高等线性代数 2

第二十讲

正交相似 II

主要内容: 主轴定理

谱分解

二〇二四年春

上一讲证明的主要结论为: 任一个实对称阵可正交对角化. 由此可得以下定理.

定理 1

实对称阵的特征值是实对称阵正交相似的全系不变量.

证明: 显然两个正交相似的矩阵有相同特征值. 现假设 A, B 为实对称阵, 且分别正交相似于对角阵

$$D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad D_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1', \cdots, \lambda_n'),$$

其中 $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ 是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的一个排列. 因为通过第一类初等变换交换对角线元素所得矩阵与原矩阵合同, 而且第一类初等阵是正交矩阵, 所以 D_1 与 D_2 正交相似, 故 A 与 B 正交相似.

2. 主轴定理

定理 2

设 $f(x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 是一个 n 元实二次型. 则存在可逆线性变量代换

$$\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$$

将 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

且其中 Q 是一个正交矩阵, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值. 因此, $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数等于 A 的正特征值的个数; 负惯性指数等于 A 的负特征值的个数.

3. 应用: 二次曲面的分类

主轴定理的一个应用是可以给出二次曲面的分类. 设 S 是一个二次曲面, 且它在空间直角坐标系中的方程为:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$
$$+ 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0.$$

该方程的二次项定义了一个三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, 其中 $A = (a_{ij})$. 则由主轴定理可知, 存在一个 3 阶正交阵 Q, 以及线性变量代换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的全部特征值. 换句话说, 存在新的直角坐标系, 使得 S 的方程具有形式

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + 2b_1'x_1 + 2b_2'x_2 + 2b_3'x_3 + c' = 0.$$

4. 推论

推论 1

设 A 是一个 n 阶实对称阵. 则 A 是正定的 (半正定的) 当且仅当 A 的特征值都大于零 (大于等于零). 而且当 A 是正定的 (半正定的) 时, 存在唯一的正定 (半正定) 矩阵 B 使得 $A = B^2$.

证明: 由定理 2, 存在一个 n 阶正交阵 Q 使得

$$Q^T A Q = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值. 因此

$$\begin{aligned} A \text{ 正定 (半正定)} \quad &\Leftrightarrow \quad D \text{ 正定 (半正定)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_i > 0\,(\lambda_i \geq 0),\ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

5. 推论证明

设 A 是正定的 (半正定的). 则

$$
\begin{aligned}
A &= Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,Q^T = Q\left(\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\right)^2 Q^T \\
&= \left(Q\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,Q^T\right)\left(Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,Q^T\right).
\end{aligned}
$$

令 $B = Q\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\,Q^T$. 则 B 是正定的 (半正定的), 而且 $A = B^2$.

唯一性. 若 A 正定, 且 $A = B_1^2 = B_2^2$. 则由教材复习题六的习题 35 可知 $B_1 = B_2$. 或参看证法二 (本讲命题 1).

本结论的推广可参看白皮书 p.536 例 9.61.

例 1: 设 A 是一个三阶实对称矩阵且其特征值为 $0, 3, 3$. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^T$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,0)^T$ 分别是属于特征值 0 与 3 的特征向量. 求矩阵 A.

解: 因为 A 实对称, A 的属于特征值 3 的另一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交. 于是求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

可得 $(x_1, x_2, x_3) = c(-1,-1,2)$, c 任意实数.

所以 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是一组正交基. 将它单位化可得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

令 $P = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$, $B = \mathrm{diag}(0, 3, 3)$. 则

$$A = PBP^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. 例题 2

例 2: 设 A 是 n 阶实对称阵且 $A^3 = I_n$. 证明 $A = I_n$.

证明: 令 λ 是 A 的特征值. 则 $\lambda^3 = 1$. 又因为 λ 是实数, 所以 $\lambda = 1$. 故 A 的特征值全为 1. 由定理 1 可知, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = I_n$. 所以 $A = Q I_n Q^T = I_n$.

9. 例题 3

例 3: 设 A, B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 正定当且仅当 $AB = BA$.

证明: 必要性显然. 现证明充分性. 若 $AB = BA$, 则 AB 是实对称阵. 因为 A 正定, 存在可逆矩阵 C 使得

$$A = C^T C.$$

于是 $AB = C^T CB$ 与 $(C^T)^{-1}(C^T CB)C^T = CBC^T$ 相似. 又因为 CBC^T 是实对称阵, 而且与 B 相合, 由 B 正定可知 CBC^T 也正定. 所以 CBC^T 的特征值都是正实数. 故 AB 的特征值也都是正实数, 所以 AB 正定.

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换. 定义集合

$$\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ 是 } \varphi \text{ 的特征值}\},$$

称为 φ 的谱. 类似可定义一个方阵 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 的谱 $\mathrm{Spec}(A)$.

定理 3

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换. 则 φ 可对角化当且仅当存在分解 (称为 φ 的谱分解)

$$\varphi = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_s\pi_s,$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ 互不相同, π_i 是 V 上非零的线性变换, 且

$$\pi_i^2 = \pi_i, \quad \pi_i\pi_j = 0,\ i \neq j, \quad \pi_1 + \cdots + \pi_s = I_V.$$

证明: $\Rightarrow$. 设 φ 可对角化. 设 $\mathrm{Spec}(\varphi)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_s\}$. 则

$$V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},$$

其中 V_{λ_i} 是 φ 的属于特征值 λ_i 的特征子空间.
对 $1\leq i\leq s$, 记 π_i 是 V 到子空间 V_{λ_i} 的投影变换. 则 π_i 满足

$$\pi_i^2=\pi_i,\quad \pi_i\pi_j=0,\ i\neq j,\quad \pi_1+\cdots+\pi_s=I_V.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^s\boldsymbol{\alpha}_i\in V$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i\in V_{\lambda_i}$, $1\leq i\leq s$. 则有

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\pi_i(\boldsymbol{\alpha})=\big(\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_s\pi_s\big)(\boldsymbol{\alpha}).$$

于是 $\varphi=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_s\pi_s$.

$\Leftarrow$. 设存在非零线性变换 π_i, $1 \leq i \leq s$ 满足

$$\pi_i^2 = \pi_i, \quad \pi_i\pi_j = 0,\ i \neq j, \quad \pi_1 + \cdots + \pi_s = I_V,$$

并且 $\varphi = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_s\pi_s$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ 互不相同. 直接验证可得 $V = \mathrm{Im}\pi_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\pi_s$. 并且对任意 $\boldsymbol{\beta} = \pi_i(\boldsymbol{\alpha})$, 有

$$\varphi(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j\pi_j(\pi_i(\boldsymbol{\alpha})) = \lambda_i\pi_i^2(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_i\pi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_i\boldsymbol{\beta},$$

即 $\boldsymbol{\beta} \in V_{\lambda_i}$. 因此, $\mathrm{Im}\pi_i \subseteq V_{\lambda_i}$. 从而有

$$V = \mathrm{Im}\pi_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\pi_s \subseteq V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

因此, $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. 即 φ 可对角化且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 φ 的所有互不相同的特征值.

类似地, 我们可以得到可对角化矩阵的谱分解.

定理 4

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 阶方阵. 则 A 可对角化当且仅当

$$A = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_s E_s,$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ 互不相同, 并且 $E_1, \cdots, E_s$ 是 $\mathbb{K}$ 上非零 n 阶方阵, 且满足

$$E_i^2 = E_i, \quad E_iE_j = 0,\ i \neq j, \quad E_1 + \cdots + E_s = I_n.$$

定理中的分解式 $A = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_s E_s$ 称为可对角化矩阵 A 的谱分解. 而且该谱分解是唯一的.

推论 2

设 A 是一个 n 阶实方阵. 则 A 是对称阵 $\Leftrightarrow$ A 可正交对角化 $\Leftrightarrow$ $A=\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_sE_s$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是互不相同的实数, 且 $E_1,\cdots,E_s$ 是实对称阵, 满足

$$E_i^2=E_i,\quad E_iE_j=0,\ i\neq j,\quad E_1+\cdots+E_s=I_n.$$

设 A 是一个 n 阶实对称阵. 则 $A=Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,Q^T$, 其中 $Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ 是一个正交矩阵. 于是 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 并得到 A 的分解式

$$A=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots\\ \gamma_n^T\end{pmatrix}=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T+\cdots+\lambda_n\gamma_n\gamma_n^T.$$

15. 例题 4

例 4: 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的谱分解.

解: 已知 $\mathrm{Spec}(A)=\{8,2\}$, 且它们的重数分别是 1 与 2. 分别取 V_8 与 V_2 的标准正交基

$$\{\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T\},\ \{\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T\}.$$

因此, A 的谱分解为

$$A=8\gamma_1\gamma_1^T+2(\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\gamma_2^T\\ \gamma_3^T\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

命题 1

设 φ 是 n 维欧氏空间上的一个半正定对称变换. 则存在唯一的半正定对称变换 ψ 使得 $\varphi = \psi^2$.

证明: 先证存在性. 设 $\varphi = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_t\pi_t$ 是 φ 的谱分解, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \geq 0$ 是 φ 的所有互不相同的特征值, $\pi_1, \cdots, \pi_t$ 是 V 上的对称变换且满足

$$\pi_i\pi_j = \delta_{ij}\pi_i,\ 1 \leq i, j \leq t, \quad \pi_1 + \cdots + \pi_t = I_V,$$

令 $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq t$, 并且定义 $\psi = \mu_1\pi_1 + \cdots + \mu_t\pi_t$. 则 ψ 是半正定的对称变换且

$$\psi^2 = (\mu_1\pi_1+\cdots+\mu_t\pi_t)(\mu_1\pi_1+\cdots+\mu_t\pi_t) = \lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_t\pi_t = \varphi.$$

17. 证明续

再证明唯一性. 设 θ 是 V 上的半正定对称变换也满足 $\theta^2 = \varphi$. 考虑 θ 的谱分解 $\theta = \nu_1\omega_1 + \cdots + \nu_s\omega_s$, 其中 $\nu_1, \cdots, \nu_s \geq 0$ 是 θ 所有互不相同的特征值, $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 是 V 上的对称变换且满足

$$\omega_i\omega_j = \delta_{ij}\omega_i,\ 1 \leq i, j \leq s, \quad \omega_1 + \cdots + \omega_s = I_V.$$

于是 $\varphi = \theta^2 = \nu_1^2\omega_1 + \cdots + \nu_s^2\omega_s$. 因此, $\nu_1^2, \cdots, \nu_s^2$ 是 φ 的所有互不相同的特征值, 且对于 $1 \leq i \leq s$, $\mathrm{Im}\omega_i$ 恰是 φ 的属于特征值 ν_i^2 的特征子空间 $V_{\nu_i^2}$. 因此, $s = t$, 并且经过重新排序后, 可假设 $\lambda_i = \nu_i^2$, $1 \leq i \leq t$. 一方面, $\mathrm{Im}\pi_i = \mathrm{Im}\omega_i = V_{\lambda_i}$. 另一方面, π_i 与 ω_i 都是 V 到 V_{λ_i} 的正交投影. 所以 $\pi_i = \omega_i$. 综上得到, $\theta = \psi$.