高等线性代数

程笛 2023012317

Week 12

1. 设 V 是实四维线性空间. 设线性变换 φ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求证: 由向量 $\alpha_1 + 2\alpha_2$ 及 $\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$ 生成的子空间 U 是 φ 的不变子空间。

证明. 记该表示矩阵为 A, $\alpha_1 + 2\alpha_2$ 对应的坐标 $\mathbf{x_1} = (1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$ 对应的坐标 $\mathbf{x_2} = (0, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. 任取向量 $\mathbf{k} = k_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) \in U,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 有

$$\varphi(\mathbf{k}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A(x_1, x_2)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

计算得

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

故

$$\varphi(\mathbf{k}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)(k_1x_1 + k_2x_2) \in U$$

于是 $\varphi(U) \subseteq U$, U 是 φ 的不变子空间. □

2. 设 φ, ψ 都是线性空间 V 上的线性变换且 $\varphi\psi = \psi\varphi$, 求证: $\operatorname{Im}\varphi$ 及 $\ker\varphi$ 都是 ψ-不变子空间.

证明. 任取 $\alpha \in \ker\varphi$, 有 $\varphi(\alpha) = 0$, 由条件 $\varphi\psi(\alpha) = \psi\varphi(\alpha) = 0$, 故 $\psi(\alpha) \in \ker\varphi$, 即

$$\psi(\ker\varphi) \subseteq \ker\phi$$

又有

$$\psi(\operatorname{Im}\varphi) = \psi\varphi(V) = \varphi\psi(V) \subseteq \operatorname{Im}\varphi$$

□

3. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的自同构, 若 W 是 φ-不变子空间, 证明: W 也是 φ^{-1}-不变子空间. 若 V 是无限维空间以上结论是否成立?

证明. 由题意知 φ 是单射, 故在 W 上的限制也是单射, 由 $\varphi(W) \subseteq W$ 得 φ 在 W 上的限制是线性变换, 于是 $\varphi|_W$ 是双射, 于是可逆, 且逆映射也是 W 上的线性变换, 故 $\varphi^{-1}(W) \subseteq W$.

在无限维线性空间中, 若子空间 W 是有限维的, 则上述证明依然成立. 否则 φ 是单射无法推出是 φ 满射, 可举反例: 构造线性映射 φ, V 的一组基 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$

$$\varphi\colon a_i \mapsto \begin{cases} a_1,\ i = 2 \\ a_{i+2},\ i = 2k-1, k \in \mathbb{N} \\ a_{i-2},\ i = 2k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

容易验证 φ 是自同构, 考虑子空间 $W = \operatorname{span}(a_i), i = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$, 有 $\varphi(W) \subseteq W$, $\varphi^{-1}(W) = W + \operatorname{span}(a_2) \nsubseteq W$

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[drr] & a_2 \arrow[dl] & a_3 \arrow[drr] & a_4 \arrow[dll] & a_5 \arrow[dr] & \cdots \arrow[dll] \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

4. 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $l \times n$ 矩阵. W 是齐次线性方程组 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空间. 定义 $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ 是线性映射: $\varphi(\alpha) = A\alpha$. 求证:

$$\dim\varphi(W) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - r(B)$$

证明. 即证

$$\dim\varphi(W) = -n + \dim N(B) + n - \dim N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \dim W - \dim N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

有

$$\mathbf{x} \in N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \iff A\mathbf{x} = B\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} \in \ker\varphi|_W$$

故 $\dim N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \dim\ker\varphi|_W$, 即证

$$\dim\varphi(W) = \dim W - \dim\ker\varphi|_W$$

而这是 φ 在 W 上的维数公式. 证毕. $\square$

5. 设 U_1, U_2 是 n 维线性空间 V 的子空间, 且 $\dim U_1 = \dim U_2$. 求证: 存在 V 上的可逆线性变换 φ 使得 $U_2 = \varphi(U_1)$.

   证明. 设 $\dim U_1 = \dim U_2 = r$

   分别取 U_1, U_2 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_r)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_r)$, 将其分别扩充成 V 的基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n)$ 定义映射

$$\varphi\colon, \alpha_i \mapsto \beta_i, i \in \{1, 2, 3\cdots\}$$

   显然 φ 是线性同构, 故可逆, 且满足 $U_2 = \varphi(U_1)$ $\square$

6. 设 V, U 是有限维线性空间, $\varphi : V \to U$ 是线性映射. 求证: 存在 U 到 V 的线性映射 ψ 使得 $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

   证明. 取 $\operatorname{Im}\varphi$ 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, 扩充为 U 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 则存在向量 $\beta_i \in V$, $\varphi(\beta_i) = \alpha_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ 由于 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ 线性无关, 故 β_i 唯一, 将其扩充成 V 的一组基 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$, 有 $\operatorname{span}(\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n) = \ker\varphi$ 定义映射

$$\psi\colon U \to V, \alpha_i \mapsto \begin{cases} \beta_i & 1 \le i \le r \\ 0 & r < i \le n \end{cases}$$

   则对于任意的 $\alpha \in V$, 另 W 为 $\ker\varphi$ 的补空间,

$$\varphi\psi\varphi(\beta) = \varphi\psi\varphi(k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m) = \varphi(k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r)$$

$$\varphi(\beta) = \varphi(k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m) = \varphi(k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_r\beta_r)$$

   即 $\varphi\psi\varphi = \varphi$ $\square$

7. 设 φ 是有限维线性空间 $V \to U$ 的线性映射, U' 是 U 的子空间且 $U' \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. 求证: $\varphi^{-1}(U') = \{\mathbf{v} \in V \mid \varphi(\mathbf{v}) \in U'\}$ 是 V 的子空间, 且

$$\dim U' + \dim\ker\varphi = \dim\varphi^{-1}(U')$$

证明. $\varphi^{-1}(U')$ 是子空间: 若 $\alpha, \beta \in \varphi^{-1}(U')$, 则 $\varphi(\alpha) \in U'$,$\varphi(\beta) \in U'$, 故 $\varphi(\alpha+\beta) \in U'$, $\alpha+\beta \in \varphi^{-1}(U')$, 对加法封闭. $\alpha \in \varphi^{-1}(U')$, $k \in \mathbb{F}$, 则 $\varphi(\alpha) \in U'$,$\varphi(k\alpha) \in U'$, $k\alpha \in \varphi^{-1}(U')$, 对数量乘法封闭.

根据定义, $\ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U')$. 考虑线性映射 $\psi = \varphi|_{\varphi^{-1}(U')}$, 有 $\ker\psi = \ker\varphi$, $\operatorname{Im}\psi = U'$ 根据维数公式

$$\dim(\varphi^{-1}(U')) = \dim\ker\psi + \dim\operatorname{Im}\psi = \dim U' + \dim\ker\varphi$$

□

8. 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间, φ 是 V 上的线性变换. 求证:

$$\dim\varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim\ker\varphi$$

证明. 同前一问, 由于 $0 \in U$, 故 $\ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$, 故 $\ker\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \ker\varphi$

$$\dim\operatorname{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = \dim(U \cap \operatorname{Im}\varphi) \leq \dim U$$

由维数公式

$$\dim\varphi^{-1}(U) = \dim\operatorname{Im}\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} + \dim\ker\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} \leq \dim U + \dim\ker\varphi$$

□

9. 设 A,B 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵. 证明 $N(A)=N(B)$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 使得 $B=PA$.

证明.

设 A,B 是在 $\mathbb{K}^n$ 中的标准基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 和 $\mathbb{K}^m$ 的标准基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 下的映射 $f_A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m, f_B:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 的表示矩阵, $\ker f_A$ 的一组基为 $(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n)$, 他也是 $\ker f_B$ 的基, 将其扩充成 $\mathbb{K}^n$ 的基 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 可知

$$f_A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{pmatrix}$$

$$f_B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_2 & 0\end{pmatrix}$$

其中表示矩阵的秩为 r, 故存在可逆阵 P_1,P_2, $P_1\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{pmatrix}=P_2\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 令 $P=P_2^{-1}P_1$, 又由于

$$f_A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$$

$$f_B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)B$$

设 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q$, 显然 Q 可逆. 于是有

$$(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{pmatrix}Q=f_A((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q)=f_A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$$

$$(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_2 & 0\end{pmatrix}Q=f_B((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q)=f_B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)B$$

故

$$B=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ B_2 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{pmatrix}Q=PA$$

得证 □

10. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明: 存在整数 $0 \le m \le n$, 使得

$$\operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{m+1}, \quad \ker\varphi^m = \ker\varphi^{m+1}, \quad V = \operatorname{Im}\varphi^m \oplus \ker\varphi^m$$

证明.

$$\operatorname{Im}\varphi^{n+1} \subseteq \operatorname{Im}\varphi^n \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Im}\varphi \subseteq V$$

即 $0 \le \dim\operatorname{Im}\varphi^{n+1} \le \cdots \le \dim V < n$, 由抽屉原理, 存在 k 使得 $\dim\operatorname{Im}\varphi^k = \dim\operatorname{Im}\varphi^{k+1}$ 假设每一项都真包含, 则维数严格递增, 矛盾, 故存在 $0 \le m_1 \le n$, $\operatorname{Im}\varphi^{m_1} = \operatorname{Im}\varphi^{m_1+1}$. 同理,

$$\{0\} \subseteq \ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker\varphi^n$$

成立存在 $0 \le m_2 \le n$ 使得 $\ker\varphi^{m_2} = \ker\varphi^{m_2+1}$ 令 $m = \max\{m_1, m_2\}$ 即可.

任取 $\alpha \in \ker\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m$, 则 $\varphi(\alpha) = 0$, 注意到 φ 在 $\operatorname{Im}\varphi^m$ 上的限制是同构映射, 故 $\varphi(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$, 于是 $\ker\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m = 0$. 只需证 $V = \ker\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m$. 根据维数公式, $\dim V = \dim\ker\varphi^m + \dim\operatorname{Im}\varphi^m$, 假设 $V \ne \ker\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m$, 则

$$\dim V > \dim(\ker\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m) = \dim\ker\varphi^m + \dim\operatorname{Im}\varphi^m - \dim(\ker\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m) = \dim V$$

矛盾, 故 $V = \ker\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m$, □

11. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $n > 1.\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 s 个非零向量. 证明: 存在一个 $n-1$ 维子空间 $W \subset V$, 使得 W 不包含任何向量 $\alpha_i, i = 1, \cdots, s$.

证明. 在 $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ 中任选 $n-1$ 个向量, 张成线性子空间 V_i, 选取所有可能张成的子空间, 显然这些子空间只有有限个, 得到这些子空间的并集 S_0, 由之前的作业可知可以选取 V 的一个向量 β_1, 使得 $\beta_1 \notin S_0$, 则 $\operatorname{span}(\beta_1)$ 中不包含任意向量 α_i, 选取 $\alpha_1, \ldots \alpha_s, \beta_1$ 中任意 $n-1$ 的向量张成的子空间, 这些子空间仍然只有有限个, 令它们的并集为 S_1, 可以选取 $\beta_2 \notin S_1$, 则 $\operatorname{span}(\beta_1, \beta_2)$ 中不包含任意向量 α_i(否则 $\alpha_i = k_1\beta_1 + k_2\beta_2$, 由前可知 $k_2 \ne 0$, 这说明 $\beta_2 = \frac{\alpha_i}{k_2} - \frac{k_1\beta_1}{k_2} \in S_1$, 与 S_1 的定义相矛盾), 依次做下去, 得到 $\operatorname{span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1})$ 不包含任何向量 α_i, 即 $W = \operatorname{span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1})$ □

注. *在取到 $n-1$ 个向量之前 (包括 β_{n-1}), 新加入的 β_i 写成某个 α_i 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{i-1}$ 的线性组合, 向量个数小于等于 $n-1$, 所以可以用 S_i 的性质, 如果取入 β_n, 则它的线性表示的向量个数等于 n, 无法从 $\beta_n \notin S_{n-1}$ 得到 $\operatorname{span}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 不包含 α_i*

12*. (选做题) 证明: 任意 7 个无理数中一定存在 4 个无理数, 它们两两之和仍为无理数.

提示: 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_7$ 是无理数. 则集合

$$V = \{c_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_7\alpha_7 \mid c_0, c_1, \cdots, c_7 \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$$

是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间. 而且 $\mathbb{Q} \subset V, \dim V \geq 2$.

证明. 容易验证 $\mathbb{Q}$ 是 V 的子空间, 不妨将 $V/\mathbb{Q}$ 中的零元记作 $\mathbf{0}$, 元素记为 $\bar{\alpha}$, 显然商空间至少一维. 如果 $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, 则 $\bar{\alpha_1} + \bar{\alpha_2} = \mathbf{0}$.

显然存在两两相加互不为零的向量, 如果最多有两个, 不妨记为 $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}$, 则剩下的五个向量要么等于 $-\bar{\alpha_1}$, 要么等于 $-\bar{\alpha_2}$. 显然一定存在某三个向量相等, 则它们两两相加互不为零, 矛盾.

于是两两相加互不为零的向量至少有三个, 不妨记 $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}$, 两两相加互不为零, 则若其余向量中如果存在 $\bar{\alpha_i} \neq -\bar{\alpha_1}, -\bar{\alpha_2}, -\bar{\alpha_3}$, 则取 $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \bar{\alpha_3}, \bar{\alpha_i}$ 满足题意, 若不存在, 说明剩下四个向量每一个与 $-\bar{\alpha_1}, -\bar{\alpha_2}, -\bar{\alpha_3}$ 中的一个相等, 则剩下四个向量满足题意 (因为 $-\bar{\alpha_1}, -\bar{\alpha_2}, -\bar{\alpha_3}$ 两两互加也不为零). 得证

$\square$