# 高等线性代数

程笛 2023012317

Week 13

1. 设 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b, g(x)=x^2-3x+1$. 若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 后余式为 $25x-5$, 试求 $a,b$ 的值.

**解.** 即 $(2x^4-3x^3+4x^2+ax+b)=(x^2-3x+1)(2x^2+3x+11)+((30+a)x+b-11)$, 故 $a=-5, b=6$ □

2. 设 $g(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{K}$. 又 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$. 证明: $g(x)\mid f^2(x)$ 的充要条件是 $g(x)\mid f(x)$.

**证明.** 充分性显然. 如果 $g(x)\mid f^2(x)$ , 显然 $f^2(x)$ 不是零多项式, 故次数最低为 2, 存在不可约多项式分解 $f^2(x)=f(x)f(x)$, 故 $g(x)\mid f(x)f(x)$, 又 $g(x)$ 是不可约多项式, 所以 $g(x)\mid f(x)$

□

3. 用辗转相除法求下列多项式的最大公因式:

$$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\quad g(x)=x^2-x-1.$$

**证明.**

$$x^4-x^3-4x^2+4x+1=(x^2-x-1)(x^2-3)+x-2$$

$$(x^2-x-1)=(x-2)(x+1)+1$$

进而待求最大公因式亦为 $(x^2-x-1)$ 和 $(x-2)$ 的最大公因式, 即为 1.

**注.**

$$(x^2-x-1)-((x^4-x^3-4x^2+4x+1)-(x^2-x-1)(x^2-3))(x+1)=1$$

□

4. 若 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$, 举例说明 $d(x)$ 不必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 但若 $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$, 证明: $d(x)$ 必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

**解.** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 $a(x)$, 则存在 $u_1(x), v_1(x)$,

$$a(x)=f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)$$

令 $d(x)=a(x)(x^{114}-514)$, $d(x)$ 不为最大公因式. 令 $u(x)=u_1(x)(x^{114}-514), v(x)=v_1(x)(x^{114}-514)$, 有

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

如果 $d(x)$ 是公因式, 则存在非零多项式 $s(x)$,

$$a(x)=d(x)s(x)$$

设 $f(x)=h_1(x)d(x)s(x), g(x)=h_2(x)d(x)s(x)$

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)=h_1(x)d(x)s(x)u(x)+d(x)s(x)v(x)h_2(x)$$

$$1=s(x)(h_1(x)u(x)+h_2(x)v(x))$$

$s(x)$ 只能是零多项式, 故 $a(x), d(x)$ 相伴, $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 最大公因式. □

5. 求 $u(x), v(x)$, 使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$, 其中

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, \quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2.$$

**解.**

$$f(x)=g(x)+x^3-2x$$

$$g(x)=(x^3-2x)(x+1)+x^2-2$$

$$(x^3-2x)=(x^2-2)x+0$$

有

$$g(x)=(f(x)-g(x))(x+1)+x^2-2$$

即

$$f(x)(-x-1)+g(x)(x+2)=x^2-2=(f(x),g(x))$$

□

6. 判断下列多项式有无重因式:

$$f(x)=4x^3-4x^2-7x-2.$$

**证明.** 注意到 $x=2$ 是一个根

$$f(x)=(x-2)(4x^2+4x+1)=(x-2)(2x+1)^2$$

存在重根 $x-\frac{1}{2}$ □

7. 求证: $a$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重根的充要条件是

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,\quad f^{(k)}(a)\neq 0.$$

**证明.** 必要性显然, 对 $k$ 使用数学归纳法, $k=1$ 时, $f(a)=0$, 显然 $a$ 是根, 设是 $m$ 重根, 记 $f(x)=(x-a)^m h(x)$, 则 $f'(a)=mh(x)(x-a)^{m-1}+h'(x)(x-a)^m|_{x=a}\neq$, 故 $m=1$.

假设对 $k-1$ 成立, 故 $a$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根, 存在 $g(x)$ 与 $(x-a)$ 互素

$$f'(x)=(x-a)^{k-1}g(x)$$

记 $f(x)=(x-a)^m u(x)$, $u(x)$ 与 $(x-a)$ 互素, 有 $f'(x)=m(x-a)^{m-1}u(x)+u'(x)(x-a)^m$, 显然 $m\geq k$(否则 $(x-a)^{k-1}$ 不是 $f'(x)$ 的因式)

$$g(x)=\frac{f'(x)}{(x-a)^{k-1}}=m(x-a)^{m-k}u(x)+u'(x)(x-a)^{m-k+1}$$

若 $m>k$, 则 $g(a)=0$, 矛盾, 故 $m=k$, 证毕

□

8. 证明下列拉格朗日插值定理: 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 中 $n$ 个不同的数, $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $\mathbb{K}$ 中任意 $n$ 个数, 则存在唯一的 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$, $\deg f(x)\leq n-1$, 且

$$f\left(a_i\right)=b_i, i=1,2,\cdots,n$$

试求出这个多项式.

**证明.** 设 $f_1,f_2$ 满足题意, 则 $g(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 有 $\deg g(x)\leq n-1$,

$$g(a_i)=0,\ i=1,2,\ldots,n$$

这说明 $\prod_{i=1}^n(x-a_i)\mid g(x)$, 如果 $g(x)$ 不为零多项式, 则 $\deg g(x)\geq n$, 矛盾. 故 $g(x)=f_1(x)-f_2(x)=0$, $f_1(x)=f_2(x)$.

考虑多项式 $h_i(x)$, $h_i(a_j)=\delta_{ij}b_j$, 显然具有因式 $(x-a_j), j\neq i$, 故

$$h_i(x)=b_i\prod_{1\leq j\leq n, j\neq i}\frac{(x-a_j)}{(a_i-a_j)}$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i(x)$$

□

9. 证明: 方程 $x^3+px+q=0$ 有重根的充要条件是 $4p^3+27q^2=0$.

**证明.** 如果方程有重根, 说明可以因式分解为 $x^3+px+q=(x-x_0)^2(x-c)$, 这说明多项式 $x^3+px+q$ 一定有三个根, 根据韦达定理,

$$\begin{aligned}2x_0+c&=0\\2x_0c+x_0^2&=p\\x_0^2c&=-q\end{aligned}$$

带入消元得到 $4p^3+27q^2=0$, 必要性得证. 若 $4p^3+27q^2=0$, 假设方程无重根, 在复数域上有三个根, 记为 $x_1,x_2,x_3$, 根据韦达定理,

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=0\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=p\\x_1x_2x_3&=-q\\4p^3+27q^2&=0\end{aligned}$$

得到

$$4(x_1x_2^3-3(x_1+x_2)^2x_1^2x_2^2+3(x_1+x_2)^4x_1x_2-(x_1+x_2)^6)+27(x_1+x_2)^2x_1^2x_2^2=0$$

整理得

$$(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)^2(2x_1-x_2)^2=0$$

这说明 $x_1=x_2$ 或 $x_3=x_2$ 或 $x_1=x_3$. 故 $x^3+px+q$ 有重根. 充分性得证. □

10. 求证: $f(x)=\sin x$ 在实数域内不能表示为 $x$ 的多项式.

**证明.** 因为 $f(x)=\sin x$ 在实数域内有无穷多的零点, 根据多项式的定义, 次数 $n$ 是一个整数, 故最多有 $n$ 个零点, 即有限个零点, 所以 $f(x)=\sin x$ 不能表示为 $x$ 的多项式. □

11. 设 $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 是 1 的 $n$ 次根. 求证: $\epsilon^{mi}, i=1,2,\cdots,n$ 是 $x^n-1=0$ 的全部根的充分必要条件是 $(m,n)=1$.

**证明.** 由代数基本定理知 $x^n-1=0$ 有 $n$ 个根, 分别为 $e^{\frac{2\pi k}{n}}, k=1,2,\cdots,n$, 两两均不同. 故 $n$ 个数 $\epsilon^{mi}, i=1,2,\cdots,n$ 是 $x^n-1=0$ 的全部根当且仅当它们两两不相等. 现在设 $(m,n)=h$, 则 $\epsilon^{mn}=1$ 是一个根, $\epsilon^{\frac{mn}{h}}=1, \frac{n}{h}\in\{1,2\cdots,n\}$ 是一个根. 它们不是重根当且仅当 $\frac{n}{h}=n$. 即 $(m,n)=h=1$ □

12. 设 $(x^4+x^3+x^2+x+1)\mid(x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5))$, 其中 $f_i(x)$ 都是实系数多项式, $i=1,2,3,4$. 求证: $f_i(1)=0, i=1,2,3,4$.

**证明.** 由题意, 存在多项式 $h(x)$

$$h(x)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5))$$

两边同乘 $(x-1)$

$$h(x)(x^5-1)=(x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5))(x-1)$$

令 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{5}}$, 则 $\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5=1$ 两两不同, 且均为 $x^5-1$ 的根. 带入得

$$\begin{aligned}\omega^3f_1(1)+\omega^2f_2(1)+\omega f_3(1)+f_4(1)&=0\\(\omega^2)^3f_1(1)+(\omega^2)^2f_2(1)+(\omega^2)f_3(1)+f_4(1)&=0\\(\omega^3)^3f_1(1)+(\omega^3)^2f_2(1)+(\omega^3)f_3(1)+f_4(1)&=0\\(\omega^4)^3f_1(1)+(\omega^4)^2f_2(1)+(\omega^4)f_3(1)+f_4(1)&=0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\omega^3 & \omega^2 & \omega & 1\\(\omega^2)^3 & (\omega^2)^2 & \omega^2 & 1\\(\omega^3)^3 & (\omega^3)^2 & \omega^3 & 1\\(\omega^4)^3 & (\omega^4)^2 & \omega^4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(1)\\f_2(1)\\f_3(1)\\f_n(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

由于 $\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ 两两不同, 故该系数矩阵的行列式是范德蒙行列式且不为零, 故 $f_1(1)=f_2(1)=f_3(1)=f_4(1)=0$ □