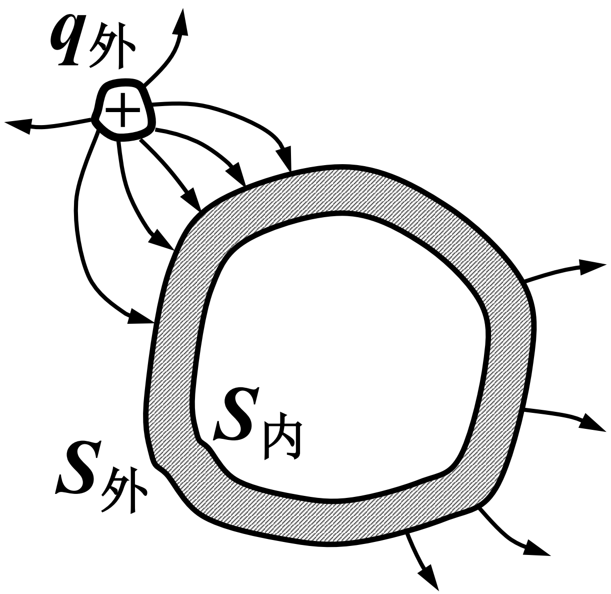
§ 14.5 导体壳和静电屏蔽

封闭导体壳：有内表面 $S_{内}$、外表面 $S_{外}$，

空间分割为腔内、腔外。

一. 腔内无电荷

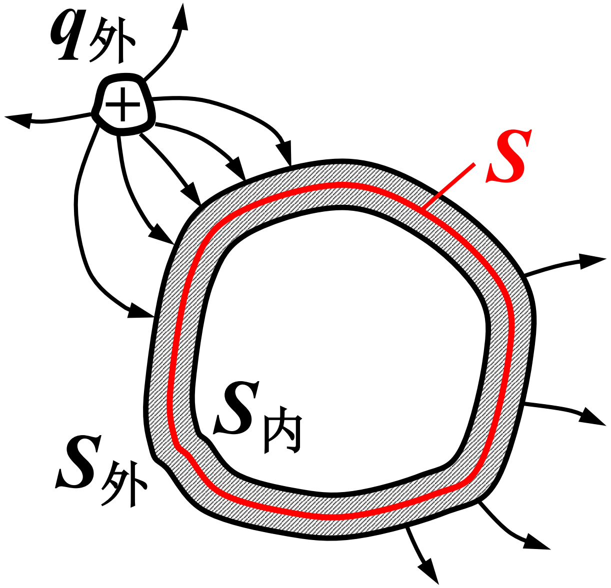


腔内无电荷时，无论腔外有无电荷，腔内电场为零，腔的内表面处处无电荷 —— 内表面的面电荷密度为零：

$$\vec{E}_{内} = 0, \quad \sigma_{内表面} = 0$$

封闭导体壳屏蔽了壳外电荷对壳内的影响。

证明：



在导体中选取高斯面 S 包围空腔，有：

$$\oiint_S \vec{E}_{导体内} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \oiint_{S_内} \sigma_{内表面}\, \mathrm{d}s = 0$$

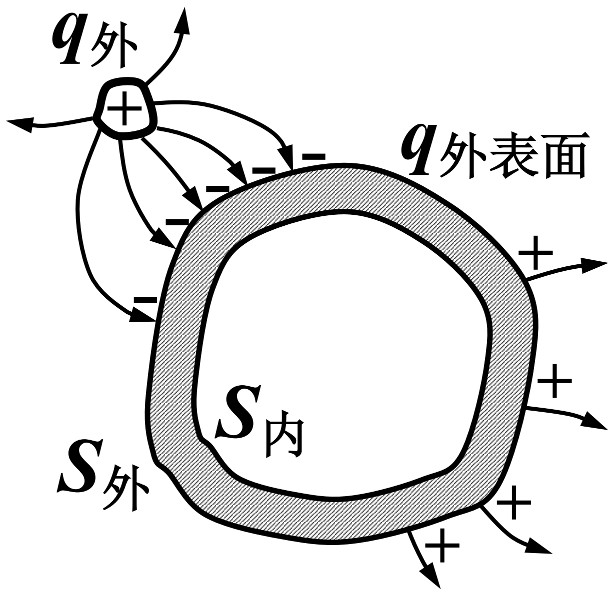
若 $\sigma_{内表面} \neq 0$，则 $\sigma_{内表面}$ 必有正负，则腔内有电场线从正电荷到负电荷，与导体等势矛盾。

$\therefore$ 只能 $\sigma_{内表面} = 0$ 且腔内无电场线，即 $\vec{E}_内 = 0$

注意证明过程并未涉及：

1) 导体壳本身是否带电，2) 腔外是否有电荷

表明：腔内无电荷时，导体壳本身若带有净电荷，则所带净电荷和感应电荷只能分布在腔的外表面上。



【思考】

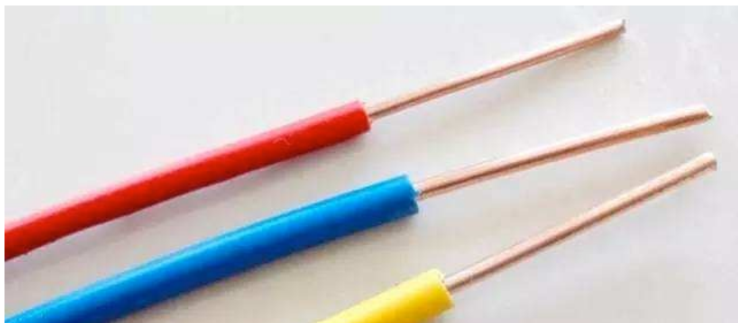
腔外电荷 $q_{外}$ 大小、位置变化会影响腔内吗？

它是如何做到不影响的？

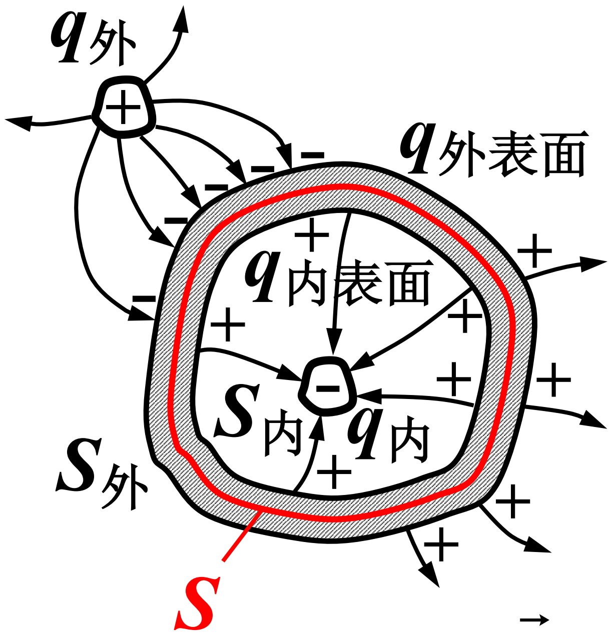
不管腔体外的电荷分布如何，腔体内没有感生电荷的产生，故场强处处为零。

利用此原理，在实验过程中，或者是精密测量过程中，为了不受到外部电荷的影响，会把电路封闭在金属壳内。

传输微弱电信号的导线（屏蔽线），外表也是用金属丝编成的网包围起来的



二. 腔内有电荷



腔内有电荷时，无论腔外有无电荷，腔内电场不为零，腔的内表面会出现与腔内电荷成等量异号关系的感应电荷：

$$\vec{E}_{内} \neq 0, \quad q_{内表面} = \oiint_{S_{内}} \sigma_{内表面} \mathrm{d}s = -q_{内}$$

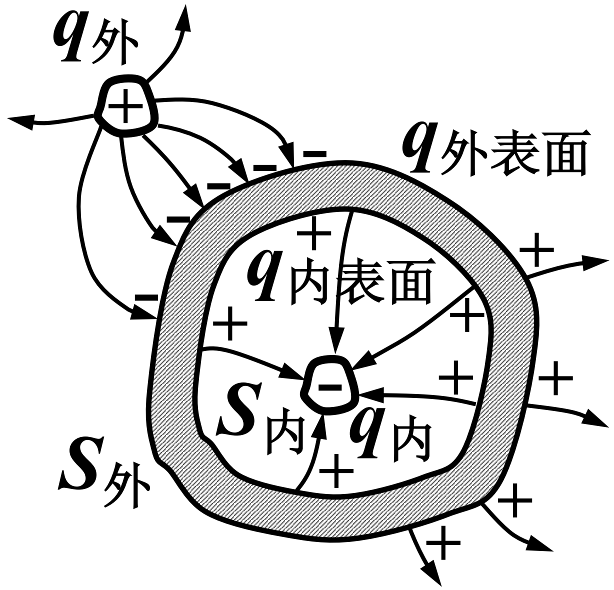
证明： 在导体中选高斯面 S 包围空腔，有：

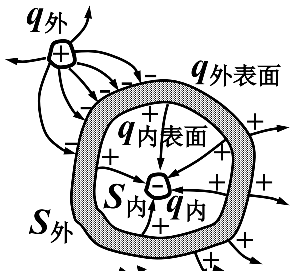
$$\oiint_{S} \vec{E}_{导体内} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{(q_{内} + q_{内表面})}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow q_{内表面} = -q_{内}$$

根据电荷守恒定律：

$q_{内}$ 大小改变，则 $q_{外表面}$ 大小就改变。

封闭导体壳不能屏蔽壳内电荷对壳外的影响。



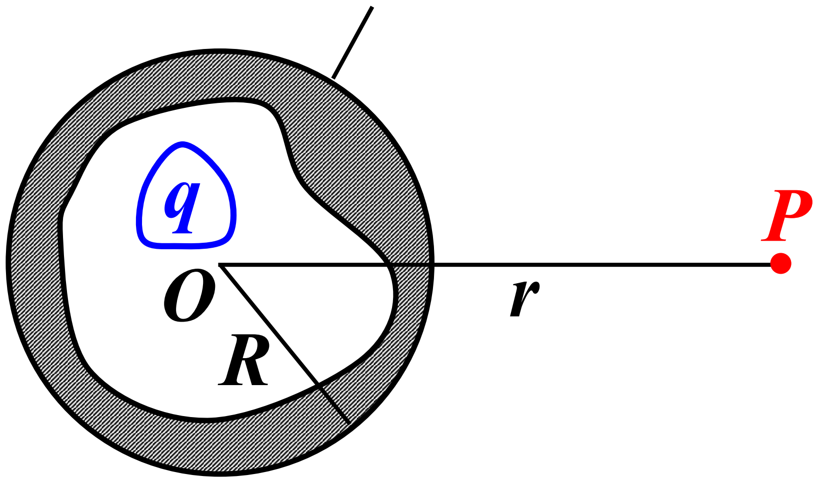


【思考】

1. $q_{内}$ 大小或位置改变，影响 $q_{外表面}$ 分布吗?

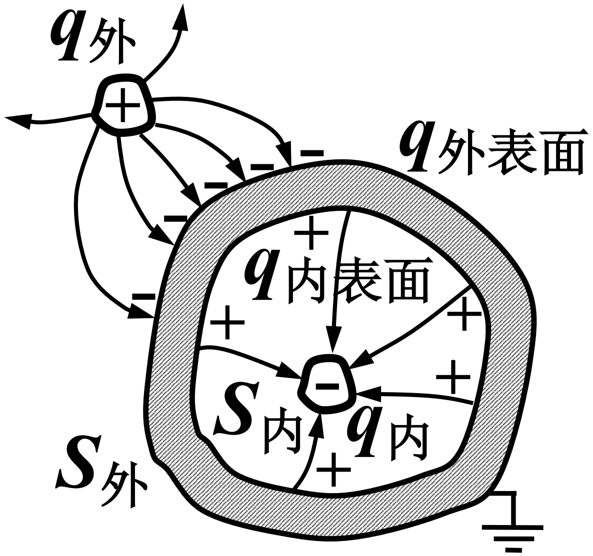
2. $q_{内}$ 大小或位置改变，影响腔外电场吗?

3. 如图，球壳外部 P 点电场等于什么?



三. 接地导体壳

接地导体壳可屏蔽壳内电荷对壳外的影响。



证明：壳外区域的定解条件：

$$\begin{cases} q_{外}\text{大小、位置给定} \\ \varphi_{S_{外}} = 0 \\ \varphi_{\infty} = 0 \end{cases}$$

由于边值条件固定不变，由唯一性定理可知：壳外区域的电场只决定于 $q_{外}$ 的大小和位置，与 $q_{内}$ 大小、位置无关，即 $q_{内}$ 对壳外无影响。

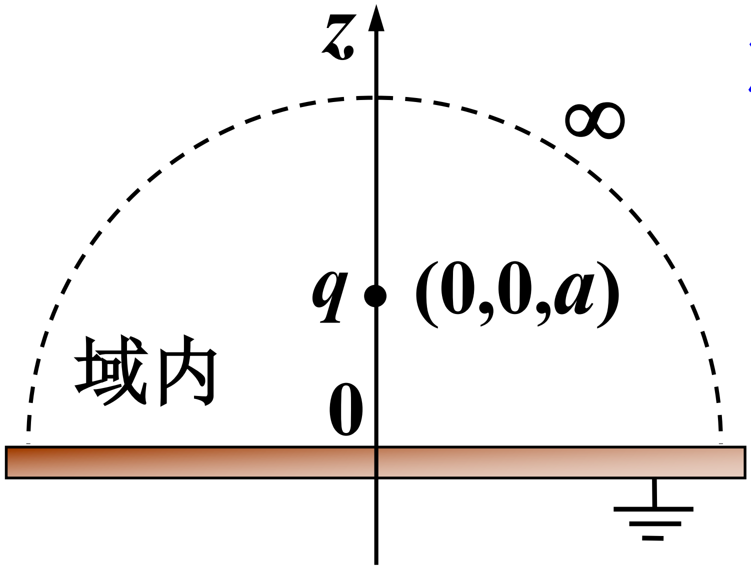
汽车是个静电屏蔽室

【TV】Faraday Cage

§ 14.6 电像法

【例1】点电荷 q 位于 $(0, 0, a)$ 点，$z = 0$ 面为无限大接地导体板，即 $\varphi|_{z=0} = 0$。

求：$z > 0$ 区域的 $\vec{E}$ 和导体板上的 σ'



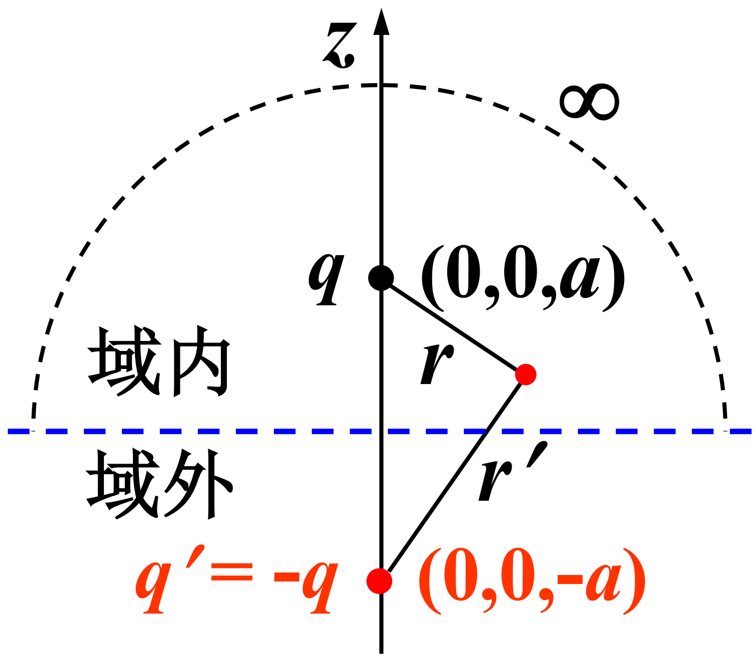
解：定解条件：

域内 q 大小、位置确定，

边值关系 $\begin{cases} \varphi|_{z=0} = 0 \\ \varphi_{\infty} = 0 \end{cases}$

根据唯一性定理，域内（$z > 0$）的解唯一。

去掉导体板，试探在域外 (0, 0, $-a$) 处放电像 $q' = -q$，来等效导体板感应电荷对域内影响。



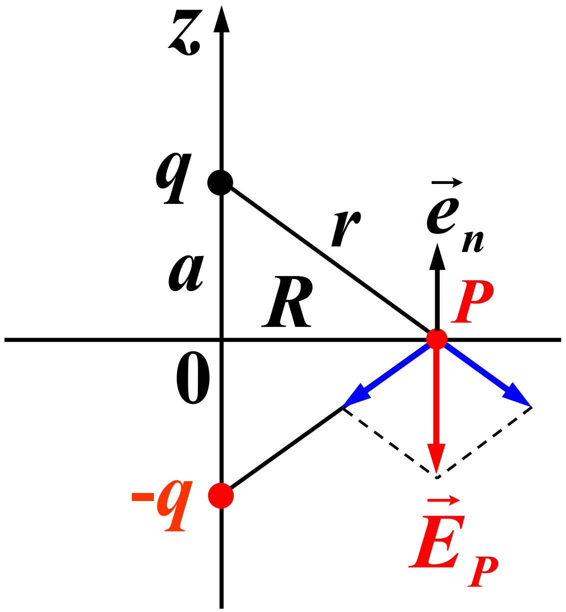
这时边值关系为：

$$\begin{cases} \varphi\big|_{z=0} = (\varphi_q + \varphi_{q'})\big|_{z=0} = 0 \\ \varphi_\infty = 0 \end{cases}$$

∴ 原定解条件不变

q、q' 的合场强：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} - \dfrac{\vec{r}'}{r'^3}\right)$

由唯一性定理，$\vec{E}$ 在域内部分的解即为所求。



导体板表面上 P 点场强：

$$\vec{E}_P = E_P\vec{e}_n = -2\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{a}{r}\vec{e}_n$$

$$= \frac{-qa}{2\pi\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}}\vec{e}_n$$

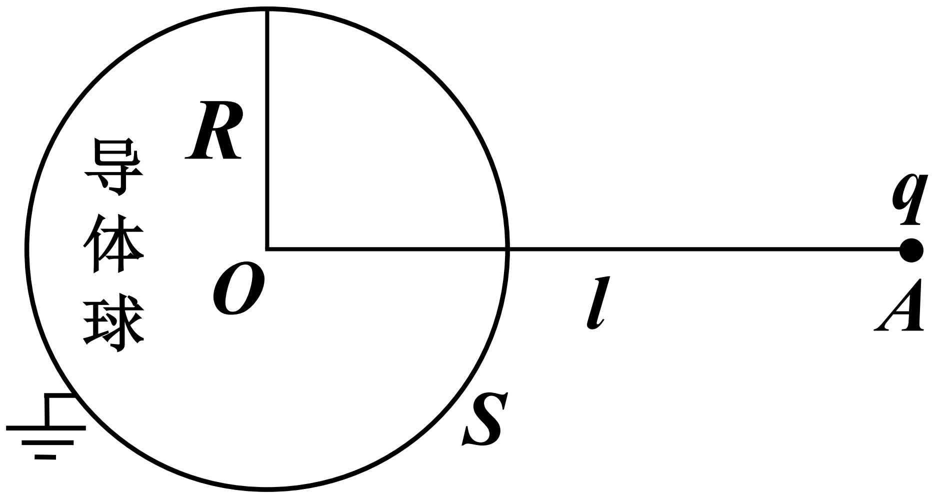
导体板表面的感应电荷面密度：

$$\sigma' = \varepsilon_0 E_P = \frac{-qa}{2\pi(a^2+R^2)^{3/2}}$$

电象法本质：用域外的像电荷来等效边界上的未知电荷对域内的影响，以简化计算。

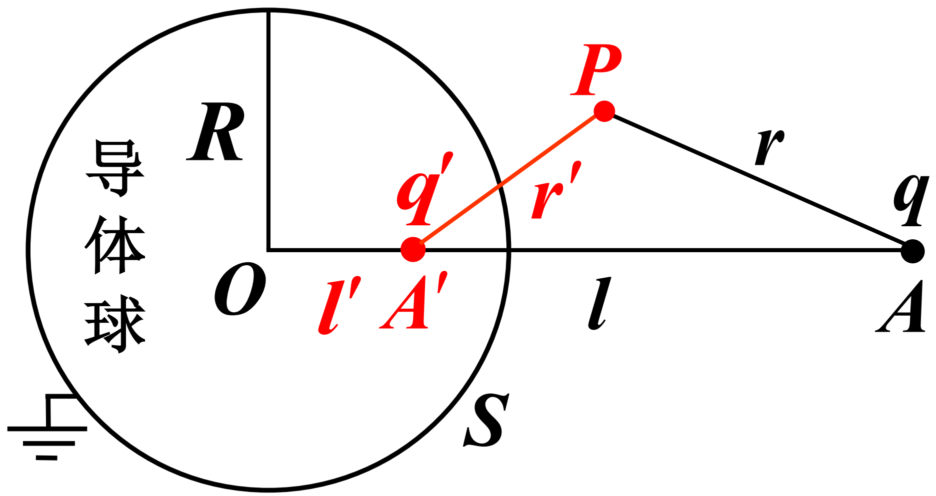
【例2】在半径 R 的接地导体球外 A 点有一点电荷 q，A 点到球心 O 的距离为 l 。

求：球外电势 φ



解：球外电荷给定，边值条件 $\begin{cases} \varphi_S = 0 \\ \varphi_\infty = 0 \end{cases}$

由唯一性定理，球外解唯一。



在导体球内，试探在 OA 连线上的 A' 点放置电像 q'，距离 O 为 l'（$l'<R$）。

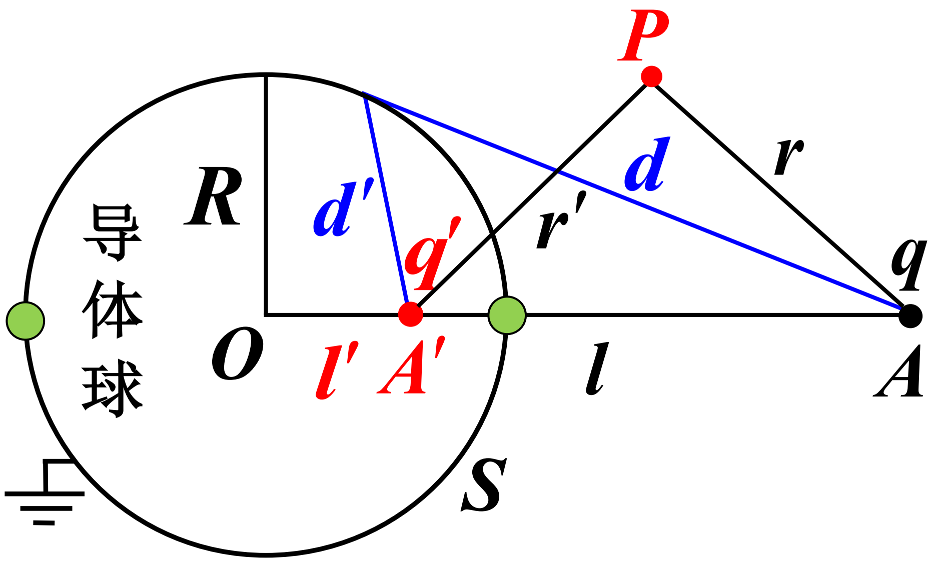
球外电势 $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)$$

该解在域内的部分要想成为所求的解，必需要求它不破坏原定解条件。

只要该解满足 $\varphi_S = 0$， $\varphi_\infty = 0$ 即可。

该解自动满足无限远的边界条件 $\varphi_\infty = 0$ 。

再使该解满足球面上的边界条件 $\varphi_S = 0$：



即 $\left(\dfrac{q}{d} + \dfrac{q'}{d'}\right) = 0$

解得 $\begin{cases} l' = \dfrac{R^2}{l} \\ q' = -\dfrac{R}{l} q \end{cases}$

$\therefore$ 球外电势 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{R}{l}\cdot\dfrac{1}{r'}\right)$

【思考】球不接地呢？

对电像法的说明：

1. 电像法的理论依据是唯一性定理。
2. 电像法的本质是用域外配置的像电荷来等效边界面上未知电荷对域内的影响。
3. 放置电像的原则：不能破坏原定解条件
   - 电像必须放在域外
   - 像电荷和原电荷的总场需满足原边值条件
4. 所需电像可能不止一个。
5. 不是任何情况都能找到电像。

第十四章作业

14.2，14.3，14.4，14.5，14.12

【思考】习题：14.1

中英文名称对照表

导体 — **conductor**

尖端放电 — **point discharge**

唯一性定理 — **uniqueness theorem**

静电屏蔽 — **electrostatic shielding**

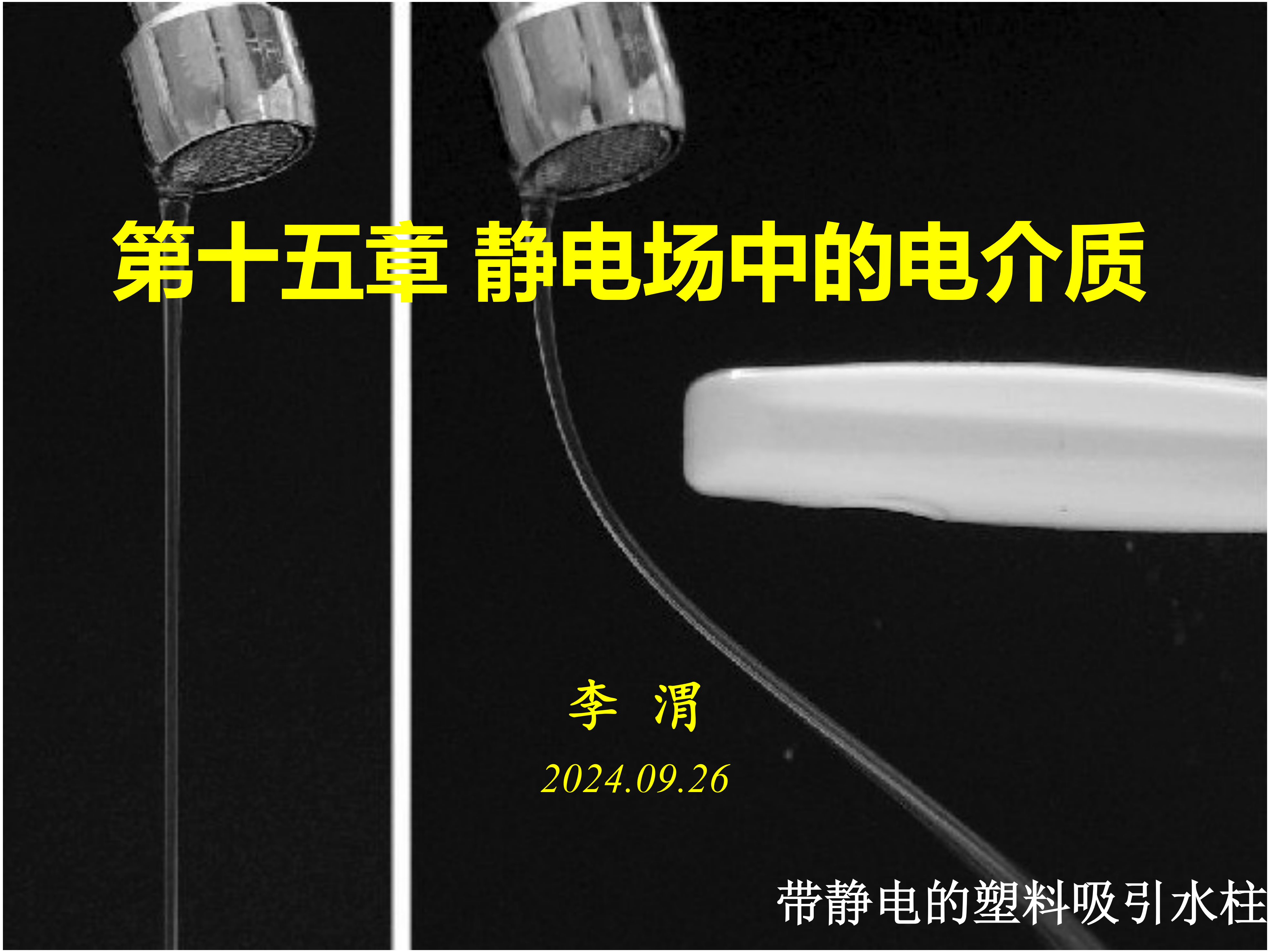
电像法 — **method of images**

第十四章结束

第十五章 静电场中的电介质

李 渭

2024.09.26



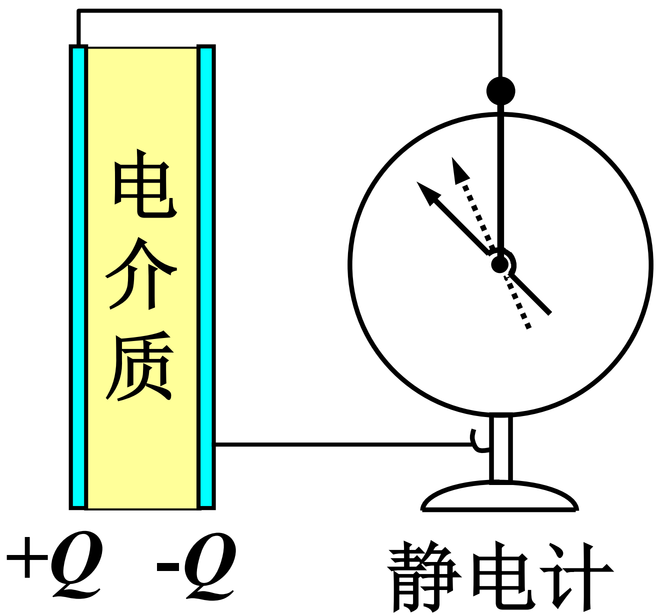
带静电的塑料吸引水柱

第十五章 静电场中的电介质

§15.1 电介质的极化

电介质： 与导体对立，是电的绝缘体，自身无自由电荷，不导电。

演示： 电介质在电场下的极化和对电场的影响



电容器极板电量保持不变，

插入电介质，静电计指针张角减小，表明极板间的电场减弱。

取出电介质，张角复原。

电介质极化：电介质在电场作用下，体内或界面出现极化电荷（束缚电荷）的现象。

不同于导体中的自由电荷，在介质内，极化电荷产生的电场不能完全抵消外电场。

一. 电介质的微观电结构

原子、分子是由原子核和电子云构成。考虑它们在远处产生的电场时，作为简化，可将所有正（负）电荷用一个带正（负）电的点电荷来等效，其位置称为正（负）电荷中心。

无极分子： ± **He，N_2， CH_4 ...**

正负电荷中心重合，无固有电偶极矩。

有极分子： − + **H_2O，NaCl，NH_3 ...**

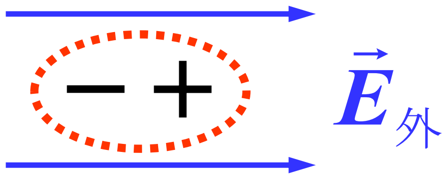
正负电荷中心分开，有固有电偶极矩。

有极分子的固有电偶极矩（单位 10^{-30} C·m）			
H_2O	6.2	NH_3	5.0
HCl	3.43	SO_2	5.3
CO	0.40	C_2H_5OH	3.66

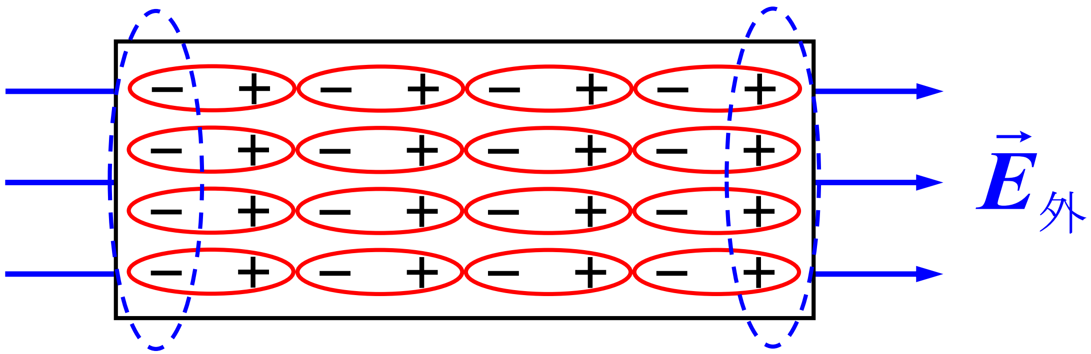
二. 极化机制

1. 无极分子的位移极化

分子中的电子云在外电场作用下产生畸变，正负电荷中心不重合，产生感生电偶极矩：



$\vec{p}\,//\,\vec{E}_{外}$，$\vec{E}_{外}\uparrow \Rightarrow \vec{p}\uparrow$

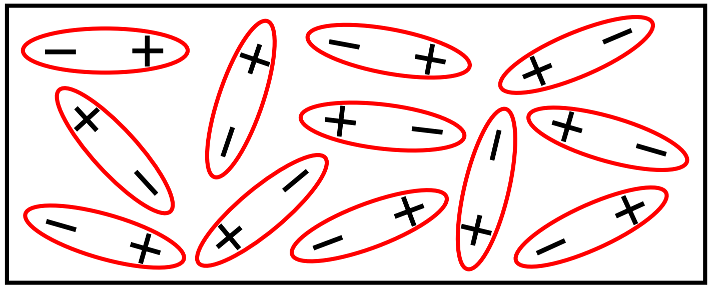


极化效果： 电介质端面出现极化电荷

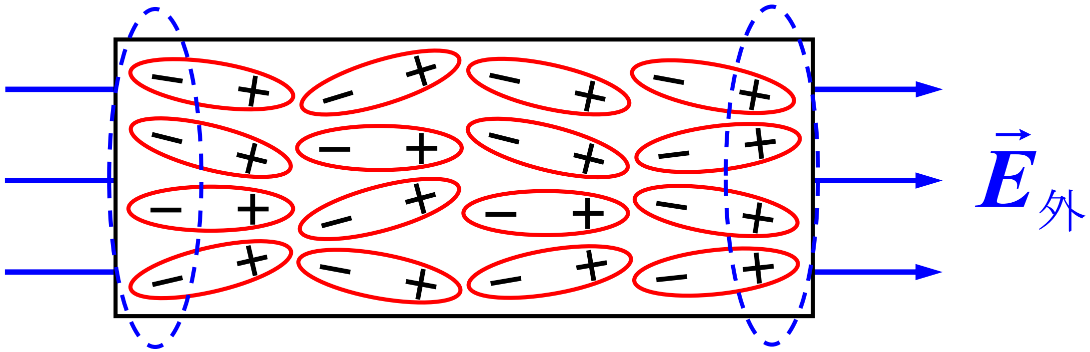
2. 有极分子的取向极化

【TV】电介质极化

无外场时，热运动导致固有电偶极矩取向随机分布，介质不呈现电性。



有外场时，受热运动的影响，固有电偶极矩只能尽量沿外场方向排列，介质可呈现电性。

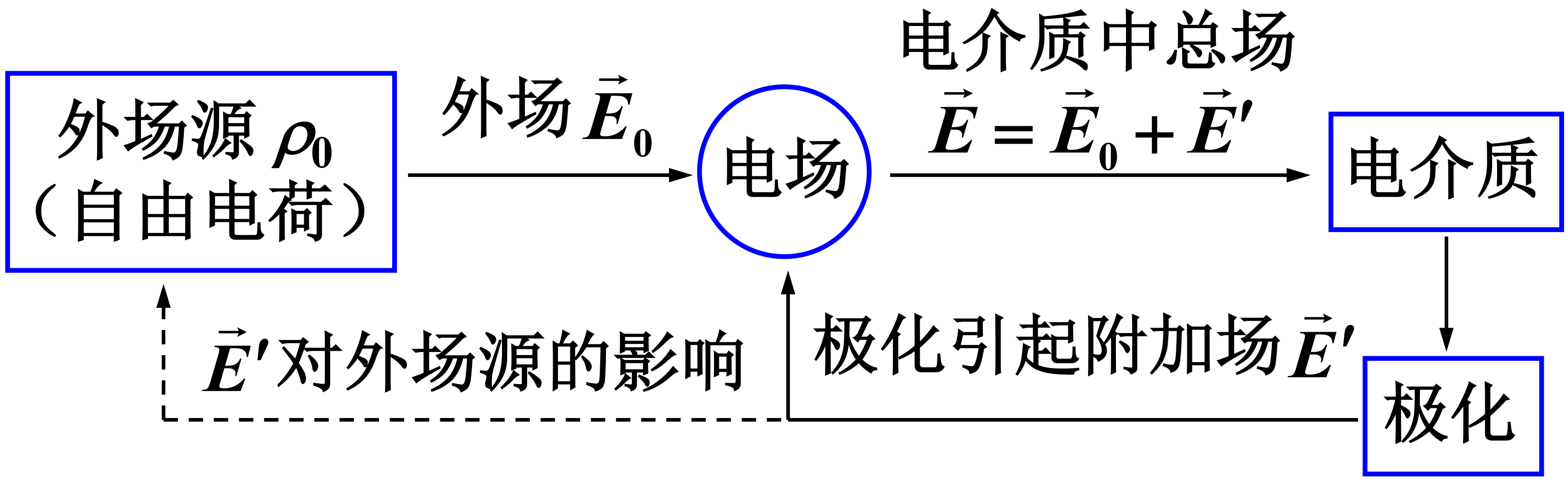


极化效果：电介质端面出现束缚电荷

有极分子在外场作用下也会产生感生电偶极矩，发生位移极化。

三. 极化过程 — 静电平衡过程

开始外电场 $\vec{E}_0$ 使介质极化，产生极化电荷激发附加电场 $\vec{E}'$，与外电场 $\vec{E}_0$ 叠加构成总电场 $\vec{E}$ 。之后 $\vec{E}$ 使介质进一步极化，产生新的极化电荷激发新的 $\vec{E}'$，与 $\vec{E}_0$ 叠加构成新的 $\vec{E}$ ，如此下去直到静电平衡。



上面讨论忽略了 $\vec{E}'$ 对外场源电荷分布的影响。

四. 极化强度

为反映电介质被极化的程度，定义极化强度矢量：单位体积中分子电偶极矩的矢量和：

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}}$$

单位：$\mathrm{C \cdot m^{-2}}$

量纲：和面电荷密度相同

$$\Delta V \begin{cases} \text{宏观上小：远小于 } \vec{P} \text{ 的非均匀尺度} \\ \text{微观上大：远大于分子的平均距离} \end{cases}$$

$\vec{P}$ 也反映分子的电偶极矩排列的有序程度，可认为是电介质对总电场 $\vec{E}$ 的一种响应。

五. 电介质的极化规律

当 $\vec{E}$ 不太强时，$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 呈线性关系，这时电介质可看成是线性电介质。

1. 各向同性线性电介质

$$\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}}\qquad\boxed{\chi_e=\varepsilon_r-1\geq 0}$$

χ_e — 电极化率，ε_r — 相对介电常量

此时 χ_e 和 ε_r 都是无量纲的正数，故 $\vec{P}\,//\,\vec{E}$。

	水（20°C，1atm）	空气	云母	钛酸钡
ε_r	80	1	$4\sim7$	$10^3\sim10^4$

2. 各向异性线性电介质

$$P_i = \varepsilon_0 (\chi_e)_{ij} E_j \qquad (i, j = x, y, z)$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} (\chi_e)_{xx} & (\chi_e)_{xy} & (\chi_e)_{xz} \\ (\chi_e)_{yx} & (\chi_e)_{yy} & (\chi_e)_{yz} \\ (\chi_e)_{zx} & (\chi_e)_{zy} & (\chi_e)_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

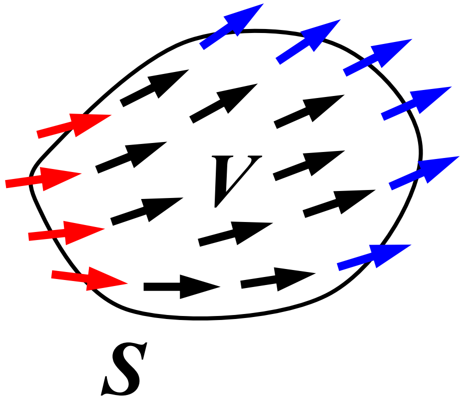
此时 χ_e、ε_r 是 2 阶对称张量（3×3对称矩阵）

所以一般 $\vec{P} \nparallel \vec{E}$：电介质沿不同方向极化，

结果一般不同，与晶体结构、对称性有关。

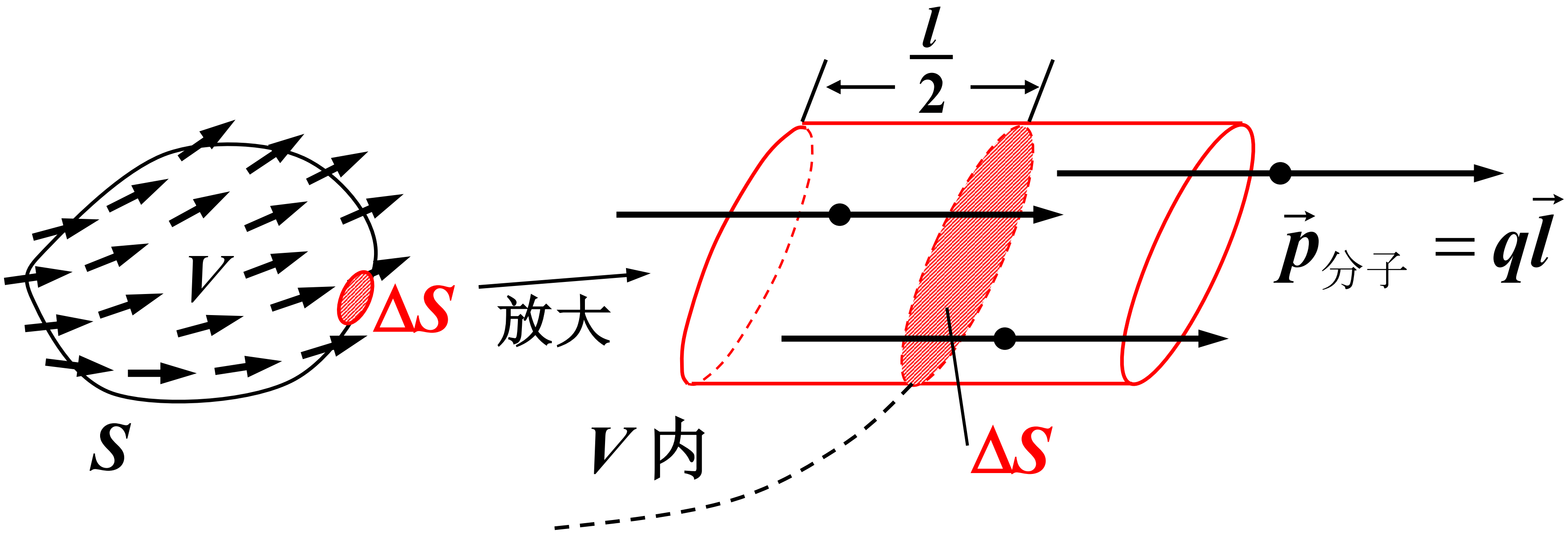
本课程只讨论各向同性线性电介质。

六. 极化电荷

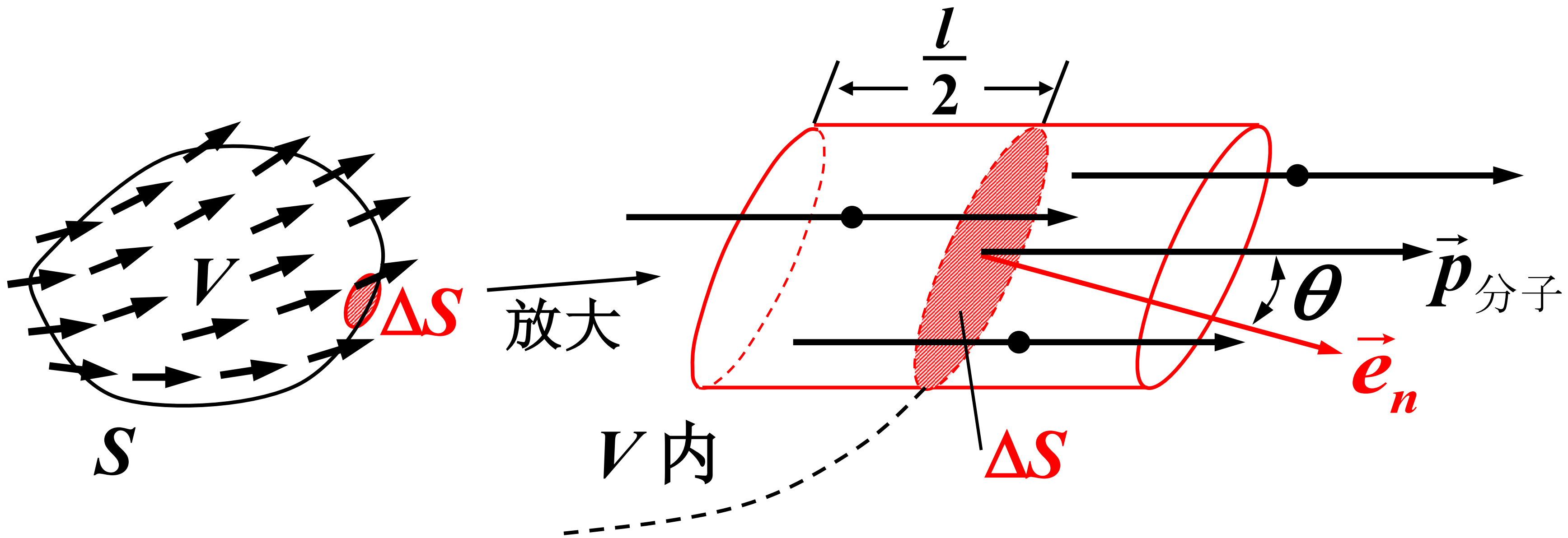


在介质内任选封闭曲面 S，体积为 V。电偶极子对 V 内极化电荷的贡献：

- 完全在 V 内的电偶极子（黑色）没贡献；
- 被 S 分割的、正电荷在 V 内的电偶极子贡献正电荷（左边红色）；
- 被 S 分割的、负电荷在 V 内的电偶极子贡献负电荷（右边蓝色）。



选一小面元 ΔS（其附近均匀极化，电偶极子取向一致），作一个斜边方向沿 $\vec{p}_{分子}$，长 l 的斜柱体，以 ΔS 为中界面，介质内外各占一半。则只有中心在小柱体内的电偶极子对 V 内的极化电荷有贡献：



小柱体内的偶极子 $\begin{cases} \vec{p}_{分子} \cdot \vec{e}_n = ql\cos\theta > 0 & 贡献\ -q \\ \vec{p}_{分子} \cdot \vec{e}_n = ql\cos\theta < 0 & 贡献\ +q \end{cases}$

设单位体积分子数为 n，小柱体的总贡献是：

$$\Delta q' = -q \cdot n \cdot (\Delta S \cdot l \cdot \cos\theta) = -n(ql \cdot \Delta S\cos\theta)$$

$$= -n\vec{p}_{分子} \cdot \Delta\vec{S} = -\vec{P} \cdot \Delta\vec{S}$$

任意封闭曲面包围的极化电荷:

$$\boxed{q'_{内}=-\oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$$

1. 极化体电荷密度

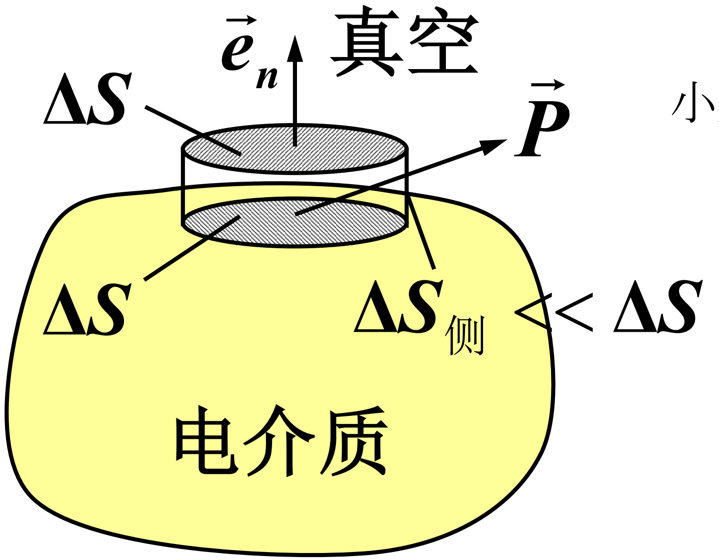
$$\rho'=\lim_{V\to 0}\frac{q'_{内}}{V}=-\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}{V}=-\mathrm{div}\vec{P}$$

$\mathrm{div}\vec{P}$ 称为 $\vec{P}$ 的"散度":$\mathrm{div}\vec{P}\equiv\nabla\cdot\vec{P}$

$$\boxed{\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}}$$

直角坐标系下 $\nabla\cdot\vec{P}\equiv\dfrac{\partial P_x}{\partial x}+\dfrac{\partial P_y}{\partial y}+\dfrac{\partial P_z}{\partial z}$

2. 极化面电荷密度



$$\underset{小扁柱面}{\oint\!\!\oint} \vec{P}\cdot d\vec{s} = \Big(\underset{上表面}{\iint} + \underset{下表面}{\iint} + \underset{侧面}{\iint} \Big) \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

$$= \underset{下表面}{\iint} \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

$$= \vec{P}\cdot[\Delta S(-\vec{e}_n)]$$

$$= -\sigma'\Delta S$$

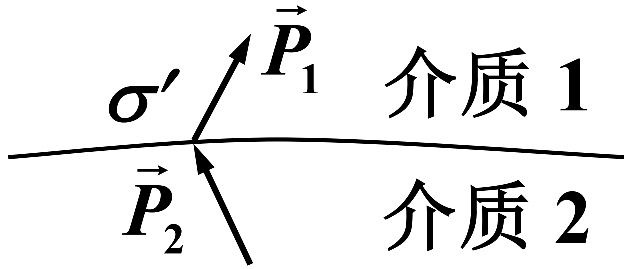
真空 — 介质交界面处的极化面电荷密度：

$$\boxed{\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{e}_n = P_n}$$

$\vec{e}_n$：由介质指向真空

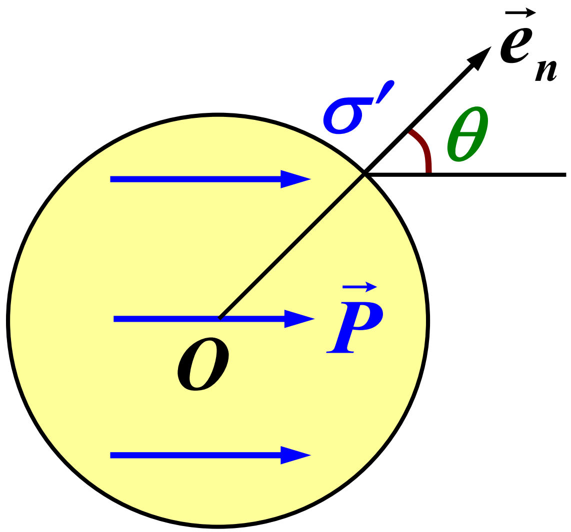
【思考】

求两种不同介质交界面处的极化面电荷密度。



【例】介质球均匀极化，极化强度 $\vec{P}$ 。

求：σ'、ρ'



解：

$$\sigma' = P_n = P \cdot \cos\theta$$

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

为什么带静电的梳子能吸引水柱、纸屑？