高等线性代数

程笛 2023012317

Week 13

1. 证明下列结论:

(1) 方程 $x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1=0$ 无实数根.

(2) 奇数次实系数多项式必有实数根.

证明. (1) 多项式函数 $f(x)=x^8+5x^6+4x^4+2x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, 故在实数域内该多项式无根.

(2) 显然对应的实数域上的多项式函数连续, 分别取 $x\to-\infty, x\to+\infty$, 由于首项是奇数次项, 若首项系数大于零, 则 $f(x)\to-\infty, f(x)\to+\infty$, 由连续函数的介质定理知存在零点, 即有实数根. 首项系数小于零同理. □

2. 求下列多项式的有理根:

(1) $x^3-6x^2+15x-14$;

(2) $4x^4-7x^2-5x-1$.

解. 记多项式为 f (1) 可能的有理根为 $\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$, $f(1)=-4, f(-1)=-36$

$$\frac{f(1)}{7-1}=-\frac{2}{3},\frac{f(1)}{-7-1}=-\frac{1}{2},\frac{f(1)}{14-1}=-\frac{4}{13},\frac{f(1)}{-14-1}=\frac{4}{15}$$

$$f(2)=0, f(-2)<0;$$

故唯一的有理根是 $x=2$.

(2) 可能的有理根为 $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}$, $f(1)=-9, f(-1)=1$

$$\frac{f(-1)}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3},\frac{f(-1)}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5},\frac{f(-1)}{-\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{3}$$

$$f(-\frac{1}{2})=0$$

故唯一的有理根是 $x=-\frac{1}{2}$. □

3. 证明下列多项式在有理数域上不可约:

(1) $x^4-18x^3+12x^2-6x+2$;

(2) x^8+1.

证明. (1) 2 整除除首项外的所有项系数, $2^2=4$ 不整除常数项, 根据爱森斯坦判别法, 该多项式在有理数域上不可约.

(2) 对应的有理数域上的多项式函数恒正, 故多项式没有有理根, 在有理数域上不可约.

□

4. $f(x)$ 是首一整系数多项式, 若 $f(0), f(1)$ 都是奇数, 求证: $f(x)$ 没有有理根.

证明. 常数项 $f(0)$ 是奇数, 所有系数之和 $f(1)$ 是奇数, 故非常数项系数之和为偶数, $f(x)$ 首项系数为 1, 故有理根一定是整根, 假设为 a, 若 a 是奇数, 则 $f(a)$ 是奇数, 不为零, 若 a 是偶数, 则除常数项外其他项之和均为偶数, 故 $f(a)$ 是奇数, 不为零, 故 $f(x)$ 没有有理根. □

5. 写出一个次数最小的首一有理系数多项式, 使它有下列根: $1+\sqrt{3}, 3+\sqrt{2}i$.

解.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))(x-(3+\sqrt{2}i))(x-(3-\sqrt{2}i)) \\ &= (x^2-2x-2)(x^2-6x+11) \end{aligned}$$

它是次数最小的结论是题 6, 7 的直接推论 □

6. 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. 证明: 若 $p(x)$ 的某个复根 a 也是 $f(x)$ 的根, 则 $p(x) \mid f(x)$. 因此, $p(x)$ 的任一个复根都是 $f(x)$ 的根.

证明. 假设不能整除, 由于 $p(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 上不可约, 可知在 $\mathbb{K}$ 上它们互素, 存在 $f(x)u(x)+p(x)v(x)=1$, 故在扩域 $\mathbb{C}$ 上 $f(x)u(x)+p(x)v(x)=1$, 带入 α 有 $0=1$, 矛盾. 故 $p(x) \mid f(x)$ □

7. 设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是一个代数数. 证明:

(1) 存在唯一的一个首一有理系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(\alpha)=0$, 且它是集合 $\{g(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid g(\alpha)=0\}$ 中次数最小的多项式. 这个 $f(x)$ 称为代数数 α 的极小多项式.

(2) 设 $g(x)$ 是首一有理系数多项式, 且 $g(\alpha)=0$. 则 $g(x)$ 是 α 的极小多项式当且仅当 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明.

(1) 由定义知该集合不是空集, 又次数 $n \geq 0$, 故一定存在次数最小元素, 设次数最小元素的次数为 r. 下证唯一: 假设存在两个不同的首一有理系数多项式 $f(x), g(x)$ 使得 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$, 则 $u(x)=f(x)-g(x)\neq 0$ 且 $u(\alpha)=0$, 但 $u(x)$ 的最高次项不超过 $r-1$, 这与 r 是次数最小元素的次数矛盾.

(2) 假设 $g(x)$ 是极小多项式, 若存在 $h(x), u(x)$ 且次数小于 $g(x)$

$$g(x)=h(x)u(x)$$

则 $h(\alpha)=0$ 或 $u(\alpha)=0$, 与 $g(x)$ 极小矛盾. 必要性得证

若 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 设极小多项式为 $f(x)$, 则由题 6,

$$g(x) \mid f(x)$$

又 $f(x)$ 不可约, f,g 均为首一多项式, 故 $f=g$, 充分性得证. $\square$

8. 设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x], a,b,c,d$ 是有理数, 但 $\sqrt{c},\sqrt{d},\sqrt{cd}$ 都是无理数. 求证: 若 $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ 是 $f(x)$ 的根, 则下列数也是 $f(x)$ 的根:

$$a\sqrt{c}-b\sqrt{d},\quad -a\sqrt{c}+b\sqrt{d},\quad -a\sqrt{c}-b\sqrt{d}.$$

证明. 由题意, $\sqrt{c},\sqrt{d},\sqrt{cd}$ 都是无理数, 故 $\sqrt{cd}/c=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}$ 是无理数, 故在有理数域上的线性空间 $\operatorname{span}(1,\sqrt{c},\sqrt{d}), c,d\in\mathbb{Q}$ 中 $1,\sqrt{c},\sqrt{d}$ 线性无关. 故数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{c},\sqrt{d})$ 中的任意元素 α, 存在唯一的有理数 e,k_1,k_2 使得 $\alpha=e+k_1\sqrt{c}+k_2\sqrt{d}$. 定义 $\alpha=e+k_1\sqrt{c}+k_2\sqrt{d}$ 关于 $\sqrt{d}$ 的共轭根式为 $\bar{\alpha}=e+k_1\sqrt{c}-k_2\sqrt{d}$, 显然共轭根式的线性组合仍是对应的共轭根式, 又

$$\bar{\alpha}^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(e+k_1\sqrt{c})^k(-k_2\sqrt{d})^{n-k}=\bar{\alpha^n}$$

故

$$f(\bar{\alpha})=\bar{f(\alpha)}=0$$

故 $a\sqrt{c}-b\sqrt{d}$ 是 $f(x)$ 的根, 根据对称性可知

$$a\sqrt{c}-b\sqrt{d},\quad -a\sqrt{c}+b\sqrt{d},\quad -a\sqrt{c}-b\sqrt{d}.$$

都是 $f(x)$ 的根. $\square$

用反证法证明下述结论.

9. 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数不可约多项式. 求证: 若 x_1,x_2 是 $f(x)$ 在复数域内的两个不同的根, 则 x_1+x_2 必不是有理数.

证明. 设次数为 n, 假设 $x_1+x_2=a\in\mathbb{Q}$, 则 $f(a-x)$ 和 $f(x)$ 具有两个相同的复根, 根据题 6, $f(a-x)\mid f(x)$, 又由于 $f(x)$ 和 $f(a-x)$ 次数相等, $f(x)$ 是奇数次的, 故

$$f(x)=-f(a-x)$$

$$f(\frac{a}{2})=0$$

这说明存在一个有理根, 与不可约矛盾. 故 x_1+x_2 必不是有理数.

$\square$

10. 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的整数, 求证: $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 设 $f(x)=g(x)h(x),\deg g\leq \deg h<\deg f$. 则

$$g(a_i)h(a_i)=-1,i=1,2,\cdots,n$$

$$u(x)=g(a_i)+h(a_i)=0,i=1,2,\cdots,n$$

故 $u(x)$ 有 n 个零点, 又 $\deg u<n$, 故 $u(x)=0$, 故 $f(x)=-g(x)^2$, 注意到 $-g(x)^2$ 的首项是 -1, 与 $f(x)$ 首项矛盾. □