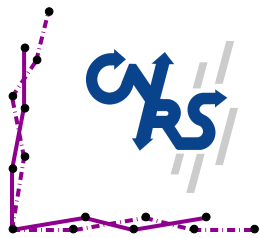


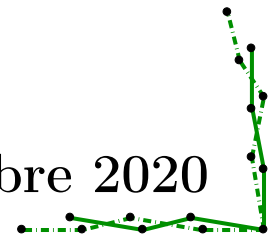
Algorithmique Avancée

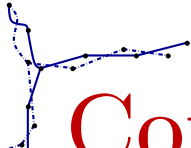
<http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/algav2020>

Binh-Minh Bui-Xuan

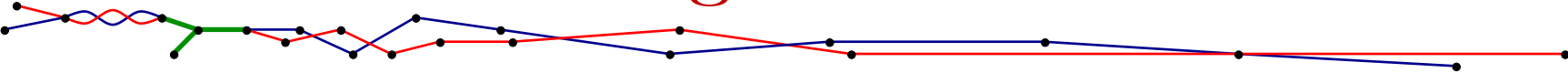
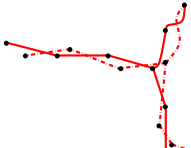


PARIS, Novembre 2020



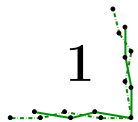
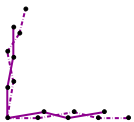


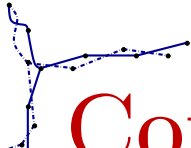
Cours 7 : rectangle minimum



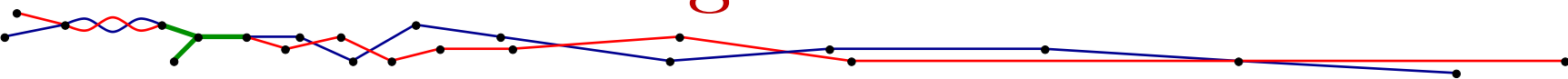
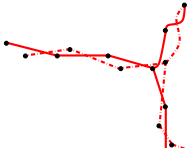
RAPPEL COURS + TME 6 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points \rightarrow polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull





Cours 7 : rectangle minimum

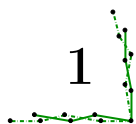
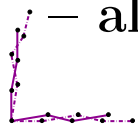


RAPPEL COURS + TME 6 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points \rightarrow polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull

AUJOURD'HUI :

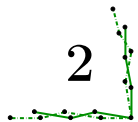
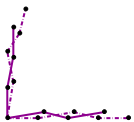
- collision : cas de rectangles (compromis esthétique/simplicité)
- problème RECTANGLEMIN : nuage de points \rightarrow rectangle
- algorithme “naïf” : complexité $O(n^2)$
- techniques : précalcul, pied à coulisse, paires antipodales
- algorithmes : Shamos, Toussaint





WIKIPEDIA :

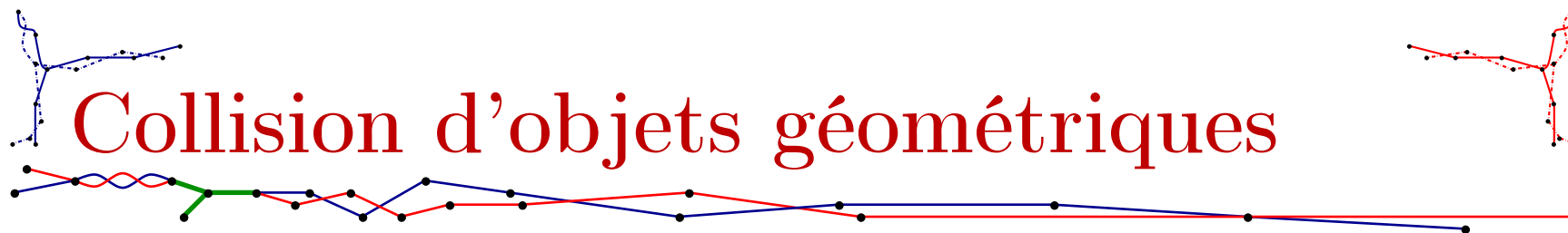
— http://en.wikipedia.org/wiki/Rotating_calipers



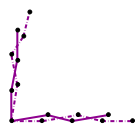
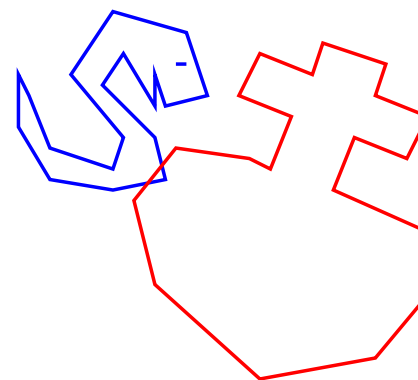
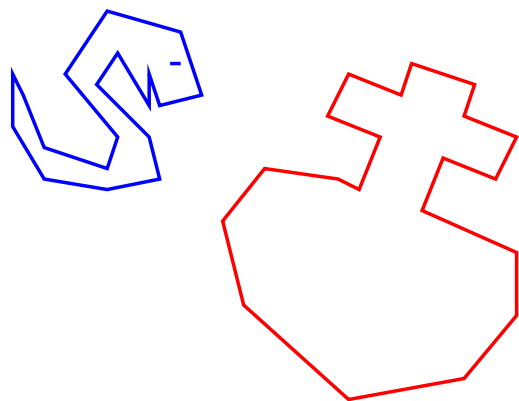
Collision d'objets géométriques

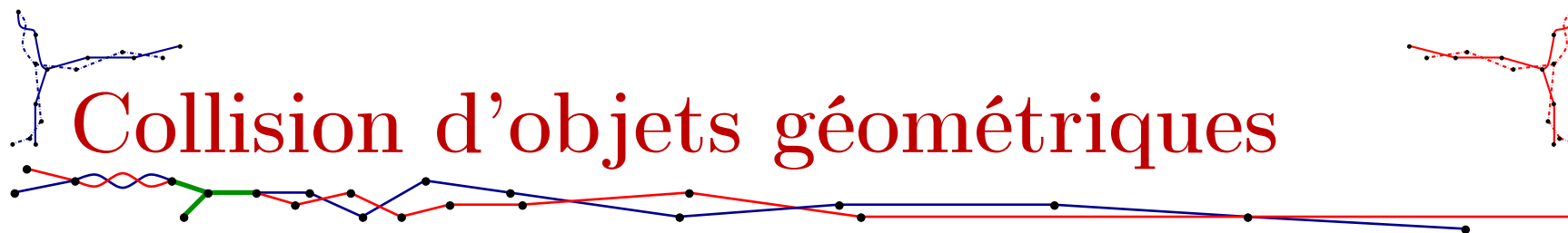
QUESTION : touché ?



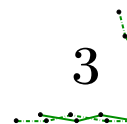
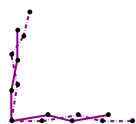
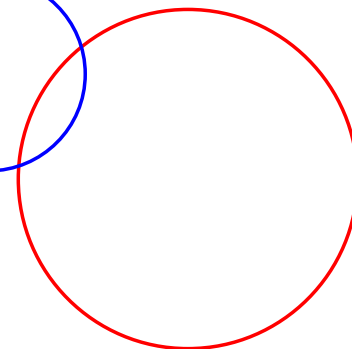
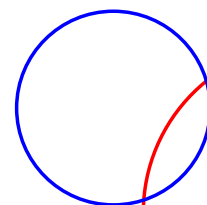
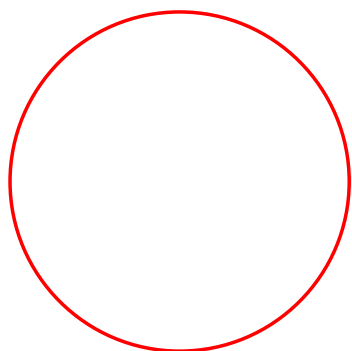
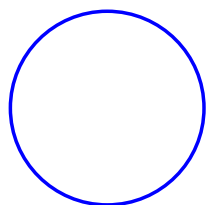


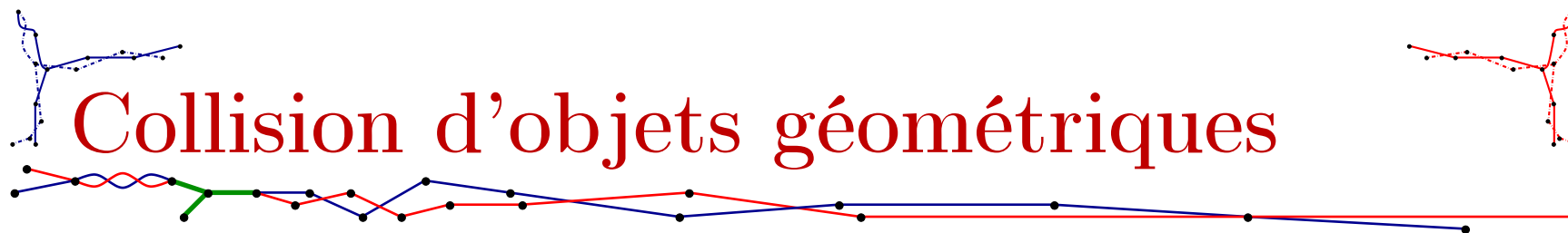
QUESTION : touché ?



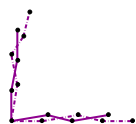
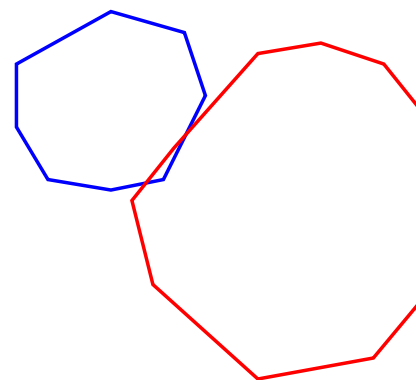
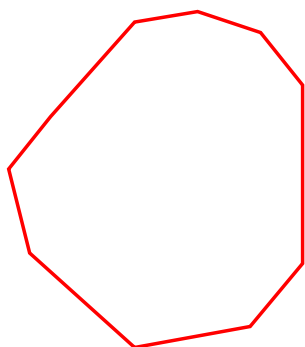
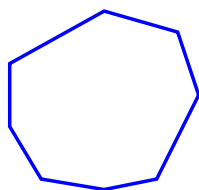


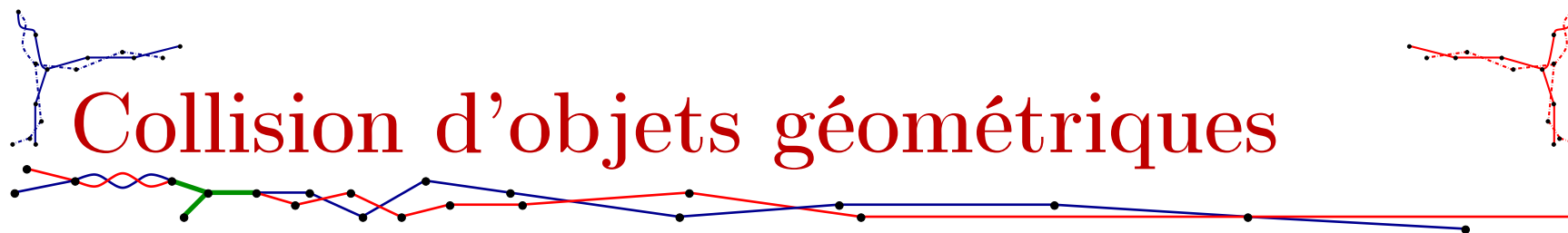
QUESTION : touché ?



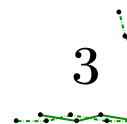
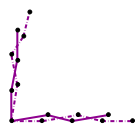
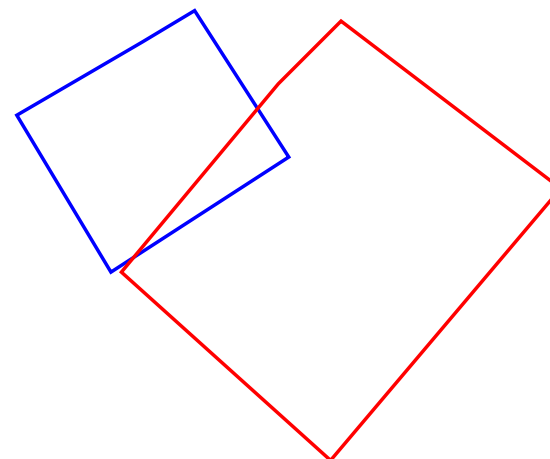
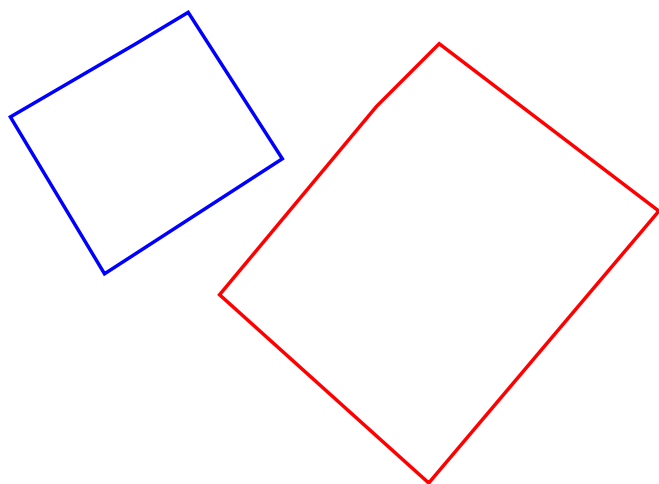


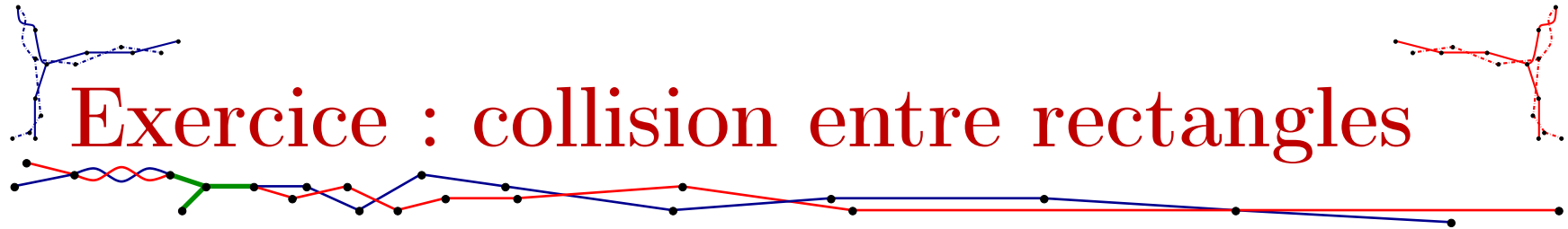
QUESTION : touché ?





QUESTION : touché ?

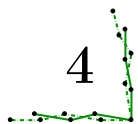
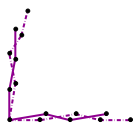


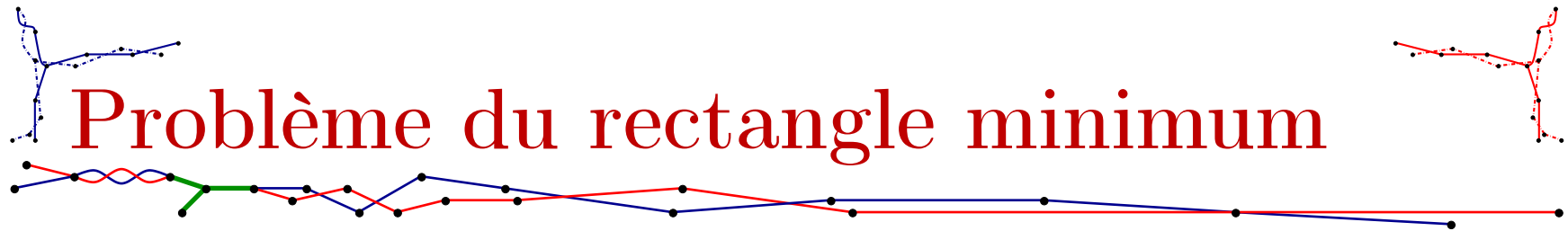


EXERCICE : comment déterminer si deux rectangles intersectent ?

QUESTION : implantation ?

Notes pour révision : voir cas polygone, cours 6.

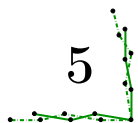
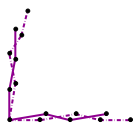


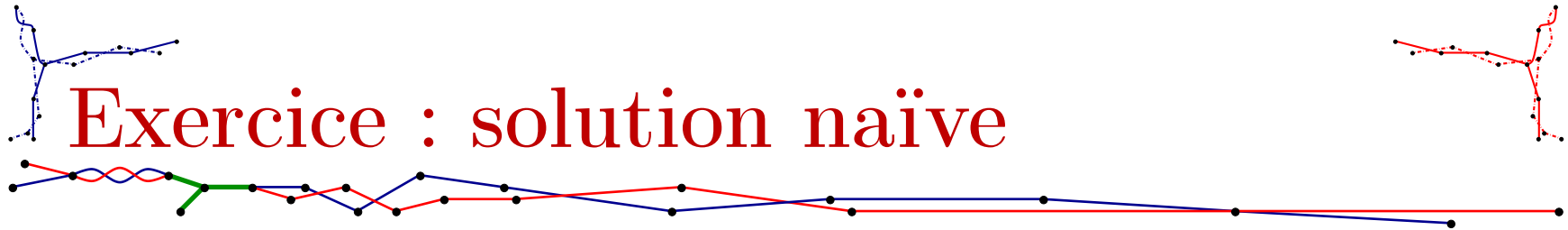


Problème du RECTANGLEMIN d'un ensemble de points :

IN : Points, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : Rectangle, liste de 4 points (ou 1 point + 3 doubles) du plan représentant le plus petit rectangle contenant tout point de Points

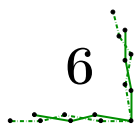
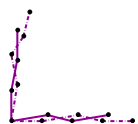


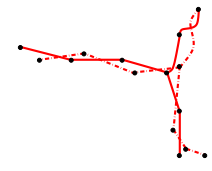
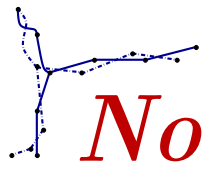


PROPRIÉTÉ : *le rectangle minimum contenant un ensemble de points a un côté parallèle avec l'un des côtés de l'enveloppe convexe de ces points*

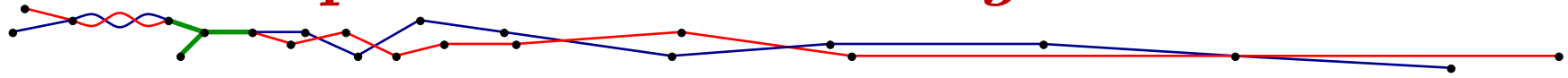
EXERCICE : solution naïve au problème du rectangle minimum ?

QUESTIONS : complexité ? implantation ? précalcul ? estimation du temps de calcul avec un ordinateur de l'ordre du Giga-Hertz avec $n = 10000, 100000, \text{etc ?}$

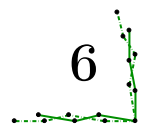
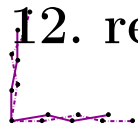


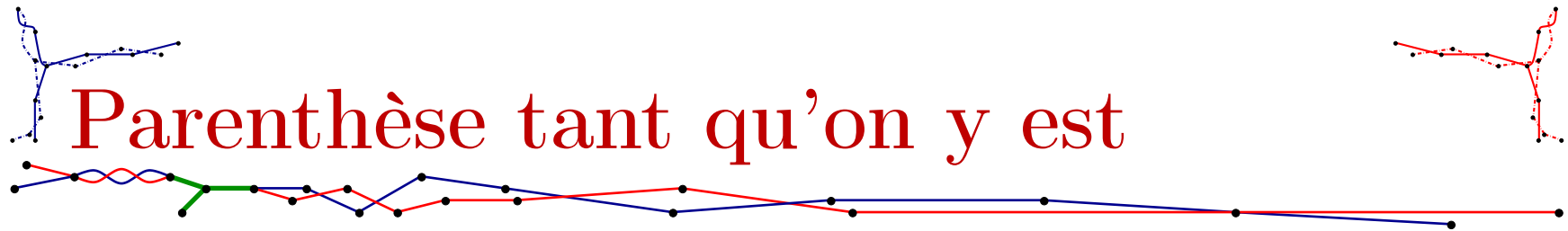


Notes pour révision : algorithme



1. $\text{enveloppe} \leftarrow \text{enveloppe convexe de points}$
2. pour tout côté pq de enveloppe
3. $s \leftarrow$ coin de l'enveloppe le plus loin de (pq)
4. $\Delta \leftarrow$ droite passant par s , orthogonale à (pq)
5. $t, u \leftarrow$ coins de l'enveloppe le plus loin de Δ dans les deux demi-plans définis par Δ
6. $\Gamma \leftarrow$ droite passant par t , orthogonale à (pq)
7. $\Lambda \leftarrow$ droite passant par u , orthogonale à (pq)
8. $\Phi \leftarrow$ droite passant par s , parallèle à (pq)
9. $a', b', c', d' \leftarrow$ intersections de Γ, Λ, Φ et (pq)
10. si l'aire de a', b', c', d' est plus petit que a, b, c, d alors
11. $a, b, c, d \leftarrow a', b', c', d'$
12. retourner a, b, c, d



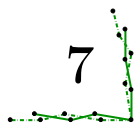
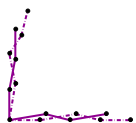


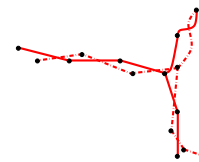
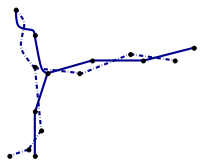
Problème du DIAMÈTRE d'un ensemble de points :

IN : Points, une liste de coordonnées de points en 2D

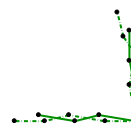
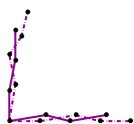
OUT : Diamètre, liste de 2 points de Points de distance maximum

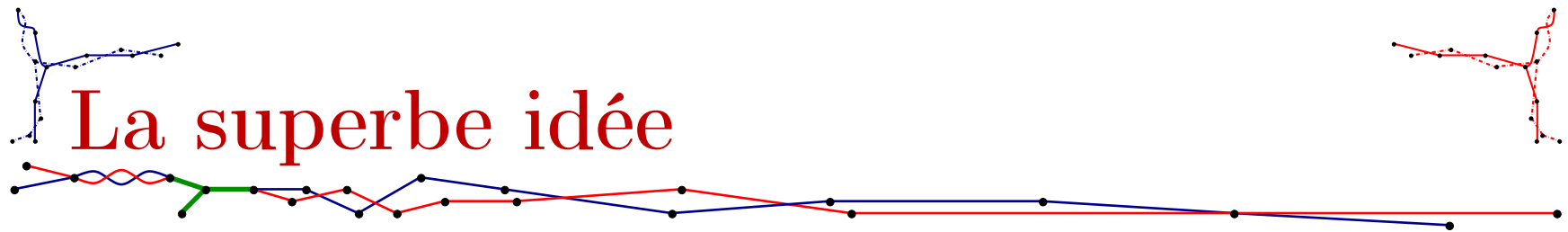
QUESTION : solution naïve ? précalcul ?



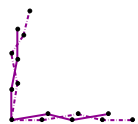


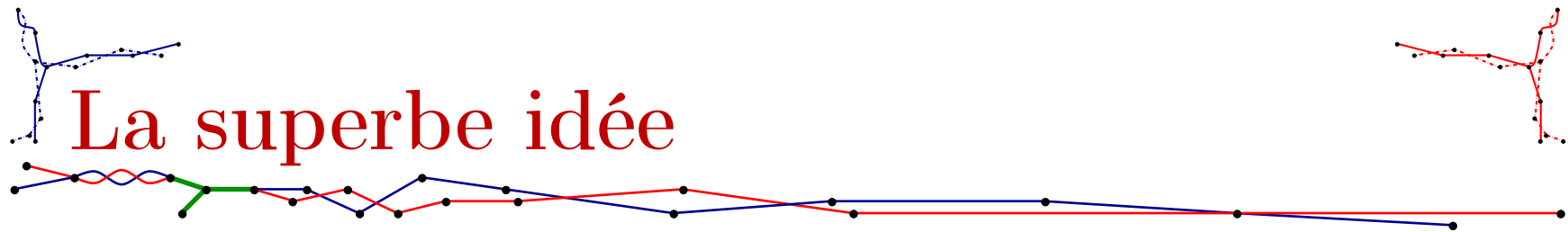
Algorithmes



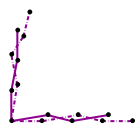
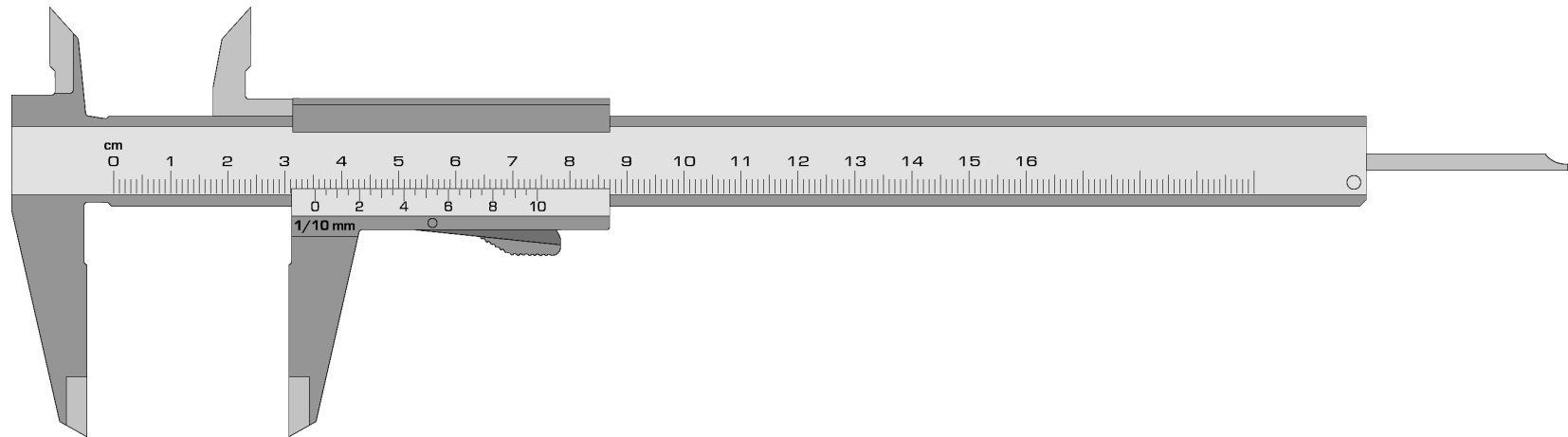


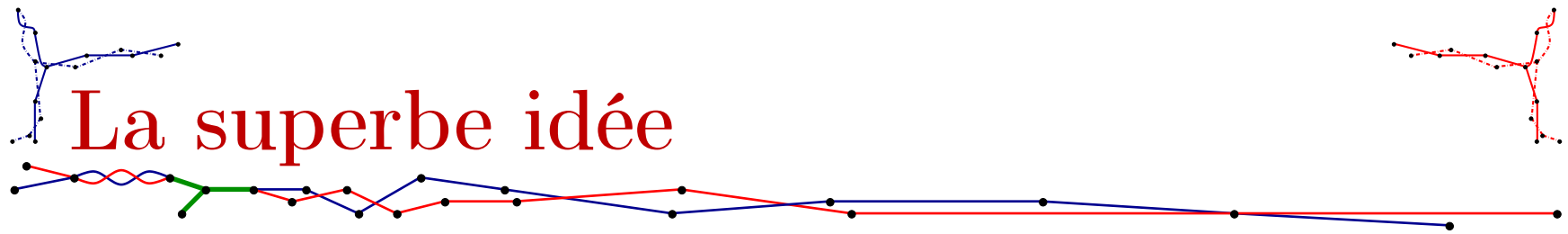
IDÉE (Shamos) : pied à coulisse



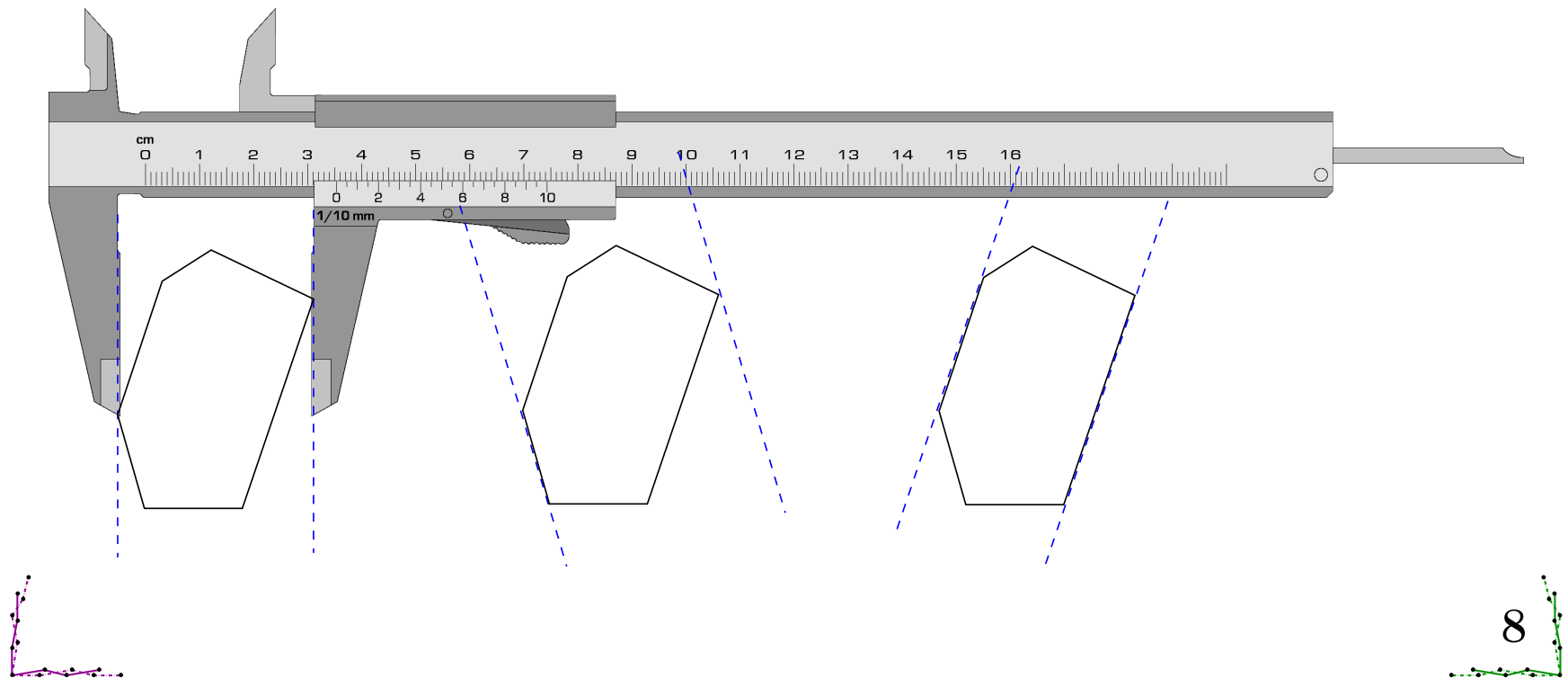


IDÉE (Shamos) : pied à coulisse





IDÉE (Shamos) : pied à coulisse

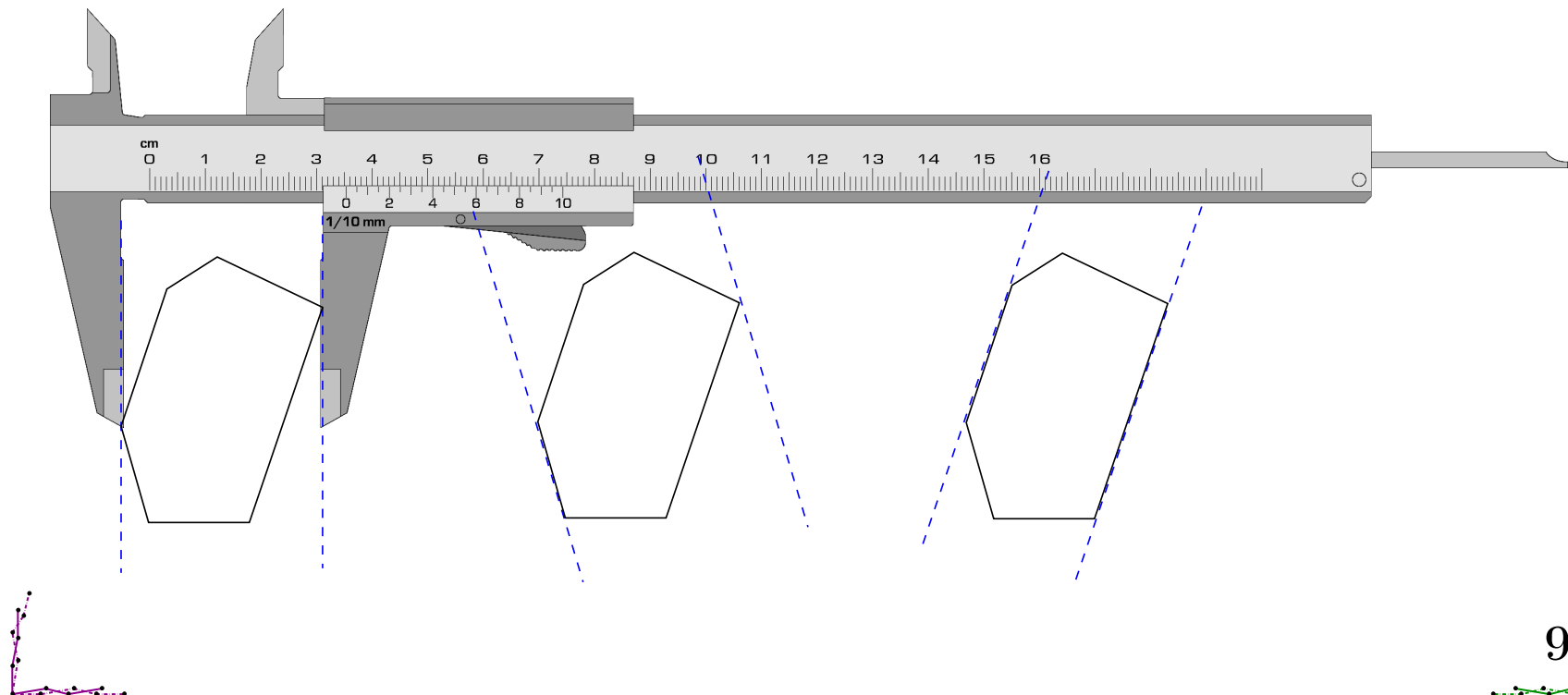


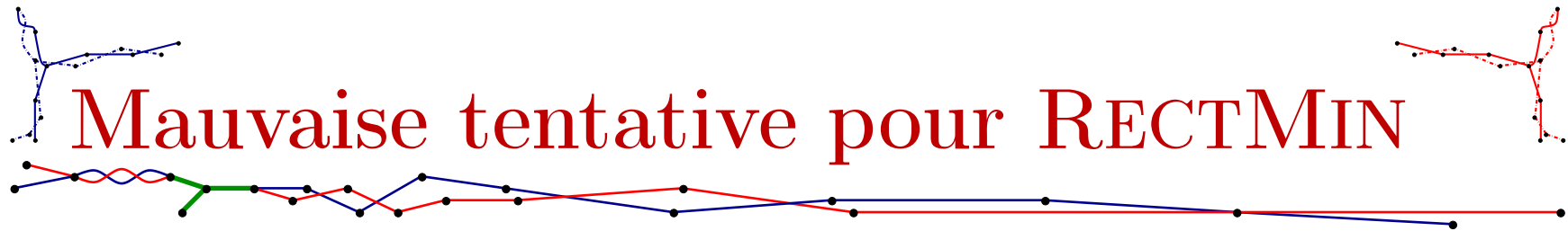


Algorithme Toussaint pour RECTMIN



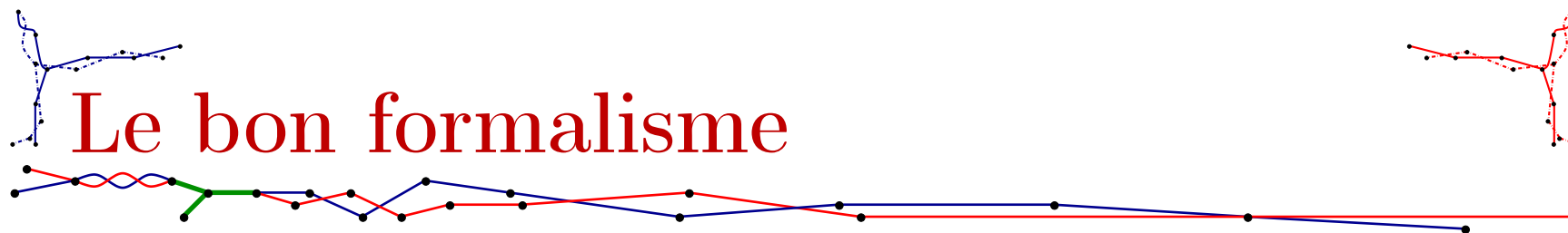
IDÉE : utiliser un pied à coulisse et résoudre RECTANGLEMIN en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE



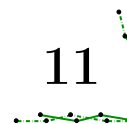
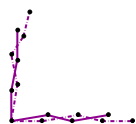
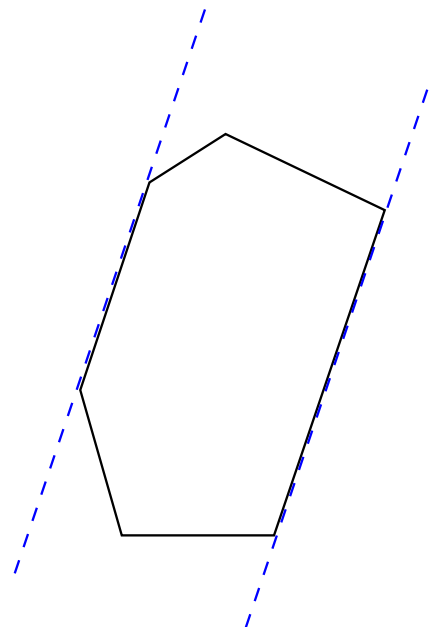
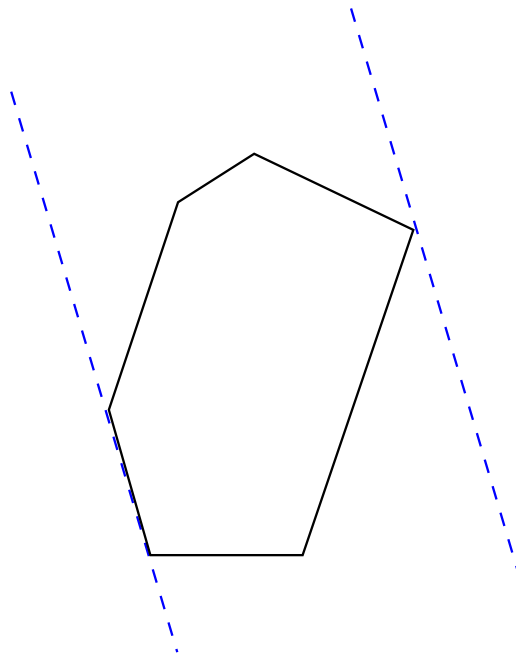
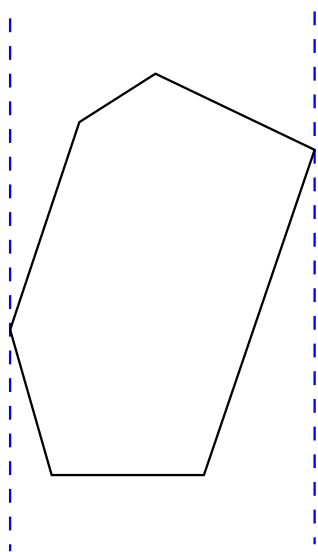


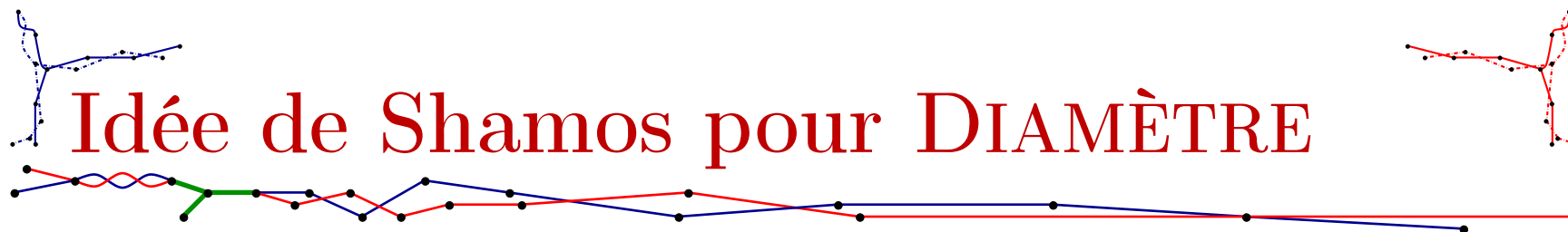
1. $\text{enveloppe} \leftarrow \text{enveloppe convexe de points}$
2. $W \leftarrow \text{point le plus à l'Ouest de enveloppe}$
3. $E \leftarrow \text{point le plus à l'Est de enveloppe}$
4. $\text{left} \leftarrow \text{droite verticale passant par } W$
5. $\text{right} \leftarrow \text{droite parallèle à left passant par } E$
6. maintenir ce parallélisme pendant tout le reste de l'algorithme
7. répéter jusqu'à ce que la condition suivante se réalise deux fois :
8. condition : left passe par E ou right passe par W
9. $\text{next} \leftarrow \text{côté d'enveloppe formant angle min avec left}$
10. $\text{box} \leftarrow \text{rectangle min contenant enveloppe passant par next}$
11. pivoter left et right pour que l'un des deux contient next
12. retourner le min des valeurs de box





IDÉE : paires antipodales





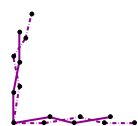
Idée de Shamos pour DIAMÈTRE

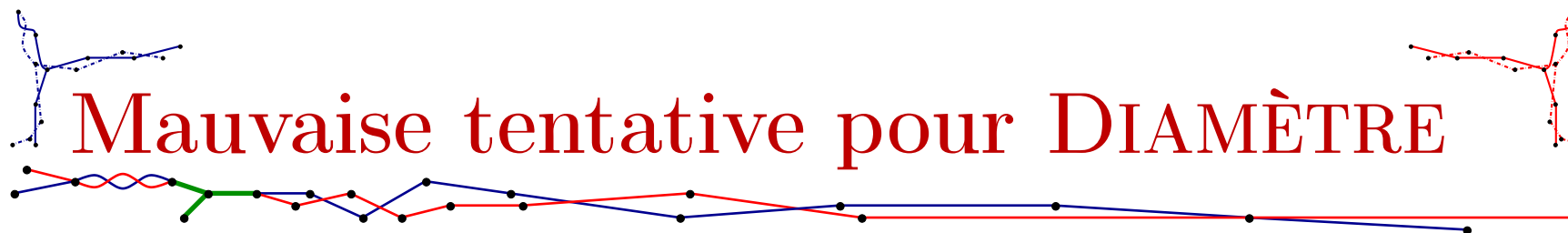
DÉFINITION : une paire $\{A, B\}$ de points de Points est antipodale s'il existe 2 droites parallèles passant par A et B telles que la bande du plan entre ces deux droites contient tous les points de Points

PROPRIÉTÉ : *le diamètre de Points est la distance maximum entre deux points d'une paire antipodale de Points*

PROPRIÉTÉ : *il y a au plus $2 \cdot n$ (plus quelques) de paires antipodales d'un ensemble Points de n points*

QUESTION : résoudre DIAMÈTRE utilisant paires antipodales ?

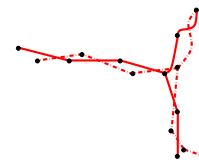
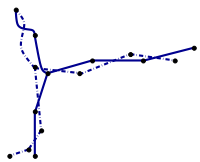




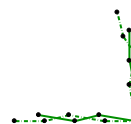
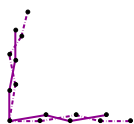
Mauvaise tentative pour DIAMÈTRE

1. $\text{enveloppe} \leftarrow \text{enveloppe convexe de points}$
2. $\text{paires_antipodales} \leftarrow \emptyset$
3. pour tout point p de enveloppe
4. pour tout point q de enveloppe
5. si p, q est une paire antipodales alors
6. ajouter (p,q) dans $\text{paires_antipodales}$
7. $\text{max} \leftarrow 0$
8. pour tout paire (p,q) dans $\text{paires_antipodales}$
9. si $\text{distance}(p,q) > \text{max}$ alors $\text{max} \leftarrow \text{distance}(p,q)$
10. retourner max

QUESTION : complexité ? horrible ?

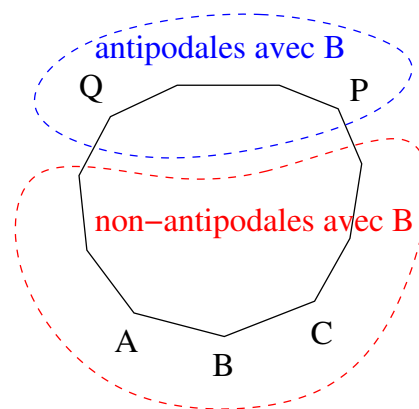
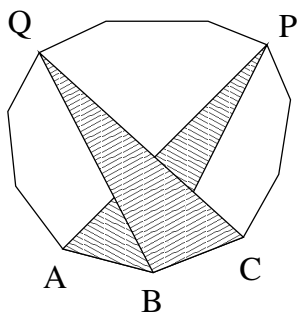


Comment faire mieux ?



Le vrai algorithme Shamos

PROPRIÉTÉ : si A, B, C sont trois points successives de l'enveloppe convexe de Points et P, Q les deux points de distance maximum par rapport aux droites (AB) et (BC) , alors les paires antipodales contenant B contiennent aussi un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe

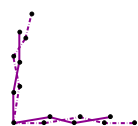


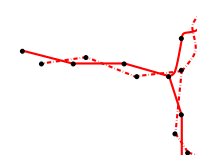



Le vrai algorithme Shamos

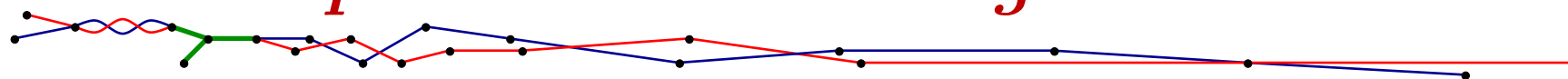
PROPRIÉTÉ : si A, B, C sont trois points successives de l'enveloppe convexe de Points et P, Q les deux points de distance maximum par rapport aux droites (AB) et (BC) , alors les paires antipodales contenant B contiennent aussi un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe

QUESTION : DIAMÈTRE en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE ?

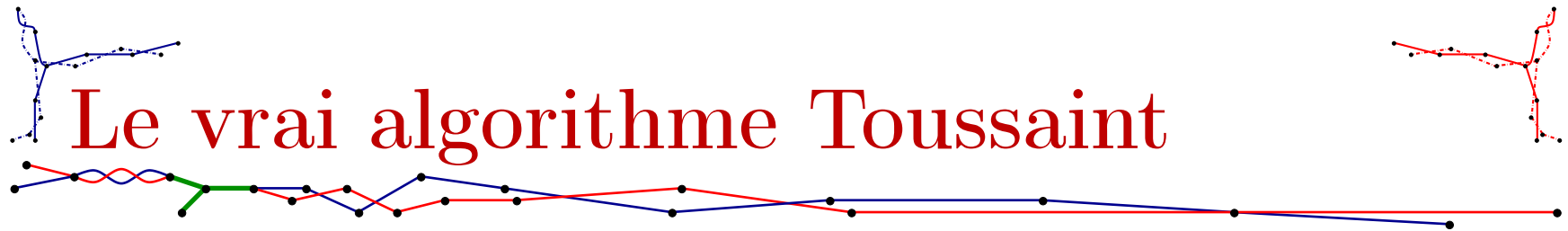




Notes pour révision : algorithme

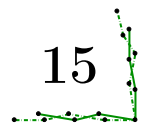
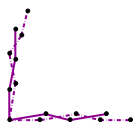


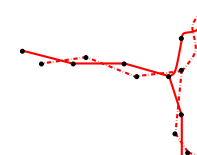

Voir TME7



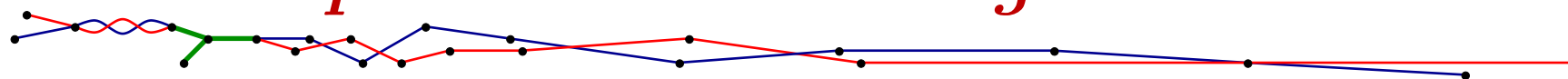
Le vrai algorithme Toussaint

QUESTION : RECTMIN en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE ?

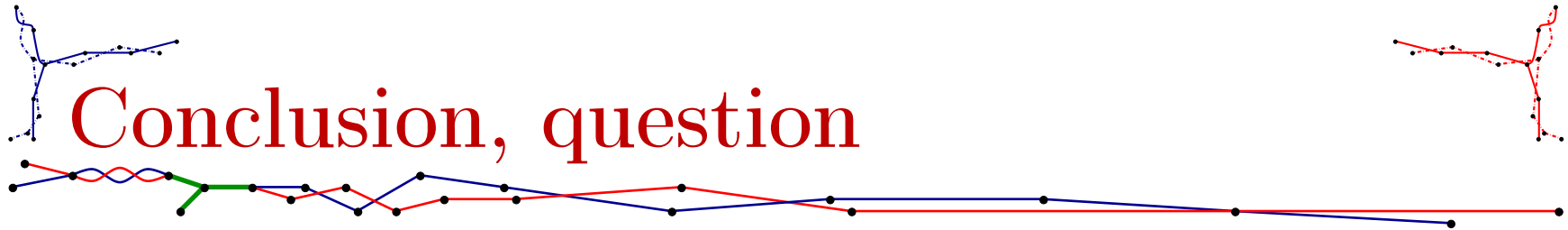




Notes pour révision : algorithme



Voir TME7



CONCLUSION :

- RECTANGLEMIN algorithme “naïf” en $O(n^2)$
- DIAMÈTRE algorithme naïf en $O(n^2)$
- technique de filtrage : enveloppe convexe
- technique exotique : pied à coulisse
- algorithmes : Toussaint, Shamos

QUESTION :

- implantation ? (voir TME)

