高等线性代数 2

第十九讲

正交相似 I

主要内容: 正交相似

伴随

对称变换及其正交对角化

二〇二四年春

设 V 是一个 n 维欧氏空间, 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 是 V 的两组标准正交基. 设 Q 是从 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)Q.$$

则 Q 是一个正交矩阵.

设 φ 是 V 上的一个线性变换. 设 A, B 分别是 φ 在这两组基下的表示矩阵, 则

$$B = Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ.$$

2. 正交相似

定义 1

设 A, B 是两个 n 阶实方阵. 若存在 n 阶正交矩阵 Q 使得

$$B = Q^T A Q,$$

则称 B 与 A 正交相似. 如果实方阵 A 正交相似于一个对角阵, 那么称 A 可正交对角化.

因此, n 维欧氏空间上的一个线性变换在不同的标准正交基下的表示矩阵是正交相似的.

易知, n 阶实矩阵的正交相似是一个等价关系.

3. 可正交对角化的必要条件

设 A 是一个 n 阶实方阵, 且 A 可正交对角化, 即正交相似于一个对角阵 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 则存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^T A Q = D.$$

于是 $A = QDQ^T$ 是一个对称阵, 且 A 的所有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是实数.

我们稍后将证明任意 n 阶实对称阵都正交相似于一个对角阵. 设 A 是一个 n 阶实对称阵, 由第 15 讲命题 1 以及定理 1, A 的特征值都是实数, 且 A 可对角化. 最后只需证明过渡矩阵可以选取为正交阵即可.

为深入理解实对称阵对应的线性变换, 我们首先定义伴随变换.

4. 伴随变换

定义 2

设 V 是一个欧氏空间, 设 φ 是 V 上的一个线性变换. 若 V 上存在线性变换 φ^*, 使得对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$,

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta})),$$

则称 φ^* 是 φ 的一个伴随变换.

定理 1

设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的线性变换. 则 φ 的伴随变换 φ^* 存在且唯一. 而且, 若 φ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵是 A, 则 φ^* 在这组基下的表示矩阵为 A^T.

5. 定理证明

证明: 先考虑唯一性. 设 φ_1^*, φ_2^* 都是 φ 的伴随变换. 则对于任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \varphi_1^*(\boldsymbol{\beta})) = (\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta})).$$

因此, $(\boldsymbol{\alpha}, \varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta})) = 0$. 令 $\boldsymbol{\alpha} = \varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta})$. 则有

$$(\varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta}), \varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta})) = 0.$$

故 $\varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) - \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta}) = 0$, 即 $\varphi_1^*(\boldsymbol{\beta}) = \varphi_2^*(\boldsymbol{\beta})$. 因为该等式对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\beta}$ 成立, 所以 $\varphi_1^* = \varphi_2^*$.

6. 定理证明续

再证存在性. 取 V 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$, 设 φ 在这组基下的表示矩阵是 A. 设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$, 定义 V 到自身的一个映射 φ^* 如下:

$$\boldsymbol{\alpha} \mapsto \varphi^*(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)A^T\mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, 即 $\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标为 $A^T\mathbf{x}$. 易知 φ^* 是 V 上的一个线性变换, 并且对 V 中任意向量

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

都有

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta})).$$

因此, φ^* 是 φ 的伴随变换.

推论 1

设 σ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换. 则 σ 是正交变换当且仅当

$$\sigma\sigma^* = I_V = \sigma^*\sigma.$$

命题 1

设 V 是欧氏空间, φ, ψ 是 V 上的线性变换, $c \in \mathbb{R}$. 则

(1) $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(2) $(c\varphi)^* = c\varphi^*$;

(3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

(4) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

命题 2

设 V 是欧氏空间, φ 是 V 上的线性变换. 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间.

证明: 设 $\boldsymbol{\beta} \in U^{\perp}$. 则对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in U$, 有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta})) = (\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

这说明, $\varphi^*(\boldsymbol{\beta}) \perp U$, 即 $\varphi^*(\boldsymbol{\beta}) \in U^{\perp}$. 因此, $U^{\perp}$ 是 φ^* 的不变子空间.

利用本结论重新证明第 18 讲命题 1.

定义 3

设 V 是欧氏空间, 设 φ 是 V 上的线性变换.

(1) 若 $\varphi^* = \varphi$, 则称 φ 是一个对称变换 (或自伴随变换);

(2) 若 $\varphi^* = -\varphi$, 则称 φ 是一个反对称变换.

由定义可知, 若 φ 在 V 的一组标准正交基下的表示矩阵是 A, 则

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ 是对称变换} &&\Leftrightarrow && A^T = A, \text{ 即 } A \text{ 是对称阵;} \\ &\varphi \text{ 是反对称变换} &&\Leftrightarrow && A^T = -A, \text{ 即 } A \text{ 是反对称阵.} \end{aligned}$$

因此, 给定 n 维欧氏空间的一组标准正交基, V 上的对称变换与 n 阶实对称阵一一对应.

10. 例题 1

例 1: 设 U 是欧氏空间 V 的子空间, π_U 是 V 到 U 的正交投影. 证明 π_U 是对称变换.

证明: 首先有 $V = U \perp U^{\perp}$, 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 设

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \in U$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \in U^{\perp}$. 则

$$(\pi_U(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \pi_U(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1).$$

于是 $(\pi_U(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \pi_U(\boldsymbol{\beta}))$, 即 π_U 是对称变换.

定理 2

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个对称变换. 则 φ 的所有特征值都是实数, 且属于不同特征值的特征向量互相正交.

证明: 取 V 的一组标准正交基, 设 A 是 φ 在这组基下的表示矩阵, 则 A 是实对称阵. 于是 A 的特征值都是实数.

设 λ, μ 是 φ 的两个不同的特征值. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 分别是属于 λ, μ 的特征向量, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\varphi(\boldsymbol{\beta}) = \mu\boldsymbol{\beta}$. 则有

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi(\boldsymbol{\beta})) = \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

于是 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. 由 $\lambda \neq \mu$ 可知 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 即 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

定理 3

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个对称变换. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 是 φ 的所有互不相同的特征值. 则

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t} = V_{\lambda_1} \perp \cdots \perp V_{\lambda_t}.$$

因此, 存在 V 的一组标准正交基使得 φ 在这组基下的表示矩阵是对角阵, 且其主对角线元素是 φ 的所有特征值, 即 φ 可正交对角化.

证明: 已证 φ 可对角化, 于是 $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}$. 再由定理 2, 该直和是一个正交和. 分别取 V_i 的标准正交基, 构成 V 的一组标准正交基, 则 φ 在这组基下的表示矩阵为对角阵.

以下是上述定理的矩阵版本, 即实对称阵的正交相似标准形.

定理 4

设 A 是一个 n 阶实对称阵, 则存在一个 n 阶正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是一个对角阵, 且其主对角线元素为 A 的所有特征值.

证明: 对 A 的阶用数学归纳法. $n=1$ 是结论显然成立. 假设命题对 $n-1$ 阶实对称阵成立. 设 A 是 n 阶实对称矩阵. 由以上结论, A 存在实特征值 λ_1 和特征向量 $\mathbf{v}_1$. 可令 $\mathbf{v}_1$ 为单位向量. 接下来将 $\mathbf{v}_1$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. 令

$$P_1 = (\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n).$$

则 $Q_1 = (\mathbf{v}_1, P_1)$ 是一个正交阵. 计算 $Q_1^TAQ_1$ 如下:

14. 定理证明续

$$
\begin{aligned}
Q_1^T A Q_1 &= (\mathbf{v}_1, P_1)^T A(\mathbf{v}_1, P_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T A \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T A P_1 \\ P_1^T A \mathbf{v}_1 & P_1^T A P_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 & \lambda_1 \mathbf{v}_1^T P_1 \\ \lambda_1 P_1^T \mathbf{v}_1 & P_1^T A P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P_1^T A P_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

由于 $P_1^T A P_1$ 是一个 $n-1$ 阶对称阵, 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q_2 使得 $Q_2^T (P_1^T A P_1) Q_2$ 是一个对角阵, 记为 D. 于是令 $Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$, 则 Q 是一个正交矩阵, 而且

$$
Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P_1^T A P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}
$$

是一个对角阵.

15. 正交相似标准型计算步骤

(1) 计算 A 的特征多项式 $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|$, 并求出 A 的所有互不相同的特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$;

(2) 对每个 $1\le i\le t$, 求线性方程组 $(\lambda_i I-A)\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系, 即特征子空间 V_{λ_i} 的一组基, 再用 Gram–Schmidt 正交化方法, 得到 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\{\gamma_{i1},\cdots,\gamma_{im_i}\}$;

(3) 令 $Q=(\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1m_1},\cdots,\gamma_{t1},\cdots,\gamma_{tm_t})$. 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_t I_{m_t}\end{pmatrix}.$$

例 2: 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是一个对角阵.

解: 首先解得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$. λ_1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T$. λ_2 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,1)^T.$$

对它们用 Gram-Schmidt 正交化可得标准正交基 $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. 故

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; Q^TAQ = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$