



# QFT 学习笔记

啊吧啊吧

作者：Chenhao Peng

时间：2023/1/25



# 目录

<b>第一章 基础概念</b>	<b>1</b>
1.1 哈密顿与拉格朗日力学 . . . . .	1
1.1.1 拉格朗日方程的导出 . . . . .	1
1.1.2 Legendre 变换, 正则方程, 柏松括号 . . . . .	2
1.2 场论基础 . . . . .	2
1.2.1 Basic and Hamilton Formalism . . . . .	2
1.2.2 Noether 定理 . . . . .	6
1.3 量子力学基础 . . . . .	11
1.3.1 不同的绘景 Picture . . . . .	11
1.3.1.1 Schrodinger Picture . . . . .	11
1.3.1.2 Heisenberg Picture . . . . .	12
1.3.1.3 Interaction Picture 相互作用绘景 . . . . .	13
<b>第二章 正则量子化 Schrodinger 方程/KGE</b>	<b>17</b>
<b>第三章 Dirac 方程</b>	<b>18</b>
3.1 Dirac 方程的导出 . . . . .	18
3.2 Pauli's Fundamental Theorem . . . . .	19
3.3 Dirac 方程的 Lorentz 协变性 . . . . .	22
3.4 Dirac 自由粒子的 spinor . . . . .	24
3.5 用 Lorentz 变换从静粒子波函数到动粒子波函数 . . . . .	30
<b>第四章 相互作用量子场论</b>	<b>32</b>
4.1 S 矩阵 . . . . .	32
<b>第五章 路径积分</b>	<b>33</b>
5.1 量子力学的路径积分方法 . . . . .	33
5.1.1 Feynman's Path Integral . . . . .	34
5.1.2 多个粒子的 Feynman Kernel 和多个粒子的 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式 . . . . .	34
5.1.3 用 Time ordered Product 表示 N-Point Function . . . . .	35
5.1.4 Vacuum Persistence Amplitude $W[J]$ 或者叫做 vacuum-vacuum amplitude . . . . .	36
5.2 场论中的路径积分方法 . . . . .	37
5.2.1 vacuum-vacuum transition functional 和 Green functions(ie. 相当于 n-point Function) . . . . .	37
5.2.2 利用 Wick Rotation 得到 Euclidian Field Theory . . . . .	37
5.2.3 有相互作用场的 Generating Function 和 Vacuum Functional . . . . .	39
5.2.4 Feynman 图 . . . . .	39
5.2.5 动量空间的 Feynman 图 . . . . .	42
5.2.6 irreducible Diagram 和 Effective Action(有效作用量) . . . . .	43
<b>第六章 不用路径积分</b>	<b>48</b>
6.1 量子场的相互作用 . . . . .	48
6.1.1 散射截面 . . . . .	48
6.1.2 LSZ reduction Formula . . . . .	49

---

6.1.3 Schwinger-Dyson Equation . . . . .	49
6.1.4 Feynman 图 . . . . .	50
<b>第七章 矢量场和旋量场</b>	<b>51</b>
7.1 基础知识 . . . . .	51
7.1.1 量子 Poincare 变换 . . . . .	51
7.1.2 Lorentz 代数 . . . . .	51
7.1.3 Poincare 代数 . . . . .	52
7.1.4 粒子 . . . . .	52
7.2 矢量场 . . . . .	53
7.2.1 量子场的 Lorentz 变换, 量子场的自旋讨论 . . . . .	53
7.2.2 有质量矢量场的正则量子化 . . . . .	55
7.2.2.1 在极化矢量座作为基底下的展开 (实际上就是线性代数...) . . . . .	56
7.2.3 没有质量的矢量场的正则量子化 . . . . .	58
7.2.3.1 平面波展开 . . . . .	58
7.3 旋量场 . . . . .	60
<b>第八章 重整化 renormalisation</b>	<b>66</b>
8.1 $\phi^4$ 理论的重整化 . . . . .	66
8.1.1 2-point Connected Feynman Diagram . . . . .	66
8.1.2 简单的判断可不可以使用重整化 . . . . .	69
8.1.3 维数正规化的 phi4 重整化 . . . . .	70
8.2 重整化群 . . . . .	70
<b>第九章 数学基础</b>	<b>73</b>
9.1 泛函 . . . . .	73
9.1.1 泛函微分 . . . . .	73
9.2 群的知识 . . . . .	73
9.2.1 Group . . . . .	73
9.2.2 群的线性表示 . . . . .	74
9.2.3 $SO(1, 3)^\dagger$ 固有保时 Lorentz 群 . . . . .	74

# 第一章 基础概念

这一个章节主要讲一下理论力学中的一些重要概念，他们在 QFT 中会经常被用到。

## 1.1 哈密顿与拉格朗日力学

### 1.1.1 拉格朗日方程的导出

如果认为最小作用量原理是一个公理，我们假如已经知道拉格朗日量可以写为：

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.1)$$

当然，在物理的解中， $q_i$  实际上是时间的函数，也就是说  $q_i = q_i(t)$ 。

#### 定理 1.1 (最小作用量原理)

定义作用量为：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1.2)$$

能够使得作用量取极小的映射  $q_i(t)$  被认为是合理的广义坐标的运动轨道。这个轨道应该满足 Euler-Lagrange 方程。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

下面是证明

**证明** 当作用量取极小值时，作用量的变分是 0，下面通过作用量取极值的条件来推导出广义坐标应该遵循的随着时间的演化规律。

假设满足使得作用量最小的广义坐标随着时间的变化关系可以记为： $q_i(t)$ ，当广义坐标随着时间的变化有了改变时，即变为了  $q_i(t) + \delta q_i(t)$  时，作用量有了一个改变  $\delta S$ 。

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_i(t) &= \delta \frac{dq_i(t)}{dt} \\ &= \frac{d(q_i(t) + \delta q_i(t))}{dt} - \frac{dq_i(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \\ \delta S &= \int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \delta q_i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt + (\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i})|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

由于要求作用量的变分为 0，而且对于广义坐标的微扰有要求： $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 。于是就得到了 Euler-Lagrange 方程。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.5)$$

□

### 1.1.2 Legendre 变换, 正则方程, 柏松括号

legendre 变换: 如果有函数  $f = f(x_1, x_2, x_3)$ , 则他的全微分可以写为  $df = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 \dots$  其中,  $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , 如果定义函数  $g = u_i x_i - f$ , 则  $g$  可以很轻松地写为  $x_1 \dots x_{i-1}, u_i x_{i+1} \dots$  的函数. 这是因为:

$$dg = x_i du - u_1 dx_1 - \dots - u_{i-1} dx_{i-1} - u_{i+1} dx_{i+1} \dots \quad (1.6)$$

如果定义广义动量为:  $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$ , 此时可以改写拉格朗日方程的变量为  $(q_i, p_i)$ . 为了能够方便地找到可以写为新变量的全微分, 我们定义哈密顿量:  $H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L$ , 这样,  $H$  的全微分可以写为:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.7)$$

如果考虑到  $dp_i = \frac{dp_i}{dt} dt, dq_i = \frac{dq_i}{dt} dt$ , 并且将 Lagrange 方程  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}$ , 带入:

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ dH &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt dH = \dot{q}_i \dot{p}_i dt - \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i dt - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{这里的 } dH \text{ 是由时间变化 } dt \text{ 引起的} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

正则运动方程(正则运动方程结合了)由上面的式子产生:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned} \quad (1.9)$$

柏松括号: 柏松括号定义为

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (1.10)$$

有几个比较特殊的柏松括号:(最后一步均是考虑到了正则运动方程)

$$\begin{aligned} \{q_i, H\} &= \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i \\ \{p_i, H\} &= \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \dot{p}_i \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 1.2 场论基础

这一节讲一些场论的基础知识

### 1.2.1 Basic and Hamilton Formalism

泛函求导引入  $F$  是场  $\phi$  的泛函, 场是从空间坐标到数域的映射(这里用一维空间来计算)。

$$F = F[\phi] \quad (1.12)$$

泛函导数的定义:

$$\delta F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad (1.13)$$

如果场的微小变换是:

$$\delta\phi(x) = \epsilon\delta(x - y) \quad (1.14)$$

泛函 F 变换:

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &= F[\phi + \epsilon\delta(x - y)] - F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \epsilon\delta(x - y) \\ &= \epsilon \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

上面的式子被当作泛函导数的定义(用 · 代替了 x 是因为 x 是 silent argument):

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon\delta(\cdot - y)] - F[\phi]}{\epsilon} \quad (1.16)$$

◦ 1.

如果

$$F[\phi] = G[\phi]H[\phi] \quad (1.17)$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G[\phi + \epsilon\delta(\cdot - x)]H[\phi + \epsilon\delta(\cdot - x)] - G[\phi]H[\phi]}{\epsilon} \\ &= \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} H[\phi] + G[\phi] \frac{\delta H[\phi]}{\delta\phi(x)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

◦ 2.

如果

$$F = F[g(\phi)] \quad (1.19)$$

那么:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[g(\phi + \epsilon\delta(\cdot - y))] - F[g(\phi)]}{\epsilon} \quad (1.20)$$

观察函数:

$$g(\phi(x) + \epsilon\delta(x - y)) \quad (1.21)$$

在  $x = y + \alpha, \alpha$  是小量时:

$$g(\phi(x) + \epsilon\delta(x - y)) = g(\phi(x)) + \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon\delta(x - y) \quad (1.22)$$

于是:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta\phi(y)} = \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \frac{F[g + \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon\delta(\cdot - y)] - F[g(\phi)]}{\frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon} \quad (1.23)$$

也就是:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta\phi(y)} = \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \frac{\delta F[g]}{\delta g(\phi(y))} \quad (1.24)$$

◦ 3.

当

$$F[\phi] = \int dx (\phi(x))^n \quad (1.25)$$

泛函微分:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int dx ((\phi(x) + \epsilon\delta(x - y))^n - \phi(x)^n) \\ &= \int dx n(\phi(x))^{n-1} \delta(x - y) \quad (\epsilon \text{ 变小的速度是最快的}) \\ &= n(\phi(y))^{n-1} \end{aligned} \quad (1.26)$$

◦ 4.

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int dx g(\phi(x)) = g'(\phi(y)) \quad (1.27)$$

◦5.

当

$$F[\phi] = \int dx \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^n \quad (1.28)$$

此时:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int dx \left( \frac{d}{dx} [\phi(x) + \epsilon\delta(x-y)] \right)^n - \int dx \left( \frac{d}{dx} \phi(x) \right)^n \right) \\ &= n \int dx \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^{n-1} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \\ &= -n \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^{n-1} \right] \Big|_y \end{aligned} \quad (1.29)$$

◦6.

泛函:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) &= \frac{1}{\epsilon} \left[ \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx} + \epsilon \frac{d}{dx} \delta(x-y)\right) - \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[ \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \int dx \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \epsilon \frac{d}{dx} \delta(x-y) - \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right] \\ &= \int dx \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \\ &= -\frac{d}{dx} \left( \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \right) \Big|_y \end{aligned} \quad (1.30)$$

微元的角度的泛函求导 Lagrangian 是场和场的时间导数的泛函:

$$L = L[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.31)$$

将空间划分成很多个小区域, 每一个区域用  $i$  来标记, 定义:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{\Delta V_i} d^3x \phi(x, t) \quad (1.32)$$

于是泛函变成了多变量的函数:

$$L = L(\phi_i, \dot{\phi}_i) \quad (1.33)$$

它的微分:

$$\delta L(\phi_i, \dot{\phi}_i) = \sum_i \left( \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}_i} \delta\dot{\phi}_i \right) \Delta V_i \quad (1.34)$$

由泛函微分的定义:

$$\delta L = \int dx \left( \frac{\delta L}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} \right) \quad (1.35)$$

于是:

$$\frac{\delta L}{\delta\phi} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta\phi_i} \quad (1.36)$$

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}_i} \quad (1.37)$$

**Euler-Lagrange 方程** 作用量定义为 Lagrangian 对时间的积分:

$$W = \int dt L[\phi, \dot{\phi}] \quad (1.38)$$

最小作用量原理:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \frac{d}{dt} (\delta \phi) \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \delta \phi + \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \phi \right) \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \right) \delta \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

于是, Euler-Lagrange 方程 (场的演化方程):

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (1.40)$$

**Lagrangian 的泛函导数和 Lagrangian 密度的关系-E-L 方程另一种形式** 如果 Lagrangian 可以写成:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \nabla \phi, \dot{\phi}) \quad (1.41)$$

其中,  $\phi$  是场, 是空间的函数, 并且场会随着时间演化。当场函数有变化时:

$$\delta L = \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \nabla \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \quad (1.42)$$

考虑到:

$$\delta \nabla \phi = \nabla \delta \phi \quad (1.43)$$

与分部积分 (由高斯定理, 散度部分变成面积分后成 0 了):

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \phi \right) - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

于是观察得到泛函导数是:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \quad (1.45)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.46)$$

Euler-Langrange 方程变为:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (1.47)$$

更加紧凑的形式是:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (1.48)$$

**Hamilton Formalism** 定义经典共轭场 (canonical conjugate field)

$$\pi(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.49)$$

由 Euler-Lagrange 方程:

$$\dot{\pi}(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \phi} \quad (1.50)$$

定义 Hamiltonian:

$$H[\pi, \phi] = \int d^3x (\pi(x, t)\dot{\phi}(x, t)) - L(t) \quad (1.51)$$

则:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int d^3x \left( \dot{\phi}\delta\pi + \pi\delta\dot{\phi} - \frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi - \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \dot{\phi}\delta\pi + \pi\delta\dot{\phi} - \frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi - \pi\delta\dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \dot{\phi}\delta\pi - \frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi \right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

这样做相当于做了变量代换:

$$L[\phi, \dot{\phi}] \Rightarrow H[\pi, \phi] \quad (1.53)$$

将 Euler-Lagrange 方程带入  $\frac{\partial L}{\delta\phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} \right) = 0$ ,  $\dot{\pi}(x, t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}$  于是 Hamilton 方程:

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \dot{\phi} \quad \frac{\delta H}{\delta\phi} = -\dot{\pi} \quad (1.54)$$

满足 E-L 方程的 Hamiltonian 的变化是:

$$\delta H = \int d^3x (\dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi) \quad (1.55)$$

$\pi, \phi$  是随时间变换的场。于是  $H = H(t)$ 。现在考虑它随时间的变化。

$$\delta H = \int d^3x (\dot{\phi}\dot{\pi} - \dot{\pi}\dot{\phi}) dt = 0 \quad (1.56)$$

Hamiltonian 密度:

$$\mathcal{H}(x, t) = \pi(x, t)\dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi, \dot{\phi}) \quad (1.57)$$

它是这些的函数:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi, \pi, \nabla\phi, \nabla\pi) \quad (1.58)$$

用分部积分:

$$\frac{\delta H}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \nabla \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)} \right) \quad (1.59)$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi)} \right) \quad (1.60)$$

定义 Poission 括号: 如果 F 和 G 都是  $\phi$  和  $\pi$  的泛函

$$\{F, G\}_{P,B} = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta\phi} \frac{\delta G}{\delta\pi} - \frac{\delta F}{\delta\pi} \frac{\delta G}{\delta\phi} \right) \quad (1.61)$$

可以发现:

$$\dot{F} = \{F, H\}_{P,B} \quad (1.62)$$

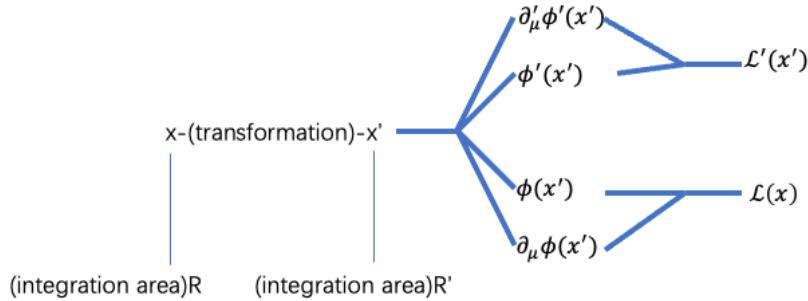
与:

$$\{\phi(x), \pi(x')\}_{P,B} = \delta^3(x - x') \quad (1.63)$$

## 1.2.2 Noether 定理

假设场有一个 lagrangian 密度可以表示为:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$  我们可以先把他理解为一个 L 函数, 里面有五个变量, 分别叫做  $\phi, \partial_\mu\phi$ , 这五个量通过一个函数和时空变量 x 联系在了一起。也就是说  $\phi$  和  $\partial_\mu\phi$  可以看作是五个映射。而且这五个映射其实在确定了  $\phi$  后剩下四个都确定了。

现在考虑场发生了一个变化, 这个变化有两个方面。1. 坐标  $x \rightarrow x'$  2. 函数  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$  用图画出这个变化就像这样:



### 命题 1.1

在这种变化下，在原本时空区域  $R$  中的作用量为  $\int_R d^4x \mathcal{L}(x)$ ，在发生变化后，对作用量的时空积分变为了  $R'$ ，同时，拉格朗日量密度也变化为  $\mathcal{L}'(x')$ ，此时，这一部分的作用量的差值可以写为： $\Delta S = \int_R d^4x \left\{ \partial_\mu \left( \mathcal{L}(\delta x)^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \bar{\delta} \phi \right) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \bar{\delta} \phi \right\}$

### 证明

首先考察场坐标的变化，可以简单的写为  $x' = x + \delta x$ 。接下来考察场函数和场函数的偏导的变化，首先看场函数的变化定义，映射  $\phi$  的变化写为： $\phi'(x) - \phi(x) = \bar{\delta} \phi(x)$ 。

$$\begin{aligned} \delta \phi &= \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) \\ &= (\partial_\mu \phi'(x)) \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi(x) \\ &= (\partial_\mu \phi(x)) \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi(x) \text{ 忽略二阶小量} \end{aligned} \quad (1.64)$$

这样，相当于拉格朗日量密度中的第一个变量的改变就确定了，接下来考虑 lagrangian density's change Because of the change of the  $\partial_\mu \phi$ . Thus, we need to calculate  $\partial'_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x)$ .

$$\begin{aligned} \delta \partial_\mu \phi &= \partial'_\mu \phi' - \partial_\mu \phi \\ &= \partial'_\mu (\phi(x') + \bar{\delta} \phi(x')) - \partial_\mu \phi(x) \\ &= \partial_\mu \phi|_{x'}^{x'} + \partial_\mu \bar{\delta} \phi(x) \\ &= \partial_\mu \partial_\rho \phi(x) (\delta x)^\rho + \partial_\mu \bar{\delta} \phi(x) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Then, we consider the Jacobi determinant.  $\mathcal{J} = \det(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu})$ 。（雅可比行列式的行和列指标分别由  $\mu, \nu$  决定） If we look close at Jacobi matrix, we can find that, it can be written in the form  $I + A$ , which is the first order of  $\exp(A)$ , it is easy to find that  $A = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}$ 。

There is a math theory says that  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ . in this case, we can say that  $\mathcal{J} = \det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)) = 1 + \text{tr}(A) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$ .

Then, we come to the difference of the action:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \int_R d^4x \left[ (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \left\{ \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\bar{\delta}\phi + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} ((\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \partial_\mu \bar{\delta}\phi) \right\} - \mathcal{L} \right] \\
 &= \int_R d^4x \left\{ (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \bar{\delta}\phi \right\} \text{ 忽略了二阶小量} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \bar{\delta}\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi \right) \right\} \quad (1.66) \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right) \bar{\delta}\phi \right\}
 \end{aligned}$$

we noticed that in most of the fields, the second term will be zero. If we think that  $\Delta S = 0$ , then, the first term will be zero (because the choose of R is no limit).

在这里，坐标都是  $x^\mu$  的形式，当然也可以用度归算符进行升降指标。同时，一般把第一项里面的  $\bar{\delta}\phi$  写成：

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - (\partial_\lambda \phi(x)) \delta x^\lambda \quad (1.67)$$

于是，Current density (流密度)  $j^\mu$  可以写为：

$$j^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} (\partial_\lambda \phi_r(x)) \delta x^\lambda. \quad (1.68)$$

因为积分对任何坐标变动和场的变动都为 0，于是被积函数处处为 0。因为上面积分的第二项的 (integrand) 处处为零，所以第一项的 integrand 也要处处为零。连续方程 (Equation of Continuity) 可以写为：

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (1.69)$$

□

**Noether 定律的表述原文：** Each continuous symmetry transformation leads to a conservation law. The conserved quantity G can be obtained from the Lagrange density。

可见，它的关键在于连续对称变化 (Continuous Symmetry Transformation)。

有一个问题，为什么作用量不变意味着“物理规律不变 or 存在对称性”

**连续方程 (Equation of continuity)** 等价于**守恒定律 (Conservation law)**：对连续方程 (Equation of Continuity) 进行空间部分的积分：

$$\int d^3x \partial_0 j^0 + \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.70)$$

利用 Gauss 定理：

$$\int d^3x \partial_0 j^0 + \oint ds \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.71)$$

因为在边界上被积函数 (integrand) 是 0，所以面积分自然是 0 于是连续方程说明：

$$G \equiv \int d^3x j^0 \quad (1.72)$$

是不随时间变化的。这个量不随时间变化，是守恒量 (Conserved Quantity)。

时空平移对称性对应能动量守恒 时空平移对称性的坐标变换：

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad (1.73)$$

场的形状 (shape of the fields) 是不改变的：

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) \Rightarrow \delta\phi_r = 0 \quad (1.74)$$

Current density 是:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\delta x^\lambda \\ &= \mathcal{L}\epsilon^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\epsilon^\lambda \end{aligned} \quad (1.75)$$

如果只有  $\epsilon^\nu \neq 0$ , 则:(第二项对  $\nu$  并没有求和约定, 第一项对  $\nu$  指标有求和约定)

$$j^\mu = \mathcal{L}\delta_\nu^\mu\epsilon^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi(x))\epsilon^\nu \quad (1.76)$$

可以定义(有时候会用到  $\delta_\nu^\mu = g_\nu^\mu$ ):

$$\Theta_\nu^\mu = -\mathcal{L}g_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi(x)) \quad (1.77)$$

把  $\nu$  变到上指标:

$$\Theta^{\mu\nu} = -\mathcal{L}g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial^\nu\phi(x)) \quad (1.78)$$

满足:

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (1.79)$$

有四个守恒量, 写为:

$$P^\nu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P}\right) = \frac{1}{c} \int_V d^3x \Theta^{0\nu} \quad (1.80)$$

$\Theta$  的下指标形式:

$$\Theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) \quad (1.81)$$

Lorentz 不变性对应角动量和自旋守恒 Lorentz 变换下的坐标变化:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\nu \quad (1.82)$$

为了满足四维空间中的距离不变,  $\delta w$  是反对称的 ( $\delta w^{\mu\nu} = -\delta w^{\nu\mu}$ ), 这是因为:

$$\begin{aligned} x'^\mu x'_\mu &= (x^\mu + \delta w^{\mu\sigma}x_\sigma)(x_\mu + \delta w_\mu^\tau x_\tau) \\ &= x^\mu x_\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\nu x_\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\mu x_\nu \\ &= x^\mu x_\mu + (\delta w^{\mu\nu} + \delta w^{\nu\mu})x_\mu x_\nu \\ &= x^\mu x_\mu \end{aligned} \quad (1.83)$$

在 Lorentz 变换下, 场的变换是:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{rs}\phi_s(x) \quad (1.84)$$

这里的  $I^{\mu\nu}$  是 Lorentz 群表示的生成元,  $r s$  是生成元矩阵的行列指标。生成元  $I^{\mu\nu}$  对于 Lorentz 指标是反对称的, 也就是  $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$ 。

于是, 对于 Current density 是:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\delta x^\lambda \\ &= \mathcal{L}\delta w^{\mu\nu}x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\frac{1}{2}\delta w_{\sigma\nu}(I^{\sigma\nu})_{rs}\phi_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\partial_\lambda\phi_r(x))\delta w^{\lambda\nu}x_\nu \end{aligned} \quad (1.85)$$

他的下指标形式:

$$\begin{aligned}
j_\mu &= \mathcal{L} g_{\mu\nu} \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \left( -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) \right) \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \Theta_{\mu\nu} \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \Theta_{\mu\lambda} \delta w^{\lambda\nu} x_\nu \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \text{ 因为 } w \text{ 矩阵是反对称的} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \\
&= \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} M_{\mu\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{1.86}$$

其中:

$$M_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \tag{1.87}$$

定义反对称 (Anti-Symmetric) 张量 (逆变指标下的守恒荷):

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - (\Theta_{0\nu} x_\lambda - \Theta_{0\lambda} x_\nu) \right) \tag{1.88}$$

对于  $\nu\lambda$  的空间部分, 注意到:

$$\Theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\nu \phi_r) \tag{1.89}$$

那么:

$$\Theta_{0\nu} x_\lambda = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) - \mathcal{L} g_{0\nu} \right) x_\lambda \tag{1.90}$$

$$\Theta_{0\lambda} x_\nu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_\lambda \phi_r) - \mathcal{L} g_{0\lambda} \right) x_\nu \tag{1.91}$$

这个时候:

$$\begin{aligned}
M_{nl} &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s - (\Theta_{0n} x_l - \Theta_{0l} x_n) \right) \\
&= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_n \phi_r) - \mathcal{L} g_{0n} \right) x_l + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_l \phi_r) - \mathcal{L} g_{0l} \right) x_n \right)
\end{aligned} \tag{1.92}$$

一般写为:

$$M_{nl} = L_{nl} + S_{nl} \tag{1.93}$$

其中:

$$\begin{aligned}
L_{nl} &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_l \phi_r) x_n - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_n \phi_r) x_l \right) \\
&= \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} \left( x_n \frac{\partial}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \phi_r
\end{aligned} \tag{1.94}$$

$$S_{nl} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s \tag{1.95}$$

**Internal Symmetries** 这个时候没有坐标变换, 场的变换是:

$$\phi'_r(x) = \phi_r(x) + i\epsilon \sum_s \lambda_{rs} \phi_s(x) \tag{1.96}$$

$$\delta\phi_r = i\epsilon \sum_s \lambda_{rs} \phi_s(x) \tag{1.97}$$

守恒流是:

$$\begin{aligned}
 j_\mu &= \mathcal{L} \delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\lambda \phi(x)) \delta x^\lambda \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi \\
 &= i \sum_{rs} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s
 \end{aligned} \tag{1.98}$$

守恒荷是:

$$Q = j^0 = i \sum_{rs} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s = i \sum_{rs} \epsilon \pi_r \lambda_{rs} \phi_s \tag{1.99}$$

一个特殊的情况是对于相位改变:

$$\phi' = \phi + i\epsilon\phi \tag{1.100}$$

$$\phi'^* = \phi^* - i\epsilon\phi^* \tag{1.101}$$

将  $(\phi_1, \phi_2)$  分别叫作  $(\phi_1, \phi_2)$ , 于是  $\lambda_{11} = 1, \lambda_{22} = -1$ 。于是:

$$j_\mu = (-i) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)} \phi^* \right) \tag{1.102}$$

**Symmetrized Energy-Momentum Tensor:** 考虑修正过后的能动量张量 (Modified Tensor)

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \tag{1.103}$$

为了保证修正后的能动量张量满足守恒流方程, 要求  $\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu}$ , 这是因为:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \\
 &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\sigma (\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}) \\
 &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

## 1.3 量子力学基础

### 1.3.1 不同的绘景 Picture

#### 1.3.1.1 Schrodinger Picture

总结 Schrodinger 绘景的一些性质:

- 1) 态矢满足 Schrodinger 方程  $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})|\Psi(t)\rangle^S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle^S$
- 2) 定义坐标本征态  $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$
- 3) 定义动量本征态  $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$
- 4) 坐标本征态正交  $\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q)$
- 5) 动量本征态正交  $\langle p'|p\rangle = 2\pi\hbar\delta(p' - p)$
- 6)  $\int dp \frac{1}{2\pi\hbar} |p\rangle\langle p| = 1$
- 7)  $\int dq |q\rangle\langle q| = 1$
- 8)  $\langle q|p\rangle = e^{i\frac{p\cdot q}{\hbar}}$
- 9)  $\langle q|\Psi(t)\rangle^S = \psi(q, t)$
- 10) Schrodinger 方程的解可以写成:  $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Psi(0)\rangle^S$

**证明** 可以用上面的 (5) 推到 (6):(证明归一化可以用正交性推出来)

首先考虑积分:

$$\left(\int dp |p\rangle\langle p|\right)^2 = \int dp dp' |p'\rangle\langle p'| |p\rangle\langle p| = \int dp' dp |p'\rangle 2\pi\hbar\delta(p' - p) |p\rangle\langle p| = \int dp 2\pi\hbar |p\rangle\langle p| \quad (1.105)$$

上面的式子仅仅在第二个等号用到了 5)。可以推导出 6)

$$\begin{aligned} 2\pi\hbar &= \int dp |p\rangle\langle p| \\ \int dp \frac{1}{2\pi\hbar} |p\rangle\langle p| &= 1 \end{aligned} \quad (1.106)$$

同样的,这个方法也可以从(4)推到(7)。

### 1.3.1.2 Heisenberg Picture

在 Schrodinger 绘景中,态矢量演化: $|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$ ,算符是  $A^S(t)$ . 演化算符满足 Schrodinger 方程:

$$i\hbar\partial_t U(t, t_0) = H^S U(t, t_0). \quad (1.107)$$

其中,Hamiltonian 时厄米算符,  $U$  是么正算符. 也可以将态矢定住不变, 而改变算符, 也就是: $|\alpha, t\rangle^H = |\alpha, t_0\rangle^H = |\alpha, t_0\rangle^S$ . 同时算符会发生额外的演化: $A^H(t) = U^\dagger(t, t_0)A^S(t)U(t, t_0)$ .

如果  $A^S$  不含时间,那么 Heisenberg 绘景中的力学量的演化满足:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t A^H(t) &= U^\dagger(t, t_0)A^S U(t, t_0) \\ &= -U^\dagger(t, t_0)H_S A^S U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0)A^S H_S U(t, t_0) \\ &= -U^\dagger H_S U U^\dagger A^S U + U^\dagger A^S U U^\dagger H_S U \\ &= -H^H A^H + A^H H^H \\ &= [A^H, H^H] \end{aligned} \quad (1.108)$$

下面是之前写的,不想要了

总结 Heisenberg 绘景的一些性质:

下面列的是  $H$  不含时间时候的 Heisenberg Picture.

- 1) 定义 Heisenberg 绘景下的坐标算符  $\hat{q}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{q}_s e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ,  $\hat{q}_H(t) = W^\dagger(t)\hat{q}_s W(t)$
- 2) 定义 Heisenberg 绘景下的动量算符  $\hat{p}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{p}_s e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ,  $\hat{p}_H(t) = W^\dagger(t)\hat{p}_s W(t)$
- 3) 定义 Heisenberg 绘景下的坐标本征态  $\hat{q}_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle$
- 4) 定义 Heisenberg 绘景下的动量本征态  $\hat{p}_H(t)|p, t\rangle = p|p, t\rangle$
- 5) 定义 Heisenberg 绘景下态矢  $|\Psi\rangle_H = |\Psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(t)\rangle_S$ ,  $|\Psi\rangle_H = |\Psi(0)\rangle_S = W^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle_S$
- 6) Heisenberg 绘景下坐标本征态和 Schrodinger 绘景下坐标本征态的联系  $|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar}|q\rangle$ ,
- 7) Heisenberg 绘景下动量本征态和 Schrodinger 绘景下动量本征态的联系  $|p, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar}|p\rangle$
- 8) Heisenberg 绘景下坐标算符  $q_H(t)$  满足的 Heisenberg 运动方程  $-i\hbar\frac{\partial\hat{q}_H(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{q}_H(t)]$
- 9) Heisenberg 绘景下坐标算符  $p_H(t)$  满足的 Heisenberg 运动方程  $-i\hbar\frac{\partial\hat{p}_H(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{p}_H(t)]$
- 10) Heisenberg 绘景和 Schrodinger 绘景之间的转化算符满足 Heisenberg 动力方程 (dynamic function)  $i\hbar\partial_t \hat{W}(t) = \hat{H}(t)\hat{W}(t)$  注意这一条, $W(t)$  相当于  $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ ,  $W^\dagger O_S W = O_H(t)$ . 当 Hamilton 不含时间时候,他的解就比较简单,如果含有时间,就要按照这个方程去解.当然解微分方程是需要一个初始条件的,如果把初始条件定义为  $\hat{W}(t_0) = 1$ ,也可以把这个算符叫做  $W(t, t_0)$ (相当于是一个暗含初始条件的形式). 我的评价是: 保证了算符的均值和 Schrodinger 方程,什么叫做保证了薛定谔方程,就是  $W(t)|\Psi\rangle_H$  可以满足 Schrodinger 方程,就是不用对态矢求导
- 11) Heisenberg 绘景下的坐标本征态的正交条件  $\int dq|q, t\rangle\langle p, t| = 1$
- 12) Heisenberg 绘景下的动量本征态的正交条件  $\int dq \frac{1}{2\pi\hbar}|p, t\rangle\langle p, t| = 1$
- 13) Heisenberg 绘景下的坐标本征态的正交条件  $\langle q', t|q, t\rangle = \delta(q' - q)$
- 14) Heisenberg 绘景下的动量本征态的正交条件  $\langle p', t|p, t\rangle = 2\pi\hbar\delta(p' - p)$

15) Heisenberg 绘景下态矢和坐标本征态的内积  $\langle q, t | \Psi \rangle_H = \psi(q, t)$

16) Heisenberg 绘景下的态矢的演化方程  $i\hbar\partial_t |\Psi(0)\rangle_H = 0$

**证明** 我想证明定义的 Heisenberg 绘景下的坐标算符是满足 Heisenberg 运动方程的:

我们先考虑坐标算符的 Heisenberg 运动方程的左边部分:emm 会直接发现他是等于右边的

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{q}_H(t)}{\partial t} = \hat{H} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{q} e^{-i\hat{H}t/\hbar} - e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{q} \hat{H} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = [\hat{H}, \hat{q}_H(t)] \quad (1.109)$$

同样的方法可以证明动量算符满足的 Heisenberg 运动方程。

### 1.3.1.3 Interaction Picture 相互作用绘景

当系统的 Hamiltonian 可以写为:

$$H^S = H_0^S + H_1^S \quad (1.110)$$

其中,  $H_0^S$  不包含时间项 (所以在三个绘景中是同样的算符),  $H_1^S$  包含时间项。在 Schrodinger 绘景中, 态矢量演化满足

$$|\alpha, t\rangle^S = W(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (1.111)$$

. 其中,  $W(t, t_0)$  满足运动方程.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} W(t, t_0) = H^S W(t, t_0) \quad (1.112)$$

相互作用绘景中的算符及其演化:

定义相互作用绘景中的态矢量:

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle^I &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} |\alpha, t\rangle^S \\ &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} W(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle. \end{aligned} \quad (1.113)$$

为了保证期望值不变, 在这个绘景中, 力学量算符应该满足要求:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, t |^I A^I(t) | \alpha, t \rangle^I &= \langle \alpha, t |^S A^S(t) | \alpha, t \rangle^S \\ &= \langle \alpha, t |^I e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} A^S(t) e^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} | \alpha, t \rangle^I \end{aligned} \quad (1.114)$$

于是:

$$A^I(t) = e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} A^S(t) e^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} \quad (1.115)$$

如果  $A^S$  和时间无关,  $A^I(t)$  满足 Heisenberg 运动方程:

$$i\hbar\partial_t A^I(t) = [A^I, H_0^I] = [A^I, H_0^S] \quad (1.116)$$

相互作用绘景中的态矢量及其演化:

定义相互作用绘景中的态矢量:

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle^I &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} |\alpha, t\rangle^S \\ &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} W(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle. \end{aligned} \quad (1.117)$$

随时间演化:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t |\alpha, t\rangle^I &= -H_0^S |\alpha, t\rangle^I + e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} H^S W(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle \\ &= (-e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} H_0^S e^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} + e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} H^S e^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}}) |\alpha, t\rangle^I \\ &= (-H_0 + H^I) |\alpha, t\rangle^I \\ &= H_1^I |\alpha, t\rangle^I \end{aligned} \quad (1.118)$$

定义时间演化算符:

$$|\alpha, t\rangle^I = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \quad (1.119)$$

演化算符满足演化方程:

$$i\hbar\partial_t U(t, t_0) = H_1^I U(t, t_0) \quad (1.120)$$

### Heisenberg 绘景和 Interacting 绘景之间的联系

通过 Interacting 绘景的演化算符得到态矢量之间的关系:

$$|\alpha, t\rangle^I = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t\rangle^H \quad (1.121)$$

对于算符, 为了保证期望值在两个绘景中相同:

$$\begin{aligned} \langle\alpha, t| A^I |\alpha, t\rangle^I &= \langle\alpha, t| A^H A^H |\alpha, t\rangle^H \\ &= \langle\alpha, t| U^\dagger(t, t_0) A^H U(t, t_0) |\alpha, t\rangle^I \end{aligned} \quad (1.122)$$

于是算符之间的关系:

$$A^I = U^\dagger(t, t_0) A^H U(t, t_0) \quad (1.123)$$

### Dyson 级数求解相互作用绘景中的演化算符

相互作用绘景中的演化算符满足演化方程:

$$i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1^I(t) U(t, t_0) \quad (1.124)$$

他的解一定满足积分式:

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t H_1^I(t) U(t, t_0) dt \quad (1.125)$$

可以进行猜解

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \quad (1.126)$$

**证明** 上面的级数有个名字叫做 Dyson 级数, 可以直接带入证明:

$$\begin{aligned} 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} H_1^I(t) U(t, t_0) dt \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right] \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \int_{t_0}^{t_f} dt \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t) H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \\ &= U(t_f, t_0) \end{aligned} \quad (1.127)$$

□

如果引入时序算符, 这个算符是让被作用的函数按照时间顺序排列。可以把时间演化算符写成:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_t^{t_0} dt_1 \dots \int_t^{t_0} dt_n T \left( H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right) \\ &= T \exp \left[ -i \int_t^{t_0} dt' H_1^I(t') \right] \\ &= T \exp \left[ -i \int_t^{t_0} dt' \int d^3x \mathcal{H}_1^I(x) \right] \end{aligned} \quad (1.128)$$

下面的是之前写的, 想要废弃掉了

In the Interaction picture, we always write Hamiltonian in the Schrodinger Picture as a combination of a term that contains time and a term doesn't.

在下面的计算中,  $W(t)$  相当于  $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ , (为什么说是相当于是因为  $H$  中含有时间, 所以薛定谔绘景和海森堡绘景的联系会比较复杂一点) 这个  $W$  算符按照上面的定义,  $\hat{q}_H(t) = W^\dagger(t)\hat{q}_S W(t)$ ,  $W^\dagger|\Psi(t)\rangle_S = |\Psi\rangle_H$

$$H^S = H_0^S + H_1^S(t) \quad (1.129)$$

Relation of state between Interaction Picture and Schrodinger Picture

$$|\Psi(t)\rangle^I = e^{iH_0^St}|\Psi(t)\rangle^S = e^{iH_0^St}W(t)|\Psi\rangle^H = V(t)|\Psi\rangle^H \quad (1.130)$$

Relation of operator between Interaction Picture and Schrodinger Picture. 可以理解为使得 Interaction Picture 中的算符满足 Heisenberg Dynamic 方程 (不知道是不是叫做 Heisenberg 运动方程)。 $-i\hbar\frac{\partial O_I(t)}{\partial t} = [\hat{H}_0, O_I(t)]$ , 这个方程的解比较简单, 就是指数解。但是需要知道初始条件, 如果初始条件是  $O_I(t_0) = O_S$ , 那么他的解就是  $O^I(t) = e^{iH_0^S(t-t_0)}O^S e^{-iH_0^S(t-t_0)}$

$$O^I(t) = e^{iH_0^St}O^S e^{-iH_0^St} = e^{iH_0^St}W(t)O^HW^\dagger(t)e^{-iH_0^St} = V(t)O^H(t)V^\dagger(t) \quad (1.131)$$

按照这样定义的态, 可以发现(实际上也可以把演化方程当作是 Interaction 绘景的定义) 态随着时间的变化满足的微分方程。(演化方程)

$$\begin{aligned} i\partial_0|\Psi(t)\rangle^I &= (-H_0^S e^{iH_0^St} + e^{iH_0^St}H^S)|\Psi\rangle^S \\ &= (-H_0^S + e^{iH_0^St}H^S e^{-iH_0^St})e^{iH_0^St}|\Psi\rangle^S \\ &= (-e^{iH_0^St}H_0^S e^{-iH_0^St} + e^{iH_0^St}H^S e^{-iH_0^St})e^{iH_0^St}|\Psi\rangle^S \\ &= (H^I - H_0^I)|\Psi(t)\rangle^I \\ &= H_1^I|\Psi(t)\rangle^I \end{aligned} \quad (1.132)$$

时间演化算符  $U$  是这样定义的。

$$|\Psi(t)\rangle^I = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle^I = V(t)|\Psi\rangle^H = V(t)V(t_0)^\dagger|\Psi(t_0)\rangle^I \quad (1.133)$$

按照前面讲到的相互作用态的演化方程, 可以推导出时间演化算符  $U$  的演化方程。

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_1^I(t)U(t, t_0) \quad (1.134)$$

他的解一定满足积分式:

$$U(t, t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^t H_1^I(t)U(t, t_0)dt \quad (1.135)$$

可以进行猜解

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \quad (1.136)$$

**证明** 上面的级数有个名字叫做 Dyson 级数, 可以直接带入证明:

$$\begin{aligned} 1 + (-i)\int_{t_0}^{t_f} H_1^I(t)U(t, t_0)dt \\ &= 1 + (-i)\int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t)[1 + \sum_{n=1}(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n)] \\ &= 1 + (-i)\int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t) \\ &\quad + \sum_{n=1}(-i)^{n+1} \int_{t_0}^{t_f} dt \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t)H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \\ &= U(t_f, t_0) \end{aligned} \quad (1.137)$$

如果引入时序算符, 这个算符是让被作用的函数按照时间顺序排列。可以把时间演化算符写成:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_t^{t_0} dt_1 \dots \int_t^{t_0} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \\ &= T \exp[-i \int_t^{t_0} dt' H_1^I(t')] \\ &= T \exp[-i \int_t^{t_0} dt' \int d^3x \mathcal{H}_1^I(x)] \end{aligned} \quad (1.138)$$

**1.3.1.3.1 标量场** 如果规定在  $t_0, O^H(t_0) = O^I(t_0) = O^S$ , 在 Heisenberg Pic 和 Interaction Pic 之间的算符的变换是。  
 $V(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}W(t, t_0)$  这样的  $V(t, t_0)$  也是  $U(t, t_0)$  的一个定义 (因为他们都可以让 Interact Pic 中的态矢演化)。  
emmm.

这样, Heisenberg Pic 算符和 Interact Pic 算符之间的关系就是

$$U(t, t_0)^\dagger O^I(t) U(t, t_0) = O^H(t) \quad (1.139)$$

现在说一个事情就是我们习以为常的量子标量场的解 (就是写成产生算符和湮灭算符的形式), 他是在没有势能 (相互作用) 的时候的解。我们现在说这个解是  $\phi_0(x)$ , 是 Interacting Pic 下的算符, 那么可以转换为 Heisenberg Pic 下的算符通过上面的式子。这个在 Schwartz 的 P87

$$\phi(x) = U^\dagger(t, t_0) \phi_0(x) U(t, t_0) \quad (1.140)$$

$$|-\rangle_H = U^\dagger(t, t_0) |-\rangle_I \quad (1.141)$$

我们现在说真空态, 这个态矢在 Interacting Pic 下面叫做  $|0\rangle$ , 在 Heisenberg Pic 下叫做  $|\Omega\rangle$ 。

这两个态矢的联系按照上面的式子应该叫做:

$$|\Omega\rangle = U^\dagger(t, t_0) |0\rangle = U(t_0, t) |0\rangle \quad (1.142)$$

$$\langle \Omega | = \langle 0 | U(t, t_0) \quad (1.143)$$

现在考虑 n-point Function:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle &= \langle 0 | U(t, t_0) U(t_0, t_1) \phi_0(x_1) U(t_1, t_0) U(t_0, t_2) \dots U(t_0, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, t_0) U(t_0, t) | 0 \rangle \quad (1.144) \\ &= \langle 0 | U_{t,1} \phi_0(x_1) U_{1,2} \dots U_{n-1,n} \phi_0(x_n) U_{n,t} | 0 \rangle \end{aligned}$$

现在 Schwartz P88 有一个操作, 就是说左边的  $t$  应该是  $+\infty$ , 右边的  $t$  叫做  $-\infty$ , 这样左右的真空不是同一时间的?...

$$\langle 0 | U_{+\infty,1} \phi_0(x_1) U(t_1, t_0) U(t_0, t_2) \dots U(t_0, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, t_0) U(t_0, t) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | U_{+\infty,1} \phi_0(x_1) U_{1,2} \dots U_{n-1,n} \phi_0(x_n) U_{n,-\infty} | 0 \rangle \quad (1.145)$$

然后, 不知道怎么地, 反正就是归纳出了一个结论是这样的: **主要是不知道为什么 U 可以被提出来**

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) U_{+\infty,-\infty}\} | 0 \rangle \quad (1.146)$$

然后为了归一化, 一般是这样来写 N-POINT function

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle &= \frac{\langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) U_{+\infty,-\infty}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{+\infty,-\infty} | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_0)}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_0)} | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (1.147)$$

## 第二章 正则量子化 Schrodinger 方程/KGE

这里先看 ipad 笔记

## 第三章 Dirac 方程

### 3.1 Dirac 方程的导出

**Dirac 方程导出** 类似于 Schrodinger 方程，考虑相对论波函数满足 Dirac 方程

$$\hat{E}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \beta m)\psi \quad (3.1)$$

认为能量和动量算符分别为  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$   $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar \nabla$  Dirac 方程就是：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi \quad (3.2)$$

平方得到：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi \\ &= -\alpha_x^2 \partial_x^2 - \alpha_y^2 \partial_y^2 - \alpha_z^2 \partial_z^2 + \beta^2 m^2 \psi \\ &\quad - (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) \partial_x \partial_y \psi - (\alpha_x \alpha_z + \alpha_z \alpha_x) \partial_x \partial_z \psi - (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) \partial_y \partial_z \psi \\ &\quad - im(\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) \partial_x \psi - im(\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) \partial_y \psi - im(\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) \partial_z \psi \end{aligned} \quad (3.3)$$

为了满足狭义相对论的 Einstein 能量-动量关系-其实也就是满足 Klein-Gordan 方程

$$\left\{ \hat{E}^2 \psi = (\hat{\mathbf{P}}^2 + m^2)\psi \right. \quad (3.4)$$

这也就要求了  $\alpha$  和  $\beta$  的代数关系：

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 &= \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1 \quad \beta^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \{\alpha_j, \beta\} &= 0 \\ \beta^\dagger &= \beta \quad \alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \text{由于 } \hat{E} \text{ 的幺正性} \end{aligned} \quad (3.5)$$

这些都是矩阵。 $\psi$  被称为 Dirac spinor

**Dirac 方程的协变形式,  $\gamma$  矩阵** 接下来，引出  $\gamma$  矩阵。给 Dirac 方程同时乘以  $\beta$  得到：

$$i\beta \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + i\beta \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + i\beta \frac{\partial}{\partial t} \psi - \beta^2 m \psi = 0 \quad (3.6)$$

定义  $\Gamma$  矩阵：

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^1 \equiv \beta \alpha_x \quad \gamma^2 \equiv \beta \alpha_y \quad \gamma^3 \equiv \beta \alpha_z \quad (3.7)$$

Dirac 方程可以写为更为简单形式：

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.8)$$

对  $\alpha$  和  $\beta$  矩阵的要求可以转变为对  $\gamma$  矩阵的要求。

$$\begin{aligned} \{\beta, \beta \alpha_i\} &= \beta \beta \alpha_i + \beta \alpha_i \beta = \alpha_i - \alpha_i = 0 \\ \{\beta, \beta\} &= \beta^2 + \beta^2 = 2 \\ \{\beta \alpha_i, \beta \alpha_i\} &= 2\beta \alpha_i \beta \alpha_i = -2\beta^2 \alpha_i^2 = -2 \\ \{\beta \alpha_i, \beta \alpha_j\} &= \beta \alpha_i \beta \alpha_j + \beta \alpha_j \beta \alpha_i = -\beta^2 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0 \\ \beta^\dagger &= \beta \quad (\beta \alpha_i)^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

也就是：

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \end{aligned} \quad (3.10)$$

## 命题 3.1 (Dirac 方程)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k \end{aligned} \quad (3.12)$$

## 3.2 Pauli's Fundamental Theorem

不同  $\gamma$  表示之间的相似性 想要验证。对于不同的  $\gamma$  矩阵表示  $\gamma_\mu$  和  $\gamma'_\mu$ 。它们之间满足相似性:  $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$

(0) 构建 16 个  $4 \times 4$  矩阵

$$\begin{aligned} \Gamma_A = & \mathbb{I}, \gamma_0, i\gamma_1, i\gamma_2, i\gamma_3, \\ & i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_0, \gamma_2\gamma_0, \gamma_3\gamma_0, \\ & \gamma_1\gamma_2\gamma_3, i\gamma_1\gamma_2\gamma_0, i\gamma_3\gamma_1\gamma_0, i\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \\ & i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \quad (A = 1 \cdots 16) \end{aligned} \quad (3.13)$$

另外, 定义矩阵  $\gamma_5$ :

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \quad (3.14)$$

满足几个性质:

$$\Gamma_A^2 = 1 \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad \Gamma_A \Gamma_B = \text{Const } \Gamma_C \quad (A \neq B \Rightarrow C \neq 1; \text{ 固定 A 的同时 B 遍历 16 } \Rightarrow C \text{ 遍历 16}) \quad (3.15)$$

(1) 对于所有的  $\Gamma_A \quad A \neq 1$ , 一定可以找到一个  $\Gamma_B$  s.t.:

$$\Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B = -\Gamma_A \quad (3.16)$$

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	9	4	3	3	4	5	3	2	2	2	2	6	6	7	2

(2) 对于所有的  $\Gamma_A \quad (A = 2 \cdots 16)$ ,  $\text{tr}(\Gamma_A) = 0$

$$\text{tr}(-\Gamma_A) = \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B) = \text{tr}(\Gamma_B^2 \Gamma_A) = \text{tr}(\Gamma_A) = 0 \quad (3.17)$$

(3)  $\Gamma_A$  是相互线性无关的。也就是要证明:

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A = 0 \Rightarrow a_A = 0 \quad (A = 1 \cdots 16) \quad (3.18)$$

证明 认为

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A = 0 \quad (3.19)$$

于是:

$$\begin{aligned} \Gamma_B \left( \sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A \right) &= a_B \Gamma_B^2 + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma_B \Gamma_A = 0 \\ a_B + \sum_{C \neq 1} a_A \text{Const } \Gamma_C &= 0 \\ 4a_B + \sum_{C \neq 1} a_A \text{Const } \text{tr}(\Gamma_C) &= 0 \\ a_B &= 0 \quad (B = 1 \dots 16) \end{aligned} \tag{3.20}$$

□

(4) 所有的  $4 \times 4$  矩阵可以用  $\Gamma_A$  展开。因为上面说已经找到了 16 个线性无关的矩阵基底。

$$\chi = \sum_A \chi_A \Gamma_A, \quad \chi_B = \frac{1}{4} \text{tr}(\Gamma_B \chi) \tag{3.21}$$

(5) 如果有一个矩阵和所有的  $\Gamma_A$  都对易，那么它正比于  $\mathbb{I}$ 。认为:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_B \Gamma_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_A|_{B \neq 1} \\ \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C &= -\Gamma_B \\ \Gamma_C \chi &= \chi \Gamma_C \Rightarrow \chi = \Gamma_C \chi \Gamma_C \end{aligned} \tag{3.22}$$

于是:

$$\begin{aligned} \chi_B \Gamma_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_A|_{B \neq 1} &= \chi_B \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_C \Gamma_A \Gamma_C|_{B \neq 1} \\ \chi_B \text{tr}(\Gamma_B^2) + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} &= \chi_B \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C) + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_C \Gamma_A \Gamma_C)|_{B \neq 1} \\ 4\chi_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} &= -4\chi_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(-\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} \quad (\Gamma_A \Gamma_B \sim \Gamma_D|_{D \neq 1}) \\ \chi_B &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

那么:

$$\chi \sim \mathbb{I} \tag{3.24}$$

(6) 能找到两组 Dirac 基底  $\gamma_\mu$  和  $\gamma'_\mu$ ，它们构成 16 维空间中的基底  $\Gamma_A$  和  $\Gamma'_A$ 。那么可以定义  $S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B$  ( $F$  是任意 4 维矩阵) 使得:

$$\Gamma'_A S = S \Gamma_A \tag{3.25}$$

**证明**

$$\Gamma'_A S \Gamma_A = \sum_B \Gamma'_A \Gamma'_B F \Gamma_B \Gamma_A \tag{3.26}$$

考虑到:

$$\left\{ \Gamma_B \Gamma_A = \epsilon_C \Gamma_C \quad \Gamma_A \Gamma_B = \frac{1}{\epsilon_C} \Gamma_C \right. \tag{3.27}$$

于是:

$$\text{上式} = \sum_C \Gamma'_C F \Gamma_C = S \tag{3.28}$$

也就是:

$$\Gamma'_A S = S \Gamma_A \tag{3.29}$$

□

(7) 上一点提到的  $S$  矩阵可以不是 0 矩阵。为了证明这一点，先取一个特殊的  $F$  矩阵：

$$F_{\nu\sigma} = 1 \quad others = 0 \quad (3.30)$$

$$S_{\mu\rho} = \sum_B (\Gamma'_B F \Gamma_B)_{\mu\rho} = \sum_B (\Gamma'_B)_{\mu\nu} (\Gamma_B)_{\sigma\rho} \quad (3.31)$$

如果不论怎么取  $F$ ,  $S$  都是 0。就意味着：

$$\sum_B (\Gamma'_B)_{\mu\nu} \Gamma_B = 0 \quad (3.32)$$

但是因为前面提到  $\Gamma_B$  是线性无关的。所以这个等式不成立。

(8) 可以合理的取  $F$ , 让  $S$  的行列式不等于 0 (可逆)。下面是证明, 首先构造

$$S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B \quad T = \sum_B \Gamma_B G \Gamma'_B \quad (3.33)$$

满足：

$$\Gamma_A T = T \Gamma'_A \quad \Gamma'_A S = S \Gamma_A \quad (3.34)$$

那么：

$$\Gamma_A T S = T \Gamma'_A S = T S \Gamma_A \quad (3.35)$$

于是  $TS$  对易于所有的  $\Gamma_A$ 。于是：

$$TS = k \mathbb{I} \quad (3.36)$$

如果  $\det(S) = 0$  那么  $k = 0$ 。

$$TS = \sum_{B=1} T \Gamma'_B F \Gamma_B = 0 \quad (3.37)$$

取：

$$F_{\nu\sigma} = 1 \quad others = 0 \quad (3.38)$$

那么：

$$\sum_B (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} (\Gamma_B)_{\sigma\rho} = 0 \quad (\forall \mu, \nu, \sigma, \rho) \quad (3.39)$$

于是：

$$\begin{aligned} \sum_B (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} \Gamma_B &= 0 \quad (\forall \mu, \nu) \\ &\Downarrow \\ (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} &= 0 \quad (\forall \mu, \nu) \\ &\Downarrow \\ T &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

也就是说, 只要  $T \neq 0$ , 那么一定可以找到  $S$ , 使得  $\det(T)\det(S) \neq 0$ 。

$$\gamma'_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} \quad (3.41)$$

相似变换可以用幺正算符表示 当  $\gamma_\mu^\dagger = g_{\mu\mu} \gamma_\mu$ ,  $\gamma'_\mu^\dagger = g_{\mu\mu} \gamma'_\mu$  时。通过前面的证明已经找到了  $S$  使得：

$$\gamma'_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} \quad (3.42)$$

定义：

$$V = (\det S)^{-1/4} S \quad \gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \quad \det(V) = 1 \quad (3.43)$$

先证明：如果  $\gamma'_\mu = V_1 \gamma_\mu V_1^{-1}$ ,  $\gamma'_\mu = V_2 \gamma_\mu V_2^{-1}$ 。那么： $V_1 = k V_2$ 。

证明

$$\begin{aligned} V_1 \gamma_\mu V_1^{-1} &= V_2 \gamma_\mu V_2^{-1} \\ V_2^{-1} V_1 \gamma_\mu &= \gamma_\mu V_2^{-1} V_1 \\ V_2^{-1} V_1 \Gamma_A &= \Gamma_A V_2^{-1} V_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

由前面提到的 Shur's lemma:

$$V_1 = k V_2 \quad (3.45)$$

由于  $\det(V_1) = \det(V_2) = 1$ , 于是:  $V_2 = V_1 \exp(im\pi/2)$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ )

□

由于

$$\left\{ \gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \right. \quad (3.46)$$

那么

$$\gamma'^\dagger_\mu = (V^\dagger)^{-1} \gamma^\dagger_\mu V^\dagger \quad (3.47)$$

考虑:

$$\left\{ \gamma^\dagger_\mu = g_{\mu\mu} \gamma_\mu \right. \quad (3.48)$$

$$\gamma'_\mu = (V^\dagger)^{-1} \gamma_\mu V^\dagger \quad (3.49)$$

于是:

$$\begin{aligned} (V^\dagger)^{-1} &= V \exp(im\pi/2) \quad (m = 0, 1, 2, 3) \\ V^\dagger V &= \exp(im\pi/2) \\ (V^\dagger V)_{ii} &= \sum_j V_{ji} V_{ji}^* > 0 \Rightarrow m = 0 \quad (V^\dagger)^{-1} = V, V^\dagger = V^{-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

也就找到了一个幺正变换。

**命题 3.2 (Dirac 矩阵表示之间的幺正变化)**

$$\gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^\dagger \quad (3.51)$$

其中:

$$V = (\det S)^{-1/4} S \quad (S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B) \quad (3.52)$$

### 3.3 Dirac 方程的 Lorentz 协变性

$\psi'(x')$  与  $\psi(x)$  之间的转变

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \Rightarrow \psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') \quad (3.53)$$

满足:

$$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}) \quad (3.54)$$

**S 满足的基础关系** 考虑 Dirac 方程:

$$\begin{aligned} & (i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c) \psi(x) = 0 \\ & (i\hbar\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c S^{-1}(\Lambda)) \psi'(x') = 0 \\ & \left( i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c \right) \psi'(x') = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

考虑到:

$$\left\{ x'^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu \right. \quad (3.56)$$

于是:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right. \quad (3.57)$$

$$\left. \left( i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m_0 c \right) \psi'(x') = 0 \right. \quad (3.58)$$

要保证在所有的参考系中的方程形式一样:

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu = \gamma^\nu \quad (3.59)$$

利用  $\Lambda$  矩阵的正交性:

$$\left\{ \Lambda_\mu^\nu \Lambda_\nu^\rho = \delta_\mu^\rho \right. \quad (3.60)$$

$$S(\Lambda) \gamma^\rho S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\nu^\rho \gamma^\nu \quad (3.61)$$

**S 生成算符的对易关系** 首先构建在微小 Lorentz 变换下的 S 算符:

$$S(\Delta w^{\mu\nu}) = \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta w^{\mu\nu} \quad (\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}) \quad (3.62)$$

$$S^{-1}(\Delta w^{\mu\nu}) = \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta w^{\mu\nu} \quad (3.63)$$

由前文对 S 算符的要求:

$$\left\{ S(\Lambda) \gamma^\rho S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\nu^\rho \gamma^\nu \right. \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left( \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) = \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu \\ & \left( \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left( \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) = \left( \delta_\mu^\nu + \Delta w_\mu^\nu \right) \gamma^\mu \\ & -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) = \Delta w_\mu^\nu \gamma^\mu \\ & -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) = \Delta w^{\beta\nu} \gamma_\beta \\ & -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) = \Delta w^{\beta\alpha} g_\alpha^\nu \gamma_\beta \\ & -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \Delta w^{\beta\alpha} (g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha) \end{aligned} \quad (3.65)$$

于是得到 S 生成算符的对易关系:

$$2i \left( g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta \right) = [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \quad (3.66)$$

**找到满足条件的 S 的生成算符** 直接假定:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] &= \left[ \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu \right] \\
&= \frac{i}{2} [\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha, \gamma^\nu] \\
&= \frac{i}{2} ([\gamma_\alpha \gamma_\beta, \gamma^\nu] - [\gamma_\beta \gamma_\alpha, \gamma^\nu])
\end{aligned} \tag{3.68}$$

考虑到  $\gamma$  矩阵满足的基本性质:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} \Rightarrow \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta \end{array} \right. \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{i}{2} (2 [\gamma_\alpha \gamma_\beta, \gamma^\nu] - 2 [g_{\alpha\beta} \mathbb{I}, \gamma^\nu]) \\
&= i (\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

考虑到:

$$\begin{cases} \gamma_\beta \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\beta = 2g_\beta^\nu \\ \gamma_\alpha \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\alpha = 2g_\alpha^\nu \end{cases} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= i (-\gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta + 2g_\beta^\nu \gamma_\alpha - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
&= i (\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - 2g_\alpha^\nu \gamma_\beta + 2g_\beta^\nu \gamma_\alpha - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
&= 2i (g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

也就是, 满足生成元算符的对易条件:

$$2i (g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta) = [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \tag{3.73}$$

## 3.4 Dirac 自由粒子的 spinor

简单起见:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^1 \equiv \beta \alpha_x \quad \gamma^2 \equiv \beta \alpha_y \quad \gamma^3 \equiv \beta \alpha_z \tag{3.74}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.75}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

总角动量与自旋的引入

定义自旋，求其与哈密顿量之间的对易关系 定义自旋算符为(同时也是 $\Sigma$ 算符的定义):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

观察自旋算符和 Dirac 哈密顿量之间的对易关系:

$$[H_D, S_x] = \left[ (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + m_0\beta), \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \right] \quad (3.79)$$

考虑到:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ \text{and} \\ \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.80)$$

于是:

$$\text{上式} = \left[ \alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, \frac{1}{2} \Sigma_x \right] \quad (3.81)$$

考虑到 Pauli 矩阵之间的对易性质:

$$\{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\epsilon_k \quad (3.82)$$

得到:

$$\left\{ [\alpha_i, \Sigma_x] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_x - \sigma_x\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_x - \sigma_x\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ixk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ixk}\alpha_k \right. \quad (3.83)$$

于是:

$$\text{上式} = -iP_y\alpha_z + iP_z\alpha_y = i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P})_x \quad (3.84)$$

总结起来:

$$[H_D, \mathbf{S}] = i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P}) \quad (3.85)$$

轨道角动量与  $H_D$  之间的对易关系 轨道角动量算符定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (3.86)$$

和哈密顿量的对易:

$$\begin{aligned} [H_D, \mathbf{L}] &= [\alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, \mathbf{L}] \\ [H_D, L_x] &= [\alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, yP_z - zP_y] \\ &= -i\alpha_y P_z + i\alpha_z P_y \\ &= -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P})_x \end{aligned} \quad (3.87)$$

合理推断:

$$[H_D, \mathbf{L}] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P}) \quad (3.88)$$

角动量算符和  $H_D$  之间的对易关系

$$[H_D, \mathbf{J}] = 0 \quad (3.89)$$

$\mathbf{S}$  与  $\mathbf{L}$  之间的对易关系 首先观察  $\mathbf{S}$  之间的对易关系:

$$[S_i, S_j] = \frac{1}{4} [\Sigma_i, \Sigma_j] = i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_k = i\epsilon_{ijk}S_k \quad (3.90)$$

$\mathbf{S}$  和  $\mathbf{L}$  之间是对易的:

$$[S_i, L_k] = 0 \quad (3.91)$$

最后观察  $\mathbf{L}$  之间的对易关系:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijl}L_k \quad (3.92)$$

自旋  $\frac{1}{2}$  发现:

$$|\mathbf{S}|^2 = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\Sigma}|^2 = \frac{1}{4}(1+1+1)\mathbb{I} = \frac{3}{4}\mathbb{I} \quad (3.93)$$

于是可以改写 Feynman

$$s = \frac{1}{2} \quad s(s+1) = \frac{3}{4} \quad (3.94)$$

共同本征态

能量和动量共同本征态 考虑 Dirac 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta) \psi \quad (3.95)$$

可以发现 Dirac 能量算符  $H_D$  和动量算符  $\mathbf{P}$  是对易的。所以可以找到他们的共同本征态。认为:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\epsilon t) \quad (3.96)$$

$$H_D \psi(x) = \epsilon \psi(x) \quad \mathbf{P} \psi(x) = \mathbf{p} \psi(x) \quad (3.97)$$

现在带入 Dirac 方程得到:

$$\begin{aligned} \epsilon \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} &= (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + m_0 \beta) \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p} + m_0 \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.98)$$

得到线性方程组:

$$\begin{aligned} (\epsilon - m_0) \varphi_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 &= 0 \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\epsilon + m_0) \chi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

要得到不为 0 的解, 行列式是 0:

$$\det \begin{bmatrix} (\epsilon - m_0) & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\epsilon + m_0) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.100)$$

考虑到 Pauli 矩阵的性质:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{I} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.101)$$

得到:

$$\epsilon^2 = m_0^2 + \mathbf{p}^2 \Rightarrow \epsilon = \lambda E_p \quad (E_p = \sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2}; \quad \lambda = \pm 1) \quad (3.102)$$

于是:

$$\chi_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \epsilon} \varphi_0 \quad \text{可以假定 } \varphi_0 = U \text{ 满足: } U^\dagger U = 1 \quad (3.103)$$

最终得到能量和动量共同本征态的 Spinor 是:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = N_{\mathbf{p}, \lambda} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad (3.104)$$

可以验证, 为了满足归一化和正交条件:(通过直接计算, 正交已经满足。不过需要通过调整  $N$  的值来归一化)

$$\left\{ \int d^3x \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger(x) \Psi_{\mathbf{p}', \lambda'}(x) = \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right\} \quad (3.105)$$

得到:

$$N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.106)$$

能量/动量/螺旋度的共同本征态 定义螺旋度 Helicity:

$$\Lambda_S = S \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{p}|} \quad (3.107)$$

考虑到:

$$\left\{ H_D = \alpha \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta \quad S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right. \quad (3.108)$$

对易关系:

$$[H_D, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] = [\alpha \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] \quad (3.109)$$

考虑到:

$$\left\{ \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \right. \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= [\alpha \cdot \mathbf{P}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

考虑螺旋度的平方:

$$\Lambda_S^2 = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{P})^2 \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} = \frac{1}{4} \quad \{ (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{I} + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \} \quad (3.112)$$

所以如果 spinor 是螺旋度的本征态,

$$\Lambda_S \Psi(x) = \lambda_S \Psi(x) \quad (3.113)$$

那么:

$$\lambda_S = \pm \frac{1}{2} \quad (3.114)$$

所以  $\Lambda_S, H_D, \mathbf{P}$  可以拥有共同的本征态。接下来要寻找他们的共同本征态。前面已经得到了能量和动量的共同本征态:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.115)$$

要通过合理的选取  $U$ , 使得它也是螺旋度的本征态:

$$\Lambda_S \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = \pm \frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} &= \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} &= \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.117)$$

研究列向量中的前两个:

$$\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} U = \pm \frac{1}{2} U \quad (3.118)$$

考虑到:

$$\left\{ \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right. \quad (3.119)$$

带入得到:

$$\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & p_z \end{pmatrix} U = \pm \frac{1}{2} U \quad (3.120)$$

认为:

$$\left\{ p_z = |\mathbf{p}| \cos \theta \quad p_x = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi \quad p_y = |\mathbf{p}| \sin \theta \sin \phi \right. \quad (3.121)$$

带入得到:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} U = \pm U \quad (3.122)$$

为了让  $\mathbf{U}$  满足归一关系:

$$\left\{ U^\dagger U = 1 \right. \quad (3.123)$$

得到:

$$(\pm 1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (3.124)$$

向上螺旋态  $\lambda_s = 1/2$  此时:

$$(1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (3.125)$$

考虑到  $\mathbf{U}$  向量的归一化条件:

$$\begin{aligned} U_1 U_1^* \left( 1 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) &= 1 \\ U_1 U_1^* &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ U_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \\ U &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.127)$$

带入  $\mathbf{U}$ , 化简之后得到:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.128)$$

向下螺旋态  $\lambda_s = -1/2$  此时:

$$(-1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (3.129)$$

考虑到  $\mathbf{U}$  向量的归一化条件:

$$U_1 U_1^* \left( 1 + \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) = 1 \quad (3.130)$$

得到:

$$U_1 U_1^* = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.131)$$

于是:

$$U = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

于是, 向上螺旋态的 spinor 是:

$$\Psi_{\mathbf{p},\lambda,\downarrow}(x) = N \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.133)$$

至此, 确定了同时是  $H_D, \mathbf{P}, \Lambda_S$  的本征态 Spinor:

$$\Psi_{\mathbf{p},\lambda,\uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.134)$$

$$\Psi_{\mathbf{p},\lambda,\downarrow}(x) = N \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (3.135)$$

并且满足归一化条件:

$$\int d^3x \Psi_{\mathbf{p},\lambda,\lambda_S}^\dagger(x) \Psi_{\mathbf{p}',\lambda',\lambda'_S}(x) = \delta_{\lambda_S, \lambda'_S} \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.136)$$

**这里不看** 在 Mark Thomson 的粒子物理里面, 直接定义了 normalized particle Spinor 和 normalized anti-particle Spinor。首先是 particle spinor:

$$u_\uparrow = \sqrt{E_p + m_0} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_\downarrow = \sqrt{E_p + m_0} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

至于 anti-particle Spinor 注意到:

$$\sqrt{\frac{E_p - m_0}{2E_p}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 - E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 - E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E_p + m_0}{2E_p}} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} ; \quad \sqrt{\frac{E_p - m_0}{2E_p}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 - E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 - E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E_p + m_0}{2E_p}} \begin{pmatrix} -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.138)$$

定义 anti-particle helicity spinor:

$$v_\uparrow = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad v_\downarrow = \sqrt{E_p + m_0} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

到这里, 和 Mark Thomson 对不上

## 3.5 用 Lorentz 变换从静粒子波函数到动粒子波函数

静止系中的波函数 假设在静止参考系中的波函数写为:

$$\psi^r(x) = w^r(0) \exp(-i\epsilon_r p_{r,s}^\mu x_\mu) \quad \epsilon_r = 1 \text{ for } r = 1, 2 \quad \epsilon_r = -1 \text{ for } r = 3, 4 \quad (3.140)$$

因为是在静止参考系中, 此时:

$$p_{r,s} = (m, 0) \quad (3.141)$$

在静止参考系中定义四维向量 s

$$s_{r,s} = (0, s_{r,s.}) \quad (3.142)$$

定义(先不定义具体形式, u 的能量本征值是正, v 的能量本征值是负):

$$\begin{aligned} w^1(0) &= u(p_{r,s.}, s_{r,s.}) & w^2(0) &= u(p_{r,s.}, -s_{r,s.}) \\ w^3(0) &= v(p_{r,s.}, -s_{r,s.}) & w^4(0) &= v(p_{r,s.}, s_{r,s.}) \end{aligned} \quad (3.143)$$

当然, 也需要满足 Dirac-Equation:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi = (\alpha \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta) \psi \quad (3.144)$$

其中:

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

将静止系中 spinor 定义为特定方向自旋的本征值 已知自旋算符  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ 。要求上面定义的 spinor 满足:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_{r,s.} u(p_{r,s.}, \pm s_{r,s.}) &= \pm \frac{1}{2}u(p_{r,s.}, \pm s_{r,s.}) \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_{r,s.} v(p_{r,s.}, \pm s_{r,s.}) &= \mp \frac{1}{2}u(p_{r,s.}, \pm s_{r,s.}) \end{aligned} \quad (3.146)$$

在静止系中, 定义三维 s 向量是 ( $\mathbf{p}$  是在运动参考系中, 粒子的动量)

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (3.147)$$

考虑到:

$$\begin{cases} \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ p_x = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi & p_y = |\mathbf{p}| \sin \theta \sin \phi & p_z = |\mathbf{p}| \cos \theta \end{cases} \quad (3.148)$$

于是:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_{r,s.} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

考虑一个矩阵的本征态:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

$$U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$$

上面的子部分已经有了解:

$$U_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad U_- = \begin{pmatrix} -\sin \theta / 2 \\ \cos \theta / 2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

意义在于：

$$\begin{aligned} w^1(0) &= u(p_{r.s.}, s_{r.s.}) = \begin{pmatrix} U_+ \\ 0 \end{pmatrix} & w^2(0) &= u(p_{r.s.}, -s_{r.s.}) = \begin{pmatrix} U_- \\ 0 \end{pmatrix} \\ w^3(0) &= v(p_{r.s.}, -s_{r.s.}) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_+ \end{pmatrix} & w^4(0) &= v(p_{r.s.}, s_{r.s.}) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.152)$$

**运动参考系 Spinor 转换** ipad 上面有，对于相对于粒子静止的参考系，运动系以  $-\mathbf{v}$  的速度相对运动（也就是粒子在运动系中的运动速度是  $\mathbf{v}$ ）。

此时，在这个运动参考系中的 spinor 是：

$$\psi'(x') = S\psi(x) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi(x) \quad (3.153)$$

最终，

$$\begin{aligned} (w^1(\mathbf{p}) &\quad w^2(\mathbf{p}) & w^3(\mathbf{p}) &\quad w^4(\mathbf{p})) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} U_+ & U_- & \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_+ & -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_- \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_+ & -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_- & U_+ & U_- \end{pmatrix} \\ &= (u(p, s) & u(p, -s) & v(p, -s) & v(p, s)) \end{aligned} \quad (3.154)$$

$$\psi'^r(x') = w^r(\mathbf{p}) \exp(-i\epsilon_r p^\mu x'_\mu) \quad (3.155)$$

用 Lorentz 变化方法得到的波函数和前面直接求解本征态得到的波函数之间的关系是：

$$\begin{aligned} \psi'^1 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{\mathbf{p}, +, \uparrow} & \psi'^2 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{\mathbf{p}, +, \downarrow} \\ \psi'^3 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{-\mathbf{p}, -, \uparrow} & \psi'^4 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{-\mathbf{p}, -, \downarrow} \end{aligned} \quad (3.156)$$

## 第四章 相互作用量子场论

### 4.1 S 矩阵

用相互作用绘景下的演化算符定义 S 算符

在相互作用绘景下, Hamiltonian:

$$H^I = H_0^I + H_1^I \quad (4.1)$$

态矢量演化用演化算符决定:

$$|\alpha, t\rangle^I = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle^I \quad (4.2)$$

其中, 演化算符满足:

$$i\hbar\partial_t U(t, t_0) = H_1^I U(t, t_0) \quad (4.3)$$

考虑算符  $H_0^I$  的本征态  $|\Phi_1\rangle \cdots |\Phi_i\rangle \cdots$ , 如果在开始时刻系统处在态矢量

$$|\Phi_i\rangle \quad (4.4)$$

经过了时间演化, 它处在态矢量:

$$U(t, t_0)|\Phi_i\rangle \quad (4.5)$$

从初态演化到末态概率:

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | U(t, t_0) | \Phi_i \rangle \quad (4.6)$$

S 算符定义为:

$$S = \lim_{t \rightarrow +\infty, t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (4.7)$$

# 第五章 路径积分

## 5.1 量子力学的路径积分方法

路径积分的起点是 Heisenberg 坐标本征态的内积: $\langle q', t' | q, t \rangle$  这个内积有一个名字叫做 Feynman kernel. Feynman kernel 的一个重要的性质在于他相当于一个薛定谔方程的解。

$$\psi(q', t') = \langle q', t' | \Psi \rangle_H = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \Psi \rangle_H = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \psi(q, t) \quad (5.1)$$

实际上 Feynman kernel 可以写为泛函积分的表达形式:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p\dot{q} - H(p, q))\right] \\ &\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q \\ &\int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p \end{aligned} \quad (5.2)$$

Feynman kernel 泛函积分表达式的推导, 这里也说明了  $q_n$  和  $p_n$  是怎么定义的:

在  $t'$  和时间  $t$  之间插入  $N-1$  个点, 实际上相当于把时间分成了  $N$  小份。然后利用 Heisenberg 绘景下的坐标本征态的归一化关系。

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \langle q', t' | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2} \rangle \langle q_{N-2}, t_{N-2} | \dots q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle \quad (5.3)$$

考虑其中出现的项:

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{i\hat{H}(t_n - t_{n+1})/\hbar} | q_n \rangle \quad (5.4)$$

然后需要用到泰勒展开, 将指数展开到一阶项:

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | 1 + i\hat{H}(t_n - t_{n+1})/\hbar | q_n \rangle \quad (5.5)$$

插入 Schrodinger 绘景中的动量本征态算符, 如果哈密顿量算符中的  $\hat{p}$  和  $\hat{q}$  都是独立的 (如果是独立的, 那么就可以把  $\hat{p}$  和  $\hat{q}$  分开来写, 如果不是独立的, 就要涉及到 weyl's operator ordering, 这个后面再说)

$$\begin{aligned} \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \langle q_{n+1} | 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} \hat{H} | q_n \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} \hat{H} | q_n \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | q_n \rangle \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_n}{\hbar}(q_{n+1} - q_n)} \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

按照上面的展开方法, Feynman Kernel 于是可以写成:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_{N-1} \dots dp_0 \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^N \prod_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{p_n}{\hbar}(q_{n+1} - q_n)} \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \\ &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_{N-1} \dots dp_0 \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^N e^{i\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n}{\hbar}(q_{n+1} - q_n)} \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

有一个数学上的式子可以把连乘转换为 e 指数上面的求和算符,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^{N-1} (1 + x_n/N) = \exp(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x_n/N) \quad (5.8)$$

这样,Feynman kernel 就可以写为路径积分的形式:

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_{N-1} \dots dp_0 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^N e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(p(\tau), q(\tau)))} \quad (5.9)$$

用泛函积分的语言表达就是:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p \dot{q} - H(p, q)) \right] \\ &\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q \\ &\int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Feynman's Path Integral

Feynman's Path Integral 是动能项是动量的平方项时, 路径积分可以简化, 并且可以看到和 Action 作用量之间的联系。

观察上面的 5.6, 我们在这里把他写为:

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{i \frac{p_n}{\hbar} (q_{n+1} - q_n)} e^{-\frac{i(t_{n+1}-t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)} \quad (5.11)$$

我们考虑哈密顿量中的动量是二次型的形式:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5.12)$$

于是可以改写 Feynman kernel 的计算:

$$\begin{aligned} \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1}-t_n)(p_n^2 - 2 \frac{m(q_{n+1}-q_n)p_n}{t_{n+1}-t_n})} e^{-\frac{i(t_{n+1}-t_n)}{\hbar} V(q_n)} \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1}-t_n)(p_n - \frac{m(q_{n+1}-q_n)}{t_{n+1}-t_n})^2 + \frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1}-t_n)m^2(\frac{q_{n+1}-q_n}{t_{n+1}-t_n})^2} e^{-\frac{i(t_{n+1}-t_n)}{\hbar} V(q_n)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{i(t_{n+1}-t_n)}} e^{\frac{i}{\hbar} (t_{n+1}-t_n)(\frac{q^2}{2m} - V(q))} \end{aligned} \quad (5.13)$$

于是 Feynman kernel 就写为了:Feynman Path Integral 的形式:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \left( \frac{2i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-N/2} \int dq_{N-1} \dots dq_1 e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (\frac{q^2}{2m} - V(q))} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} W(q, \dot{q})} \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中  $W$  就可以理解为作用量。

### 5.1.2 多个粒子的 Feynman Kernel 和多个粒子的 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式

首先考虑多个粒子的 Feynman Kernel, 和单粒子一样, 我们给中间插入了  $N$  个时间间隔。...emmm 这个排版好乱....

$$\begin{aligned} \langle q'_1, q'_2 \dots q'_D, t' | q_1, q_2 \dots q_D, t \rangle &= \\ \int dq_{1(1)} \dots dq_{D(1)} dq_{1(2)} \dots dq_{D(2)} \dots \dots dq_{1(N-1)} \dots dq_{D(N-1)} & \quad (5.15) \end{aligned}$$

$$\langle q'_1, q'_2 \dots q'_D, t' | q_{1(N-1)} \dots q_{D(N-1)}, t_{N-1} \rangle \langle q_{1(N-1)} \dots q_{D(N-1)}, t_{N-1} | \dots \langle q_{1(1)} \dots q_{D(1)}, t_1 | q_1, q_2 \dots q_D, t \rangle$$

和单粒子的 Feynman kernel 一样，我们关注，其中时间相邻的两项之间的 Heisenberg 坐标本征态之间的内积：

$$\begin{aligned}
 \langle q_{1(n+1)} \dots t_{n+1} | q_{1(n)} \dots t_n \rangle &= \langle q_{1(n+1)} \dots | e^{-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)/\hbar} | q_{1(n)} \dots \rangle \\
 &= \int dp_{1(n)} dp_{2(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D \langle q_{1(n+1)} \dots | p_{1(n)} \dots \rangle \langle p_{1(n)} \dots | e^{-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)/\hbar} | q_{1(n)} \dots \rangle \\
 &= \int dp_{1(n)} dp_{2(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D \langle q_{1(n+1)} \dots | p_{1(n)} \dots \rangle \langle p_{1(n)} \dots | q_{1(n)} \dots \rangle e^{-iH(p_{(n)}, q_{(n)})(t_{n+1}-t_n)/\hbar} \\
 &= \int dp_{1(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D e^{\frac{i}{\hbar} [\sum_{\alpha=1}^D p_{\alpha(n)}(q_{\alpha(n+1)} - q_{\alpha(n)}) - H(p_n, q_n)(t_{n+1}-t_n)]}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

这样，Feynman Kernel 可以写成泛函积分的形式：

$$\begin{aligned}
 \langle q'_1 \dots t' | q_1 \dots t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau (\sum_{\alpha=1}^D p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(p(\tau), q(\tau)))} \\
 \mathcal{D}q &= dq_{1(1)} \dots dq_{D(1)} \dots \dots dq_{1(N-1)} \dots dq_{D(N-1)} \\
 \mathcal{D}p &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D dp_{1(0)} \dots dp_{D(0)} \dots \dots dp_{1(N-1)} \dots dp_{D(N-1)}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

当哈密顿量中的动量是二次型时，可以把 Path Integral 写为坐标的路径积分形式。得到多粒子 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式。

结论是：( $\epsilon$  是“路径”中插入时间片段的长度)

如果系统的拉格朗日量可以写为：

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + b(q)^T \dot{q} - V(q) \tag{5.18}$$

那么按照 legendre 变换，可以用速度和位置定义一个动量：

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = M_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + b_\alpha \tag{5.19}$$

继而可以用动量和坐标表示速度，然后得到一个 Hamilton 量，或者说 Hamilton 算符。

总之，计算后的 Feynman kernel 是下面的形式。Grenier 书里讲的比较详细。

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} (i2\pi\epsilon\hbar)^{-\frac{ND}{2}} \int \prod_{\alpha=1}^D \prod_{n=1}^{N-1} dq_{\alpha n} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + b^T \dot{q} - V(q) - \frac{i\hbar}{2} \delta(0) \text{Tr} M(q)\right) dt\right) \tag{5.20}$$

计算上面的式子时候用到了变量代换，和多维高斯积分 Gauss Integration 的技巧。先不详细写过成了。

这里后面算一下，我不是很清楚  $\delta 0$  是怎么出来的，不过这个问题好像不是很紧急

### 5.1.3 用 Time ordered Product 表示 N-Point Function

n-Point Function 是这样定义的：

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | 0 \rangle &= \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \frac{\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle}{\langle q', t' | q, t \rangle} \\
 &= \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \frac{\int \mathcal{D}q \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-}^{+} L(q, \dot{q}) dt\right]}{\int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-}^{+} L(q, \dot{q}) dt\right]}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

至于怎么推导的这个式子，我先不写了，Grenier 的 P356 讲的可以。

这里有一个问题，在计算  $\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle$  的时候，用到了  $\hat{q}(t_1) | q, t_1 \rangle = q | q, t_1 \rangle$ ，这个式子的问题在于他的算符是 Heisenberg 绘景的，但是态矢又是 Schrodinger 绘景的

我下面写一下这个的证明

证明

$$\begin{aligned}
& \langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle \\
&= \sum_{n,n'} \langle q', t' | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | q, t \rangle \\
&= \sum_{n,n'} \langle q' | e^{-i\hat{H}t'/\hbar} | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | e^{i\hat{H}t/\hbar} | q \rangle \\
&= \sum_{n,n'} e^{-iE_n t'/\hbar} e^{iE_n t/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | q \rangle \\
&= \sum_{n,n'} e^{-i(E_n t' - E_n t)/\hbar} \psi_{n'}(q') \psi_n^*(q) \langle n' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | n \rangle
\end{aligned} \tag{5.22}$$

现在说  $t'$  和  $t$  分别有一个趋近,  $t' \rightarrow +\infty, t \rightarrow -\infty$

但是这样, 还不够。。。 (衡水乱入), 现在需要定义  $t' \rightarrow \tau' e^{-i\delta}, t \rightarrow \tau e^{-i\delta}$

与此同时,  $\tau \rightarrow -\infty, \tau' \rightarrow +\infty$  与此同时让  $\delta = \pi/2$

这样, 上面式子的第一项就变成了

$$e^{-(E_n t' - E_n \tau)/\hbar}$$

为了让这一项不要小的离谱, 只好让  $n$  和  $n'$  变成 0

于是得到了等式

$$\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle = e^{-i(E_0 t' - E_0 t)/\hbar} \psi_0(q') \psi_0^*(q) \langle 0 | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \dots] | 0 \rangle \tag{5.23}$$

实际上这个 R.H.S 的前面三项可以写成:

$$\begin{aligned}
& \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle e^{-i(E_0 t' - E_0 t)/\hbar} \\
&= \langle q | e^{-i\hat{H}t'/\hbar} | 0 \rangle \langle 0 | e^{i\hat{H}t/\hbar} | q \rangle \\
&= \sum_n \langle q | e^{-i\hat{H}t'/\hbar} | n \rangle \langle n | e^{i\hat{H}t/\hbar} | q \rangle \\
&= \sum_n \langle q, t' | n \rangle \langle n | q, t \rangle \\
&= \langle q, t' | q, t \rangle
\end{aligned} \tag{5.24}$$

所以说:

$$\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle = \langle q', t' | q, t \rangle \langle 0 | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \dots] | 0 \rangle \tag{5.25}$$

证毕

#### 5.1.4 Vacuum Persistence Amplitude $W[J]$ 或者叫做 vacuum-vacuum amplitude

$W[J]$  是这样定义的:

$$\begin{aligned}
W[J] &\triangleq \langle 0 | 0 \rangle_J = \lim_{t' \rightarrow -i\tau', t \rightarrow -i\tau} \left| \tau \rightarrow +\infty \tau' \rightarrow -\infty \right. \frac{\langle q' t' | q, t \rangle_J}{\langle q', t' | q, t \rangle} \\
&= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (L(q, \dot{q}) + J(t)q)\right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

同样的, 计算过程给省略了。。。  $\mathcal{N}'$  需要满足的条件是  $W[0] = 1$

可以用 vacuum-vacuum amplitude 来计算 N-point Function:

$$\langle 0 | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \tag{5.27}$$

这里是在 Grenier P356

## 5.2 场论中的路径积分方法

### 5.2.1 vacuum-vacuum transition functional 和 Green functions(ie. 相当于 n-point Function)

$$W[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x (L(\phi, \dot{\phi}) + J(t, x)\phi)\right] \quad (5.28)$$

$$\langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\dots] | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \quad (5.29)$$

需要知道的是上面的坐标是四维的。

### 5.2.2 利用 Wick Rotation 得到 Euclidian Field Theory

Wick Rotation 有正逆。 $x \rightarrow x_E$  和  $p_E \rightarrow p$  用的是正向的，另外两个是逆向的。有一些性质比如:  $x_E^2 = -x^2$ ,  $p_E^2 = -p^2$ ,  $p_E \cdot x_E = Et + \vec{p} \cdot \vec{x}$

p375 12.3 The Feynman Propagator

第一个是把时间坐标变到虚数。首先定义一个变量  $x_4$

$$x_4 = ix_0 = it \quad (5.30)$$

在取了这个变换后，如果一个式子里面有对时空的积分，然后我们想把对空间部分的积分化为  $x_4$  的积分，这样时空体积元就变成了  $-id^4x_E$ 。这里的  $x_E$  就是 Euclidian 欧几里得空间中的向量，写成分量的形式就是  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  但是注意，这个时候的  $x_4$  的积分范围实际上本来应该是从  $-i\infty$  到  $+i\infty$ 。但是 Wick Rotation 这个操作告诉我们， $x_4$  的积分范围是  $-\infty \rightarrow +\infty$ 。虽然很没有道理，但是就是这样的。

第二个是在能动量空间中把能量做了一个变量替换

$$p_4 = -ip_0 = -iE \quad (5.31)$$

对于动量，是逆 Wick Rotation。生成一个 Euclidian momentum.  $p_E = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ . 如果一个式子中如果有对于能动量空间的积分，那么能动量体积元应该有一个变化从  $d^4p$  变成  $id^4p_E$ 。而且在变换后， $p_4$  的积分范围应该是从  $+i\infty$  到  $-\infty$ 。但是逆 Wick Rotation 告诉我们， $p_4$  的积分范围是  $-\infty \rightarrow +\infty$

有了这个知识，我们可以写出来 Euclidian vacuum functional. 实际上就是 vacuum-vacuum transition functional 做了一个 wick rotation 的结果。

$$W_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp\left[+\frac{1}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x_E \left(L(\phi, i\frac{\partial\phi}{\partial x_4}) + J\phi\right)\right] \quad (5.32)$$

如果考虑把拉格朗日量的具体形式带入：

$$W_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x_E \left(\frac{1}{2}(\hbar^2 \partial_{E\mu}\phi \partial_{E\mu}\phi + m^2\phi^2) + V(\phi) - J\phi\right)\right] \quad (5.33)$$

接下来说场的相互作用可以忽略的情况，就是说  $V(\phi) = 0$ , 在这个情况下一般式子上面会带一个 0.

比如说我们考虑 Euclidian Vacuum Functional

$$W_0^E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\int_{-}^{+} d^4x_E \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\hbar}(\hbar^2 \partial_{E\mu}\phi \partial_{E\mu}\phi + m^2\phi^2) - \frac{1}{\hbar}J\phi\right)\right] \quad (5.34)$$

现在我们知道 n 维高斯积分 Gauss integration. (上面的形式很像，实际上他是无穷维的 Gauss Integration.)

$$\int d^Dv \exp\left[-\frac{1}{2}v^T A v + \rho^T v\right] = (2\pi)^{D/2} \exp\left[-\frac{1}{2}Tr \ln A\right] \exp\left[\frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho\right] \quad (5.35)$$

无穷维的线性代数是这样的

$$A(x'_E, x_E) = \frac{1}{\hbar} (\hbar^2 \partial'_{E\mu} \partial_{E\mu} + m^2) \delta^{(4)}(x'_E - x_E) \quad (5.36)$$

稍微说一下这个  $A(x'_E, x_E)$ . 他里面的微分算符是作用在 delta 函数上面的。 $\int (\partial_x \delta(x)) \phi(x) dx = \Delta[\delta(x) \phi(x)]|_+^- - \int \phi'(x) \delta(x) dx$

$$\rho = \frac{J(x_E)}{\hbar} \quad (5.37)$$

$$v^T A v = \int d^4 x'_E d^4 x_E \phi(x'_E) A(x'_E, x_E) \phi(x_E) \quad (5.38)$$

这样，如果忽略掉常数部分（毕竟他们总会被归一化掉），Euclidian Vacuum Functional 就可以写成：

$$W_0^E[J] = \exp \left[ \int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2} \frac{J(x'_E)}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E) \frac{J(x_E)}{\hbar} \right] \quad (5.39)$$

现在说一个数学上的技巧。考虑一个无穷维的矩阵  $A$ . 定义一个多项式

$$f(A) = \sum_n C_n A^n \quad (5.40)$$

把这个式子写开就涉及到所说的无穷维矩阵之间的乘法了。

$$f(A) = C_0 + C_1 A(x', x) + \int dx_1 C_2 A(x', x_1) A(x_1, x) \dots \quad (5.41)$$

然后如果说  $A(x', x)$  只和  $x' - x$  有关系，那么他的傅立叶展开表达式是这个样子

$$A(x', x) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] \tilde{A}(k) \quad (5.42)$$

这样的话我们发现

$$\begin{aligned} \int dx_1 A(x', x_1) A(x_1, x) &= \int dx_1 \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \exp[ik(x' - x_1)] \exp[ik'(x_1 - x)] \tilde{A}(k) \tilde{A}(k') \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] (\tilde{A}(k))^2 \end{aligned} \quad (5.43)$$

这件事情告诉我们

$$f(A) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] f(\tilde{A}(k)) \quad (5.44)$$

那能不能就直接说  $A^{-1} = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] \tilde{A}(k)^{-1}$

现在回到拉格朗日量中无穷维矩阵  $A$  的表达式：

$$\begin{aligned} A(x'_E, x_E) &= \frac{1}{\hbar} (\hbar^2 \partial'_{E\mu} \partial_{E\mu} + m^2) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \exp[-ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{\hbar} (p_E^2 + m^2) \exp[-ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \end{aligned} \quad (5.45)$$

上面的式子其实可以看出  $A$  在做完傅立叶变换后的结果。简单地对傅立叶变换后的结果取一个倒数。

$$A^{-1}(p_E) = \frac{\hbar}{p_E^2 + m^2} \quad (5.46)$$

现在定义一个 Euclidean Feynman Propagator:

$$\begin{aligned} \Delta_F^E(x'_E - x_E) &= \frac{1}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E) \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2} \exp[-ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \end{aligned} \quad (5.47)$$

然后我们要用一个 Wick Rotation 变成 Feynman Propagator:(下面式子的等式左边为什么有一个  $i$  呢, 可以把它理解为定义。就是我定义他是  $i\Delta_F$ )

$$i\Delta_F(x'_E - x_E) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \exp[-ip(x' - x)/\hbar] \quad (5.48)$$

这里的  $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$ , 一般写成下面的形式

$$i\Delta_F(x'_E - x_E) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \exp[-ip(x' - x)/\hbar] \quad (5.49)$$

简单解释一下上面的 Wick Rotation 是怎么操作的。首先变量代换  $p_0 = ip_4$  所以积分变换后的雅可比行列式是  $i$  积分区间是  $[-i\infty, +i\infty]$ . 然后说这个是 Wick Rotation 后的结果. 那么积分区间应该改成  $[+\infty, -\infty]$ . ( $p_E \rightarrow p$  是正向 wick rotation)

这样, Vacuum Functional 就有 Euclidian 和不是 Minkovski 两种写法

在下面的式子里面, 对  $x$  也进行了 Wick Rotation。这个是这样操作的。 $x_0 = -ix_4$  所以积分变化后的积分区间就是  $[+i\infty, -i\infty]$  我们说这个积分区间是 Wick Rotation 后的结果, 那么实际上的积分区间是:  $[-\infty, +\infty]$ , 当然, 对于积分变换, 也有 Jacobi 行列式是  $-i$ , 然后两个 Jacobi 行列式乘在一起就变成了  $-1$ 。

$$\begin{aligned} W_0^E[J] &= \exp\left[\int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2\hbar} J(x'_E) \Delta_F^E(x'_E - x_E) J(x_E)\right] \\ W_0[J] &= \exp\left[-\int d^4 x' d^4 x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x)\right] \end{aligned} \quad (5.50)$$

### 5.2.3 有相互作用场的 Generating Function 和 Vacuum Functional

首先定义有相互作用场的 Vacuum Functional.

我们首先写出他的拉格朗日量:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - gV(\phi) \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} W[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\int d^4 x \frac{i}{\hbar} gV(\phi)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \exp\left[-\int d^4 x \frac{i}{\hbar} gV\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \exp\left[-\int d^4 x \frac{i}{\hbar} gV\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \end{aligned} \quad (5.52)$$

归一化系数是为了当  $J$  为 0 的时候可以把 Vacuum Functional 变成 1。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1} &= \exp\left[-\int d^4 x \frac{i}{\hbar} gV\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]|_{J=0} \\ &= \exp\left[-\int d^4 x \frac{i}{\hbar} gV\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J]|_{J=0} \end{aligned} \quad (5.53)$$

接下来定义 n-Point Green Function

$$G^{(n)}(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (5.54)$$

### 5.2.4 Feynman 图

反正就是把  $W[J]$  展开了, 然后用图像表示积分, 同样的, 也把 n-point Function G 展开并且用图像表示了。。。还是找个例子演示一下这个方法画 Feynman 图吧.... 标量场的 Feynman 图当然。Feynma 图是有三个画的方法,,, 我需要验证一下他们的等价性质。

需要知道, 这样生成的 Green Function 是没有真空图像的, 这一点是因为  $W[J]|_{J=0} = 1$ 。由于他的归一化条件, 使得他不能有真空图, 不然就成无穷大了。(这一点在 Schwinger-Dyson Function 的方法中也能看出来)

(Grenier P384 12.5 Generating function for interacting fields)

问题的核心在于有相互作用场的 Vacuum Functional, 其中  $W_0[J]$  是真空, 没有相互作用场的 Vacuum Functional.

$$W[J] = \mathcal{N} \exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \quad (5.55)$$

注意上面这个式子的 R.H.S 的后面两项, 可以对他们进行小量展开

$$\exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] = W_0[J] (1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots) \quad (5.56)$$

实际上, 直接展开就可以得到相应的展开泛函。

$$u_1[J] = W_0[J]^{-1} \left( -\int d^4x \frac{i}{\hbar} V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right) \right) W_0[J] \quad (5.57)$$

$$u_2[J] = \frac{1}{2} W_0[J]^{-1} \left( -\int d^4x \frac{i}{\hbar} V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right) \right)^2 W_0[J] \quad (5.58)$$

这样, 我们就可以进一步展开有 Interaction Field 的 Vacuum Functional.

$$W[J] = W_0[J] (1 + gw_1[J] + g^2 w_2[J] \dots) = \frac{W_0[J](1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots)}{W_0[0](1 + gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots)} \quad (5.59)$$

当然,  $W_0[0] = 1$

对应的, 可以写出 Vacuum Functional 的小量形式:

$$W[J] = W_0[J] [1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots] [1 - (gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots) + (gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots)^2 \dots] \quad (5.60)$$

把上面的式子展开到二阶:

$$W[J] = W_0[J] (1 + g(u_1[J] - u_1[0]) + g^2 ((u_1[0] - u_1[J])u_1[0] + u_2[J] - u_2[0])) \quad (5.61)$$

写的再明确一点就是

$$w_1[J] = u_1[J] - u_1[0] \quad (5.62)$$

$$w_2[J] = (u_1[0] - u_1[J])u_1[0] + u_2[J] - u_2[0] \quad (5.63)$$

通过前面无穷维高斯积分的性质, 把 non Interaction Vacuum Functional 写成了这个形式

$$W_0[J] = \exp\left[-\int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x)\right] \quad (5.64)$$

并且 vacuum propagator 可以写成这个形式

$$\mathcal{N} \exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \quad (5.65)$$

然后我们计算上面式子 Vacuum Propagator 的把 e 指数展开到一阶后对 non-interacting Vacuum Propagator 的作用效果是这样的。

Grenier p393 12.6 Green Function in Momentum Space

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \exp\left[-\int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x)\right] \\ &= (3(\frac{\hbar}{i})^2 \Delta_F(0) \Delta_F(0) - 6\frac{\hbar}{i} (\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x))^2 \Delta_F(0) + (\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x))^4) \exp[\dots] \end{aligned} \quad (5.66)$$

然后我们考虑这个。

$$-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g \frac{1}{4!} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 W_0[J] \quad (5.67)$$

实际上, 这个东西最后是这样的:

$$\int d^4x g \frac{1}{4!} \left( -3\frac{\hbar}{i} \Delta_F(0) \Delta_F(0) + 6 \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^2 \Delta_F(0) - \frac{i}{\hbar} \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^4 \right) W_0[J] \quad (5.68)$$

实际上, 已经发现了,  $u_1[J]$  就是上面的式子除以  $W_0[J]$ . 刚好把最后一项给除掉了。

按照前面的说法, 于是可以定义  $w_1[J] = u_1[J] - u_0[J]$ , 这样刚好可以减去 Feynman Propagator 在 0 的取值。

$$w_1[J] = \int d^4x g \frac{1}{4!} \left( 6 \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^2 \Delta_F(0) - \frac{i}{\hbar} \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^4 \right) \quad (5.69)$$

这个式子一般这么写 (一般会提出来一个因子)。

$$\begin{aligned} & - \int d^4x g \frac{i}{\hbar} \frac{1}{4!} \left( 6i\hbar \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x_2) \Delta_F(x_2 - x) \right) \Delta_F(0) + \right. \\ & \left. \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x') \Delta_F(x_2 - x) \right) \left( \int d^4x_3 J(x_3) \Delta_F(x_3 - x) \right) \left( \int d^4x_4 J(x_4) \Delta_F(x_4 - x) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

当然, 如果想要用它来表示  $W[J]$  的话就是这样的:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \int d^4x g \frac{i}{\hbar} \frac{1}{4!} \left( 6i\hbar \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x_2) \Delta_F(x_2 - x) \right) \Delta_F(0) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x') \Delta_F(x_2 - x) \right) \left( \int d^4x_3 J(x_3) \Delta_F(x_3 - x) \right) \left( \int d^4x_4 J(x_4) \Delta_F(x_4 - x) \right) \right) \right. \\ & \left. \dots \right) \exp \left[ - \int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

如果用图来表示他是这样的。

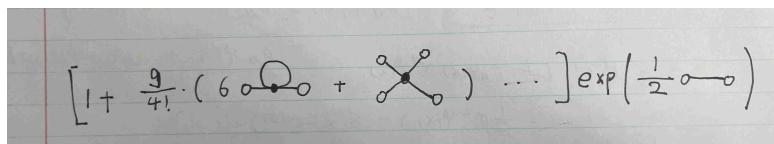


图 5.1: phi4 理论

然后我们可以总金额一下标量场的 Feynman 规则是这样的。

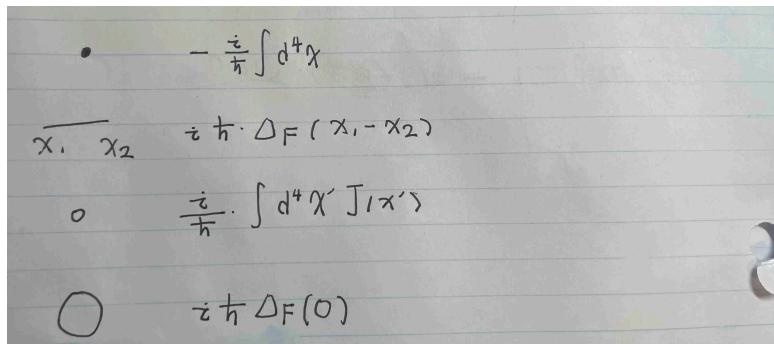


图 5.2: 标量场的 Feynman Rules

然后根据泛函求导可以算出 n-Point Function:

我们从这一步开始就看着 Feynman 图计算了。计算方法是考虑到:

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left( \frac{i}{\hbar} \int d^4x' J(x') \dots \right) \right) = \int d^4x' \delta(x' - x_1) \dots = \dots|_{x_1} \quad (5.72)$$

按照这个规则, 我们分别画出 2-point Function, 4-point Function 的在  $J=0$  时也不为零的项:

这个图片的位置好丑啊。。

$$G(x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} + g \frac{1}{2} \overline{x_1} \circlearrowleft x_2$$

图 5.3: 2-Point Function

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3 \lambda_4} \chi_+ - \chi_- + g \left( \chi_+ \frac{1}{2} (\bar{\phi}_+ | \phi_+ \phi_+ | + \bar{\phi}_- | \phi_- \phi_- |) \right)$$

图 5.4: 4-Point Function

### 5.2.5 动量空间的 Feynman 图

动量空间的 Green 函数 (Green function in momentum space) 的定义是 (这个来自于 Grenier P391, 12.6 Green Function in momentum space)

$$G^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n)(2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G^{(n)}(x_1 \dots x_n) \quad (5.73)$$

在  $\phi^4$  理论中的 2-point Function。把这个 2-point Function 展开到一阶，他都是 connected。具体来讲。用图像表示他就是 5.3。用公式表示他就是：

$$G(x_1, x_2) = i\hbar \Delta_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} g \int \frac{1}{i\hbar} d^4x (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x) (i\hbar) \Delta_F(x - x_2) (i\hbar) \Delta_F(x - x_1) \quad (5.74)$$

然后按照求动量空间的 Green Function 的方法，先观察 0 阶项。我们要求的积分是：

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (5.75)$$

我们的方法是变量代换。具体来说： $x = x_1 - x_2$   $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  与  $p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$   $P = p_1 + p_2$ 。

先考虑积分的变换。因为从  $x_1$   $x_2$  变成了  $x$   $X$ 。会涉及到一个 Jacobi 行列式：

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x, X)} \quad (5.76)$$

有变量代换的规定，可以得到：

$$x_1 = X + \frac{1}{2}x \quad x_2 = X - \frac{1}{2}x \quad (5.77)$$

得到的 Jacobi 矩阵会是一个  $8 \times 8$  的矩阵。(不是很确定, jacobi 矩阵的行指标  $i$  应该对应的分子的第  $i$  个元素。)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_{4 \times 4} & 1I_{4 \times 4} \\ -\frac{1}{2}I_{4 \times 4} & 1I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

然后他的行列式是 1 对吧。然后回到积分 5.75。并且能够注意到  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = P X + p x$ 。所以这个积分变成了：

$$\int d^4x d^4X e^{i(p x + P X)/\hbar} i\hbar \Delta_F(x) \quad (5.79)$$

对  $X$  的积分会得到一个  $\int d^4X e^{iP X/\hbar} = (2\pi\hbar)^4 \delta(P) = (2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2)$  剩下的部分会得到：

$$\int d^4x e^{ip x} (i\hbar) \Delta_F(x) = \frac{i\hbar}{p^2 - m^2} \quad (5.80)$$

于是这个积分是：

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x_2) &= \int d^4X e^{iP X/\hbar} \int d^4x e^{ip x} (i\hbar) \Delta_F(x) = \frac{i\hbar}{p^2 - m^2} (2\pi\hbar)^4 \delta(P) \\ &= i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \end{aligned} \quad (5.81)$$

于是这一部分对于 Momentum Green Function 的贡献就是

$$i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \quad (5.82)$$

然后考虑含有  $g$  的一阶项。具体来讲, 这个积分是:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x \frac{1}{2} g(i\hbar)^2 e^{i(p_1(x_1-x)+p_2(x_2-x)+(p_1+p_2)x)/\hbar} \Delta_F(x_1-x) \Delta_F(x_2-x) \Delta_F(0) \quad (5.83)$$

上面对于  $x_1$  和  $x_2$  的积分可以得到动量空间的 Feynman 传播子 (就是费恩曼传播子的傅立叶变换)。对于  $x$  的积分会生成一个要求动量守恒的东西。

具体来说上面的积分在计算完之后得到的结果会是:

$$\frac{1}{2} g(i\hbar) \Delta_F(p_1)(i\hbar) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{i\hbar} \frac{i\hbar}{k^2 - m^2} (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \quad (5.84)$$

所以说 Momentum 空间的 Green Function 对于两点会是:

$$i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) + \frac{1}{2} g(i\hbar) \Delta_F(p_1)(i\hbar) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{i\hbar} (i\hbar) \Delta_F(k) \quad (5.85)$$

所以说动量空间的 Feynman 规则是

- 对于每一个顶点要有  $\frac{1}{i\hbar}$
- 对于每一个顶点要求动量守恒。而且会加入一个因子  $g$ 。
- 对于内线要有积分  $\frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4}$
- 对于一条动量线, 代表的值是  $i\hbar \Delta_F(p)$

但是对于两个点直接连的这种情况其实挺奇怪的。因为他会出来一个  $\Delta_F(\frac{p_1-p_2}{2})$ 。他是没有相互作用时候的动量空间的 Green Function。对于有四个点的动量空间的 Green Function, 没有相互作用时候, 我们知道他是两个点两两相连的。比如说 1-2, 3-4 链接。那么积分就会是这样

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1x_1+p_2x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta(x_1 - x_2) \int d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_3x_3+p_4x_4)/\hbar} (i\hbar) (x_3 - x_4) \quad (5.86)$$

这个积分会导致:

$$(i\hbar)^2 \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \Delta_F(\frac{p_3 - p_4}{2}) (2\pi\hbar)^8 \delta(p_1 + p_2) \delta(p_3 + p_4) \quad (5.87)$$

然后利用 delta 函数的性质:  $\delta(x)\delta(y) = \delta(x+y)\delta(x-y)$  于是上面的结果在经过这个操作后就可以提出来  $(2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$  这样的因子。剩下的就是对四点动量空间的格林函数的贡献。

$$(i\hbar)^2 (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \Delta_F(\frac{p_3 - p_4}{2}) \quad (5.88)$$

这个式子挺奇怪的。找不到太多规律, 但是对于 n 点没有相互作用的贡献都可以这样一步步算出来。

## 5.2.6 irreducible Diagram 和 Effective Action(有效作用量)

需要知道的事这里的  $W[J]$  是 Connected Generating Function. 和前面的  $W[J]$  是不一样的。Grenier 的书里面这个东西叫做  $Z[J]$ , 然后他的定义方式是  $e^{\frac{i}{\hbar} Z[J]} = W[J]$ 。然后  $Z[J]$  作为 Connected Generating Function, 他的生成方式是:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \Sigma_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}|_{J=0} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n) \\ &= \Sigma_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 G_c(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n) \end{aligned} \quad (5.89)$$

上面式子中的  $G_c(x_1 \dots x_n)$  就叫做 n-point connected Green Function。为什么叫做这个呢, 是因为他和普通的 Green Function 相比较起来发现他只有普通 Generating Function 中的相互之间有联系 (不能分割成几个部分)。

然后定义有效作用量。为什么是有效作用量呢, 是因为如果他作为 Generating Function, 那么算出的图是 n-point irreducible Chart. 为什么是不可约呢, 就是说这个图里不能通过剪断一个内线来变成没有链接的 Green Function。所以说是不可约的。

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int J(x)\phi(x)d^4x$$

in which:

$$\phi(x, J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

上面定义的  $\phi$  就出现了一个细节问题。如果  $W[J]$  的图里有一个只有一个端点含有  $J$ 。那么对  $J(x)$  求泛函导数之后这个图里就没有  $J$  了。于是这个图在  $J=0$  时仍然是  $x$  的函数。所以说这个时候的场就要叫做平均场  $\bar{\phi}$

From the definition of effective action.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} &= - \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + \int d^4y \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} \phi(y) + J(x) \\ &= - \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + J(x) \\ &= J(x, \phi) \end{aligned} \quad (5.90)$$

As defined:

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}|_{J=0} = \phi(x, J=0)$$

我们知道  $J=0$ 。也就是  $\phi = \bar{\phi}$  时候, 不可约生成函数是 0。

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \Gamma[\phi|J=0] = 0$$

为了让生成函数是  $\phi$  的函数。并且要可以展开, 那么。(零阶是 0)

$$\hat{\Gamma}[\phi] = \Gamma[\phi + \bar{\phi}] - \Gamma[\bar{\phi}]$$

In this case:

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x, \phi + \bar{\phi})$$

So:

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi]}{\delta \phi(x)}|_{\phi=0} = J(x, \bar{\phi}) = 0$$

So,  $\hat{\Gamma}$  can be expanded without the first two orders:

$$\hat{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=2} dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} (i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n \hat{\Gamma}}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)}|_{\phi=0} (\frac{1}{i\hbar})^{n-1} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad (5.91)$$

Also, as we always do. we expand  $W[J]$  (connected generation function) to series:

$$W[J] = \sum_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} (\frac{\hbar}{i})^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}|_{J=0} (\frac{i}{\hbar})^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n)$$

n-point irreducible diagram is defined by:

$$\hat{\Gamma}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n \hat{\Gamma}}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)}|_{\phi=0} \quad (5.92)$$

In which n-point connected function:

$$W^{(n)}(x_1, x_2 \dots x_n) = (\frac{\hbar}{i})^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}$$

Consider:

$$\frac{\delta \phi(x_1)}{\delta \phi(x_2)} = \delta(x_1 - x_2)$$

Which means:

$$\int d^4y \frac{\delta \phi(x_1, J)}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x_2)}$$

As we know:

$$\phi(x_1, J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y)} = J(y, \phi)$$

By insertion, we obtain:

$$\int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x_2)} = \delta^4(x_1 - x_2) \quad (5.93)$$

apply  $\frac{\delta}{\delta J(x_3)}$  to the above equation 5.93. change the notation of the variable  $y \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2$  and noticed that  $\frac{\delta}{\delta J(x_3)} = \int d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta}{\delta \phi(y_3)}$

$$\begin{aligned} & \int d^4 y_1 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2)} \\ & + \int d^4 y_1 d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} = 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

Then we apply integration  $\int d^4 y_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)}$  to the formula above. then we attain:

$$\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} = - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \quad (5.95)$$

Which means: (When  $J = 0, \phi = \bar{\phi}$ )

$$W^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{d^4 y_1}{i\hbar} \frac{d^4 y_2}{i\hbar} \frac{d^4 y_3}{i\hbar} W^{(2)}(y_1, x_1) W^{(2)}(y_2, x_2) W^{(2)}(y_3, x_3) \hat{\Gamma}^{(3)}(y_1, y_2, y_3) \quad (5.96)$$

Using the equation 5.95 . we apply  $\frac{\delta}{\delta J(x_4)}$ . Then we can have:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \\ & = - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2) \delta J(x_4)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(x_4)} \\ & \cdot \frac{\delta^4 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4)} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Insert equation 5.95 to the equation above to substitute the 3-point connected function. For example, the first term would be:

$$\begin{aligned} & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & = \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 d^4 y_5 d^4 y_6 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \\ & \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \end{aligned} \quad (5.98)$$

in this case all the term can be written as:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \\
 &= \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 d^4 y_5 d^4 y_6 \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \\
 & \left( \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \right. \\
 & + \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \\
 & \left. + \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \right) \\
 & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(x_4)} \\
 & \cdot \frac{\delta^4 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4)}
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

In all from 5.99 and 5.96 . we can have the graphic representation: 可以看图: 5.6, 5.5 (这个是 phi3 场的例子)

图 5.5: w2

当然, 如果平均场是 0, 也就是  $\bar{\phi} = 0$  的时候, 不可约图像的生成函数可以不用这么定义, 他直接就是  $\Gamma[\phi]$

在很多重整化理论中, 需要计算的是几个点的不可约 Green Function。计算他们的步骤就是先计算 Connected Green Function. 然后首先利用公式 5.93。进行 Fourier 变换之后可以解两点 irreducible Green Function。然后利用图 5.6, 先通过 3-Point Connected Green Function 计算 3-Point irreducible Green Function. 再计算四点的。

当然也可以通过图片直接去观察 Connected Green Function 中的哪里是不可约的。

好, 现在直接到 phi4 理论。之前把 Green Function 的 Generating Function 图表示过。这个是图像: 5.1

但是在一般重整化中, 是算到了二阶。所以有必要写一下二阶的 Generating Function. 图太多了, 不知道对不对, 先不放出来了。

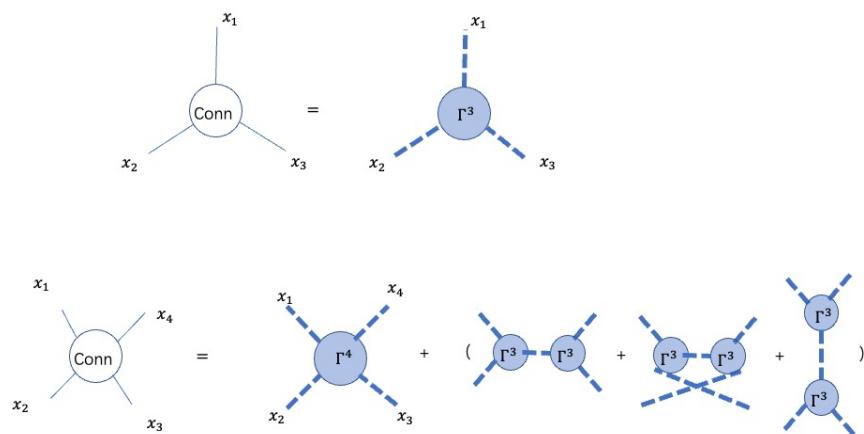


图 5.6: w3w4

# 第六章 不用路径积分

## 6.1 量子场的相互作用

### 6.1.1 散射截面

考虑两个粒子的散射，他们散射后变成了  $k$  个出射粒子。

两个粒子的速度分别是  $v_1$  与  $v_2$ , 如果说两个粒子的体积都估计为  $V$ ，同时他们的相对速度是  $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ 。这样相当于一个粒子用这个相对速度去撞击另一个粒子。既然一个粒子占据的体积是  $V$ 。那么相当于有一个入射流(单位时间单位面积入射的粒子数量)

$$\Phi = \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \quad (6.1)$$

然后考虑一个原子物理里面的微分截面的东西。其实也就是入射粒子流中的一个小小面积元  $d\sigma$ , 在时间  $T$  之后, 认为这个面积元对应的  $p_j \, dp_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ )，出射状态，就是说给定了一个出射状态，当然，这个状态是怎么说，无穷小的。一个状态元。就和原子物理里面出射到一个球面角元是一样的。然后在这个状态元的粒子数量是  $dP$ , 当然他是小于 1 的, 这个时候应该理解为概率

所以上面的话就描述的是这个式子。

$$d\sigma \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| T = dP \quad (6.2)$$

也就是说：

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP \quad (6.3)$$

然后，我们从量子的角度考虑  $dP$ 。

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} \Pi_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_j \quad (6.4)$$

至于这里为什么加入了一个体积  $V$  (注意连乘符号后面的所有东西都是要连乘的...), 可以理解成一维动量量子化后的结果是  $p_i = \frac{2\pi}{L} \frac{i}{N}$  这个一维量子化再想想...

接下来考虑粒子态。

$$a_k^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} |k\rangle \quad (6.5)$$

同时，湮灭算符和产生算符有对易关系

$$[a_p, a_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (6.6)$$

这样，动量为  $p$  的单粒子态和自己的内积就是 (动量空间的 delta 函数可以用坐标空间的积分表示)

$$\langle p | p \rangle = 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = 2\omega_p V \quad (6.7)$$

于是

$$\langle i | i \rangle = (2E_1 V)(2E_2 V) \quad (6.8)$$

$$\langle f | f \rangle = \Pi_j (2E_j V) \quad (6.9)$$

$S$  就是相互作用绘景里面的时间演化算符。我们说  $S$  可以展开成平庸的部分和演化的一部分。

$$S = 1 + i\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \mathcal{M} \quad (6.10)$$

这个演化项作用在出台，再喝末态做内积后：

$$|\langle f | S | i \rangle|^2 = \delta^{(4)}(0) \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^8 |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2 \quad (6.11)$$

于是:

$$dP = \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (6.12)$$

于是

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (6.13)$$

其中后面的那个叫洛伦兹不变相空间体元。(Lorentz invariant phase space-LIPS)

### 6.1.2 LSZ reduction Formula

schwartz p70 6.1 LSZ reduction Formula

关键在于两个积分式子

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi(x) = \sqrt{2\omega_p} (a_p(\infty) - a_p(-\infty)) \quad (6.14)$$

$$-i \int d^4x e^{-ipx} (\square + m^2) \phi(x) = \sqrt{2\omega_p} (a_p^\dagger(\infty) - a_p^\dagger(-\infty)) \quad (6.15)$$

里面的场算符是这样的

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p(t) e^{-ipx} + a_p^\dagger(t) e^{ipx}) \quad (6.16)$$

上面两个式子是如何证明的主要就是要讲左边的积分做一个变换, 怎么说, 就是把时空给分开了, 具体来讲, 对于湮灭算符。对应的式子  $\mathbf{m}$  用到的技是:

$$\partial_t (e^{ipx} (i\partial_t + \omega_p) \phi(x)) = i e^{ipx} (\partial_t^2 + \omega_p^2) \phi(x) = i e^{ipx} (\square + m^2) \phi(x) \quad (6.17)$$

当然, 那个方框算符中的对于空间的部分作用在  $\phi$  上直接有  $\vec{p}^2$

对于下面的积分, 用到的技巧是

$$\partial_t (e^{-ipx} (-i\partial_t + \omega_p) \phi(x)) = -i e^{-ipx} (\partial_t^2 + \omega_p^2) \phi(x) = i e^{ipx} (\square + m^2) \phi(x) \quad (6.18)$$

这样, 初末态的内积就可以写成:

$$\begin{aligned} & \langle f | i \rangle \\ &= \sqrt{2^n \omega_1 \dots \omega_n} \langle \Omega | T \{(a_{p3}(\infty) - a_{p3}(-\infty)) \dots (a_{pn}(\infty) - a_{pn}(-\infty)) (a_{p1}^\dagger(\infty) - a_{p1}^\dagger(-\infty)) (a_{p2}^\dagger(\infty) - a_{p2}^\dagger(-\infty))\} | \Omega \rangle \\ &= \left( i \int d^4x e^{-ip_1 x_1} (\square_1 + m^2) \right) \dots \left( i \int d^4x e^{ip_n x_n} (\square_n + m^2) \right) \langle \Omega | T \{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

### 6.1.3 Schwinger-Dyson Equation

Schwartz p80 7.1 Lagrangian derivation

首先需要知道场算符和场算符的时间导数之间有一个对易关系, 叫做等时对易关系。同时我们知道场算符之间是对易的。

$$[\partial_t \phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (6.20)$$

然后我们直接写出 Schwinger-Dyson Function

$$\begin{aligned} & (\square_1 + m^2) \langle \Omega | T \{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T \{(\square_1 + m^2) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle + [\partial_t \phi(x_1), \phi(x_i)] \langle \Omega | T \{\phi(x_2) \dots \phi(x_{i-1}) \phi(x_{i+1}) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T \{(\square_1 + m^2) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle - i\hbar \delta^{(4)}(x_i - x_1) \langle \Omega | T \{\phi(x_2) \dots \phi(x_{i-1}) \phi(x_{i+1}) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.21)$$

至于这个是怎么证明的。。。需要把时间算符写开成一个 heaviside function. 就是一个阶梯算符, 他对时间求导会有一个 delta function. 同时我们也需要利用 delta 函数的一个性质  $\delta(x - x_1) f(x) = \delta(x - x_1) f(x_1)$ .

### 6.1.4 Feynman 图

上面讲到的 Schwinger-Dyson Equation 的作用是用来计算 n-Point Function 的 (n 点关联函数) 具体怎么操作呢有一个技巧是这样的:

首先需要知道 Delta 函数可以写成 Feynman Propagator 的形式

$$(\square_x + m^2)D_{x1} = -i\delta_{x1} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle &= \int d^4x \delta_{x1} \langle \phi_x \phi_2 \rangle \\ &= i \int d^4x (\square_x + m^2) D_{x1} \langle \phi_x \phi_2 \rangle \\ &= i \int d^4x D_{x1} (\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_2 \rangle \end{aligned} \quad (6.23)$$

然后再对上面的式子用 Schwinger-Dyson Function. 需要知道的是如果 Lagrangian Density 可以写成

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) + \mathcal{L}_{int} \quad (6.24)$$

那么他的 Euler Lagran 方程是:

$$(\square_1 + m^2)\phi = \mathcal{L}'_{int}(\phi) \quad (6.25)$$

剩下的直接带入 Schwinger-Dyson Function 就可以得到和路径积分一样的 n-Point Function. **需要补全**

# 第七章 矢量场和旋量场

## 7.1 基础知识

### 7.1.1 量子 Poincare 变换

Poincare 变换是这个：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (7.1)$$

量子 Poincare 变化是这个：他是由于坐标的 Poincare 变换诱导出的态矢变换。这个算符一定是么正的，这是为了保证态矢的内积在量子 Poincare 变化下不变。

$$|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)|\Psi\rangle \quad (7.2)$$

由于两次 Poincare 变换  $(\Lambda_1, a_1), (\Lambda_2, a_2)$  叠加到一起相当于  $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$  于是就可以找到逆变换可以这样写：

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \quad (7.3)$$

量子 Lorentz 变换，量子时空平移变换的生成元算符是这样定义的。

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - iP^\mu \epsilon_\mu \quad (7.4)$$

从一阶展开的角度理解他  $J^{\mu\nu} = 2i \frac{\partial U}{\partial \omega_{\mu\nu}}$ ,  $P^\mu = i \frac{\partial U}{\partial \epsilon_\mu}$ .

构造一个式子。

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U(\Lambda, a) \quad (7.5)$$

这个式子可以用上面提到的 Poincare 变化的叠加性质来把三个算符写成一个最终的算符  $U$ ，然后再展开，会有三项。当然也可以先把中间的算符做一阶展开。然后就写成一个有三项的式子。

既然这两种方法得到的结果理应是一样的，那么就会有一个性质。

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \\ U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu \end{aligned} \quad (7.6)$$

### 7.1.2 Lorentz 代数

利用量子 Poincare 变换中生成元算符的性质：

$$U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \quad (7.7)$$

如果  $\Lambda$  可以展开成  $1 + \omega$ . 那么带入上面的式子，可以得到生成元算符的对易关系：

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i \left( g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu) \right) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= i \left( g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

是6维 Poincare 群的 Lie 代数 回顾量子 Poincare 变换的生成元算符的定义过程。如果我们说  $\omega$  是反对称的，那么  $J$  也就是反对称的矩阵，这样他只有 6 个独立变量。下面我们在讨论 Lorentz 代数的时候只考虑  $J$ 。

我们说这六个独立变量张成了一个线性空间，并且由于对易子的性质，我们说这个空间中的矢量是对乘法封闭的。。(怎么看出乘法是封闭的，我只能看到对易子是封闭的) 这叫做 Lorentz 代数.... 好像这个对易子叫做 Lie 括号，对于 Lie 括号运算封闭的就是 Lie 代数. 上面的对易子或者叫做 Lie 括号满足的条件叫做 Lorentz 代数关系。所以我们接下来做的事情是找到一套满足 Lorentz 代数关系的生成元算符... 希望没有理解错。。

如果做变量代换会找到 SO(3) 群的代数关系。

变量代换是这样做的

$$\begin{aligned} J^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} & K^i &= J^{0i} \\ \theta^i &= -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk} & \xi^i &= -\omega_{0i} \\ J &= (J^{23}, J^{31}, J^{12}) & K &= (J^{01}, J^{02}, J^{03}) \\ \theta &= (-\omega^{23}, -\omega^{31}, -\omega^{12}) & \xi &= (-\omega^{01}, -\omega^{02}, -\omega^{03}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

做了变换之后：注意，我们这里没有时空平移变换。

$$U(1 + \omega) = 1 + i\theta J + i\xi K \quad (7.10)$$

并且生成元算符有对易关系：

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk}J^k \\ [J^k, K^j] &= i\epsilon^{ijk}K^k \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk}J^k \end{aligned} \quad (7.11)$$

需要注意的是，如果我们现在就只考虑有三个分量的  $\mathbf{J}$ 。他的李括号是这样的。

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad (7.12)$$

这恰好是  $\text{SO}(3)$  群的代数关系。 $\text{SO}(3)$  群（三维空间转动群）代数是 Lorentz 代数的子代数。

### 7.1.3 Poincare 代数

考虑量子 Poincare 变换中的生成元算符（全部 10 个独立的生成元）的性质：

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \\ U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu \end{aligned} \quad (7.13)$$

这样，得到对易关系。

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= i\left(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu\right) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

是 10 维 Poincare 群的 Lie 代数。Lorentz 代数是 Poincare 代数的子代数。

如果按照 Lorentz 的变量代换，并且把  $P$  叫做  $(H, \vec{P})$ 。这样代数关系叫做：

$$\begin{aligned} [P^i, J^j] &= -i\epsilon^{ijk}P^k \\ [P^i, K^j] &= i\delta^{ij}H \\ [H, K^i] &= iP^i \\ [H, J^i] &= [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

### 7.1.4 粒子

这里学的很不明白，感觉主要是群论学的不好。

考虑一个粒子态  $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ ，满足本征值的定义式子： $P|\Psi_\sigma(p)\rangle = p|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。

用量子 Lorentz 变换作用到这个态上  $PU(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle = U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)PU(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。由量子 Poincare 变化的生成元的性质。这个式子是等于  $\Lambda^\mu_\nu p^\nu U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。于是我们发现量子 Lorentz 变换算符作用在态矢上面之后的本征值的变化恰好等于原来动量本征值的 Lorentz 变换。所以我们说。

$$U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p)|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle \quad (7.16)$$

然后定义态矢。定义方法是通过固有保时 Lorentz 变换。用一个基矢量  $\mathbf{k}$ , 做固有保时 Lorentz 变换  $V(p)$ , 满足  $p = V(p)\mathbf{k}$ .

$$|\Psi_\sigma(p)\rangle \triangleq N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k)\rangle \quad (7.17)$$

把态矢的量子 Lorentz 变换也用这个基矢量  $\mathbf{k}$  表示:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U(V(\Lambda p))U^{-1}(V(\Lambda p))U(\lambda)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))U(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))U(W)|\Psi_\sigma(k)\rangle \end{aligned} \quad (7.18)$$

其中

$$W^\mu_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]^\mu_\nu \quad (7.19)$$

我们注意到  $\mathbf{W}$  有一个性质, 就是把  $\mathbf{k}$  在 Lorentz 变换后得到的矢量还是  $\mathbf{k}$ 。

我们说  $\{\mathbf{W}\}$  构成标准动量  $\mathbf{k}$  对应的小群。

如果我们说

$$U(W)|\Psi_\sigma(k)\rangle = \Sigma_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W)|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \quad (7.20)$$

那么这个  $D$  矩阵有性质:

$$U(W1)U(W2)|\Psi_\sigma(k)\rangle = D(W1)D(W2)|\Psi_\sigma(k)\rangle = D(W1W2)|\Psi_\sigma(k)\rangle \quad (7.21)$$

上面的式子省略掉了求和和指标, 反正意思就是说.

$$D_{\sigma' \sigma}(W1W2) = D_{\sigma' \sigma''}(W1)D_{\sigma'' \sigma}(W2) \quad (7.22)$$

这个式子叫做同态关系. 我们说  $\{D(\mathbf{W})\}$  构成了小群的线性表示

现在回到量子 Lorentz 变换作用在态矢的式子。我们用哪个引入的态矢的定义, 和  $\mathbf{k}$  对应的态矢量的变化来写他。首先我们考虑  $\mathbf{p}$  在进行 Lorentz 变换后的值作为本征值的态矢量:

$$|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \quad (7.23)$$

然后带入上面说到的量子 Lorentz 变化的式子中:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U(V(\Lambda p))U(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\Sigma_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle \end{aligned} \quad (7.24)$$

于是有了系数公式

$$C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)) \quad (7.25)$$

## 7.2 矢量场

### 7.2.1 量子场的 Lorentz 变换, 量子场的自旋讨论

我们要求量子标量场有 Lorentz 变换不变性。

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (7.26)$$

如果把标量场理解为算符, 在 Lorentz 变换下, 算符的变换是:

$$\phi(x) \rightarrow U(\Lambda)^{-1}\phi(x')U(\Lambda) = \phi'(x') \quad (7.27)$$

同样的, 如果把场对时空的偏导数也认为是 Hilbert 空间里的算符. 他们同样会被量子 Lorentz 变换。

$$\partial^\mu \phi(x) \rightarrow U^{-1}(\Lambda) \partial'^\mu \phi'(x') U(\Lambda) \quad (7.28)$$

这个变换后:

$$U^{-1}(\Lambda) \partial'^\mu \phi'(x') U(\Lambda) = \partial'^\mu \phi(x) = \Lambda_\nu^\mu \partial^\nu \phi(x) \quad (7.29)$$

标量场的 Lagrangian 中含有的项就是  $\phi$  和  $\partial\phi$ . 标量场的拉格朗日量做量子 Lorentz 变换的规则就是前面的两个式子。

### 如何说明标量场没有自旋:

利用前面定义的产生元和生成元算符 (注意我们这里吧变换后的场写成了 x) P85 余剗煥

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1} \phi(x) U(\Lambda) &= (1 + \frac{i}{2} \omega_{\gamma\delta} J^{\gamma\delta}) \phi(x) (1 - \frac{i}{2} \omega_{\gamma\delta} J^{\gamma\delta}) \\ &= \phi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [\phi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (7.30)$$

同时, 我们注意到:

$$\phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \phi(x) \quad (7.31)$$

其中的  $L$  只是一个算符罢了, 上面的式子其实也就是一个 taylor 展开罢了。  $L$  具体是这样的

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (7.32)$$

于是由于要求量子矢量场在 lorentz 变化下不变, 那么就要求有这个性质.

$$L^{\mu\nu} \phi(x) = [\phi(x), J^{\mu\nu}] \quad (7.33)$$

有个东西叫做对欧矢量, 我先不知道他是什么意思, 反正。是这样定义的的

$$L^i = i \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} L^{jk} \quad (7.34)$$

发现这个恰好是角动量算符。(一般用  $ijk$  就是只有 123 循环)

$$L = -ix \times \nabla \quad (7.35)$$

然后就有

$$\vec{L} \phi = [\phi(x), \vec{J}] \quad (7.36)$$

这个式子叫做总角动量算符  $J$  生成了轨道角动量算符  $L$ 。

综上, 标量场是没有自旋的。

### 说明矢量场是有自旋的

和标量场不一样, 我们要求矢量场在 Lorentz 变化下满足:

$$U^{-1}(\Lambda) A'^\mu(x') U(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (7.37)$$

如果这样要求, 拉格朗日量密度在 Lorentz 变化下就是不变的。(那拉格朗日量不就变了... 算了没搞懂)。和标量场是一个套路, 我们把左边展开成生成元算符, 右边吧  $\Lambda$  展开, 也把  $A$  泰勒展开。对了,  $x'$  应该写成  $x$ ,  $x$  应该写成  $\Lambda^{-1}x$ 。我们定义一个新的矩阵叫做  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ .

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_\beta^\alpha = i(g^{\mu\alpha} \delta_\beta^\nu - g^{\nu\alpha} \delta_\beta^\mu) \quad (7.38)$$

他的意义在于展开 Lorentz 变化... 就离谱.

$$\Lambda_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{J}^{\mu\nu})_\beta^\alpha \quad (7.39)$$

于是, 接着我们展开左右两边, 一边带入生成元算符, 一边泰勒展开。然后就有了

$$[A^\mu, J^{\rho\sigma}] = L^{\rho\sigma} A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (7.40)$$

同样的,  $\mathcal{J}$  的对耦三维矢量是

$$\mathcal{J}^i = i\epsilon^{ijk}\mathcal{J}^{jk} \quad (7.41)$$

于是用对耦三维矢量来表示上面的式子

$$[A^\mu, \vec{J}] = \vec{L}A^\mu(x) + (\vec{\mathcal{J}})_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (7.42)$$

而且这个  $\mathcal{J}$  是满足  $SU(2)$  的生成元算符的代数关系的。而且也满足 Lorentz 代数关系。所以说他是  $SU(2)$  的某个线性表示的生成元算符

并且, 比较神奇的是  $(\mathcal{J}^2)_\nu^\mu = 2\delta_\nu^\mu$  所以说他的本征值是 2。然后有人说  $SU(2)$  群的线性表示生成元的本征值一定是  $S(S+1)\dots$  我也不知道是为啥, 也许不是这样, 也许是根本就记错了。。。所以说他的自旋就是 1。量子矢量场的自旋是 1!! .....

也说  $\mathcal{J}$  是 lorentz 群矢量表示的生成元。

## 7.2.2 有质量矢量场的正则量子化

首先电磁场的能量动量张量是这个:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \quad (7.43)$$

然后有质量矢量场的 Lagrangian 是这个:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad (7.44)$$

对应的 Euler-Lagrange 方程是这个:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \\ -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= m^2 A^\nu \end{aligned} \quad (7.45)$$

然后这个方程有一个名字叫做 Proca 方程。一般写成这个形式.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (7.46)$$

这个方程有一个直接的要求叫做 Lorentz 条件, 推导是对 Proca 方程去一个散度。

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (7.47)$$

注意到  $F$  他是反对称的, 所以第一项就直接是 0 了。于是就有了 Lorentz 条件:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (7.48)$$

有了这个条件之后, Proca 方程就变成饿了 Klein-Gordan 方程。

$$(\partial^2 + m^2)A^\mu(x) = 0 \quad (7.49)$$

生成的动量算符是这样定义的:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -F_{0\mu} \quad (7.50)$$

一般写成协变矢量:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -F_0^\mu \quad (7.51)$$

由于  $F$  是反对称的, 00 分量就是 0, 于是其实只有空间分量的指标是有用的。

$$\vec{\pi} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} A_0 \quad (7.52)$$

而场的量子化条件是这样的:

$$[A^i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)] = i\delta^i_j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad [A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{y}, t)] = [\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (7.53)$$

### 7.2.2.1 在极化矢量座作为基底下的展开(实际上就是线性代数...)

考虑4个基底。在下面的式子里面， $\mu$  代表着向量中的不同项。 $\sigma = 0, 1, 2, 3$ 。代表着有四个基底。他们叫做**极化矢量**。

$$e^\mu(p, \sigma) \quad (7.54)$$

正交关系是这样的：

$$e^\mu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'} \quad (7.55)$$

完备性关系是这样的：

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = g_{\mu\nu} \quad (7.56)$$

一个矢量的展开是这样的：

$$\sum_{\sigma} \left( g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) \right) e_\mu(p, \sigma) = V_\mu \quad (7.57)$$

什么叫做完备性，就是任意一个矢量都可以展开到这个基底上，展开系数是基底和向量的内积。但是上面的式子里面多了一个  $g_{\sigma\sigma}$  我只是想说这一项和正交关系是自治的。因为如果把上面的矢量展开式左右同时用  $e^\mu(p, \sigma')$  做内积的话，得到的结果是：

$$\sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma) e^\mu(p, \sigma') = V_\mu e^\mu(p, \sigma') \quad (7.58)$$

利用前面的正交性关系：

$$\sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma) e^\mu(p, \sigma') = \sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} g_{\sigma\sigma'} V^\nu e_\nu(p, \sigma) \quad (7.59)$$

当然如果是 Minkovski 空间的话，上面的式子当然就是  $V^\nu e_\nu(p, \sigma')$  了。所以是自治的。

然后我们具体考虑选取的四个极化矢量。为什么要满足**四维横向条件**因为波函数满足 Klein-Gordan 方程，所以解的形式是平面波。然后想让这个解满足 Lorentz 条件。于是就直接索性要求平面波展开的基底满足四维横向条件了。

先选择两个满足四维横向条件 ( $e^\mu p_\mu = 0$ ) 与三维横向条件 (三维部分和动量的三维部分点乘是 1) 的类时极化矢量。

$$|p_T| = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \quad (7.60)$$

$$\vec{e}(p, 1) = \frac{1}{|\vec{p}| |p_T|} (p^1 p^3, p^2 p^3, -|p_T|^2) \\ e^\mu(p, 1) = (0, \vec{e}(p, 1)) \quad (7.61)$$

$$\vec{e}(p, 2) = \frac{1}{|p_T|} (-p^2, p^1, 0) \\ e^\mu(p, 2) = (0, \vec{e}(p, 2)) \quad (7.62)$$

然后再找一个满足四维横向条件与三维纵向条件的类空极化矢量：

$$e^\mu(p, 3) = \left( \frac{|p|}{m}, \frac{p^0 \vec{p}}{m |p|} \right) \quad (7.63)$$

然后再找一个不满足四维横向条件，的类时极化矢量：

$$e^\mu(p, 0) = \frac{p^\mu}{m} = \frac{1}{m} (p^0, \vec{p}) \quad (7.64)$$

反正这样构造出来的向量是满足正交关系：

$$e^\mu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'} \quad (7.65)$$

也是满足归一化关系的

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = g_{\mu\nu} \quad (7.66)$$

但是如果我们不要第零个极化矢量，因为他不满足四维横向条件，那么：

$$\sum_{\sigma=1}^3 e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \quad (7.67)$$

于是我们构造三个极化矢量(坐极化-1, 右极化+1, 纵向极化0)

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(p, \pm) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp e^\mu(p, 1) - ie^\mu(p, 2)) \\ e^\mu(p, 0) &= e^\mu(p, 3) \end{aligned} \quad (7.68)$$

他们满足正交条件和极化求和条件

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon^\mu(p, \lambda') &= -\delta_{\lambda\lambda'} \\ \sum_\lambda \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) &= -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \end{aligned} \quad (7.69)$$

直接吧这个定义的三个极化矢量带入矩阵方程就可以发现他恰好是螺旋度的本征向量。什么是螺旋度，就是自旋角动量算符在动量方向上面的投影。具体来讲：( $\lambda = -0+$ )

$$(\hat{p} \vec{J})_\nu^\mu(p, \lambda) = \lambda \epsilon^\mu(p, \lambda) \quad (7.70)$$

所以说极化矢量恰好是螺旋度的本征向量。

于是量子矢量场的平面波展开是：

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=\pm,0} (\epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx}) \quad (7.71)$$

如果把这个平面波展开直接带入到量子 Lorentz 变换生成元算符和场算符之间的对易关系的式子中，就可以得到湮灭算符和生成元算符的对易关系

$$[a_{p,\lambda}, \hat{p} \cdot \vec{J}] = \lambda a_{p,\lambda} \quad (7.72)$$

对他去共轭就得到了产生算符的对易关系，写开是这样的：

$$(\hat{p} \cdot \vec{J}) a_{p,\lambda}^\dagger = a_{p,\lambda}^\dagger (\hat{p} \cdot \vec{J}) + \lambda a_{p,\lambda}^\dagger \quad (7.73)$$

在前面有一个小节叫做(量子场的 Lorentz 变换)。得到了量子矢量场算符和量子 lorentz 变换生成元算符之间的对易关系

$$[A^\mu(x), \vec{J}] = \vec{L} A^\mu(x) + (\vec{J})_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (7.74)$$

基态时这样定义的：

$$a_{p,\lambda}|0\rangle = J|0\rangle = 0 \quad (7.75)$$

动量为  $p$ , 螺旋度为  $\lambda$  的粒子态这样定义：

$$|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (7.76)$$

这个粒子态有这样的性质—他的螺旋度恰好是  $\lambda$ :

$$(\hat{p} \cdot \vec{J})|p, \lambda\rangle = \lambda|p, \lambda\rangle \quad (7.77)$$

如果要满足正则量子化条件，得到生成湮灭算符之间的对易关系

$$\begin{aligned} [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \\ [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] &= [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (7.78)$$

系统总的哈密顿量 Hamiltonian, 后面的那一项一般叫做：

$$H = \sum_{\lambda=\pm,0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{3}{2} E_p \quad (7.79)$$

### 7.2.3 没有质量的矢量场的正则量子化

我们先考虑规范对称性。电磁场,或者说无质量矢量场的 Lagrangian 和 Euler-Lagrange 方程分别是

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{7.80}$$

无质量矢量场是有规范对称性的。

如果定义一个新的矢量场,他和原来矢量场的关系是:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x)\tag{7.81}$$

于是用上面的式子完全可以用  $A'(x)$  来表示  $A(x)$ 。于是可以用  $A'$  来表示拉格朗日量。然后发现拉格朗日量的形式是完全相同的。对应的 Euler-Lagrange 方程也是完全相同的。所以  $A'$  满足的方程和  $A$  是完全相同的。我们说这个叫做规范对称性。

然后我们用一个辅助场 (Auxiliary field)  $\xi$  人为实现 Lorentz 规范。 $\partial_\mu A^\mu = 0$  考虑了辅助场之后的 Lagrangian 是这样的:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\tag{7.82}$$

这样对于辅助场的 Euler-Lagrange 方程就会得到一个 Lorentz 规范。所以说这个辅助场是 Gauge-Fixing Term.

按照这个 Lagrangian, 可以得到动量密度算符(这里已经带入了 +--- 的度规。

$$\pi_i = -F_{0i} \quad \pi_0 = -\frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\tag{7.83}$$

然后我们假设规定量子化条件

$$[A^\mu(x, t), \pi_\nu(y, t)] = i\delta_\nu^\mu\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad [A^\mu(x, t), A^\nu(y, t)] = [\pi_\mu(x, t), \pi_\nu(y, t)] = 0\tag{7.84}$$

但是这样简单的规范固定和量子化程序不是自洽的。出现问题的点在于(这个  $\pi_0$  就是用拉格朗日量算出来的动量密度算符)

$$[A^0(x, t), \partial_\mu A^\mu(y, t)] = [A^0(x, t), -\xi\pi_0(y, t)] = -\xi[A^0(x, t), \pi_0(y, t)] = -i\xi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\tag{7.85}$$

这个不是 0。也就是说第一项里面的  $\partial_\mu A^\mu$  不能是 0。然后引入一个 Feynman 规范, 他是要求  $\xi = 1$  于是得到的 Euler-Lagrange 方程叫做 D'alembert 方程:

$$\partial^2 A^\mu(x) = 0\tag{7.86}$$

于是假设场算符有平面波解的形式:

$$A^\mu(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma=0}^3 e^\mu(p, \sigma) (b_{p, \sigma} e^{-ipx} + b_{p, \sigma}^\dagger e^{ipx})\tag{7.87}$$

这样的话 Hamiltonian 算符是这样的:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (-b_{p, 0}^\dagger b_{p, 0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p, \sigma}^\dagger b_{p, \sigma}) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2E_p\tag{7.88}$$

#### 7.2.3.1 平面波展开

因为  $e(p, 0)$  和  $e(p, 3)$  的定义式中出现了静质 m。于是他们在定义光子时是不对的。于是要这样定义。

$$e^\mu(p, 3) = (0, \frac{\vec{p}}{|p|}) \quad e^\mu(p, 0) = n^\mu = (1, 0, 0, 0)\tag{7.89}$$

这样, 完备性和正交性都可以保证

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = g_{\mu\nu} \quad e_\mu(p, \sigma) e^\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'}\tag{7.90}$$

但是 0 和 3 (新定义的两个) 都不满足四维横向条件。如果把她们提了, 完备性条件就变成了 (也许应该叫做极化求和条件):(我也不知道这时候还能不能叫做完备条件)。 $\epsilon$  的定义和有质量矢量场是一样的。

$$\sum_{\sigma=1}^2 \epsilon_\mu(p, \sigma) \epsilon_\nu(p, \sigma) = -g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p \cdot n)^2} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{p \cdot n} = \sum_{\lambda=\pm} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) \quad (7.91)$$

到此为止, 再采用场算符的量子化条件, 得到生成和湮灭算符之间的对易关系:

$$[b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}^\dagger] = -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}] = [b_{p,\sigma}^\dagger, b_{q,\sigma'}^\dagger] = 0 \quad (7.92)$$

顺理成章的定义粒子态:

$$|p, \sigma\rangle \sqrt{2E_p} b_{p,\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (7.93)$$

然后要指出一个  $\sigma = 0$  时候会面临的问题。(虽然前面不是已经把 0 和 3 给淘汰掉了, 为什么还要继续搞)。首先粒子态的内积是这样的:

$$\langle q, \sigma' | p, \sigma \rangle = -2E_p (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (7.94)$$

如果两个  $\sigma$  都是 1 的时候, 会发现  $g$  就变成了 1。这个时候会发现他们的内积是小于 0 的。这个事情放到能量的测量值上会有更大的问题:

$$\langle p, 0 | p, 0 \rangle = (E_{vac} + E_p) \langle p, 0 | p, 0 \rangle < 0 \quad (7.95)$$

负能量问题就会出现。

为了规避这个事情, 引入弱 Lorentz 条件。

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0 \quad (7.96)$$

有一个更加强大的条件叫做 Gupta-Bleuler 条件。满足他就一定满足弱 Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) | \Psi \rangle = 0 \quad (7.97)$$

实际上把正能量解的平面波展开式直接带入。因为  $e^\mu(p, \sigma)$  只在  $\sigma = 0$  或者 3 的时候不满足四维横向条件。所以求四维三度的时候也只有这两个  $\sigma$  会有贡献。Gupta-Bleuler 条件意味着

$$(b_{p,0} - b_{p,3}) | \Psi \rangle = 0 \quad (7.98)$$

于是:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \langle \Psi | -b_{p,0}^\dagger b_{p,0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle + E_{vac} \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{\sigma=1}^2 \langle \Psi | b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle + E_{vac} \langle \Psi | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (7.99)$$

动量也是一样的:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P | \Psi \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \langle \Psi | -b_{p,0}^\dagger b_{p,0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p \sum_{\sigma=1}^2 \langle \Psi | b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (7.100)$$

也就是说只要态矢量满足了 Gupta-Bleuler 条件, 那么就不会有能量有负号这样的事情。实际上  $|p, 0\rangle$  和  $|p, 3\rangle$  都是不满足的。

然后用  $\sigma = 1, 2$  的两个状态定义新的产生湮灭算符:

$$a_{p,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp b_{p,1} + i b_{p,2}) \quad (7.101)$$

这里引入了  $\pi/2$  的相位, 他和光学里面的圆偏振有很大的关系。但是具体的联系还不是很清楚。然后和有质量的矢量场一样的。定义极化矢量  $\epsilon^\mu(p, \lambda)$  然后就有一些性质, 首先是产生湮灭算符之间的对易关系:

$$\begin{aligned} [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] = [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0 \quad \lambda, \lambda' = \pm \\ [a_{p,\lambda}, b_{q,\sigma}] &= [b_{q,\sigma}, a_{q,\lambda}^\dagger] = [a_{p,\lambda}, b_{q,\sigma}] = [a_{p,\lambda}^\dagger, b_{q,\sigma}^\dagger] = 0 \quad \lambda = \pm, \sigma = 0, 3 \\ [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}^\dagger] &= -(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}] = [b_{p,\sigma}^\dagger, b_{q,\sigma'}^\dagger] = 0 \quad \sigma = 0, 3 \end{aligned} \quad (7.102)$$

同时有这样的关系

$$\begin{aligned}\Sigma_{\sigma=1}^2 e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma} &= \Sigma_{\lambda=\pm} \epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} \\ \Sigma_{\sigma=1}^2 e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma}^\dagger &= \Sigma_{\lambda=\pm} \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger\end{aligned}\quad (7.103)$$

于是量子化后的量子矢量场是这样的：

$$\begin{aligned}A^\mu(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \Sigma_{\sigma=0,3} e^\mu(p, \sigma) (b_{p,\sigma} e^{-ipx} + b_{p,\sigma}^\dagger e^{ipx}) \\ &+ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \Sigma_{\lambda=\pm} (\epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx})\end{aligned}\quad (7.104)$$

书上说一行对应于非物理极化态，第二行对应于两种物理的圆极化态

## 7.3 旋量场

Gamma 矩阵是满足反对易关系的一组矩阵：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (7.105)$$

如果从这个定义入手，当  $\mu = \nu$  时，发现：

$$(\gamma^0)^2 = I \quad (\gamma^i)^2 = -I \quad (7.106)$$

上面的式子说明  $\gamma^0$  的本征值是 1 和 -1。 $\gamma^i$  的本征值是 i 和 -i。这些值恰好是对角化矩阵之后对角元素的值。于是，我们说  $\gamma^0$  是厄米矩阵。 $\gamma^i$  是反 Hermite 矩阵。也就是：

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (7.107)$$

于是：

$$(\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^\dagger \gamma^i = -(\gamma^i)^2 = 1 \quad (7.108)$$

也就是说 gamma 矩阵都是幺正矩阵 (unitary)

然后定义一个反对称的 S 矩阵：

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (7.109)$$

按照这个定义，S 是满足 Lorentz 代数生成元的算符的代数关系 (Lorentz 代数关系)。于是他可以是 Lorentz 群表示的生成元矩阵。用 S 生成的表示叫做旋量表示

这组表示生成 Lorentz 群的旋量表示的固有保时向的有限变换。有限变换是这样表示的： $Y = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$

$$D(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}) = e^Y \quad (7.110)$$

然后说一个数学性质。定义一个对易算符：

$$[B, A^{(n)}] = [[B, A^{(n-1)}], A] \quad (7.111)$$

并且要求：

$$[B, A^0] = B \quad (7.112)$$

这样就有一个性质：

$$BA^k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{(k-n)!n!} A^{k-n} [B, A^{(n)}] \quad (7.113)$$

于是：

$$e^{-A} B e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} [B, A^{(n)}] \quad (7.114)$$

考虑一个对易子：

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (7.115)$$

其中的  $\mathcal{J}$  是 Lorentz 矢量表示的生成元算符。为什么会出现他呢，因为他也是用度规来定义的，所以在推导过程中出现他没有什么问题。

然后再考虑对易式子：其中  $X = -\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}$

$$[\gamma^\mu, Y^{(n)}] = (X^n)_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (7.116)$$

考虑 Lorentz 群旋量表示下的有限变换  $D(\Lambda) = e^Y$ 。于是

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad D^{-1}(\Lambda)S^{\mu\nu} D(\Lambda) = \lambda_\rho^\mu \lambda_\sigma^\nu S^{\rho\sigma} \quad (7.117)$$

定义

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (7.118)$$

有时候也写成这样：

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (7.119)$$

其中

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的偶置换} \\ +1 & (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ 是 } (0, 1, 2, 3) \text{ 的奇置换} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7.120)$$

说  $\epsilon$  是 (0,4) 型张量。**满足 Lorentz 变换**

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Lambda^{-1})_\mu^\alpha(\Lambda^{-1})_\nu^\beta(\Lambda^{-1})_\rho^\gamma(\Lambda^{-1})_\sigma^\delta \quad (7.121)$$

下面说几个  $\gamma^5$  的性质。

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (7.122)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (7.123)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (7.124)$$

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\gamma^5 D(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu\gamma^\nu\gamma^5 \quad (7.125)$$

一般情况下，是不使用  $S$  矩阵这个符号，而使用的是  $\sigma^{\mu\nu} = 2S^{\mu\nu}$

用  $\gamma^0$  定义变换

$$D(P) = \xi\gamma^0 \quad (7.126)$$

需要要求  $|\xi|^2 = 1$ 。于是这个变换有这些性质：

$$D^\dagger(P)D(P) = \xi^*(\gamma^0)^\dagger\xi\gamma^0 = I \quad (7.127)$$

于是我们说：

$$D^{-1}(P) = \xi^*\gamma^0 = D^\dagger(P) \quad (7.128)$$

这样的变换和宇称变换也有联系。

$$D^{-1}(P)\gamma^\mu D(P) = \mathcal{P}_\nu^\mu\gamma^\nu \quad (7.129)$$

这个式子说明了  $\gamma^\mu$  是**极矢量**

$$D^{-1}(P)\gamma^5 D(P) = -\gamma^5 \quad (7.130)$$

这个式子说明了  $\gamma^5$  是**赝标量**

$$D^{-1}(P)\gamma^\mu\gamma^5 D(P) = -\mathcal{P}_\nu^\mu\gamma^\nu\gamma^5 \quad (7.131)$$

这个式子说明了  $\gamma^\mu\gamma^5$  是**轴矢量**

$$D^{-1}(P)\sigma^{\mu\nu} D(P) = \mathcal{P}_\alpha^\mu\mathcal{P}_\beta^\nu\sigma^{\alpha\beta} \quad (7.132)$$

然后我们考虑场算符的固有保时向 Lorentz 变换。被他作用的态矢量是 Dirac 旋量 (spinor)。

$$\psi'_a = D_{a,b}(\Lambda)\psi_b \quad (7.133)$$

我们要求场算符的变化有这个性质：

$$\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x) \quad (7.134)$$

其中的变换算符是：

$$D_{ab}(\Lambda) = \delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{ab} \quad (7.135)$$

于是上面的要求就写为了：

$$U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (7.136)$$

把旋量场的 Lorentz 变换带入，之后再对最右边的那一项做 Taylor 展开。这个等式可以得到性质：

$$[\psi(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})\psi(x) \quad (7.137)$$

这个式子说明旋量场是有自旋的。

现在定义一个特殊的  $\gamma$  矩阵。这个叫做 Weyl 表象。

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

可以定义一个元素是矩阵的四维矢量：

$$\sigma^\mu = (1, \sigma) \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma) \quad (7.139)$$

这样的定义下  $\gamma$  矩阵就是：

$$\gamma^\mu = \begin{bmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{bmatrix} \quad (7.140)$$

$S$  矩阵就是：

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{bmatrix} \quad (7.141)$$

对他乘以一个 Levi-civita 符号，可以得到一个三维矢量

$$S^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{bmatrix} \quad (7.142)$$

于是

$$S^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) I \quad (7.143)$$

我们说他描述的是自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子。 $S$  矩阵并不是厄米矩阵。这个事情导致。Lorentz 旋量表示的有限变换算符的逆不能简单地写成他的共轭。

$$D^\dagger(\Lambda) = (\exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}))^\dagger = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger) \neq D^{-1}(\Lambda) \quad (7.144)$$

然后回到  $S$  矩阵。他有一个性质

$$(S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu} \quad (7.145)$$

可以推出这个结论：

$$D^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \gamma^0 D^{-1}(\Lambda) \quad (7.146)$$

然后，定义一个狄拉克共轭：

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (7.147)$$

这样，在发生 Lorentz 变化后 Dirac 共轭的场算符就变成了：

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) D^{-1}(\Lambda) \quad (7.148)$$

于是这个是 Lorentz 不变的:

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (7.149)$$

这种形式叫做旋量双线形。

可以构造出很多旋量双线形和他们的变化:

$$\bar{\psi}'(x')i\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x) \quad (7.150)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \quad (7.151)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\gamma^5\psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(x) \quad (7.152)$$

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x) \quad (7.153)$$

现在考虑 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (7.154)$$

带入 Euler-Lagrange 方程之后得到运动方程 (不知道为什么用 EL 方程处理的时候对  $\psi$  求偏导和  $\bar{\psi}$  无关)

$$(i(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab})\psi_b(x) = 0 \quad (7.155)$$

对于这个方程, 用  $(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$  左乘得到 Klein-Gordan 方程

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0 \quad (7.156)$$

一般把态矢写成左手螺旋态 (left-hand-spinor) 和右手螺旋态 (right-hand-spinor) 的组合。

$$\psi = \begin{bmatrix} \eta_L \\ \eta_R \end{bmatrix} \quad (7.157)$$

他们满足的 Euler-Lagrange 方程叫做 Weyl equation.

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\eta_L - m\eta_R &= 0 \\ i\sigma^\mu\partial_\mu\eta_R - m\eta_L &= 0 \end{aligned} \quad (7.158)$$

既然场算符满足 Klein-gordan 方程。那么就用平面波来猜解。

$$\psi_a(x, k) = \omega(k^0, \vec{k})e^{-ikx} \quad (7.159)$$

这个带入原始的 Euler-Lagrange 方程中。会得到一个矩阵方程:

$$(k^0 - \gamma^0(\vec{k} \cdot \vec{\gamma}) - m\gamma^0)\omega(k^0, \vec{k}) = 0 \quad (7.160)$$

面对这个方程, 要求系数行列式为 0:

$$\det(k^0 - \gamma^0(\vec{k} \cdot \vec{\gamma}) - m\gamma^0) = 0 \quad (7.161)$$

一统计算之后发现这个矩阵的行列式等于

$$(E_k + k^0)^2(E_k - k^0)^2 = 0 \quad (7.162)$$

这个事情说明了有四个解。正能解和负能解分别有两个根。

正能解这么表示:

$$\omega^+(E_k, \vec{k}, \sigma) \exp(-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})) = \sigma = 1, 2 \quad (7.163)$$

负能解这么表示:

$$\omega^{(-)}(-E_k, \vec{k}, \sigma) \exp(i(E_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})) = \sigma = 1, 2 \quad (7.164)$$

一般会定义一个:

$$u(k, \sigma) = \omega^+(E_k, \vec{k}, \sigma) \quad v(k, \sigma) = \omega^{(-)}(-E_k, \vec{k}, \sigma) \quad (7.165)$$

于是波函数写成展开的形式:

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\sigma=1}^2 (u(p, \sigma) c_{p, \sigma} e^{-ipx} + v(p, \sigma) d_{p, \sigma}^\dagger e^{ipx}) \quad (7.166)$$

铺垫了这么多。现在回到 Dirac 方程的解。

场算符的正能量解是:

$$\psi^{(+)}(x, p, \lambda) = u(p, \lambda) e^{-ipx} \quad \lambda = \pm \quad (7.167)$$

带入 Euler-Lagrange 方程可以得到:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u(p, \lambda) &= 0 \\ (\not{p} + m)v(p, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (7.168)$$

其中  $\not{p}$  叫做 Dirac 斜线。

现在构造一个螺旋态，他是螺旋态算符的本征态。

$$\xi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2|p|(|p| + p^3)}} \begin{bmatrix} -p^1 + ip^2 \\ |p| + p^3 \end{bmatrix} \quad \xi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|p|(|p| + p^3)}} \begin{bmatrix} |p| + p^3 \\ -p^1 + ip^2 \end{bmatrix} \quad (7.169)$$

螺旋态算符和他对应的螺旋态方程是:

$$(\hat{p} \cdot \sigma) \xi_\lambda(p) = \lambda \xi_\lambda(p) \quad (7.170)$$

螺旋度有正交归一关系

$$\begin{aligned} \xi_+^\dagger(p) \xi_+(p) &= 1 \\ \xi_-^\dagger(p) \xi_-(p) &= 1 \\ \xi_+^\dagger(p) \xi_-(p) &= 0 \end{aligned} \quad (7.171)$$

和完备性关系:

$$\sum_{\lambda=\pm} \xi_\lambda(p) \xi_\lambda^\dagger(p) = I \quad (7.172)$$

于是这样定义  $u$  和  $v$ :

$$u(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \omega_{-\lambda}(p) \xi_\lambda(p) \\ \omega_\lambda(p) \xi_\lambda(p) \end{bmatrix} \quad v(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \omega_\lambda(p) \xi_{-\lambda}(p) \\ -\lambda \omega_{-\lambda}(p) \xi_{-\lambda}(p) \end{bmatrix} \quad (7.173)$$

$$\omega_\lambda(p) = \sqrt{E_p + \lambda|p|} \quad (7.174)$$

这两个基底也是这个算符的本征向量:

$$\begin{aligned} (\hat{p} \cdot S)u(p, \lambda) &= \frac{\lambda}{2} u(p, \lambda) \\ (\hat{p} \cdot S)v(p, \lambda) &= -\frac{\lambda}{2} v(p, \lambda) \end{aligned} \quad (7.175)$$

$u$  和  $v$  满足正交的关系:

$$\begin{aligned} \bar{v}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2m\delta_{\lambda\lambda'} \\ \bar{u}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2m\delta_{\lambda\lambda'} \\ \bar{u}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= \bar{v}(p, \lambda)u(p, \lambda') = 0 \\ v^\dagger(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2E_p\delta_{\lambda\lambda'} \\ u^\dagger(p, \lambda)u(p, \lambda') &= 2E_p\delta_{\lambda\lambda'} \\ u^\dagger(p, \lambda)v(p, \lambda') &= v^\dagger(p, \lambda)u(p, \lambda') = 0 \end{aligned} \quad (7.176)$$

现在再来量子化场。什么叫做等时反对易量子化呢:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x, t), \pi_b(y, t)\} &= i\delta_{ab}\delta^{(3)}(x - y) \\ \{\psi_a(x, t), \psi_b(y, t)\} &= \{\pi_a(x, t), \pi_b(y, t)\} = 0 \end{aligned} \quad (7.177)$$

什么是场的平面波解呢：

$$\psi(x, t) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \Sigma_{\lambda=\pm} (u(p, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + v(p, \lambda) b_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx}) \quad (7.178)$$

这个平面波解就对应着场的 Hamiltonian:

$$H = \Sigma_{\lambda=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} - b_{p,\lambda} b_{p,\lambda}^\dagger) \quad (7.179)$$

然后带入了等时对易条件之后就有：

$$\begin{aligned} \{a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \\ \{a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda}\} &= \{a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda}^\dagger\} = 0 \\ \{b_{p,\lambda}, b_{q,\lambda}^\dagger\} &= (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \\ \{b_{p,\lambda}, b_{q,\lambda}\} &= \{b_{p,\lambda}^\dagger, b_{q,\lambda}^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (7.180)$$

这时候，场的 Hamiltonian:

$$H = \Sigma_{\lambda=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p (a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} + b_{p,\lambda}^\dagger b_{p,\lambda}) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2E_p \quad (7.181)$$

接下来说明一下 Lagrangian 中暗含的 U(1) 对称性。如果对场做一个变换：

$$\psi'(x) = e^{iq\theta} \psi(x) \quad (7.182)$$

发现 Lagrangian 是完全不会改变的。于是就可以用 Noether 定理。然后就有一个对应的 Noether 守恒荷。

$$Q = \text{Sigma}_{\sigma=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} q (a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} - b_{p,\lambda}^\dagger b_{p,\lambda}) + 2\delta^{(3)}(0) q \int d^3 p \quad (7.183)$$

于是我们说 **a** 操作的是正粒子。**b** 操作的是反粒子。定义粒子态和粒子态的内积：

$$\begin{aligned} |p^+, \lambda\rangle &= \sqrt{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \\ |p^-, \lambda\rangle &= \sqrt{2E_p} b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \\ \langle q^+, \lambda | p^+, \lambda \rangle &= 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \\ \langle q^-, \lambda | p^-, \lambda \rangle &= 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \end{aligned} \quad (7.184)$$

前面说过的一个式子

$$(L + S)\psi(x) = [\psi(x), J] \quad (7.185)$$

把场的展开形式具体带入就会得到：

$$(2\hat{p} \cdot J) a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle = \lambda a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle (2\hat{p} \cdot J) b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle = \lambda b_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (7.186)$$

# 第八章 重整化 renormalisation

## 8.1 $\phi^4$ 理论的重整化

### 8.1.1 2-point Connected Feynman Diagram

首先需要关心 2-point Connected Feynman Diagram 的性质。在位置空间，他大概用 Feynman 图表示是：在这

$$G_c(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} + g \left( \frac{1}{x_1 - x_2} \right) + g^2 \left( \frac{1}{x_1 - x_2} \right)^2 + \dots$$

图 8.1: 2PointConnectedDiagramSpaceTime

个图里，没有写对成性因子。当然，这个图是用坐标空间的 Feynman 规则来表达式子的。图 5.2

简单证明： $G_c(x_1, x_2)$  只和  $x_2 - x_1$  有关系。

这个严谨的证明不是很确定。但是如果只是取看上面的图片，比如说第二项 ( $g$  的一阶项)。他的式子里里面有这么一项

$$\int \frac{1}{i\hbar} d^4x i\hbar \Delta(x_2 - x) i\hbar \Delta(x - x_1) i\hbar \Delta(0) \quad (8.1)$$

如果把 Feynman 传播子用 Fourier 展开，然后带入上面的式子，会有这样一项：

$$(i\hbar)^2 \Delta(0) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 - m^2} e^{ip_1(x_2 - x)} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_2^2 - m^2} e^{ip_2(x - x_1)} d^4 x \quad (8.2)$$

然后注意到对于  $x$  的积分会产生一个对于  $p$  的 delta 函数，也就是

$$\int d^4x e^{-ip_1 x} e^{ip_2 x} = (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \quad (8.3)$$

这个积分完了后，再对  $p_2$  进行积分，就会变成：

$$(i\hbar)^2 \Delta(0) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_1^2 - m^2} \frac{1}{p_1^2 - m^2} e^{ip_1(x_2 - x_1)} \quad (8.4)$$

于是我们说，这一项只和  $x_2 - x_1$  有关。

简单证明，坐标空间的 Feynman 图的连接等价于动量空间的 Feynman 图的连接

比如说两点的坐标空间的动量图的连接：( $A$  和  $B$  都是坐标空间的 Feynman 图，当然，他只和两个坐标的差值有关)

$$C(0, x) = \int A(0, y) B(y, x) d^4y \frac{1}{i} \quad (8.5)$$

然后对于  $C$  这个图，动量空间的 Feynman 图  $C(p)$  是这么定义的。

$$C(p) = \int d^4x e^{-ipx} C(x) \quad (8.6)$$

具体来说

$$C(p) = \frac{1}{i} \int d^4x e^{-ipx} \int d^4y A(0, y) B(y, x) \quad (8.7)$$

可以把  $e$  指数拆开。

$$C(p) = \frac{1}{i} \int d^4y e^{-ipy} A(y) \int d^4x e^{-ip(x-y)} B(x-y) \quad (8.8)$$

然后做积分变换，变换是

$$(x, y) \rightarrow (x - y, y) \quad (8.9)$$

变换后的积分区间仍然是

$$x - y \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty) \quad (8.10)$$

然后因为坐标变化而导致的 Jacobi 行列式是

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(x - y, y)}\right) = 1 \quad (8.11)$$

于是顺理成章的，就有动量图的连接：

$$C(p) = \frac{1}{i\hbar} A(p) B(p) \quad (8.12)$$

就是动量图的连接是有一个  $\frac{1}{i\hbar}$  的

### 位置空间图片链接的例子

主要是想说如果有一个位置空间的图上面两个点跑到一起去了，那么应该有这么一项  $(i\hbar)\delta^4(x_1 - x_2)$ 。图8.2

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } \text{Two circles connected by a wavy line between points } x_1 \text{ and } x_2. \\
 & = i\hbar \Delta_F(x_1 - x_2) \cdot \delta^4(x_1 - x_2) \cdot (i\hbar)^4 \\
 & = \int \text{Diagram} \cdot \frac{1}{i\hbar} d^4 p_1 \cdot \frac{1}{i\hbar} d^4 p_2 \cdot i\hbar \Delta_F(x_1 - x_2) \\
 & = \int \frac{d^4 p_2}{i\hbar} \cdot i\hbar \Delta_F(x_2 - x_3) \cdot i\hbar \Delta_F(x_2 - x_1) \\
 & \quad \cdot i\hbar \Delta_F(0).
 \end{aligned}$$

图 8.2: 2PointIrreducibleDiagram

### 用 1particle irreducible Diagram 构造 $G_c(x_1, x_2)$

首先，通过方程：

$$\int d^4 y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x_2)} = \delta^4(x_1 - x_2) \quad (8.13)$$

可以推导出  $\hat{\Gamma}^{(n)}(x_1, x_2)$  和  $G_c(x_1, x_2)$  有一些关系，具体来说，先把上面的变量  $x_2$  改一个名字叫做  $y_2$ 。然后再左右同时乘以  $W^{(2)}(y_2, x_2)$  然后再对  $y_2$  积分。

$$\int \frac{d^4 y_1}{i\hbar} \frac{d^4 y_2}{i\hbar} (i\hbar)^2 \left(\frac{i}{\hbar}\right) \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(y_1)} \frac{1}{i\hbar} (i\hbar) \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2)} W^{(2)}(y_2, x_2) = W^{(2)}(x_1, x_2) \quad (8.14)$$

于是按照定义，这个式子实际上是：

$$(i\hbar)^2 \frac{i}{\hbar} \frac{1}{i\hbar} \int \frac{d^4 y_1}{i\hbar} \frac{d^4 y_2}{i\hbar} W^{(2)}(x_1, y_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(y_1, y_2) W^{(2)}(y_2, x_2) = W^{(2)}(x_1, x_2) \quad (8.15)$$

也就是：

$$-\int \frac{d^4 y_1}{i\hbar} \frac{d^4 y_2}{i\hbar} W^{(2)}(x_1, y_1) \hat{\Gamma}^{(2)}(y_1, y_2) W^{(2)}(y_2, x_2) = W^{(2)}(x_1, x_2) \quad (8.16)$$

用图像表示式子8.16是图8.3 这个图里有一个负号需要注意一下。这一点比较特殊。

$\Gamma^2(x_1, x_2)$  并不是不可约的。图8.4。中实心的才是不可约 irreducible 的。图8.3中实心的才是不可约 irreducible。

现在回到之前的图8.1。它实际上说明了这个式子8.4 假设动量空间的 1PI 图的表达式是  $i\Sigma(p^2)$  对式子8.4取 Fourier

图 8.3: 1PIConstruct2Connected, 图里的实心是  $\Gamma^2$ 

图 8.4: 1PIConstruct2Connected2(图里的实心是两点不可约表示)

变换，得到动量空间的联系：(-1 是因为  $\frac{1}{i} \frac{1}{i}$ )

$$i\Delta(p) = i\Delta_F(p) + i\Delta_F(p)(-i\Sigma(p^2))i\Delta_F(p) + i\Delta_F(p)(-i\Sigma(p^2))i\Delta_F(p)(-i\Sigma(p^2))i\Delta_F(p)\dots \quad (8.17)$$

按照等比数列的求和

$$i\Delta(p) = i\Delta_F(p) \frac{1}{1 + i\Sigma(p^2)i\Delta_F(p)} \quad (8.18)$$

把 Feynman 传播子的表达式带入得到：(应该有一小节专门讲一下  $\epsilon$  的意义)

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} \quad (8.19)$$

然后再次观察这个等式：

$$\int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y)\delta J(x_1)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y)\delta \phi(x_2)} = \delta^4(x_1 - x_2) \quad (8.20)$$

第一项变换的 Fourier 变换的结果是  $\frac{i}{\hbar}(i\Delta(p)) = \frac{1}{\hbar}(-\Delta(p))$ 。第二项 Fourier 变换的结果是  $\frac{1}{(i\hbar)}(i\Gamma^2(p)) = \frac{1}{\hbar}\Gamma^2(p^2)$  (这个  $\Gamma^{(2)}(p)$  的定义是  $i\Gamma^{(2)}(p)$  和  $\Gamma^{(2)}(x_1, x_2)$  有 Fourier 变换关系)<sup>1</sup> 于是就有这样的性质

$$\frac{1}{\hbar}\Gamma(p^2) \frac{1}{\hbar}(-\Delta(p)) = 1 \quad (8.21)$$

这个式子就说明了

$$-\Gamma(p^2) = \frac{1}{\Delta(p)} \quad (8.22)$$

也就是说：

$$-\Gamma(p^2) = p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon \quad (8.23)$$

## 8.1.2 简单的判断可不可以使用重整化

判断的依据是根据函数的发散项数目是否可数。

考虑函数

$$\Gamma^n(p_1\dots p_n) \quad (8.24)$$

他有  $n$  个外腿。假设里面有  $V$  个节点。 $P$  个传播子。如果是 phi4 理论，点和线守恒：

$$2P + n = 4V \quad (8.25)$$

需要积分的量是每一个传播子都要积分，但是每一个格点可以有一个动量守恒，也就是节省一个积分。同时由于外动量守恒，需要加一。所以总共的积分数量是。

$$I = P - V + 1 \quad (8.26)$$

利用式子8.25。

$$I = V - \frac{n}{2} + 1 \quad (8.27)$$

如果积分的维度是  $d$ 。最后的积分大概会有这样的形式：

$$\int \frac{d^d p_1 \dots d^d p_I}{(p_1^2 - m^2) \dots (p_P^2 - m^2)} \quad (8.28)$$

他收敛的条件是：

$$dI - 2P = (d - 4)V + (1 - \frac{d}{2})n + d < 0 \quad (8.29)$$

Now let's consider general situation, For the action: The original one has  $\hbar$  and this is after wick rotation

$$\mathcal{A} = \int d^d x \left( \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi_0^2 + \sum_{k=3}^N \frac{\lambda_{0k}}{k!} \phi_0^k \right) \quad (8.30)$$

<sup>1</sup>这样， $\Delta(p)\Gamma^{(2)}(p)\Delta(p) = -\Delta(p)$ ，其中的负号和公式 8.3 里的负号是一个意思

Let's consider the dimension analysis. For  $c = \hbar = 1$ .

$$\begin{aligned}\hbar &= [E][T] = [M][L]^2[T]^{-2}[T] = [M][L]^2[T]^{-1} \\ c &= [L][T]^{-1} = 1\end{aligned}\quad (8.31)$$

We can use mass unit to represent all units. From the above equation, It can be easily know that:

$$[T] = [M] \quad [L] = [M]^{-1} \quad (8.32)$$

**Consider the dimension of  $\phi$ .** The dimension of  $\mathcal{A}$  is 1. ( $[\mathcal{A}] = 1$ ) Consider the second term in action.

$$\begin{aligned}[\phi]^2[M]^2[L]^d &= [M]^0 \\ [\phi]^2[M]^2[M]^{-d} &= [M]^0 \\ [\phi] &= [M]^{\frac{d-2}{2}}\end{aligned}\quad (8.33)$$

**Consider the dimension of  $\lambda_{0k}$ ,** Consider the last term in the action.

$$\begin{aligned}[\lambda_{0k}][\phi]^k[L]^d &= 1 \\ [\lambda_{0k}][M]^{k(\frac{d-2}{2})-d} &= 1 \\ [\lambda_{0k}] &= [M]^{d-\frac{d-2}{2}k}\end{aligned}\quad (8.34)$$

**Consider the unit of  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ ,** Consider the definition of proper diagram: **This is not the original definition, the original one has  $\hbar$ , etc**

$$\tilde{\Gamma}^{(n)} = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots} \quad (8.35)$$

The dimension of  $J(x_1)$  is:

$$[J(x_1)] = [\phi]^{-1} = [M]^{-\frac{d-2}{2}} \quad (8.36)$$

The dimension of  $\delta(x - x_1)$  is:

$$[\delta(x - x_1)] = [L]^{-d} = [M]^d \quad (8.37)$$

The derivation of  $\frac{\delta}{\delta J}$  will have the ability to change  $J$  into  $\delta(x - x_1)$ . So we say that the dimension of proper propagator is:

$$[\Gamma^{(n)}] = \left(\frac{[\delta]}{[J]}\right)^n = [M]^{n(d+\frac{d-2}{2})} \quad (8.38)$$

**Consider the unit of  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p)$ ,** Consider the propagator in momentum diagram.

### 8.1.3 维数正规化的 phi4 重整化

这个先看纸质笔记吧

## 8.2 重整化群

本来对 Lagrangian 是:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (8.39)$$

如果加入 Counter-Term 之后:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}\delta Z\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4 \quad (8.40)$$

对于 Bare Field 是:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_0\partial_\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \quad (8.41)$$

满足的关系是:

$$Z = 1 + \delta Z \quad \phi_0 = Z^{1/2}\phi \quad m_0^2 = (m^2 + \delta m^2)Z^{-1} \quad \lambda_0 = (\lambda + \delta\lambda)Z^{-1} \quad (8.42)$$

微扰重整化就是用 Counter-Term 来消除原本的发散项。有一些重整化的规范，在选定后，可以按照级数解出各个抵消项。这些抵消项现在就可以表示为  $\lambda$  的级数。而且各级的系数是  $\epsilon$ (维度正规化) 和  $\mu$  的函数。然后现在说  $\lambda = \lambda(\mu)$  于是所有东西都是  $\mu$  的函数。

**Callan-Symanzik equation** 在  $m = 0$  没有质量时。(critical submanifold)。 $(\lambda, \mu)$  是一个 physics,  $(\lambda(\mu + \delta\mu), \mu + \delta\mu)$  又是一种 physics。定义

$$\lambda(\mu + \delta\mu) = g(\lambda | \frac{\tilde{\mu}}{\mu}) = 1 + \frac{\delta\mu}{\mu} \beta(\lambda) \quad (8.43)$$

其中  $\tilde{\mu} = \mu + \delta\mu$ ,  $\beta(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \xi} g(\lambda | \xi)|_{\xi=1}$ 。

考虑  $\phi$  的大小。变化是:

$$\phi_{(\mu)} = Z_{(\mu)}^{-1/2} \phi_0 \quad (8.44)$$

于是有

$$\phi_{(\tilde{\mu})} = Z_{(\mu)}^{1/2} Z_{(\tilde{\mu})}^{-1/2} \phi_{(\mu)} \quad (8.45)$$

讲义里面定义他们的变换是:

$$\phi_{(\tilde{\mu})} = Z_{finite}^{-1/2} (\lambda | \frac{\tilde{\mu}}{\mu}) \phi_{(\mu)} = (1 - \frac{\delta\mu}{\mu} \gamma(\lambda)) \phi_{(\mu)} \quad (8.46)$$

当然, 其中的  $\gamma(\lambda)$  是  $-\frac{\partial}{\partial \xi} Z_{finite}^{-1/2} (\lambda | \frac{\tilde{\mu}}{\mu})|_{\xi=1}$ 。现在考虑一个物理量:

$$\begin{aligned} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > &= (Z_{\mu}^{-1/2})^n < \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) > \\ < \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) > &= (Z_{\tilde{\mu}}^{-1/2})^n < \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) > \end{aligned} \quad (8.47)$$

其中, 不应该随着  $\mu$  的不同而不同的量应是:

$$(Z_{\mu}^{1/2})^n < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \quad (8.48)$$

也就是说应该有一个等式:

$$(Z_{\mu}^{1/2})^n < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = (Z_{\tilde{\mu}}^{1/2})^n < \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) > \quad (8.49)$$

结合8.46. 得到:

$$(1 - n \frac{\delta\mu}{\mu} \gamma(\lambda)) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = < \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) > \quad (8.50)$$

对  $< \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) >$  去微分得到  $< \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) >$

$$\begin{aligned} < \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) > \\ &= (1 + \delta\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \end{aligned} \quad (8.51)$$

考虑到8.43:

$$\begin{aligned} < \phi_{(\tilde{\mu})}(x_1) \cdots \phi_{(\tilde{\mu})}(x_n) > \\ &= (1 + \delta\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \\ &= (1 + \frac{\delta\mu}{\mu} \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \end{aligned} \quad (8.52)$$

于是:

$$(\beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + n\gamma(\lambda)) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = 0 \quad (8.53)$$

如果假设:

$$< \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = \mu^n C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) \quad (8.54)$$

就有 ( $\partial_i$  是指对第  $i$  个指标求导数)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > &= \mu^{(n+1)} \partial_i C^{(n)}(\mu x_1 \cdots \mu x_n, \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) &= x_1 \partial_i C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \mu^n C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) &= \frac{n}{\mu} \mu^n C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) + \mu^n x_i \partial_i C^{(n)}(\mu x_1, \mu x_2 \cdots \mu x_n, \lambda) \\ &= \frac{n}{\mu} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > + \frac{1}{\mu} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \end{aligned} \quad (8.55)$$

于是8.53。就变成了:

$$(\Sigma_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + n(1 + \gamma(\lambda)) + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}) < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = 0 \quad (8.56)$$

讲义里说这个叫做坐标变化被另外两个变化抵消掉了。这几个变化分别是:

$$x^\mu \rightarrow (1 + \delta L)x^\mu \quad \lambda \rightarrow \lambda - \beta(\lambda)\delta L \quad \phi \rightarrow \phi - (1 + \gamma(\lambda))\phi\delta L \quad (8.57)$$

假如说  $\mu$  和  $L$  有这个关系:

$$\frac{\delta L}{L} = -\frac{\delta \mu}{\mu} = -\frac{\delta \lambda}{\beta(\lambda)} \quad \lambda(L=1) = \lambda \quad (8.58)$$

于是, 我们想验证有这个等式:

$$Z^{n/2}(L) < \phi\left(\frac{x_1}{L} \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right)\right) >_{\lambda(L)} = Z^{n/2}(\tilde{L}) < \phi\left(\frac{x_1}{\tilde{L}}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{\tilde{L}}\right) >_{\lambda(\tilde{L})} \quad (8.59)$$

**证明** 结合式子8.58和式子8.46, 式子8.55。得到:

$$\delta \mu \frac{\partial}{\partial \mu} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > = \delta \mu \left( \frac{n}{\mu} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > + \frac{1}{\mu} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} < \phi_{(\mu)}(x_1) \cdots \phi_{(\mu)}(x_n) > \right) \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{Z^{1/2}(\tilde{L})}{Z^{1/2}(L)} \right)^n < \phi\left(\frac{x_1}{\tilde{L}}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{\tilde{L}}\right) >_{\lambda(\tilde{L})} \\ &= (Z_{finite}^{1/2}(\lambda, \frac{\tilde{\mu}(\tilde{L})}{\mu(L)}))^{-n} < \phi\left(\frac{x_1}{\tilde{L}}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{\tilde{L}}\right) >_{\lambda(\tilde{L})} \\ &= (1 - n \frac{\delta \mu}{\mu} \gamma(\lambda))(1 - \frac{\delta L}{L^2} x_i \partial_i - \frac{\delta L}{L} n + \delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}) < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} \\ &= < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} - \frac{\delta L}{L} (n(\gamma(\lambda) + 1) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}) < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} \end{aligned} \quad (8.61)$$

注意, 上面的  $\partial_i$  是指  $\frac{\partial}{\partial(\frac{x_i}{L})} = L \frac{\partial}{\partial x_i}$ 。于是:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{Z^{1/2}(\tilde{L})}{Z^{1/2}(L)} \right)^n < \phi\left(\frac{x_1}{\tilde{L}}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{\tilde{L}}\right) >_{\lambda(\tilde{L})} \\ &= < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} - \frac{\delta L}{L} (n(\gamma(\lambda) + 1) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}) < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} \end{aligned} \quad (8.62)$$

由于式子8.56。可以证明:

$$Z^{n/2}(L) < \phi\left(\frac{x_1}{L}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{L}\right) >_{\lambda(L)} = Z^{n/2}(\tilde{L}) < \phi\left(\frac{x_1}{\tilde{L}}\right) \cdots \phi\left(\frac{x_n}{\tilde{L}}\right) >_{\lambda(\tilde{L})} \quad (8.63)$$

# 第九章 数学基础

## 9.1 泛函

### 9.1.1 泛函微分

泛函就是有无限个自变量的传统函数。。。暂且这么理解吧，或者可以理解为把一个函数当作自变量的一个函数，(把一个函数映射到一个值上面去)。首先考虑有 N 个自变量的多元函数，他在  $y = 0$  地方的泰勒展开自然而然可以写成这样。

$$F(y_1, y_2 \dots y_N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N \frac{\delta F(y_1 \dots y_N)}{\delta y_{k_1} \dots \delta y_{k_n}} \delta y_{k_1} \dots \delta y_{k_n} \quad (9.1)$$

接下来考虑无穷自变量的函数，无穷个自变量的函数写作  $J(x)$ ，其中  $x$  的取值范围是  $[-\infty, +\infty]$ 。

我们认为函数  $F[J]$  可以表示成  $\int dx J(x) f(x)$  的形式，来方便理解吧.. 然后我们说在  $x_1$  这个地方函数值该变量是  $J(x_1)$ (以前是 0) 那么这个函数因为在这个地方  $J$  的改变而发生的改变就是  $f(x_1)\epsilon J(x_1)$ . 这个  $\epsilon$  表示的是积分的时候分段的长度。

实际上我们把他写成这个样子

$$\frac{\delta f(x_1)\epsilon J(x_1)}{\delta J(x_1)} = \int dx \delta(x - x_1) f(x) \epsilon \quad (9.2)$$

当然，如果整个函数都有发生变化，那么函数对应的微分就可以用积分来表达

$$\int dx_1 J(x_1) \int dx \delta(x - x_1) f(x) \quad (9.3)$$

这样我们定义泛函微分这样定义

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta(x - x_1) \quad (9.4)$$

这样，我们说泛函展开：

$$W[J] = \sum_{n=0}^{+\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(x_1) \dots J(x_n) \quad (9.5)$$

是这样的，然后在场论里面，因为我们一般说  $W[J]$  是 Generating Function. 生成的是 n-Point Function

$$W[J] = \sum_{n=0}^{+\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(x_1) \dots J(x_n) \quad (9.6)$$

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (9.7)$$

## 9.2 群的知识

### 9.2.1 Group

群是定义了乘法的集合

- 群对群乘法有封闭性  $\forall g_1, g_2 \in G$  则  $g_1 g_2 \in G$
- 群乘法满足结合律  $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$  for  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- 群中一定有恒元  $e$ : s.t  $eg=ge=g$  for  $\forall g \in G$
- 任意群元  $g$  一定有逆元  $g^{-1}$  for  $\forall g \in G$ ,  $\exists g^{-1} \in G$ , s.t  $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

一些特殊的群

- Abel 群:  $g_1 g_2 = g_2 g_1$
- 子群: 群  $G$  的子集  $H$ 。  $H$  满足群的定义则称  $H$  是  $G$  的子群，记为  $H < G$

$S$  代表行列式是 1。  $O$  是 orthogo 正交。  $U$  是 unitary 幺正。  $SO(1,3)$  是固有保时向 Lorentz 群。

## 9.2.2 群的线性表示

线性表示: 一些  $m$  阶方正  $D(G)$  和  $G$  中元素的乘法关系完全相同。这样就可以用这些方阵来表示群  $G$ 。矩阵们构成了  $G$  的线性表示。并且  $D(G)$  中的一个元素至少对应于  $G$  中的一个群元。

同态: 群  $G$  的线性表示  $D(G)$  和群  $G$  之间有同态关系。

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2) \quad (9.8)$$

- 恒等表示: 1 维线性表示, 矩阵取 1.
- 同构/忠实表示:  $G$  中的群元素和  $D(g)$  中的群元素一一对应
- 么正表示:  $D(G)$  中的矩阵是么正的
- 自身表示/基础表示: 群元素本来就是矩阵, 然后要表示自己
- 等价表示: 两个群线性表示之间存在变换:  $D_2(g) = S^{-1}D_1(g)S$
- 可约表示: 如果存在一个矩阵  $S$ 。则说  $D(g)$  是可约表示, 否则就是不可约表示。

$$S^{-1}D_1(g)S = \begin{bmatrix} D_1(g) & M(g) \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

## 9.2.3 $SO(1, 3)^\dagger$ 固有保时 Lorentz 群

emm, 我其实不知道写的对不对..... 其实我只是想说狭义相对论罢了。。

我只是想说几个喜闻乐见的性质。

保度归条件:

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} \quad (9.10)$$

证明他只需要保证 lorentz 变化前后的两个矢量的度量是一样的  $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$

洛伦兹变换的逆矩阵:

$$(\Lambda)^\mu_\nu = g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \Lambda^\alpha_\beta \quad (9.11)$$

证明这个式子只用证明他和  $\Lambda$  乘之后是一个科洛内科 delta 符号就好了。

逆变矢量的 lorentz 逆变换:

$$x_\nu = x'_\alpha \Lambda^\alpha_\nu \quad (9.12)$$

证明他也不难, 反正就是把逆变矢量的定义和 Lorentz 逆变换结合起来就好了。