◎第一回

手指脚趾计数自然 二进十进游戏高雅

话说 50000 多年前，我们的祖先手持石器木棒，刀耕火种，狩猎捕鱼，逐渐有了“有无与多少”的概念，他们清点猎物和收获的野果，拿过一只山鸡，就扳屈一个指头，十个指头全扳屈了，就在地上放一块石子，心知已得十只山鸡，这就是十进制的萌芽，指头是自然界赋予人类的，所以后人称从 1 开始的正整数为自然数，19 世纪，德国大数学家克罗内克说：“上帝创造了自然数，其余一切都是人造的。”此话中的“上帝”如果理解成宇宙，则此言言之有理。篮球裁判有时伸出五个指头，再把手翻一下，他出过两次手势，代表 10 号队员犯规，这就是五进制的思想；我国民间约定俗成了一种“手指数”：伸直一个指头代表 1，伸直两个指头代表 2，……，伸直五个指头代表 5，伸出大拇指与小拇指代表 6，伸出食指与中指和大拇指捏在一起代表 7，伸出大拇指与食指代表 8，伸出食指且弯曲代表 9，伸出一个拳头代表 10。古代南美洲印第安人生活困苦，加之天气炎热，几乎人人赤脚，于是在他们的玛雅文化中使用 20 进制（手指加脚趾 = 20），有些国家也受了玛雅文化的影响，例如丹麦人、威尔士人、格陵兰人等，用一口人代表 20，两口人代表 40 等等，英国人常用 Score（20，记账，计算）这个词，他们心目中 20 和计数是有内在联系的。古巴比伦人（今伊拉克人的祖先）则用 60 进制，全世界的计

时一直到现在仍在沿用 60 进位制。

到了近代，数学家把进位制用级数来表达，例如

在十进制中，$2004=4\times10^0+0\times10^1+0\times10^2+2\times10^3$

模仿十进制的这种表达方式，其他进位制的数字最大者不能超过进位制基数（十进制基数是 10）减 1，例如 5 进制中没有形如 2005 这个数。

在 5 进制中数码 2004 折合成 10 进制为 254（$\triangleq$符号表示"规定"）：

$$2004 \triangleq 4\times5^0+0\times5^1+0\times5^2+2\times5^3=254;$$

在 20 进制中数码 2004 折合成 10 进制为 16004：

$$2004 \triangleq 4\times20^0+0\times20^1+0\times20^2+2\times20^3=16004$$

一般而言，正整数在 10 进制中是 N，则当

$$N=a_0\times b^0+a_1\times b^1+a_2\times b^2+\cdots+a_n\times b^n$$

时，在 b 进制中写成 $N=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$，其中 b 是自然数。

17 世纪，德国大数学家莱布尼茨发明了二进制，在二进制中，只有 0 与 1 两个数字，如果 0 是断电，1 是通电，则用 0-1 化表达的整数适于"电气化"，所以在计算机上二进制很吃香。

在十进制中，可以编制不少好玩的数字游戏。

【游戏 1】 "用手指计算器"计算 5 到 10 之间的任二数之积。

例如 8×9，一只手上伸出 $8-5=3$ 个指头，另一只手伸出 $9-5=4$ 个指头，$3+4=7$，7 就是积的十位数字，把两手弯曲的指头数相乘得

$2\times1=2$，2 就是积的个位数，于是 $8\times9=72$。

道理：$ab=[(a-5)+(b-5)]10+(10-a)(10-b)$。

【游戏 2】 把你心中的二位数的十位数字乘以 5 加上 7，

再二倍，加上原来二位数的个位数，结果是几？这个几减去 14 就是你让我猜的那个数。

道理：设你心中的二位数是$\overline{ab}$，则$2(5a+7)+b=(10a+b)+14=\overline{ab}+14$。

【游戏 3】 把你心中的三位数的百位数字乘以 2，加上 3，乘以 5，加上 7，再加上原来那个数的十位数字，乘以 2，加上 3，乘以 5，再加上原来那个数的个位数字，结果是几？这个几减去 235 就是你让我猜的那个数。

道理：设你心中的三位数是$\overline{abc}$，则

$5\{2[5(2a+3)+7+b]+3\}+c=100a+10b+c+235$

【游戏 4】 把你心中的三位数的数字顺序颠倒过来，如果你那个数百位与个位不一样，你告诉我这两个数之差的最后一个数字，我就能猜出这个数。

道理：$\overline{abc}=100a+10b+c$，$\overline{cba}=100c+10b+a$，$a\neq c$，于是 $\overline{abc}-\overline{cba}=100(a-c)+(c-a)$，知道了 $c-a$，就知道 $a-c$，于是差$100(a-c)+(c-a)$就知道了。

【游戏 5】

①	1	3	5	7	9	11	13	15
②	2	3	6	7	10	11	14	15
③	4	5	6	7	12	13	14	15
④	8	9	10	11	12	13	14	15

一个不超过 15 岁的孩子，只要他告诉我他的年龄在哪几行，我立刻知道他今年几岁。

谜底：把他告知的那几行的排头相加即得。

道理：把上述 4 行的数（1 至 15）都表成二进制，则知第 1 行最后数字是 1，第 2 行倒数第 2 个数字是 1，第 3 行倒数第 3 个数字是 1，第 4 行第 1 个数字是 1，而未知数（年龄）x 可

表成

$$x = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + a_3 2^3$$

x 在第 n 行，则 $a_{n-1}=1$，例如你说你的年龄在 1，3，4 行，则 $a_0=a_2=a_3=1$，$x=a_0 2^0+a_1 2^1+a_2 2^2+a_3 2^3=1+2^2+2^3=13$（岁）。

如果你用 1 到 31（2^5-1）这 31 个数字排成 5 行，每行 16 个数，排头分别是 1，2，4，8，16，且把在 2 进制中最后一个数字为 1 的数排在第 1 行，把 2 进制中倒数第 2 个数字为 1 的数排在第 2 行，倒数第 3 个数字为 1 的排在第 3 行，倒数第 4 个数为 1 的排在第 4 行，倒数第 5 个数为 1 的排在第 5 行。则可以问一位青少年（不超过 31 岁），让他告知他的年龄在第几行，再把这几行的排头相加，即是他的年龄。

依此类推，可以制作 $n+1$ 行的数表，排头分别是 1，2，4，…，2^n，进行相似游戏。且容易证明每行恰有 2^n 个不同的数，这些数来自 $\{1, 2, 3, \cdots, 2^{n+1}-1\}$。

◎第二回

测天度地作周髀 弄巧动智证勾股

公元前 11 世纪，商纣王暴虐无道，宠淫妇妲己，杀忠臣比干，朝廷挥霍无度，官僚苛政猛于虎，弄得百姓民不聊生；周武王起兵伐纣，一呼百应，纣兵不堪一击，纣王兵败自焚，西周建国。武王封其胞弟周公为相，周公乃中国古代第一聪明人，他上知天文下知地理又精通数学，不但有治国平天下之韬略，而且重视发展科学技术，鼓励臣民钻研自然科学。朝中一位文臣唤作商高，这位商高是当时有名的星相家，又善于计算，一日，风和日丽，朝中无要事，周公在王家花园散步，见商高正在拿一个绳圈摆弄，只见那绳圈上用红色漆等分成 12 等份，每份 1 尺（1 米=3 尺）。周公问道："此物何用?" 商高答："此圈大有学问"。周公追问："何许学问，请先生指教。" 商高于是向这位开国重臣论述了下面一段 12 尺绳圈上的数学。

（1）把绳圈拉紧构成的三角形中，不会有边长大于 5 的三角形。

事实上，设由绳圈构成的三角形中边长分别为 x 尺，y 尺和 z 尺，则应有

$$x + y + z = 12$$

若 $x \geqslant 6$，则

$$y + z = 12 - x \leqslant 6 \leqslant x$$

而在三角形中，两边之和 $y + z$ 应大于第三边 x，矛盾，所以

x 不应大于 5。

商高考虑边长为整数的由绳圈构成的三角形，这时 $x \in \{1,2,3,4,5\}$。

(2) 当 $x=1$ 时，不妨设 $y \leqslant z$，这时 $y+z=12-x=11$。与①同理可知 $y \leqslant 5$，$z \leqslant 5$，这样，$y+z \leqslant 10$，与 $y+z=11$ 矛盾，可见不存在 $x=1$ 尺的由绳圈构成的三角形。

(3) 当 $x=3$ 时，$y+z=12-3=9$，$y \leqslant 3$ 时，$z=9-y \geqslant 9-3=6$，与 $z \leqslant 5$ 相违，故 $y \geqslant 4$；同理 $z \geqslant 4$，于是只能是 $y=4$，$z=5$，或 $y=5$，$z=4$，即这时三角形三边长只能是 3 尺，4 尺和 5 尺。

(4) 当 $x=4$ 时，$y+z=12-4=8$，由 $y \leqslant 5$，$z \leqslant 5$ 知 $y \in \{3, 4, 5\}$，这时只有三种可能：

① $x=4, y=3, z=5$，② $x=4, y=4, z=4$，③ $x=4, y=5, z=3$。

由①②③知绳圈构成的边长为整数的三角形，若一边长为 4，则只有两种情形，或者边长分别为 3 尺，4 尺和 5 尺，或者是边长为 4 的正三角形。

(5) 当 $x=5$ 时，$y+z=12-5=7$，又由 $y \leqslant 5$，$z \leqslant 5$ 知 $y \in \{2,3,4,5\}$，这时只有四种可能：

④ $x=5, y=4, z=3$，⑤ $x=5, y=5, z=2$，⑥ $x=5, y=3, z=4$，⑦ $x=5, y=2, z=5$。

综上所述，商高对周公下结论说：

用这条绳圈构成的边长为整数的三角形只有三种：

第一种：三边长皆 4 尺的正三角形，它的三个角都是 $60°$。

第二种：底边长 2 尺，两腰皆 5 尺的等腰三角形。

第三种：边长分别为 3 尺，4 尺和 5 尺的一个三角形，这

个三角形有一个角是 90°，这个角与 5 尺长的边相对；我把它的最短边叫做勾，最长的边叫做弦，另一条边叫做股，这时勾^2 + 股^2 = 弦^2，（即 $3^2+4^2=5^2$）。

勾 3 股 4 弦 5 的这种直角三角形是由三个连续整数为边长的唯一的直角三角形。事实上，设 x 为整数，$x-1, x, x+1$ 是一个直角三角形的三条边之长，由

$$勾^2+股^2=弦^2$$

得

$$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$$
$$x^2-2x+1+x^2=x^2+2x+1$$
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$

解得正整数 $x=4$，于是 $x-1=3$，$x+1=5$，即这种三角形是唯一的，它就是我们上面由绳圈构成的那个勾 3 股 4 弦 5 的直角三角形。

周公听了商高上述一番论述，赞叹道：“商高贤弟真神人也。”周公向商高咨询如何计算天有多高地有多广。周公问道：“夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”商高答道：“勾广 3，股修 4，径隅 5”，商高指着竖立的 8 尺长的牛大腿骨说，大人您瞧，这根“周髀”的影子长 6 尺，按我们上面从绳圈得到的结论，即按直角三角形三边之比为 3∶4∶5 可知，从“周髀”的顶到“周髀”影子的端点之距离应该是 $2\times5=10$ 尺。见图 2-1。如果我们能则得日下之长 AD，则可以得

$$\frac{日高}{股长}=\frac{AD}{勾长}$$

$$\frac{\text{斜至日}}{\text{弦长}}=\frac{AD}{\text{勾长}}$$

从而算出日高与“斜至日”。

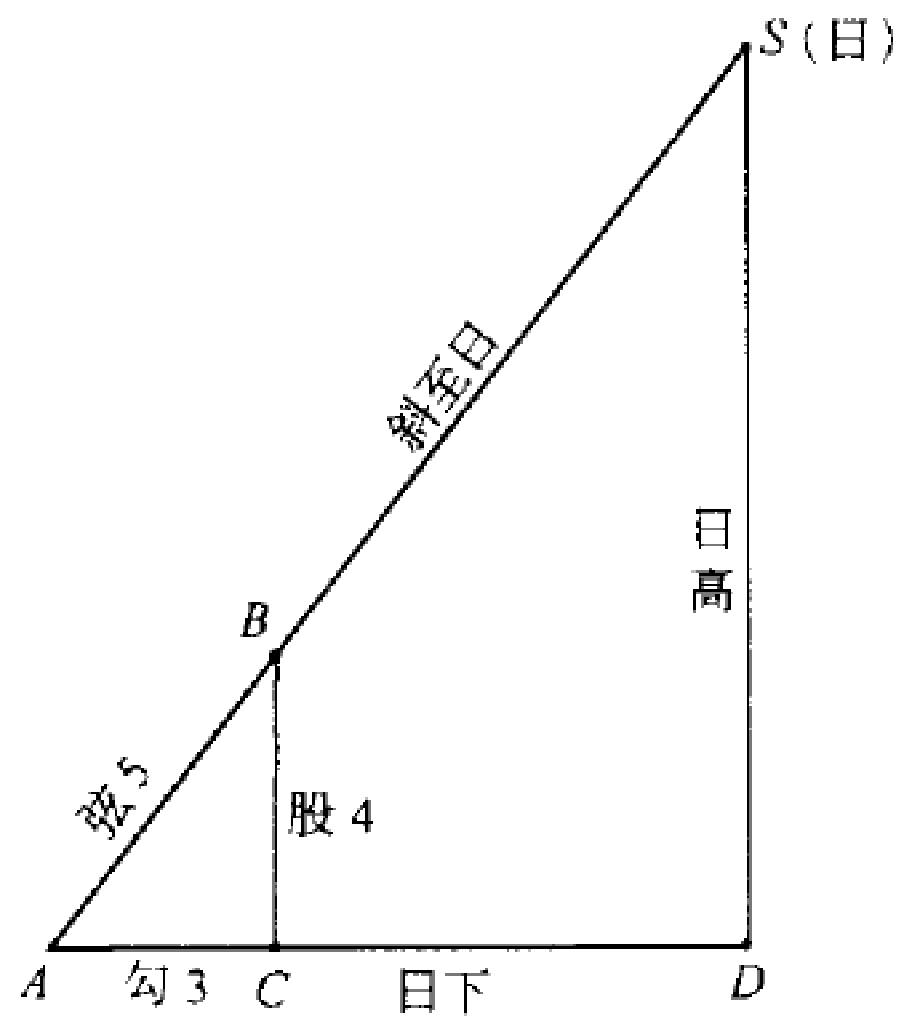

图 2-1

后来周公的后代陈子把商高的“勾三股四弦五”的结论 $3^2+4^2=5^2$ 推而广之，说了下面一句十分重要的有历史意义的话：“求斜至日者，以日下为勾，以日高为股，勾股各自乘，并以开方除之，得斜至日。”此言载入我国最早的一部数学经典《周髀算经》上，《周髀算经》大约于公元前 2 世纪问世，究竟是何年何月由何人所作，已不可考。陈子的话用现在的话来讲就是“直角三角形斜边之长等于两直角边平方和的算术平方根”，此即我们现在所说的勾股定理。据说陈子等人测得“日下 = 60000 里，日高 = 80000 里”（1 里 = 500 米），于是

$$\text{斜至日}=\sqrt{60000^2+80000^2}=100000\text{ 里}$$

这些数据显然是错的，在不知宇宙的无穷性和地球是球状星体又缺乏测量仪器的古代，欲求得“日高”、“斜至日”、“日下”

等数据显然是办不到的事，“日高八万里”等瞎话，且由陈子等人姑妄言之，我们也只好姑妄听之了。

商高与陈子等人的关于勾股定理的正确论断当时并未给出证明，这里边有两种可能，一种是这些人只是在像上面所述“玩绳圈”之类的游戏中发现了“勾三股四弦五”的事实，他们实在并无证明的观念和能力，一种是商高陈子等人不但知道勾股定理需要证明而且也有能力写出证明，但由于“寓理于算”的传统学术作风，故意不谈证明，是自命清高吗？是故弄玄虚吗？是假装深沉吗？这些疑问已考查不清了。

公元前 600 年左右，古希腊的毕达哥拉斯学派也发现了勾股定理，其实他们发现的已经不是一块“新大陆”，而是一块“旧大陆”，因为此前古巴比伦人（公元前 19 世纪）和古中国人（公元前 11 世纪）已经发现了勾股定理这块新大陆；当然，毕达哥拉斯们很可能不懂中文，古巴比伦人、古中国人、古希腊人是三家独立发现的勾股定理。据说毕达哥拉斯学派发现勾股定理时，杀了整整一百头牛，烧牛肉煮酒摆宴庆贺，以每头牛出肉百斤计，每人吃一斤肉，也有万人赴宴，勾股定理在希腊也称“百牛定理”，毕达哥拉斯学派对勾股定理的另一贡献是他们发现此定理的同时就写出了该定理的证明，这一点比巴比伦和中国都早得多。

毕达哥拉斯是个了不起的历史人物，他是古希腊“七贤”之一，另六位是泰勒斯、柏拉图、苏格拉底、亚里士多德、欧几里得和阿基米德。在数学界，毕达哥拉斯号称“数学四巨头”之一，另三位大数学家是：欧几里得，阿基米德和阿波罗尼奥斯。

自从勾股定理发现之后，已经发表了这个定理的 370 多种证明，下面从中摘录 10 则有趣的证明。

（1）公元前 6 世纪毕达哥拉斯首创的面积法证明，见图 2-2。

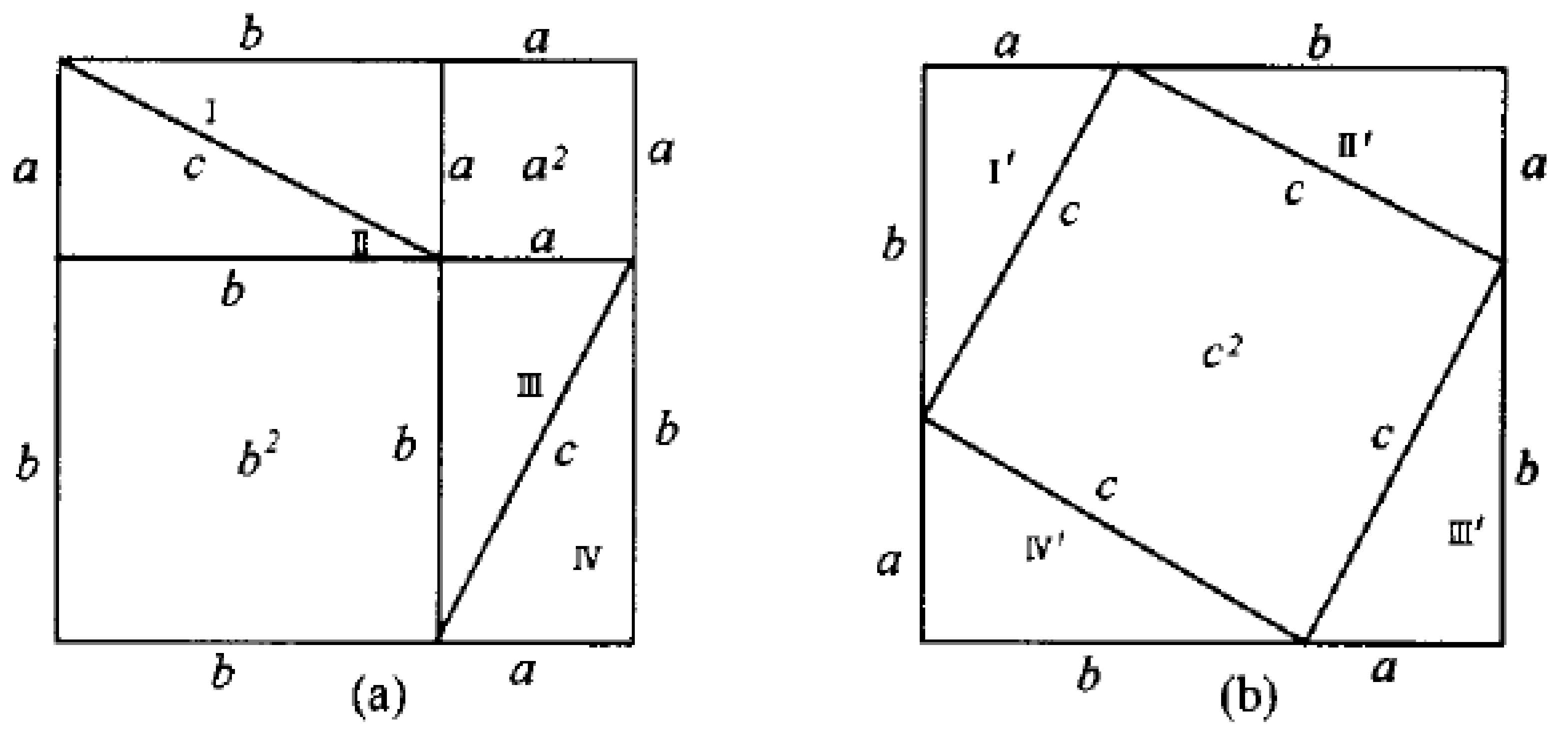

图 2-2

1982 年，张景中院士出版《面积关系帮你解题》，有兴趣者可以一阅。毕达哥拉斯的勾股定理证明可以说是一篇精美的“无字论文”。

下面的证明都沿袭了毕氏的面积法思想。

（2）公元前 3 世纪，欧几里得的“新娘的椅子”证明，见图 2-3。

（3）公元 3 世纪，东吴人赵爽的“朱实—黄实”证明，见图 2-4。

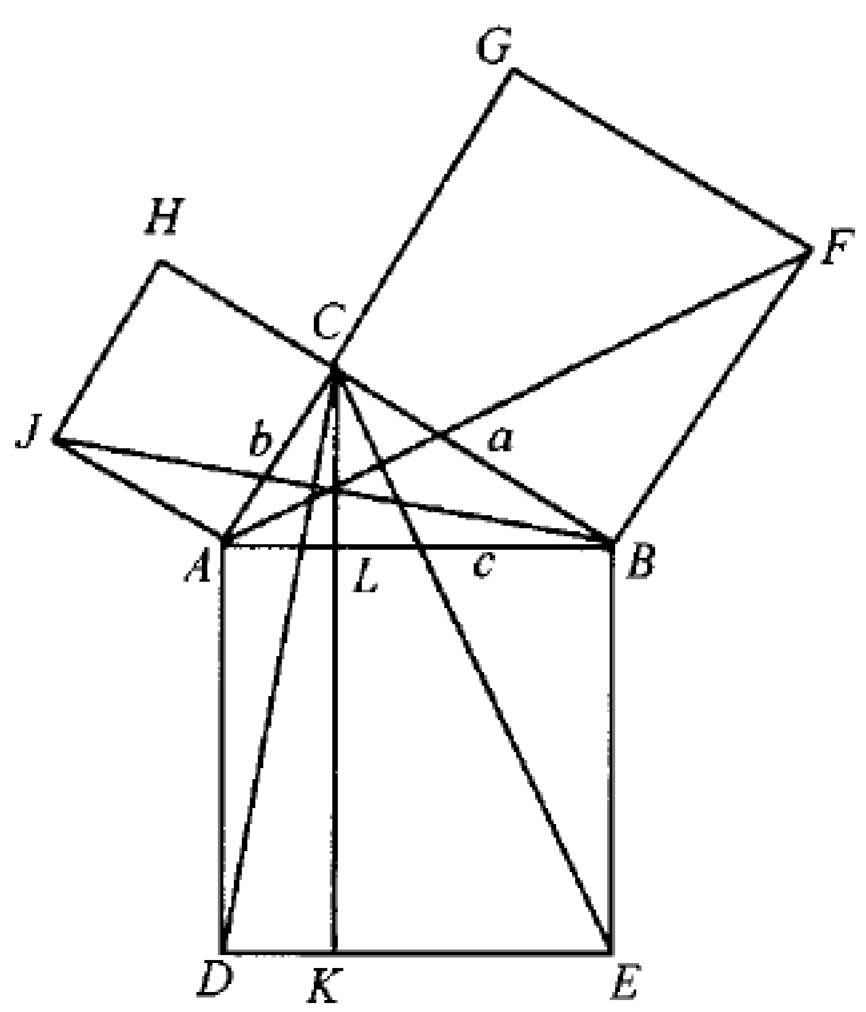

图 2-3

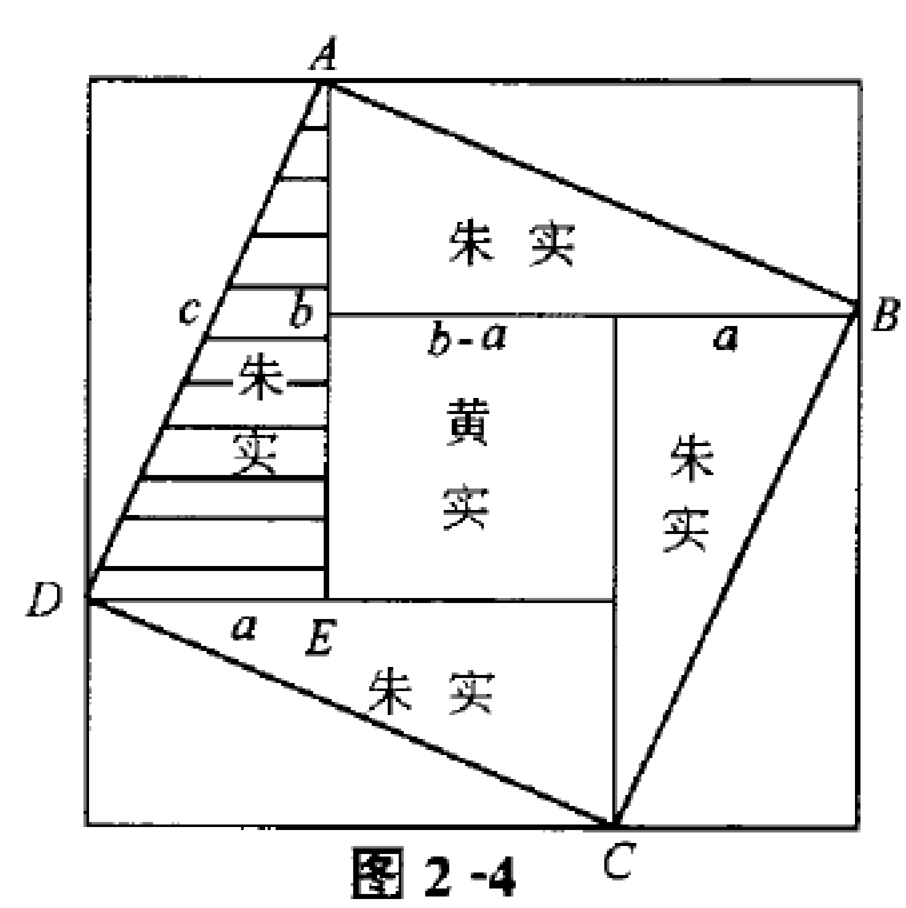

图 2-4