高等线性代数 2

第二十二讲

复正规变换

主要内容: Hermite 变换

复正规变换

Schur 定理

二〇二四年春

1. 伴随变换

定义 1

设 V 是一个酉空间, φ 是 V 上的一个线性变换. 若存在 V 上的线性变换 φ^* 使得对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$,

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$$

都成立, 则称 φ^* 是 φ 的一个伴随变换.

定理 1

设 V 是酉空间, φ 是 V 上的一个线性变换. 则 φ 的伴随变换 φ^* 存在且唯一. 而且, 若 φ 在 V 的一组标准正交基下的矩阵是 A, 则 φ^* 在这组基下的矩阵是 $\overline{A}^T$.

2. 性质

设 V 是酉空间, φ, ψ 是 V 上的线性变换, $c \in \mathbb{C}$. 则有

(1) $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

$(c\varphi)^* = \overline{c}\varphi^*$; (注意这里有共轭.)

$(\varphi^*)^* = \varphi$.

(2) 若 W 是 φ 的不变子空间, 则 $W^\perp$ 是 φ^* 的不变子空间.

(3) 若 φ 的全部特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 φ^* 的全部特征值为 $\overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_n}$.

(4) φ 是酉变换当且仅当 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi = I_V$.

3. 复正规变换

定义 2

设 V 是一个酉空间, φ 是 V 上的一个线性变换.

(1) 若 $\varphi^* = \varphi$, 则称 φ 是一个 Hermite 变换.

(2) 若 $\varphi^* = -\varphi$, 则称 φ 是一个反 Hermite 变换.

(3) 若 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$, 则称 φ 是一个复正规变换.

由定义可知, 酉变换, Hermite 变换和反 Hermite 变换都是正规变换. 而且, φ 是一个复正规变换当且仅当 φ 在 V 的标准正交基下的表示矩阵 A 是复正规矩阵, 即

$$\overline{A}^T A = A\,\overline{A}^T.$$

4. 例题 1

例 1: 设 W 是酉空间 V 的一个子空间. 则 V 到子空间 W 的正交投影 $\pi_W : V \to V$ 是一个 Hermite 变换. 反之, 若 π 是酉空间 V 的一个幂等 Hermite 变换, 则 π 是 V 到某一个子空间的正交投影.

证明: 第一个命题类似第 19 讲例题 1. 现证明第二部分. 因为 π 是幂等变换, $V = \mathrm{Im}\pi \oplus \ker \pi$, 且 π 是 V 到 $W = \mathrm{Im}\pi$ 的投影变换. 只需验证 $\pi = \pi_W$, 即 $\ker \pi = W^{\perp}$, 也就是 $\ker \pi \perp W$.
设 $\boldsymbol{\alpha} \in \ker \pi$, $\boldsymbol{\beta} \in W$. 则存在 $\boldsymbol{\gamma} \in V$ 使得 $\boldsymbol{\beta} = \pi(\boldsymbol{\gamma})$. 于是

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\pi(\gamma), \boldsymbol{\alpha}) = (\pi^2(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\alpha})) = (\pi(\boldsymbol{\gamma}), \pi(\boldsymbol{\alpha})) = (\pi(\boldsymbol{\gamma}), 0) = 0.$$

所以 $\ker \pi \perp W$.

5. Hermite 变换的性质

命题 1

设 V 是一个酉空间, φ 是 V 上的一个线性变换. 则 φ 是 Hermite 变换当且仅当 φ 在 V 的标准正交基下的矩阵是 Hermite 矩阵.

命题 2

设 V 是一个酉空间, φ 是 V 上的一个 Hermite 变换. 若 W 是 φ 的一个不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 φ 的不变子空间.

命题 3

设 φ 是酉空间上的一个 Hermite 变换. 则 φ 的特征值都是实数且属于不同特征值的特征向量彼此正交.

6. Hermite 变换的谱分解

定理 2

设 φ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换. 则存在 V 的一组标准正交基使得 φ 在这组基下的表示矩阵是对角阵, 且其主对角线元素都是实数.

推论 1

设 φ 是 n 维酉空间 V 上的一个线性变换. 则 φ 是 Hermite 变换当且仅当存在分解 $\varphi = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_t\pi_t$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ 互不相同, $\pi_1, \cdots, \pi_t$ 是 V 上的 Hermite 变换且满足

$$\pi_i\pi_j = \delta_{ij}\pi_i,\ 1 \le i, j \le t, \quad \pi_1 + \cdots + \pi_t = I_V.$$

7. Hermite 矩阵的酉相似标准形

推论 2

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个 Hermite 矩阵. 则存在 n 阶酉矩阵 U 使得

$$\overline{U}^T A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数, 且是 A 的所有特征值.

定义 3

设 V 是一个 n 维酉空间, 设 φ 是 V 上的一个 Hermite 变换. 若对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 都有 $(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) > 0$ (≥ 0), 则称 φ 是一个正定 Hermite 变换 (半正定 Hermite 变换).

显然, φ 是一个正定 (半正定) Hermite 变换当且仅当 φ 在 V 的一组标准正交基下的矩阵是正定 (半正定) Hermite 矩阵.

8. 正定 Hermite 变换

命题 4

(1) 设 φ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换. 则 φ 是正定的 (半正定的) 当且仅当 φ 的所有特征值都大于零 (大于等于零).
(2) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个 Hermite 矩阵. 则 A 是正定的 (半正定的) 当且仅当 A 的所有特征值都大于零 (大于等于零).

设 V 是一个 n 维酉空间, φ 是 V 上的一个线性变换. 则 φ 是反 Hermite 变换当且仅当 φ 在 V 的标准正交基下的矩阵 A 是反 Hermite 矩阵, 即 $\overline{A}^T = -A$. 而且, 反 Hermite 变换和反 Hermite 矩阵也可以酉对角化. 事实上, 酉变换, Hermite 变换, 反 Hermite 变换可以酉对角化是复正规变换谱定理的一个直接推论.

引理 1

设 φ 是 n 维酉空间 V 上的一个复正规变换, 即 $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$. 则

(1) 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,

$$\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\| = \|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|.$$

因此, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ 当且仅当 $\varphi^*(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}$ 是 φ 的属于特征值 λ 的特征向量当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 φ^* 的属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量.

(3) φ 的属于不同特征值的特征向量彼此正交.

10. 引理证明 I

证明: (1) 因为 φ 是复正规变换, 所以

$$\begin{aligned}\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\|^2 &= (\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \varphi(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*\varphi(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, (\varphi^*)^*\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})) = (\varphi^*(\boldsymbol{\alpha}), \varphi^*(\boldsymbol{\alpha})) = \|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|^2.\end{aligned}$$

(2) 由伴随变换的性质可知,

$$(\lambda I_V - \varphi)^* = \overline{\lambda} I_V - \varphi^*.$$

于是

$$(\lambda I_V - \varphi)^*(\lambda I_V - \varphi) = (\lambda I_V - \varphi)(\lambda I_V - \varphi)^*,$$

即 $\lambda I_V - \varphi$ 也是复正规变换.

11. 引理证明 II

因此, 由 (1) 可得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} \text{ 是 } \varphi \text{ 的属于特征值 } \lambda \text{ 的特征向量} \\
\Leftrightarrow\ & (\lambda I_V - \varphi)(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{\lambda} I_V - \varphi^*)(\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda I_V - \varphi)^*(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{\alpha} \text{ 是 } \varphi^* \text{ 的属于特征值 } \overline{\lambda} \text{ 的特征向量.}
\end{aligned}
$$

(3) 假设 λ, μ 是 φ 的两个不同特征值, 并且 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 是 φ 的分别属于特征值 λ 与 μ 的特征向量. 由 (2) 可知, $\boldsymbol{\beta}$ 是 φ^* 的属于特征值 $\overline{\mu}$ 的特征向量. 因此,

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \overline{\mu}\boldsymbol{\beta}) = \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

由 $\lambda \neq \mu$ 可得 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.

12. 复正规变换的谱定理

定理 3

设 φ 是 n 维酉空间 V 上线性变换. 则 φ 是复正规变换当且仅当存在 V 的一组标准正交基使得 φ 在这组基下的矩阵是对角阵.

推论 3

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个复矩阵. 则 A 是复正规矩阵当且仅当 A 可酉对角化.

推论 4

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则 A 可酉对角化 $\Leftrightarrow A = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_s E_s$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ 互不相同, $E_1, \cdots, E_s \in M_n(\mathbb{C})$ 是 Hermite 矩阵且满足 $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$, $1 \leq i, j \leq s$, $E_1 + \cdots + E_s = I_n$.

证明: 充分性显然. 对 V 的维数 n 用数学归纳法证明必要性. 若 $n=1$, 则结论显然成立. 设 $n\geq 2$ 且假设定理对于维数为 $n-1$ 的酉空间成立. 设 V 是一个 n 维酉空间. 令 $\lambda_1\in\mathbb{C}$ 是 φ 的一个特征值且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 φ 属于特征值 λ_1 的单位特征向量. 由引理 1 知, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 φ^* 的属于特征值 $\overline{\lambda_1}$ 的特征向量. 因此, $W=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1)$ 既是 φ-不变子空间也是 φ^*-不变子空间, 并且有直和分解

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

由于 W 是 φ 的不变子空间, 所以 $W^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间. 同样, 由 W 是 φ^* 的不变子空间可知 $W^{\perp}$ 也是 $(\varphi^*)^*=\varphi$ 的不变子空间.

14. 定理证明续

因此, 它们在 $W^{\perp}$ 上的限制给出两个线性变换

$$\varphi|_{W^{\perp}}: W^{\perp} \longrightarrow W^{\perp}, \quad \varphi^*|_{W^{\perp}}: W^{\perp} \longrightarrow W^{\perp},$$

并且 $\varphi^*|_{W^{\perp}}$ 是 $\varphi|_{W^{\perp}}$ 的伴随变换. 由 φ 的正规性可知 $\varphi|_{W^{\perp}}$ 也是正规的. 由于 $\dim W^{\perp} = n-1$, 根据归纳假设, $W^{\perp}$ 有一组标准正交基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 使得 $\varphi|_{W^{\perp}}$ 在这组基下的矩阵是对角阵

$$\operatorname{diag}(\lambda_2, \cdots, \lambda_n), \text{ 其中 } \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

综上可得, $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, 且 φ 在这组基下的表示矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

注: 易知 φ^* 在这组基下的表示矩阵是 $\operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \cdots, \overline{\lambda_n})$.

因为酉变换与 Hermite 变换都是复正规变换, 所以第 21 讲的定理 5 及上述定理 2 都是定理 3 的直接推论. 由于反 Hermite 变换是复正规变换且其所有特征值是零或者纯虚数, 所以由定理 3 可导出下面的结论.

推论 5

设 φ 是 n 维酉空间 V 上的一个反 Hermite 变换. 则存在 V 的一组标准正交基使得 φ 在这组基下的表示矩阵是

$$\mathrm{diag}(ia_1, \cdots, ia_n), \quad 其中\ a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}.$$

定理 4

任一个 n 阶复矩阵 A 酉相似于一个上三角矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值.

证明: 对 n 用数学归纳法, 参看教材 p.408 定理 9.6.1, 或者证明如下:

17. Schur 定理证明

由第 3 讲定理 1 可知, 存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = M$ 是一个上三角阵. 又由第 21 讲定理 2 的 UR 分解可知, 存在酉矩阵 U 和上三角阵 R 使得 $P = UR$. 于是

$$A = PMP^{-1} = (UR)M(UR)^{-1} = U(RMR^{-1})U^{-1}.$$

因为上三角阵的逆, 上三角阵的乘积还是上三角阵, 所以 RMR^{-1} 是一个上三角阵. 从而 $U^{-1}AU = RMR^{-1}$ 是一个上三角阵.

18. 推论 3 必要性证法二

证明: 由 Schur 定理, A 酉相似于上三角阵 B. 因为 A 是复正规的, 则上三角阵 B 也是复正规的.

接下来验证复正规上三角阵 B 一定是对角阵. 对 B 的阶 n 用数学归纳法. $n=1$ 时显然成立. 设命题对 $n-1$ 阶矩阵成立. 现在设 B 是一个 n 阶复正规上三角阵. 记 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}$. 则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_1 & 0\\ \overline{\boldsymbol{\alpha}} & \overline{B_1}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_1 & 0\\ \overline{\boldsymbol{\alpha}} & \overline{B_1}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}^T\\ 0 & B_1\end{pmatrix}.$$

比较两边乘积的 $(1,1)$ 位置元素可知 $\boldsymbol{\alpha}=0$, 且 B_1 是一个 $n-1$ 阶复正规上三角阵, 由归纳假设可知 B_1 是对角阵. 因此 B 也是对角阵.

19. 小结

综上可得以下结论.

定理 5

设 φ 是 n 维酉空间 V 上的复正规变换. 则

(1) φ 是酉变换当且仅当 φ 的特征值的模全为 1;

(2) φ 是 Hermite 变换当且仅当 φ 的特征值全是实数;

(3) φ 是正定的 (半正定的) Hermite 变换当且仅当 φ 的特征值全是正实数 (非负实数);

(4) φ 是反 Hermite 变换当且仅当 φ 的所有特征值是零或纯虚数.