上节课内容回顾

- 电荷 （量子化，守恒）
- 库仑定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\vec{e}_{r_{21}} = -\vec{F}_{12}$$

- 电场强度

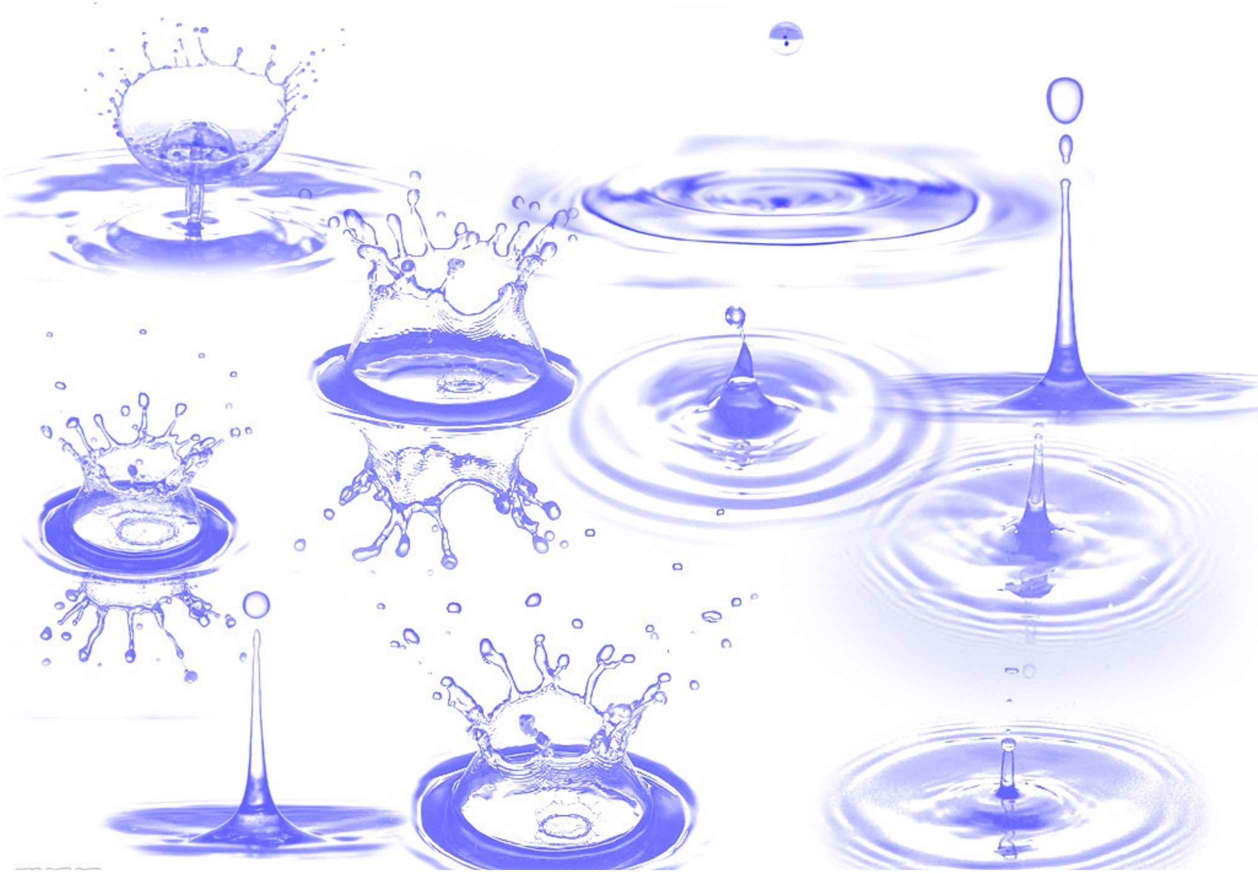
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q\,\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- 点电荷电场及叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

第十二章 静电场 (2)



如何利用水滴发电？

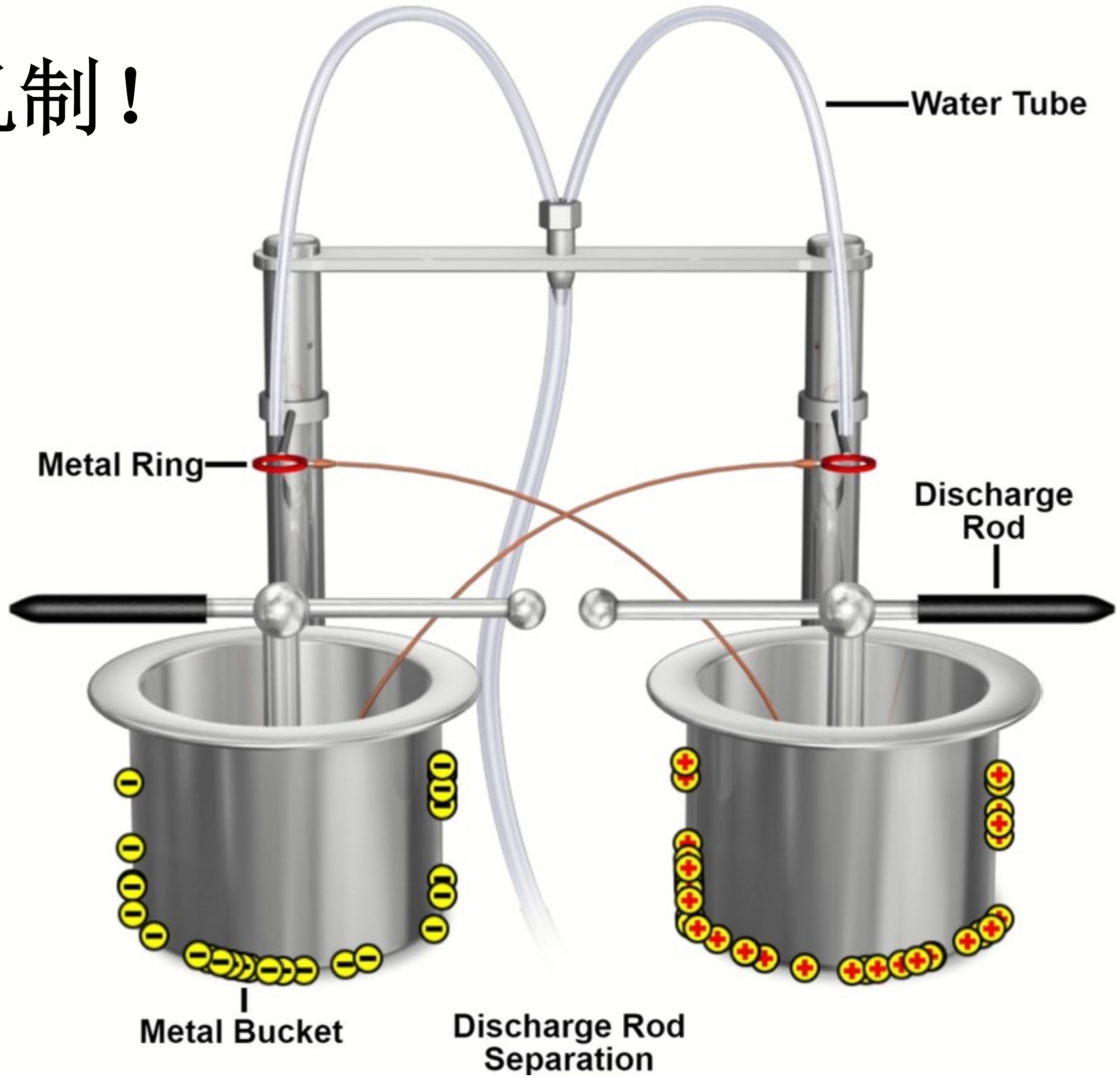
李 渭

2024.09.12

Kelvin’s water dropper

“Lord Kelvin‘s Thunderstorm”

正反馈机制！

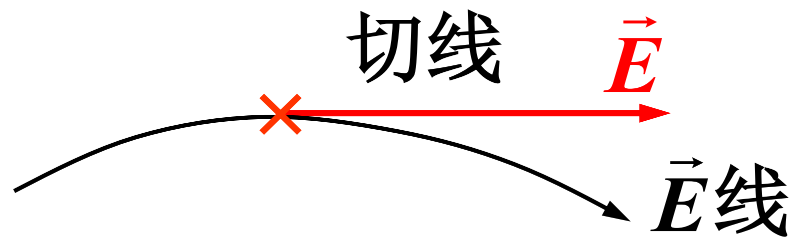


§ 12.5 电场线和电通量

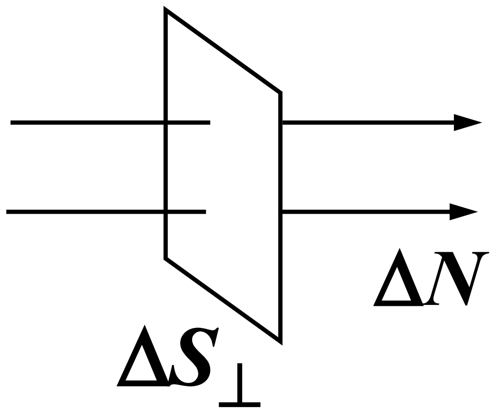
一. 电场线

为形象地描写场强的分布，引入电场线。

1. 电场线上某点的切向为该点电场强度方向。

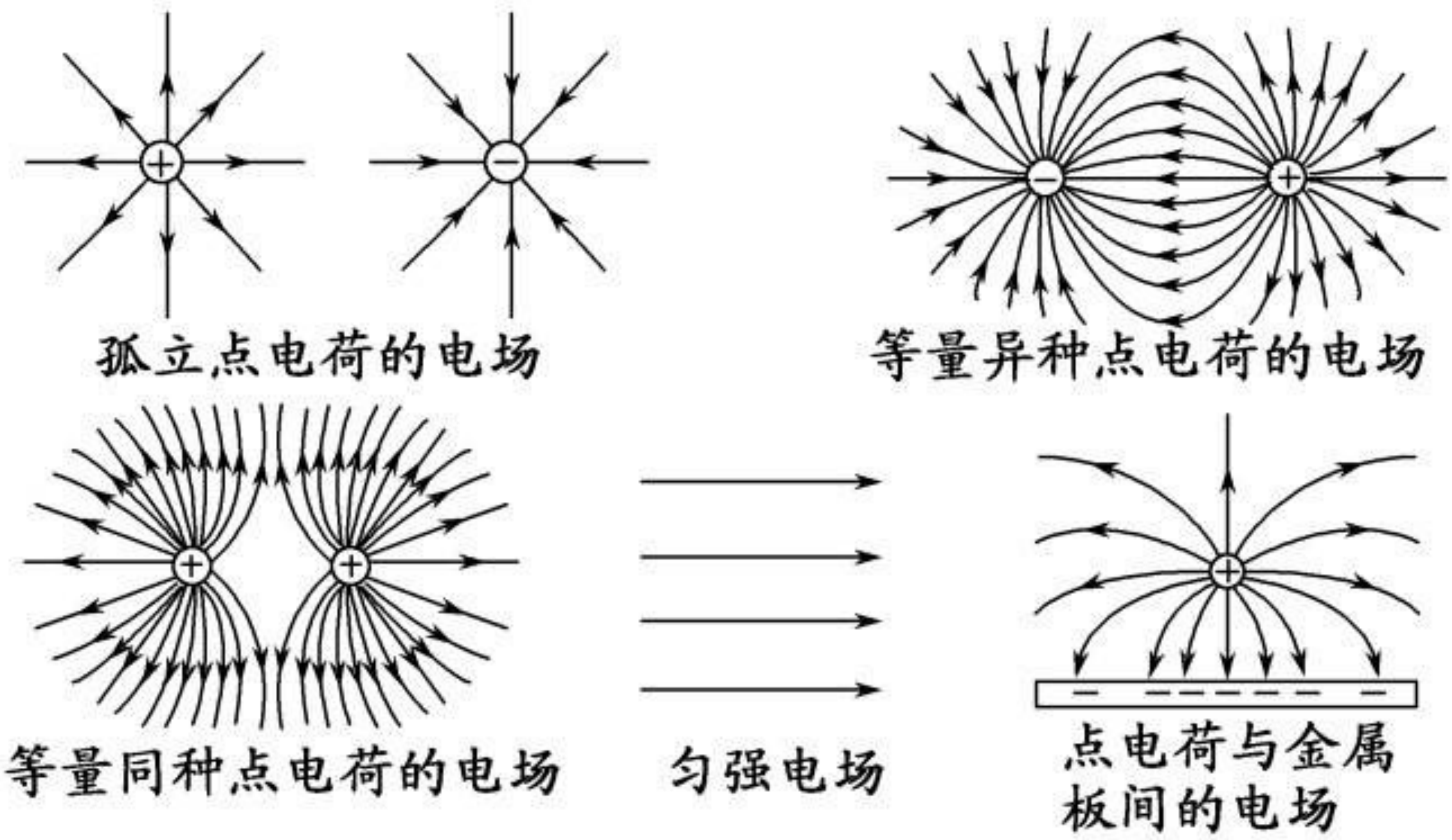


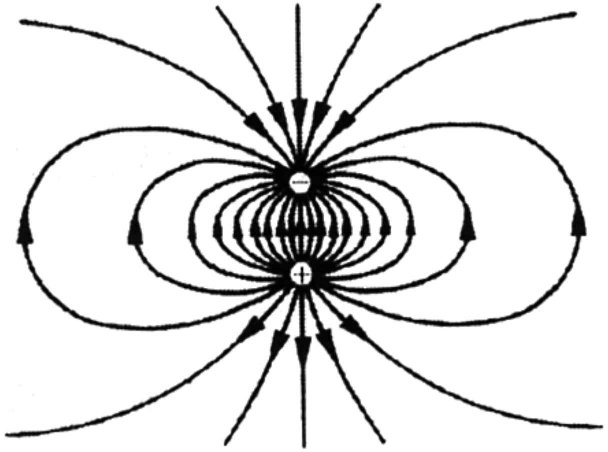
2. 电场线的数密度给出电场强度的大小。



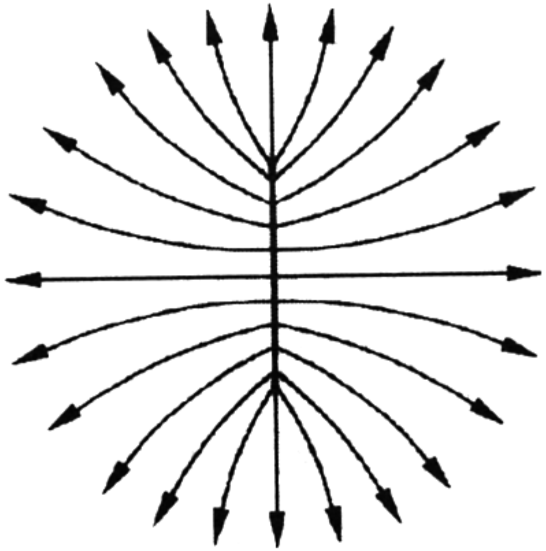
$$E = \lim_{\Delta S_\perp \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S_\perp} = \frac{\mathrm{d} N}{\mathrm{d} S_\perp}$$

- **电场线**是一族空间曲线，用来形象描述场强分布是电场分布的一种物理呈现形式。

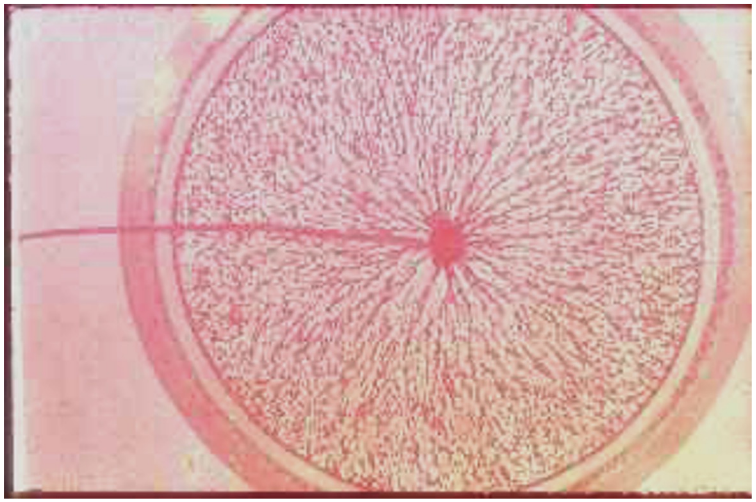




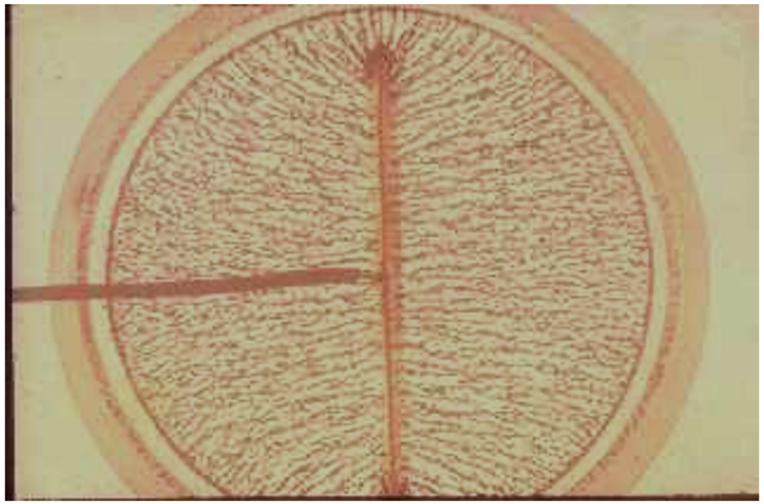
电偶极子



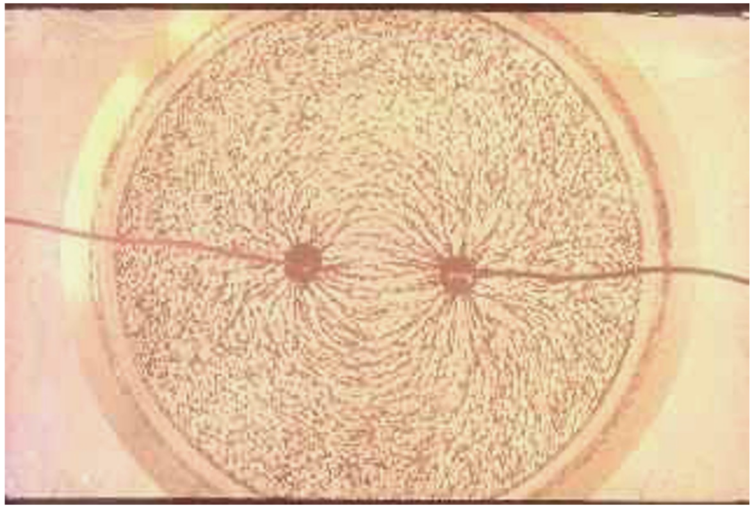
均匀带电直线段



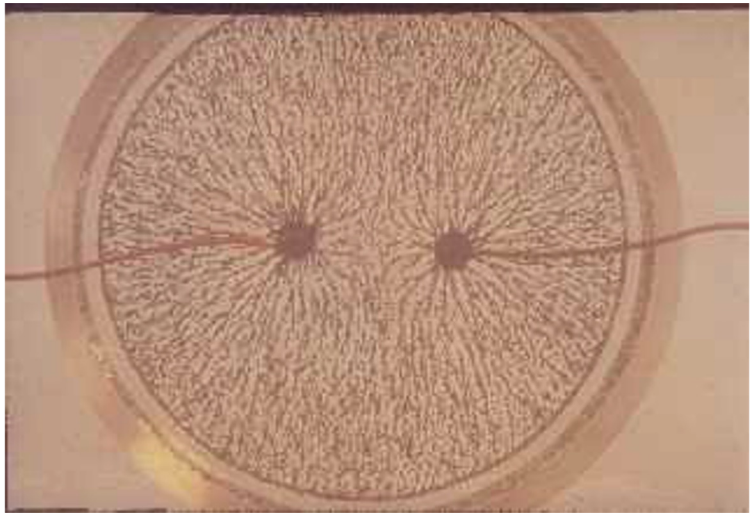
单个点电极



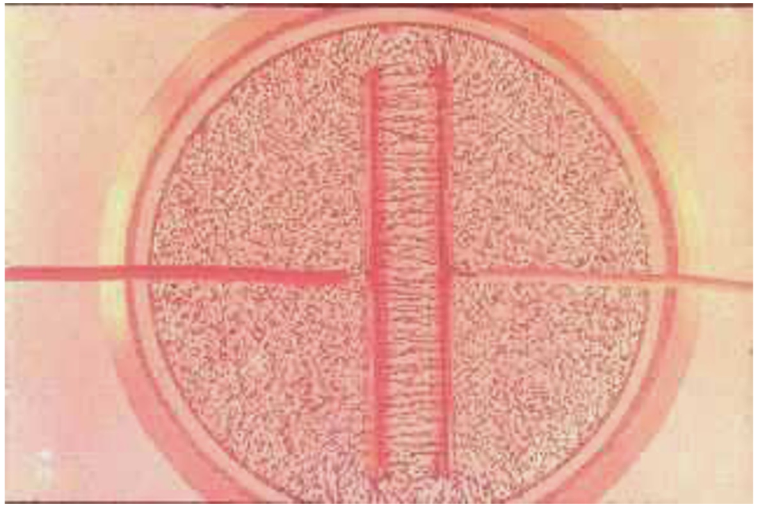
单个带电平板电极



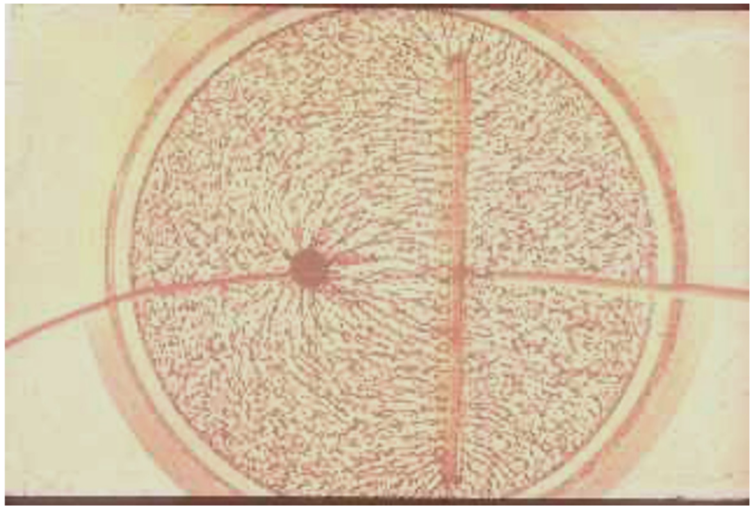
带异号电的点电极



带同号电的点电极



带异号电的平行平板电极

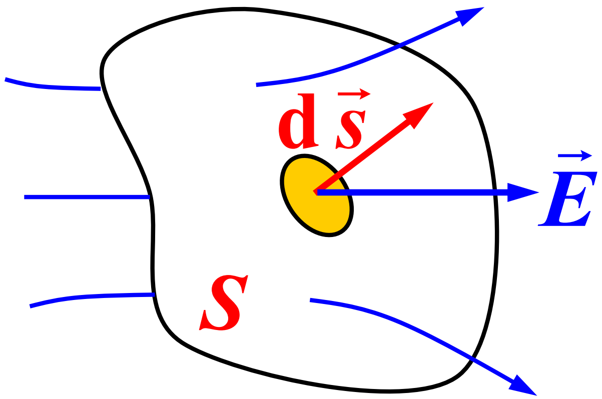


带异号电的点电极和平板电极

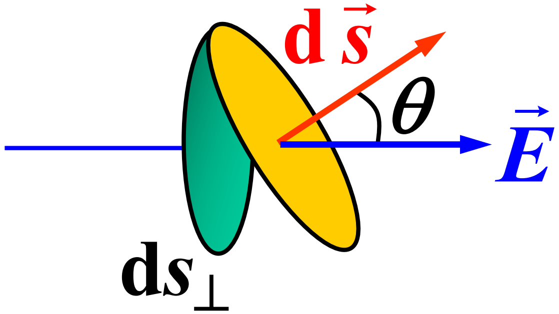
【演示】

二. 电通量Φ_e

定义：$\boxed{\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}}$



- Φ_e 是对面而言，不是点函数
- Φ_e 是代数量，有正、负之分
- Φ_e 是穿过 S 面的净电场线数



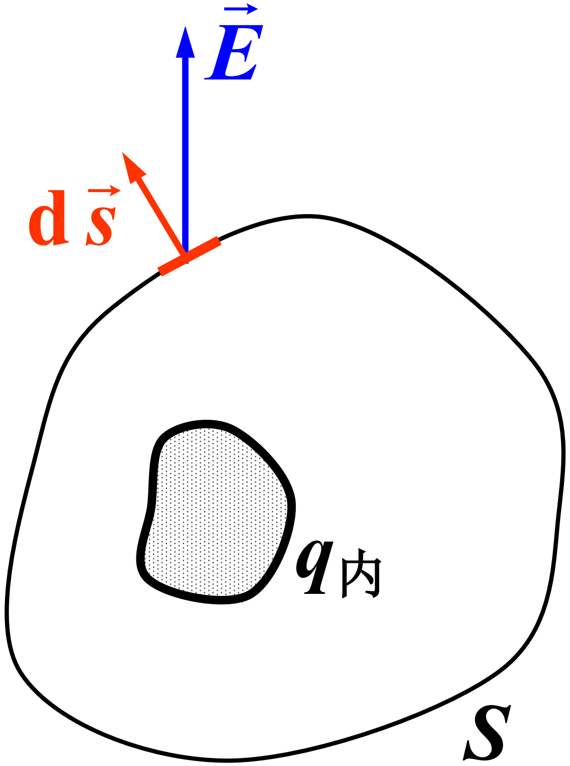
$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = E\cos\theta\cdot\mathrm{d}s$$

$$= E\cdot\mathrm{d}s_\perp = \mathrm{d}N$$

对闭合曲面 $\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

约定：闭合曲面的外法线方向为正。

§ 12.6 高斯定理

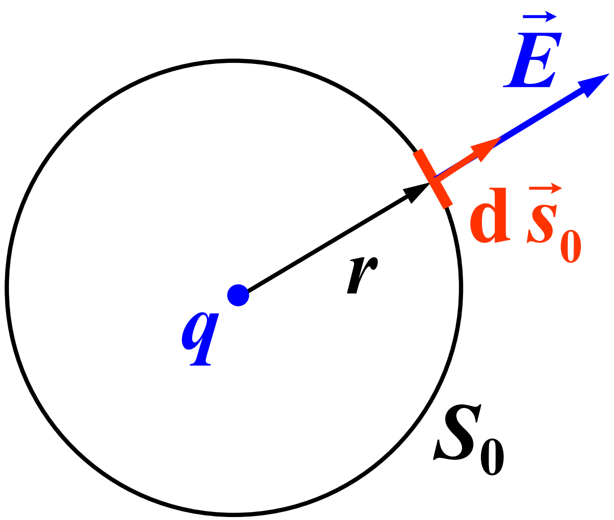


$$\boxed{\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

静电场中，通过任意一个闭合曲面 S 的电通量 Φ_e，等于该曲面所包围的电量的代数和除以 ε_0。

【证明】分四步进行：

1. 求以点电荷为球心的球面的 Φ_e



$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_{S_0} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}_0 = \oint\!\!\oint_{S_0} \frac{q\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{s}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

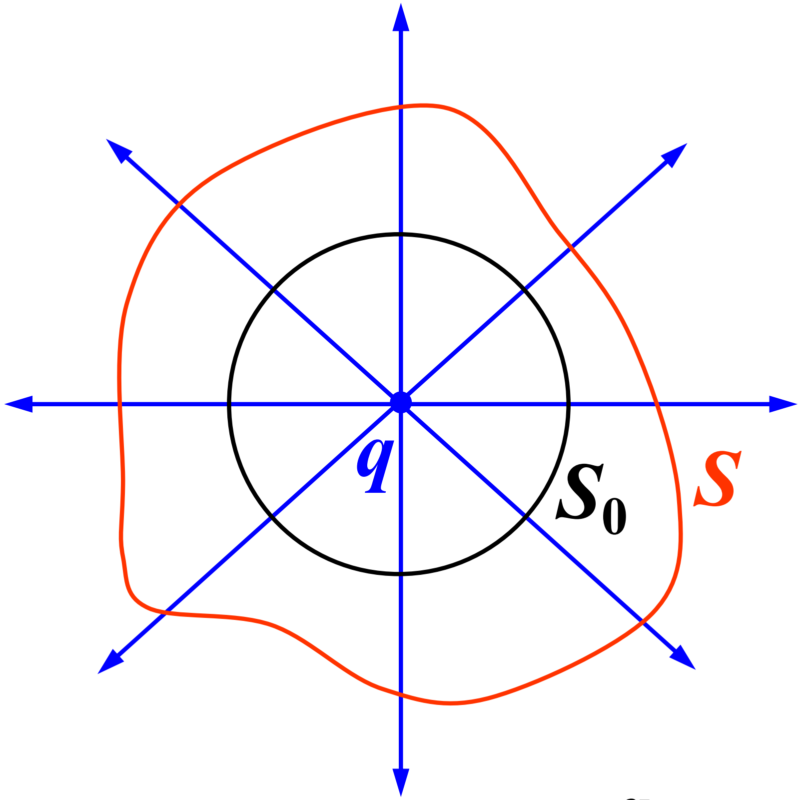
$$= \oint\!\!\oint_{S_0} \frac{q\cdot \mathrm{d}s_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

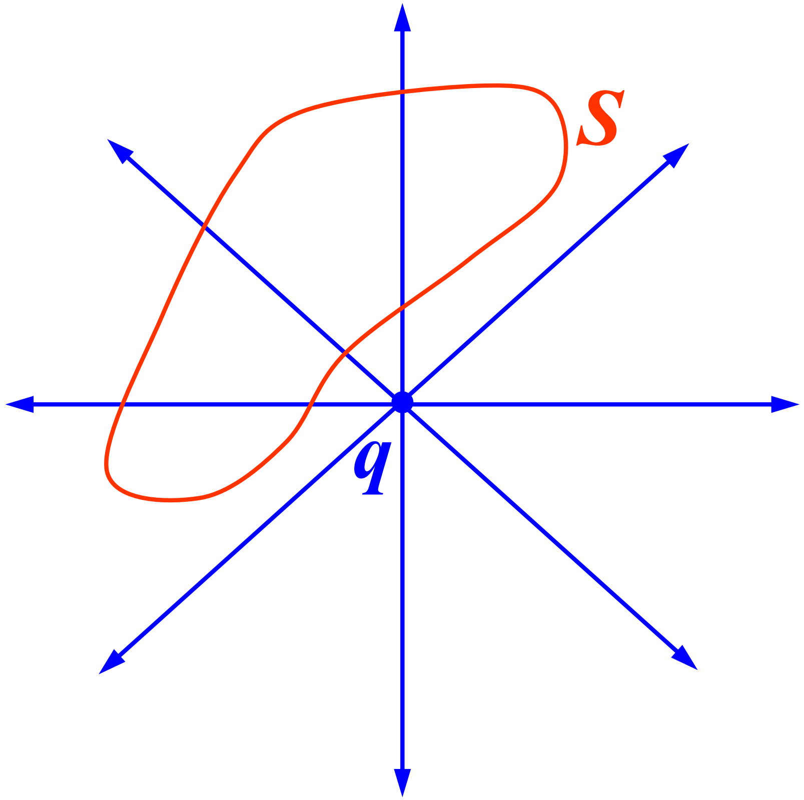
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由此可知：点电荷电场对球面的 Φ_e 与 r 无关，

即各球面的 Φ_e 连续 $\Rightarrow$ 点电荷的 $\vec{E}$ 线连续。

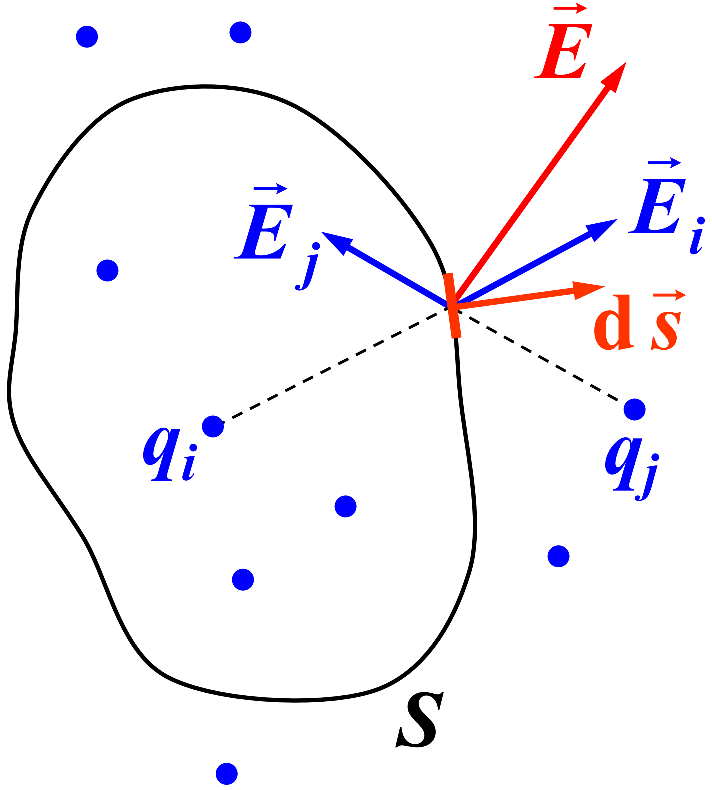
2. 求点电荷场中任意曲面的电通量





$$\Phi_e = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0}, & q \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0, & q \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases}$$

3. 求点电荷系电场中任意闭合曲面的电通量



$$\vec{E} = \sum_{i} \vec{E}_i + \sum_{j} \vec{E}_j$$

（S内）　（S外）

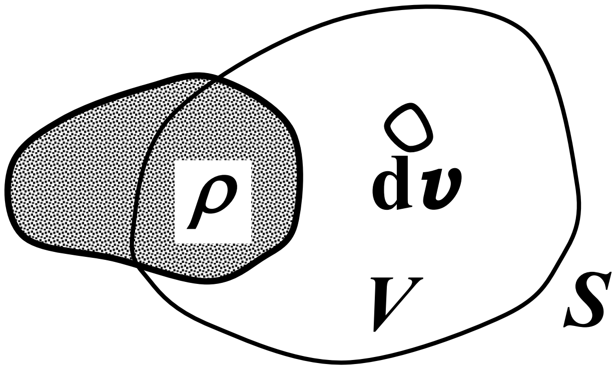
$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

$$= \oint\!\!\oint_S (\sum_i \vec{E}_i)\cdot \mathrm{d}\,\vec{s} + \oint\!\!\oint_S (\sum_j \vec{E}_j \cdot \mathrm{d}\,\vec{s})$$

$$= \sum_i \oint\!\!\oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} + \sum_j \oint\!\!\oint_S \vec{E}_j \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_j 0 = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

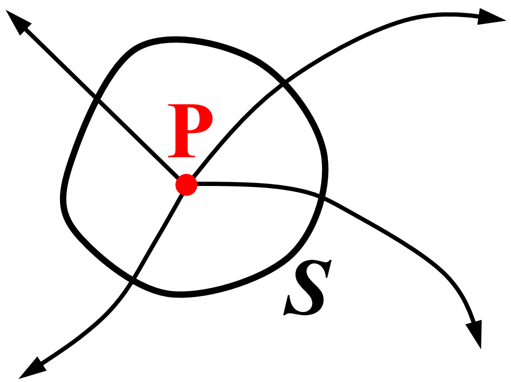
4. 将上面结果推广到任意连续电荷分布情形



$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho \,\mathrm{d}v$$

- 高斯定理是平方反比定律的必然结果。
- Φ_e由 $\sum q_{内}$的值决定，与 $q_{内}$分布无关。
- $\vec{E}$是总场强，它由 $q_{内}$ 和 $q_{外}$ 共同决定。
- 高斯面为几何面，$q_{内}$ 和 $q_{外}$ 总能分清。
- 高斯定理也适用于变化电场。高斯定理源于库仑定律，高于库仑定律，更普适。

【例】由高斯定理证明：电场线发于正电荷，止于负电荷。若空间某处无电荷，但有电场存在，则电场线在此处连续。

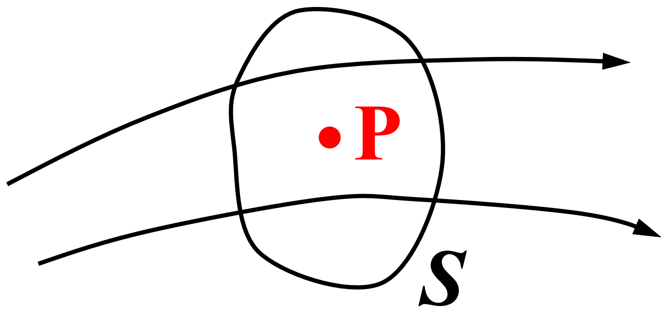


证：设 P 点有电场线发出，

$$\text{则}\ \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} > 0 \ \Rightarrow\ q_{\text{内}} > 0$$

$$\text{令}\ S \to 0,\quad \text{则}\ q_{\text{内}} = q_{\mathrm{P}} > 0$$

同理可证，若 P 点有电场线终止，有 $q_{\mathrm{p}} < 0$ 。



若 P 点无电荷，

则有：$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

即 $N_{入} = N_{出}$

令 $S \to 0$，则 P 点处 $\vec{E}$ 线连续。

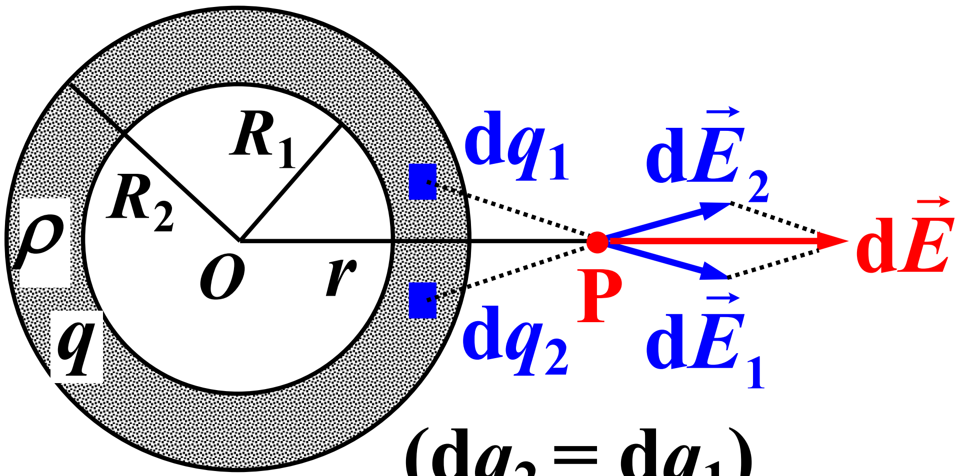
静电场特性之一：静电场是有源场，电荷是静电场的源，静电场的电场线是有头有尾的。

§ 12.7 高斯定理应用举例

$$\text{应用}\begin{cases}\text{求解电场（本节中举例）}\\ \text{分析电场（如导体问题）}\\ \text{由场强求电荷分布（习题中练习）}\end{cases}$$

【例1】已知：均匀带电球壳的ρ或q、R_1、R_2

求：电场强度的分布。



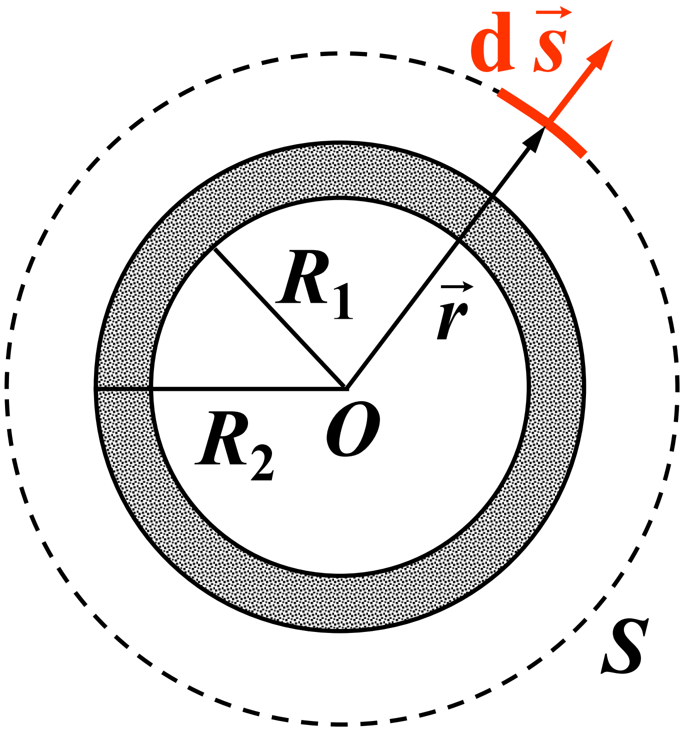
$(\mathrm{d}q_2 = \mathrm{d}q_1)$

解：分析 $\vec{E}$ 的对称性

具有球对称性：

$$\vec{E} = E(r)\cdot\vec{e}_r$$

选高斯面 S 为与带电球壳同心的球面：



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_S E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

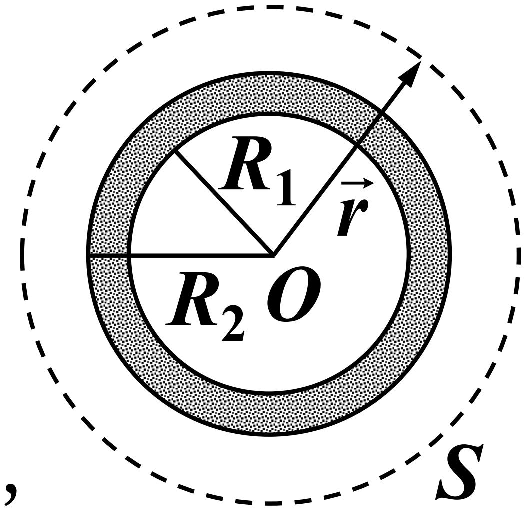
$$= \oint\!\!\!\oint_S E(r)\,\mathrm{d}s$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

$$\overset{}{\underset{（高）}{=\!=}} \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



- $r < R_1$， $q_{内} = 0$， $\vec{E} = 0$
- $R_1 < r < R_2$， $q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho$，

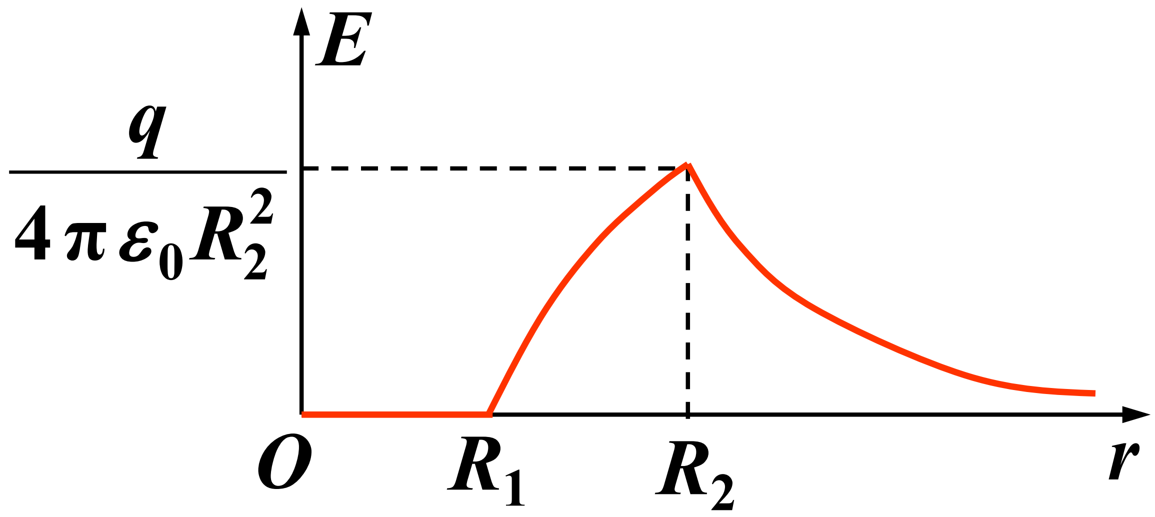
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

- $r > R_2$， $q_{内} = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q$，

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$ （同点电荷的电场）

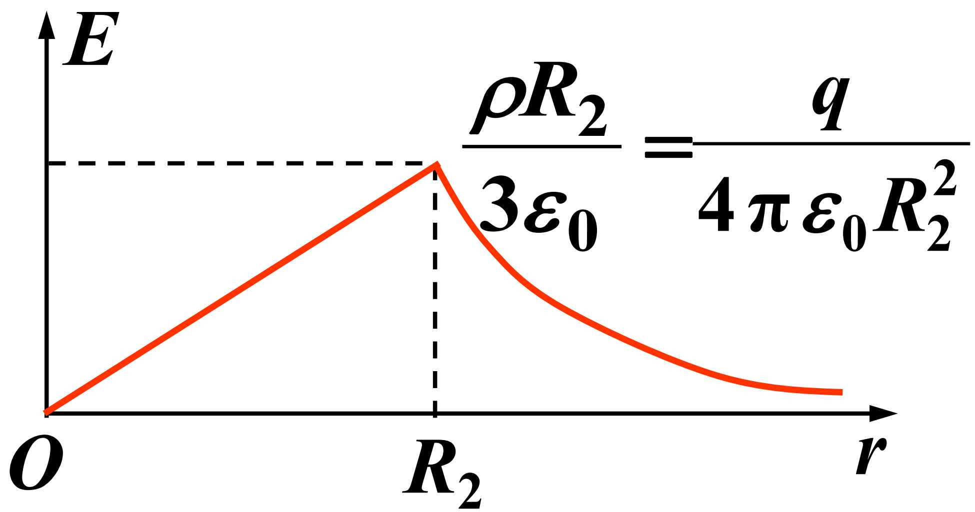
【讨论】

- E 的分布



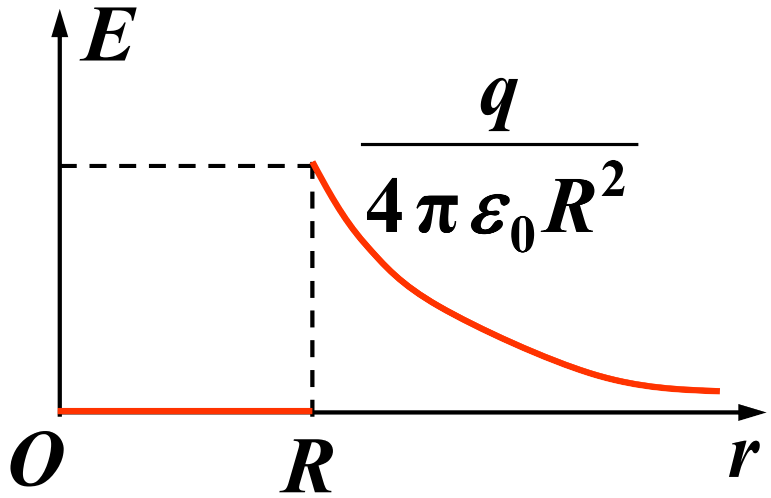
- $R_1 = 0$，变为均匀带电球

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & \text{（球内）} \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{（球外）} \end{cases}$$



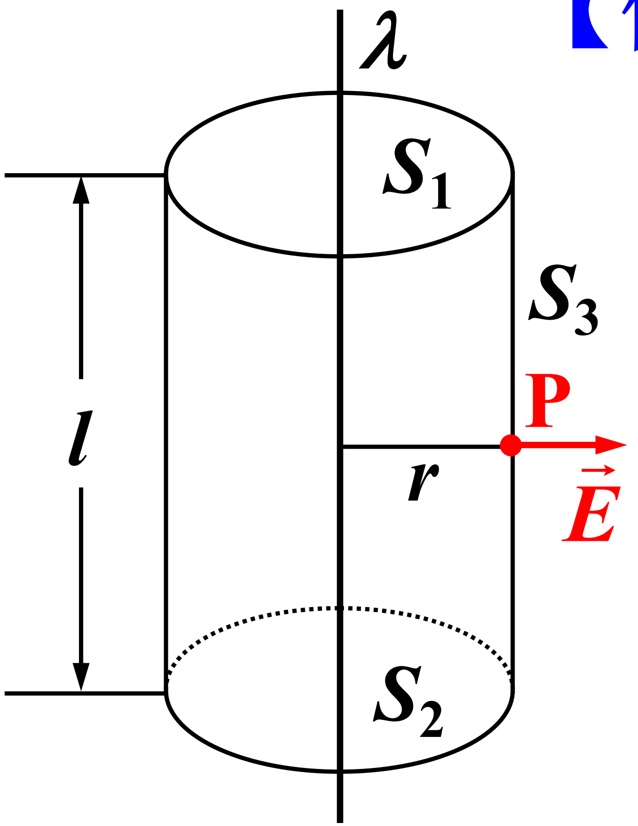
- $R_1 = R_2 = R$，q 不变，变为均匀带电球面

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & （球面内） \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & （球面外） \end{cases}$$



普遍规律：在有面电荷分布的界面两侧，

静电场场强会发生跃变。



【例2】求线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电直线电场

解：分析 $\vec{E}$ 的对称性

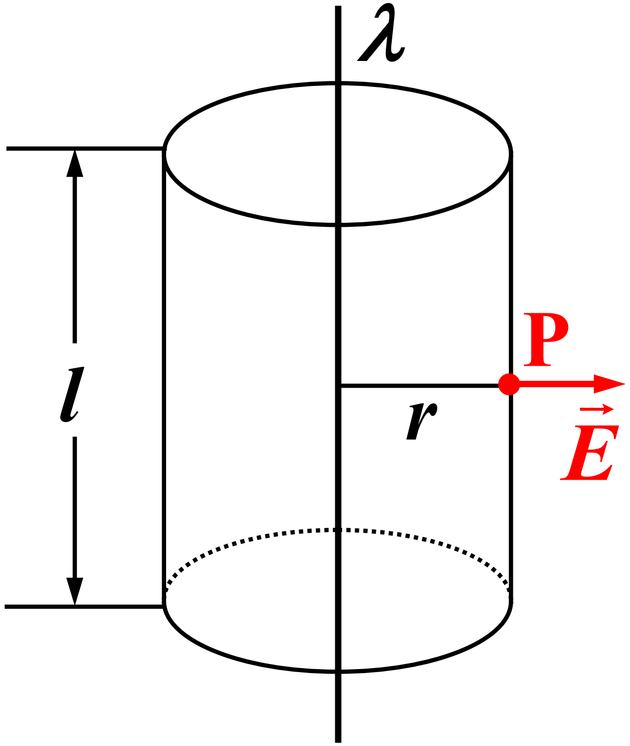
无限长，轴对称：

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

选同轴圆柱面为高斯面 S，

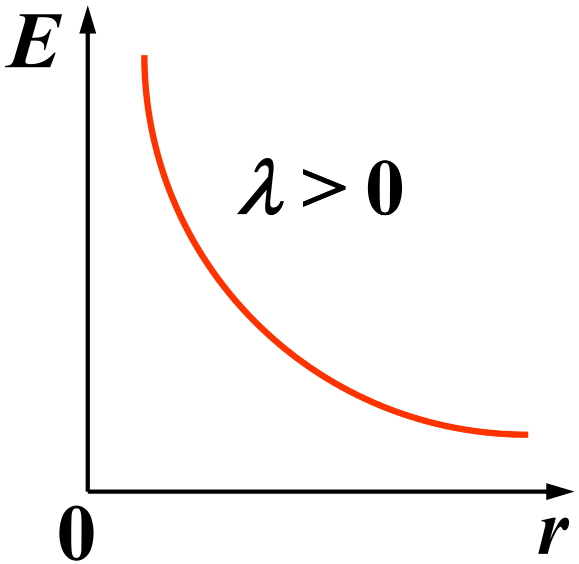
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \iint_{S_3} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= 0 + 0 + E\cdot\iint_{S_3} \mathrm{d}s \quad = E\cdot 2\pi r l$$



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot 2\pi rl \xlongequal[\text{（高）}]{} \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

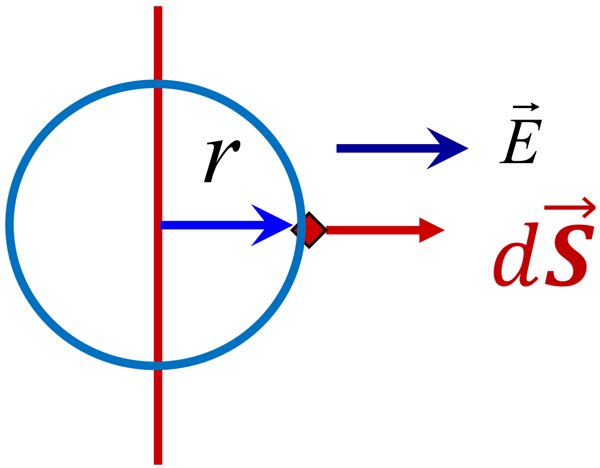
$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$



- E 的分布： $E \propto r^{-1}$

- 所求 $\vec{E}$ 仅由 l 段产生吗？

● 选球为高斯面



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

表面积：$S = 4\pi r^2$

$$ES = E4\pi r^2 = \frac{2r\lambda}{\varepsilon_0}$$

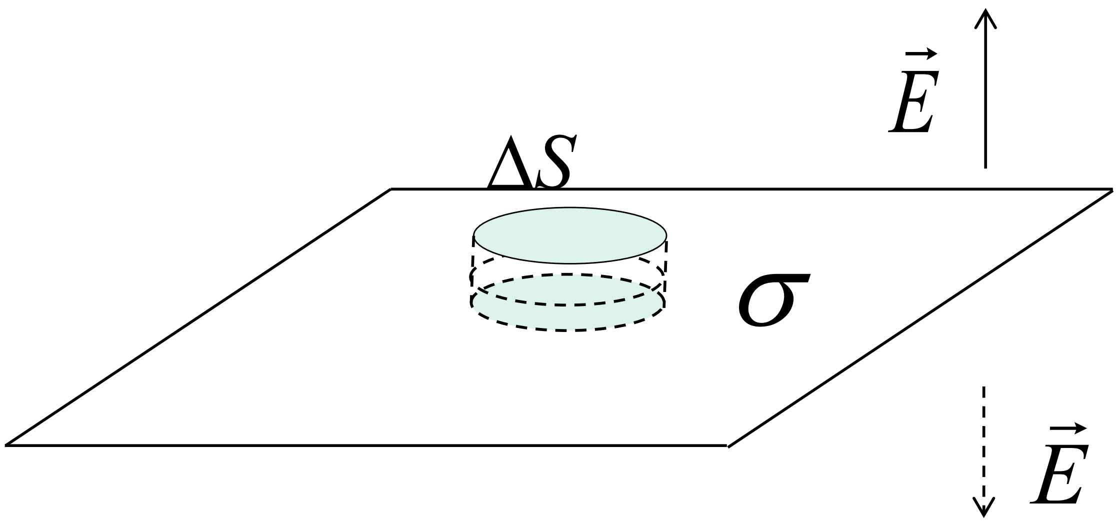
$$\frac{\sum Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2r\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{2r\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

结果是一样的 ??

【例3】无限大平板均匀带电，面电荷密度 σ

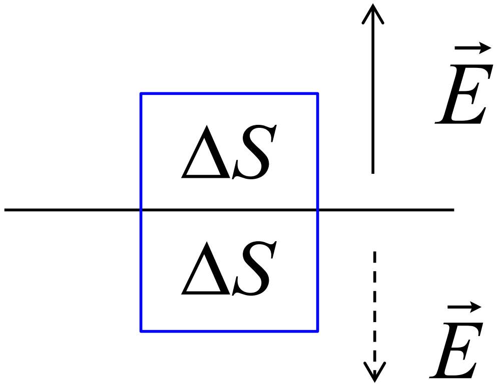
【例3】 无限大平板均匀带电，面电荷密度 σ



$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{\sum Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\sum Q_{in} = \sigma dS$$

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 2EdS$$



$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- $\boldsymbol{\Phi}_e$ 的正、负

应用高斯定理求场强要点：

对象：有球、柱、平面对称性的某些电荷分布

方法：（1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面 S，原则：

- 需通过待求 $\vec{E}$ 的区域；
- 在高斯面的待求 $\vec{E}$ 处：

  $\vec{E} \mathbin{/\!/} \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，使 $\iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E \iint \mathrm{d}s$

- 在高斯面的其余处有：

  $E = 0$ 或 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s}$，使 $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

第十二章作业

12.6, 12.8, 12.10, 12.16, 12.20, 12.21, 12.23, 12.26, 12.27, 12.29, 12.31

【思考】习题12.13

中英文名称对照表

电磁学 — electromagnetism

点电荷 — point charge

电荷守恒定律 — charge conservation law

库仑定律 — Coulomb′s law

真空介电常量 — dielectric constant of vacuum

电场 — electric field

电场强度 — electric field intensity

场强叠加原理 — superposition principle of electric field intensity

电偶极子 — electric dipole

电偶极矩 — electric dipole moment

电场线 — electric field line

电通量 — and electric flux

高斯定理 — Gauss theorem

第十二章结束