度来分析，处于这样一种境界的研究，当是最为理想的。中国古代数学史上很多重要成果主要是通过私学的、民间数学教育培养出来的数学家所创造的。这与官方的数学教育形成了鲜明对照。

可惜，我国私学的数学教育制度形式多种多样，史料记载下来的极少。同时这种民间的数学教育也有其对数学发展不利的一

^① 中外数学简史编写组：《中国数学简史》，第306页，山东教育出版社，1986年。

面——使数学神秘化，造成了历史上的绝学，从而使许多人将数学列为方伎而轻视它，这对数学知识的普及，尤其是对许多高深、独到的数学内容的发展带来了很大的损失。

中国古代数学发展的一大特色是数学与天文、历法紧密地结合在一起，因此有相当一部分数学教育是与天文、历法教育联系在一起的。许多天文、历算史家进行着世代的祖传，学院、观象台进行着数学教育。唐、宋时期每当废除算学时，就将算学师生划归太史院。

我们看到，中国古代数学教育是十分发达、富有特色的。

我们花了大量篇幅来论述中国古代数学教育，按理说，下面应该分析中国古代数学教育所反映的中国古代的数学观——数学的作用，数学在科学、社会中的地位等诸方面。但下面我们先论述古希腊的数学教育与数学观，然后再从中、西文化的比较方面来评价中国古代的数学观。

如此进行处理，是出于这样的考虑：古希腊科学、尤其是古希腊数学决定、影响了整个西方的科学和数学。中国古代的科学及数学的发展，在与西方文明接触之前，一直是沿着春秋战国、秦汉开创的道路发展、变化的。因此，通过考察中、西（希）数学教育、数学观的差别，我们试图给出中西文化、科学、数学发展差异的一种解释，从而使我们能从一个侧面，看到数学与数学教育对科学、文化、社会的影响。

第 三 节

古希腊的数学教育

不管人们对古代文明有什么看法，都不能不承认这样的事实：我们在哲学中、科学中、文化中以及其他许多领域中常常不得不回到希腊这个民族的成就方面来。希腊人无所不包的才能与活动，

给他们保证了在人类发展史上与其他任何民族相比处于一个特殊的地位。^① 因此，许多人愿意说：“希腊人永远是我们的老师”。

在古希腊，数学作为一门科学，同时也作为一门教学科目，发挥了非同凡响的作用，^② 无论是在古希腊科学、文明中，还是对人类整个文明的影响都是如此。

古希腊的教育主要有两大体系——斯巴达(Sparta)体系和雅典(Athens)体系。斯巴达教育体系主要是一种军事教育体系，对文化很不重视，因此我们不在这里讨论。

而雅典教育体系就大不相同了。雅典，由于位于优越的海滨港口之畔，很早就成了希腊的商业中心。由于对东方各国如腓尼基、埃及贸易的发展，雅典大部分奴隶主贵族在公元前6世纪时已经由农业贵族成了商业贵族。这样，雅典成了商业阶层的代表所领导的奴隶制民主共和国。奴隶们的辛勤劳动，使得奴隶主贵族、平民们有大量的闲暇时间发展文化。“只有奴隶制才使农业和工业之间的更大规模分工成为可能，从而为古代文化的繁荣，即为希腊文化创造了条件。没有奴隶制，就没有希腊国家，就没有希腊的艺术和科学。”^③ 沸腾的政治生活，奴隶主、自由民高水准的经济生活，与东方各国频繁的交往，浓厚的民主政治气氛，形成了高度发达的雅典文化。公元前6—4世纪雅典的教育正是在这种环境下形成的。

鼎盛时期（公元前6—4世纪）雅典教育体系是这样的：

0—7岁：家庭教育（游戏、掷骰子、猜单双、模塑、雕刻）；

7—14岁：文法学校（阅读、书法、计算）；弦琴学校（音乐、唱歌、诵诗）；

13—15岁：体操学校；

① 《马克思恩格斯全集》第20卷，第385—386页，人民出版社，1971年。

② 这一评价见 History of Mathematics Education. 载 The International Encyclopedia of Education. Vol. 6. p. 3237.

③ 恩格斯：《反杜林论》，见《马克思恩格斯选集》第三卷，第220页。