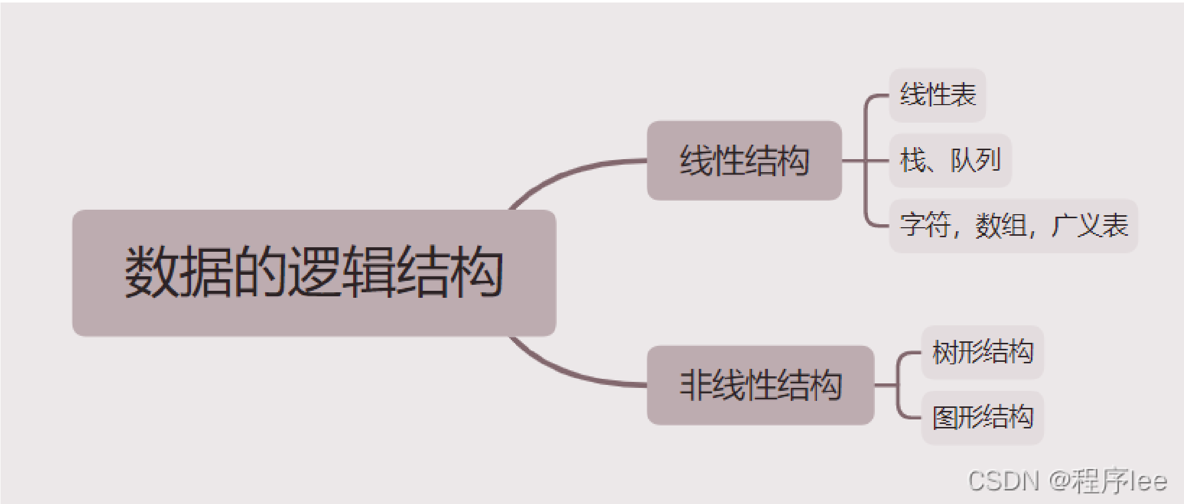
本人将树相关知识总结为**初、中、高**三篇，本文属于树结构的初篇，主要阐述几种经典的树形结构，主要总结**树、二叉树、线索二叉树、森林**等基础相关知识。

本篇内容包含：树，二叉树，平衡二叉树，二叉排序树，满二叉树，完全二叉树，线索二叉树，森林等**基础部分**进行总结，有基础的可以直接在目录中选择**代码部分**观看，关于哈夫曼树，线段，b树，红黑树，最小生成树等在基础部分不进行总结，后面会单独出。

中级篇在：二叉排序树/平衡二叉树/哈夫曼树（主要总结**树二叉排序树/平衡二叉树/哈夫曼树**等）

目录

首先我们先进行回顾，数据结构第一章提到数据的逻辑结构有**线性结**构，和**非线性结构**，如下图：

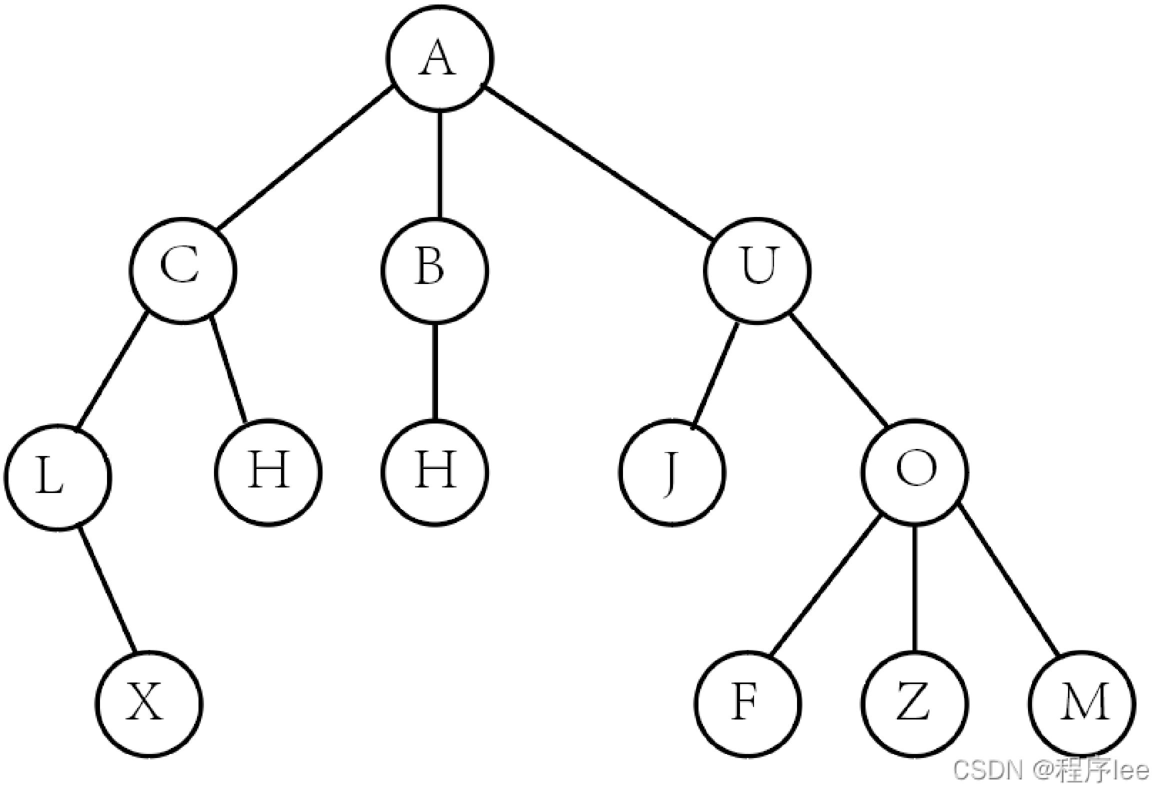


在此之前已经将线性结构学完，接下来进行非线性结构的学习，首先就是树。

1、树的逻辑结构

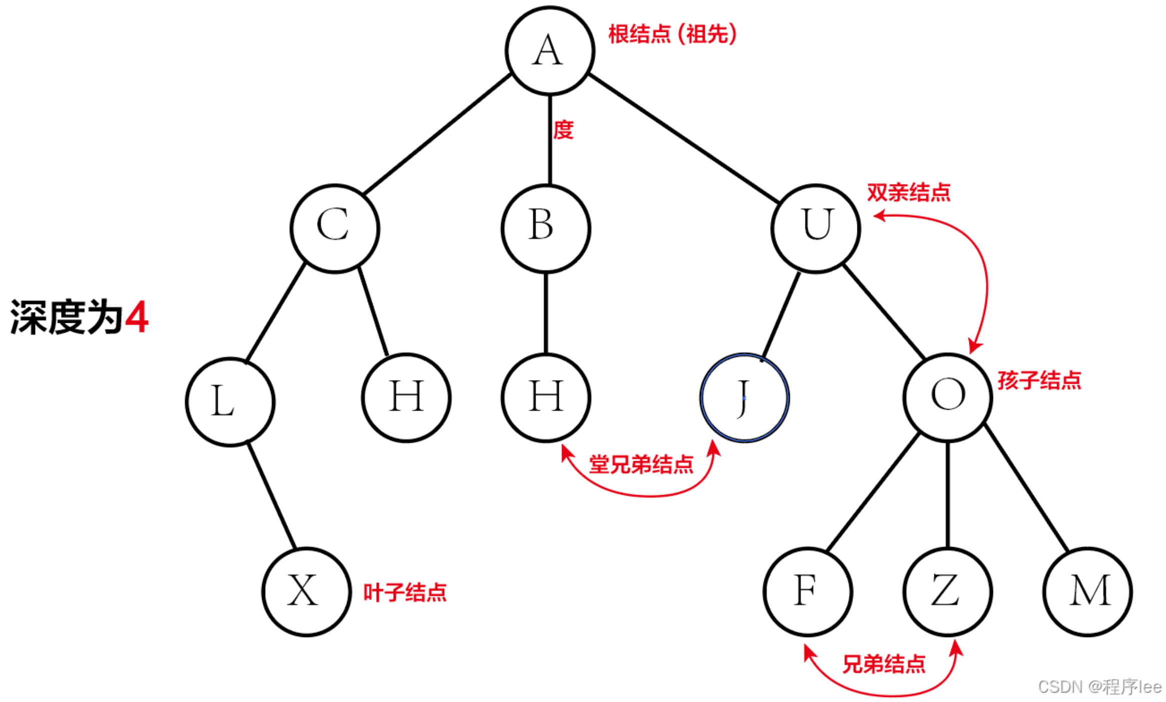
树**的定义：**树:n (n≥0) 个**结点**的有限集合。当n=0时，称为空树;任意一棵非空树满足以下条件:**
1)有且仅有一个特定的称为根的结点;
2当n>1时，除根结点之外的其余结点被分成m(m>0) 个互不相交**的有限集合T, T,, ... ,Tm，其中每个集合又是一棵树，并称为这个根结点的子树。

树的应用：树，族谱，算法分析等，



树的相关术语：

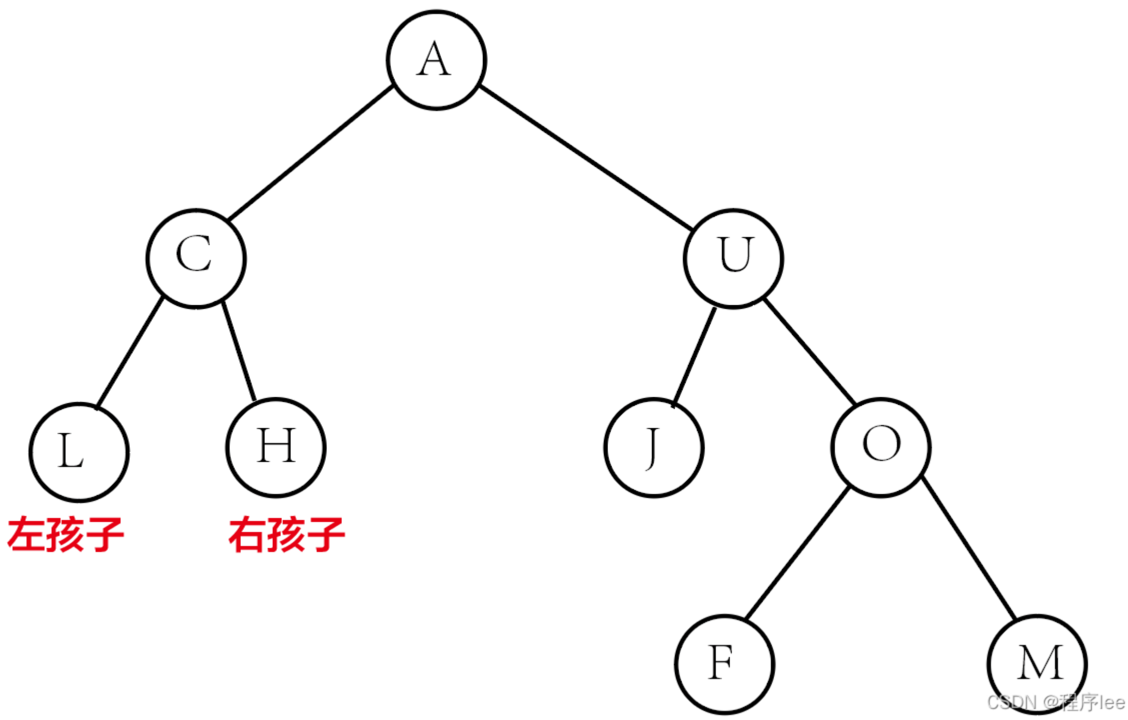
> **如下图所示：**所有节点都有来自双亲节点的度，除根节点，因此，**根节点的定义**为：根结点（root）是树的一个组成部分，也叫树根。所有非空的二叉树中，都有且仅有一个根结点。它是同一棵树中除本身外所有结点的祖先，没有父结点。
>
> **叶子结点**:度为0的结点，也称为终端结点。
> **分支结点**:度不为0的结点，也称为非终端结点。
> **结点的度**:结点所拥有的子树的个数。
> **树的度**:树中各结点度的最大值。
> **结点所在层数:根结点的层数为1;对其余任何结点，若呆结点在第k层，则其孩子结点在第k+1层。**
> **树的深度:树中所有结点的最大层数，也称高度。**



树的几种类型：

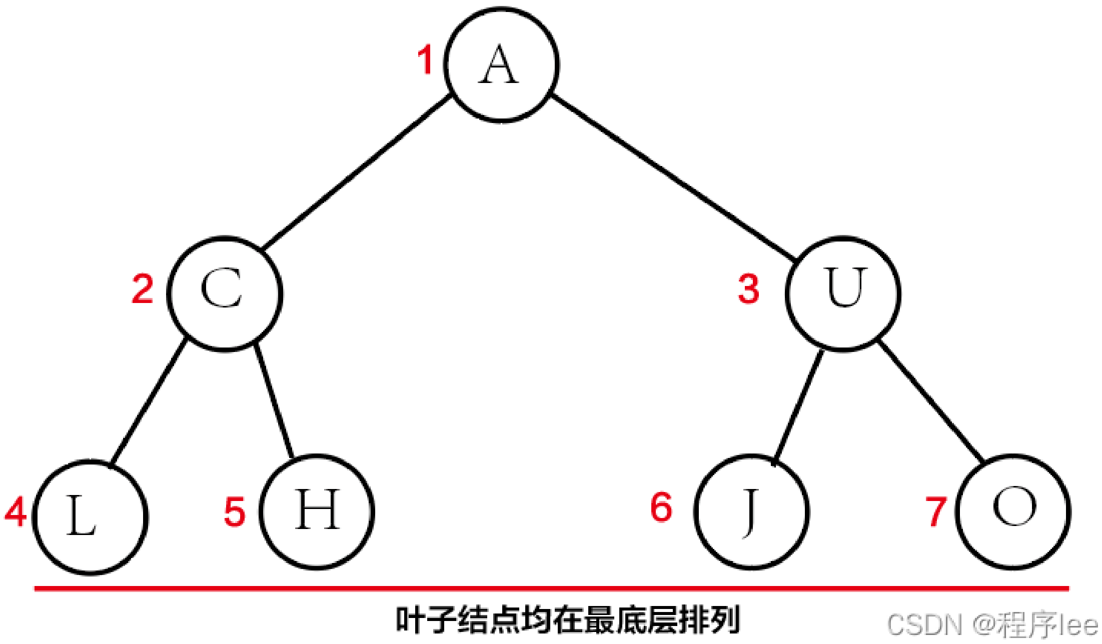
1、二叉树

二叉树是另一种树形结构，其特点是每个结点至多只有两棵子树(即二叉树中不存在度大于2的结点)，并且二叉树的子树有左右之分，其次序不能任意颠倒。除根结点具有2个度外所有结点均只有0或1个度。



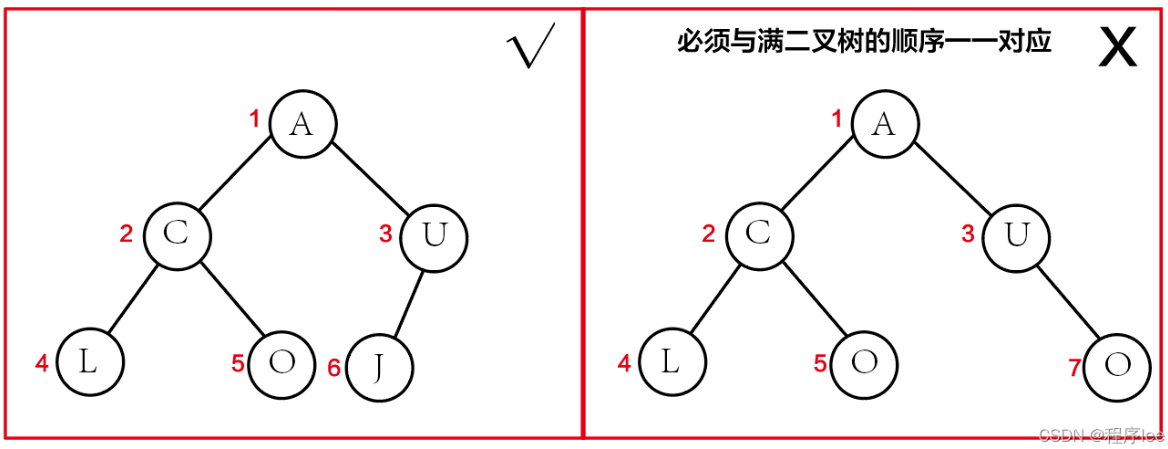
2、满二叉树

一棵高度为h，且含有2-1个结点的.二叉树称为满二叉树，即树中的每层都含有最多的结点，满二叉树的叶子结点都集中在二叉树的最下一层，并且除叶子结点之外的每个结点度数均为2。



3、完全二叉树

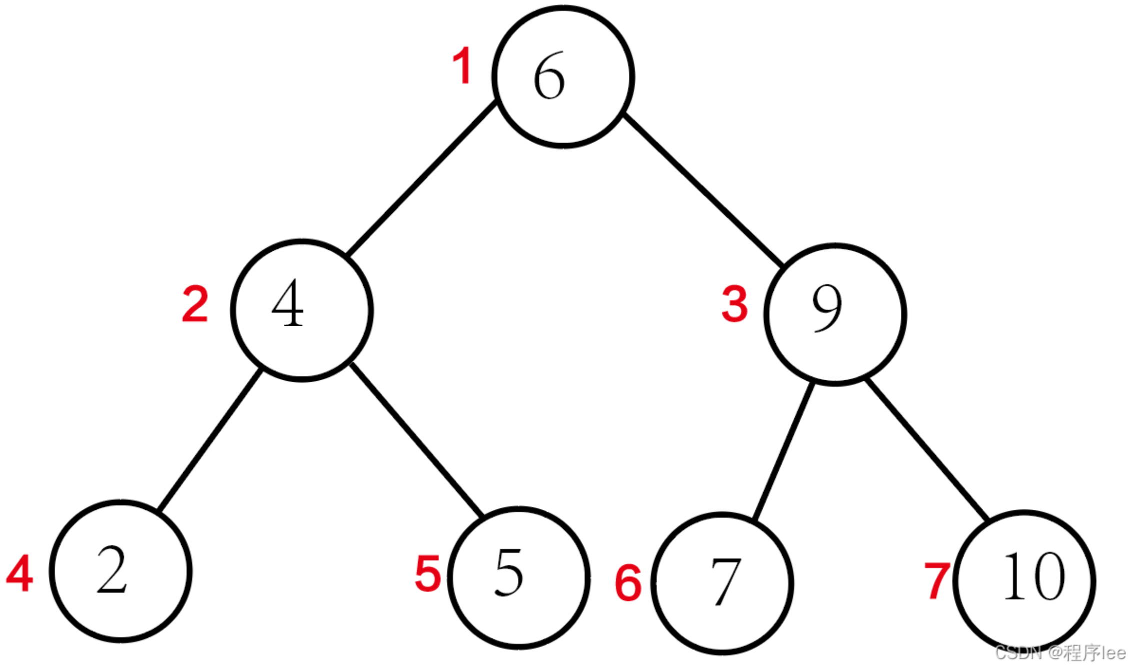
高度为h、有n个结点的二叉树，当且仅当其每个结点都与高度为h的满二叉树中编号为1~n的结点一一对应时，称为完全二叉树。



4、二叉排序树

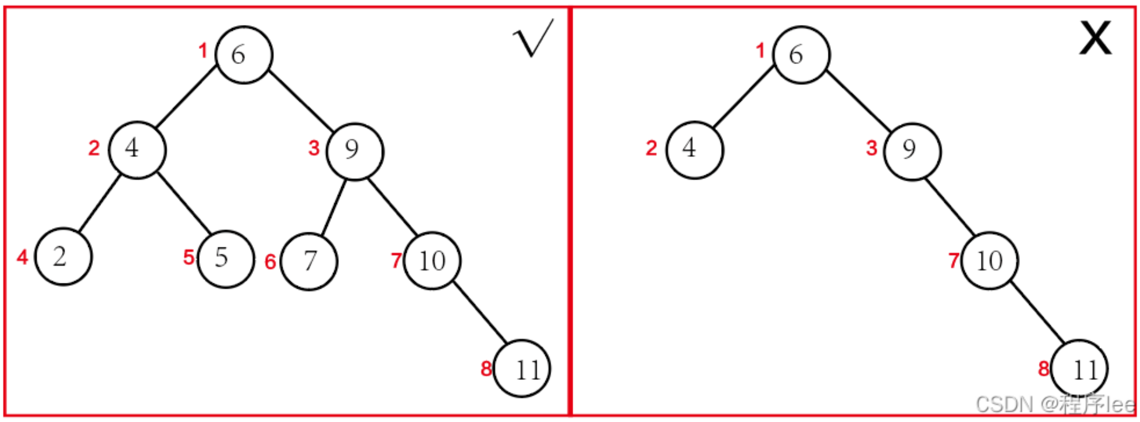
（二叉搜索树、二叉查找树、BST）

> 若任意节点的左子树不空，则左子树上所有节点的值均小于它的根节点的值；
> 若任意节点的右子树不空，则右子树上所有节点的值均大于它的根节点的值；
> 任意节点的左、右子树也分别为二叉查找树；
> 没有键值相等的节点。



5、平衡二叉树

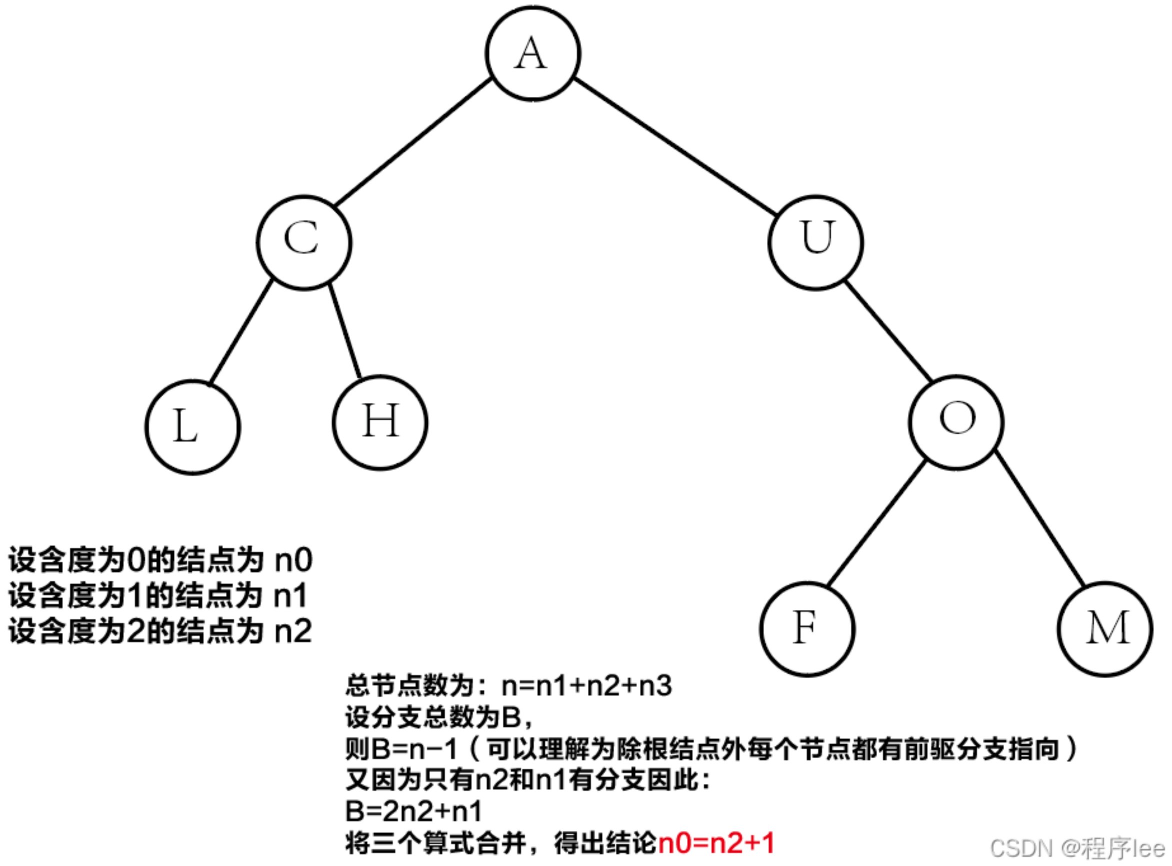
平衡二叉搜索树（Self-balancing binary search tree）又被称为AVL树（有别于AVL算法），且具有以下性质：它是一棵空树或它的左右两个子树的高度差的绝对值不超过1，并且左右两个子树都是一棵平衡二叉树。平衡二叉树的常用实现方法有红黑树、AVL、替罪羊树、Treap、伸展树等。



二叉树的性质:

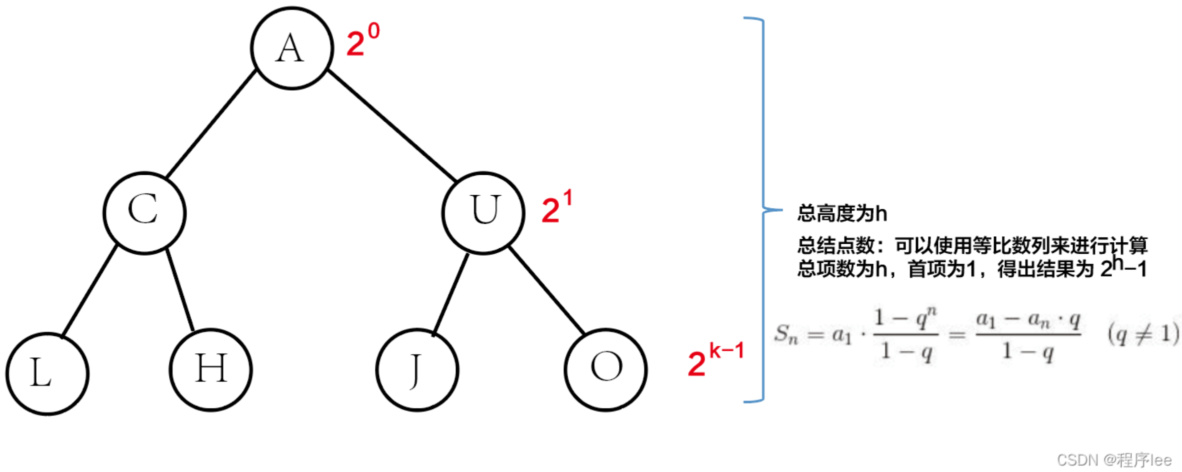
二叉树性质:

1、非空二叉树上的叶子结点数等于度为2的结点数加1，即no=n2+l。



2、非空二叉树中，第n层的结点总数不超过2的n-1次方

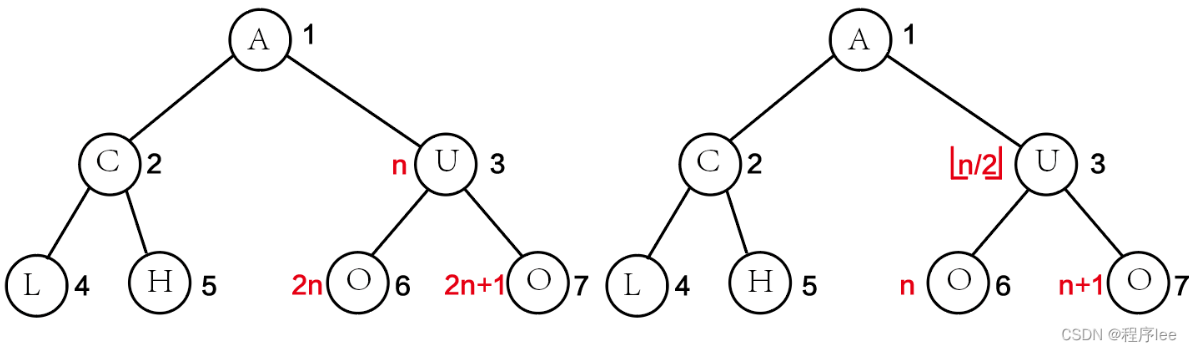
3、非空二叉树中，深度为h总结点数最多不超过2的h次方-1



满二叉树性质：

可以对满二叉树按层序编号约定编号从根结点（根结点编号为1)起，自上而下，自左向右。这样，每个结点对应一个编号，对于编号为i的结点，若有双亲，则其双亲为[2/n],若有左孩子，则左孩子为2n;若有右孩子，则右孩子为2n+ 1。

每行总结点数为2的n-1次方



完全二叉树性质

具有n个(n>0)结点的完全二叉树的高度为「log2(n+1)]或Llog2n]+1。

设高度为h，根据性质关系可以成立以下等式

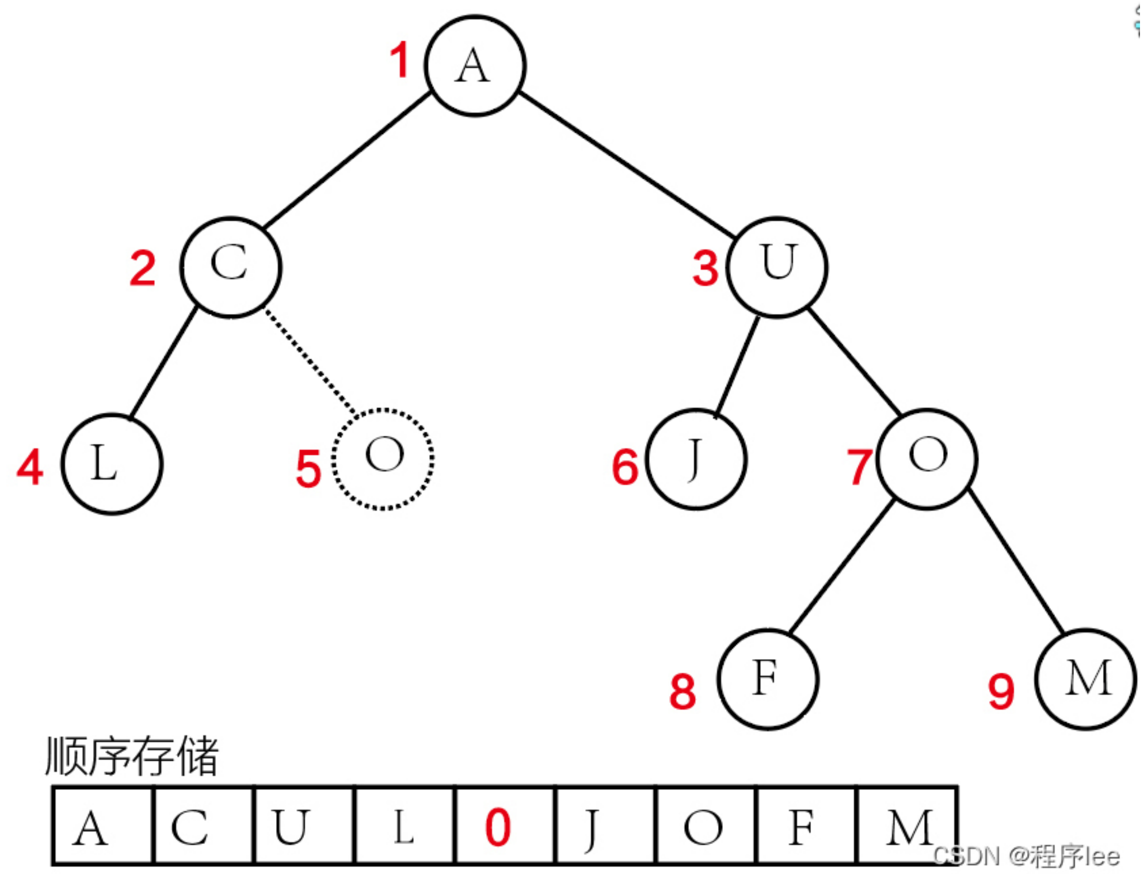
$$2^{h-1}-1 < n \le 2^h-1 \quad 或 \quad 2^{h-1} \le n < 2^h$$

得 $2^{h-1} < n+1 \le 2^h$，即 $h-1 < \log_2(n+1) \le h$，因为 h 为正整数，所以 $h=\lceil \log_2(n+1) \rceil$。
或得 $h-1 \le \log_2 n < h$，所以 $h=\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$。

2、树的存储结构

树的顺序存储结构

实现:按满二叉树的结点层次编号，依次存放二叉树中的数据元素。如下图所示



顺序代码

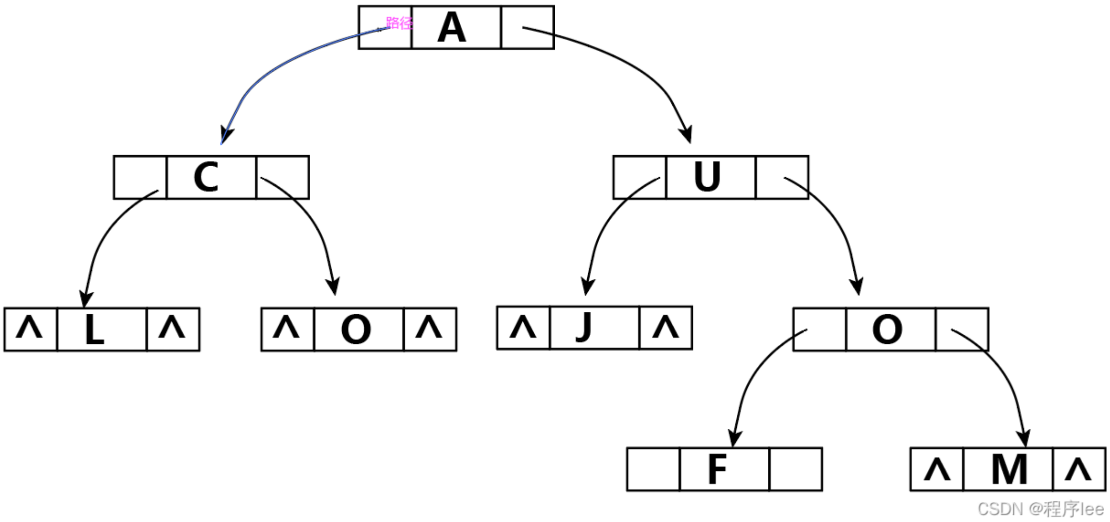
```
//二叉树的顺序存储
#define MAXSIZE 20
struct SqBiTree
{
    Typedef TlemType SqBiTree[MAXSIZE];  //定义数组空间
    SqBiTree bt;              //定义一个变量记录数量

}
```

这种方式在实际工作中很少会用到，对于删除，添加，寻找孩子，双亲等都不方便并且当分支节点为空过多时，浪费存储空间。更适合与**满二叉树**和**完全二叉树**。因此常常采用链式存储方式

树的链式存储结构

由于顺序存储的空间利用率较低，因此二叉树一般都采用链式存储结构，用链表结点来存储二叉树中的每个结点。在二叉树中，结点结构通常包括若干数据域和若干指针域，二叉链表至少包含3个域:数据域**data**、左指针域**Lchild**和右指针域**Rchild**



链式代码

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
typedef struct BiNode {
    TelemType data;     //数据域
    struct BiNode* Lchild, * Rchild  //建立左指针和右指针

}BiNode, * BiTree;
```

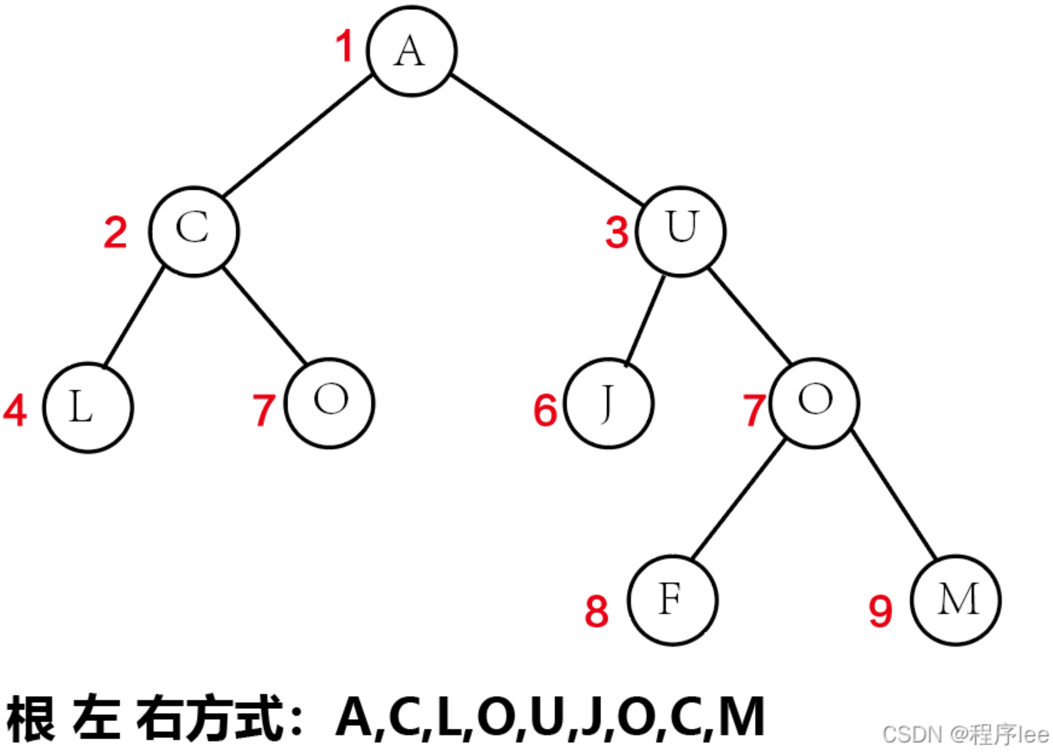
3、二叉树遍历及创建

二叉树的遍历

我们需要先讲遍历方式，再介绍创建吗，因为二叉树的特性，无论是遍历还是创建等操作，都需要基于先序遍历或中序遍历或后序遍历才能进行，因此可以按照**递归**的思路进行遍历的运算。思路如下：按照遍历子树的原则常见的遍历顺序有如下几种：**DLR,LDR,LRD.DRL,RDL,RLD**. 通常考虑优先左子树的方式，因此还剩下如下三种方式即：**DLR,LDR,LRD**。暂时仅仅给出**伪代码**，包含**层次遍历**在后面会将整体遍历代码贴出来，对于非遍历方法暂不讲解。

先序遍历 DLR

先序遍历(PreOrder）的操作过程如下。若二叉树为空，则什么也不做;否则1、访问根结点;
 2、先序遍历左子树 3、先序遍历右子树，对应的递归算法如下:

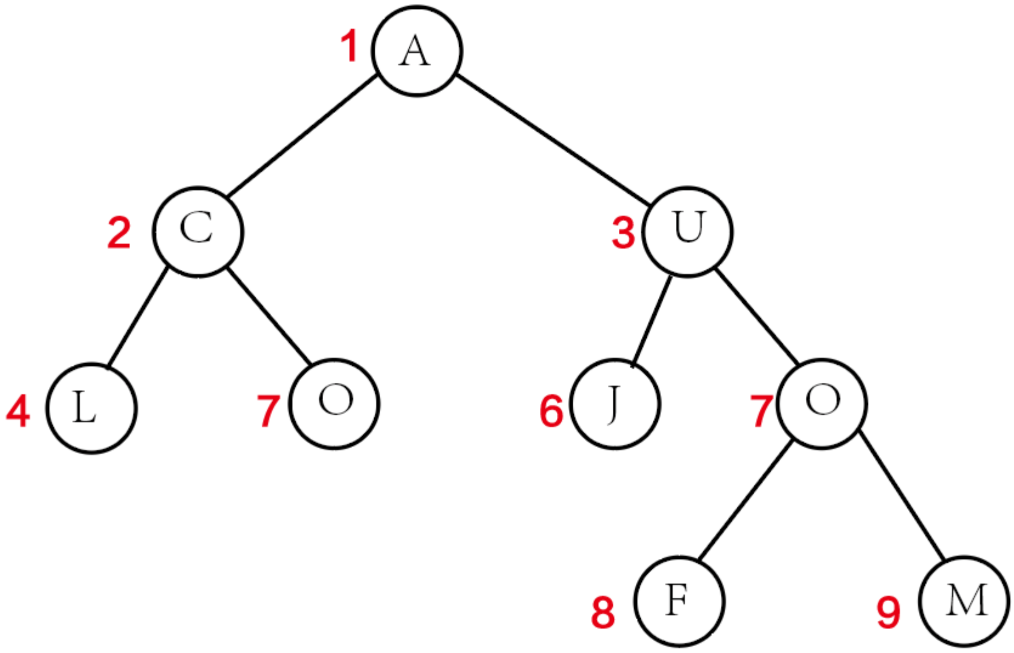


先序遍历代码

```
void PreOrder(BiTree t) {  //先序遍历函数
    if(t==NULL) {
        return false;       //树为空
    }
    visit(t);             //遍历根结点
    PreOrder(t->Lchild);  //遍历左子树
    PreOrder(t->Rchild)     //遍历右子树
}
```

中序遍历LDR

中序遍历(InOrder的操作过程如下。若二叉树为空，则什么也不做否则1、中序遍历左子树;
 2、访问根结点3、中序遍历右子树。如图所示A左面数值即为根结点的左面，遍历后A右面的数值即在根结点右面



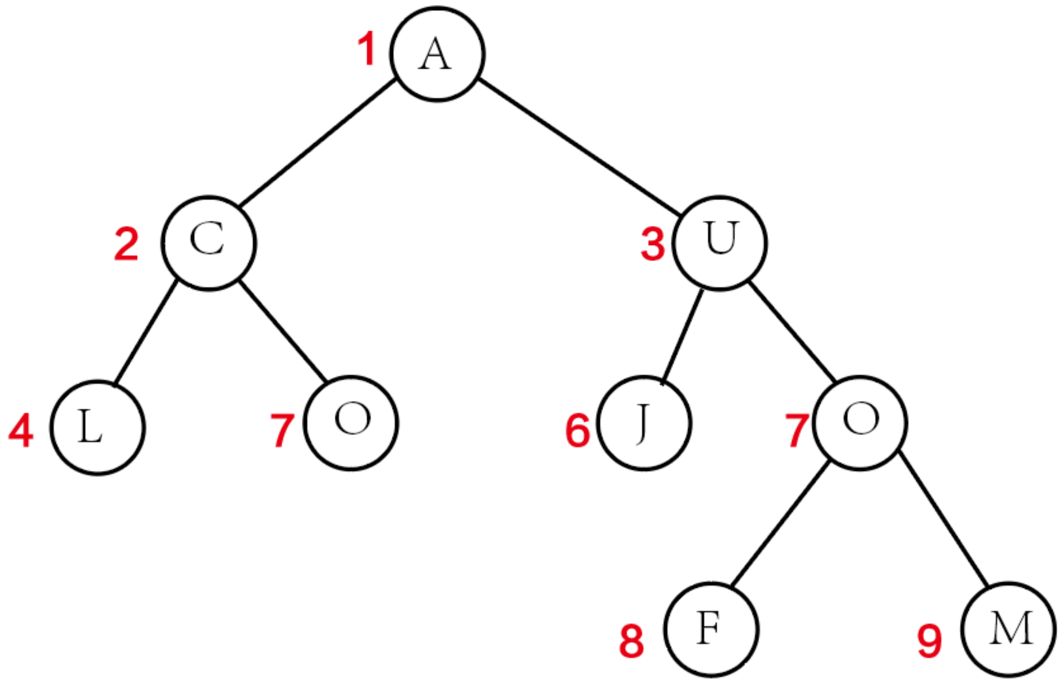
左 根 右方式：L,C,O,A,J,U,F,O,M

中序遍历代码

```
void InOrder(BiTree t) {  //先序遍历函数
    if(t==NULL) {
        return false;      //树为空
    }
    InOrder(t->Lchild);  //遍历左子树
    visit(t);           //遍历根结点
    InOrder(t->Rchild)      //遍历右子树
}
```

后序遍历

后序遍历(PostOrder)的操作过程如下。若二叉树为空，则什么也不做否则1、后序遍历左子树;
2、后序遍历右子树 3、访问根结点。



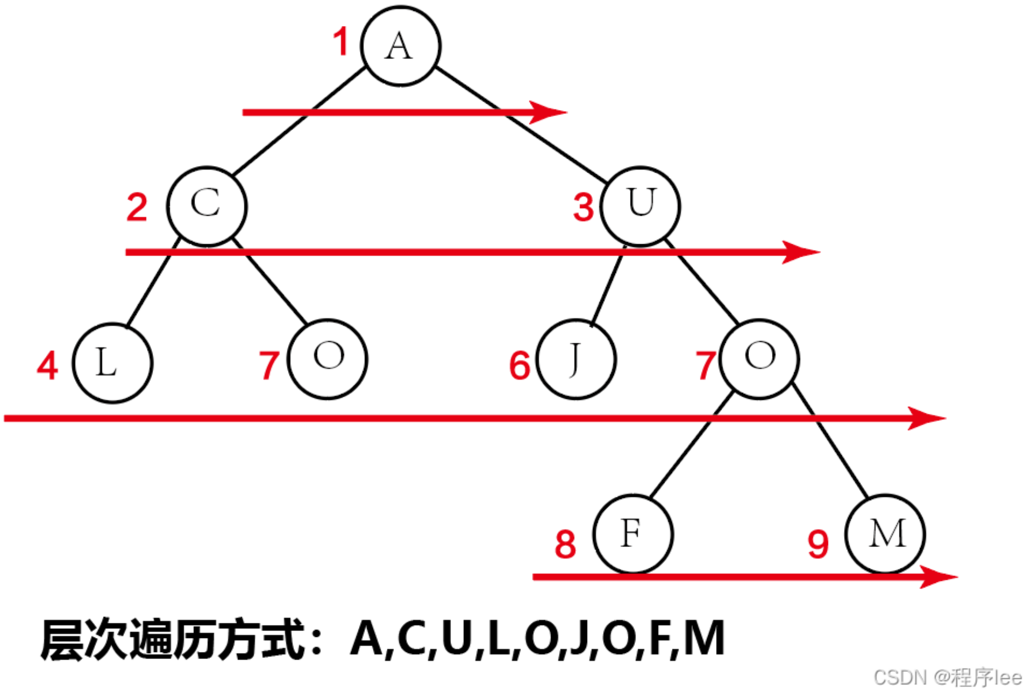
左 右 根方式：L,O,C,J,F,M,O,U,A

后序遍历代码

```
void PostOrder(BiTree t) {  //先序遍历函数
    if(t==NULL) {
        return false;       //树为空
    }
    PostOrder(t->Lchild);  //遍历左子树
    PostOrder(t->Rchild)        //遍历右子树
    visit(t);           //遍历根结点
}
```

层次遍历

层次遍历借助于队列的思想，①首先将根结点放入队列中 ②判断队列是否空 ③头结点出队④访问出队节点⑤判断左右子树是否为空，根结点入队。



层次遍历代码

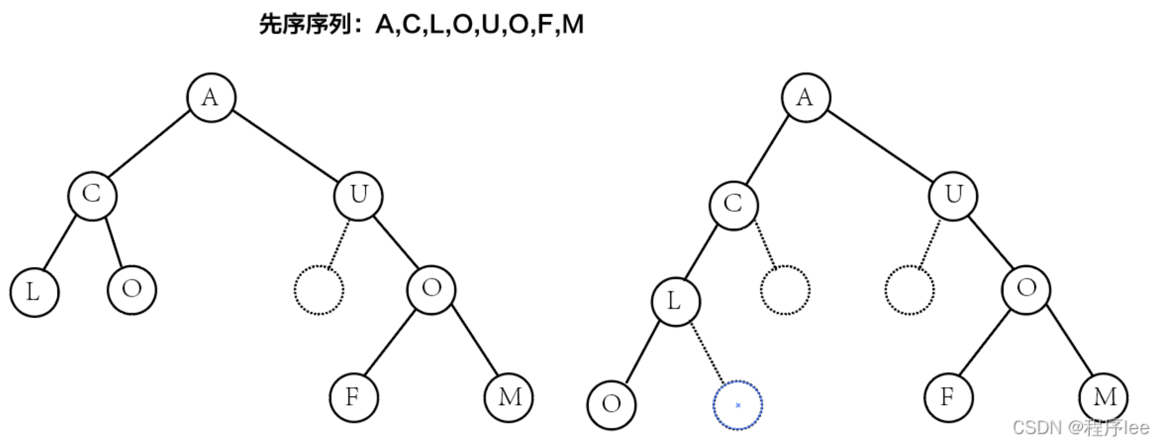
```
#define MAX_SIZE 20
typedef struct BiTree { //二叉链表
    int data;
    struct BiTree* Rchild, * Lchild;

}BiTree;
typedef struct  Quene {       //循环队列
    BiTree* data[MAX_SIZE];
    int front, rear;         //定义头尾指针
}Quene;

void LevalOrder(BiTree* T) {
    BiTree* p; Quene* q;      //定义指针
    InitQuene(q);              //初始化队列
    enQuene(q,p);               //根结点入队
    while (!QueneEmpty(q))      //队列为空则退出循环
                                //(此处是要判断子树是否还有孩子)
    {
        deQuene(q,p);          //出队
        printf("%d",p->data);  //访问节点
        if (p->Lchild) { enQuene(q, p->Lchild); }  //左孩子入队
        if (p->Rchild) { enQuene(q, p->Rchild); } //右孩子入队
    }
}
```

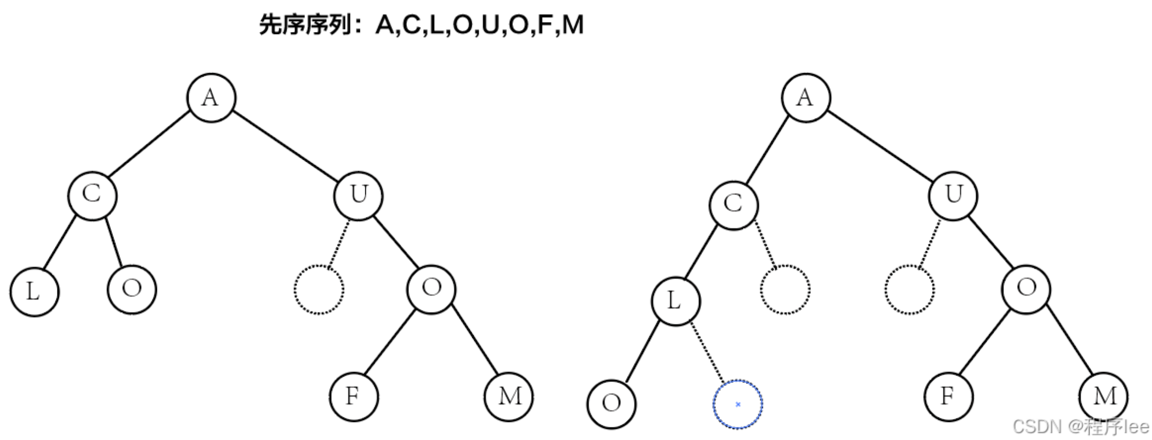
二叉树创建

假设按照先序序列输入：A C L O U J O F M



由此可看出，在仅仅给出先序序列情况下，并不能确定唯一的树形结构，只有在确定中序和先序的情况下才能确定唯一的树形结构，那么我们可以在输入时进行一些改变。

假设按照先序序列输入：**A C L O U # J O F M** 将空位以 **#** 代替，这样便可以确定唯一的树形结构了。



这里理解了，就可以手撸代码了，代码如下，注意这里的两种创建方式

返回值创建（推荐）

```
TNode CreatBinaryTree(TNode T){
    char ch;
    printf("请输入当前结点的值");
    scanf("%c",&ch);
    getchar();
    if (ch=='#') {
        T = NULL;      //节点为空
    }
    else {
        if (T = (TNode)malloc(sizeof(BiTree))) {  //开辟空间并检测是否成功
            T->data = ch;
            T->Lchild = CreatBinaryTree(T->Lchild);
            T->Rchild = CreatBinaryTree(T->Rchild);
            //CreatBinaryTree(T->Lchild); //构造左子树
            //CreatBinaryTree(T->Rchild); //构造右子树
        }
    }
```

```
    T->data = ch;
    T->Lchild = CreatBinaryTree(T->Lchild);
    T->Rchild = CreatBinaryTree(T->Rchild);
    //CreatBinaryTree(T->Lchild); //构造左子树
    //CreatBinaryTree(T->Rchild); //构造右子树
}
```


注意这里一定要接收递归的返回值，如果不接收，这里并不能对递归外的参数进行更改。

引用/双指针创建

```
void CreatBinaryTree(TNode &T){
    char ch;
    printf("请输入当前结点的值");
    scanf("%c",&ch);
    getchar();
    if (ch=='#') {
        T = NULL;       //节点为空
    }
    else {
        if (T = (TNode)malloc(sizeof(BiTree))) {  //开辟空间并检测是否成功
            T->data = ch;
        /*  T->Lchild = CreatBinaryTree(T->Lchild);
            T->Rchild = CreatBinaryTree(T->Rchild);*/
            CreatBinaryTree(T->Lchild); //构造左子树
            CreatBinaryTree(T->Rchild); //构造右子树
        }
    }
}
```

```
void CreatBinaryTree(TNode &T){
    char ch;
    printf("请输入当前结点的值");
    scanf("%c",&ch);
    getchar();
    if (ch=='#') {
        T = NULL;       //节点为空
    }
    else {
        if (T = (TNode)malloc(sizeof(BiTree))) {  //开辟空间并检测是否成功
            T->data = ch;
        /*  T->Lchild = CreatBinaryTree(T->Lchild);
            T->Rchild = CreatBinaryTree(T->Rchild);*/
            CreatBinaryTree(T->Lchild); //构造左子树
            CreatBinaryTree(T->Rchild); //构造右子树
        }
    }
}
```


这里还是建议用返回值的方式便于理解

总结：二叉树遍历整体代码

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
//二叉树先序遍历
typedef struct BiTree { //链式建立
    char data;
    struct BiTree* Lchild;
    struct BiTree* Rchild;  //左右孩子指针
}BiTree,*TNode;

TNode CreatBinaryTree(TNode T){   //创建
    char ch;
    printf("请输入当前结点的值");
    scanf("%c",&ch);
    getchar();
    if (ch=='#') {
        T = NULL;      //节点为空
    }
    else {
        if (T = (TNode)malloc(sizeof(BiTree))) {  //开辟空间并检测是否成功
            T->data = ch;
            T->Lchild = CreatBinaryTree(T->Lchild);
            T->Rchild =CreatBinaryTree(T->Rchild)
        }
    }
    return T;
}
void PreOrderTraverse(TNode T)//二叉树的先序遍历
{
    if (T == NULL)
        return;
    printf("%c ", T->data);
    PreOrderTraverse(T->Lchild);
    PreOrderTraverse(T->Rchild);
}
void InOrderTraverse(TNode T)//二叉树的中序遍历
{
    if (T == NULL)
        return;
    InOrderTraverse(T->Lchild);
    printf("%c ", T->data);
    InOrderTraverse(T->Rchild);
}
void PostOrderTraverse(TNode T)//二叉树的后序遍历
{
    if (T == NULL)
        return;
    PostOrderTraverse(T->Lchild);
    PostOrderTraverse(T->Rchild);
    printf("%c ", T->data);
}
int main() {
    TNode T= (TNode)malloc(sizeof(BiTree));
    printf("请输入构建二叉树的序列");
    T=CreatBinaryTree(T);//构建二叉树
```

```
    PreOrderTraverse(T);//先序输出
    InOrderTraverse(T);//中序输出
    PostOrderTraverse(T);//后序输出
    return 0;
}
```

二叉树相关算法

二叉树深度计算

```
int Depth(BiTree T){
    if (T == NULL) return 0;
    else
    {
        m = Depth(T.Lchild);
        n = Depth(T.Rchild);
        if (m > n) return (m + 1);
        else{
            return (n + 1);
        }
    }
}
```

二叉树结点计算

```
int NodeCount(BiTree T) {
    if (T==NULL) {
        return 0;
    }
    else {
        return NodeCount(T->Lchild) +
            NodeCount(T->Rchild) + 1;
    }
}
```

线索二叉树遍历

当需要找树的前驱后继结点时，仅仅依靠左右孩子指针是完全不够的，左右指针只可以找到孩子结点无法找到双亲，因此我们引出了线索二叉树的概念

如果某个结点的左孩子为空，则将空的左孩子指针域改为指向其**前驱;**如果某结点的右孩子为空，则将空的右孩子指针域改为指向其**后继，**因此我们增加两个指针域，**ltag和rtag。**实际上是**标记域**

ltag = 0lchild指向该结点的左孩子

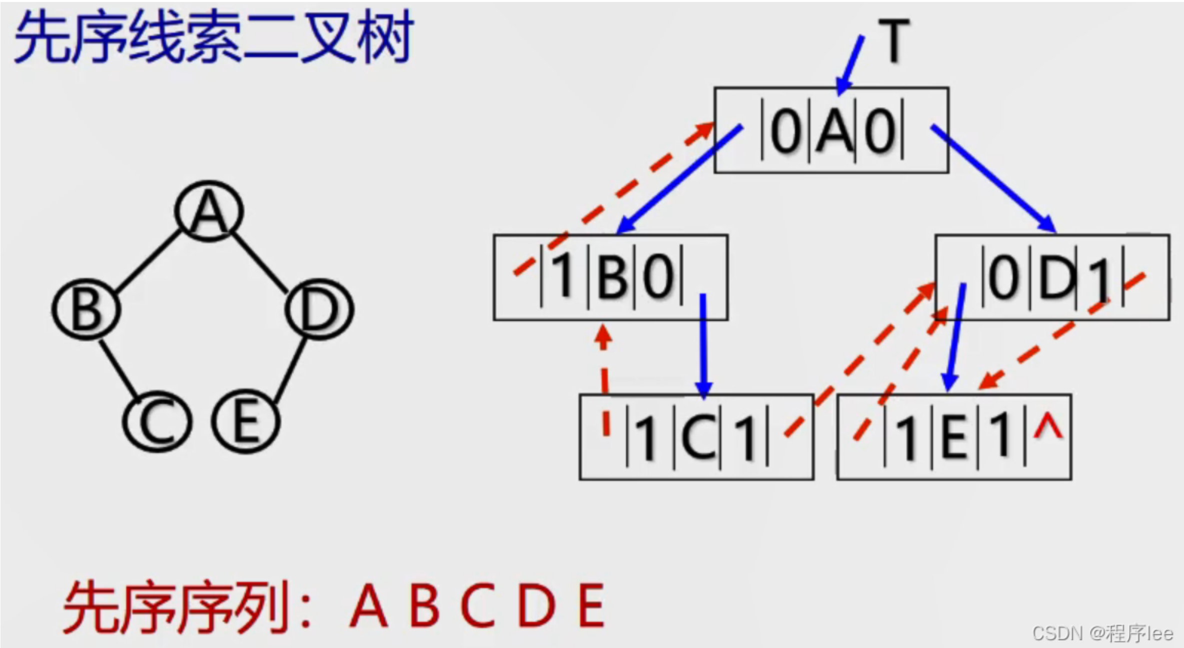
ltag = 1lchild指向该结点的前驱

rtag = 0 rchild指向该结点的右孩子

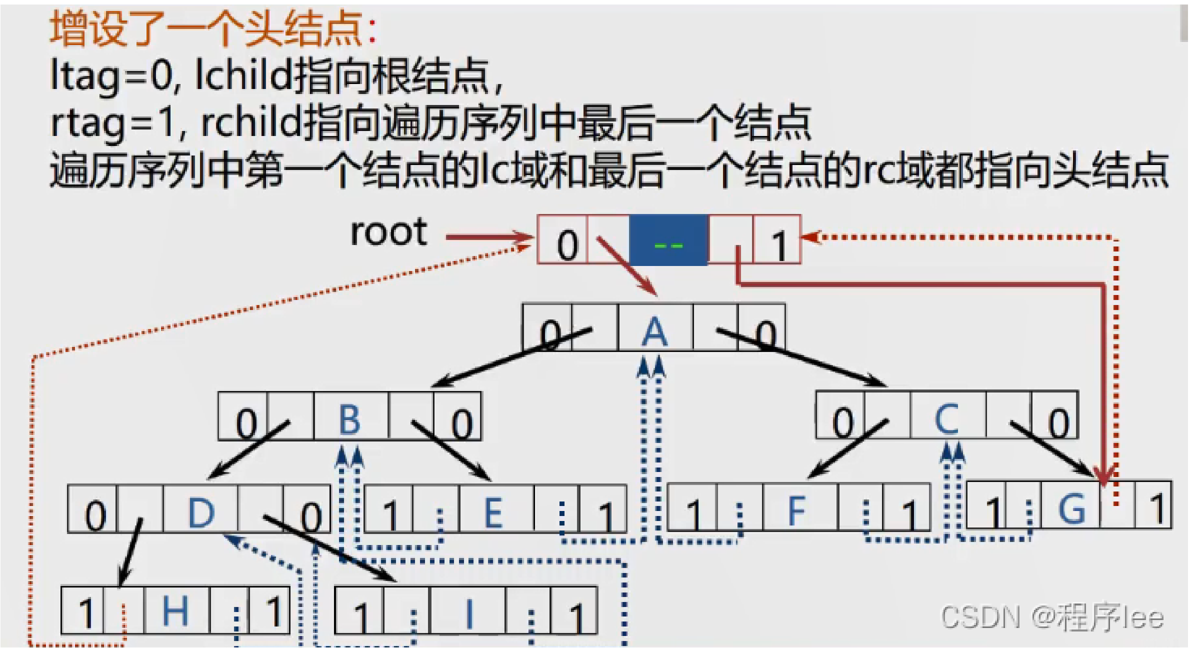
rtag = 1 rchild指向该结点的后继

Lchild	ltag	data	rtag	Rchild


```
typedef struct BiTree { //链式建立
    char data;
    int ltag, rtag;     //标记域
    struct BiTree* Lchild;
    struct BiTree* Rchild;  //左右孩子指针
}BiTree, * TNode;
```



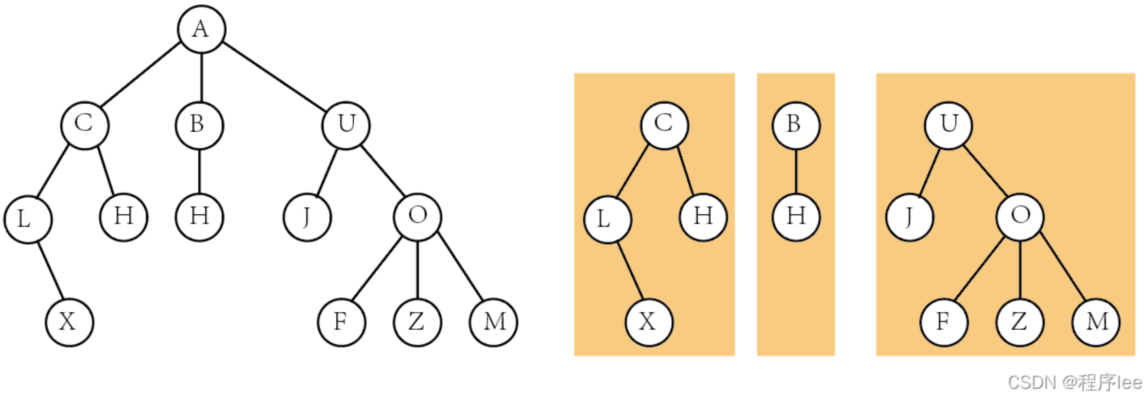
图片来自于 bilibili 王卓老师



树、森林遍历

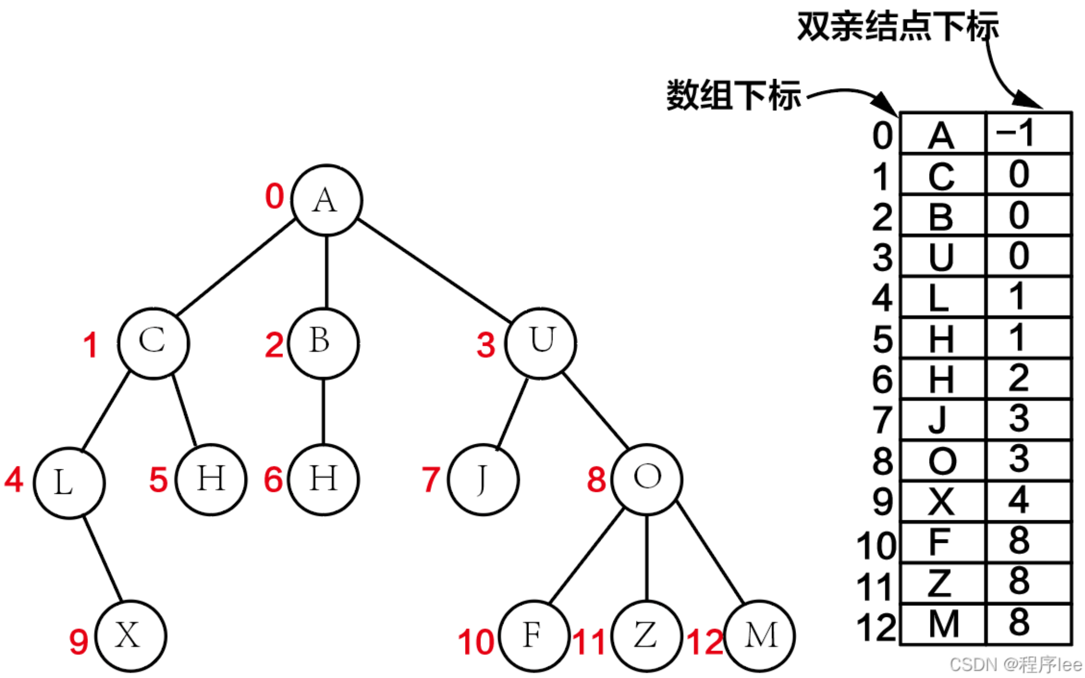
之前有对树进行介绍，因此这里将树和森林进行对比：

森林就是m颗不想交的树的集合，简单思考就是把树的根结点去掉就是森林。



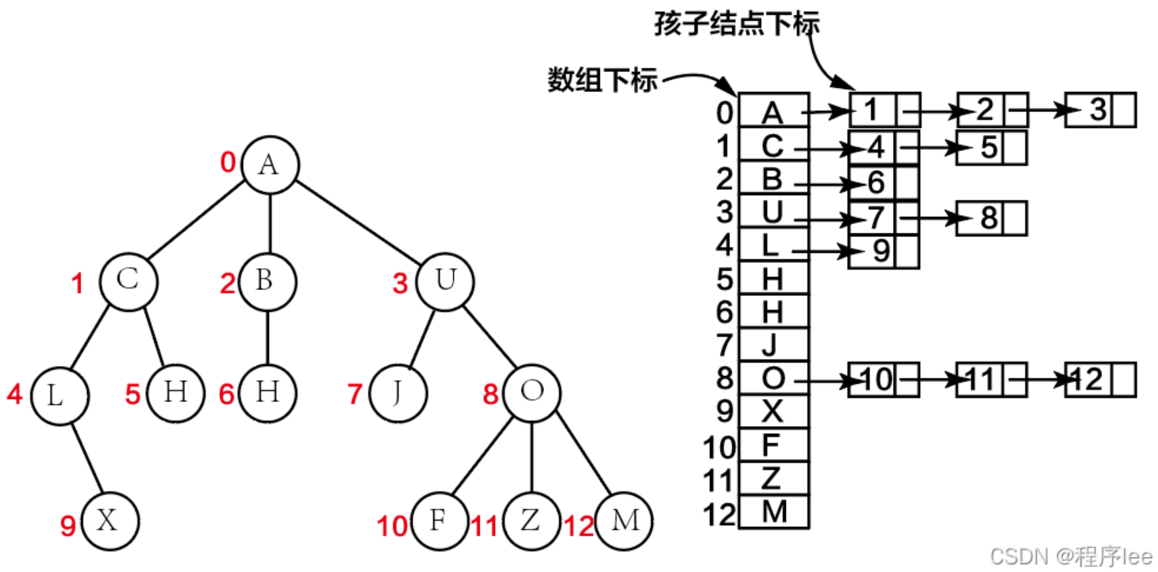
树的存储表示法：

双亲表示法：这种存储方式采用一组连续空间来存储每个结点，同时在每个结点中增设一个伪指针，指示其双亲结点在数组中的位置。

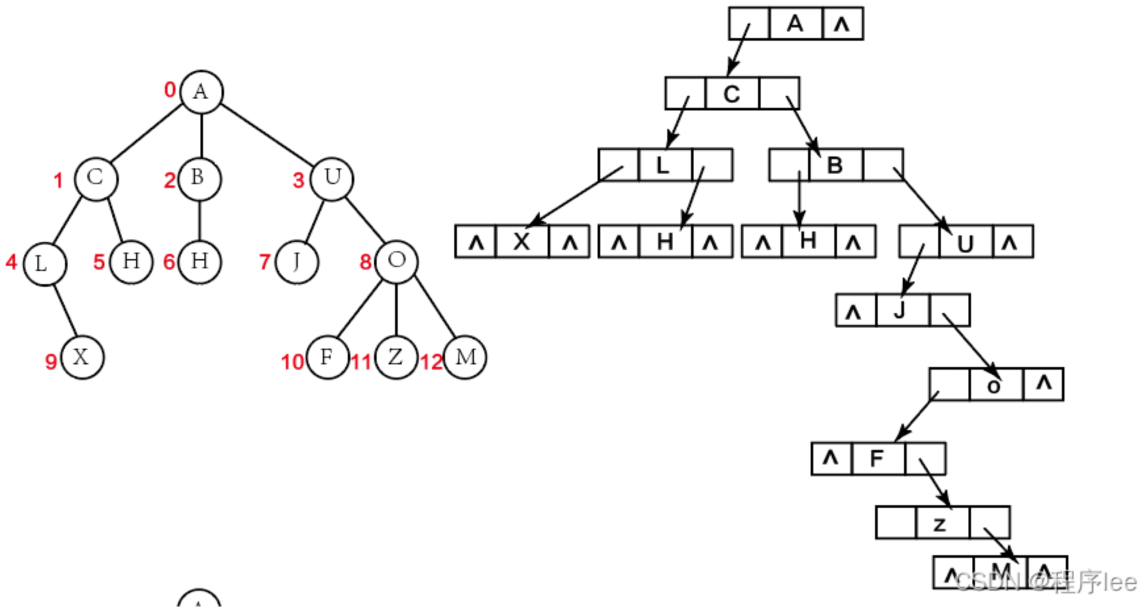


孩子表示法：是将每个结点的孩子结点都用单链表链接起来形成一个线性结构，此时n个结点就有n个孩子链表(叶子结点的孩子链表为空表)

这种存储方式寻找子女的操作非常直接，而寻找双亲的操作需要遍历n个结点中孩子链表指针域所指向的n个孩子链表。



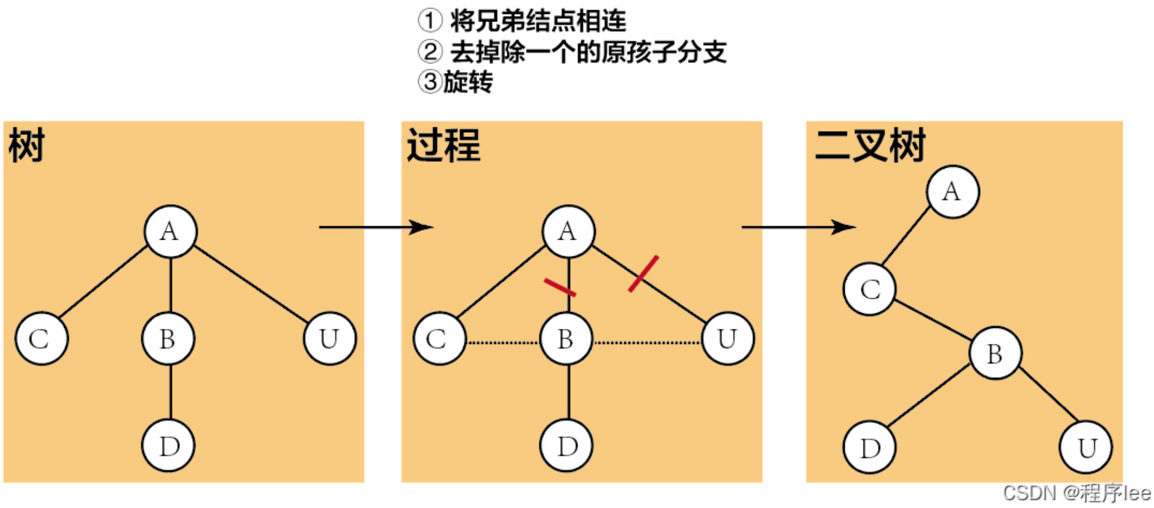
孩子兄弟表示法又称二叉树表示法，即以二叉链表作为树的存储结构。孩子兄弟表示法使每个结点包括三部分内容:结点值、左指向结点第一个**孩子**结点的指针，及右指向结点下一个**兄弟**结点的指针（沿此域可以找到结点的所有兄弟结点)



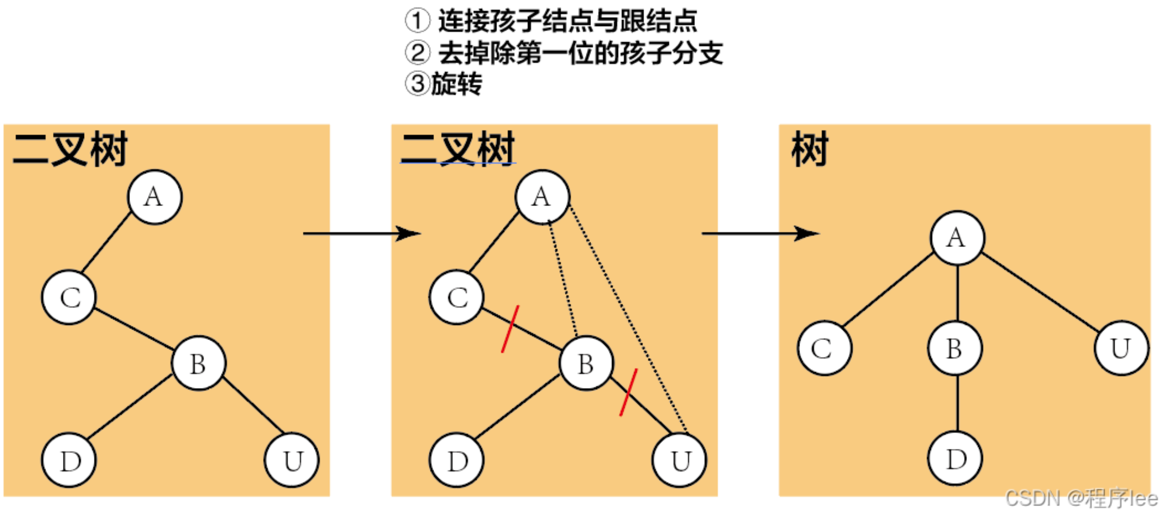
树、森林、二叉树转换

树转二叉树:

给定一个树就能够找到与之对应的二叉树，因为二者都可以用二叉链表形式表示。

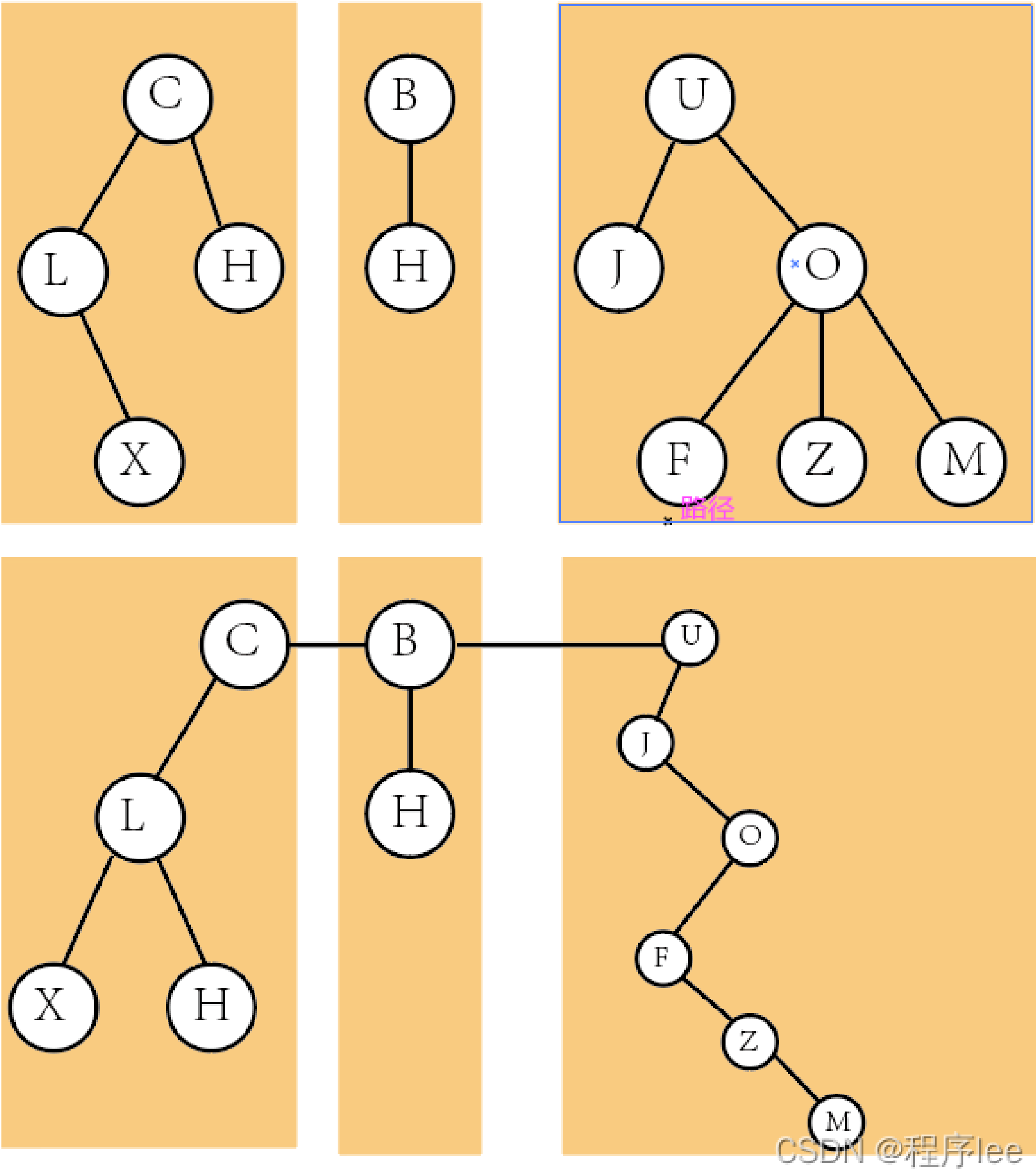


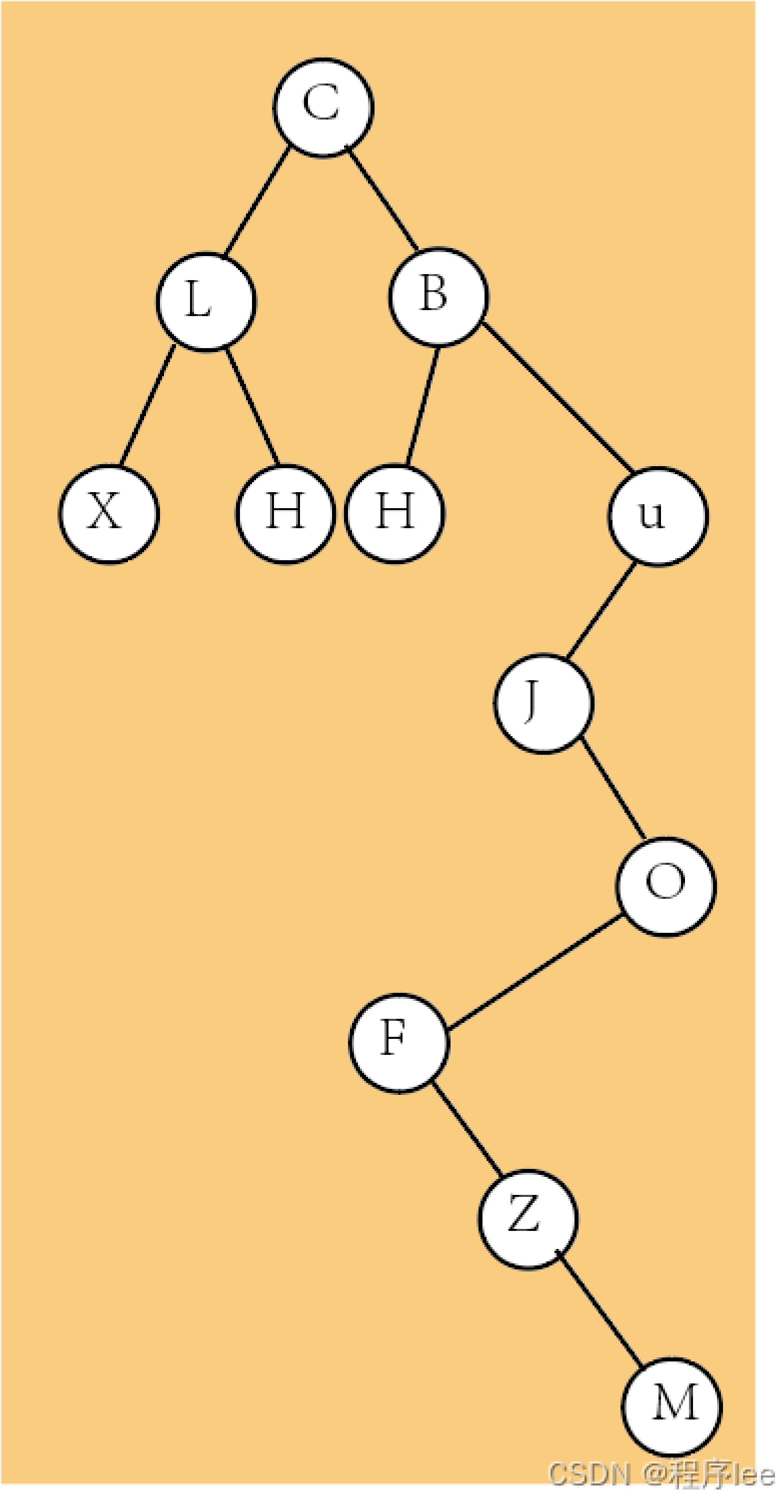
二叉树转树：



森林转换成二叉树：

步骤①分别将各树转换成二叉树：② 将根相连 ③旋转


C
L
H
X
B
H
U
J
O
F
Z
M
路径
C
B
U
J
L
H
O
X
H
F
Z
M
CSDN @程序lee



二叉树转换成森林：

根据上图将根与最右侧所有线断开，再旋转，再把二叉树转换成树即可。这里不做演示了。

树和森林的遍历

树的遍历

若树不空，则先访问根结点，然后依次先根遍历各棵子树。先根遍历
若树不空，则先依次后根遍历各棵子树，然后访问根结点。后根遍历
若树不空，则自上而下自左至右访问树中每个结点。层次遍历

这里的遍历方式和二叉树基本相同就不过多赘述，这里没有中序遍历是因为树和二叉树不同除左右两结点外，中间有很多结点，主要来研究森林的遍历

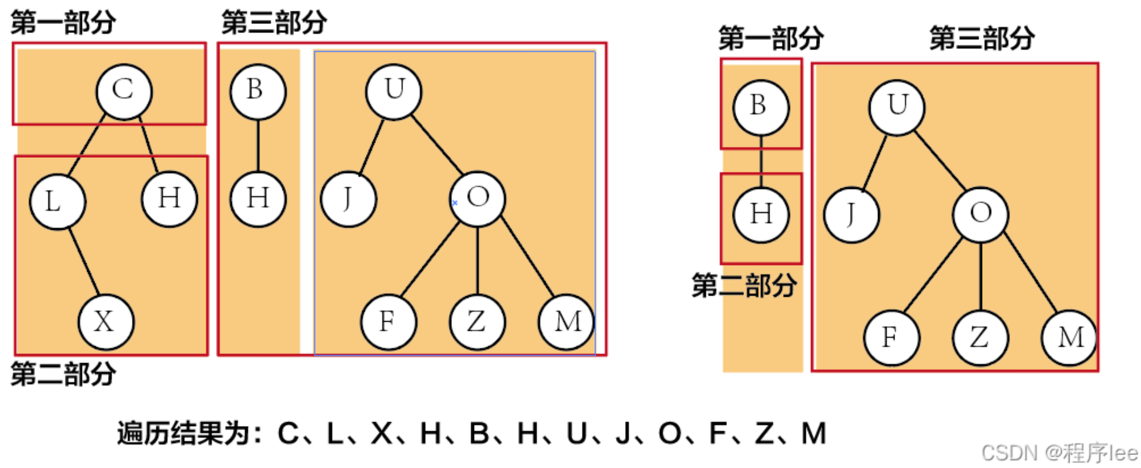
森林的遍历

将森林看作由三部分构成: 本质上也是递归的过程，这里也可以进行根的先中后遍历方式

1、森林中第一棵树的根结点;

2．森林中第一棵树的子树森林;

3．森林中其它树构成的森林。



到这里基本对于树的基础部分就结束了，关于二叉搜索，哈夫曼树，红黑树等就不放在这里概括了，本文是本人集合了王道考研，b站懒猫老师，王卓老师的课程进行的归纳总结，如有遗漏欢迎大家指正，谢谢