1 微分中值定理, L'Hospital 法则

定义 1. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 I 内连续, 并且对任意的 $x \in I$ 成立

$$f(x) \le f(x_0)$$

则称 x_0 是函数的一个极大值点, $f(x_0)$ 是一个极大值.

注. *类似地, 可以定义严格极大值点和 (严格) 极小值点, 注意连续的条件.*

引理 1 (Fermat)**.** 可微函数 $f(x)$ 的极大值点 x_0 满足

$$\mathrm{d}f(x_0) = 0 \qquad (f'(x_0) = 0)$$

证明. $x > x_0$ 时

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

$x < x_0$ 时

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

令 $x \to x_0$ 得 $f'(x_0) \le 0$ 且 $f'(x_0) \ge 0$, 故 $f'(x_0) = 0$ □

以下定理都要求函数在 (a, b) 可微, 在 $[a, b]$ 连续.

定理 2 (Rolle)**.** 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 成立 $f'(\xi) = 0$.

证明. 在闭区间上的连续函数取到最值, 此时该处的导数为零. □

定理 3 (Cauchy)**.** 存在 $\xi \in (a, b)$ 成立

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

证明. 构造函数 $F(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$, $F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 定理得. □

取 $g(x) = x$ 得到 Lagrange 中值定理, 使用较多.

定理 4 (Darboux)**.** 设 $f'(a) < \lambda < f'(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 成立 $f'(\xi) = \lambda$.

证明. 令 $g(x) = f(x) - \lambda x$, 则 g 满足上述条件, 故存在 $g'(\xi) = f'(\xi) - \lambda$, 即 $f'(\xi) = \lambda$. □

定理 5. 导函数只可能有第二类间断点

证明.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(\xi)$$

其中 ξ 在 x 和 x_0 之间, 假设导函数极限 $\lim_{x\to x_0} f'(x) = A$ 存在, 则

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{\xi\to x_0} f'(\xi) = A$$

□

Lagrange 中值定理的意义

定理 6. (a,b) 上的可微函数 f 在 (严格) 单调递增的充分必要条件是

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) > 0)$$

证明. 由 Lagrange 中值定理, 任取 $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$, 有

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi) \geq 0$$

从而 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 严格的情况同理. □

注. *Lagrange 中值定理帮助我们把函数的增量和导函数联系在一起.*

定理 7 (L'Hospital)**.** 如果函数 f, g 在区间 (a,b) 可微, 有

$$x\to a,\ f(x)\to 0, g(x)\to 0$$

或者

$$x\to a,\ g(x)\to +\infty$$

此时若成立对区间内任意的 x 有 $g'(x)\neq 0$, 且极限 $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 存在, 则有

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

上式中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $x\to b$ 时也成立.

证明. 如果 a 是有限数, 那么对任意的 ε 存在 a 的右邻域 $N_{\delta+}(a)$, 取 $x, y \in N_{\delta+}(a)$, 成立

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A+\varepsilon$$

若 $x\to a,\ f(x)\to 0, g(x)\to 0$ 则

$$A-\varepsilon < \lim_{y\to a^+} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon$$

得

$$A-\varepsilon \leq \liminf_{y\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{y\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A+\varepsilon$$

再取 $\varepsilon \to 0$ 得证, 类似的, 若 $x \to a,\ g(x) \to \infty$, 则

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} < A+\varepsilon$$

进而

$$A-\varepsilon \le \liminf_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \le A+\varepsilon$$

同理得. 对于 $a \to -\infty$ 的情况, 不妨设 $b<0$, 令 $t=-\frac{1}{x}$, 则成立

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{-t})}{g(\frac{1}{-t})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{-t})\frac{1}{t^2}}{g'(\frac{1}{-t})\frac{1}{t^2}} = A$$

$x \to b$ 的情况类似. □

注. *注意这里只讨论了左 (右) 极限*

证明. (Rudin) 考虑 $A \neq +\infty$ 的情况, 此时对任意的 $q>A$ 存在 $q>r>A$, 存在 $c\in(a,b)$, $a<x<y<c$ 时

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}<r, \quad \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < r$$

如果 $x\to a,\ f(x)\to 0, g(x)\to 0$, 取 $x\to a$ 得到

$$\frac{f'(y)}{g'(y)} \le r < q$$

如果 $x\to a,\ g(x)\to\infty$, 则

$$\limsup_{x\to a}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \limsup_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-0}{1-0} < r$$

同理, 若 $A\neq -\infty$, 对任意的 $q>A$, 总能取到一点 $d\in(a,b)$ 使得 $x\in(a,d)$ 时也成立

$$\frac{f(x)}{g(x)} > q$$

两方面结合, 证毕. □

2 Taylor 定理

定理 8. 设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则 $x \to x_0$ 时成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

其中 $o((x-x_0)^n)$ 称为 Peano 余项, 如果加强条件, 使得 $f(x)$ **在** x_0 **附近** $n+1$ **阶可导**, 那么我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\text{带 } \textit{Lagrange} \text{ 余项})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-x_0)(\eta-x_0)^{n+1} \qquad (\text{带 } \textit{Cauchy} \text{ 余项})$$

其中 ξ 和 η 在 x 和 x_0 之间.

证明. 由 L'hopital 法则, 因为极限 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x-x_0)}$ 存在, 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{(n+1)(x-x_0)^n} \\
&= \cdots \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x-x_0)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

类似的, 加强条件后我们可以使用 Cauchy 中值定理, 令

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

注意到

$$F(x_0) = F'(x_0) = F^{(2)}(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0,\ F^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$$

我们有

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{F(x)-F(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F'(\xi_1)-F'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \\
&= \cdots \\
&= \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

注. 容易错误连续使用 *L'Hospital* 法则. 注意带 *Peano* 余项的 *Taylor* 展开式只要求在 x_0 一点可导即可, 此时最后一步不能继续分子分母求导.

注. 更明确地使用条件是: f 在 x_0 的 n 阶导数都存在, 并且在 (x_0, x) 上 $n+1$ 次可导, 这不要求在 x_0 处有 $n+1$ 次导数.

注. *Peano* 余项只在 x_0 附近成立.

证明. (Cauchy) 定义辅助函数

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

注意到

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\ F(x)=0$$

由 Lagrange 中值定理,

$$\frac{F(t)-F(x)}{G(t)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},\ \xi\in(x,t)$$

令 $G(t)=(x-t)^{n+1}$, 得 $G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$

$$F(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k=G(t)\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

这就得到带 Lagrange 余项的展开式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

令 $G(t)=(x-t)$, 得 $G'(t)=-1$

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k=G(t)\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-t)(x-\xi)^n$$

这就得到带 Caychy 余项的展开式 □

命题 9. 你也可以试试令 $G(t)=(x-t)^m$, $G'(t)=m(x-t)^{m-1}$

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k=G(t)\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{mn!}(x-t)^m(x-\xi)^{1+n-m}$$

再来一个抽象的

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-\frac{G(x_0)}{G'(\xi)}\frac{f^{(n+1)}(x0)}{n!}(x-x_0)^n$$

其中 $G(t)$ 满足 $G(x)=0$, 且在邻域可导.

定理 10. 设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$, 则 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

证明.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

得 $f(x_0)=a_0$, 两边减去这两项后除以 $x-x_0$, 得到

$$\lim_{x\to x_0}\left(f'(x_0)+\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1}+o((x-x_0)^n)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k(x-x_0)^{k-1}\right)$$

归纳得证. □