高等线性代数

程笛 2023012317

Week 15

1. 将下列对称多项式用初等对称多项式表示:

$$(x_1+x_2+x_3)^3-(x_2+x_3-x_1)^3-(x_1+x_3-x_2)^3-(x_1+x_2-x_3)^3.$$

解. 观察到首项 x_1^3 的系数为零, 可能的项的系数有 $(2,1,0),(1,1,1)$, 故设

$$\text{原式}=a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$$

分别代入 $x_1=x_2=x_3=1,x_1=x_2=1,x_3=0$ 得

$$24=9a+b$$

$$0=a$$

故原式 $=24\sigma_3$. □

2. 用牛顿公式将 s_4 用初等对称多项式表示出来.

解. $n\geq 4$ 时,

$$s_2=\sigma_1 s_1-2\sigma_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

$$s_3=\sigma_1 s_2-\sigma_2 s_1+3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3$$

$$s_4=\sigma_1 s_3-\sigma_2 s_2+\sigma_3 s_1-4\sigma_4=\sigma_1^4-4\sigma_2\sigma_1^2+4\sigma_3\sigma_1+2\sigma_2^2-4\sigma_4$$

$n=3$ 时,

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

$$s_3=\sigma_1 s_2-\sigma_2 s_1+3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3$$

$$s_4=\sigma_1 s_3-\sigma_2 s_2+\sigma_3 s_1=\sigma_1^4-4\sigma_2\sigma_1^2+4\sigma_3\sigma_1+2\sigma_2^2$$

$n=2$ 时,

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

$$s_3=\sigma_1 s_2-\sigma_2 s_1=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1$$

$$s_4=\sigma_1 s_3-\sigma_2 s_2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$$

$n=1$ 时,

$$s_4=\sigma_1^4$$

□

3. 已知 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的 3 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 求一个三次方程, 其根为 $\alpha_1^3,\alpha_2^3,\alpha_3^3$.

解. $f(x)=(x-\alpha_1^3)(x-\alpha_2^3)(x-\alpha_3^3)$ 即为所求. 可知

$$\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p$$

$$\sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3=q$$

$$\sigma_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-r$$

$$\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3=-r^3$$

$$\alpha_1^3\alpha_2^3+\alpha_2^3\alpha_3^3+\alpha_1^3\alpha_3^3=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2=q^3-3pqr+3r^2$$

$$\sigma_1^3+\sigma_2^3+\sigma_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3=-p^3+3pq-3r$$

故

$$f(x)=x^3+(p^3-3pq+3r)x^2+(q^3-3pqr+3r^2)x+r^3$$

□

4. 解下列方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4, \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=4, \\ x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=4 \end{cases}$$

解. 即

$$\begin{cases} \sigma_1=4, \\ s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=4, \\ s_3=\sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1+3\sigma_3=4, \\ s_4=\sigma_1^4-4\sigma_2\sigma_1^2+4\sigma_3\sigma_1+2\sigma_2^2-4\sigma_4=4 \end{cases}$$

得 $\sigma_1=4,\sigma_2=6,\sigma_3=4,\sigma_4=1$. 故

$$f(x_i)=(x_i-x_1)(x_i-x_2)(x_i-x_3)(x_i-x_4)=x_i^4-4x_i^3+6x_i^2-4x_i+1=(x-1)^4=0, i=1,2,3,4$$

故唯一解为 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. □

5. 计算下列多项式的结式:

$$f(x)=x^3+3x^2-x+4,\quad g(x)=x^2-2x-1$$

解.

$$\begin{vmatrix}1&3&-1&4&0\\0&1&3&-1&4\\1&-2&-1&0&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&1&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&5&0&4&0\\0&1&7&-9&0\\1&-2&-1&0&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&1&-2&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&0&4\\1&7&-9\\1&-2&-1\end{vmatrix}=161$$

□

6. 设 $V=\mathbb{K}[x]$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的全体多项式组成的线性空间. D 是 V 上的线性变换. 若 D 适合

(1) $D(x)=1$;

(2) $D(f(x)g(x))=g(x)D(f(x))+f(x)D(g(x))$.

求证: D 就是 $\mathbb{K}[x]$ 上的求导变换.

证明. 由题意,

$$D(f+g)=D(f)+D(g),D(cf)=cD(f),c\in\mathrm{K}$$

假设 $D(x^n)=nx^{n-1}$ 成立, 根据题意, $n=1$ 时成立. 又 $n>1$ 时,

$$D(x^{n+1})=xD(x^n)+x^nD(x)=nx^n+x^n=(n+1)x^n$$

结合归纳假设, 又

$$D(1)=D(1\cdot 1)=D(1)+D(1)\implies D(1)=0$$

故对 $\mathrm{K}[x]$ 的一组基得到 D 是求导变换, 故 D 就是 $\mathbb{K}[x]$ 上的求导变换. □

7. 证明: $x^n+ax^{n-m}+b$, 其中 $n>m\geq 1,b\neq 0$, 不能有重数大于 2 的重根.

证明. 假设存在重数多于 2 的根 α, 显然 $\alpha\neq 0$. 假设 $n-m>1$ 则分别求两次导后

$$f(x)=nx^{n-1}+a(n-m)x^{n-m-1}$$

$$g(x)=n(n-1)x^{n-2}+a(n-m)(n-m-1)x^{n-m-2}$$

则 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$, 整理得

$$n(n-1)\alpha^m+(n-m)(n-m-1)a=0$$

$$n(n-1)\alpha^m + (n-m)(n-1)a = 0$$

相减得

$$am(n-m) = 0 \implies a = 0$$

代回可知重根只可能为零, 矛盾. 故不存在重数多于 2 的根.

假设 $n-m=1$, 则 $g(x)$ 的根只可能为 0, 同理矛盾, 故不存在重数多于 2 的根. $\square$

8. 求下列多项式的判别式 $(n>1)$:

(1) $f(x) = x^n + px + q$;

(2) $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$.

解. (1)

(2) 设 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\Delta(f)=\prod_{1\le i<j\le n-1}(\omega^i-\omega^j)^2$

$$\Delta(f)=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(\omega^i-\omega^j)^2}{(\omega-1)^2(\omega^2-1)^2\cdots(\omega^{n-1}-1)^2}=\frac{A}{f^2(1)}=\frac{A}{n^2},\ A=\prod_{1\le i<j\le n}(\omega^i-\omega^j)^2$$

$$\begin{aligned}A=\prod_{1\le i<j\le n}(\omega^j-\omega^i)^2&=\prod_{1\le i<j\le n}\omega^i(\omega^{j-i}-1)\prod_{1\le i<j\le n}\omega^j(1-\omega^{n-j+i})\\&=1\cdot 1\cdot\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le k\le n-1}(\omega^k-1)^{n-k}\prod_{1\le k\le n-1}(\omega^k-1)^k(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\\&=f(1)^n(-1)^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-1}\end{aligned}$$

故 $\Delta(f)=n^{n-2}(-1)^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-1}$ □

9. 设 $f(x),g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 且满足 $f(A)=O$, 证明: $g(A)$ 是可逆阵.

证明. 由互素得, 存在 $\mathrm{K}[x]$ 中的多项式 u,v 使得

$$fu+gv=1$$

代入 $x=A$ 得

$$O+g(A)v(A)=I$$

故 $g(A)$ 可逆. □

注. 完全理解不能

10. 设 $f(x),g(x)$ 是次数大于 1 的多项式, 求证:

$$\Delta(f(x)g(x))=\Delta(f(x))\Delta(g(x))R(f,g)^2$$

证明. 设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$, $g(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$, f,g 的所有根分别为 α_i,β_j

设 $h(x)=f(x)g(x)$, 首项为 $a_0b_0x^{n+m}$, 其所有根为 α_i,β_j, 重新排序为 $\gamma_i,i=1,2,\cdots,n+m$

$$\begin{aligned}\text{右式}&=(a_0^{2n-2}\prod_{1\le k_1<k_2\le n}(\alpha_{k_1}-\alpha_{k_2})^2)(b_0^{2m-2}\prod_{1\le l_1<l_2\le n}(\beta_{l_1}-\beta_{l_2})^2)(a_0^{2m}b_0^{2n}\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m(\alpha_i-\beta_j)^2)\\&=(a_0b_0)^{2n+2m-2}\prod_{1\le k_1<k_2\le n}(\alpha_{k_1}-\alpha_{k_2})^2\prod_{1\le l_1<l_2\le n}(\beta_{l_1}-\beta_{l_2})^2(\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m(\alpha_i-\beta_j)^2)\\&=(a_0b_0)^{2n+2m-2}\prod_{1\le s_1<s_2\le n+m}(\gamma_{s_1}-\gamma_{s_2})^2\\&=\Delta(f(x)g(x))\end{aligned}$$

□