

# Jordan 标准型

程笛

2024.7.8

回顾线性空间的定义: 线性空间  $V$  是一个配有数乘运算的加法 Abel 群:

$$\mathbb{K} \times V \rightarrow V, (k, v) \mapsto kv$$

并且数乘运算满足一些相容条件. 我们推广线性空间的定义, 我们称一个类似上述的集合为模, 如果将要求的  $\mathbb{K}$  换为环.(以下环都指含单位元的交换环)

**定义 1.** 环  $R$  上的集合  $M$  被称为  $R$ -模, 如果满足

1. 存在加法运算, 是关于加法运算的 Abel 群
2. 数乘运算

$$R \times M \rightarrow M, (r, m) \mapsto rm$$

- $(r + s)m = rm + sm, \forall r, s \in R, m \in M$
- $(rs)m = r(sm), \forall r, s \in R, m \in M$
- $r(m + n) = rm + rn, \forall r \in R, m, n \in M$
- $1m = m, \forall m \in M$

如果  $R$  也是域, 那么  $R$ -模就是  $R$  线性空间.

模  $M$  的子模  $N$  指一个子集, 其满足对数乘封闭. 即  $RN \subseteq N$ .

**例 1.** 环  $R$  本身可以看为  $R$ -模, 此时其上的子模就是理想.

**例 2.**  $R$ -模  $M, I$  是  $R$  的理想, 则

$$IM := \{x_1e_1 + \cdots + x_ne_n; x_i \in I, e_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

是子模.

类似线性空间, 我们也可以定义模同态和商模.

**定理 1.**  $M, N$  是  $R$ -模, 对于同态

$$\varphi: M \rightarrow N$$

则  $\ker \varphi$  是  $M$  的子模,  $\operatorname{Im} \varphi$  也是  $R$ -模. 有诱导同构

$$M/\ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$$

**证明.**

$$m \in \ker \varphi \iff \varphi(m) = 0 \iff \varphi(rm) = r\varphi(m) = 0, \forall r \in R \iff \ker \varphi \text{ 是子模}$$

$$n \in \operatorname{Im} \varphi \iff \exists m \in M, \varphi(m) = n$$

从而  $rn = \varphi(rm) \in \operatorname{Im} \varphi$

同构证明: 映射

$$[m] = m + \ker \varphi \mapsto \varphi(m)$$

显然是满射 ( $m$  原像的所有元素形成等价类  $[m]$ ), 又  $\varphi(m) = 0 \iff m \in \ker \varphi$ , 因此  $[m] = [0]$ , 从而是单射, 从而是同构.  $\square$

类似线性空间, 在模上我们可以试着找“基”, 方便起见, 此后我们只谈论环  $R$  是主理想整环, 且  $M$  的基向量有限的情况.

**定义 2.**  $R$ -模  $M$  是自由的, 如果存在一个有限子集  $\{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $M$  中的任何一个向量均可被该子集的元素唯一地线性表出. 这一子集即为  $M$  的一个基, 称  $M$  的秩 (rank) 为  $m$ .

**例 3.** 有限维线性空间是自由的.

**定义 3.**  $R$ -模  $M$  称为有限生成的, 如果存在有限子集  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ , 它们的线性组合生成整个  $M$ .

**例 4.** 整数环  $\mathbb{Z}$  视为  $\mathbb{Z}$ -模是由 1 有限生成的,  $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$  视为  $\mathbb{Z}$  模也是有限生成的, 但不是自由的.

对于自由模  $M$ , 上述  $W$  生成  $M$ , 则有同态

$$\pi_w: R^m \rightarrow M, (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$$

是满射. 从而有  $R^m/\ker \pi_w \cong M$ . 特别的, 如果是单射, 那么  $R^m \cong M$

**定义 4.** 通过对有限个  $R$ -模  $M_i$  的直积定义运算

$$(v_1, \dots, v_m) + (w_1, \dots, w_m) = (v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m), v_i, w_i \in M_i$$

由此定义了模直和, 对应线性空间的外直和.

对于子模的直和, 则与线性空间子空间直和一致, 即

$$(v_1, \dots, v_m) \mapsto v_1 + \dots + v_m$$

是同构映射. 由此, 上述两种定义直和是同构的.

如果上述的模都是自由模, 那么它们的基共同组成  $M$  的基, 这与线性空间版本并无二致. 从而我们可以通过直和分解来研究模的结构,

**定理 2.** 主理想整环上的有限生成自由模的子模也是有限生成自由模

**证明.**

$R$  是主理想整环,  $M$  是  $\text{rank}(M) = n$  的有限生成  $R$ -模, 存在基  $(e_1, \dots, e_n)$  用归纳法:  $n = 1$  时,  $M \cong R$ , 其上的子模就是  $R$  的理想, 记  $N = RI$ . 由于  $R$  是主理想整环, 故  $I = ie_1$ , 得  $N = R(ie_1)$ , 故  $N$  是以  $ie_1$  为基的自由模. 假设对秩小于  $n$  的自由模上述结果都成立, 考虑秩  $n$  的情况,

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N/N \cap Re_1 & \longrightarrow & M/Re_1 \cong Re_2 \oplus \dots \oplus Re_n \end{array}$$

若  $N \cap Re_1 = \{0\}$ , 则由归纳假设,  $N = N/Re_1 \cap N$  是有限生成自由模.

若  $N \cap Re_1 \neq \{0\}$ , 由于  $N \cap Re_1 \subset Re_1$ , 由归纳假设,  $N \cap Re_1 = Rie_1$ ,  $i \in R$ ,  $N/N \cap Re_1$  也是有限生成自由模, 其基  $\{[u_1], \dots, [u_k]\}$ , 对于任意的  $w \in N$ ,  $[w] \in N/N \cap Re_1$ ,

$$[w] = r_1[u_1] + \dots + r_k[u_k]$$

即

$$w - r_1u_1 - \dots - r_ku_k \in Re_1$$

从而  $w$  被  $\{u_1, \dots, u_k, e_1\}$  线性表出, 这些显然线性无关, 从而是  $N$  的基, 即  $N$  是有限生成的自由模.  $\square$

我们再引入最后一个引理, 然后来到这次的核心定理.

**引理 3.** 主理想整环  $R$  上的有限生成自由模  $M$ , 设  $N$  是其子模, 则  $M$  存在恰当的基  $(u_1, \dots, u_n)$  和  $R$  中元素  $a_i, 1 \leq i \leq m$  满足

$$a_1 | a_2 | \dots | a_m$$

使得  $(a_1 u_1, \dots, a_m u_m)$  为  $N$  的基.

**证明.** 设  $M$  的基  $(e_1, \dots, e_n)$ , 以及生成  $N$  的向量组  $(v_1, \dots, v_k)$ , 有过渡矩阵  $C \in M_{n \times k}(R)$ :

$$(v_1, \dots, v_k) = (e_1, \dots, e_n)C$$

由线性代数的知识, 对于矩阵  $C \in M_{n \times k}(R)$ , 存在可逆矩阵  $P \in GL_n(R), Q \in GL_k(R)$ , 使得

$$PCQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_m & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} =: D$$

其中  $a_i$  满足定理要求. 从而

$$(v_1, \dots, v_k)Q = (e_1, \dots, e_n)P^{-1}D$$

可知在新基  $(e_1, \dots, e_n)P^{-1} = (u_1, \dots, u_n)$  下有  $N$  的基 (容易验证是线性无关的)

$$(v_1, \dots, v_k)Q = (a_1 u_1, \dots, a_m u_m)$$

从而得证.

由证明过程知上述  $a_i$  在相差一个可逆元的情况下是唯一的. 为后续简便起见, 特别的, 我们考虑  $R = \mathbb{K}[x]$ , 那么这些  $a_i$  就是首项相差一个系数下唯一的多项式.  $\square$

**定理 4.** 不变因子分解: 存在  $R^n$  中的基  $u_1, \dots, u_n$ , 和  $a_i, 1 \leq i \leq m$  满足

$$a_1 | a_2 | \dots | a_m$$

使得  $(a_1 u_1, \dots, a_m u_m)$  为  $\ker \pi_w$  的基, 从而分解  $M = R^n / \ker \pi_w$  得到

$$M = \frac{Ru_1 \oplus Ru_2 \oplus \dots \oplus Ru_m \oplus R^r}{\langle a_1 \rangle u_1 \oplus \langle a_2 \rangle u_2 \oplus \dots \oplus \langle a_m \rangle u_m} \cong \frac{R}{\langle a_1 \rangle} \oplus \dots \oplus \frac{R}{\langle a_m \rangle} \oplus R^r$$

证明: 考虑映射  $\sigma$

$$w = w_1 + \dots + w_n \mapsto ([w_1], \dots, [w_m], w_{m+1}, \dots, w_n)$$

容易验证  $\ker \sigma = \langle a_1 \rangle u_1 \oplus \langle a_2 \rangle u_2 \oplus \dots \oplus \langle a_m \rangle u_m$ .

**定理 5.** 环  $R$  中有一组互素的理想  $a_1, \dots, a_m \subseteq R$ , 则有

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_m = a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_m$$

并有同构

$$R/a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cong \frac{R}{a_1} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{a_m}$$

**证明.** 映射

$$R \rightarrow \frac{R}{a_1} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{a_m}, \quad x \mapsto ([x]_{a_1}, [x]_{a_2}, \dots, [x]_{a_m})$$

显然其核为  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m$ , 从而由定理 1 得证.  $\square$

应用中国剩余定理, 通过对  $a_i = up_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$  的分解 (其中  $p_i$  是互素的理想), 从而我们可以对  $\frac{R}{\langle a_i \rangle}$  进一步分解. 即

$$R/p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \cong \frac{R}{p_1^{l_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{R}{p_k^{l_k}}$$

接下来我们将上述结构推广到  $n$  维线性空间中, 从而得到结论: 每个复矩阵  $A$  都相似于它的 Jordan 标准型.

对数域  $\mathbb{K}$  上的有限维线性空间  $V$  上的一个线性映射  $\psi$ , 我们定义数乘映射

$$\mathbb{K}[x] \times V \rightarrow V, \quad (x, v) \mapsto \psi(v)$$

从而对  $a \in \mathbb{K}[x]$ ,

$$a \cdot v = (a_0 + a_1\psi + \cdots + a_n\psi^n)(v)$$

这样的数乘是可交换的, 通过如此定义, 给定一个线性空间  $V$  上的线性映射, 我们就可以将其视作一个  $\mathbb{K}[x]$ -模  $V_\psi$ , 其上的子模就是  $\psi$  不变子空间. 我们知道这样的模的结构:  $V$  的一个基  $(e_1, \dots, e_n)$  在  $\mathbb{K}[x]$  上生成  $V_\psi$ , 从而由初等因子分解,

$$V \cong \frac{\mathbb{K}[x]}{p_1^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{p_k^{m_k}} \oplus \mathbb{K}[x]^r$$

由于  $\mathbb{K}[x]^r$  视为  $\mathbb{K}$  上的线性空间是无限维的, 从而  $r = 0$ . 我们考虑  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  的特殊情况, 其上的素因子只能是一次多项式, 从而得到

$$V \cong \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{11}}} \oplus \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{12}}} \oplus \cdots \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_1)^{m_{1t_1}}} \oplus \cdots \frac{\mathbb{K}[x]}{(\lambda - \lambda_s)^{m_{st_s}}}$$

我们先说明这样的分解在模同构的意义下是唯一的. 我们考虑特定的  $\lambda_s$ , 将指数按大小排列, 由

$$(\lambda - \lambda_s)^j M_1 \cong (\lambda - \lambda_s)^j M_2, j \in \mathbb{N}$$

从而如果某一项不等, 则  $j$  在下降的过程中存在维数不等情况, 使得与同构矛盾.

现在设  $\varphi, \psi$  是两个  $V$  上的线性变换, 对应矩阵  $A, B$ , 其分别诱导线性空间的模如果同构, 即同构映射  $U$  需要适合数乘,

$$U(x_av) = x_b(Uv)$$

得到  $U(Av) = B(Uv)$  得到  $B = UAU^{-1}$ , 从而  $A, B$  相似. 反之亦然. 由此, 我们得到此前的分解给出线性映射相似类的刻画.

由线性代数的知识, 以上的  $\lambda_i$  就是  $\psi$  的所有特征值, 最后我们得到 Jordan 标准型. 考虑子模 ( $\psi$  不变子空间),

$$\frac{\mathbb{K}[\lambda]}{(\lambda - \lambda_t)^{m_t}}$$

自然有模中的基  $(\lambda - \lambda_t)^{m_t-1}, \dots, \lambda - \lambda_t, 1$ , 对应着线性空间中的某些向量构成的基  $e_{m_t-1}, \dots, e_1$ . 由

$$\lambda((\lambda - \lambda_t)^{m_t-1}, \dots, \lambda - \lambda_t, 1) = ((\lambda - \lambda_t)^{m_t-1}, \dots, \lambda - \lambda_t, 1) \begin{pmatrix} \lambda_t & 1 & & \\ & \lambda_t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

这里注意到  $\lambda(\lambda - \lambda_t)^{m_t-1} = (\lambda - \lambda_t)^{m_t} + \lambda_t(\lambda - \lambda_t)^{m_t-1}$ , 前一项在该子模中被模掉了. 即  $\lambda(\lambda - \lambda_t)^{m_t-1} = \lambda_t(\lambda - \lambda_t)^{m_t-1}$

由此可知

$$\psi(e_{m_t-1}, \dots, e_1) = (e_{m_t-1}, \dots, e_1) \begin{pmatrix} \lambda_t & 1 & & \\ & \lambda_t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

按此将所有子模的基合为  $V_\psi$  的基后得到 Jordan 标准型

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

此标准型在相似关系下的不变.

Singular 的 `linalg.lib` 中有计算 Jordan 标准型的函数,

```
> LIB"linalg.lib";
> ring R = (complex,2),x,dp;
> matrix A[3][3] = 3,2,1,0,2,1,3,2,4;
> print(jordannf(gauss_nf(A)));
2,0,0,
0,3,0,
0,1,3
```

似乎只能接受三角阵, 使用 `gauss_nf`.