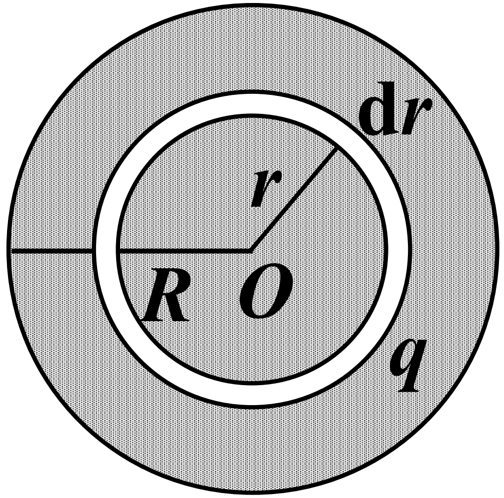
【例1】半径 R、均匀带电 q 的球体的静电能

解：考察 $r-r+\mathrm{d}r$ 的球壳，

其电量和所在处的电势为：



$$\mathrm{d}q=\left(\frac{q}{4\pi R^3/3}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{3qr^2}{R^3}\mathrm{d}r$$

$$\varphi(r)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$

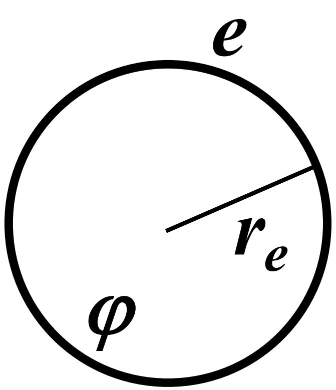
均匀带电球的静电能为：

$$W=\frac{1}{2}\int_q\varphi\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)\frac{3qr^2}{R^3}\mathrm{d}r$$

$$W=\frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{R}=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2R^5$$

【例2】 设电子 $W\approx m_0c^2$，估算其经典半径。

（1）假定电荷 e 均匀分布于电子表面



$$W=\frac{1}{2}\int_e\varphi dq=\frac{1}{2}\varphi e=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}\approx m_0c^2$$

$$r_e\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}\approx 1.4\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

（2）假定电子是均匀带电球，可得：

$$W=\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e},\quad r_e\approx\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2}\approx 1.7\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$

两种假定情况得到的 r_e 的数量级相同。

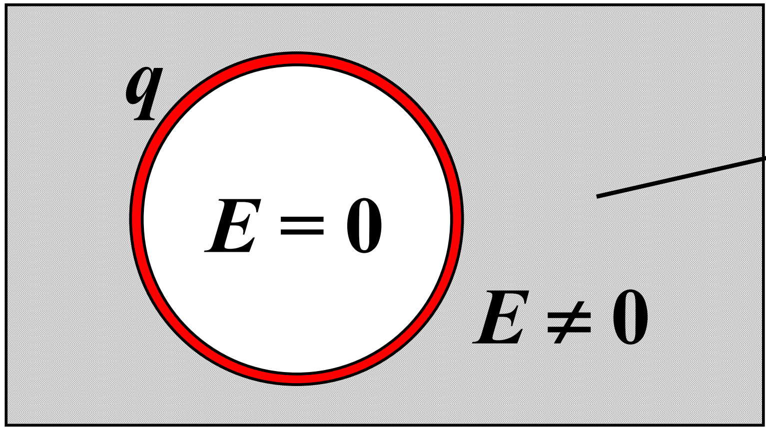
电子经典半径常取为 $r_e=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2}\approx 2.8\times10^{-15}\ \mathrm{m}$

目前的实验测量表明电子线度 $< 3.9\times10^{-19}$ m，远小于电子经典半径 $\sim 10^{-15}$ m，说明电子并非经典粒子。

§ 13.7 静电场的能量

根据 $W=\frac{1}{2}\int_q \varphi \mathrm{d} q$ ，似乎可认为能量集中在电荷分布区域，这种观点是错误的。

实际上，静电能存储在静电场分布的区域。



均匀带电球面的静电能分布于球面以外空间中。

对变化的电磁场，电磁场储能不仅被证明是正确的、必要的，而且是唯一的客观实在。

真空中静电场的能量密度

$$\boxed{w_e = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

在静电场分布的空间 V 中，存储的静电能：

$$W = \iiint_V w_e \,\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \,\mathrm{d}V$$

静电学中

二者等价

$$\begin{cases} W = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_q \varphi \,\mathrm{d}q \\ W = \displaystyle\iiint_V \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \,\mathrm{d}V \end{cases}$$

【例】求均匀带电球面的静电场能量

解：电场在球面内为零，能量分布在面外：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

$$= \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r > R)$$

$$\left.\begin{aligned} W &= \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ W &= \frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot q = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}\right\}\text{一致}$$

真空中静电场小结提纲

一. 线索（基本定律、定理）：

库仑定律

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0$$

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

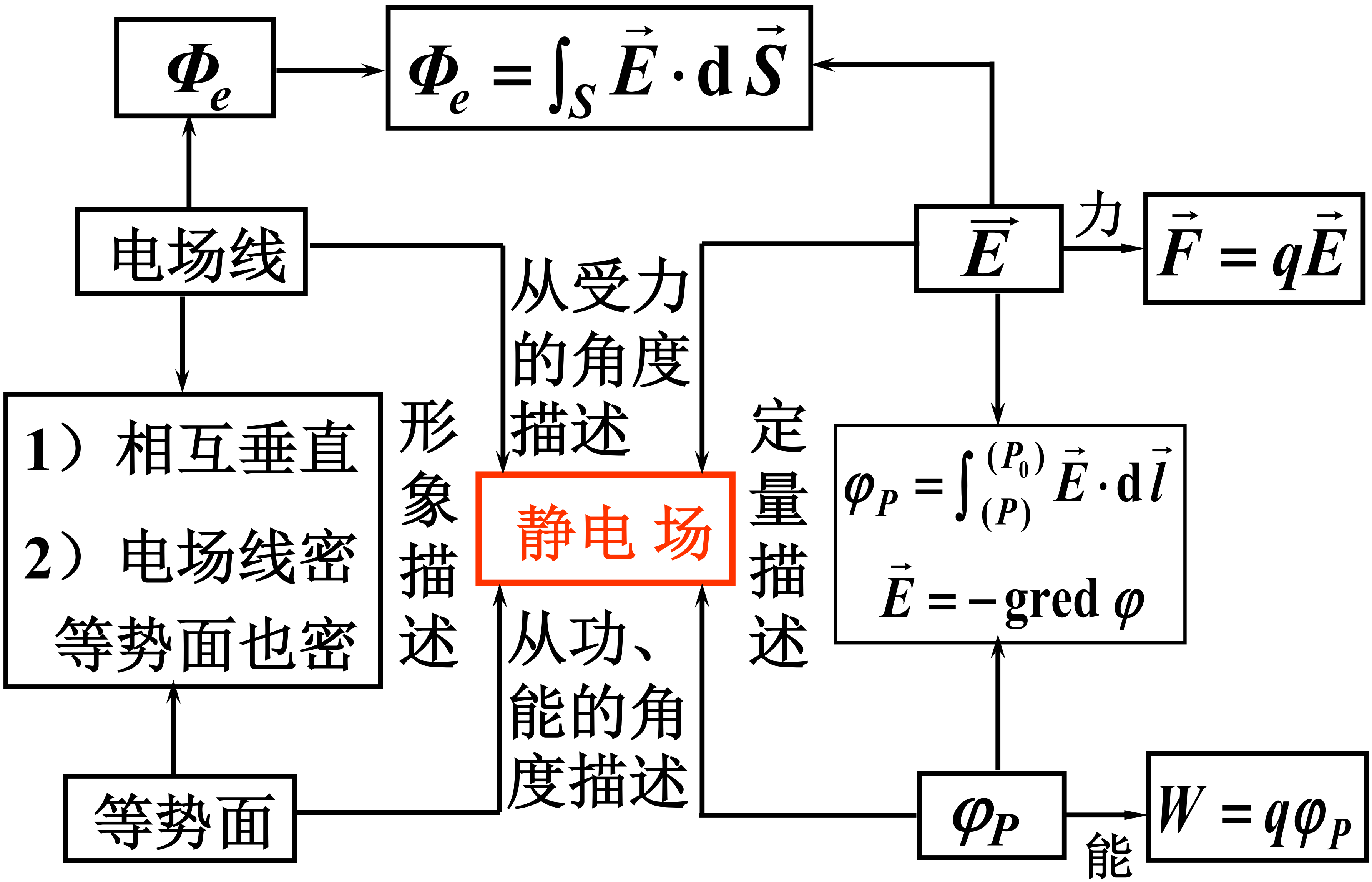
$$\rightarrow \vec{E} = \sum_i \frac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \rightarrow$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

二. 基本物理量之间的关系：



三. 求场的方法:

1. 求 $\vec{E}$

叠加法（补偿法）： $\vec{E}=\sum\limits_{i}\vec{E}_i$,

$$\vec{E}=\int_q \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q \ ;$$

高斯定理法： $\oint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$;

微分法： $\vec{E}=-\nabla\varphi,\ \ E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 。

2.求φ

场强积分法：$\varphi_p = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法：$\varphi = \sum_i \varphi_i$（零点要同）；

$\varphi = \int_q \dfrac{\mathrm{d}\,q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，（$\varphi_\infty = 0$）。

四.几种典型电荷分布的场强和电势:（自己总结）

点电荷；均匀带电薄球壳；均匀带电大平板；

均匀带电长直线；均匀带电长圆筒。

第十三章作业

13.2, 13.3, 13.6, 13.9, 13.15, 13.20, 13.22, 13.29

【思考】思考题13.3

中英文名称对照表

电势 — **electric potential**

环路定理 — **circuital theorem**

环流 — **circulation**

电势差 — **electric potential difference**

电势梯度 — **electric potential gradient**

第十三章结束

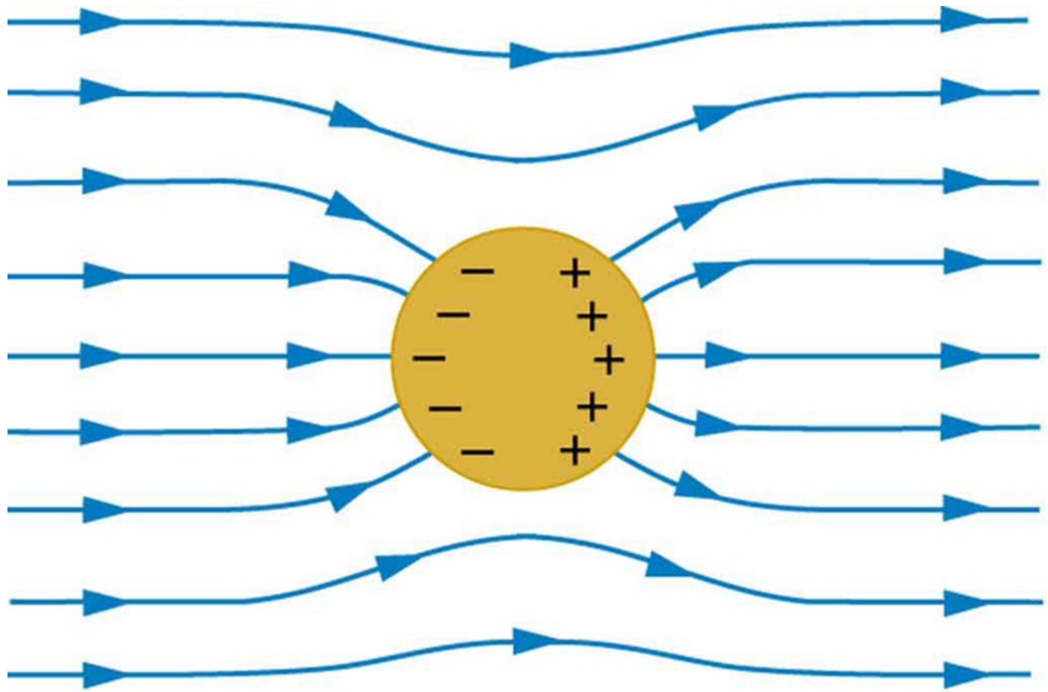
第十四章 静电场中的导体

李 渭

2024/9/24

Faraday Cage and Tesla Coil

第十四章 静电场中的导体



§ 14.1 导体的静电平衡条件

这里只讨论各向同性、均匀的金属导体。

金属导体：存在大量可自由移动的电子，

电子对电场变化响应很快（~10^{-9}s）。

静电平衡过程：

导体放入电场 → 自由电子定向运动 →

改变导体电荷分布 → 改变电场 → ··· →

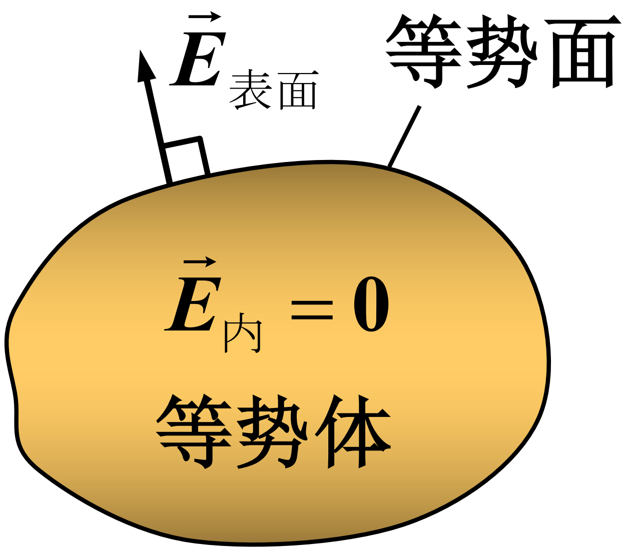
导体内部和表面无自由电荷的定向移动

— 电场和导体之间达到静电平衡

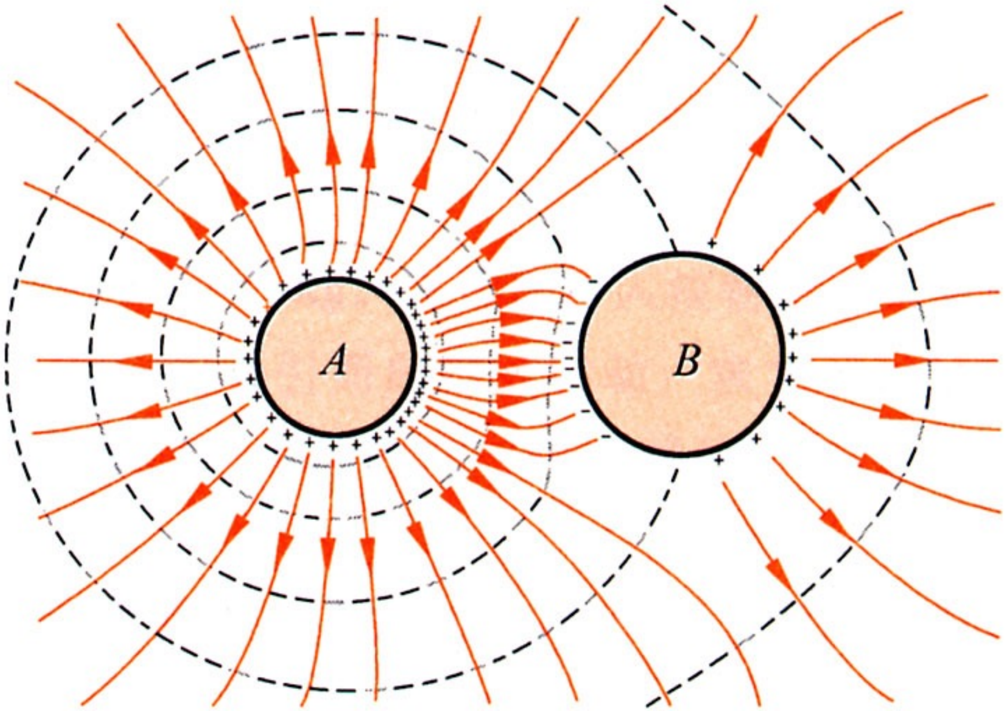
导体静电平衡的条件

导体内部 $\vec{E}_{内}=0$，$\vec{E}_{表面}\perp$ 表面。

导体是等势体，导体表面是等势面。



静电平衡的导体



【TV】导体的静电平衡

§ 14.2 静电平衡时导体上的电荷分布

一. 静电平衡时，导体内部各处净电荷为零，所带电荷只能分布在导体表面上

证明：在导体内任取高斯面 S，包围体积 V，

$$\vec{E}_{内}=0 \quad \Rightarrow \quad \oint\!\!\oint_S \vec{E}_{内}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}=0$$

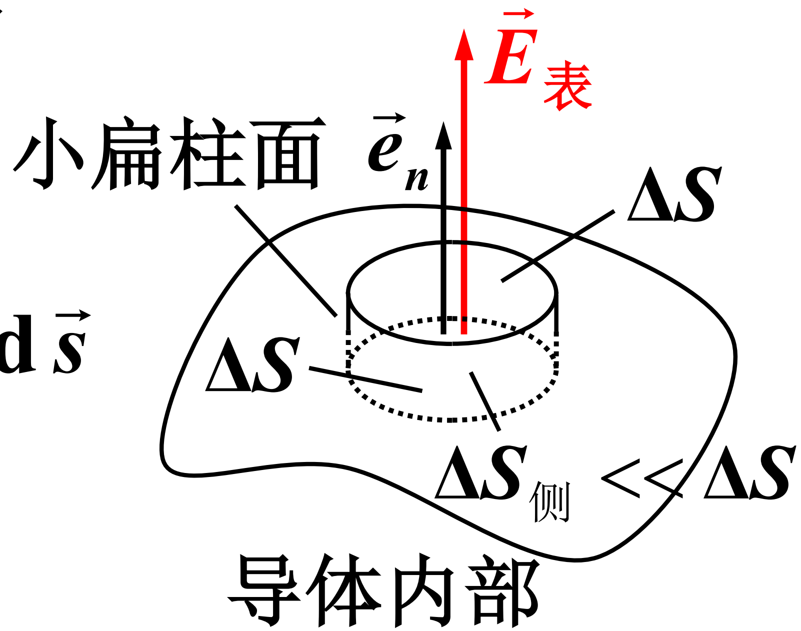
$$\therefore \quad \iiint_V \rho_{内}\,\mathrm{d}V=0$$

令 $S\rightarrow 0$，则必有 $\rho_{内}=0$。

二. 导体表面处场强与面电荷密度的关系

选跨导体表面的小扁柱面

为高斯面 S：



$$\oiint_{小扁柱面} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Big(\iint_{上表面} + \iint_{下表面} + \iint_{侧面}\Big)\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \vec{E}_{表}\cdot(\Delta S\vec{e}_n)$$

$$\overset{（高）}{=} \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n}$$

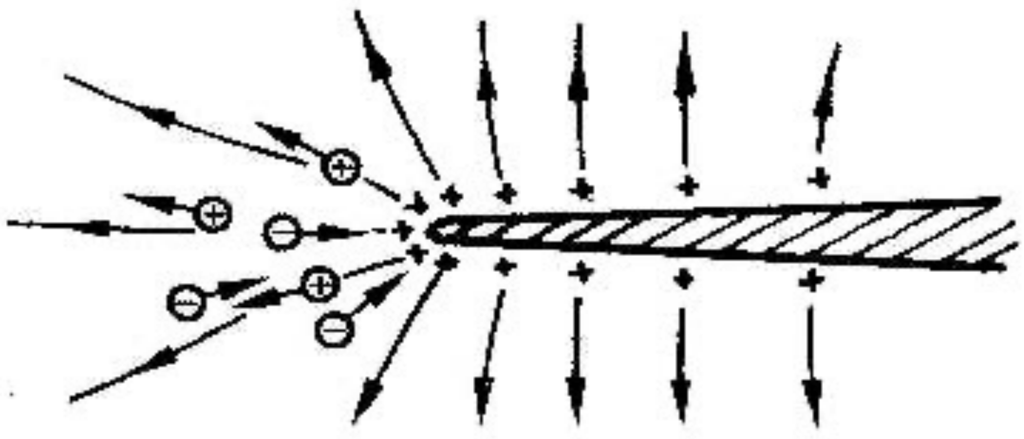
$\vec{e}_n$：由导体内指向导体外

【思考】$\vec{E}_{表}$只是由小扁柱面内电荷产生的吗？

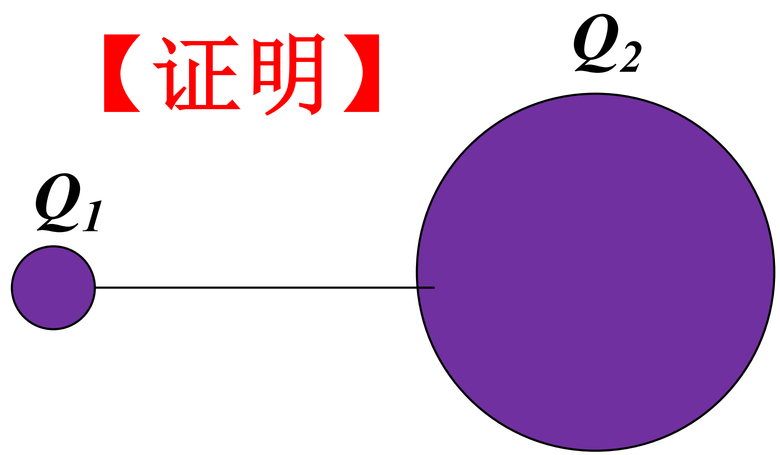
三. 孤立导体表面电荷分布的特点

孤立导体表面曲率大处，面电荷密度也大，但不存在单一函数关系。

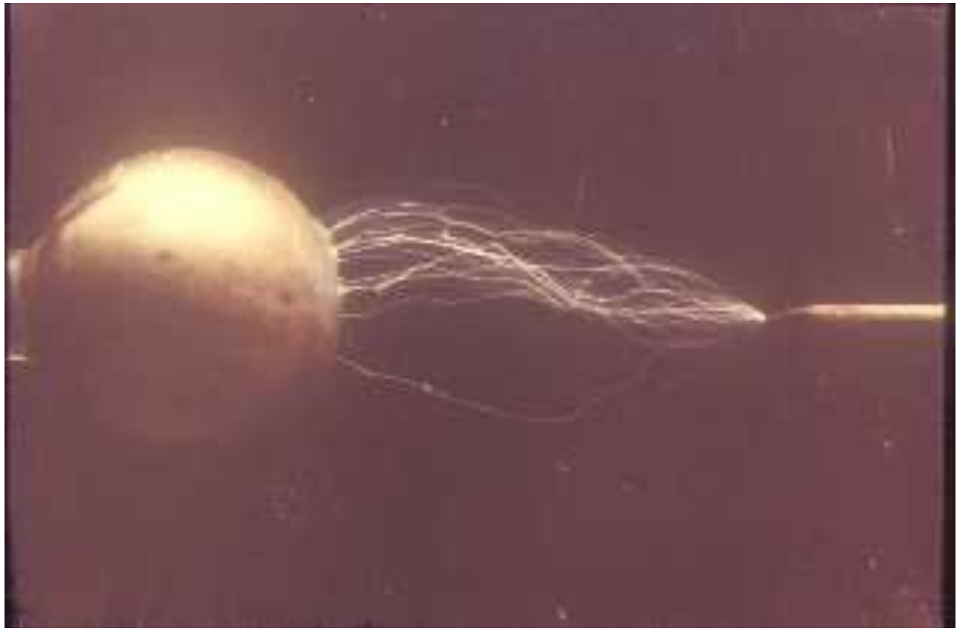
尖端放电：带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。

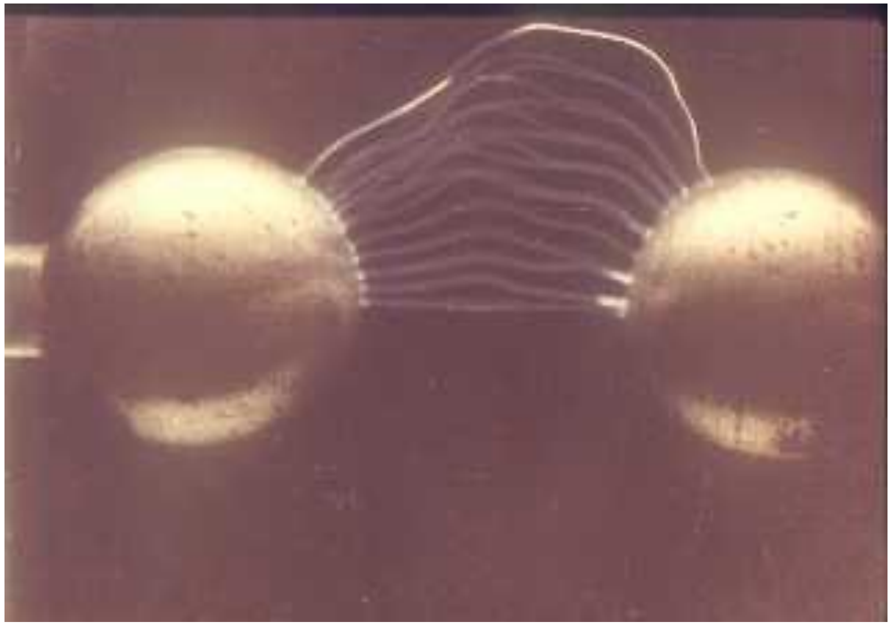


【证明】



空气中的直流高压放电图片





俘获闪电：激光束引起空气电离，使闪电改道

【演示】

- 带电导体空腔外表面带电，内表面不带电
- 孤立导体表面曲率大处，面电荷密度也大
- 尖端放电： 电风轮

  电风“吹”蜡烛
- 范式起电机

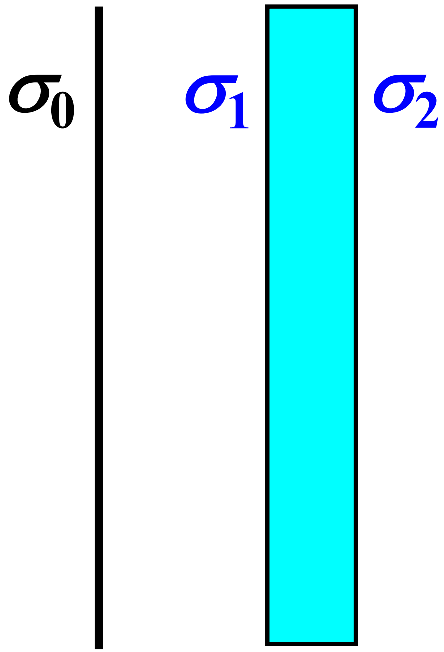
【TV】静电除烟尘

§ 14.3 有导体时静电场的分析与计算

基本依据： 静电平衡条件，电荷守恒，

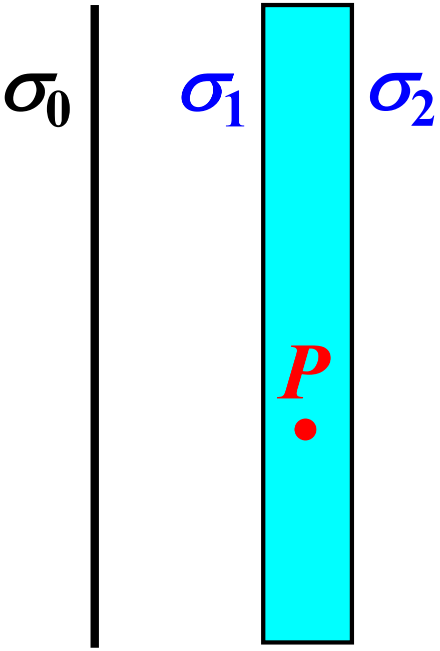
高斯定理，环路定理

（电势、电场线的概念）



【例】面电荷密度 σ_0 的均匀带电大平板旁，平行放置一大的不带电导体平板。

求：导体板两表面的面电荷密度 σ_1、σ_2。



解： 电荷守恒：

$$\sigma_1+\sigma_2=0 \qquad (1)$$

在导体板内部任选 P 点分析：

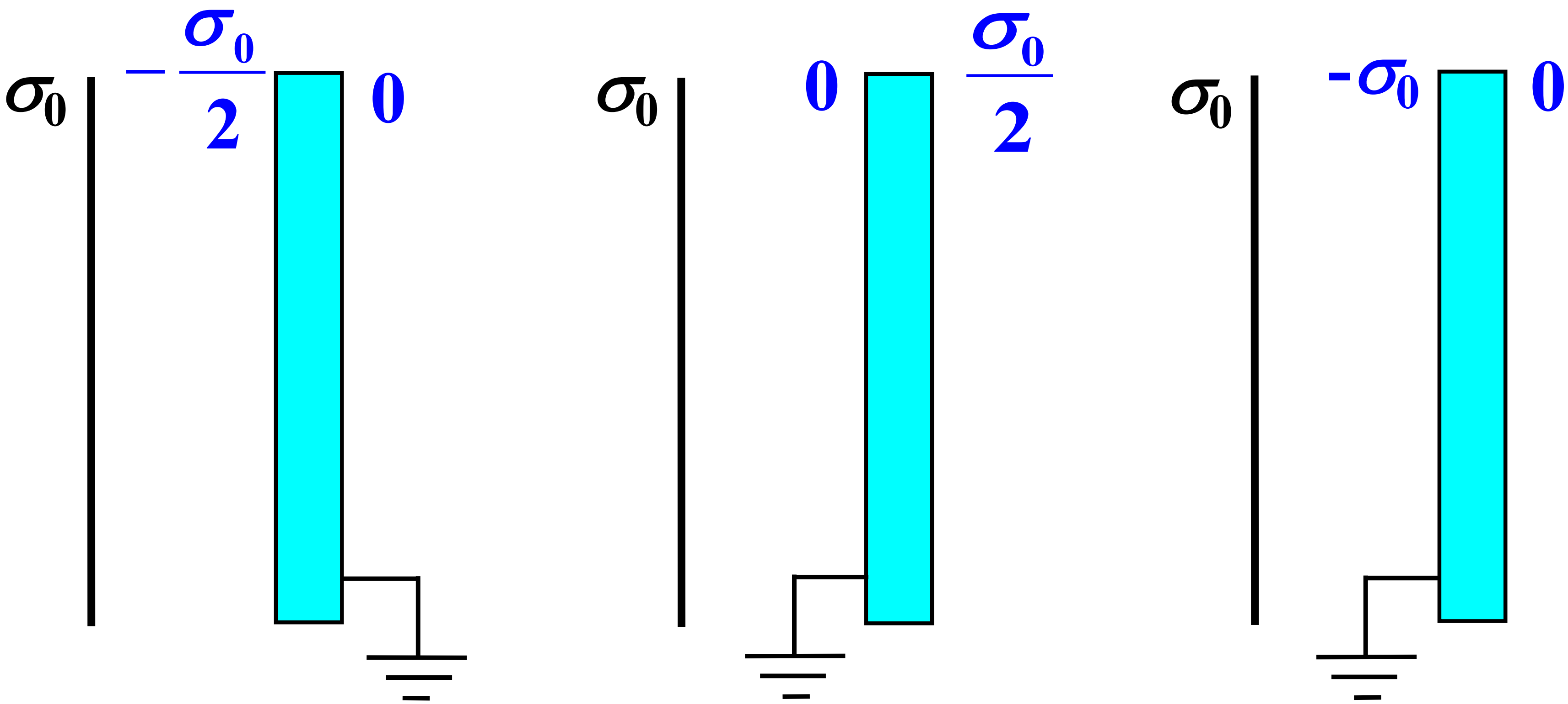
导体内场强为零：

$$\vec{E}_0+\vec{E}_1+\vec{E}_2=0$$

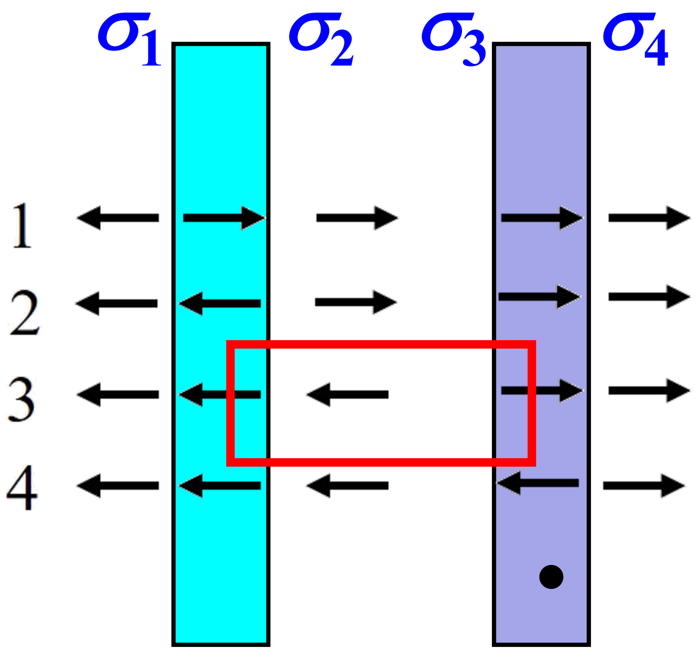
$$\Rightarrow \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0 \qquad (2)$$

(1)(2) 解得： $\sigma_1=-\sigma_2=-\dfrac{\sigma_0}{2}$

【讨论】若导体板接地，下面结果哪个正确？



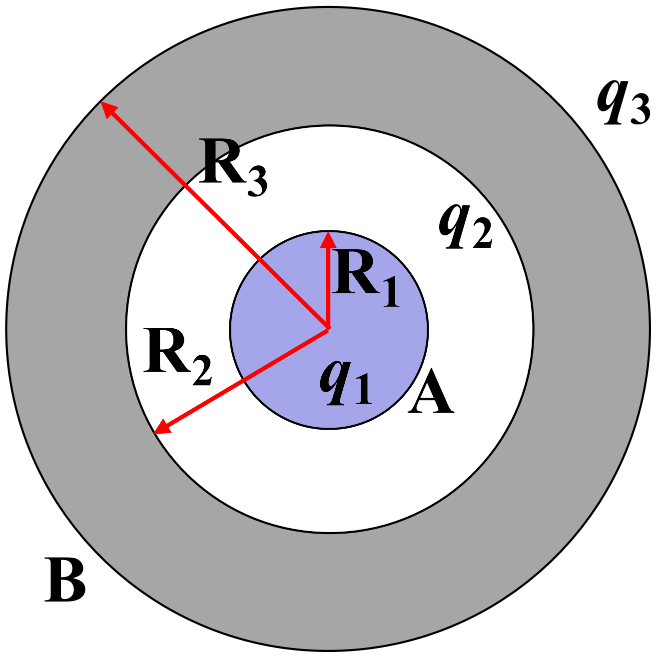
注意：这应是一个新的静电平衡后的结果。



【例】面积S，总电量Q的金属板，平行放一块不带电金属板。静电平衡时，求电荷电场分布。

右板接地会怎么样?

教科书上：例**14.1**



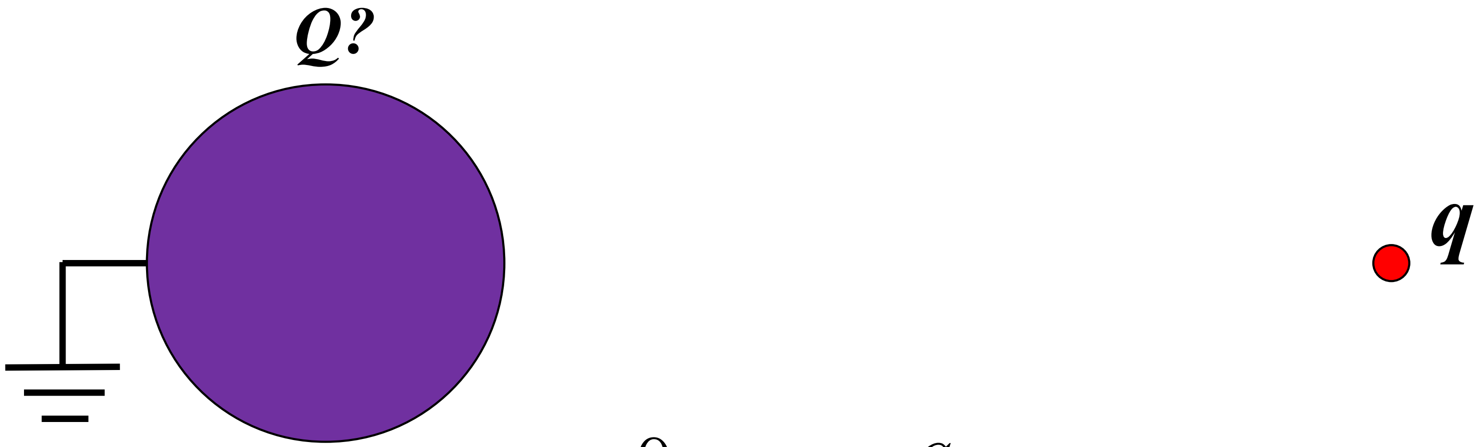
教科书上：例14.2

【例】金属球A，半径R_1，外面套一个同心金属球壳B，内外径分别为R_2，R_3。两者带电后电势分别为φ_A、φ_B。求该系统电荷和电场分布。

$$
\begin{cases}
q_1 + q_2 = 0 \\
\boxed{\varphi_A = \dfrac{q1}{4\pi\varepsilon_0 R1} + \dfrac{q2}{4\pi\varepsilon_0 R2} + \dfrac{q3}{4\pi\varepsilon_0 R3}} \\
\varphi_B = \dfrac{q1 + q2 + q3}{4\pi\varepsilon_0 R3}
\end{cases}
$$

【要点:电势叠加原理！】

【例】金属球半径为R接地，距球心 l 处，放置电荷q。求球上感应的电荷Q。



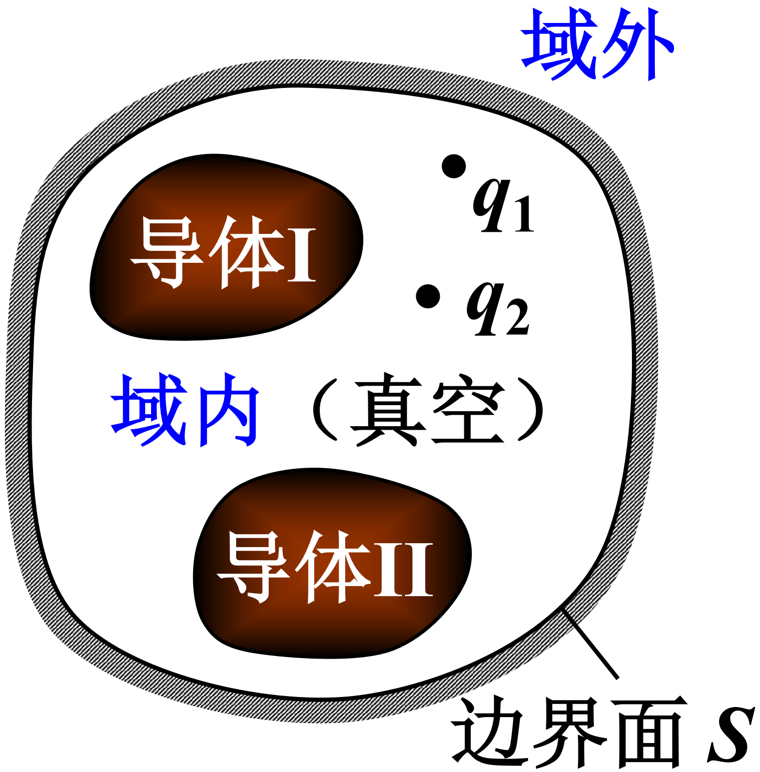
$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0$$

【问】金属球不接地时，金属球的电势？

【要点:金属球是等势体】

§ 14.4 静电唯一性定理

由下面典型的静电学问题介绍唯一性定理。



如图，域内和域外空间由边界面 S 划分开。

设域内有若干点电荷和导体。导体形状和位置、边界面 S 都固定不变。

问题：如何求解域内的电场分布 $\vec{E}(x, y, z)$ ，需要知道什么条件 — 定解条件？

在以下条件任一给定时，空间的电场分布 $\vec{E}(x,y,z)$ 以及表面的电荷分布是唯一确定的。条件如下：

（a） 给定每个导体的总电量；

（b）给定每个导体的电势；

（c）给定一部分导体的电势，另一部分导体的电量。

静电平衡时： 电荷存在于表面（等势面），体内无净电荷，如上边值条件给定以后（真空与导体的边界），静电场的分布就唯一确定了。

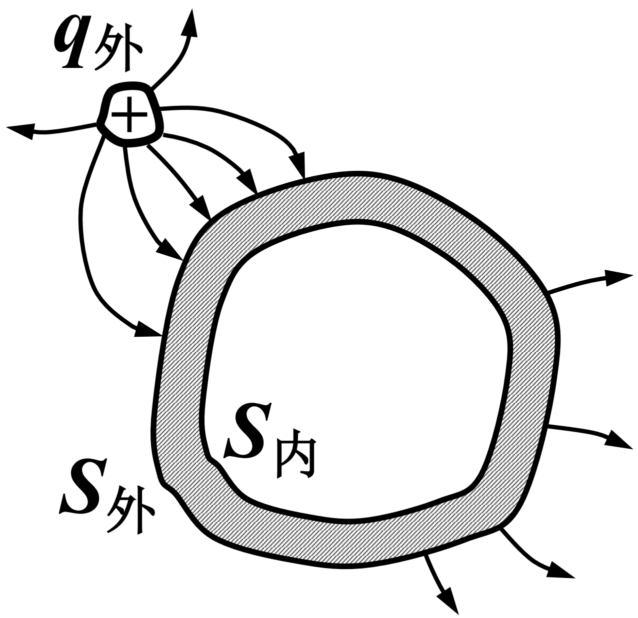
静电唯一性定理的意义

根据唯一性定理，可以猜解，只要不破坏原给定条件，所猜的解就是唯一正确的解。

§ 14.5 导体壳和静电屏蔽

封闭导体壳：有内表面 $S_{内}$、外表面 $S_{外}$，
空间分割为腔内、腔外。

一. 腔内无电荷

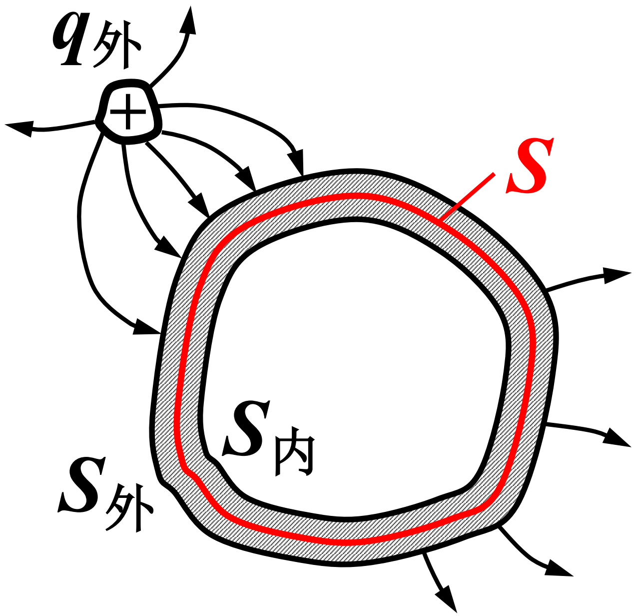


腔内无电荷时，无论腔外有无电荷，腔内电场为零，腔的内表面处处无电荷 —— 内表面的面电荷密度为零：

$$\vec{E}_{内} = 0, \quad \sigma_{内表面} = 0$$

封闭导体壳屏蔽了壳外电荷对壳内的影响。

证明：



在导体中选取高斯面 S 包围空腔，有：

$$\oiint_S \vec{E}_{导体内} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_{S_{内}} \sigma_{内表面}\, ds = 0$$

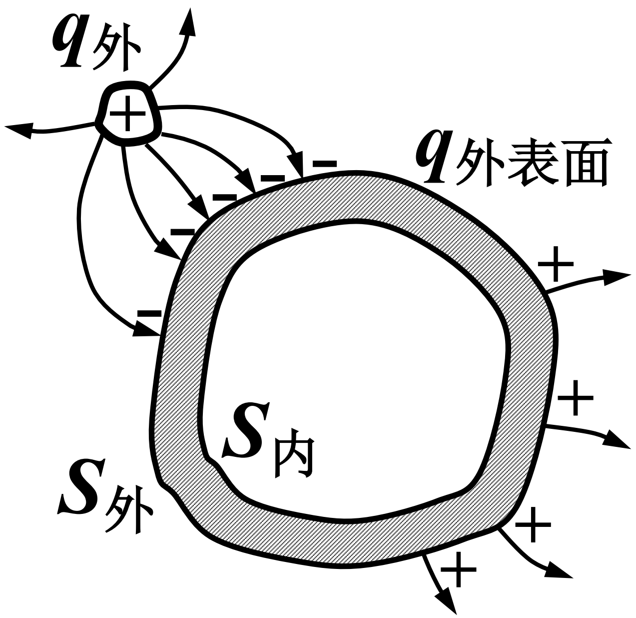
若 $\sigma_{内表面} \neq 0$，则 $\sigma_{内表面}$ 必有正负，则腔内有电场线从正电荷到负电荷，与导体等势矛盾。

$\therefore$ 只能 $\sigma_{内表面} = 0$ 且腔内无电场线，即 $\vec{E}_{内} = 0$

注意证明过程并未涉及：

1) 导体壳本身是否带电，2) 腔外是否有电荷

表明：腔内无电荷时，导体壳本身若带有净电荷，则所带净电荷和感应电荷只能分布在腔的外表面上。



【思考】

腔外电荷 $q_{外}$ 大小、位置变化会影响腔内吗？

它是如何做到不影响的？

不管腔体外的电荷分布如何，腔体内没有感生电荷的产生，故场强处处为零。

利用此原理，在实验过程中，或者是精密测量过程中，为了不受到外部电荷的影响，会把电路封闭在金属壳内。

传输微弱电信号的导线（屏蔽线），外表也是用金属丝编成的网包围起来的