Jordan 标准型

程笛

2024.7.8

回顾线性空间的定义: 线性空间 V 是一个配有数乘运算的加法 Abel 群:

$$\mathbb{K} \times V \to V,\ (k, v) \mapsto kv$$

并且数乘运算满足一些相容条件. 我们推广线性空间的定义, 我们称一个类似上述的集合为模, 如果将要求的 $\mathbb{K}$ 换为环.(以下环都指含单位元的交换环)

定义 1. 环 R 上的集合 M 被称为 R-模, 如果满足

1. 存在加法运算, 是关于加法运算的 Abel 群
2. 数乘运算

$$R \times M \to M,\ (r, m) \mapsto rm$$

- $(r+s)m = rm + sm, \forall r, s \in R, m \in M$
- $(rs)m = r(sm), \forall r, s \in R, m \in M$
- $r(m+n) = rm + rn, \forall r \in R, m, n \in M$
- $1m = m, \forall m \in M$

如果 R 也是域, 那么 R-模就是 R 线性空间.

模 M 的子模 N 指一个子集, 其满足对数乘封闭. 即 $RN \subseteq N$.

例 1. *环 R 本身可以看为 R-模, 此时其上的子模就是理想.*

例 2. *R-模 M,I 是 R 的理想, 则*

$$IM := \{x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\,;\, x_i \in I, e_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

是子模.

类似线性空间, 我们也可以定义模同态和商模.

定理 1. M, N 是 R-模, 对于同态

$$\varphi : M \to N$$

则 $\ker\varphi$ 是 M 的子模, $\operatorname{Im}\varphi$ 也是 R-模. 有诱导同构

$$M/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

证明.

$$m \in \ker\varphi \iff \varphi(m) = 0 \iff \varphi(rm) = r\varphi(m) = 0, \forall r \in R \iff \ker\varphi\text{是子模}$$

$$n \in \operatorname{Im}\varphi \iff \exists m \in M, \varphi(m) = n$$

从而 $rn = \varphi(rm) \in \operatorname{Im}\varphi$

同构证明: 映射

$$[m] = m + \ker\varphi \mapsto \varphi(m)$$

显然是满射 (m 原像的所有元素形成等价类 $[m]$), 又 $\varphi(m) = 0 \iff m \in \ker\varphi$, 因此 $[m] = [0]$, 从而是单射, 从而是同构. □

类似线性空间, 在模上我们可以试着找" 基", 方便起见, 此后我们只谈论环 R 是主理想整环, 且 M 的基向量有限的情况.

定义 2. R-模 M 是自由的, 如果存在一个有限子集 $\{e_1, \ldots, e_m\}$, M 中的任何一个向量均可被该子集的元素唯一地线性表出. 这一子集即为 M 的一个基, 称 M 的秩 (rank) 为 m.

例 3. 有限维线性空间是自由的.

定义 3. R-模 M 称为有限生成的, 如果存在有限子集 $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, 它们的线性组合生成整个 M.

例 4. 整数环 $\mathbb{Z}$ 视为 $\mathbb{Z}$-模是由 1 有限生成的, $\mathbb{Z}/\langle n\rangle$ 视为 $\mathbb{Z}$ 模也是有限生成的, 但不是自由的.

对于自由模 M, 上述 W 生成 M, 则有同态

$$\pi_w : R^m \to M, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots x_mw_m$$

是满射. 从而有 $R^m/\ker\pi_w \cong M$. 特别的, 如果是单射, 那么 $R^m \cong M$

定义 4. 通过对有限个 R-模 M_i 的直积定义运算

$$(v_1, \ldots, v_m) + (w_1, \ldots, w_m) = (v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m), v_i, w_i \in M_i$$

由此定义了模直和, 对应线性空间的外直和.

对于子模的直和, 则与线性空间子空间直和一致, 即

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto v_1 + \cdots + v_m$$

是同构映射. 由此, 上述两种定义直和是同构的.

如果上述的模都是自由模, 那么它们的基共同组成 M 的基, 这与线性空间版本并无二致. 从而我们可以通过直和分解来研究模的结构,

定理 2. 主理想整环上的有限生成自由模的子模也是有限生成自由模

证明.

R 是主理想整环, M 是 $\mathrm{rank}(M) = n$ 的有限生成 R -模, 存在基 $(e_1, \ldots, e_n)$ 用归纳法: $n = 1$ 时, $M \cong R$, 其上的子模就是 R 的理想, 记 $N = RI$. 由于 R 是主理想整环, 故 $I = ie_1$, 得 $N = R(ie_1)$, 故 N 是以 ie_1 为基的自由模. 假设对秩小于 n 的自由模上述结果都成立, 考虑秩 n 的情况,

$$\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & M & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ N/N \cap Re_1 & \longrightarrow & M/Re_1 & \xrightarrow{\cong} & Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_n \end{array}$$

若 $N \cap Re_1 = \{0\}$, 则由归纳假设, $N = N/Re_1 \cap N$ 是有限生成自由模.

若 $N \cap Re_1 \neq \{0\}$, 由于 $N \cap Re_1 \subset Re_1$, 由归纳假设, $N \cap Re_1 = Rie_1$, $i \in R$, $N/N \cap Re_1$ 也是有限生成自由模, 其基 $\{[u_1], \ldots, [u_k]\}$, 对于任意的 $w \in N$, $[w] \in N/N \cap Re_1$,

$$[w] = r_1[u_1] + \cdots + r_k[u_k]$$

即

$$w - r_1 u_1 - \cdots - r_k w_k \in Rie_1$$

从而 w 被 $\{u_1, \ldots, u_k, e_1\}$ 线性表出, 这些显然线性无关, 从而是 N 的基, 即 N 是有限生成的自由模. $\square$

我们再引入最后一个引理, 然后来到这次的核心定理.

引理 3. 主理想整环 R 上的有限生成自由模 M, 设 N 是其子模, 则 M 存在恰当的基 $(u_1,\dots,u_n)$ 和 R 中元素 $a_i, 1\le i\le m$ 满足

$$a_1|a_2|\dots|a_m$$

使得 $(a_1u_1,\dots,a_mu_m)$ 为 N 的基.

证明. 设 M 的基 $(e_1,\dots,e_n)$, 以及生成 N 的向量组 $(v_1,\dots,v_k)$, 有过渡矩阵 $C\in M_{n\times k}(R)$:

$$(v_1,\dots,v_k)=(e_1,\dots,e_n)C$$

由线性代数的知识, 对于矩阵 $C\in M_{n\times k}(R)$, 存在可逆矩阵 $P\in GL_n(R), Q\in GL_k(R)$, 使得

$$PCQ=\begin{pmatrix} a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ & & a_m \\ 0 & & 0\end{pmatrix}=:D$$

其中 a_i 满足定理要求. 从而

$$(v_1,\dots,v_k)Q=(e_1,\dots,e_n)P^{-1}D$$

可知在新基 $(e_1,\dots,e_n)P^{-1}=(u_1,\dots,u_n)$ 下有 N 的基 (容易验证是线性无关的)

$$(v_1,\dots,v_k)Q=(a_1u_1,\dots,a_mu_m)$$

从而得证.

由证明过程知上述 a_i 在相差一个可逆元的情况下是唯一的. 为后续简便起见, 特别的, 我们考虑 $R=\mathbb{K}[x]$, 那么这些 a_i 就是首项相差一个系数下唯一的多项式. □

定理 4. 不变因子分解: 存在 R^n 中的基 $u_1,\dots,u_n$, 和 $a_i, 1\le i\le m$ 满足

$$a_1|a_2|\dots|a_m$$

使得 $(a_1u_1,\dots,a_mu_m)$ 为 $\ker\pi_w$ 的基, 从而分解 $M=R^n/\ker\pi_w$ 得到

$$M=\frac{Ru_1\oplus Ru_2\oplus\cdots\oplus Ru_m\oplus R^r}{\langle a_1\rangle u_1\oplus\langle a_2\rangle u_2\oplus\cdots\oplus\langle a_m\rangle u_m}\cong\frac{R}{\langle a_1\rangle}\oplus\cdots\oplus\frac{R}{\langle a_m\rangle}\oplus R^r$$

证明: 考虑映射 σ

$$w=w_1+\cdots+w_n\mapsto([w_1],\dots,[w_m],w_{m+1},\dots,w_n)$$

容易验证 $\ker\sigma=\langle a_1\rangle u_1\oplus\langle a_2\rangle u_2\oplus\cdots\oplus\langle a_m\rangle u_m$.

定理 5. 环 R 中有一组互素的理想 $a_1, \dots, a_m \subseteq R$, 则有

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_m = a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_m$$

并有同构

$$R/a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cong \frac{R}{a_1} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{a_m}$$

证明. 映射

$$R \to \frac{R}{a_1} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{a_m},\ x \mapsto ([x]_{a_1}, [x]_{a_2}, \dots, [x]_{a_m})$$

显然其核为 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m$, 从而由定理 1 得证. □

应用中国剩余定理, 通过对 $a_i = u p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$ 的分解 (其中 p_i 是互素的理想), 从而我们可以对 $\frac{R}{\langle a_i \rangle}$ 进一步分解. 即

$$R/p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \cong \frac{R}{p_1^{l_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{p_k^{l_k}}$$

接下来我们将上述结构推广到 n 维线性空间中, 从而得到结论: 每个复矩阵 A 都相似于它的 Jordan 标准型.

对数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间 V 上的一个线性映射 ψ, 我们定义数乘映射

$$\mathbb{K}[x] \times V \to V, \quad (x, v) \mapsto \psi(v)$$

从而对 $a \in \mathbb{K}[x]$,

$$a \cdot v = (a_0 + a_1\psi + \cdots + a_n\psi^n)(v)$$

这样的数乘是可交换的, 通过如此定义, 给定一个线性空间 V 上的线性映射, 我们就可以将其视作一个 $\mathbb{K}[x]$ -模 V_ψ, 其上的子模就是 ψ 不变子空间. 我们知道这样的模的结构: V 的一个基 $(e_1, \dots, e_n)$ 在 $\mathbb{K}[x]$ 上生成 V_ψ, 从而由初等因子分解,

$$V \cong \frac{\mathbb{K}[x]}{p_1^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{p_k^{m_k}} \oplus \mathbb{K}[x]^r$$

由于 $\mathbb{K}[x]^r$ 视为 $\mathbb{K}$ 上的线性空间是无限维的, 从而 $r = 0$. 我们考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的特殊情况, 其上的素因子只能是一次多项式, 从而得到

$$V \cong \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{11}}} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{12}}} \oplus \cdots \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{1t_1}}} \oplus \cdots \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_s)^{m_{st_s}}}$$

我们先说明这样的分解在模同构的意义下是唯一的. 我们考虑特定的 λ_s, 将指数按大小排列, 由

$$(\lambda - \lambda_s)^j M_1 \cong (\lambda - \lambda_s)^j M_2, j \in \mathbb{N}$$

从而如果某一项不等, 则 j 在下降的过程中存在维数不等情况, 使得与同构矛盾.

现在设 φ,ψ 是两个 V 上的线性变换, 对应矩阵 A,B, 其分别诱导线性空间的模如果同构, 即同构映射 U 需要适合数乘,

$$U(x_a v)=x_b(Uv)$$

得到 $U(Av)=B(Uv)$ 得到 $B=UAU^{-1}$, 从而 A,B 相似. 反之亦然. 由此, 我们得到此前的分解给出线性映射相似类的刻画.

由线性代数的知识, 以上的 λ_i 就是 ψ 的所有特征值, 最后我们得到 Jordan 标准型. 考虑子模 (ψ 不变子空间),

$$\frac{\mathbb{K}[\lambda]}{(\lambda-\lambda_t)^{m_t}}$$

自然有模中的基 $(\lambda-\lambda_t)^{m_{t-1}},\dots,\lambda-\lambda_t,1$, 对应着线性空间中的某些向量构成的基 $e_{m_t-1},\dots,e_1$. 由

$$\lambda((\lambda-\lambda_t)^{m_{t-1}},\dots,\lambda-\lambda_t,1)=((\lambda-\lambda_t)^{m_{t-1}},\dots,\lambda-\lambda_t,1)\begin{pmatrix}\lambda_t & 1 & & \\ & \lambda_t & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_t\end{pmatrix}$$

这里注意到 $\lambda(\lambda-\lambda_t)^{m_t-1}=(\lambda-\lambda_t)^{m_t}+\lambda_t(\lambda-\lambda_t)^{m_{t-1}}$, 前一项在该子模中被模掉了. 即 $\lambda(\lambda-\lambda_t)^{m_t-1}=\lambda_t(\lambda-\lambda_t)^{m_{t-1}}$

由此可知

$$\psi(e_{m_t-1},\dots,e_1)=(e_{m_t-1},\dots,e_1)\begin{pmatrix}\lambda_t & 1 & & \\ & \lambda_t & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_t\end{pmatrix}$$

按此将所有子模的基合为 V_ψ 的基后得到 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$$

此标准型在相似关系下的不变.

Singular 的 linalg.lib 中有计算 Jordan 标准型的函数,

```
> LIB"linalg.lib";
> ring R = (complex,2),x,dp;
> matrix A[3][3] = 3,2,1,0,2,1,3,2,4;
> print(jordannf(gauss_nf(A)));
2,0,0,
0,3,0,
0,1,3
```

似乎只能接受三角阵, 使用 gauss_nf.