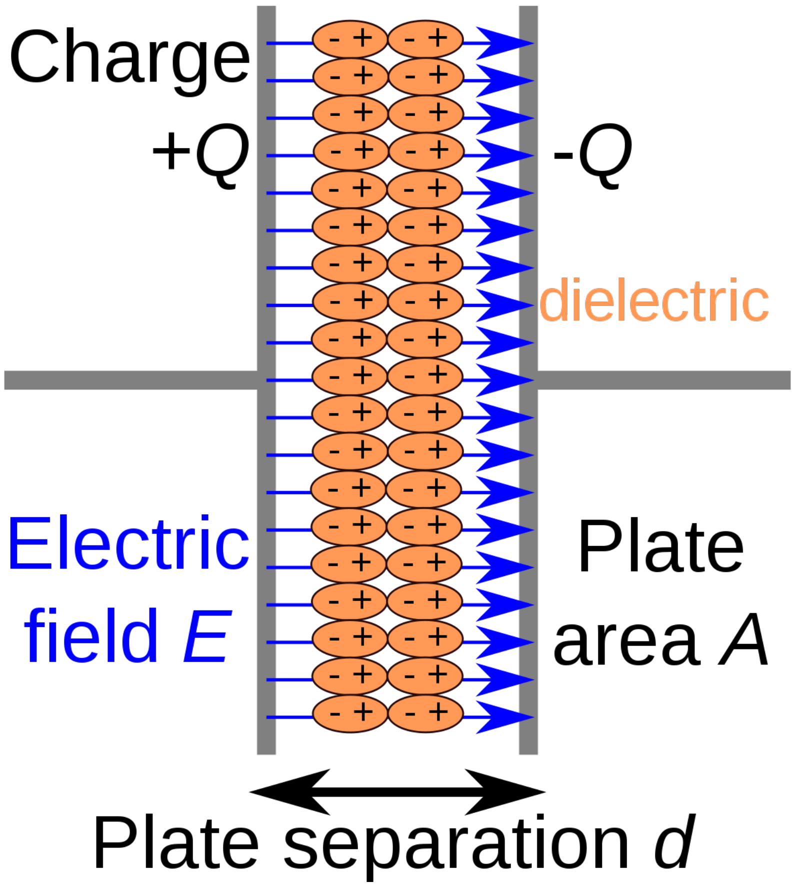
第十五章 静电场中的电介质 (2)



- 极化强度

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$$

李 渭

2024.09.29

上节课内容回顾

- 极化强度 $\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}}$

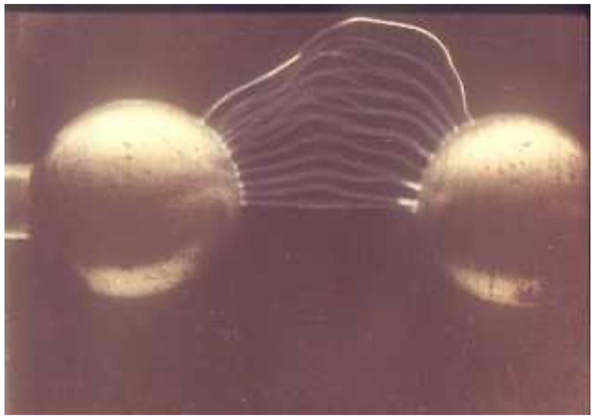
$$\boxed{q'_{内}=-\oiint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\,\vec{s}}$$

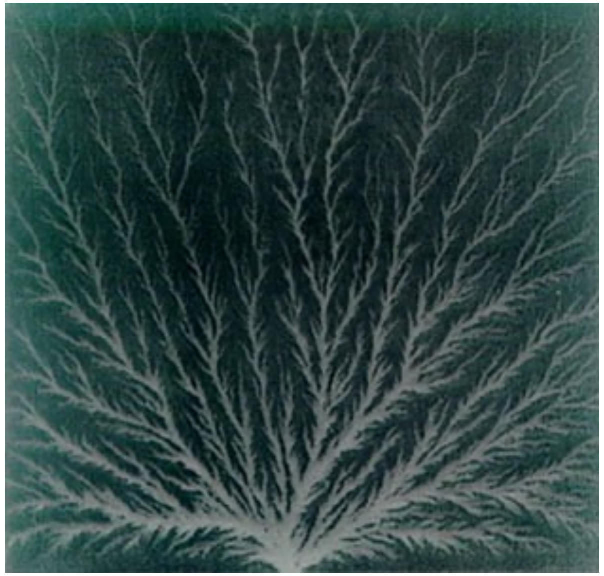
- 极化面电荷密度 $\boxed{\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n}$

七. 电介质的击穿

当外电场很强时，电介质的正负电中心可能被进一步拉开，出现可以自由移动的电荷，电介质就变为导体了，称为电介质击穿。

电介质能承受的最大电场强度称为击穿场强或介电强度，如空气约 3 V/mm。





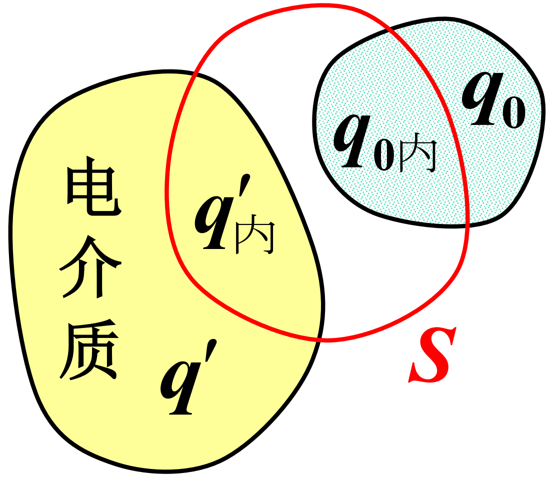
被高压击穿的树脂玻璃

§ 15.2 有介质时静电场的规律

对静电场，有介质存在时，高斯定理和环路定理仍然成立：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0} = \frac{\sum q_{0内} + \sum q'_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



注意：$\vec{E}$ 是所有电荷，即自由电荷 q_0 和极化电荷 q' 产生的总场强。

实际中，自由电荷 q_0 是已知量（如电容器的金属极板所带电量），极化电荷 q' 是未知量，所以直接使用 $\vec{E}$ 的高斯定理并不方便。

修改 $\vec{E}$ 的高斯定理，使之只出现自由电荷项。

一. $\vec{D}$ 的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{0内} + \sum q'_{内}}{\varepsilon_0}, \qquad \sum q'_{内} = -\oiint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\therefore \quad \oiint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \sum q_{0内}$$

定义辅助量电位移矢量：

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$ —— 普适关系

$\vec{D}$ 的高斯定理

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \sum q_{0\text{内}}}$$

电位移矢量对任意封闭曲面的通量，等于该封闭曲面包围的自由电荷的代数和。

微分形式：$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0}$$

注意：$\vec{D}$ 通常情况下和自由电荷分布、极化电荷分布都有关，只当介质的分布满足一定条件时，$\vec{D}$ 才与极化电荷无关。

二. 各向同性线性电介质的规律

$$\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}}$$

在介质中用，

真空中 $\vec{P}=0$

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\,\vec{E}}$$

ε— 介电常数（电容率）

$\vec{P}$，$\vec{E}$，$\vec{D}$ 空间方向一致。

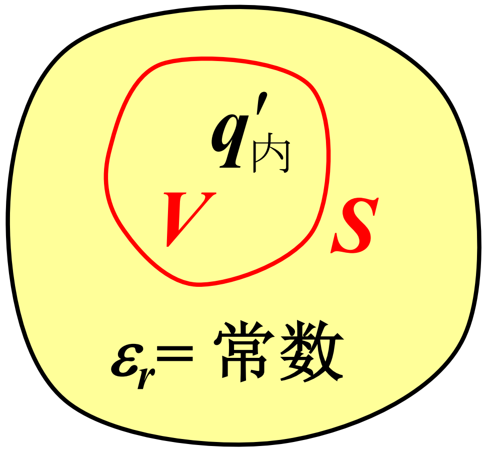
极化电荷分布规律

对均匀各向同性介质，不论其极化是否均匀（$\vec{P}$是否为常矢量），体内自由电荷为零处，极化电荷必然为零：$\rho_0 = 0$ 处 $\rho' = 0$。若体内无自由电荷，极化电荷只能分布在介质表面。

证：对介质内的任一封闭曲面 S（体积 V）：

$$q'_{内} = -\oiint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

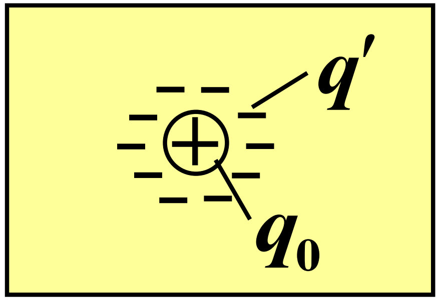
$$\vec{P} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}$$



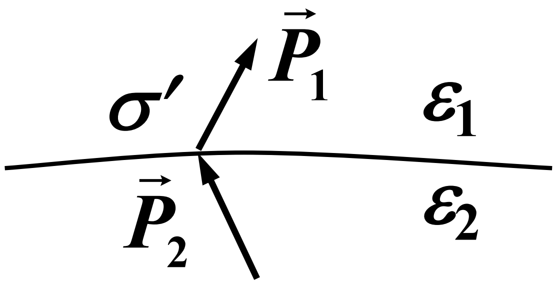
$$\therefore \quad q'_{内} = -\oint\!\!\!\oint_S (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\vec{D}\cdot d\vec{s} = (\frac{1}{\varepsilon_r}-1)\cdot q_{0内}$$

$$\rho' = \lim_{V\to 0}\frac{q'_{内}}{V} = (\frac{1}{\varepsilon_r}-1)\lim_{V\to 0}\frac{q_{0内}}{V} = (\frac{1}{\varepsilon_r}-1)\rho_0$$

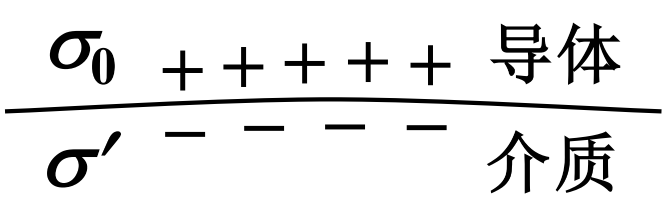
$\therefore \quad \rho_0 = 0$ 处必 $\rho' = 0$



均匀介质内，极化电荷包围自由电荷，起到屏蔽作用。

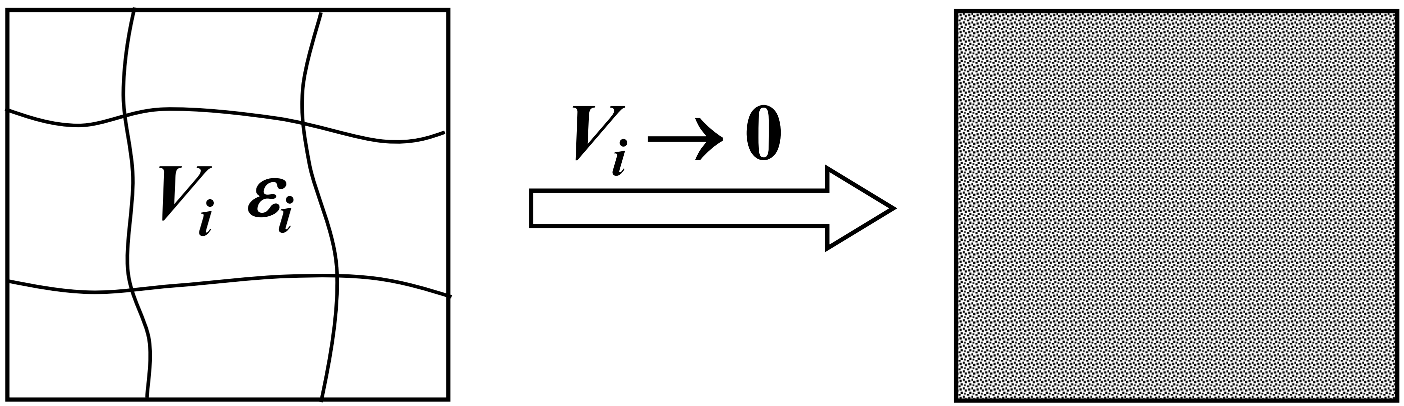


两种不同介质的交界面处，常出现极化面电荷分布。



与带电导体交界处，介质表面出现极化面电荷分布。

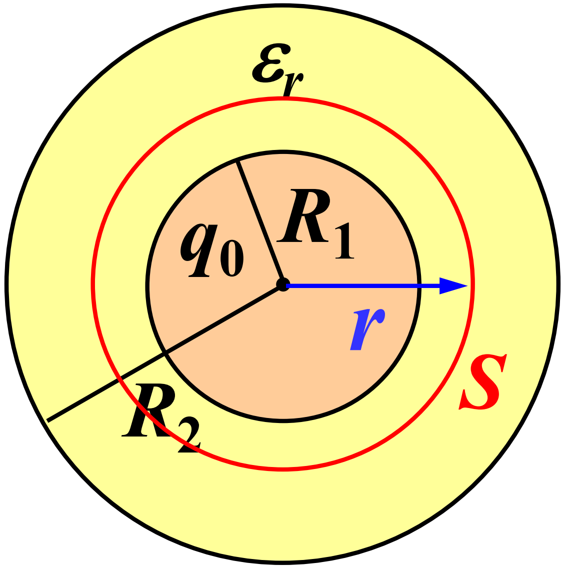
非均匀介质可看成是“体积 $\rightarrow 0$ ”的均匀介质小颗粒的集合：



非均匀介质内部可出现极化体电荷分布。

【例】半径 R_1、电量 q_0 的导体球套均匀介质球壳，外半径 R_2、相对介电常量 ε_r。

求：$\vec{E}$，q' 的分布



解：电场分布

导体球外电场不为零，且呈球对称分布：

$$\vec{D} = D(r)\vec{e}_r$$

在导体球外选高斯面 S：

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = D\cdot 4\pi r^2 = q_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

介质内： $\vec{E}_{内} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \vec{e}_r$

介质外： $\vec{E}_{外} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \dfrac{q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

极化电荷分布

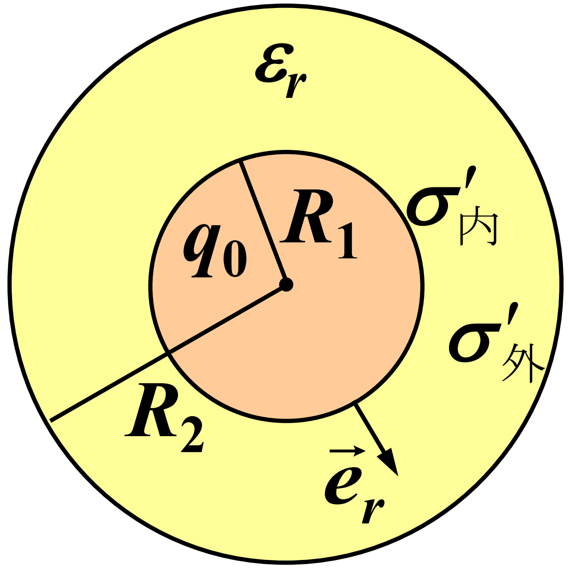
极化强度： $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_{内} = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}) \dfrac{q_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r$

介质内部： 均匀介质， $\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho' = 0$

介质内表面：

$$\sigma'_{内}=P_n\Big|_{r=R_1}=\vec{P}\cdot(-\vec{e}_r)\Big|_{r=R_1}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi R_1^2}$$

$$=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_0$$

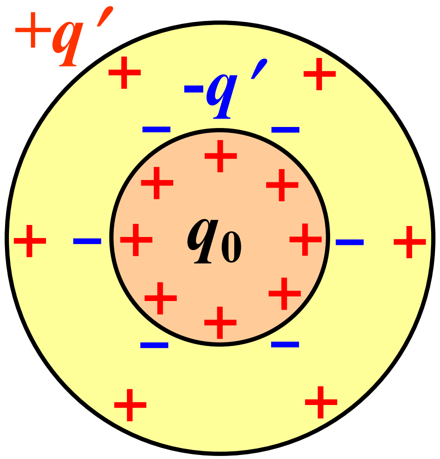


$$q'_{内}=4\pi R_1^2\cdot\sigma'_{内}=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})q_0$$

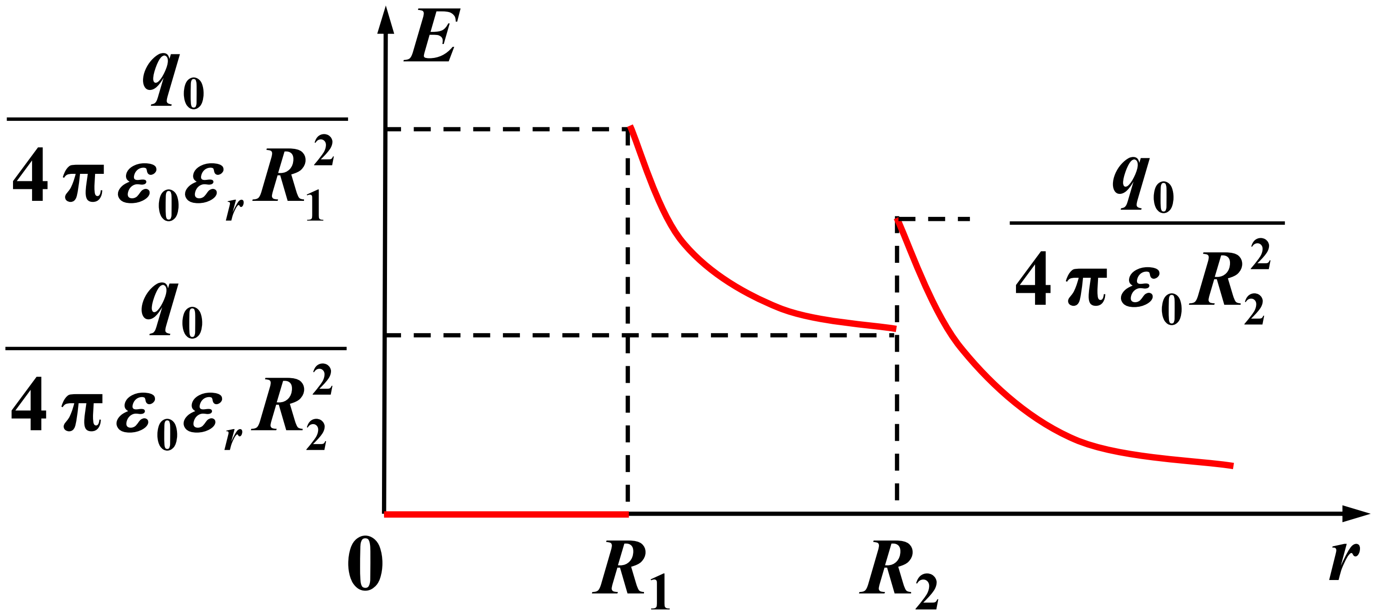
介质外表面：

$$\sigma'_{外}=P_n\Big|_{r=R_2}=\vec{P}\cdot\vec{e}_r\Big|_{r=R_2}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q_0}{4\pi R_2^2}$$

$$q'_{外}=4\pi R_2^2\cdot\sigma'_{外}=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\cdot q_0=-q'_{内}$$

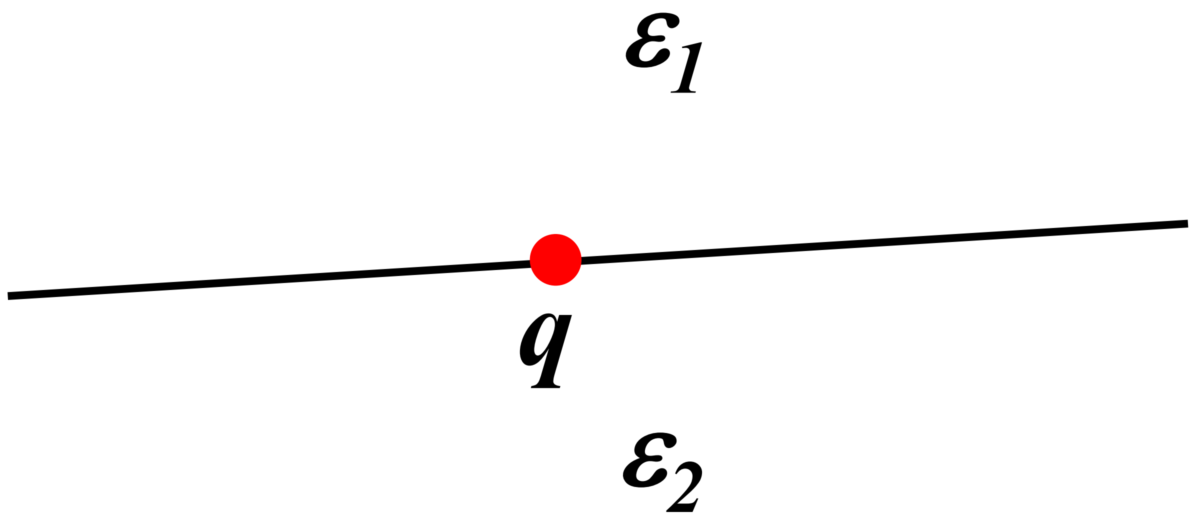


注意：起作用的仍是电场 $\vec{E}$ 而不是 $\vec{D}$，总场强是三个均匀带电球面的电场叠加。



【思考】曲线为何不连续？

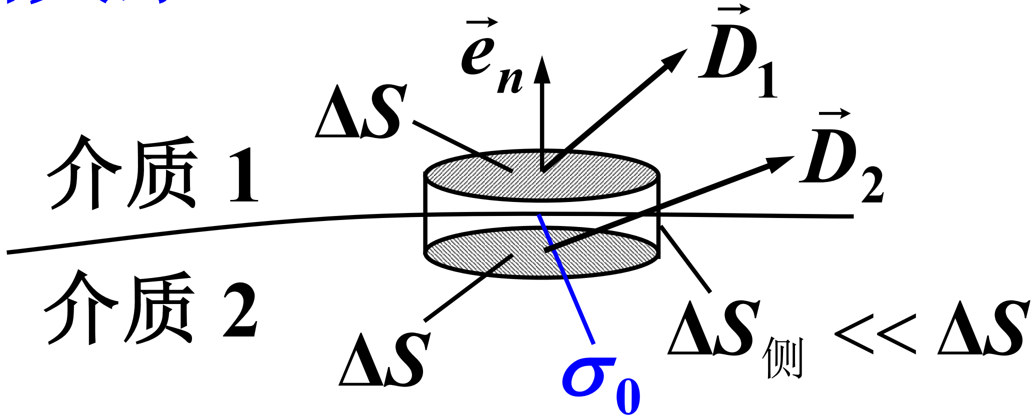
【思考】点电荷q放在下图电介质中，求电场强度分布的特点。



【要点: 考察界面处是否有极化电荷分布，如没有E连续】

三. 静电场的界面关系

1. 法向关系



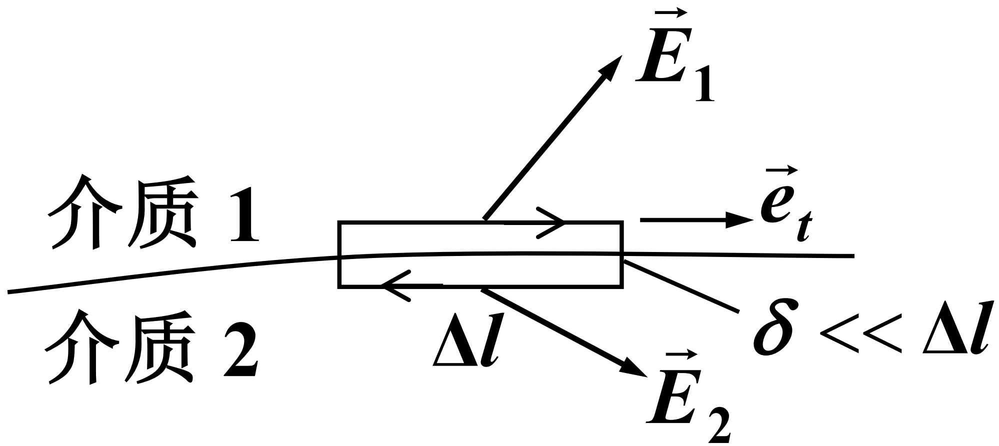
$$\oiint_{小扁柱面} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \vec{D}_1\cdot(\Delta S\,\vec{e}_n)+\vec{D}_2\cdot[\Delta S(-\vec{e}_n)]$$

$$=(D_{1n}-D_{2n})\Delta S \overset{（高）}{=} \sigma_0\Delta S$$

$$\boxed{D_{1n}-D_{2n}=\sigma_0}$$

$\vec{n}$：由介质 2 指向介质 1

2. 切向关系



$$\oint_{\text{小扁矩形}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{E}_1\cdot(\Delta l\cdot\vec{e}_t)+\vec{E}_2\cdot(-\Delta l\cdot\vec{e}_t)$$

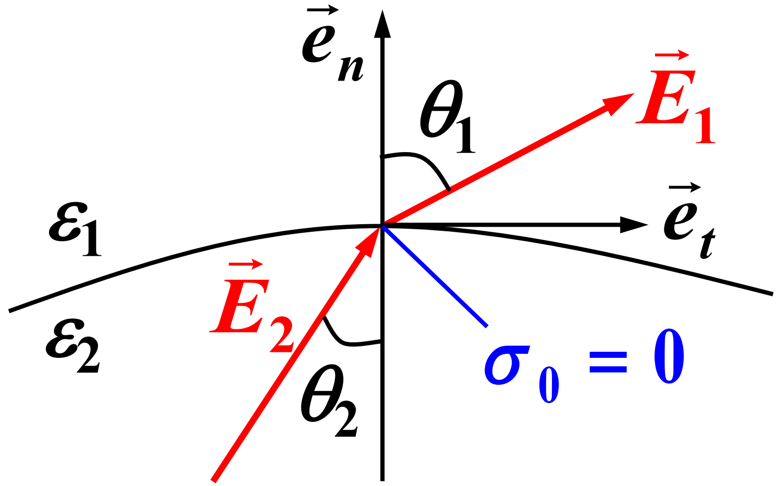
$$=(E_{1t}-E_{2t})\Delta l \overset{（环）}{=} 0$$

$$\boxed{E_{1t}=E_{2t}}$$

3. 各向同性介质交界面

若 $\sigma_0 = 0$，则 $D_{1n} = D_{2n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$

$$E_{1t} = E_{2t}$$



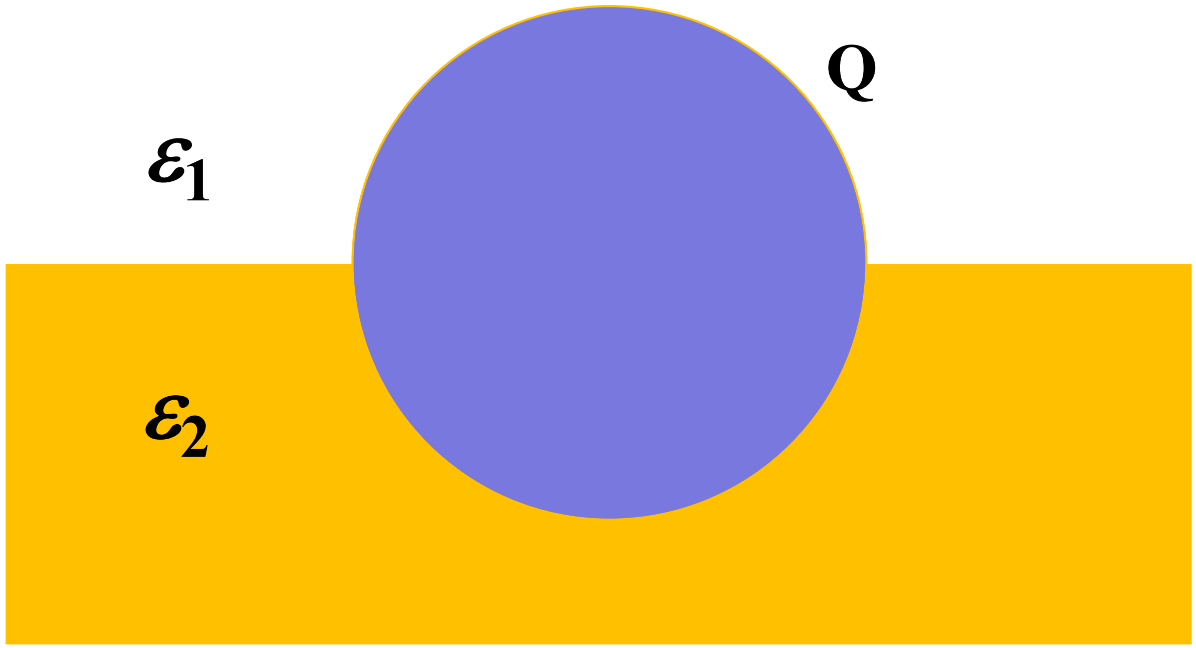
$\vec{E}$ 线的“折射”

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \mathrm{tg}\,\theta_2$$

若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则 $\theta_1 > \theta_2$ — 电场线的“折射”

【思考】习题15.29　E、Q如何分布？



【要点:1. 等势　2. E切向连续】

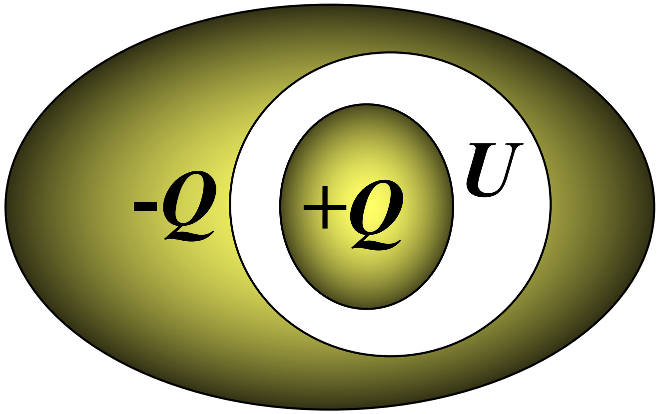
△ § 15.3 电容器及其电容

一. 电容器原理

实验和理论（唯一性定理）表明：

对孤立带电导体存在关系 $\dfrac{Q}{U}=$常数

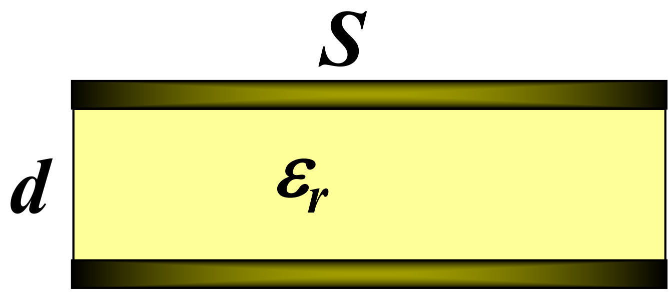
要使其不受外界影响，
可用金属壳对其静电
屏蔽，这就是电容器。



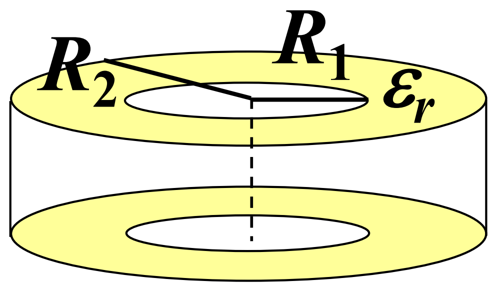
∴ 电容器的电容只取决于电容器的结构。

二. 电容器公式

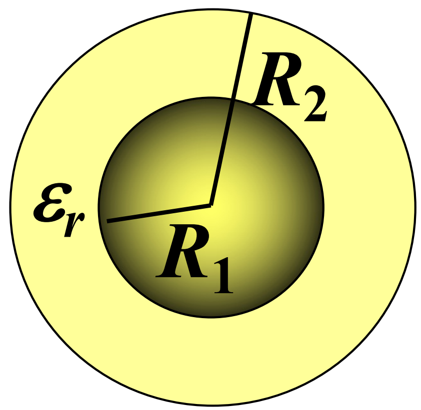
平行板电容器 $$\boxed{C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}$$



圆柱形电容器 $$\boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}}$$



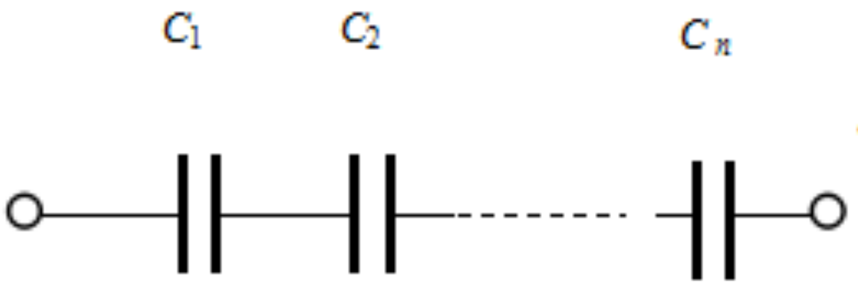
球形电容器 $$\boxed{C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

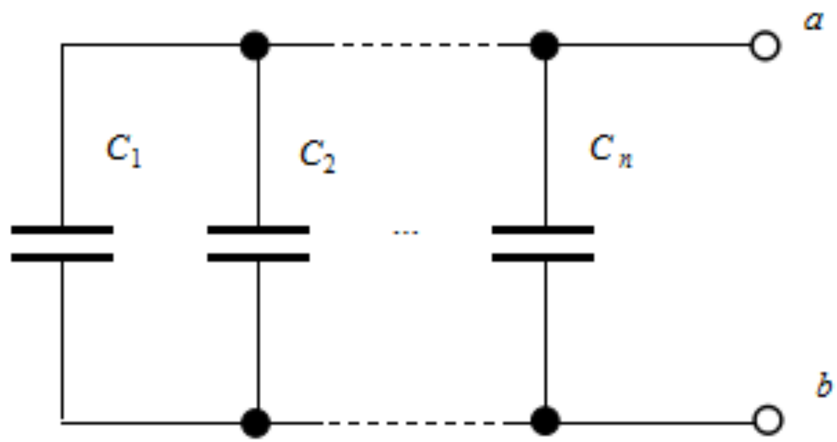


孤立导体球 $$\boxed{C=4\pi\varepsilon_0 R}$$

【计算方法：1. D或E的高斯定理，得到E 2.积分求U 3. C=Q/U】

三. 电容器的串联与并联





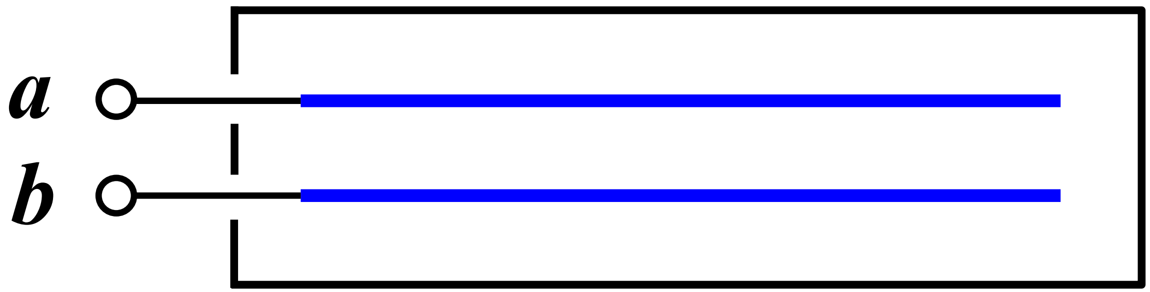
$$\frac{1}{C_{串联}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$ 总电容减小，但是耐压能力增强

$$C_{并联} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$ 总电容增大，耐压能力减小

【思考】

1. 电容器两极板电量不是等量异号时，如何由定义 $C = Q/U$ 计算电容？Q 取何值？

2. 如图，平行板电容器被一金属盒子包围，电容器与金属盒之间绝缘。



问：从 a、b 端看，该系统的电容是否等于平行板电容器的电容？

§15.4 有介质时的静电场能量

一. 电容器存储的能量

定义：使电容器带电，外界如电源做的功，

可通过电容器的充（放）电过程计算。

对放电过程，电场力做功：

$$A=\int \mathrm{d}A=\int -\mathrm{d}q\cdot u=\int_Q^0 -\frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$

$$\boxed{W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU}$$

$U=\varphi_+-\varphi_-$

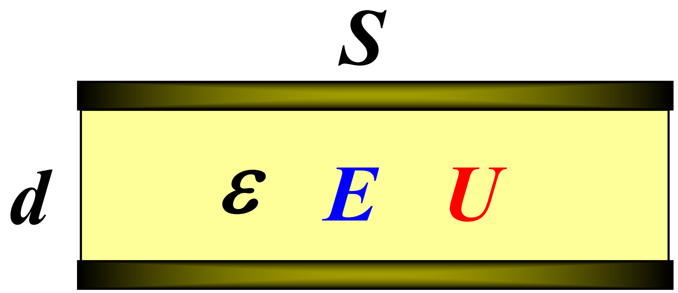
— 极间电压

二. 有介质时的静电场能量

以平行板电容器为例来分析：

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(Sd)$$



能量密度： $w_e=\dfrac{W}{Sd}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2=\dfrac{1}{2}ED$

$$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

— 适用于所有线性介质，包括各向异性线性介质。

在静电场分布的空间 V 中，存储的静电能：

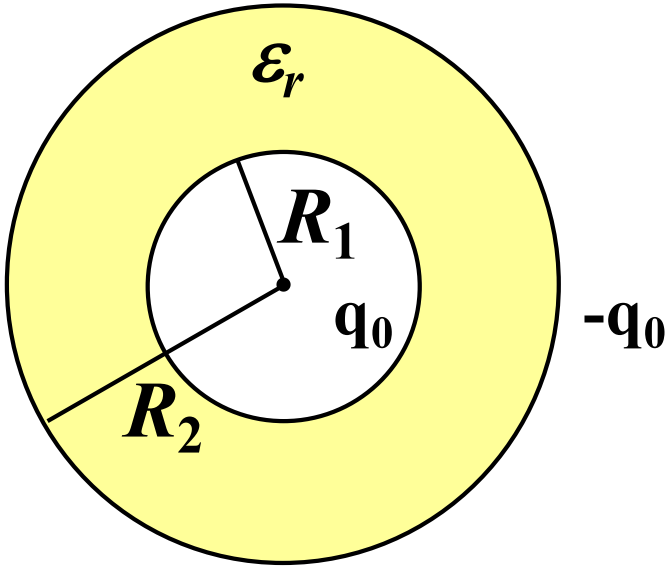
$$W=\iiint\limits_V w_e\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$$

对各向同性线性介质：$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2}$

在真空中：$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$（同第三章结果）

【演示】电容器储能点亮闪光灯

【例】半径分别为 R_1、 R_2 的球形电容器，相对介电常量 ε_r，电量为q_0， 求电场分布，电位移矢量，电容以及能量密度， 静电能。



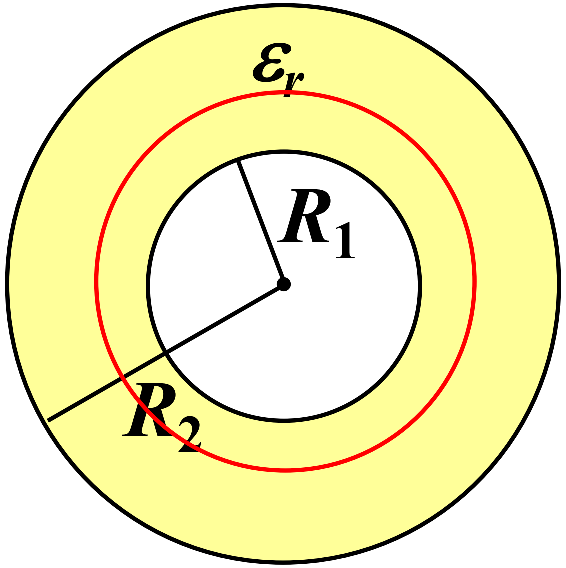
电容的定义：$C = Q/U$　　$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} dr$

$\vec{D}$ 的高斯定理　$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \sum q_{0内}}$

$\vec{E}$ 的高斯定理　$\boxed{\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$

能量密度：$w_e = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = D\cdot 4\pi r^2 = q_0$$



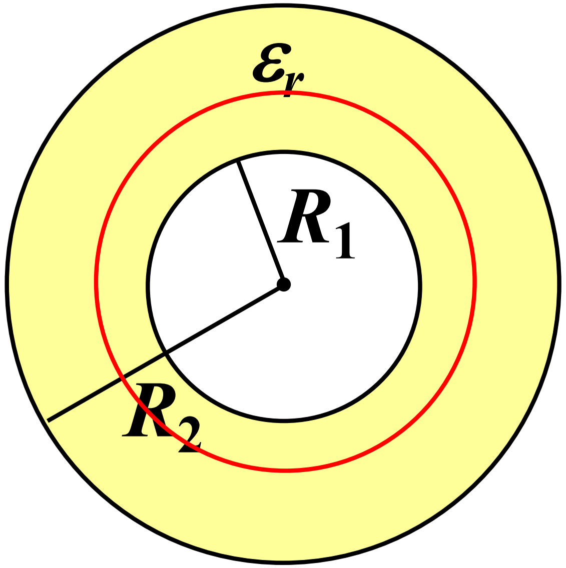
$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\,\vec{E}}$$

$$\vec{E}_{内} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} d\boldsymbol{r}$$

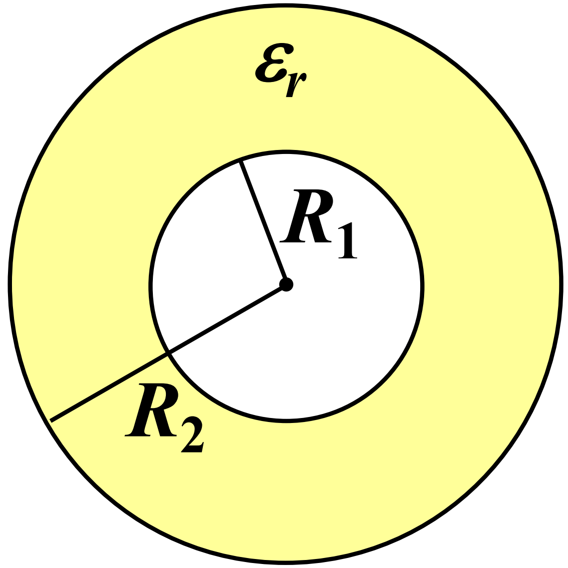


$$U = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{(R_2 - R_1)}{R_2 R_1}$$

电容的定义：$C = Q/U$ $\quad C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU}$$



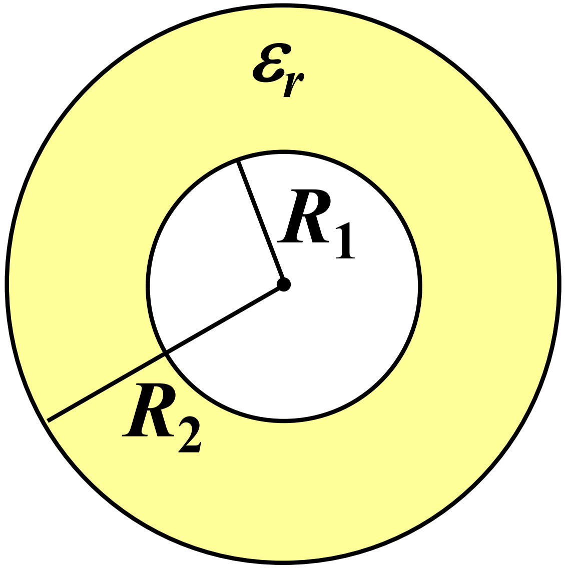
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2 R_1}{R_2 - R_1}, \quad Q = q_0$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{q_0^2\,(R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2 R_1}$$

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E}_{内} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r$$



$$W = \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \, dV = \frac{\varepsilon}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{r^2}\right)^2 r^2 dr=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}dr$$

$$=-\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2}=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{(R_2-R_1)}{R_2R_1}$$

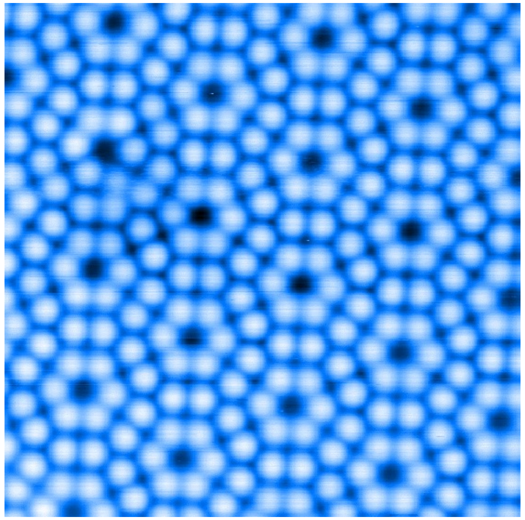
一致！

【思考】能量密度可否直接用W除以球壳体积？

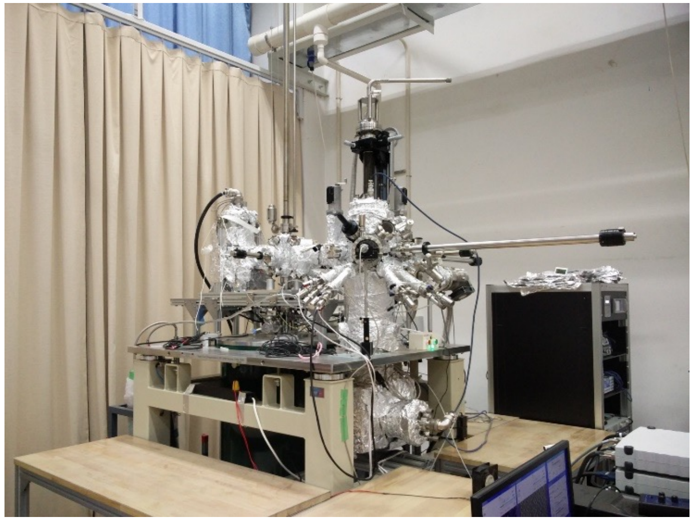
*§15.5 铁电体和压电效应

压电效应 1.可用于精密位移控制：

扫描隧道显微镜，精度好于0.01 nm



硅表面的原子排布



2. 可用做声速测量

【演示】压电效应

第十五章作业（全）

15.2, 15.3, 15.6, 15.14, 15.15, 15.16, 15.25, 15.29

中英文名称对照表

电介质 — dielectric medium

相对介电常数 — relative dielectric constant

极化 — polarization

无极（有极）分子 — nonpolar （polar）molecule

电极化强度 — electric polarization

极化电荷 — polarization charge

散度 — divergence

电容器 — capacitor 电容 — capacity

铁电体 — ferroelectrics

压电效应 — piezoelectric effect

第十五章结束