上节课内容回顾

电荷、库仑定律、电场强度、场强叠加原理

电场线、高斯定理

$$\boxed{\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

第十三章 电势

李渭

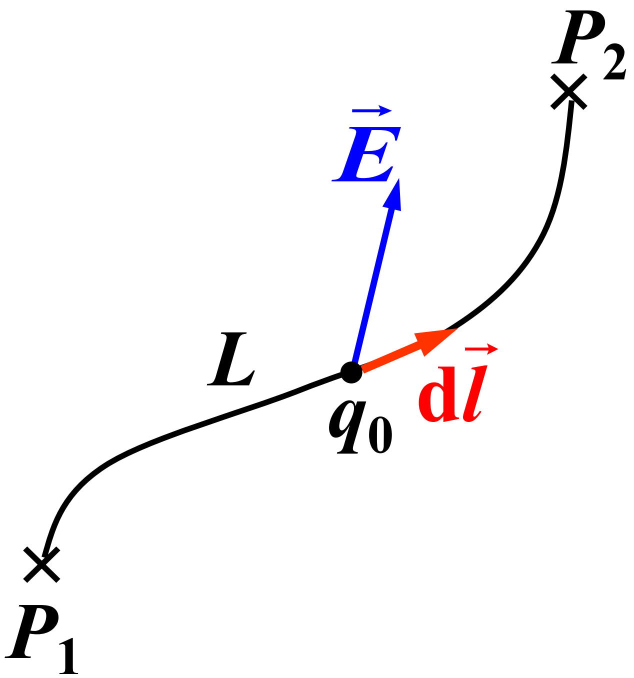
2024.09.19.

第十三章 电势

§13.1 静电场的环路定理

一. 静电场的保守性

在静电场中移动检验电荷q_0，静电力作功：

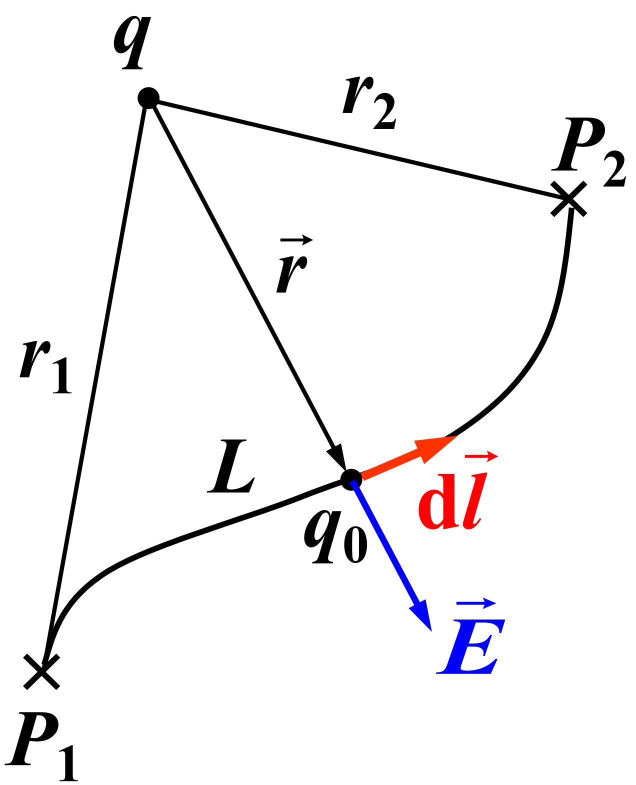


$$A_{12}=\int_{P_1\,(L)}^{P_2} q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{P_1\,(L)}^{P_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

要搞清静电力作功的规律，

需要研究 $\int_{P_1\,(L)}^{P_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 的特点。

● 对点电荷电场



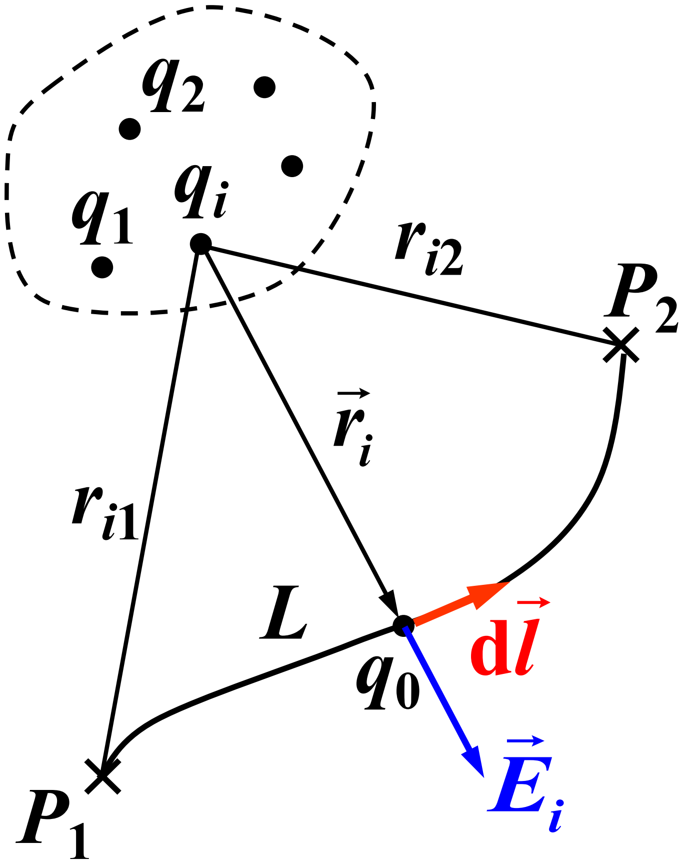
$$\int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1\,(L)}^{P_2} \frac{q\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

—由始末位置 P_1、P_2 决定，与路径 L 无关。

● 对电荷系电场



$$\int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1\,(L)}^{P_2} (\sum_i \vec{E}_i)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

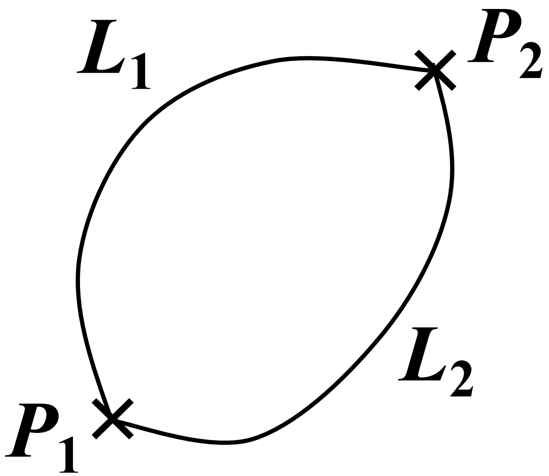
$$= \sum_i \int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right)$$

— 由始末位置 P_1、P_2 决定，与路径 L 无关。

结论：静电场是保守场

二. 静电场环路定理



对任意两条路径 L_1、L_2 有：

$$\int_{P_1 (L_1)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1 (L_2)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{P_2 (L_2)}^{P_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$ —— 静电场环路定理

（L是任意闭合路径）

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环量”或“环流”。

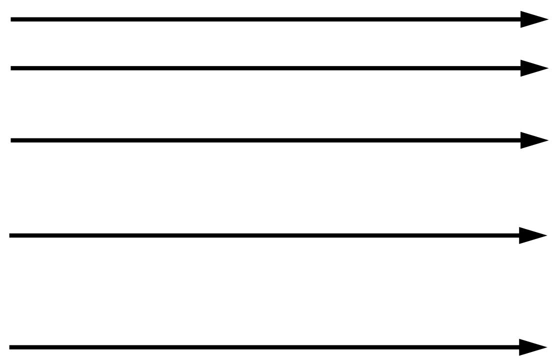
环量反映矢量场的“旋转”程度。空间某区域中环流越大，矢量场的“旋转”程度越高。

静电场的环量为零说明：

静电场是保守场，静电场的电场线无涡旋结构，不闭合。

【思考】

电场线平行但不均匀分布可能吗？



△ 13.2 电势差、电势

一. 电势差

$\int_{P_1 \atop (L)}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 与路径无关，故可引入电势差概念。

定义空间 P_1 点对 P_2 点的电势差：

$$\boxed{\varphi_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

φ_{12} 是从 $P_1 \to P_2$ 移动单位正电荷电场力作的功

二. 电势

规定空间某处 O 为电势零点，即 $\varphi_O = 0$，则任一点 P 处的电势为：

$$\boxed{\varphi_P = \varphi_{PO} = \int_P^O \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

空间 P_1 点对 P_2 点的电势差：

$$\varphi_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1}^{O} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{P_2}^{O} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

电势差与电势零点 O 的选择无关。

电势零点选择有任意性，习惯上如下选取：

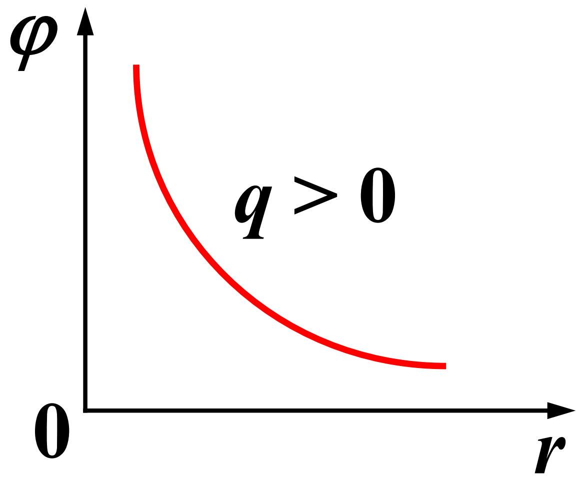
理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$ 。

对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

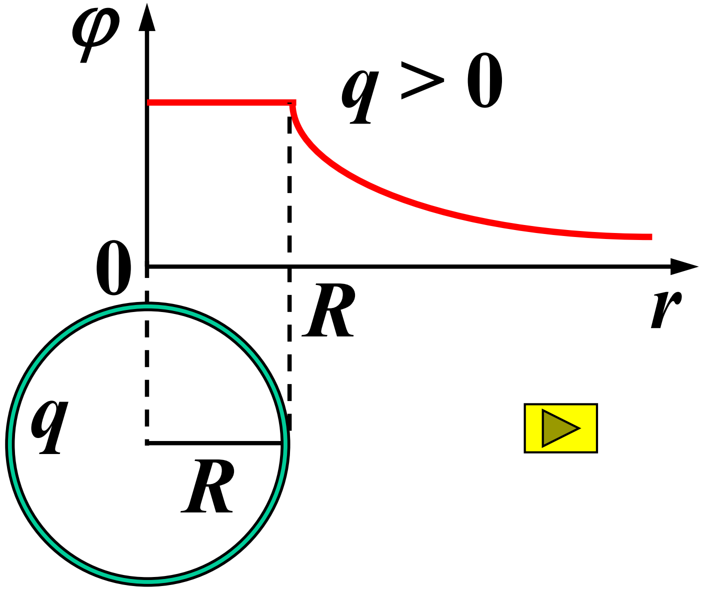
▲ 点电荷电势

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}, \quad \varphi_\infty = 0$$



▲ 均匀带电球面电势

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$$



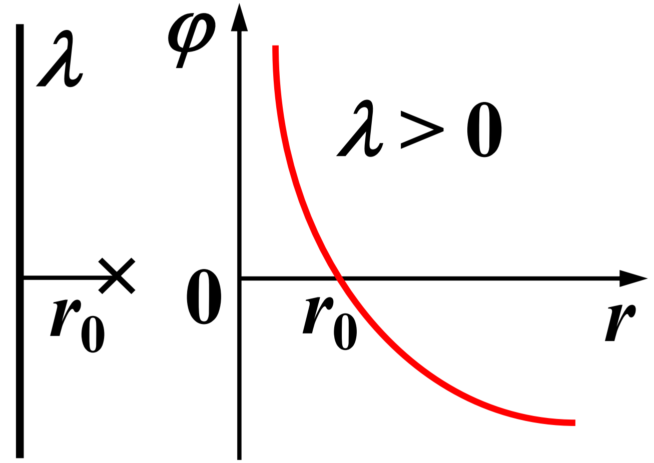
$$\varphi_\infty = 0$$

面内等电势，面外是“点电荷”电势。

【思考】球面上带电的分布不均匀是否会影响内部的电势呢？

▲ 无限长均匀带电直线电势

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$



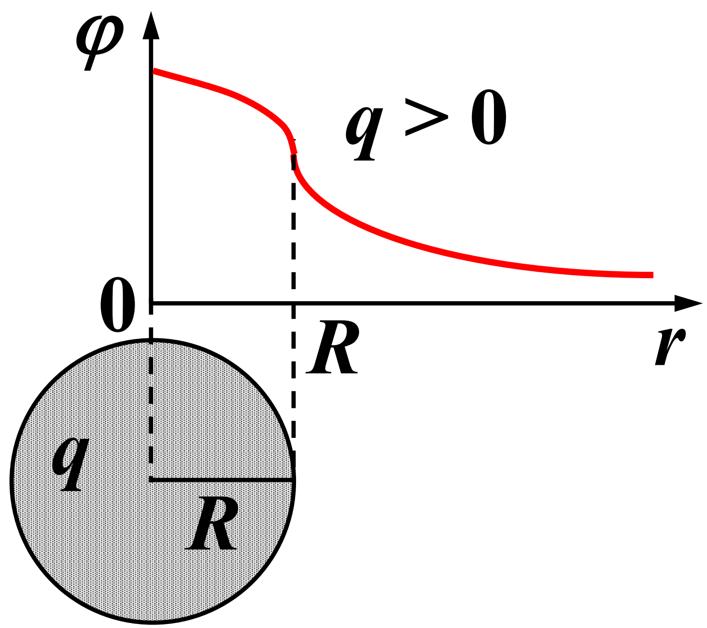
电荷分布扩展到无限远时，电势零点不能选在无限远

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}，\quad \varphi_{r_0} = 0$$

▲ 均匀带电球体电势

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2) & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$$

$$\varphi_\infty=0$$



球心处电势：

$$\varphi(0)=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

§ 13.3 电势叠加原理

在电荷系电场中，某点电势等于各电荷单独在该点产生的电势的代数和：

$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

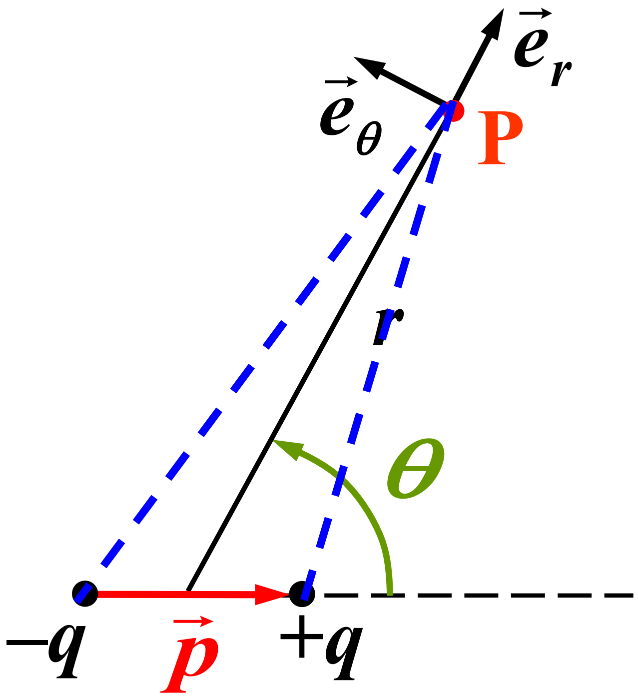
注意：电势零点必须是共同的。

证明：由 $\varphi = \int_P^O \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ 得：

$$\varphi = \int_P^O \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_P^O \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \varphi_i$$

- 点电荷系： $\varphi=\sum\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$，$\varphi_\infty=0$

电偶极子电势



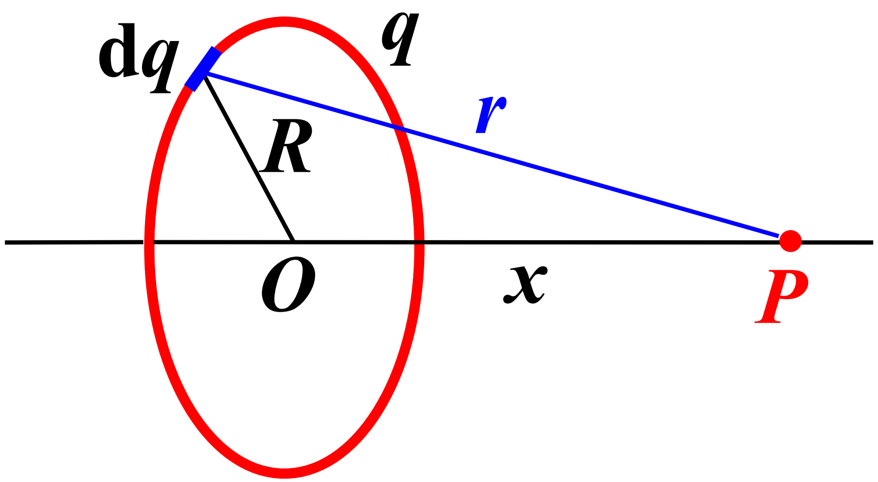
$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\propto\frac{1}{r^2}$$

- 连续电荷分布： $\varphi=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，$\varphi_\infty=0$

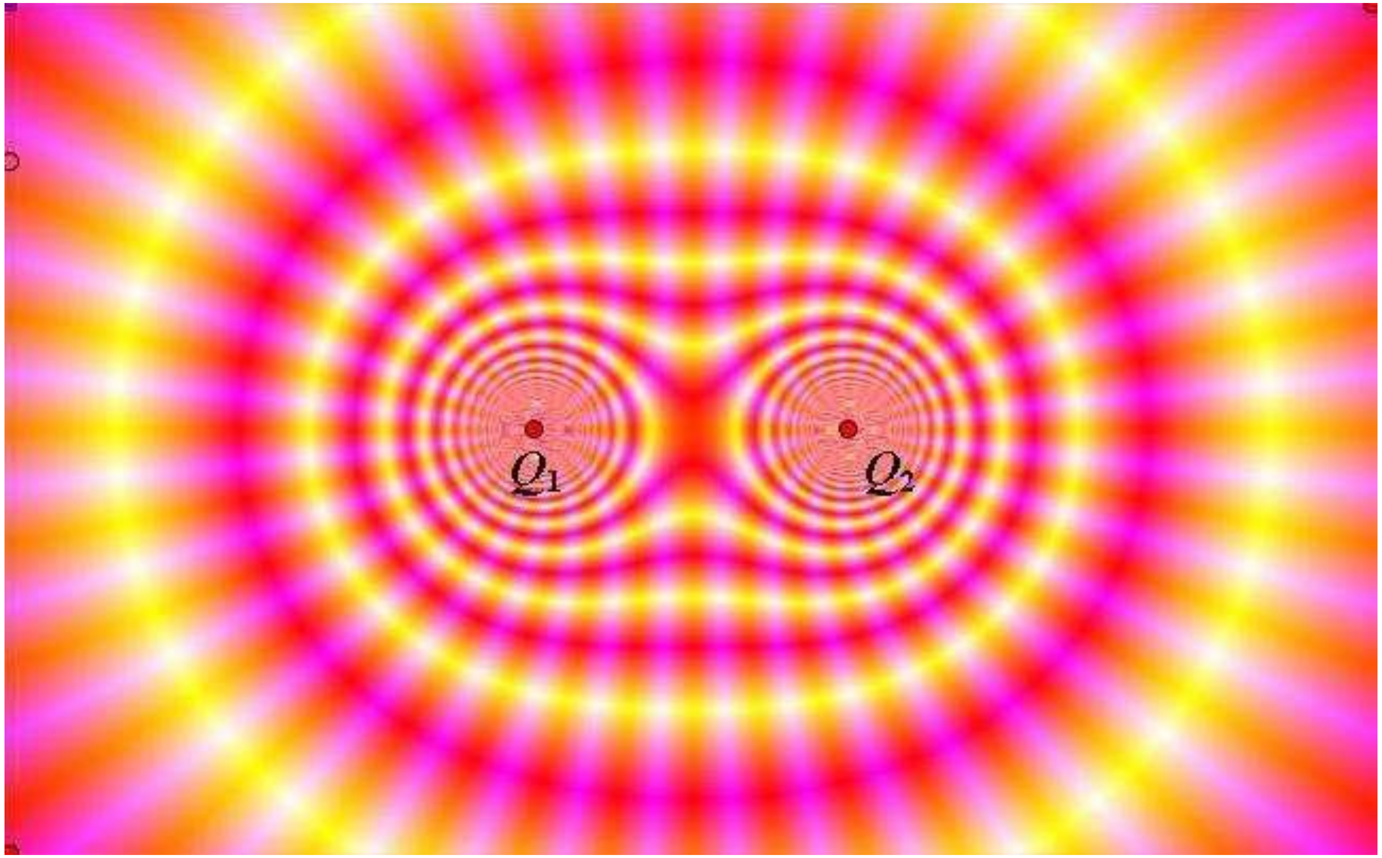
● 连续电荷分布： $\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty = 0$

【例】均匀带电圆环轴线上的电势



$$\varphi_P = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_q \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

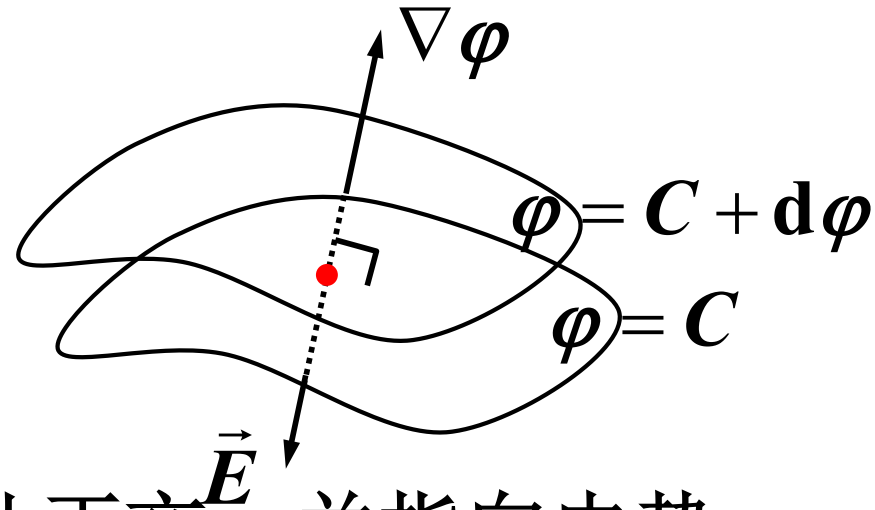
$$\varphi_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$


Q_1
Q_2

§ 13.4 等势面、电势梯度

等势面： 电势相等的点组成的曲面

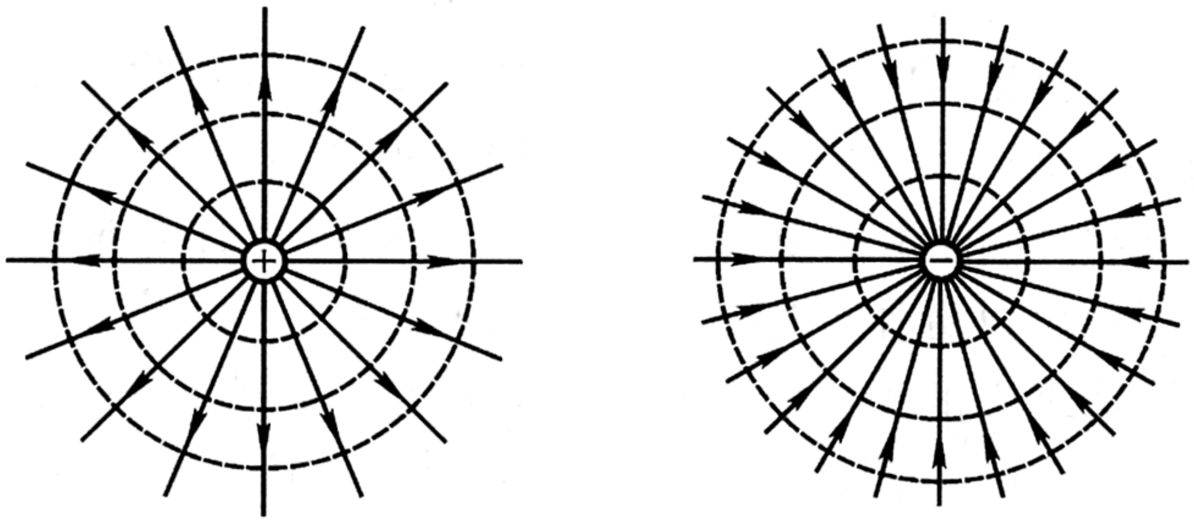
$$\varphi(x,\ y,\ z)=C$$



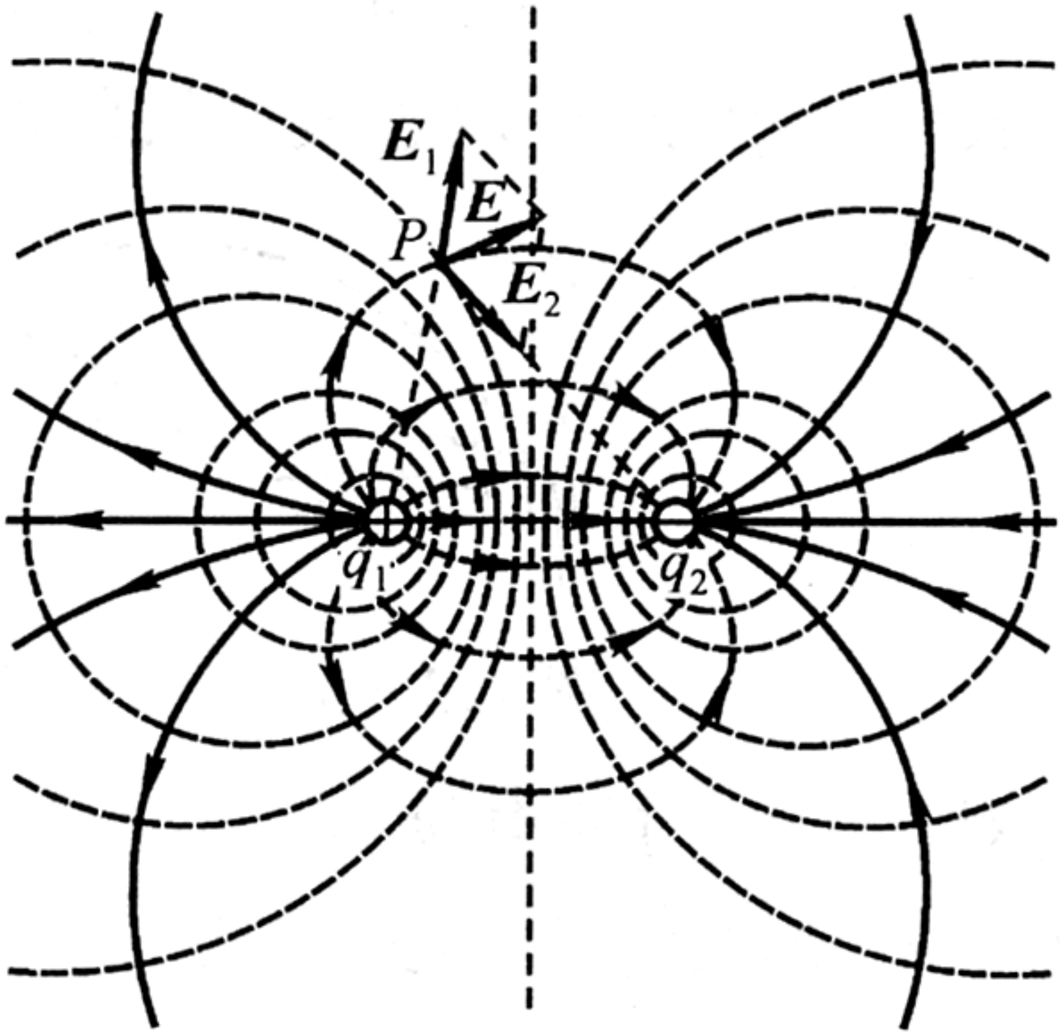
1. 电场线与等势面处处正交，并指向电势降低的方向。

2. 两等势面相距较近处的场强大，相距较远处场强较小。

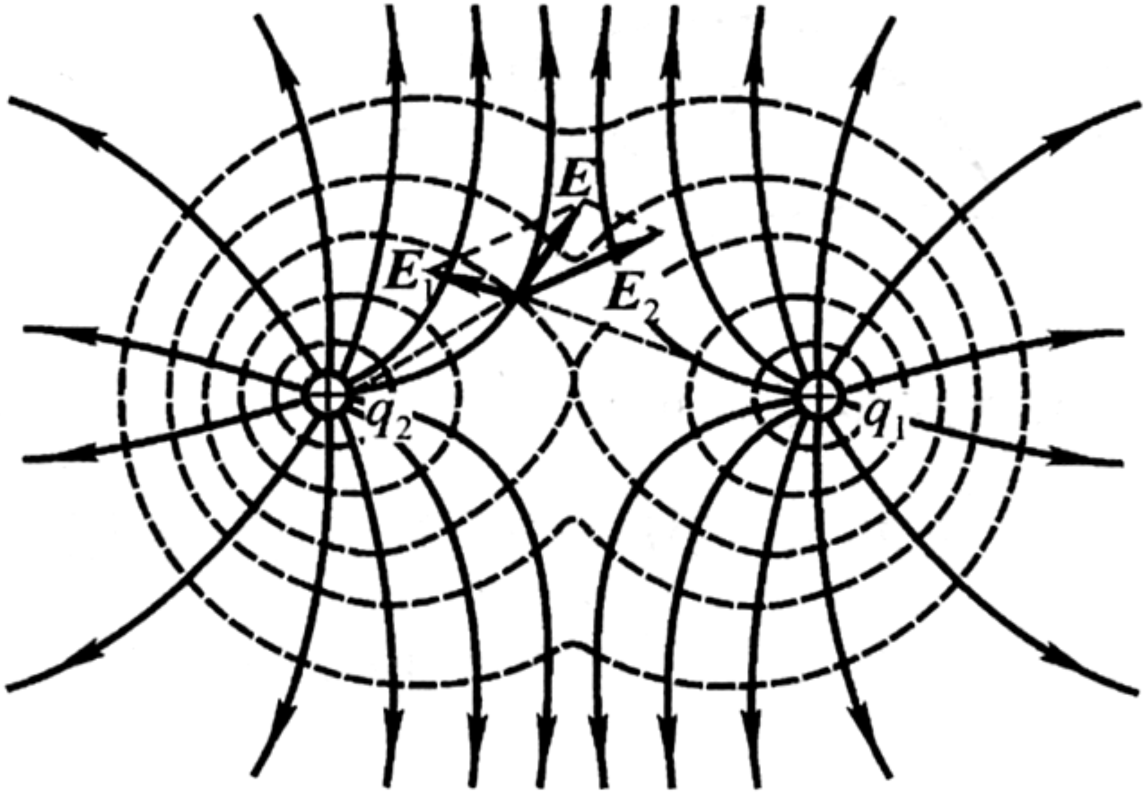
相邻等势面的电势差为常数



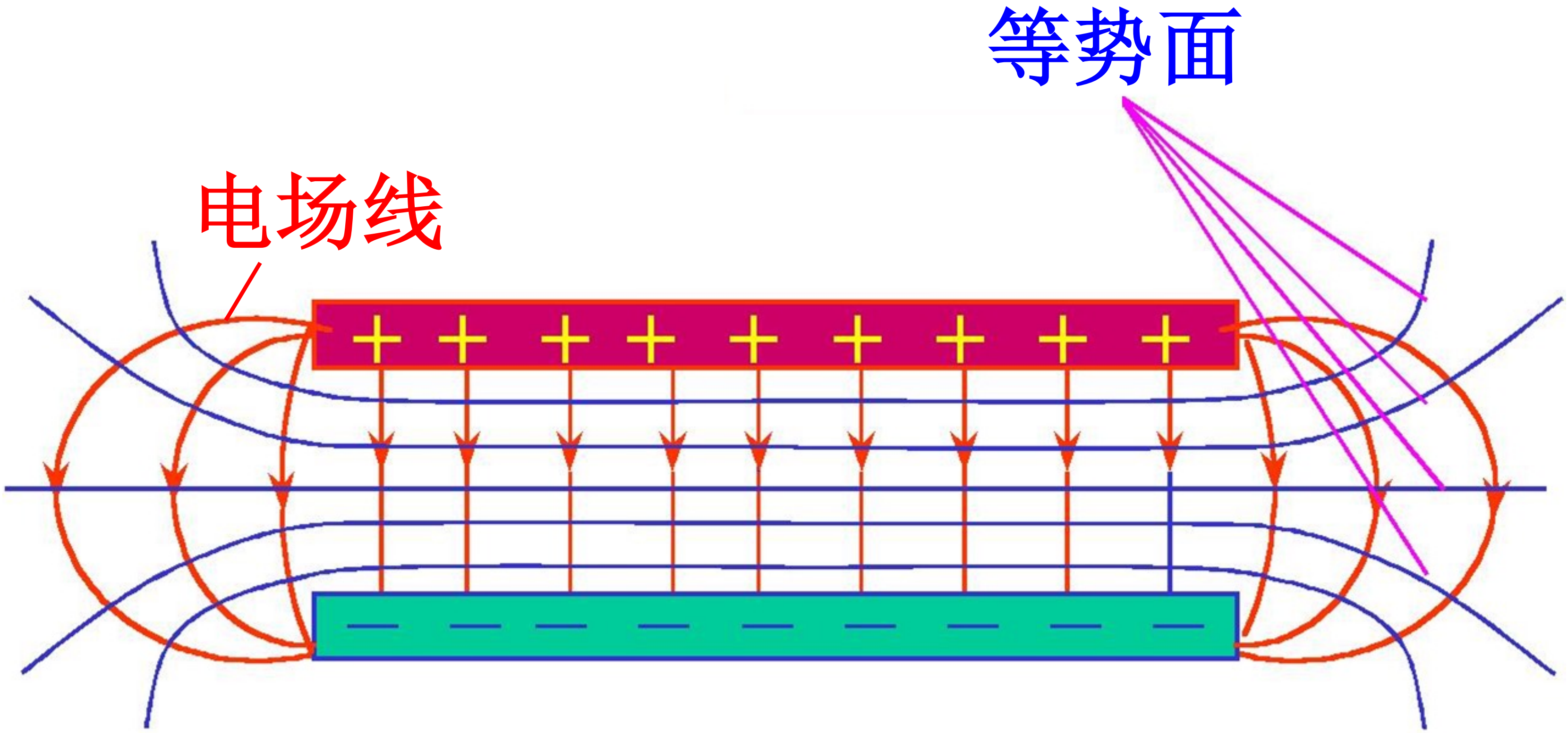
点电荷电场线（实线）和等势面（虚线）



电偶极子电场线（实线）和等势面（虚线）



两正电荷的电场线（实线）和等势面（虚线）



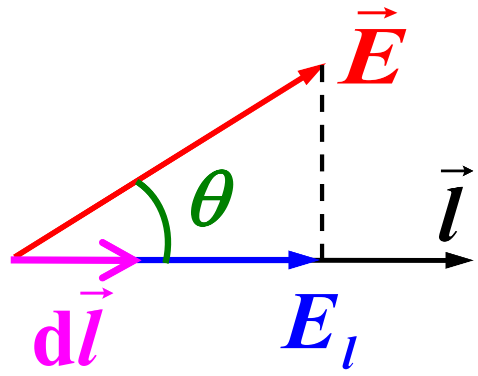
平行板电容器

电势梯度

根据电势差定义可知：

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = -d\varphi$$

$$E_l \cdot dl = -d\varphi$$



（$\vec{l}$ 代表空间一指定方向）

$$\boxed{E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}}$$ —— φ方向导数的负值

在静电场中的某点处，电场强度沿空间某一指定方向的分量，等于电势 φ 在该点处的方向导数的负值，其单位为V / m。

直角坐标系下，$\varphi=\varphi(x,y,z)$，可证明：

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\therefore\quad \vec{E}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=-\mathbf{grad}\,\varphi$$ —— 电势梯度的负值

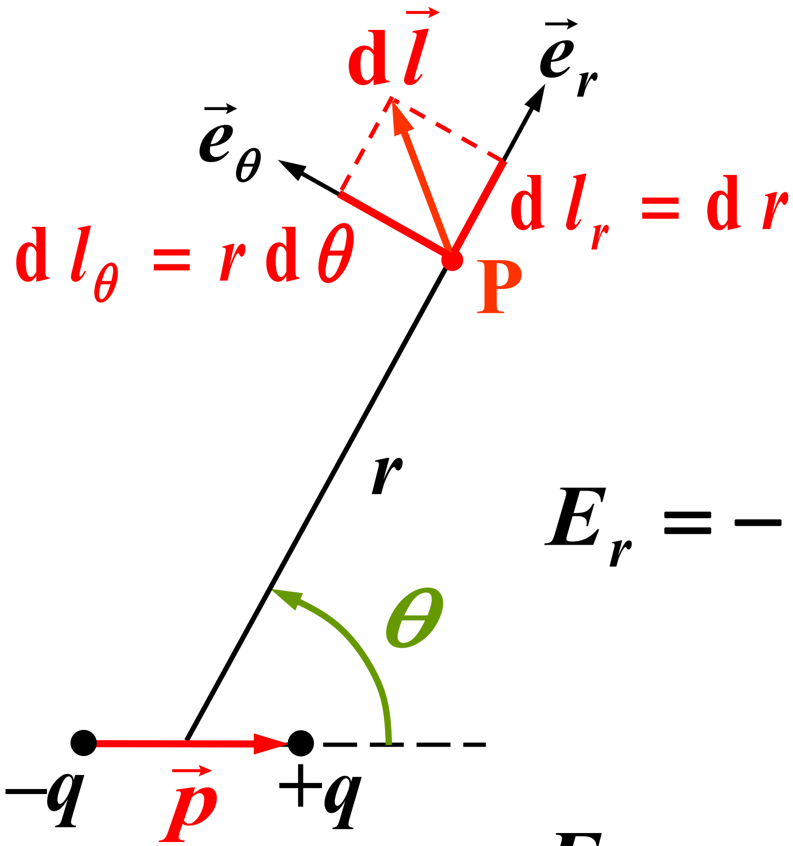
标量函数的梯度：大小等于方向导数最大值，方向指向标量函数增长最快的方向。

记：$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — 哈密顿算子

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

— 电场强度指向电势下降最快的方向

【例】由偶极子的电势求场强



$$\varphi(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

【思考】电偶极子中垂面上各点电势为零？

§ 13.5 电荷在外电场中的静电势能

$\boxed{W = q\varphi}$ 电荷电量 × 该点电势

— 电荷与静电场的相互作用能

【例】氢原子中电子的静电势能

原子核（质子）的电势： $\varphi(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$

电子在原子核电场中的静电势能：

$$W = (-e)\varphi(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

“电子与电场（质子）的相互作用能”

电偶极子在均匀外电场中的静电势能：

$$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

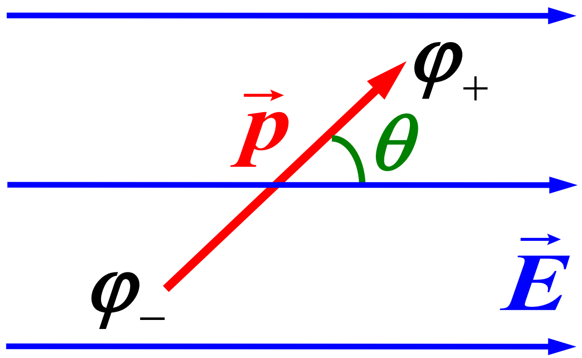
证明：

$$W=W_{+}+W_{-}$$

$$=q(\varphi_{+}-\varphi_{-})$$

$$=q\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=-qEl\cos\theta=-\vec{p}\cdot\vec{E}$$



力矩会使电偶极子的空间取向保持与外电场方向一致，$\vec{p}\,//\,\vec{E}$ 时电势能最低，最稳定。

§13.6 电荷系的静电能

一. 点电荷系的相互作用能

把 n 个静止的点电荷由当前的位置，彼此分散到无穷远的过程中静电力作的功，称为现有位置这 n 个点电荷间的相互作用能：

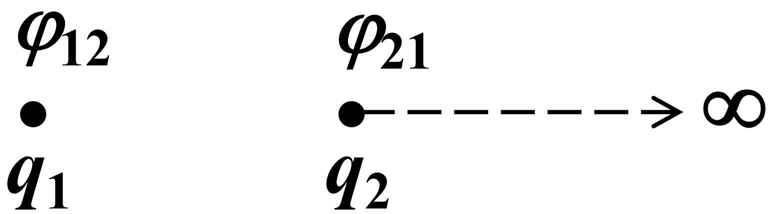
$$\boxed{W_{\text{互}}=\frac{1}{2}\sum_{i}^{n}q_i\varphi_i}$$

φ_i— 除了 q_i 其它电荷在 q_i 处产生的电势和

点电荷系的相互作用能是系统的静电势能。

【证明】设 $\varphi_{\infty}=0$，φ_{ji} 表示电荷 i 在电荷 j 处产生的电势，$\vec{E}_i$是电荷 i 产生的场强。

1. 两个点电荷



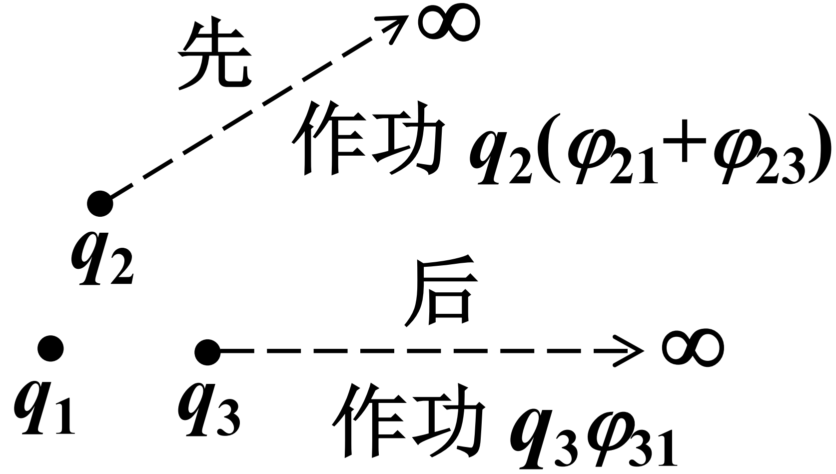
$$W_{\text{互}}=\int_2^{\infty} q_2\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_2\varphi_{21}$$

同理：$$W_{\text{互}}=\int_1^{\infty} q_1\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_1\varphi_{12}$$

写成对称形式：$$W_{\text{互}}=\frac{1}{2}(q_1\varphi_{12}+q_2\varphi_{21})$$

2. 三个点电荷

$$W_{互} = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3\varphi_{31}$$



$$= \frac{1}{2}(q_2\varphi_{21} + q_1\varphi_{12})$$

$$+ \frac{1}{2}(q_2\varphi_{23} + q_3\varphi_{32}) + \frac{1}{2}(q_3\varphi_{31} + q_1\varphi_{13})$$

$$= \frac{1}{2}q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + \frac{1}{2}q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + \frac{1}{2}q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32})$$

$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

3. 推广到点电荷系 $W_{互} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$

二. 连续带电体的静电能

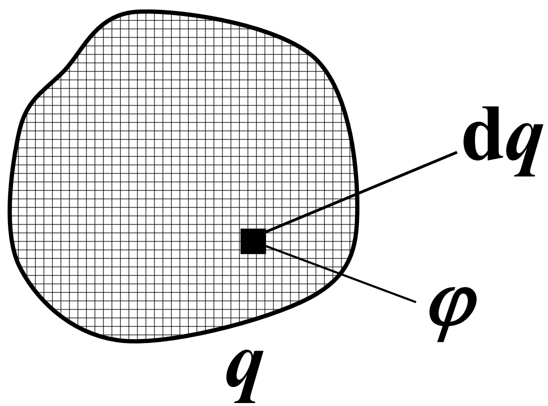
把电荷元彼此分散到无穷远时静电力作的功，

即电荷元之间的静电相互作用能。

单个连续带电体

单个连续带电体的静电能也称为自能：

$$\boxed{W = W_{自} = \frac{1}{2}\int_q \varphi \, \mathrm{d}q}$$



φ 是所有电荷元在 dq 处产生的总电势？

d*q* 处产生的总电势

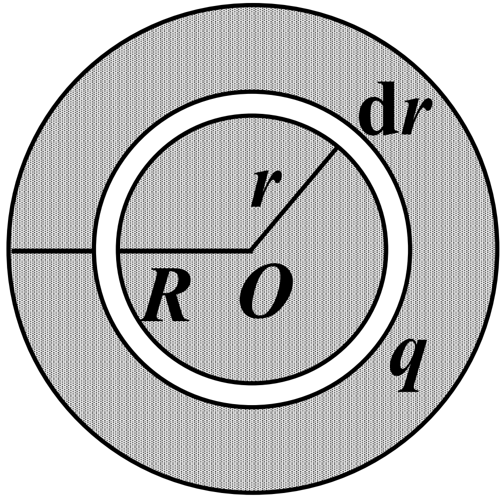
$$\varphi(r) \propto \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0 r} \propto \begin{cases} \boldsymbol{r}^2 & \text{体电荷} \\ \boldsymbol{r} & \text{面电荷} \end{cases}$$

***r*无穷小 ~ 0**

注意：上式可用于体电荷、面电荷体系自能计算，不可用于单个点电荷或线电荷体系的自能计算（发散）。

【例1】半径 R、均匀带电 q 的球体的静电能

解： 考察 $r-r+\mathrm{d}r$ 的球壳，



其电量和所在处的电势为：

$$\mathrm{d}q=\left(\frac{q}{4\pi R^3/3}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{3qr^2}{R^3}\mathrm{d}r$$

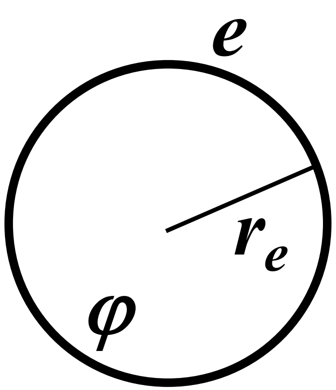
$$\varphi(r)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$

均匀带电球的静电能为：

$$W=\frac{1}{2}\int_q\varphi\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)\frac{3qr^2}{R^3}\mathrm{d}r$$

$$W=\frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{R}=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2R^5$$

【例2】 设电子 $W\approx m_0c^2$，估算其经典半径。



（1）假定电荷 e 均匀分布于电子表面

$$W=\frac{1}{2}\int_e\varphi dq=\frac{1}{2}\varphi e=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}\approx m_0c^2$$

$$r_e\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}\approx 1.4\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$