高等线性代数

程笛 2023012317

Week 1

题目 1. 《高等代数学. 第四版》6.1.5

证明. 用反证法. 由于特征值不同, 可知 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha_2}$ 线性无关. 假设 $\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}$ 是 A 的特征向量, 则 $A(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2})$. 由题意 $A(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha_2}$, 故 $(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{\alpha_1} = (\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{\alpha_2}$, 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 这说明 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}$ 线性相关, 矛盾 □

题目 2. 《高等代数学. 第四版》6.1.7

证明.

*

$$AA^*\boldsymbol{\alpha} = (\det A)I\boldsymbol{\alpha} \implies \lambda_0 A\boldsymbol{\alpha} = (\det A)\boldsymbol{\alpha}$$

这说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 关于特征值 $\frac{\det A}{\lambda_0}$ 的特征向量.

* 假设 $\lambda_0 \neq 0$, 计算得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+b \\ 2+2b \\ 1+b+a \end{pmatrix} = \frac{\det A}{\lambda_0} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

对比知 $a = 2$, 进而 $\det A = 4$. 且

$$3b + b^2 = 2 + 2b \implies b = 1 或 b = -2$$

分别对应 $\frac{\det A}{\lambda_0} = \frac{4}{\lambda_0} = 4$ 和 $\frac{\det A}{\lambda_0} = \frac{4}{\lambda_0} = 1$, λ_0 分别为 1 和 4.

* $\lambda_0 = 0$ 时, 有 $\det A = 0 \implies a = \frac{2}{3}$, 此时

$$A\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 3+b \\ 2+2b \\ \frac{5}{3}+b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

显然不可能, 故 $\lambda_0 \neq 0$.

$\square$

题目 3. 《高等代数学. 第四版》6.1.9

证明. (1) $A^k = O \implies (\det A)^k = 0 \implies \det A = 0 \implies 0$ 是 A 的一个特征值.

另一方面, 由第一讲命题一, 令 $f(A) = A^k = 0$, 则任意 A 的特征值 λ 满足 $f(\lambda) = 0$, 从而 $\lambda = 0$.

$\square$

证明. (3) A 是幂等阵 $\iff A(A - I) = O$, 由第一讲命题一, 假设 A 的特征值存在, 记为 λ, 则 $\lambda(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$. 特别的, $A = I$ 是特征值显然为 1. $A = O$ 时特征值显然为 0. $\square$

题目 4. 《高等代数学. 第四版》6.1.10

证明. 由下一题可知, $\left|\lambda I - \alpha\beta^{\mathrm{T}}\right| = \lambda^{n-1}\left|\lambda - \beta^{\mathrm{T}}\alpha\right| = \lambda^{n-1}\left|\lambda - (\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{\mathrm{T}}\right| = \lambda^{n-1}|\lambda| = \lambda^n$, 故 A 的全部特征值为 0.

$\square$

题目 5. 《高等代数学. 第四版》6.1.12

证明. 首先

$$|I_m - AB| = \begin{vmatrix} I_n & A \\ O & I_m - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - BA & O \\ A & I_m \end{vmatrix} = |I_n - BA|$$

进而 $\lambda \neq 0$ 时,

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^m \left|I_m - \lambda^{-1}AB\right| = \lambda^m \left|I_n - B(\lambda^{-1}A)\right| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$$

由摄动法, $\lambda \to 0$ 时结论成立, 故 $\lambda = 0$ 结论成立. $\square$

题目 6. 《高等代数学. 第四版》6.2.1.(2)

解答. 记矩阵为 A.

$$|\lambda I - A| = (\lambda+1)^3 = 0 \implies \lambda = -1$$

计算解空间:

$$((-1)I - A)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

行简化后得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

得到解空间为 $\mathrm{span}((-1,-1,1)^{\mathrm{T}})$, 几何重数为 1 小于代数重数 3, 故不可对角化.

题目 7. 《高等代数学. 第四版》6.2.3

证明. 可知

$$A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

□

题目 8. 《高等代数学. 第四版》6.2.7

解答. $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$, 故有两个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=6$.

$$N(2I-A)=N\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&1&-1\\ & & \\ & & \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-1&1\\1& \\ &1\end{pmatrix}$$

$$N(6\lambda-A)=N\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&-1&-1\\ &3&2\\ & & \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

记

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

则 P 可逆且

$$A=P\,\mathrm{diag}\{2,2,6\}P^{-1}$$

$$A^n=P\,\mathrm{diag}\{2^n,2^n,6^n\}P^{-1}=2^{n-2}\cdot\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}+9\cdot6^{n-2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}$$

题目 9. 《高等代数. 第四版》6.2.12.(2)

证明. 由于 A 是幂等阵, 由上学期例题, 故存在可逆阵 P:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}I_r& \\ & \end{pmatrix}$$

这说明 A 可对角化.

补充证明: 设一个 n 维线性空间中对应的投影映射为 φ, 则取 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的一组基 S', 将其扩充成全空间的基 S, 则 φ 在基 S 下的表示矩阵即为

$$\begin{pmatrix}I_r& \\ & \end{pmatrix}$$

之后再取过渡矩阵 P 即可. □

题目 10. 《高等代数学. 第四版》6.2.14

证明. 注意到 $A^2 = I_n$, 根据课堂例题知可对角化.

另证: 配凑矩阵

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B & I_r \\ I_{n-r} & O \end{pmatrix}$$

显然 P 可逆. 计算得

$$AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B & I_r \\ -I_{n-r} & O \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

于是 A 可对角化.

□

题目 11. 《高等代数学. 第四版》6.2.15

证明. (1) 假设 A 可对角化, 即存在可逆阵 P

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0\} =: B \implies A = PBP^{-1} = \lambda_0(PP^{-1}) = \lambda_0 I$$

这说明 A 一定是纯量阵.

(2) $f(x) := x^2 + x + 1$, 对 A 的任何特征值 λ, 有 $f(A) = O \implies f(\lambda) = 0$, 由于 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, 故 $f(\lambda) = 0$ 没有实数解, 故在 $\mathbb{R}$ 上 A 不可对角化. □

题目 12. 《高等代数学. 第四版》6.2.16

证明. 由于 $\mathrm{rank}(A) = 1$, 故 $\dim N(A) = n - 1 \implies$, 存在 $n-1$ 个特征值为零的线性无关的特征向量 (即零空间的基, 记为 $\mathbf{y_1}, \dots \mathbf{y_{n-1}}$). 现在假设 A 可对角化, 即存在可逆阵 P:

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{a, 0, 0 \cdots, 0\}$$

且其中 $a \neq 0$(否则 $\mathrm{rank}(A) = 0$). 进而

$$a = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{tr}(A) \neq 0$$

另一方面, 假设 $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, 设复数域下 A 的第 n 个特征值为 λ, 则 $\mathrm{tr}(A) = \lambda + 0 + \cdots + 0 = \lambda \neq 0$, 且 $\lambda \in \mathbb{K}$. 故 λ. 设 $\mathbf{x}$ 是对应的特征向量, 记

$$Q = (\mathbf{x}, \mathbf{y_1}, \dots \mathbf{y_{n-1}})$$

有

$$AQ = Q\,\mathrm{diag}\{\lambda, 0, 0\cdots, 0\}$$

这说明 A 可对角化.

$\square$