



# QFT 学习笔记

啊吧啊吧

作者：Chenhao Peng

时间：2023/1/25



# 目录

<b>第一章 哈密顿与拉格朗日力学</b>	<b>1</b>
1.1 拉格朗日方程的导出 . . . . .	1
1.2 Legendre 变换, 正则方程, 柏松括号 . . . . .	1
<b>第二章 经典场论</b>	<b>3</b>
2.1 Basic and Hamilton Formalism . . . . .	3
2.2 Noether 定理 . . . . .	7
<b>第三章 量子力学基础</b>	<b>12</b>
3.1 不同的绘景 Picture . . . . .	12
3.2 Gell-Mann-Low Theorem . . . . .	15
3.3 Time-reverse . . . . .	16
<b>第四章 量子 Poincare 变换</b>	<b>18</b>
4.1 量子 Poincare 变换 . . . . .	18
4.2 Lorentz 代数 . . . . .	18
4.3 Poincare 代数 . . . . .	19
4.4 粒子 . . . . .	19
4.5 量子场的 Lorentz 变换, 量子场的自旋讨论 . . . . .	20
<b>第五章 量子力学的路径积分方法</b>	<b>24</b>
5.1 Feynman's Path Integral . . . . .	25
5.2 多个粒子的 Feynman Kernel 和多个粒子的 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式 . . . . .	26
5.3 用 Time ordered Product 表示 N-Point Function . . . . .	26
5.4 Vacuum Persistence Amplitude $W[J]$ 或者叫做 vacuum-vacuum amplitude . . . . .	27
<b>第六章 场论中的路径积分方法</b>	<b>29</b>
6.1 vacuum-vacuum transition functional 和 Green functions(ie. 相当于 n-point Function) . . . . .	29
6.2 利用 Wick Rotation 得到 Euclidian Field Theory, Propagator . . . . .	29
6.3 直接做动量变换的方法得到真空生成函数(不用上一部分说的 wick 转动) . . . . .	32
6.4 有相互作用场的 Generating Function 和 Vacuum Functional . . . . .	34
6.5 Feynman 图 . . . . .	34
6.6 动量空间的 Feynman 图 . . . . .	37
6.7 irreducible Diagram 和 Effective Action(有效作用量) . . . . .	38
<b>第七章 标量场</b>	<b>43</b>
7.1 生成函数与 Counter term . . . . .	43
7.2 树图散射振幅 . . . . .	46
7.3 散射截面 . . . . .	49
7.4 Optics Theorem . . . . .	52
7.5 维度分析 . . . . .	53
7.6 Lehmann-Kallen form of exact propagator . . . . .	54
7.7 Loop Correction to Propagator . . . . .	56

7.8 Loop Correction to the vertex . . . . .	60
7.9 Other 1PI vertices . . . . .	63
7.10 skeleton expansion . . . . .	64
7.11 Modified minimal subtraction . . . . .	66
<b>第八章 Dirac 方程</b>	<b>69</b>
8.1 Dirac 方程的导出 . . . . .	69
8.2 * Pauli's Fundamental Theorem . . . . .	70
8.3 Dirac 方程的 Lorentz 协变性 . . . . .	73
8.4 Dirac 自由粒子的 spinor . . . . .	75
8.5 用 Lorentz 变换从静粒子波函数到动粒子波函数 . . . . .	80
8.6 PCT of Dirac equation . . . . .	82
<b>第九章 Spin 1/2</b>	<b>86</b>
9.1 Lorentz Transformation and Lagrangian . . . . .	86
9.2 Dirac Equation and its solution . . . . .	87
9.3 Quantization (need details) . . . . .	93
9.4 $\mathcal{CPT}$ Discrete Symmetry . . . . .	94
9.5 LSZ reduction formula for Dirac Field . . . . .	95
9.6 Grassmann algebra and Path integral . . . . .	96
<b>第十章 Spin-1</b>	<b>103</b>
10.1 Massive-spin-1 Canonical Quantization . . . . .	103
10.2 Massless Canonical Quantization . . . . .	105
10.3 LSZ Reduction formula . . . . .	109
10.4 Path Integral Quantization . . . . .	109
10.5 Feynman Rules for QED . . . . .	112
10.6 Compton Scattering . . . . .	113
10.7 Loop correction to photon propagator . . . . .	115
10.8 Loop correction to fermion propagator . . . . .	122
10.9 Loop correction to vertex . . . . .	124
<b>第十一章 Yang Mills Field</b>	<b>128</b>
<b>第十二章 数学基础</b>	<b>129</b>
12.1 泛函 . . . . .	129
12.1.1 泛函微分 . . . . .	129
12.2 群的知识 . . . . .	129
12.2.1 Group . . . . .	129
12.2.2 群的线性表示 . . . . .	130
12.2.3 $SO(1, 3)^{\dagger}$ 固有保时 Lorentz 群 . . . . .	130

# 第一章 哈密顿与拉格朗日力学

## 1.1 拉格朗日方程的导出

如果认为最小作用量原理是一个公理，我们假如已经知道拉格朗日量可以写为：

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.1)$$

当然，在物理的解中， $q_i$  实际上是时间的函数，也就是说  $q_i = q_i(t)$ 。

**定理 1.1** 最小作用量原理 定义作用量为：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1.2)$$

能够使得作用量取极小的映射  $q_i(t)$  被认为是合理的广义坐标的运动轨道。这个轨道应该满足 Euler-Lagrange 方程。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

下面是证明

**证明** 当作用量取极小值时，作用量的变分是 0，下面通过作用量取极值的条件来推导出广义坐标应该遵循的随着时间的演化规律。

假设满足使得作用量最小的广义坐标随着时间的变化关系可以记为： $q_i(t)$ ，当广义坐标随着时间的变化有了改变时，即变为了  $q_i(t) + \delta q_i(t)$  时，作用量有了一个改变  $\delta S$ 。

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_i(t) &= \delta \frac{dq_i(t)}{dt} \\ &= \frac{d(q_i(t) + \delta q_i(t))}{dt} - \frac{dq_i(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \\ \delta S &= \int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \delta q_i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt + (\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

由于要求作用量的变分为 0，而且对于广义坐标的微扰有要求： $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 。于是就得到了 Euler-Lagrange 方程。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.5)$$

□

## 1.2 Legendre 变换, 正则方程, 柏松括号

**legendre 变换：**如果有函数  $f = f(x_1, x_2, x_3)$ ，则他的全微分可以写为  $df = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 \dots$  其中， $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ，如果定义函数  $g = u_i x_i - f$ ，则  $g$  可以很轻松地写为  $x_1 \dots x_{i-1}, u_i, x_{i+1} \dots$  的函数。这是因为：

$$dg = x_i du - u_1 dx_1 - \dots - u_{i-1} dx_{i-1} - u_{i+1} dx_{i+1} \dots \quad (1.6)$$

如果定义广义动量为： $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$ ，此时可以改写拉格朗日方程的变量为  $(q_i, p_i)$ 。为了能够方便地找到可

以写为新变量的全微分, 我们定义哈密顿量: $H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L$ , 这样,  $H$  的全微分可以写为:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.7)$$

如果考虑到  $dp_i = \frac{dp_i}{dt} dt, dq_i = \frac{dq_i}{dt} dt$ , 并且将 Lagrange 方程  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}$ , 带入:

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ dH &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt dH = \dot{q}_i \dot{p}_i dt - \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i dt - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{这里的 } dH \text{ 是由时间变化 } dt \text{ 引起的} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

正则运动方程(正则运动方程结合了)由上面的式子产生:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned} \quad (1.9)$$

柏松括号: 柏松括号定义为

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (1.10)$$

有几个比较特殊的柏松括号:(最后一步均是考虑到了正则运动方程)

$$\begin{aligned} \{q_i, H\} &= \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i \\ \{p_i, H\} &= \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \dot{p}_i \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 第二章 经典场论

这一节讲一些场论的基础知识

### 2.1 Basic and Hamilton Formalism

泛函求导引入  $F$  是场  $\phi$  的泛函, 场是从空间坐标到数域的映射 (这里用一维空间来计算)。

$$F = F[\phi] \quad (2.1)$$

泛函导数的定义:

$$\delta F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad (2.2)$$

如果场的微小变换是:

$$\delta \phi(x) = \epsilon \delta(x - y) \quad (2.3)$$

泛函  $F$  变换:

$$\begin{aligned} \delta F[\phi] &= F[\phi + \epsilon \delta(x - y)] - F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \epsilon \delta(x - y) \\ &= \epsilon \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

上面的式子被当作泛函导数的定义 (用  $\cdot$  代替了  $x$  是因为  $x$  是 silent argument):

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon \delta(\cdot - y)] - F[\phi]}{\epsilon} \quad (2.5)$$

◦ 1.

如果

$$F[\phi] = G[\phi]H[\phi] \quad (2.6)$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G[\phi + \epsilon \delta(\cdot - x)]H[\phi + \epsilon \delta(\cdot - x)] - G[\phi]H[\phi]}{\epsilon} \\ &= \frac{\delta G[\phi]}{\delta \phi(x)} H[\phi] + G[\phi] \frac{\delta H[\phi]}{\delta \phi(x)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

◦ 2.

如果

$$F = F[g(\phi)] \quad (2.8)$$

那么:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[g(\phi + \epsilon \delta(\cdot - y))] - F[g(\phi)]}{\epsilon} \quad (2.9)$$

观察函数:

$$g(\phi(x) + \epsilon \delta(x - y)) \quad (2.10)$$

在  $x = y + \alpha, \alpha$  是小量时:

$$g(\phi(x) + \epsilon \delta(x - y)) = g(\phi(x)) + \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon \delta(x - y) \quad (2.11)$$

于是:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta \phi(y)} = \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \frac{F[g + \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon \delta(\cdot - y)] - F[g(\phi)]}{\frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \epsilon} \quad (2.12)$$

也就是:

$$\frac{\delta F[g(\phi)]}{\delta \phi(y)} = \frac{dg}{d\phi}|_{\phi=\phi(y)} \frac{\delta F[g]}{\delta g(\phi(y))} \quad (2.13)$$

o3.

当

$$F[\phi] = \int dx (\phi(x))^n \quad (2.14)$$

泛函微分:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int dx ((\phi(x) + \epsilon \delta(x-y))^n - \phi(x)^n) \\ &= \int dx n(\phi(x))^{n-1} \delta(x-y) \quad (\epsilon \text{ 变小的速度是最快的}) \\ &= n(\phi(y))^{n-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

o4.

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int dx g(\phi(x)) = g'(\phi(y)) \quad (2.16)$$

o5.

当

$$F[\phi] = \int dx \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^n \quad (2.17)$$

此时:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int dx \left( \frac{d}{dx} [\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)] \right)^n - \int dx \left( \frac{d}{dx} \phi(x) \right)^n \right) \\ &= n \int dx \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^{n-1} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \\ &= -n \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^{n-1} \right] |_y \end{aligned} \quad (2.18)$$

o6.

泛函:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) &= \frac{1}{\epsilon} \left[ \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx} + \epsilon \frac{d}{dx} \delta(x-y)\right) - \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[ \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \int dx \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \epsilon \frac{d}{dx} \delta(x-y) - \int dx h\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right] \\ &= \int dx \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \\ &= -\frac{d}{dx} \left( \frac{dh}{d\left(\frac{d\phi}{dx}\right)} \right) |_y \end{aligned} \quad (2.19)$$

微元的角度的泛函求导 Lagrangian 是场和场的时间导数的泛函:

$$L = L[\phi, \dot{\phi}] \quad (2.20)$$

将空间划分成很多个小区域, 每一个区域用  $i$  来标记, 定义:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta V_i} \int_{\Delta V_i} d^3x \phi(x, t) \quad (2.21)$$

于是泛函变成了多变量的函数:

$$L = L(\phi_i, \dot{\phi}_i) \quad (2.22)$$

它的微分:

$$\delta L(\phi_i, \dot{\phi}_i) = \sum_i \left( \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \phi_i} \delta \phi_i + \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} \delta \dot{\phi}_i \right) \Delta V_i \quad (2.23)$$

由泛函微分的定义:

$$\delta L = \int dx \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \quad (2.24)$$

于是:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \phi_i} \quad (2.25)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} \quad (2.26)$$

**Euler-Lagrange 方程** 作用量定义为 Lagrangian 对时间的积分:

$$W = \int dt L[\phi, \dot{\phi}] \quad (2.27)$$

最小作用量原理:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \frac{d}{dt} (\delta \phi) \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \delta \phi + \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \phi \right) \right) \\ &= \int dt d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \right) \delta \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

于是, Euler-Lagrange 方程 (场的演化方程):

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (2.29)$$

**Lagrangian 的泛函导数和 Lagrangian 密度的关系-E-L 方程另一种形式** 如果 Lagrangian 可以写成:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \nabla \phi, \dot{\phi}) \quad (2.30)$$

其中,  $\phi$  是场, 是空间的函数, 并且场会随着时间演化。当场函数有变化时:

$$\delta L = \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \nabla \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \quad (2.31)$$

考虑到:

$$\delta \nabla \phi = \nabla \delta \phi \quad (2.32)$$

与分部积分 (由高斯定理, 散度部分变成面积分后成 0 了):

$$\begin{aligned} \delta L &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \delta \phi \right) - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

于是观察得到泛函导数是:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (2.35)$$

Euler-Langrange 方程变为:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (2.36)$$

更加紧凑的形式是:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.37)$$

**Hamilton Formalism** 定义经典共轭场 (canonical conjugate field)

$$\pi(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (2.38)$$

由 Euler-Lagrange 方程:

$$\dot{\pi}(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \phi} \quad (2.39)$$

定义 Hamiltonian:

$$H[\pi, \phi] = \int d^3x (\pi(x, t) \dot{\phi}(x, t)) - L(t) \quad (2.40)$$

则:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int d^3x \left( \dot{\phi} \delta \pi + \pi \delta \dot{\phi} - \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi - \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \dot{\phi} \delta \pi + \pi \delta \dot{\phi} - \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi - \pi \delta \dot{\phi} \right) \\ &= \int d^3x \left( \dot{\phi} \delta \pi - \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

这样做相当于做了变量代换:

$$L[\phi, \dot{\phi}] \Rightarrow H[\pi, \phi] \quad (2.42)$$

将 Euler-Lagrange 方程带入  $\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) = 0$ ,  $\dot{\pi}(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}}$  于是 Hamilton 方程:

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \dot{\phi} \quad \frac{\delta H}{\delta \phi} = -\dot{\pi} \quad (2.43)$$

满足 E-L 方程的 Hamiltonian 的变化是:

$$\delta H = \int d^3x (\dot{\phi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \phi) \quad (2.44)$$

$\pi, \phi$  是随时间变换的场。于是  $H = H(t)$ 。现在考虑它随时间的变化。

$$\delta H = \int d^3x (\dot{\phi} \dot{\pi} - \dot{\pi} \dot{\phi}) dt = 0 \quad (2.45)$$

Hamiltonian 密度:

$$\mathcal{H}(x, t) = \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L}(\phi, \nabla \phi, \dot{\phi}) \quad (2.46)$$

它是这些的函数:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi, \pi, \nabla \phi, \nabla \pi) \quad (2.47)$$

用分部积分:

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi)} \right) \quad (2.48)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \nabla \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi)} \right) \quad (2.49)$$

定义 Poisson 括号: 如果 F 和 G 都是  $\phi$  和  $\pi$  的泛函

$$\{F, G\}_{P, B} = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\delta G}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta G}{\delta \phi} \right) \quad (2.50)$$

可以发现:

$$\dot{F} = \{F, H\}_{P,B} \quad (2.51)$$

与:

$$\{\phi(x), \pi(x')\}_{P,B} = \delta^3(x - x') \quad (2.52)$$

## 2.2 Noether 定理

假设场有一个 lagrangian 密度可以表示为:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  我们可以先把他理解为一个 L 函数, 里面有五个变量, 分别叫做  $\phi, \partial_\mu \phi$ , 这五个量通过一个函数和时空变量 x 联系在了一起。也就是说  $\phi$  和  $\partial_\mu \phi$  可以看作是五个映射。而且这五个映射其实在确定了  $\phi$  后剩下四个都确定了。

现在考虑场发生了一个变化, 这个变化有两个方面。1. 坐标  $x \rightarrow x'$  2. 函数  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$ , 变化就像这样:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) \quad (2.54)$$

**命题 2.1** 在这种变化下, 在原本时空区域 R 中的作用量为  $\int_R d^4x \mathcal{L}(x)$ , 在发生变化后, 对作用量的时空积分分变成了 R', 同时, 拉格朗日量密度也变化为  $\mathcal{L}'(x')$ , 此时, 这一部分的作用量的差值可以写为:

$$\Delta S = \int_R d^4x \left\{ \partial_\mu \left( \mathcal{L}(\delta x)^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta} \phi \right) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right) \bar{\delta} \phi \right\} \quad (2.55)$$

### 证明

首先考察场坐标的变化, 可以简单的写为  $x' = x + \delta x$  接下来考察场函数和场函数的偏导的变化, 首先看场函数的变化定义, 映射  $\phi$  的变化写为:  $\phi'(x) - \phi(x) = \bar{\delta} \phi(x)$ .

$$\begin{aligned} \delta \phi &= \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) \\ &= (\partial_\mu \phi'(x)) \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi(x) \\ &= (\partial_\mu \phi(x)) \delta x^\mu + \bar{\delta} \phi(x) \text{ 忽略二阶小量} \end{aligned} \quad (2.56)$$

这样, 相当于拉格朗日量密度中的第一个变量的改变就确定了, 接下来考虑 lagrangian density's change Because of the change of the  $\partial_\mu \phi$ . Thus, we need to calculate  $\partial'_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x)$ .

$$\begin{aligned} \delta \partial_\mu \phi &= \partial'_\mu \phi' - \partial_\mu \phi \\ &= \partial'_\mu (\phi(x') + \bar{\delta} \phi(x')) - \partial_\mu \phi(x) \\ &= \partial_\mu \phi|_x^{x'} + \partial_\mu \bar{\delta} \phi(x) \\ &= \partial_\mu \partial_\rho \phi(x) (\delta x)^\rho + \partial_\mu \bar{\delta} \phi(x) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Then, we consider the Jacobi determinant.  $\mathcal{J} = \det(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu})$ 。（雅可比行列式的行和列指标分别由  $\mu, \nu$  决定） If we look close at Jacobi matrix, we can find that, it can be written in the form  $I + A$ , which is the first order of  $\exp(A)$ , it is easy to find that  $A = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}$ .

There is a math theory says that  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ . in this case, we can say that  $\mathcal{J} = \det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)) = 1 + \text{tr}(A) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$ .

Then, we come to the difference of the action:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \int_R d^4x \left[ (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \left\{ \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\bar{\delta}\phi + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} ((\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \partial_\mu \bar{\delta}\phi) \right\} - \mathcal{L} \right] \\
 &= \int_R d^4x \left\{ (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \bar{\delta}\phi \right\} \text{ 忽略了二阶小量} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \partial_\rho \phi) \delta x^\rho + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \bar{\delta}\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi \right) \right\} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right) \bar{\delta}\phi \right\}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

we noticed that in most of the fields, the second term will be zero. If we think that  $\Delta S = 0$ , then, the first term will be zero (because the choose of R is no limit).

在这里，坐标都是  $x^\mu$  的形式，当然也可以用度归算符进行升降指标。同时，一般把第一项里面的  $\bar{\delta}\phi$  写成：

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - (\partial_\lambda \phi(x)) \delta x^\lambda \tag{2.59}$$

于是，Current density (流密度)  $j^\mu$  可以写为：

$$j^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} (\partial_\lambda \phi_r(x)) \delta x^\lambda. \tag{2.60}$$

因为积分对任何坐标变动和场的变动都为 0，于是被积函数处处为 0。因为上面积分的第二项的 (integrand) 处处为零，所以第一项的 integrand 也要处处为零。连续方程 (Equation of Continuity) 可以写为：

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2.61}$$

□

**Noether 定律的表述原文:** Each continuous symmetry transformation leads to a conservation law. The conserved quantity G can be obtained from the Lagrange density。

可见，它的关键在于连续对称变化 (Continuous Symmetry Transformation)。

有一个问题，为什么作用量不变意味着“物理规律不变 or 存在对称性”

**连续方程 (Equation of continuity) 等价于守恒定律 (Conservation law):** 对连续方程 (Equation of Continuity) 进行空间部分的积分：

$$\int d^3x \partial_0 j^0 + \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{2.62}$$

利用 Gauss 定理：

$$\int d^3x \partial_0 j^0 + \oint ds \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{2.63}$$

因为在边界上被积函数 (integrand) 是 0，所以面积分自然是 0 于是连续方程说明：

$$G \equiv \int d^3x j^0 \tag{2.64}$$

是不随时间变化的。这个量不随时间变化，是守恒量 (Conserved Quantity)。

**时空平移对称性对应能动量守恒** 时空平移对称性的坐标变换：

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \tag{2.65}$$

场的形状 (shape of the fields) 是不改变的：

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) \Rightarrow \delta\phi_r = 0 \tag{2.66}$$

Current density 是:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\delta x^\lambda \\ &= \mathcal{L}\epsilon^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\epsilon^\lambda \end{aligned} \quad (2.67)$$

如果只有  $\epsilon^\nu \neq 0$ , 则:(第二项对  $\nu$  并没有求和约定, 第一项对  $\nu$  指标有求和约定)

$$j^\mu = \mathcal{L}\delta_\nu^\mu\epsilon^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi(x))\epsilon^\nu \quad (2.68)$$

可以定义(有时候会用到  $\delta_\nu^\mu = g_\nu^\mu$ ):

$$\Theta_\nu^\mu = -\mathcal{L}g_\nu^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi(x)) \quad (2.69)$$

把  $\nu$  变到上指标:

$$\Theta^{\mu\nu} = -\mathcal{L}g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial^\nu\phi(x)) \quad (2.70)$$

满足:

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (2.71)$$

有四个守恒量, 写为:

$$P^\nu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P}\right) = \frac{1}{c} \int_V d^3x \Theta^{0\nu} \quad (2.72)$$

$\Theta$  的下指标形式:

$$\Theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) \quad (2.73)$$

**Lorentz 不变性对应角动量和自旋守恒** Lorentz 变换下的坐标变化:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\nu \quad (2.74)$$

为了满足四维空间中的距离不变,  $\delta w$  是反对称的 ( $\delta w^{\mu\nu} = -\delta w^{\nu\mu}$ ), 这是因为:

$$\begin{aligned} x'^\mu x'_\mu &= (x^\mu + \delta w^{\mu\sigma}x_\sigma)(x_\mu + \delta w_\mu^\tau x_\tau) \\ &= x^\mu x_\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\nu x_\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\mu x_\nu \\ &= x^\mu x_\mu + (\delta w^{\mu\nu} + \delta w^{\nu\mu})x_\mu x_\nu \\ &= x^\mu x_\mu \end{aligned} \quad (2.75)$$

在 Lorentz 变换下, 场的变换是:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{rs}\phi_s(x) \quad (2.76)$$

这里的  $I^{\mu\nu}$  是 Lorentz 群表示的生成元,  $r s$  是生成元矩阵的行列指标。生成元  $I^{\mu\nu}$  对于 Lorentz 指标是反对称的, 也就是  $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$ 。

于是, 对于 Current density 是:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\lambda\phi(x))\delta x^\lambda \\ &= \mathcal{L}\delta w^{\mu\nu}x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\frac{1}{2}\delta w_{\sigma\nu}(I^{\sigma\nu})_{rs}\phi_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\partial_\lambda\phi_r(x))\delta w^{\lambda\nu}x_\nu \end{aligned} \quad (2.77)$$

他的下指标形式:

$$\begin{aligned}
j_\mu &= \mathcal{L} g_{\mu\nu} \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \left( -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) \right) \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \Theta_{\mu\nu} \delta w^{\nu\lambda} x_\lambda \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \Theta_{\mu\lambda} \delta w^{\lambda\nu} x_\nu \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w_{\sigma\nu} (I^{\sigma\nu})_{rs} \phi_s - \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \text{ 因为 } w \text{ 矩阵是反对称的} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \\
&= \frac{1}{2} \delta w^{\nu\lambda} M_{\mu\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

其中:

$$M_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - (\Theta_{\mu\nu} x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda} x_\nu) \tag{2.79}$$

定义反对称 (Anti-Symmetric) 张量 (逆变指标下的守恒荷):

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - (\Theta_{0\nu} x_\lambda - \Theta_{0\lambda} x_\nu) \right) \tag{2.80}$$

对于  $\nu\lambda$  的空间部分, 注意到:

$$\Theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\nu \phi_r) \tag{2.81}$$

那么:

$$\Theta_{0\nu} x_\lambda = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_\nu \phi_r) - \mathcal{L} g_{0\nu} \right) x_\lambda \tag{2.82}$$

$$\Theta_{0\lambda} x_\nu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_\lambda \phi_r) - \mathcal{L} g_{0\lambda} \right) x_\nu \tag{2.83}$$

这个时候:

$$\begin{aligned}
M_{nl} &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s - (\Theta_{0n} x_l - \Theta_{0l} x_n) \right) \\
&= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_n \phi_r) - \mathcal{L} g_{0n} \right) x_l + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_l \phi_r) - \mathcal{L} g_{0l} \right) x_n \right)
\end{aligned} \tag{2.84}$$

一般写为:

$$M_{nl} = L_{nl} + S_{nl} \tag{2.85}$$

其中:

$$\begin{aligned}
L_{nl} &= \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_l \phi_r) x_n - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\partial_n \phi_r) x_l \right) \\
&= \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} \left( x_n \frac{\partial}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \phi_r
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$S_{nl} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} (I_{nl})_{rs} \phi_s \tag{2.87}$$

**Internal Symmetries** 这个时候没有坐标变换, 场的变换是:

$$\phi'_r(x) = \phi_r(x) + i\epsilon \sum_s \lambda_{rs} \phi_s(x) \tag{2.88}$$

$$\delta\phi_r = i\epsilon \sum_s \lambda_{rs} \phi_s(x) \tag{2.89}$$

守恒流是:

$$\begin{aligned}
 j_\mu &= \mathcal{L} \delta x_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (\partial_\lambda \phi(x)) \delta x^\lambda \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi \\
 &= i \sum_{rs} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

守恒荷是:

$$Q = j^0 = i \sum_{rs} \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s = i \sum_{rs} \epsilon \pi_r \lambda_{rs} \phi_s \tag{2.91}$$

一个特殊的情况是对于相位改变:

$$\phi' = \phi + i\epsilon\phi \tag{2.92}$$

$$\phi'^* = \phi^* - i\epsilon\phi^* \tag{2.93}$$

将  $(\phi_1, \phi_2)$  分别叫作  $(\phi_1, \phi_2)$ , 于是  $\lambda_{11} = 1, \lambda_{22} = -1$ 。于是:

$$j_\mu = (-i) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)} \phi^* \right) \tag{2.94}$$

**Symmetrized Energy-Momentum Tensor:** 考虑修正过后的能动量张量 (Modified Tensor)

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \tag{2.95}$$

为了保证修正后的能动量张量满足守恒流方程, 要求  $\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu}$ , 这是因为:

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \\
 &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\sigma (\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}) \\
 &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

# 第三章 量子力学基础

## 3.1 不同的绘景 Picture

**Schrodinger Picture** Schrodinger Pic 是最基本的绘景，简单来说，在这个 picture 中，态矢量演化规律为

$$|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \quad (3.1)$$

其中，U 满足运动方程

$$i\hbar\partial_t U(t, t_0) = HU(t, t_0). \quad (3.2)$$

总结 Schrodinger 绘景的一些性质或者说约定：

- 1) 态矢满足 Schrodinger 方程  $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})|\Psi(t)\rangle^S = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle^S$
- 2) 定义坐标本征态  $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$
- 3) 定义动量本征态  $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$
- 4) 坐标本征态正交  $\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q)$
- 5) 动量本征态正交  $\langle p'|p\rangle = 2\pi\hbar\delta(p' - p)$
- 6)  $\int dp \frac{1}{2\pi\hbar}|p\rangle\langle p| = 1$
- 7)  $\int dq|q\rangle\langle q| = 1$
- 8)  $\langle q|p\rangle = e^{i\frac{p\cdot q}{\hbar}}$  (详细见 sakurai 笔记，前面没有 normalize factor 是因为动量的正交关系里面有了 factor)
- 9)  $\langle q|\Psi(t)\rangle^S = \psi(q, t)$
- 10) 当 Schrodinger Pic 下 Hamiltonian 不含时，Schrodinger 方程的解可以写成： $|\Psi(t)\rangle^S = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle^S$

**证明** 可以用上面的 (5) 推到 (6):(证明归一化可以用正交性推出来)

首先考虑积分：

$$\left(\int dp|p\rangle\langle p|\right)^2 = \int dp dp' |p'\rangle\langle p'|p\rangle\langle p| = \int dp' dp |p'\rangle 2\pi\hbar\delta(p' - p)\langle p| = \int dp 2\pi\hbar |p\rangle\langle p| \quad (3.3)$$

上面的式子仅仅在第二个等号用到了 5)。可以推导出 6)

$$\begin{aligned} 2\pi\hbar &= \int dp|p\rangle\langle p| \\ \int dp \frac{1}{2\pi\hbar}|p\rangle\langle p| &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

同样的，这个方法也可以从 (4) 推到 (7)。

**Heisenberg Picture** 在 Schrodinger 绘景中，态矢量演化： $|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$ ，算符是  $A^S(t)$ 。演化算符满足 Schrodinger 方程：

$$i\hbar\partial_t U(t, t_0) = H^S U(t, t_0). \quad (3.5)$$

其中，Hamiltonian 是厄米算符，U 是么正算符。

Heisenberg pic 意思是可以将态矢定住不变，而改变算符，也就是： $|\alpha, t\rangle^H = |\alpha, t_0\rangle^H = |\alpha, t_0\rangle^S$ 。同时算符会发生额外的演化： $A^H(t) = U^\dagger(t, t_0)A^S(t)U(t, t_0)$ 。

如果  $A^S$  不含时间, 那么 Heisenberg 绘景中的力学量的演化满足:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t A^H(t) &= U^\dagger(t, t_0) A^S U(t, t_0) \\
 &= -U^\dagger(t, t_0) H_S A^S U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) A^S H_S U(t, t_0) \\
 &= -U^\dagger H_S U U^\dagger A^S U + U^\dagger A^S U U^\dagger H_S U \\
 &= -H^H A^H + A^H H^H \\
 &= [A^H, H^H]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

当然, Heisenberg Pic 下的态矢量是不会演化的。

**Interaction Picture 相互作用绘景** 当系统的 Hamiltonian 可以写为:

$$H^S = H_0^S + H_1^S \tag{3.7}$$

其中,  $H_0^S$  不包含时间项 (所以在薛定谔绘景以及相互作用绘景中是同样的算符),  $H_1^S$  包含时间项。在 Schrodinger 绘景中, 态矢量演化满足

$$|\alpha, t\rangle^S = W(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle. \tag{3.8}$$

. 其中,  $W(t, t_0)$  满足运动方程.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} W(t, t_0) = H^S W(t, t_0) \tag{3.9}$$

**相互作用绘景中的算符及其演化:**

定义相互作用绘景中的态矢量:

$$\begin{aligned}
 |\alpha, t\rangle^I &= U(t, t_0)^\dagger |\alpha, t\rangle^S \\
 &= U(t, t_0)^\dagger W(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中,  $U(t, t_0)$  是没有相互作用时 Schrodinger Pic 中的时间演化算符。

$U$  满足演化方程:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_0^S U(t, t_0) \Rightarrow U(t, t_0) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} H_0^S (t - t_0)\right) \tag{3.11}$$

为了保证期望值不变, 在这个绘景中, 力学量算符应该满足要求:

$$\begin{aligned}
 \langle\alpha, t| A^I(t) |\alpha, t\rangle^I &= \langle\alpha, t| S A^S(t) |\alpha, t\rangle^S \\
 &= \langle\alpha, t| U^\dagger(t, t_0) A^S(t) U(t, t_0) |\alpha, t\rangle^I
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

于是:

$$A^I(t) = U^\dagger(t, t_0) A^S(t) U(t, t_0) \tag{3.13}$$

如果  $A^S$  和时间无关,  $A^I(t)$  满足 **Heisenberg 运动方程**:

$$i\hbar\partial_t A^I(t) = -U^\dagger(t, t_0) H_0^S A^S U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) A^S H_0^S U(t, t_0) \tag{3.14}$$

$$= -H_0^I A^I + A^I H_0^I \tag{3.15}$$

$$= [A^I, H_0^I] = [A^I, H_0^S] \tag{3.16}$$

**相互作用绘景中的态矢量及其演化:**

定义相互作用绘景中的态矢量:

$$\begin{aligned}
 |\alpha, t\rangle^I &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} |\alpha, t\rangle^S \\
 &= e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} W(t, t_1) |\alpha, t_1\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

随时间演化:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t|\alpha, t\rangle^I &= -H_0^S|\alpha, t\rangle^I + e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}}H^SW(t, t_1)|\alpha, t_1\rangle \\
 &= (-e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}}H_0^Se^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}} + e^{-\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}}H^Se^{\frac{H_0^S(t-t_0)}{i\hbar}})|\alpha, t\rangle^I \\
 &= (-H_0 + H^I)|\alpha, t\rangle^I \\
 &= H_1^I|\alpha, t\rangle^I
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

定义时间演化算符:

$$|\alpha, t\rangle^I \equiv U_I(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \tag{3.19}$$

演化算符满足演化方程:

$$i\hbar\partial_t U_I(t, t_0) = H_1^I U_I(t, t_0) \tag{3.20}$$

### Heisenberg 绘景和 Interacting 绘景之间的联系

假设, 三个绘景对齐的时间是  $t_0$ 。于是, 通过 Interacting 绘景的演化算符得到态矢量之间的关系:

$$|\alpha, t\rangle^I = U_I(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle^I = U_I(t, t_0)|\alpha, t\rangle^H \tag{3.21}$$

对于算符, 为了保证期望值在两个绘景中相同:

$$\begin{aligned}
 \langle\alpha, t|A^I|\alpha, t\rangle^I &= \langle\alpha, t|A^H A^H|\alpha, t\rangle^H \\
 &= \langle\alpha, t|U_I(t, t_0)A^H U_I^\dagger(t, t_0)|\alpha, t\rangle^I
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

于是算符之间的关系:

$$A^I = U_I(t, t_0)A^H U_I^\dagger(t, t_0). \tag{3.23}$$

### Dyson 级数求解相互作用绘景中的演化算符

相互作用绘景中的演化算符满足演化方程:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t, t_0) = H_1^I(t)U_I(t, t_0) \tag{3.24}$$

他的解一定满足积分式:

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^t H_1^I(t)U_I(t, t_0)dt \tag{3.25}$$

可以进行猜解

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \tag{3.26}$$

**证明** 上面的级数有个名字叫做 Dyson 级数, 可以直接带入证明:

$$\begin{aligned}
 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} H_1^I(t)U(t, t_0)dt &= 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right] \\
 &= 1 + (-i) \int_{t_0}^{t_f} dt H_1^I(t) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \int_{t_0}^{t_f} dt \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t) H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \\
 &= U_I(t_f, t_0)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

□

如果引入时序算符, 这个算符是让被作用的函数按照时间顺序排列。可以把时间演化算符写成:

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_t^{t_0} dt_1 \dots \int_t^{t_0} dt_n T \left( H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \right) \\ &= T \exp \left[ -i \int_t^{t_0} dt' H_1^I(t') \right] \\ &= T \exp \left[ -i \int_t^{t_0} dt' \int d^3x \mathcal{H}_1^I(x) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

## 3.2 Gell-Mann-Low Theorem

**标量场** 如果规定在  $t_0, O^H(t_0) = O^I(t_0) = O^S$ , 在 Heisenberg Pic 和 Interaction Pic 之间的算符的变换是。 $V(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}W(t, t_0)$  这样的  $V(t, t_0)$  也是  $U(t, t_0)$  的一个定义 (因为他们都可以让 Interact Pic 中的态矢演化)。emmm. 这样, Heisenberg Pic 算符和 Interact Pic 算符之间的关系就是

$$U(t, t_0)^\dagger O^I(t) U(t, t_0) = O^H(t) \quad (3.29)$$

现在说一个事情就是我们习以为常的量子标量场的解 (就是写成产生算符和湮灭算符的形式), 他是在没有势能 (相互作用) 的时候的解。我们现在说这个解是  $\phi_0(x)$ , 是 Interacting Pic 下的算符, 那么可以转换为 Heisenberg Pic 下的算符通过上面的式子。这个在 Schwartz 的 P87

$$\phi(x) = U^\dagger(t, t_0) \phi_0(x) U(t, t_0) \quad (3.30)$$

$$|-\rangle_H = U^\dagger(t, t_0) |-\rangle_I \quad (3.31)$$

我们现在说真空态, 这个态矢在 Interacting Pic 下面叫做  $|0\rangle$ , 在 Heisenberg Pic 下叫做  $|\Omega\rangle$ 。

这两个态矢的联系按照上面的式子应该叫做:

$$|\Omega\rangle = U^\dagger(t, t_0) |0\rangle = U(t_0, t) |0\rangle \quad (3.32)$$

$$\langle \Omega | = \langle 0 | U(t, t_0) \quad (3.33)$$

现在考虑 n-point Function:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle &= \langle 0 | U(t, t_0) U(t_0, t_1) \phi_0(x_1) U(t_1, t_0) U(t_0, t_2) \dots U(t_0, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, t_0) U(t_0, t) | 0 \rangle \quad (3.34) \\ &= \langle 0 | U_{t,1} \phi_0(x_1) U_{t,2} \dots U_{t,n} \phi_0(x_n) U_{t,t} | 0 \rangle \end{aligned}$$

现在 Schwartz P88 有一个操作, 就是说左边的  $t$  应该是  $+\infty$ , 右边的  $t$  叫做  $-\infty$ , 这样左右的真空不是同一时间的?...  $\langle 0 | U_{+\infty,1} \phi_0(x_1) U(t_1, t_0) U(t_0, t_2) \dots U(t_0, t_n) \phi_0(x_n) U(t_n, t_0) U(t_0, t) | 0 \rangle$

$$= \langle 0 | U_{+\infty,1} \phi_0(x_1) U_{1,2} \dots U_{n-1,n} \phi_0(x_n) U_{n,-\infty} | 0 \rangle \quad (3.35)$$

然后, 不知道怎么地, 反正就是归纳出了一个结论是这样的: **主要是不知道为什么  $U$  可以被提出来**

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) U_{+\infty,-\infty}\} | 0 \rangle \quad (3.36)$$

然后为了归一化, 一般是这样来写 N-POINT function

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle &= \frac{\langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) U_{+\infty,-\infty}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | U_{+\infty,-\infty} | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T\{\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_0)}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_0)} | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.3 Time-reverse

这一节讲 Quantum Mechanics 中的时间反演变换。量子力学对允许的变换的要求是

$$|\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\beta} \rangle| = |\langle \alpha | \beta \rangle|. \quad (3.38)$$

满足这一条件的除了 unitary 变换，还有 anti-unitary 变换。

**Anti-unitary operator  $\Theta$**  对于态矢量  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ , 可以用 anti-unitary 算符对他做变换

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle, \quad |\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle. \quad (3.39)$$

Anti-unitary 的性质是

$$\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\beta} \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^*, \quad (3.40)$$

$$\Theta(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1^*|\tilde{\alpha}\rangle + c_2^*|\tilde{\beta}\rangle. \quad (3.41)$$

**operator under trans** 有一个比较有用的等式是

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \tilde{\alpha} | \Theta X^\dagger \Theta^{-1} | \tilde{\beta} \rangle \quad (3.42)$$

下面是对他的证明

证明

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle X^\dagger \beta | \alpha \rangle = \langle \Theta \alpha | \Theta X^\dagger \beta \rangle \quad (3.43)$$

$$= \langle \Theta \alpha | \Theta X^\dagger \Theta^{-1} | \Theta \beta \rangle \quad (3.44)$$

$$= \langle \tilde{\alpha} | \Theta X^\dagger \Theta^{-1} | \tilde{\beta} \rangle \quad (3.45)$$

□

对比 unitary 变换的性质，他们的不同之处在于

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \tilde{\beta} | U X^\dagger U^\dagger | \tilde{\alpha} \rangle. \quad (3.46)$$

**Anti-unitary represnet** 反幺正算符总可以表示成幺正算符和 complex conjugate 算符的乘积。

$$\Theta = U K \quad (3.47)$$

直接计算可以验证 Anti-unitary 算符满足的两个性质。第一个可以得到

$$\Theta|\alpha\rangle = UK|\alpha\rangle = UK \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle |a'\rangle = U \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* |a'\rangle \quad (3.48)$$

$$\Theta|\beta\rangle = U \sum_{a''} \langle a''|\beta\rangle^* |a''\rangle \quad (3.49)$$

$$\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\beta} \rangle = \sum_{a', a''} \langle a'|\alpha\rangle \langle a''|\beta\rangle^* \langle a' | U^\dagger U | a'' \rangle \quad (3.50)$$

$$= \langle \beta | \alpha \rangle. \quad (3.51)$$

**Why Anti-unitary** 时间反演算符应该满足性质：态经过时间反演算符之后再演化，等价于反向演化再经历时间反演算符。

$$U(t+dt, t)\Theta = \Theta U(t-dt, t). \quad (3.52)$$

于是得到 Hamiltonian 和时间反演算符之间的对易关系。

$$-iH\Theta = \Theta(i)H. \quad (3.53)$$

如果  $\Theta$  是 Unitary 算符，

$$H\Theta = -\Theta H. \quad (3.54)$$

这样定义会产生负能解问题

$$\Theta|E_n\rangle = |-E_n\rangle. \quad (3.55)$$

为了避免，所以时间反演算符是反幺正的。

## 第四章 量子 Poincare 变换

### 4.1 量子 Poincare 变换

Poincare 变换是这个:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (4.1)$$

量子 Poincare 变化是这个: 他是由于坐标的 Poincare 变换诱导出的态矢变换。这个算符一定是么正的, 这是为了保证态矢的内积在量子 Poincare 变化下不变。

$$|\Psi'\rangle = U(\Lambda, a)|\Psi\rangle \quad (4.2)$$

由于两次 Poincare 变换  $(\Lambda_1, a_1), (\Lambda_2, a_2)$  叠加到一起相当于  $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$  于是就可以找到逆变换可以这样写:

$$U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \quad (\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu \quad (4.3)$$

量子 Lorentz 变换, 量子时空平移变换的生成元算符是这样定义的。

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 - \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - i P^\mu \epsilon_\mu \quad (4.4)$$

从一阶展开的角度理解他  $J^{\mu\nu} = 2i \frac{\partial U}{\partial \omega_{\mu\nu}}$ ,  $P^\mu = i \frac{\partial U}{\partial \epsilon_\mu}$ .

构造一个式子。

$$U^{-1}(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U(\Lambda, a) \quad (4.5)$$

这个式子可以用上面提到的 Poincare 变化的叠加性质来把三个算符写成一个最终的算符  $U$ , 然后再展开, 会有三项。当然也可以先把中间的算符做一阶展开。然后就写成一个有三项的式子。

既然这两种方法得到的结果理应是一样的, 那么就会有一个性质。(详细计算没写, 在中山大学余利焕的讲义里面)

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \\ U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 4.2 Lorentz 代数

利用量子 Poincare 变换中生成元算符的性质:

$$U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \quad (4.7)$$

如果  $\Lambda$  可以展开成  $1 + \omega$ . 那么带入上面的式子, 可以得到生成元算符的对易关系:

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu) \end{aligned} \quad (4.8)$$

是10维 Poincare 群的 Lie 代数 回顾量子 Poincare 变换的生成元算符的定义过程。如果我们说  $\omega$  是反对称的, 那么  $J$  也就是反对称的矩阵, 这样他只有 6 个独立变量。下面我们在讨论 Lorentz 代数的时候只考虑  $J$ .

我们说这六个独立变量张成了一个线性空间, 并且由于对易子的性质, 我们说这个空间中的矢量是对乘法封闭的。。这叫做 Lorentz 代数.... 好像这个对易子叫做 Lie 括号, 对于 Lie 括号运算封闭的就是 Lie 代数. 上面的对易子或者叫做 Lie 括号满足的条件叫做 Lorentz 代数关系。

所以我们接下来做的事情是找到一套满足 Lorentz 代数关系的生成元算符... 希望没有理解错。。。

如果做变量代换会找到 SO(3) 群的代数关系。

变量代换是这样做的

$$\begin{aligned} J^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} & K^i &= J^{0i} \\ \theta^i &= -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk} & \xi^i &= -\omega_{0i} \\ J &= (J^{23}, J^{31}, J^{12}) & K &= (J^{01}, J^{02}, J^{03}) \\ \theta &= (-\omega^{23}, -\omega^{31}, -\omega^{12}) & \xi &= (-\omega^{01}, -\omega^{02}, -\omega^{03}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

做了变换之后：注意，我们这里没有时空平移变换。

$$U(1 + \omega) = 1 + i\theta J + i\xi K \quad (4.10)$$

并且生成元算符有对易关系：

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk}J^k \\ [J^k, K^j] &= i\epsilon^{ijk}K^k \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk}J^k \end{aligned} \quad (4.11)$$

需要注意的是，如果我们现在就只考虑有三个分量的  $\mathbf{J}$ 。他的李括号是这样的。

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad (4.12)$$

这恰好是  $\text{SO}(3)$  群的代数关系。 $\text{SO}(3)$  群（三维空间转动群）代数是 Lorentz 代数的子代数。

### 4.3 Poincare 代数

考虑量子 Poincare 变换中的生成元算符（全部 10 个独立的生成元）的性质：

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma J^{\rho\sigma} + \Lambda^\mu_\rho a^\nu P^\rho - \Lambda^\nu_\rho a^\mu P^\rho \\ U^{-1}(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a) &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu \end{aligned} \quad (4.13)$$

这样，得到对易关系。

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i\left(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= i\left(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu\right) \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

是 10 维 Poincare 群的 Lie 代数。Lorentz 代数是 Poincare 代数的子代数。

如果按照 Lorentz 的变量代换，并且把  $P$  叫做  $(H, \vec{P})$ 。这样代数关系叫做：

$$\begin{aligned} [P^i, J^j] &= -i\epsilon^{ijk}P^k \\ [P^i, K^j] &= i\delta^{ij}H \\ [H, K^i] &= iP^i \\ [H, J^i] &= [H, P^i] = [P^i, P^j] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

### 4.4 粒子

这里学的很不明白，感觉主要是群论学的不好。

考虑一个粒子态  $|\Psi_\sigma(p^\mu)\rangle$ ，满足本征值的定义式子： $P|\Psi_\sigma(p)\rangle = p|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。

用量子 Lorentz 变换作用到这个态上  $PU(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle = U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)PU(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。由量子 Poincare 变化的生成元的性质。这个式子是等于  $\Lambda^\mu_\nu p^\nu U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle$ 。于是我们发现量子 Lorentz 变换算符作用在态矢上面之后的本

征值的变化恰好等于原来动量本征值的 Lorentz 变换。所以我们说。

$$U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle = \Sigma_{\sigma'} C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p) |\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle \quad (4.16)$$

然后定义态矢。定义方法是通过固有保时 Lorentz 变换。用一个基矢量  $\mathbf{k}$ , 做固有保时 Lorentz 变换  $V(p)$ , 满足  $p = V(p)\mathbf{k}$ .

$$|\Psi_\sigma(p)\rangle \triangleq N(p)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k)\rangle \quad (4.17)$$

把态矢的量子 Lorentz 变换也用这个基矢量  $\mathbf{k}$  表示:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U(V(\Lambda p))U^{-1}(V(\Lambda p))U(\Lambda)U[V(p)]|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))U(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))U(W)|\Psi_\sigma(k)\rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

其中

$$W^\mu_\nu = [V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)]^\mu_\nu \quad (4.19)$$

我们注意到  $\mathbf{W}$  有一个性质, 就是把  $\mathbf{k}$  在 Lorentz 变换后得到的矢量还是  $\mathbf{k}$ 。

我们说  $\{\mathbf{W}\}$  构成标准动量  $\mathbf{k}$  对应的**小群**。

如果我们说

$$U(W)|\Psi_\sigma(k)\rangle = \Sigma_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(W) |\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \quad (4.20)$$

那么这个  $\mathbf{D}$  矩阵有性质:

$$U(W_1)U(W_2)|\Psi_\sigma(k)\rangle = D(W_1)D(W_2)|\Psi_\sigma(k)\rangle = D(W_1W_2)|\Psi_\sigma(k)\rangle \quad (4.21)$$

上面的式子省略掉了求和和指标, 反正意思就是说。

$$D_{\sigma' \sigma}(W_1W_2) = D_{\sigma' \sigma''}(W_1)D_{\sigma'' \sigma}(W_2) \quad (4.22)$$

这个式子叫做同态关系. 我们说  $\{\mathbf{D}(\mathbf{W})\}$  构成了**小群的线性表示**

现在回到量子 Lorentz 变换作用在态矢的式子。我们用那个引入的态矢的定义, 和  $\mathbf{k}$  对应的态矢量的变化来写他。首先我们考虑  $\mathbf{p}$  在进行 Lorentz 变换后的值作为本征值的态矢量:

$$|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle = N(\Lambda p)U[V(\Lambda p)]|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \quad (4.23)$$

然后带入上面说到的量子 Lorentz 变化的式子中:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\Psi_\sigma(p)\rangle &= N(p)U(V(\Lambda p))U(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_\sigma(k)\rangle \\ &= N(p)U(V(\Lambda p))D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_{\sigma'}(k)\rangle \\ &= \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \Sigma_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p))|\Psi_{\sigma'}(\Lambda p)\rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

于是有了系数公式

$$C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p) = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} D_{\sigma' \sigma}(V^{-1}(\Lambda p)\Lambda V(p)) \quad (4.25)$$

## 4.5 量子场的 Lorentz 变换, 量子场的自旋讨论

**Lorentz 变换的量子意义:** 经典来看, Lorentz 变换 (Lorentz 不变性体现在作用量不变)

$$\begin{cases} S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial^\mu \phi(x)) \\ S' = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial^\mu \phi' \circ (x')) \end{cases} \quad (4.26)$$

量子力学的角度, 做用量是算符, Lorentz 变换是一种么正变换:

$$U^{-1}(\Lambda)SU(\Lambda) = \int d^4x \mathcal{L} \left( U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda), U^{-1}(\Lambda)\partial^\mu\phi(x)U(\Lambda) \right) \quad (4.27)$$

合适的量子 Lorentz 变换应该和经典相吻合:

$$U^{-1}(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda) = \phi'(x) \quad (4.28)$$

$$U^{-1}(\Lambda)\partial^\mu\phi(x)U(\Lambda) = \partial^\mu\phi'(x) \quad (4.29)$$

我们要求量子标量场有 Lorentz 变换不变性。

$$\phi'(x') = \phi(x) \Rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.30)$$

如果把标量场理解为算符, 在 Lorentz 变换下, 算符的变换是:

$$\phi(x) \rightarrow U(\Lambda)^{-1}\phi(x)U(\Lambda) = \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.31)$$

同样的, 如果把场对时空的偏导数也认为是 Hilbert 空间里的算符. 他们同样会被量子 Lorentz 变换。

$$\partial^\mu\phi(x) \rightarrow U^{-1}(\Lambda)\partial^\mu\phi(x)U(\Lambda) \quad (4.32)$$

这个变换后:

$$U^{-1}(\Lambda)\partial^\mu\phi(x)U(\Lambda) = \partial^\mu\phi'(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi(\Lambda_\nu^\mu x^\nu) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi(\Lambda_\alpha^\beta x_\beta) = \Lambda_\nu^\mu(\partial^\nu\phi)(\Lambda_\nu^\beta x_\beta) \quad (4.33)$$

标量场的 Lagrangian 中含有的项就是  $\phi$  和  $\partial\phi$ . 标量场的拉格朗日量做量子 Lorentz 变换的规则就是前面的两个式子。

**推广 Heisenberg Field operator evolution** 在 Heisenberg picture 下, 场算符的演化可以写为:

$$\left\{ \exp\left(\frac{-1}{i\hbar}H(t-t_0)\right)\phi(\vec{x},t_0)\exp\left(\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)\right) = \phi(\vec{x},t) \right. \quad (4.34)$$

按照前面说的理论, Poincare 量子变换的微元形式是:

$$\begin{cases} U(\Lambda, a) &= 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - iP^\mu a_\mu \\ U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \end{cases} \quad (4.35)$$

按照前面一段的结论:

$$\left\{ U(\Lambda)^{-1}\phi(x)U(\Lambda) = \phi'(x') = \phi(\Lambda x) \right. \quad (4.36)$$

把它变成 Poincare 变换:

$$\left\{ U(\Lambda, \epsilon)^{-1}\phi(x)U(\Lambda, \epsilon) = \phi'(x) = \phi(\Lambda x + \epsilon) \right. \quad (4.37)$$

当然, 没有 Lorentz 变换, 只有时空平移变换的情况下:

$$(1 + iP^\mu\epsilon_\mu)\phi(x)(1 - iP^\mu\epsilon_\mu) = \phi(x + \epsilon) \quad (4.38)$$

经过反复量子平移操作(可以理解为一种 Heisenberg evolution 的推广, 为了方便, 把 hbar 又加了进去):

$$\exp\left(\frac{-1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right)\phi(x_1)\exp\left(\frac{1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right) = \phi(x_2) \quad (4.39)$$

**如何说明标量场没有自旋:** 利用前面定义的产生元和生成元算符(注意我们这里吧变换后的场写成了 x)P85 余钊煥

$$\begin{aligned} U(\Lambda)^{-1}\phi(x)U(\Lambda) &= (1 + \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta})\phi(x)(1 - \frac{i}{2}\omega_{\gamma\delta}J^{\gamma\delta}) \\ &= \phi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\phi(x), J^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (4.40)$$

同时, 我们注意到:

$$\phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\phi(x) \quad (4.41)$$

其中的  $L$  只是一个算符罢了, 上面的式子其实也就是一个 taylor 展开罢了。 $L$  具体是这样的

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (4.42)$$

于是由于要求量子矢量场在 lorentz 变化下不变, 那么就要求有这个性质.

$$L^{\mu\nu} \phi(x) = [\phi(x), J^{\mu\nu}] \quad (4.43)$$

有个东西叫做对偶矢量, 我先不知道他是什么意思, 反正。是这样定义的的

$$L^i = i\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}L^{jk} \quad (4.44)$$

发现这个恰好是角动量算符。(一般用  $ijk$  就是只有 123 循环)

$$L = -ix \times \nabla \quad (4.45)$$

然后就有

$$\vec{L} \phi = [\phi(x), \vec{J}] \quad (4.46)$$

这个式子叫做总角动量算符  $J$  生成了轨道角动量算符  $L$ 。

综上, 标量场是没有自旋的。

**说明矢量场是有自旋的** 和标量场不一样, 我们要求矢量场在 Lorentz 变化下满足:

$$U^{-1}(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda) = A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) \quad (4.47)$$

如果这样要求, 拉格朗日量密度在 Lorentz 变化下就是不变的。(那拉格朗日量不就变了... 算了没搞懂)。和标量场是一个套路, 我们把左边展开成生成元算符, 右边吧  $\Lambda$  展开, 也把  $A$  泰勒展开。对了,  $x'$  应该写成  $x$ ,  $x$  应该写成  $\Lambda^{-1}x$ 。我们定义一个新的矩阵叫做  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ .

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta = i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta) \quad (4.48)$$

他的意义在于展开 Lorentz 变化... 就离谱.... 它是 Lorentz 群本身表示的生成元算符。

$$\Lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta \quad (4.49)$$

于是, 接着我们展开左右两边, 一边带入生成元算符, 一边泰勒展开。然后就有了

$$[A^\mu, J^{\rho\sigma}] = L^{\rho\sigma}A^\mu(x) + (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (4.50)$$

同样的,  $\mathcal{J}$  的对偶三维矢量是

$$\mathcal{J}^i = i\epsilon^{ijk}\mathcal{J}^{jk} \quad (4.51)$$

于是用对偶三维矢量来表示上面的式子

$$[A^\mu, \vec{J}] = \vec{L}A^\mu(x) + (\vec{\mathcal{J}})_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (4.52)$$

而且这个  $\mathcal{J}$  是满足  $SU(2)$  的生成元算符的代数关系的。而且也满足 Lorentz 代数关系。所以说他是  $SU(2)$  的某个线性表示的生成元算符

并且, 比较神奇的是  $(\mathcal{J}^2)_\nu^\mu = 2\delta_\nu^\mu$  所以说他的本征值是 2。然后有人说  $SU(2)$  群的线性表示生成元的本征值一定是  $S(S+1)\dots$  我也不知道是为啥, 也许不是这样, 也许是根本就记错了。。。所以说他的自旋就是 1。量子矢量场的自旋是 1!! .....

也说  $\mathcal{J}$  是 lorentz 群矢量表示的生成元。

**用 Lorentz 变换其他表示做场的变换** Lorentz 变换群有表示

$$L_A^B(\Lambda) = \delta_A^B - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B. \quad (4.53)$$

在经典场中, 考虑变化

$$L_A^B(\Lambda)\varphi_B(x) = \varphi'_A(x') = \varphi'_A(\Lambda x). \quad (4.54)$$

在这个场的变化以及坐标变化下, 可以证明场的作用量是不变的。对于量子场, 量子场的变化写为(这里都没有考虑平移变换)

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\varphi_A(x')U(\Lambda) &= \varphi'_A(x'), \\ U^{-1}(\Lambda)\varphi_A(x')U(\Lambda) &= L_A^B(\Lambda)\varphi_B(x), \\ U^{-1}(\Lambda)\varphi_A(x)U(\Lambda) &= L_A^B(\Lambda)\varphi_B(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (4.55)$$

考虑到没有平移时的 Lorentz 变换对应的变换算符; 以及 Lorentz 群表示的生成算符; 以及 taylor 一阶展开

$$\begin{cases} U(\Lambda) = \mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \\ L_A^B(\Lambda) = \delta_A^B - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B, \\ \varphi(\Lambda^{-1}x) = \varphi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\varphi(x). \end{cases} \quad (4.56)$$

带入到对算符的量子 Lorentz 变化的条件中得到

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\varphi_A(x)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) &= \left(\delta_A^B - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B\right)\left(\varphi_B(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\varphi_B(x)\right), \\ \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\varphi_A(x) - \varphi_A(x)\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\varphi_A(x) - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_A^B\varphi_B(x), \\ [\varphi_A(x), J^{\mu\nu}] &= L^{\mu\nu}\varphi_A(x) + (S^{\mu\nu})_A^B\varphi_B(x). \end{aligned} \quad (4.57)$$

这个式子说明 Lorentz 群表示的生成元算符  $S$  和角动量有关系。

## 第五章 量子力学的路径积分方法

**Feynman Kernel** Schrodinger Picture 下, 算符不包含时间, 考虑坐标算符的本征态  $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ , 在 Heisenberg Pic 下, Heisenberg Pic 下的坐标算符是  $\hat{q}^H(t) = e^{i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} q e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}}$ , Heisenberg Pic 下的坐标算符本征态写为

$$|q, t\rangle \equiv e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar} H} |q\rangle \Rightarrow \hat{q}^H(t)|q, t\rangle = e^{i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} q e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar} H} |q\rangle = q|q, t\rangle. \quad (5.1)$$

路径积分的起点是 Heisenberg 坐标算符  $\hat{q}(t)$  本征态的内积: $\langle q', t' | q, t \rangle$  这个内积有一个名字叫做 Feynman kernel. Feynman kernel 的一个重要的性质在于他相当于一个薛定谔方程的解。

$$\psi(q', t') = \langle q', t' | \Psi \rangle_H = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \Psi \rangle_H = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \psi(q, t) \quad (5.2)$$

上面的式子中的波函数的内积表达式用到了这个性质:

$$\begin{cases} \text{Schrodinger picture: } |\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \quad Q|q\rangle = q|q\rangle \quad \psi(q, t) = \langle q|\alpha, t\rangle \\ \text{Heisenberg picture: } |\alpha\rangle = |\alpha, t_0\rangle \quad Q(t) = U^\dagger(t, t_0)QU(t, t_0) \quad Q(t)U^\dagger(t, t_0)|q\rangle = qU^\dagger(t, t_0)|q\rangle \Rightarrow |q, t\rangle = U^\dagger(t, t_0)|q\rangle \\ \text{In all: } \langle q, t|\alpha\rangle = \langle q|\alpha, t\rangle = \psi(q, t) \end{cases} \quad (5.3)$$

**Path Integral** 实际上 Feynman kernel 可以写为泛函积分的表达形式:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p\dot{q} - H(p, q))\right] \\ &\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q \\ &\int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p \end{aligned} \quad (5.4)$$

Feynman kernel 泛函积分表达式的推导, 以及  $q_n$  和  $p_n$  的定义:

在  $t'$  和时间  $t$  之间插入  $N-1$  个点, 实际上相当于把时间分成了  $N$  小份。然后利用 Heisenberg 绘景下的坐标本征态的归一化关系。

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \langle q', t' | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2} \rangle \langle q_{N-2}, t_{N-2} | \dots q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle \quad (5.5)$$

考虑:(严格来说, 其中的  $H$  是 schrodinger 绘景中的算符)

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{i\hat{H}(t_n - t_{n+1})/\hbar} | q_n \rangle \quad (5.6)$$

然后需要用到泰勒展开, 将指数展开到一阶项:

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | 1 + i\hat{H}(t_n - t_{n+1})/\hbar | q_n \rangle \quad (5.7)$$

插入 Schrodinger 绘景中的动量本征态算符, 如果  $\hat{H}$  中的  $\hat{p}$  和  $\hat{q}$  都是独立的(如果是独立的, 那么就可以把  $\hat{p}$  和  $\hat{q}$  分开来写, 如果不是独立的, 就要涉及到 weyl's operator ordering, 这个后面再说)

$$\begin{aligned} \langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \langle q_{n+1} | 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} \hat{H} | q_n \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} \hat{H} | q_n \rangle \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | q_n \rangle \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_n}{\hbar}(q_{n+1} - q_n)} \left(1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

按照上面的展开方法, Feynman Kernel 于是可以写成:

$$\begin{aligned}\langle q', t' | q, t \rangle &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_{N-1} \dots dp_0 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{p_n}{\hbar} (q_{n+1} - q_n)} \left( 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n) \right) \\ &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_N \dots dp_0 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{N-1} e^{i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n}{\hbar} (q_{n+1} - q_n)} \prod_{n=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n) \right)\end{aligned}\quad (5.9)$$

有一个数学上的式子可以把连乘转换为 e 指数上面的求和算符,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^{N-1} (1 + x_n/N) = \exp(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x_n/N) \quad (5.10)$$

这样,Feynman kernel 就可以写为路径积分的形式:

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_{N-1} \dots dq_1 \int dp_{N-1} \dots dp_0 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(p(\tau), q(\tau)))} \quad (5.11)$$

用泛函积分的语言表达就是:

$$\begin{aligned}\langle q', t' | q, t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p \dot{q} - H(p, q)) \right] \\ &\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q \\ &\int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p\end{aligned}\quad (5.12)$$

## 5.1 Feynman's Path Integral

Feynman's Path Integral 指动能项是动量的平方项时, 路径积分可以简化, 并且可以看到和 Action 作用量之间的联系。

观察上面的5.8, 我们在这里把他写为:

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{i \frac{p_n}{\hbar} (q_{n+1} - q_n)} e^{-\frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} H(p_n, q_n)} \quad (5.13)$$

我们考虑哈密顿量中的动量是二次型的形式:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (5.14)$$

于是可以改写 Feynman kernel 的计算:

$$\begin{aligned}\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1} - t_n)(p_n^2 - 2 \frac{m(q_{n+1} - q_n)p_n}{t_{n+1} - t_n})} e^{-\frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} V(q_n)} \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1} - t_n)(p_n - \frac{m(q_{n+1} - q_n)}{t_{n+1} - t_n})^2 + \frac{i}{2m\hbar} (t_{n+1} - t_n)m^2 (\frac{q_{n+1} - q_n}{t_{n+1} - t_n})^2} e^{-\frac{i(t_{n+1} - t_n)}{\hbar} V(q_n)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi 2m\hbar}{i(t_{n+1} - t_n)}} e^{\frac{i}{\hbar} (t_{n+1} - t_n) (\frac{q^2}{2m} - V(q))}\end{aligned}\quad (5.15)$$

于是 Feynman kernel 就写为了 Feynman Path Integral 的形式:

$$\begin{aligned}\langle q', t' | q, t \rangle &= \left( \frac{2i\pi\hbar\epsilon}{m} \right)^{-(N-1)/2} \int dq_{N-1} \dots dq_1 e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (\frac{q^2}{2m} - V(q))} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} W(q, \dot{q})}\end{aligned}\quad (5.16)$$

其中  $W$  就可以理解为作用量。

## 5.2 多个粒子的 Feynman Kernel 和多个粒子的 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式

首先考虑多个粒子的 Feynman Kernel, 和单粒子一样, 我们给中间插入了 N 个时间间隔。...emmm 这个排版好乱....

$$\langle q'_1, q'_2 \dots q'_D, t' | q_1, q_2 \dots q_D, t \rangle = \int dq_{1(1)} \dots dq_{D(1)} dq_{1(2)} \dots dq_{D(2)} \dots \dots dq_{1(N-1)} \dots dq_{D(N-1)} \quad (5.17)$$

$$\langle q'_1, q'_2 \dots q'_D, t' | q_{1(N-1)} \dots q_{D(N-1)}, t_{N-1} \rangle \langle q_{1(N-1)} \dots q_{D(N-1)}, t_{N-1} | \dots \langle q_{1(1)} \dots q_{D(1)}, t_1 | q_1, q_2 \dots q_D, t \rangle$$

和单粒子的 Feynman kernel 一样, 我们关注, 其中时间相邻的两项之间的 Heisenberg 坐标本征态之间的内积:

$$\begin{aligned} \langle q_{1(n+1)} \dots t_{n+1} | q_{1(n)} \dots t_n \rangle &= \langle q_{1(n+1)} \dots | e^{-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)/\hbar} | q_{1(n)} \dots \rangle \\ &= \int dp_{1(n)} dp_{2(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D \langle q_{1(n+1)} \dots | p_{1(n)} \dots \rangle \langle p_{1(n)} \dots | e^{-i\hat{H}(t_{n+1}-t_n)/\hbar} | q_{1(n)} \dots \rangle \\ &= \int dp_{1(n)} dp_{2(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D \langle q_{1(n+1)} \dots | p_{1(n)} \dots \rangle \langle p_{1(n)} \dots | q_{1(n)} \dots \rangle e^{-iH(p_{(n)}, q_{(n)})(t_{n+1}-t_n)/\hbar} \\ &= \int dp_{1(n)} \dots \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D e^{\frac{i}{\hbar} [\sum_{\alpha=1}^D p_{\alpha(n)}(q_{\alpha(n+1)} - q_{\alpha(n)}) - H(p_n, q_n)(t_{n+1}-t_n)]} \end{aligned} \quad (5.18)$$

这样, Feynman Kernel 可以写成泛函积分的形式:

$$\begin{aligned} \langle q'_1 \dots t' | q_1 \dots t \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau (\sum_{\alpha=1}^D p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(p(\tau), q(\tau)))} \\ \mathcal{D}q &= dq_{1(1)} \dots dq_{D(1)} \dots \dots dq_{1(N-1)} \dots dq_{D(N-1)} \\ \mathcal{D}p &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^D dp_{1(0)} \dots dp_{D(0)} \dots \dots dp_{1(N-1)} \dots dp_{D(N-1)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

当哈密顿量中的动量是二次型时, 可以把 Path Integral 写为坐标的路径积分形式。得到多粒子 Feynman Kernel 的 Feynman 路径积分表达式.

结论是:( $\epsilon$  是“路径”中插入时间片段的长度)

如果系统的拉格朗日量可以写为:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + b(q)^T \dot{q} - V(q) \quad (5.20)$$

那么按照 legendre 变换, 可以用速度和位置定义一个动量:

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = M_{\alpha\beta} \dot{q}_{\beta} + b_{\alpha} \quad (5.21)$$

继而可以用动量和坐标表示速度, 然后得到一个 Hamilton 量, 或者说 Hamilton 算符。

总之, 计算后的 Feynman kernel 是下面的形式。Grenier 书里讲的比较详细。

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (i2\pi\epsilon\hbar)^{-\frac{ND}{2}} \int \prod_{\alpha=1}^{D-1} \prod_{n=1}^{N-1} dq_{\alpha n} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + b^T \dot{q} - V(q) - \frac{i\hbar}{2} \delta(0) \text{Tr} M(q)\right)\right) \quad (5.22)$$

计算上面的式子时候用到了变量代换, 和多维高斯积分 Gauss Integration 的技巧。先不详细写过程了。

这里后面算一下, 我不是很清楚  $\delta 0$  是怎么出来的, 不过这个问题好像不是很紧急

## 5.3 用 Time ordered Product 表示 N-Point Function

n-Point Function 是这样定义的:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | 0 \rangle &= \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \frac{\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_3) \dots] | q, t \rangle}{\langle q', t' | q, t \rangle} \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \frac{\int \mathcal{D}q q(t_1) q(t_2) q(t_3) \dots \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} L(q, \dot{q}) dt\right]}{\int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} L(q, \dot{q}) dt\right]} \end{aligned} \quad (5.23)$$

下面是关于这个式子的推导

### 证明

$$\begin{aligned}
 & \langle q', t' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)\dots] | q, t \rangle \\
 &= \sum_{n,n'} \langle q', t' | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | q, t \rangle \\
 &= \sum_{n,n'} \langle q' | e^{-i\hat{H}t'/\hbar} | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | e^{i\hat{H}t/\hbar} | q \rangle \\
 &= \sum_{n,n'} e^{-iE_{n'}t'/\hbar} e^{iE_n t/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle \langle n | q \rangle \\
 &= \sum_{n,n'} e^{-i(E_{n'}t' - E_n t)/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n | q \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

分别取  $t, t'$  极限

$$\text{上式} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t' \rightarrow -\infty} \sum_{n,n'} e^{-i(E_{n'}t' - E_n t)/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n | q \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle \tag{5.25}$$

给时间变量加入虚数，这样可以将求和变为只有能量最低态

$$\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)\dots] | q, t \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty e^{-i\delta}} \lim_{t' \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} \sum_{n,n'} e^{-i(E_{n'}t' - E_n t)/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n | q \rangle \langle n' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | n \rangle, \tag{5.26}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty e^{-i\delta}} \lim_{t' \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} e^{-i(E_0 t' - E_0 t)/\hbar} \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)] | 0 \rangle, \tag{5.27}$$

类似的，可以考虑

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \sum_{n,n'} \langle q', t' | n' \rangle \langle n' | n \rangle \langle n | q, t \rangle \tag{5.28}$$

$$= \sum_{n,n'} \langle q' | e^{-i\hat{H}t'/\hbar} | n' \rangle \langle n' | n \rangle \langle n | e^{i\hat{H}t/\hbar} | q \rangle \tag{5.29}$$

$$= \sum_{n,n'} e^{-iE_{n'}t'/\hbar} e^{iE_n t/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n' | n \rangle \langle n | q \rangle \tag{5.30}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty e^{-i\delta}} \lim_{t' \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} \sum_{n,n'} e^{-i(E_{n'}t' - E_n t)/\hbar} \langle q' | n' \rangle \langle n | q \rangle \langle n' | n \rangle, \tag{5.31}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty e^{-i\delta}} \lim_{t' \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} e^{-i(E_0 t' - E_0 t)/\hbar} \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle \langle 0 | 0 \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty e^{-i\delta}} \lim_{t' \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} e^{-i(E_0 t' - E_0 t)/\hbar} \langle q' | 0 \rangle \langle 0 | q \rangle. \tag{5.32}$$

于是

$$\langle q', t' | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)\dots] | q, t \rangle = \langle q', t' | q, t \rangle \langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\dots] | 0 \rangle \tag{5.33}$$

□

上面的推导中，暗含了 Hamiltonian 不含时间，于是能量本征态是定态。同时，我们采取的操作是让时间中含有一个负的虚部，他同理于  $H \rightarrow H(1 - i\epsilon)$ (是 Srednicki 中的做法)。这个技巧叫做 epsilon trick.

## 5.4 Vacuum Persistence Amplitude $W[J]$ 或者叫做 vacuum-vacuum amplitude

$W[J]$  是这样定义的：

$$\begin{aligned}
 W[J] &\triangleq \langle 0 | 0 \rangle_J = \lim_{t' \rightarrow -i\tau', t \rightarrow -i\tau} |_{\tau \rightarrow +\infty, \tau' \rightarrow -\infty} \frac{\langle q' t' | q, t \rangle_J}{\langle q', t' | q, t \rangle} \\
 &= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^+ dt (L(q, \dot{q}) + J(t)q)\right]
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

#### 5.4 Vacuum Persistence Amplitude $W[J]$ 或者叫做 vacuum-vacuum amplitude

---

同样的，计算过程给省略了。。。 $\mathcal{N}'$  需要满足的条件是  $W[0] = 1$

可以用 vacuum-vacuum amplitude 来计算 N-point Function:

$$\langle 0 | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_3)\dots] | 0 \rangle = (\frac{\hbar}{i})^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)} \quad (5.35)$$

这里是在 Grenier P356

## 第六章 场论中的路径积分方法

### 6.1 vacuum-vacuum transition functional 和 Green functions(ie. 相当于 n-point Function)

$$W[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x (L(\phi, \dot{\phi}) + J(t, x)\phi)\right] \quad (6.1)$$

$$\langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\dots] | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \quad (6.2)$$

需要知道的是上面的坐标是四维的。

### 6.2 利用 Wick Rotation 得到 Euclidian Field Theory, Propagator

Wick Rotation 有正逆。 $x \rightarrow x_E$  和  $p_E \rightarrow p$  用的是正向的，另外两个是逆向的。有一些性质比如: $x_E^2 = -x^2$ ,  $p_E^2 = -p^2$ ,  $p_E \cdot x_E = Et + \vec{p} \cdot \vec{x}$

p375 12.3 The Feynman Propagator

第一个是把时间坐标变到虚数。首先定义一个变量  $x_4$

$$x_4 = ix_0 = it \quad (6.3)$$

在取了这个变换后，如果一个式子里面有对时空的积分，然后我们想把对空间部分的积分化为  $x_4$  的积分，这样时空体积元就变成了  $-id^4x_E$ 。这里的  $x_E$  就是 Euclidian 欧几里得空间中的向量，写成分量的形式就是  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  但是注意，这个时候的  $x_4$  的积分范围实际上本来应该是从  $-i\infty$  到  $+i\infty$ 。但是 Wick Rotation 这个操作告诉我们， $x_4$  的积分范围是  $-\infty \rightarrow +\infty$ 。虽然很没有道理，但是就是这样的。

第二个是在能动量空间中把能量做了一个变量替换

$$p_4 = -ip_0 = -iE \quad (6.4)$$

对于动量的 WickRotation。生成一个 Euclidian momentum.  $p_E = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ . 如果一个式子中如果有对于能动量空间的积分，那么能动量体积元应该有一个变化从  $d^4p$  变成  $id^4p_E$ 。而且在变换后， $p_4$  的积分范围应该是从  $+i\infty$  到  $-\infty$ 。但是 Wick Rotation 告诉我们， $p_4$  的积分范围是  $-\infty \rightarrow +\infty$

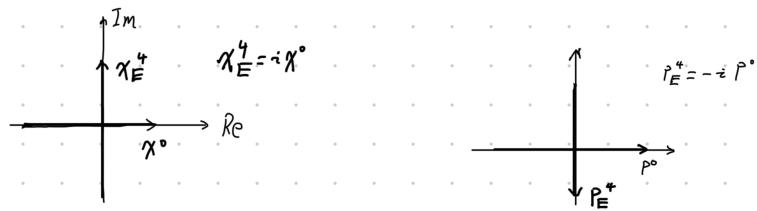


图 6.1: WickRotation

有了这个知识，我们可以写出来 Euclidian vacuum functional. 实际上就是 vacuum-vacuum transition functional 做了一个 wick rotation 的结果。

$$W[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x (L(\phi, \dot{\phi}) + J(t, x)\phi)\right] \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} x_E^4 = ix^0 \rightarrow x^0 = -ix_E^4 \\ d^4x_E = id^4x \rightarrow d^4x = -id^4x_E \\ \text{Wick Rotation: } x_E \text{ 的积分区间从 } (-i\infty, +\infty) \text{ 变为 } (-\infty, +\infty) \\ \text{其他函数的变换写为: } \phi(x_E) = \phi(\vec{x}, -ix_E^4) \end{cases} \quad (6.6)$$

$$W_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ +\frac{1}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x_E \left( L(\phi, i\frac{\partial\phi}{\partial x_4}) + J\phi \right) \right] \quad (6.7)$$

如果考虑把拉格朗日量的具体形式带入:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\hbar^2 \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2 \quad (6.8)$$

$$W_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{-}^{+} d^4x_E \left( \frac{1}{2}(\hbar^2 \partial_{E\mu}\phi \partial_{E\mu}\phi + m^2\phi^2) + V(\phi) - J\phi \right) \right] \quad (6.9)$$

接下来讨论场的相互作用可以忽略的情况，就是说  $V(\phi) = 0$ , 在这个情况下一般式子上面会带一个 0.

比如说我们考虑 Euclidian Vacuum Functional

$$W_0^E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ -\int_{-}^{+} d^4x_E \left( \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar}(\hbar^2 \partial_{E\mu}\phi \partial_{E\mu}\phi + m^2\phi^2) - \frac{1}{\hbar}J\phi \right) \right] \quad (6.10)$$

现在我们知道 D 维高斯积分 Gauss integration. (上面的形式很像, 实际上他是无穷维的 Gauss Integration.)

$$\int d^Dv \exp \left[ -\frac{1}{2}v^T A v + \rho^T v \right] = (2\pi)^{D/2} \exp \left[ -\frac{1}{2}Tr \ln A \right] \exp \left[ \frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho \right] \quad (6.11)$$

无穷维的线性代数是这样的

$$A(x'_E, x_E) = \frac{1}{\hbar}(\hbar^2 \partial'_{E\mu} \partial_{E\mu} + m^2)\delta^{(4)}(x'_E - x_E) \quad (6.12)$$

稍微说一下这个  $A(x'_E, x_E)$ . 他里面的微分算符是作用在 delta 函数上面的。 $\int (\partial_x \delta(x)) \phi(x) dx = \Delta[\delta(x)\phi(x)]|_{-}^{+} - \int \phi'(x)\delta(x) dx$ . 这样, 他就满足性质:

$$\int d^4x'_E d^4x_E \phi(x'_E) A(x'_E, x_E) \phi(x_E) = \int d^4x_E \frac{1}{2}\frac{1}{\hbar}(\hbar^2 \partial_{E\mu}\phi \partial_{E\mu}\phi + m^2\phi^2) \quad (6.13)$$

并且, 观察发现。

$$\rho = \frac{J(x_E)}{\hbar} \quad (6.14)$$

这样, 如果忽略掉常数部分 (毕竟他们总会被归一化掉), Euclidian Vacuum Functional 就可以写成:

$$W_0^E[J] = \exp \left[ \int d^4x'_E d^4x_E \frac{1}{2} \frac{J(x'_E)}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E) \frac{J(x_E)}{\hbar} \right] \quad (6.15)$$

现在说一个数学上的技巧。考虑一个无穷维的矩阵 A. 定义一个多项式

$$f(A) = \sum_n C_n A^n \quad (6.16)$$

把这个式子写开就涉及到所说的无穷维矩阵之间的乘法了。

$$f(A) = C_0 + C_1 A(x', x) + \int dx_1 C_2 A(x', x_1) A(x_1, x) \dots \quad (6.17)$$

然后如果说  $A(x', x)$  只和  $x' - x$  有关系, 那么他的傅立叶展开表达式是这个样子

$$A(x', x) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] \tilde{A}(k) \quad (6.18)$$

这样的话我们发现

$$\begin{aligned} \int dx_1 A(x', x_1) A(x_1, x) &= \int dx_1 \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \exp[ik(x' - x_1)] \exp[ik'(x_1 - x)] \tilde{A}(k) \tilde{A}(k') \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] (\tilde{A}(k))^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

这件事情告诉我们

$$f(A) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] f(\tilde{A}(k)) \quad (6.20)$$

通过直接计算，也能得到  $A^{-1} = \int \frac{dk}{2\pi} \exp[ik(x' - x)] \tilde{A}(k)^{-1}$

现在回到拉格朗日量中无穷维矩阵  $\mathbf{A}$  的表达式：

$$\begin{aligned} A(x'_E, x_E) &= \frac{1}{\hbar} (\hbar^2 \partial'_{E\mu} \partial_{E\mu} + m^2) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \exp[ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{\hbar} (p_E^2 + m^2) \exp[ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \end{aligned} \quad (6.21)$$

上面的式子其实可以看出  $\mathbf{A}$  在做完傅立叶变换后的结果。简单地对傅立叶变换后的结果取一个倒数。

$$A^{-1}(p_E) = \frac{\hbar}{p_E^2 + m^2} \quad (6.22)$$

$$A^{-1}(x'_E, x_E) = \int d^4 p_E \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{\hbar}{p_E^2 + m^2} \exp[ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \quad (6.23)$$

于是：

$$\begin{aligned} \int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2} \frac{J(x'_E)}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E) \frac{J(x_E)}{\hbar} \\ = \int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2} \frac{J(x'_E)}{\hbar} \int d^4 p_E \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{\hbar}{p_E^2 + m^2} \exp[ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \frac{J(x_E)}{\hbar} \end{aligned} \quad (6.24)$$

可以定义 Euclidean Feynman Propagator 为：

$$\begin{aligned} \Delta_F^E(x'_E - x_E) &= \frac{1}{\hbar} A^{-1}(x'_E, x_E) \\ &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2} \exp[ip_E(x'_E - x_E)/\hbar] \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\text{上式} = \int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2\hbar} J(x'_E) \Delta_F^E(x'_E - x_E) J(x_E) \quad (6.26)$$

认为现在的积分是 WickRotation 后的结果，想要还原成 WickRotation 前的结果。产生 Feynman Propagator：(下面式子的等式左边为什么有一个  $i$  呢，可以把它理解为定义。就是我定义他是  $i\Delta_F$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} p_E^4 = -ip_0 \rightarrow d^4 p_E = -id^4 p \quad p_E^2 = -p^2 \\ x_E^4 = ix^0 \rightarrow d^4 x_E = id^4 x \\ p_E x_E = -p \cdot x \end{array} \right. \quad (6.27)$$

积分范围还原为 Rotation 前:  $p_E^4 : (-\infty, +\infty) \rightarrow (+i\infty, -i\infty) \Rightarrow p^0 : (-\infty, +\infty)$   
 积分范围还原为 Rotation 前:  $x_E^4 : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-i\infty, +i\infty) \Rightarrow x^0 : (-\infty, +\infty)$

$$\text{上式} = - \int d^4 x' d^4 x \frac{1}{2} \frac{J(x')}{\hbar} \int id^4 p \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{\hbar}{-p^2 + m^2} \exp[-ip(x' - x)/\hbar] \frac{J(x)}{\hbar} \quad (6.28)$$

可以定义

$$\begin{cases} i\Delta_F(x' - x) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{-p^2 + m^2} \exp[-ip(x' - x)/\hbar] \\ = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \exp[-ip(x' - x)/\hbar] \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\text{上式} = - \int d^4 x' d^4 x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x) \quad (6.30)$$

这样, Vacuum Functional 就有 Euclidian 和 Minkovski 两种写法

$$\begin{aligned} W_0^E[J] &= \exp \left[ \int d^4 x'_E d^4 x_E \frac{1}{2\hbar} J(x'_E) \Delta_F^E(x'_E - x_E) J(x_E) \right] \\ W_0[J] &= \exp \left[ - \int d^4 x' d^4 x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x) \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

## 6.3 直接做动量变换的方法得到真空生成函数(不用上一部分说的 wick 转动)

这一子节用的是 Srednicki 的记号。需要计算的函数是:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right] \quad (6.32)$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (6.33)$$

关键在于计算积分:

$$S_0 = \int d^4 x \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + J\varphi \right) \quad (6.34)$$

Lorentz 变化:

$$\begin{cases} \varphi(k) = \int d^4 x e^{ikx} \varphi(x) \\ \varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \varphi(k) \\ \partial^\mu \varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ik^\mu) e^{-ikx} \varphi(k) \\ \partial_\mu \varphi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ik^\mu) e^{-ikx} \varphi(k) \end{cases} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4 x d^4 k d^4 k' \left( \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^8} (-k^\mu k'_\mu) e^{-i(k+k')x} \varphi(k) \varphi(k') - \frac{1}{2} m^2 \frac{1}{(2\pi)^8} \varphi(k) \varphi(k') e^{-i(k+k')x} + \frac{1}{(2\pi)^8} J(k) \varphi(k') e^{-i(k+k')x} \right) \\ &= \int d^4 k d^4 k' \left( \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} (-k^\mu k'_\mu) \delta^{(4)}(k+k') \varphi(k) \varphi(k') - \frac{1}{2} m^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \varphi(k) \varphi(k') \delta^{(4)}(k+k') + \frac{1}{(2\pi)^4} J(k) \varphi(k') \delta^{(4)}(k+k') \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( -\varphi(k) (-k^2 + m^2) \varphi(-k) + J(k) \varphi(-k) + J(-k) \varphi(k) \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

积分变化:

$$\begin{cases} \chi(k) = \varphi(k) + \frac{J(k)}{k^2 - m^2} \end{cases} \quad (6.37)$$

$$S_0 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( - \left( \chi(k) - \frac{J(k)}{k^2 - m^2} \right) (-k^2 + m^2) \left( \chi(-k) - \frac{J(-k)}{k^2 - m^2} \right) + J(k) \left( \chi(-k) - \frac{J(-k)}{k^2 - m^2} \right) + J(-k) \varphi(k) \left( \chi(k) - \frac{J(k)}{k^2 - m^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( (k^2 - m^2) \chi(k) \chi(-k) + J(k) J(-k) \frac{1}{k^2 - m^2} - \chi(k) J(-k) - J(k) \chi(-k) \right. \\ &\quad \left. + J(k) \chi(-k) + J(-k) \chi(k) - \frac{J(k) J(-k)}{k^2 - m^2} - \frac{J(-k) J(k)}{k^2 - m^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( - \frac{J(k) J(-k)}{k^2 - m^2} + (k^2 - m^2) \chi(k) \chi(-k) \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

于是:

$$Z_0[J] \propto \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( - \frac{J(k) J(-k)}{k^2 - m^2} + (k^2 - m^2) \chi(k) \chi(-k) \right) \right] \quad (6.39)$$

归一化条件认为:

$$\{Z_0[0] = 1\} \quad (6.40)$$

于是得到结果

$$Z_0[J] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( - \frac{J(k) J(-k)}{k^2 - m^2} \right) \right] \quad (6.41)$$

定义(Feynman Propagator),  $H \rightarrow H(1 - i\epsilon)$  导致了  $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$  (这是在联系多点关联函数和 Feynman Kernel 时用到的性质。)

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (6.42)$$

直接计算:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 x' J(x) \Delta(x - x') J(x') &= \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 x' d^4 k d^4 k' d^4 k'' \frac{1}{(2\pi)^{12}} J(k) e^{-ikx} \Delta(k') e^{-ik'(x-x')} J(k'') e^{-ik''x'} \\ &= \frac{i}{2} \int d^4 k d^4 k' d^4 k'' \frac{1}{(2\pi)^4} J(k) \Delta(k') J(k'') \delta^{(4)}(k + k') \delta^{(4)}(k'' - k') \\ &= \frac{i}{2} \int d^4 k \frac{1}{(2\pi)^4} J(k) \Delta(k) J(-k) \end{aligned} \quad (6.43)$$

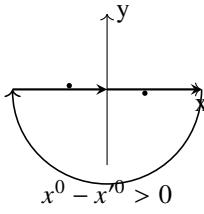
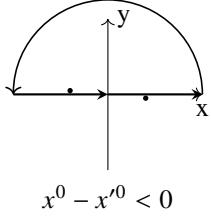
于是:

$$Z_0[J] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 x' J(x) \Delta(x - x') J(x') \right] \quad (6.44)$$

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (6.45)$$

传播子的 Bessel 积分表达 考虑传播子的形式:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} &= \int dk^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \theta(x^0 - x'^0) \int dk^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{-\left(k^0 - \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} + i\epsilon'\right) \left(k^0 + \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} - i\epsilon'\right)} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &\quad + \theta(x'^0 - x^0) \int dk^0 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^0(x^0 - x'^0)}}{-\left(k^0 - \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} + i\epsilon'\right) \left(k^0 + \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} - i\epsilon'\right)} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} \end{aligned} \quad (6.46)$$



按照上面的积分路径，将积分范围扩展为了一个闭合围道。用留数定理，得到：

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} &= \theta(x^0 - x'^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} (-i2\pi) \frac{e^{-i\omega(x^0 - x'^0)}}{-2\omega} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &\quad + \theta(x'^0 - x^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} (+i2\pi) \frac{e^{+i\omega(x^0 - x'^0)}}{2\omega} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \theta(x^0 - x'^0) \int i d\tilde{k} e^{-ikx} + \theta(x'^0 - x^0) \int i d\tilde{k} e^{+ikx} \end{aligned} \quad (6.47)$$

其中

$$\left\{ d\tilde{k} = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 (2\omega)}, \quad k = (\omega, \vec{k}) = (\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \vec{k}) \right. \quad (6.48)$$

总的来说：

$$\Delta(x - x') = \theta(x^0 - x'^0) \int i d\tilde{k} e^{-ik(x-x')} + \theta(x'^0 - x^0) \int i d\tilde{k} e^{+ik(x-x')} \quad (6.49)$$

## 6.4 有相互作用场的 Generating Function 和 Vacuum Functional

首先定义有相互作用场的 Vacuum Functional.

我们首先写出他的拉格朗日量：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g V(\phi) \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} W[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[- \int d^4 x \frac{i}{\hbar} g V(\phi)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \exp\left[- \int d^4 x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right] \\ &= \mathcal{N} \exp\left[- \int d^4 x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \end{aligned} \quad (6.51)$$

归一化系数是为了当  $J$  为 0 的时候可以把 Vacuum Functional 变成 1。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1} &= \exp\left[- \int d^4 x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]|_{J=0} \\ &= \exp\left[- \int d^4 x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J]|_{J=0} \end{aligned} \quad (6.52)$$

接下来定义 n-Point Green Function

$$G^{(n)}(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (6.53)$$

## 6.5 Feynman 图

反正就是把  $W[J]$  展开了，然后用图像表示积分，同样的，也把 n-point Function G 展开并且用图像表示了。。。还是找个例子演示一下这个方法画 Feynman 图吧.... 标量场的 Feynman 图当然。

需要知道，这样生成的 Green Function 是没有真空图像的，这一点是因为  $W[J]|_{J=0} = 1$ 。由于他的归一化条件，使得他不能有真空图，不然就成无穷大了。(这一点在 Schwinger-Dyson Function 的方法中也能看出来)

(Grenier P384 12.5 Generating function for interacting fields)

问题的核心在于有相互作用场的 Vacuum Functional, 其中  $W_0[J]$  是真空, 没有相互作用场的 Vacuum Functional.

$$W[J] = \mathcal{N} \exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \quad (6.54)$$

注意上面这个式子的 R.H.S 的后面两项, 可以对他们进行小量展开

$$\exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] = W_0[J](1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots) \quad (6.55)$$

实际上, 直接展开就可以得到相应的展开泛函。

$$u_1[J] = W_0[J]^{-1} \left( -\int d^4x \frac{i}{\hbar} V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right) \right) W_0[J] \quad (6.56)$$

$$u_2[J] = \frac{1}{2} W_0[J]^{-1} \left( -\int d^4x \frac{i}{\hbar} V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right) \right)^2 W_0[J] \quad (6.57)$$

这样, 我们就可以进一步展开有 Interaction Field 的 Vacuum Functional.

$$W[J] = W_0[J](1 + gw_1[J] + g^2 w_2[J] \dots) = \frac{W_0[J](1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots)}{W_0[0](1 + gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots)} \quad (6.58)$$

当然,  $W_0[0] = 1$

对应的, 可以写出 Vacuum Functional 的小量形式:

$$W[J] = W_0[J](1 + gu_1[J] + g^2 u_2[J] \dots) \left( 1 - (gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots) + (gu_1[0] + g^2 u_2[0] \dots)^2 \dots \right) \quad (6.59)$$

把上面的式子展开到二阶:

$$W[J] = W_0[J] \left( 1 + g(u_1[J] - u_1[0]) + g^2 ((u_1[0] - u_1[J])u_1[0] + u_2[J] - u_2[0]) \right) \quad (6.60)$$

写的再明确一点就是

$$w_1[J] = u_1[J] - u_1[0] \quad (6.61)$$

$$w_2[J] = (u_1[0] - u_1[J])u_1[0] + u_2[J] - u_2[0] \quad (6.62)$$

通过前面无穷维高斯积分的性质, 把 non Interaction Vacuum Functional 写成了这个形式

$$W_0[J] = \exp\left[-\int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x)\right] \quad (6.63)$$

并且 vacuum propagator 可以写成这个形式

$$\mathcal{N} \exp\left[-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g V\left(\frac{\hbar\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] W_0[J] \quad (6.64)$$

然后我们计算上面式子 Vacuum Propagator 的把 e 指数展开到一阶后对 non-interacting Vacuum Propagator 的作用效果是这样的。

Grenier p393 12.6 Green Function in Momentum Space

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \exp\left[-\int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x)\right] \\ &= \left(3\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \Delta_F(0) \Delta_F(0) - 6\frac{\hbar}{i} \left(\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x)\right)^2 \Delta_F(0) + \left(\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x)\right)^4\right) \exp[\dots] \end{aligned} \quad (6.65)$$

然后我们考虑这个。

$$-\int d^4x \frac{i}{\hbar} g \frac{1}{4!} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 W_0[J] \quad (6.66)$$

实际上, 这个东西最后是这样的:

$$\int d^4x g \frac{1}{4!} \left( -3\frac{\hbar}{i} \Delta_F(0) \Delta_F(0) + 6\left(\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x)\right)^2 \Delta_F(0) - \frac{i}{\hbar} \left(\int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x)\right)^4 \right) W_0[J] \quad (6.67)$$

实际上, 已经发现了,  $u_1[J]$  就是上面的式子除以  $W_0[J]$ . 刚好把最后一项给除掉了。

按照前面的说法, 于是可以定义  $w_1[J] = u_1[J] - u_0[J]$ , 这样刚好可以减去 Feynman Propagator 在 0 的取值。

$$w_1[J] = \int d^4x g \frac{1}{4!} \left( 6 \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^2 \Delta_F(0) - \frac{i}{\hbar} \left( \int d^4x' J(x') \Delta_F(x' - x) \right)^4 \right) \quad (6.68)$$

这个式子一般这么写 (一般会提出来一个因子)。

$$\begin{aligned} & - \int d^4x g \frac{i}{\hbar} \frac{1}{4!} \left( 6i\hbar \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x_2) \Delta_F(x_2 - x) \right) \Delta_F(0) + \right. \\ & \left. \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x') \Delta_F(x_2 - x) \right) \left( \int d^4x_3 J(x_3) \Delta_F(x_3 - x) \right) \left( \int d^4x_4 J(x_4) \Delta_F(x_4 - x) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.69)$$

当然, 如果想要用它来表示  $W[J]$  的话就是这样的:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \int d^4x g \frac{i}{\hbar} \frac{1}{4!} \left( 6i\hbar \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x_2) \Delta_F(x_2 - x) \right) \Delta_F(0) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \int d^4x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x) \right) \left( \int d^4x_2 J(x') \Delta_F(x_2 - x) \right) \left( \int d^4x_3 J(x_3) \Delta_F(x_3 - x) \right) \left( \int d^4x_4 J(x_4) \Delta_F(x_4 - x) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \dots \right) \exp \left[ - \int d^4x' d^4x \frac{i}{2\hbar} J(x') \Delta_F(x' - x) J(x) \right] \right) \end{aligned} \quad (6.70)$$

如果用图来表示他是这样的。

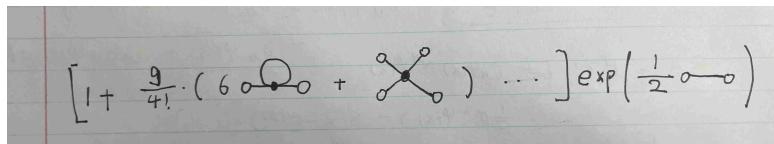


图 6.2: phi4 理论

然后我们可以总结一下标量场的 Feynman 规则。.

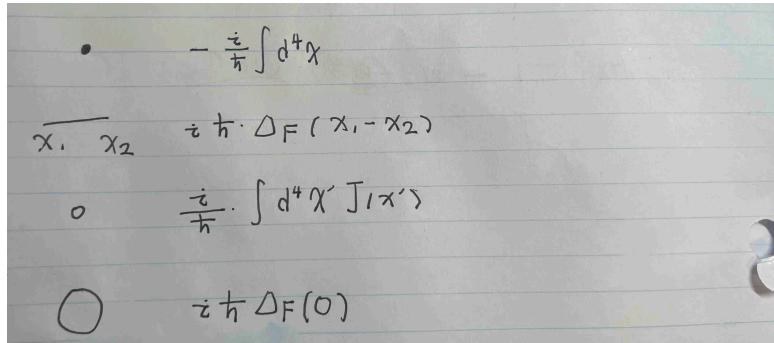


图 6.3: 标量场的 Feynman Rules

然后根据泛函求导可以算出 n-Point Function:

我们从这一步开始就看着 Feynman 图计算了。计算方法是考虑到:

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left( \frac{i}{\hbar} \int d^4x' J(x') \dots \right) \right) = \int d^4x' \delta(x' - x_1) \dots = \dots|_{x_1} \quad (6.71)$$

按照这个规则, 我们分别画出 2-point Function, 4-point Function 的在  $J=0$  时也不为零的项:

这个图片的位置好丑啊。。

$$G(x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} + g \frac{1}{2} \text{loop}$$

图 6.4: 2-Point Function

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + g \left( \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{p_1} \overline{p_2} + \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{p_1} \overline{p_3} + \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{p_1} \overline{p_4} + \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{p_2} \overline{p_3} + \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{p_2} \overline{p_4} + \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{p_3} \overline{p_4} \right)$$

图 6.5: 4-Point Function

## 6.6 动量空间的 Feynman 图

动量空间的 Green 函数 (Green function in momentum space) 的定义是 (这个来自于 Grenier P391, 12.6 Green Function in momentum space)

$$G^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n)(2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (6.72)$$

在  $\phi^4$  理论中的 2-point Function。把这个 2-point Function 展开到一阶，他都是 connected。具体来讲。用图像表示他就是 6.4。用公式表示他就是：

$$G(x_1, x_2) = i\hbar \Delta_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} g \int \frac{1}{i\hbar} d^4x (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x) (i\hbar) \Delta_F(x - x_2) (i\hbar) \Delta_F(x - x_1) \quad (6.73)$$

然后按照求动量空间的 Green Function 的方法，先观察 0 阶项。我们要求的积分是：

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (6.74)$$

我们的方法是变量代换。具体来说： $x = x_1 - x_2$ ， $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  与  $p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$ ， $P = p_1 + p_2$ 。

先考虑积分的变换。因为从  $x_1, x_2$  变成了  $x, X$ 。会涉及到一个 Jacobi 行列式：

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x, X)} \quad (6.75)$$

有变量代换的规定，可以得到：

$$x_1 = X + \frac{1}{2}x, \quad x_2 = X - \frac{1}{2}x \quad (6.76)$$

得到的 Jacobi 矩阵会是一个  $8 \times 8$  的矩阵。(不是很确定，Jacobi 矩阵的行指标  $i$  应该对应的分子的第  $i$  个元素。)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_{4 \times 4} & 1I_{4 \times 4} \\ -\frac{1}{2}I_{4 \times 4} & 1I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

然后他的行列式是 1 对吧。然后回到积分 6.74。并且能够注意到  $p_1 x_1 + p_2 x_2 = P X + p x$ 。所以这个积分变成了：

$$\int d^4x d^4X e^{i(p x + P X)/\hbar} (i\hbar) \Delta_F(x) \quad (6.78)$$

对  $X$  的积分会得到一个  $\int d^4X e^{iP X/\hbar} = (2\pi\hbar)^4 \delta(P) = (2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2)$  剩下的部分会得到：

$$\int d^4x e^{ip x} (i\hbar) \Delta_F(x) = \frac{i\hbar}{p^2 - m^2} \quad (6.79)$$

于是这个积分是：

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta_F(x_1 - x_2) &= \int d^4X e^{iP X/\hbar} \int d^4x e^{ip x} (i\hbar) \Delta_F(x) = \frac{i\hbar}{p^2 - m^2} (2\pi\hbar)^4 \delta(P) \\ &= i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \end{aligned} \quad (6.80)$$

于是这一部分对于 Momentum Green Function 的贡献就是

$$i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \quad (6.81)$$

然后考虑含有  $g$  的一阶项。具体来讲, 这个积分是:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x \frac{1}{2} g(i\hbar)^2 e^{i(p_1(x_1-x)+p_2(x_2-x)+(p_1+p_2)x)/\hbar} \Delta_F(x_1-x) \Delta_F(x_2-x) \Delta_F(0) \quad (6.82)$$

上面对于  $x_1$  和  $x_2$  的积分可以得到动量空间的 Feynman 传播子 (就是费恩曼传播子的傅立叶变换)。对于  $x$  的积分会生成一个要求动量守恒的东西。

具体来说上面的积分在计算完之后得到的结果会是:

$$\frac{1}{2} g(i\hbar) \Delta_F(p_1)(i\hbar) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{i\hbar} \frac{i\hbar}{k^2 - m^2} (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \quad (6.83)$$

所以说 Momentum 空间的 Green Function 对于两点会是:

$$i\hbar \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) + \frac{1}{2} g(i\hbar) \Delta_F(p_1)(i\hbar) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{1}{i\hbar} (i\hbar) \Delta_F(k) \quad (6.84)$$

所以说动量空间的 Feynman 规则是

- 对于每一个顶点要有  $\frac{1}{i\hbar}$
- 对于每一个顶点要求动量守恒。而且会加入一个因子  $g$ 。
- 对于内线要有积分  $\frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4}$
- 对于一条动量线, 代表的值是  $i\hbar \Delta_F(p)$

但是对于两个点直接连的这种情况其实挺奇怪的。因为他会出来一个  $\Delta_F(\frac{p_1-p_2}{2})$ 。他是没有相互作用时候的动量空间的 Green Function。对于有四个点的动量空间的 Green Function, 没有相互作用时候, 我们知道他是两个点两两相连的。比如说 1-2, 3-4 链接。那么积分就会是这样

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1x_1+p_2x_2)/\hbar} (i\hbar) \Delta(x_1 - x_2) \int d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_3x_3+p_4x_4)/\hbar} (i\hbar) (x_3 - x_4) \quad (6.85)$$

这个积分会导致:

$$(i\hbar)^2 \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \Delta_F(\frac{p_3 - p_4}{2}) (2\pi\hbar)^8 \delta(p_1 + p_2) \delta(p_3 + p_4) \quad (6.86)$$

然后利用 delta 函数的性质:  $\delta(x)\delta(y) = \delta(x+y)\delta(x-y)$  于是上面的结果在经过这个操作后就可以提出来  $(2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$  这样的因子。剩下的就是对四点动量空间的格林函数的贡献。

$$(i\hbar)^2 (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Delta_F(\frac{p_1 - p_2}{2}) \Delta_F(\frac{p_3 - p_4}{2}) \quad (6.87)$$

这个式子挺奇怪的。找不到太多规律, 但是对于 n 点没有相互作用的贡献都可以这样一步步算出来。

## 6.7 irreducible Diagram 和 Effective Action(有效作用量)

需要知道的事这里的  $W[J]$  是 Connected Generating Function. 和前面的  $W[J]$  是不一样的。Grenier 的书里面这个东西叫做  $Z[J]$ , 然后他的定义方式是  $e^{\frac{i}{\hbar} Z[J]} = W[J]$ 。然后  $Z[J]$  作为 Connected Generating Function, 他的生成方式是:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}|_{J=0} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n) \\ &= \sum_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 G_c(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n) \end{aligned} \quad (6.88)$$

上面式子中的  $G_c(x_1 \dots x_n)$  就叫做 n-point connected Green Function。为什么叫做这个呢, 是因为他和普通的 Green Function 相比较起来发现他只有普通 Generating Function 中的相互之间有联系 (不能分割成几个部分)。

然后定义有效作用量。为什么是有效作用量呢, 是因为如果他作为 Generating Function, 那么算出的图是 n-point irreducible Chart. 为什么是不可约呢, 就是说这个图里不能通过剪断一个内线来变成没有链接的 Green Function。所以说是不可约的。

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int J(x)\phi(x)d^4x$$

in which:

$$\phi(x, J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

上面定义的  $\phi$  就出现了一个细节问题。如果  $W[J]$  的图里有一个只有一个端点含有  $J$ 。那么对  $J(x)$  求泛函导数之后这个图里就没有  $J$  了。于是这个图在  $J=0$  时仍然是  $x$  的函数。所以  $J=0$  时的场就叫做平均场  $\bar{\phi}$

From the definition of effective action.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} &= - \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + \int d^4y \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} \phi(y) + J(x) \\ &= - \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + \int d^4y \phi(y) \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x)} + J(x) \\ &= J(x, \phi) \end{aligned} \quad (6.89)$$

As defined:

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}|_{J=0} = \phi(x, J=0)$$

我们知道  $J=0$ 。也就是  $\phi = \bar{\phi}$  时候, 不可约生成函数是 0。

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \Gamma[\phi|J=0] = 0$$

为了让生成函数是  $\phi$  的函数。并且要可以展开, 那么。(零阶是 0)

$$\hat{\Gamma}[\phi] = \Gamma[\phi + \bar{\phi}] - \Gamma[\bar{\phi}]$$

In this case:

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi]}{\delta \phi(x)} = J(x, \phi + \bar{\phi})$$

So:

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi]}{\delta \phi(x)}|_{\phi=0} = J(x, \bar{\phi}) = 0$$

So,  $\hat{\Gamma}$  can be expanded without the first two orders:

$$\hat{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=2} dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} (i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n \hat{\Gamma}}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)}|_{\phi=0} (\frac{1}{i\hbar})^{n-1} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \quad (6.90)$$

Also, as we always do. we expand  $W[J]$  (connected generation function) to series:

$$W[J] = \sum_n \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \frac{1}{n!} (\frac{\hbar}{i})^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}|_{J=0} (\frac{i}{\hbar})^{n-1} J(x_1) \dots J(x_n)$$

n-point irreducible diagram is defined by:

$$\hat{\Gamma}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n \hat{\Gamma}}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)}|_{\phi=0} \quad (6.91)$$

In which n-point connected function:

$$W^{(n)}(x_1, x_2 \dots x_n) = (\frac{\hbar}{i})^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}$$

Consider:

$$\frac{\delta \phi(x_1)}{\delta \phi(x_2)} = \delta(x_1 - x_2)$$

Which means:

$$\int d^4y \frac{\delta \phi(x_1, J)}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y, \phi)}{\delta \phi(x_2)} = \delta(x_1 - x_2)$$

As we know:

$$\phi(x_1, J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \quad \frac{\delta \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y)} = J(y, \phi)$$

By insertion, we obtain:

$$\int d^4y \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x_2)} = \delta^4(x_1 - x_2) \quad (6.92)$$

apply  $\frac{\delta}{\delta J(x_3)}$  to the above equation 6.92. change the notation of the variable  $y \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2$  and noticed that  $\frac{\delta}{\delta J(x_3)} = \int d^4y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta}{\delta \phi(y_3)}$

$$\begin{aligned} & \int d^4y_1 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2)} \\ & + \int d^4y_1 d^4y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} = 0 \end{aligned} \quad (6.93)$$

Then we apply integration  $\int d^4y_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)}$  to the formula above. then we attain:

$$\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} = - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \quad (6.94)$$

Which means: (When  $J = 0, \phi = \bar{\phi}$ )

$$W^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{d^4y_1}{i\hbar} \frac{d^4y_2}{i\hbar} \frac{d^4y_3}{i\hbar} W^{(2)}(y_1, x_1) W^{(2)}(y_2, x_2) W^{(2)}(y_3, x_3) \hat{\Gamma}^{(3)}(y_1, y_2, y_3) \quad (6.95)$$

Using the equation 6.94 . we apply  $\frac{\delta}{\delta J(x_4)}$ . Then we can have:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \\ & = - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2) \delta J(x_4)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(x_4)} \\ & \cdot \frac{\delta^4 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4)} \end{aligned} \quad (6.96)$$

Insert equation 6.94 to the equation above to substitute the 3-point connected function. For example, the first term would be:

$$\begin{aligned} & - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \\ & = \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 d^4y_5 d^4y_6 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \\ & \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3)} \end{aligned} \quad (6.97)$$

in this case all the term can be written as:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \\
 &= \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 d^4 y_5 d^4 y_6 \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \frac{\delta^3 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_4) \delta \phi(y_5) \delta \phi(y_6)} \\
 & \left( \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \right. \\
 & + \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \\
 & \left. + \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(y_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_5) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_6) \delta J(x_4)} \right) \\
 & - \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 y_4 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_1) \delta J(x_1)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_3) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_2) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y_4) \delta J(x_4)} \\
 & \cdot \frac{\delta^4 \hat{\Gamma}[\phi - \bar{\phi}]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(y_2) \delta \phi(y_3) \delta \phi(y_4)}
 \end{aligned} \tag{6.98}$$

In all from 6.98 and 6.95 . we can have the graphic representation: 可以看图:6.7, 6.6 (这个是 phi3 场的例子)

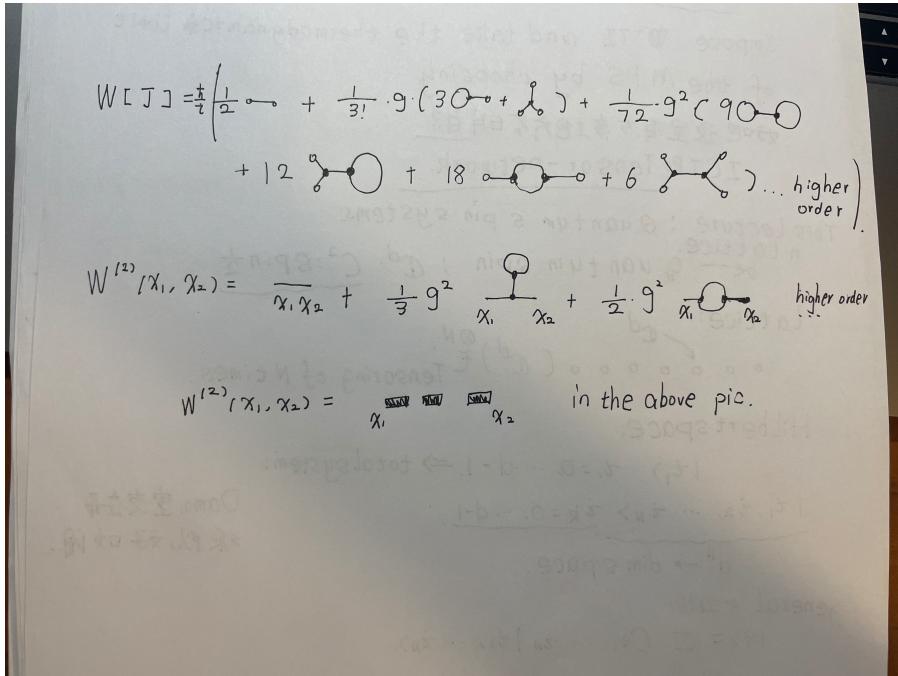


图 6.6: w2

当然, 如果平均场是 0, 也就是  $\bar{\phi} = 0$  的时候, 不可约图像的生成函数可以不用这么定义, 他直接就是  $\Gamma[\phi]$

在很多重整化理论中, 需要计算的是几个点的不可约 Green Function。计算他们的步骤就是先计算 Connected Green Function. 然后首先利用公式 6.92。进行 Fourier 变换之后可以解两点 irreducible Green Function。然后利用图 6.7, 先通过 3-Point Connected Green Function 计算 3-Point irreducible Green Function. 再计算四点的。

当然也可以通过图片直接去观察 Connected Green Function 中的哪里是不可约的。

好, 现在直接到 phi4 理论。之前把 Green Function 的 Generating Function 图表示过。这个是图像: 6.2

但是在一般重整化中, 是算到了二阶。所以有必要写一下二阶的 Generating Function. 图太多了, 不知道对不对, 先不放出来了。

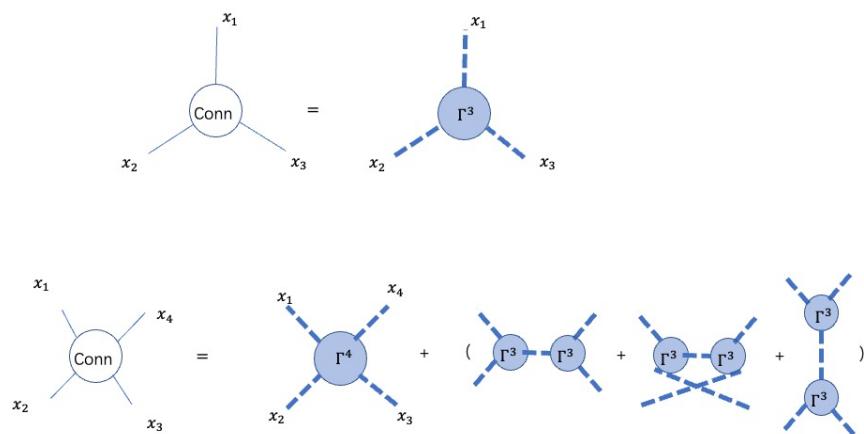


图 6.7: w3w4

# 第七章 标量场

## 7.1 生成函数与 Counter term

总述 标量场的 Lagrangian 写为:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_0\partial_\mu\varphi_0 - \frac{1}{2}m^2\varphi_0^2 + \frac{1}{6}g\varphi_0^3. \quad (7.1)$$

通过重整化的操作 ( $\varphi_0 = Z_\varphi (\varphi + v)$ ), 可以将场的 Lagrangian 写为。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z_\varphi\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}Z_mm^2\varphi^2 + \frac{1}{6}Z_gg\varphi^3 + Y\varphi \quad (7.2)$$

其中:

$$Z \sim 1 + O(g^2) \quad Y \sim O(g) \quad (7.3)$$

确定其中系数的方式:

- 1 m: Mass of particle
- 2 g: **Require cross depend on g in particular way**(不理解)
- 3 Normalized by:  $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0 \langle k|\varphi(x)|0\rangle e^{ikx} = 1$

**Ignore Counterterm 求 Generating Function** Lagrangian 分类:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \\ \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{6}Z_gg\varphi^3 + \mathcal{L}_{ct} \\ \mathcal{L}_{ct} &= \frac{1}{2}(Z_\varphi - 1)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}(Z_m - 1)m^2\varphi^2 + Y\varphi \end{aligned} \quad (7.4)$$

Generating Function:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + J\varphi) \right] \\ &= \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_1 \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right] \\ &\propto \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_1 \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x - x') J(x') \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ignore Counterterm:

$$\begin{aligned} Z_1[J] &\propto \exp \left[ i \frac{1}{6} Z_g g \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x - x') J(x') \right] \\ &= \sum_{V=0}^{+\infty} \frac{1}{V!} \left( i \frac{1}{6} Z_g g \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right)^V \sum_{P=0}^{+\infty} \frac{1}{P!} \left( \frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y - z) J(z) \right)^P \\ &= \sum_{V=0}^{+\infty} \frac{1}{V!} \left( i \frac{1}{6} Z_g g \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right)^V \sum_{P=0}^{+\infty} \frac{1}{P!} \left( \frac{1}{2} \int d^4y d^4z iJ(y) \frac{1}{i} \Delta(y - z) iJ(z) \right)^P \end{aligned} \quad (7.6)$$

**Vertex, Propagator, External Source** 对于上面计算 Generating Functional 中展开系数 V、P 对应的项, 在经历了  $3V$  个泛函求导之后, 剩下的 External source 数量 E 是:

$$E = 2P - 3V \quad (7.7)$$

这一项的相位系数是 (这个系数包含在了 Feynman 图表示的积分中了):

$$\text{Phase Factor} = (i)^{V+P-3V} = (i)^{V+E-P} \quad (7.8)$$

**Feynman Rules** 用图像来表示积分, 表示方法为- line:  $\frac{1}{i}\Delta(x - y)$ ; Source:  $\int d^4x iJ(x)$ ; Vertex:  $\int d^4x iZ_g g$

**Symmetry Factor (For connected diagram)** 对于 Generating Functional, 它的系数是。不过由于有很多图它的计算结果相同, 所以这个系数会被消掉大部分, 只剩下一个  $\frac{1}{S}$ ,  $S$  是 Symmetry Factor。

$$\frac{1}{V!} \frac{1}{(3!)^V} \frac{1}{P!} \frac{1}{(2!)^P} \quad (7.9)$$

观察 Generating Function, 每个 Vertex 中的三个腿可以相互交换, 形成  $(3!)^V$  个对称性; 每个 Vertex 可以互相交换, 形成  $V!$  个对称性; 每个 Propagator 中的两个端点可以相互交换, 形成  $(2!)^P$  个对称性; 每个 Propagator 互相可以交换形成  $P!$  个对称性。这些交换生成的图像的数值结果是一样的, 将这些对称性乘以系数得到:

$$\frac{1}{V!} \frac{1}{(3!)^V} \frac{1}{P!} \frac{1}{(2!)^P} \times (3!)^V V! (2!)^P P! = 1 \quad (7.10)$$

接下来我们考虑 Symmetry Factor, 也就是重复计算的对称性。

我们从一个例子出发:



在这个 Feynman 图中, 同时交换 3 个 Propagator 的左右 source term 得到的效果和同时交换左右两个 Vertex 的效果是相同的; 三个 Propagator 互相交换位置 (有  $3!$  种方式) 和左右 Vertex 同时交换相应 functional derivative 的顺序的效果是相同的。也就是, 有 12 种对称性算重复了。于是:

$$S = \frac{1}{2 \times 3!} = \frac{1}{12}. \quad (7.11)$$

**Use Connected Diagram represent Generating functional** 上面讨论的 Symmetry Factor 是针对 Connected Diagram 的。实际上的 Generating function 有些 non-connected 项是可以用 connected diagram 乘在一起表示。我们将 connected diagram 用  $\{1, 2, 3, \dots, I, \dots\}$  表示, 相应的 diagram 表示的积分写为  $C_I$ 。 $(C_I$  是包含 Symmetry Factor 的)

现在考虑一个 Generating Function 中的一项, 他可以写成  $n_I$  个  $C_I$  图相乘。 $(I = 1, 2, \dots)$

$$D = \prod_{I=1}^{\infty} \frac{1}{S_I} (C_I)^{n_I} \quad (7.12)$$

对于其中的 Symmetry Factor, 它是因为同时交换不同图中的 Vertex 和同时交换不同图中的 Propagator 得到的结果相同, 所以这一部分对称性算重复了。于是:

$$S_I = n_I! \quad D = \prod_{I=1}^{+\infty} \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} \quad (7.13)$$

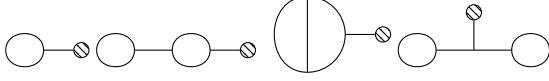
用 connected diagram 计算 Generating Functional:

$$\begin{aligned} Z_1[J] &= \sum_{\{n_I\}} \left( \prod_{I=1}^{+\infty} \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} \right) \\ &= \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \dots \frac{1}{n_1!} (C_1)^{n_1} \frac{1}{n_2!} (C_2)^{n_2} \dots \\ &= \left( \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1!} (C_1)^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2!} (C_2)^{n_2} \right) \dots \\ &= \prod_{I=1}^{\infty} \left( \sum_{n_I=1}^{+\infty} \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} \right) \\ &= \exp \left( \sum_{I=1}^{\infty} C_I \right) \end{aligned} \quad (7.14)$$

由于归一化条件,  $Z_1[0] = 1$ , 所有的 Vacuum Diagram (也就是没有 External Source) 的都会被归一化除掉, 所以用  $C_{I'}$  标记 non-Vacuum Connected Diagram, Generating Functional 可以写为:

$$Z_1[J] = \exp \left( \sum_{I'} C_{I'} \right) \quad (7.15)$$

**Y-Counterterm** 在没有 Y-Counterterm 时,  $Z_1[J]$  中包含了 Single-Source Term。也就是说:  $E = 1$ 。比如说:



利用生成函数, 求  $\langle 0|\varphi(x)|0 \rangle$ 。

$$\langle 0|\varphi(x)|0 \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_1[J] \quad (7.16)$$

考虑关于  $g$  的最低阶项 ( $Z_g \sim 1 + O(g^2)$ ), 得到的结果用 Feynman 图表示为:

$$\langle 0|\varphi(x)|0 \rangle = \text{Diagram} - x = \frac{1}{2} \int d^4y i g \frac{1}{i} \Delta(y-y) \frac{1}{i} \Delta(y-x) + O(g^3) \quad (7.17)$$

这样的结果和条件  $\langle 0|\varphi(x)|0 \rangle = 0$  不相符。所以需要引入  $Y\varphi$  的 counterterm。

此时:

$$Z[J] \propto \exp \left[ iY \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \exp \left[ i \frac{1}{6} Z_g g \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' J(x) \Delta(x-x') J(x') \right] \quad (7.18)$$

Counterterm 会生成一种新的节点 (它只连结一个 Propagator), 表示为:

$$\int d^4x iY = \otimes \quad (7.19)$$

用含有这个节点的 Feynman Diagram 来消除含有一个 Source 的项 (只考虑  $g$  的一阶):

$$\begin{aligned} & \text{Diagram} - \otimes = 0 \\ & \int d^4x' \left( iY + \frac{1}{2} \frac{1}{i} \Delta(0) ig \right) \frac{1}{i} \Delta(x'-x) = 0 \\ & Y = i \frac{1}{2} g \Delta(0) \end{aligned} \quad (7.20)$$

**Ignore Tadpoles** 如果一个 Connected Diagram 中有一部分, 它与其他部分通过一个 propagator 相连接, 并且它没有 source 项 (这一部分叫做 tadpole)。于是在  $Z_1[J]$  中一定有这样的 tadpole 连接了一个 Source。但是通过 counterterm, 一定有一个和他相反的项。与他相反的项也可以将 Source 替换为其他的子图。所以这个 Connected Diagram 总是不用考虑的。

**另一个 Counterterm** 考虑 Lagrangian 中剩下的 Counterterm:

$$\begin{aligned} S & \sim i \int d^4x \left( \frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 \right) \\ & = i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) \varphi \partial^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 \right) \end{aligned} \quad (7.21)$$

他们写为泛函导数形式 (利用分部积分)

$$\exp \left[ \int d^4x - \frac{i}{2} \left( (Z_\varphi - 1) \left( \frac{\delta}{i \delta J(x)} \right) \partial^\mu \partial_\mu \left( i \frac{\delta}{i \delta J(x)} \right) + (Z_m - 1) m^2 \left( \frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^2 \right) \right] \quad (7.22)$$

这一项会生成一个两点 Vertex。(2 因为对称性可以不写) 它可以表示为:

$$-i \int d^4x \left( (Z_\varphi - 1) \partial^2 + (Z_m - 1) m^2 \right) \quad (7.23)$$

Noticed that partial 作用在两个相接的 propagator 的一个端点上而不是两个端点。

**总结** 生成函数可以表示为:

$$Z[J] = \exp \left[ \sum_{I'} C_{I'} \right] \quad (7.24)$$

其中  $C_{I'}$  是 Connected Diagram with symmetry factor, 并且没有 Tadpoles。同时  $C_{I'}$  中需要有由 Counterterm 引起的两腿 vertex。

## 7.2 树图散射振幅

**LSZ Reduction Formula under new normalize condition** 标量场的 LSZ Reduction formula 在 Greiner 书中写为 (ipad 上有推导):

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle &= \langle 0|Ta_{qm}(+\infty)\cdots a_{q1}(+\infty)a_{p1}^\dagger(-\infty)\cdots a_{pn}^\dagger|0\rangle \\ &= (i)^{n+m} \int d^4x_1 u_{p1}(x_1)(\partial_{x1}^2 + m^2) \cdots \int d^4y_1 u_{q1}^*(y_1)(\partial_{y1}^2 + m^2) \cdots \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_m)|0\rangle\end{aligned}\quad (7.25)$$

其中,

$$u_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2w_p(2\pi)^3}} e^{-i(p \cdot x)} \quad p = (w_p, \vec{p}) \quad (7.26)$$

在 Greiner 的书中, 归一化条件是  $\langle i|i\rangle = \delta^{(3)}(p_1 - p_1) \cdots$ 。现在改变它的归一化条件为  $\langle i|i\rangle = 2w_{p1} \cdots 2w_{pn} \delta^{(3)}(p_1 - p_1) \cdots$  定义新的态矢量  $|i\rangle \rightarrow \sqrt{2w_{p1} \cdots 2w_{pn}}|i\rangle$  相应的 LSZ Reduction Formula 也就变成了:

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle &= \sqrt{2w_{p1} \cdots 2w_{pn}} \sqrt{2w_{q1} \cdots 2w_{qm}} \langle 0|Ta_{qm}(+\infty)\cdots a_{q1}(+\infty)a_{p1}^\dagger(-\infty)\cdots a_{pn}^\dagger|0\rangle \\ &= (i)^{n+m} \int d^4x_1 e^{-i p_1 x_1} (\partial_{x1}^2 + m^2) \cdots \int d^4y_1 e^{i q_1 y_1} (\partial_{y1}^2 + m^2) \cdots \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_m)|0\rangle\end{aligned}\quad (7.27)$$

只用 Fully Connected Part 算散射振幅 生成函数写为:

$$Z[J] = \exp \left[ \sum_{I'} C_{I'} \right] = \exp(iW[J]) \quad (7.28)$$

两点关联函数:

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} Z[J] \\ &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} iW[J] + \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} iW[J] \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} iW[J]\end{aligned}\quad (7.29)$$

由于有 Counterterm Y 的存在, 后面的一项是 0。四点关联函数:

$$\begin{aligned}\langle 0|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} Z[J] \\ &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] + \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) Z[J] \\ &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] + \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] + \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) Z[J] \\ &\quad + \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} iW[J] \right) \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] + \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) Z[J] \\ &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] + \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} iW[J] \right) \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) \\ &\quad + \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \right) \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) + \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} iW[J] \right) |_{J=0}\end{aligned}\quad (7.30)$$

前一项是一个有四个 Source 的 connect Feynman 图对 S matrix 的贡献, 后面这些项都是 Non-connect part。考虑其中一个 Non-connect part 比如:

$$\left( \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} iW[J] \right) \left( \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \right) = F(x_1 - x_2)F(x_3 - x_4) \quad (7.31)$$

考虑这一项经过 LSZ reduction formula 对散射振幅的贡献: (f 是 F 经过微分算符作用后的函数, 具体形式不重要)

$$\begin{aligned}(i)^{2+2} \int d^4x_1 e^{-i p_1 x_1} (\partial_{x1}^2 + m^2) \int d^4x_2 e^{-i p_2 x_2} (\partial_{x2}^2 + m^2) \int d^4x_3 e^{+i p_3 x_3} (\partial_{x3}^2 + m^2) \int d^4x_4 e^{+i p_4 x_4} (\partial_{x4}^2 + m^2) F(x_1 - x_2) F(x_3 - x_4) \\ = \int d^4x_1 e^{-i p_1 x_1} \int d^4x_2 e^{-i p_2 x_2} \int d^4x_3 e^{+i p_3 x_3} \int d^4x_4 e^{+i p_4 x_4} f(x_1 - x_2) f(x_3 - x_4)\end{aligned}\quad (7.32)$$

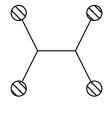
积分变换:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ v = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ y = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \\ z = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \end{cases} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int d^4u d^4v d^4y d^4z \det\left(\frac{\partial x_1, x_2}{\partial u, v}\right) \det\left(\frac{\partial x_3, x_4}{\partial y, z}\right) \sim \\ &= 4 \int d^4u d^4v d^4y d^4z e^{-i(p_1+p_2)u-i(p_1-p_2)v} e^{+i(p_3+p_4)y+i(p_3-p_4)z} f(2v) f(2z) \\ &= \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \delta^{(4)}(p_3 - p_4) \sim \end{aligned} \quad (7.34)$$

他是没有意义的, 因为相当于没有散射。同理, 经过具体计算, 发现 Non-connect 项都没有贡献, 所以只有 Fully Connected Part 对散射振幅有贡献。

**最低阶 2-2 散射的树图散射振幅计算** 考虑 Generating Function 中的 Connected-4Source-NoTadpole Diagram In Lowest Order.



$$\approx O(g^2) \quad S = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8} \quad (7.35)$$

用这部分 Generating Functional 求 4 点关联函数:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle &= \frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} iW[J] \\ &= (2 \times 2 \times 2) \frac{1}{8} \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ | \\ x_4 \end{array} + (2 \times 2 \times 2) \frac{1}{8} \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_4 \end{array} + (2 \times 2 \times 2) \frac{1}{8} \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_3 \end{array} \quad (7.36) \end{aligned}$$

其中,  $2 \times 2 \times 2$  来自于对不同的 source 求导。(Symmetry Factor 被消掉是树图的共同特点)一般来说将入射写在左边, 出射写在右边:

$$\begin{aligned} &\begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ | \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \backslash \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ / \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ \diagup \\ x_4 \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ | \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ | \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \diagup \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ \diagdown \\ x_4 \end{array} \\ &= \int d^4y d^4z ig \left( \frac{1}{i} \Delta(x_1 - y) \frac{1}{i} \Delta(x_2 - y) \frac{1}{i} \Delta(y - z) \frac{1}{i} \Delta(z - x_3) \frac{1}{i} \Delta(z - x_4) \sim \right) \\ &= i \int d^4y d^4z g^2 \left( \Delta(x_1 - y) \Delta(x_2 - y) \Delta(y - z) \Delta(z - x_3) \Delta(z - x_4) + \Delta(x_1 - y) \Delta(x_2 - z) \Delta(y - z) \Delta(y - x_3) \Delta(z - x_4) \right. \\ &\quad \left. + \Delta(x_1 - y) \Delta(x_2 - z) \Delta(y - z) \Delta(z - x_3) \Delta(y - x_4) \right) \quad (7.37) \end{aligned}$$

考虑 LSZ Formula 以及传播子的具体表达:

$$\begin{cases} \langle f | i \rangle = (i)^{n+m} \int d^4x_1 e^{-ip_1 x_1} (\partial_{x_1}^2 + m^2) \cdots \int d^4y_1 e^{iq_1 y_1} (\partial_{y_1}^2 + m^2) \cdots \langle 0 | T \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_m) | 0 \rangle \\ \Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} \\ (\partial_x^2 + m^2) \Delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} = \delta^{(4)}(x - x') \end{cases} \quad (7.38)$$

于是:

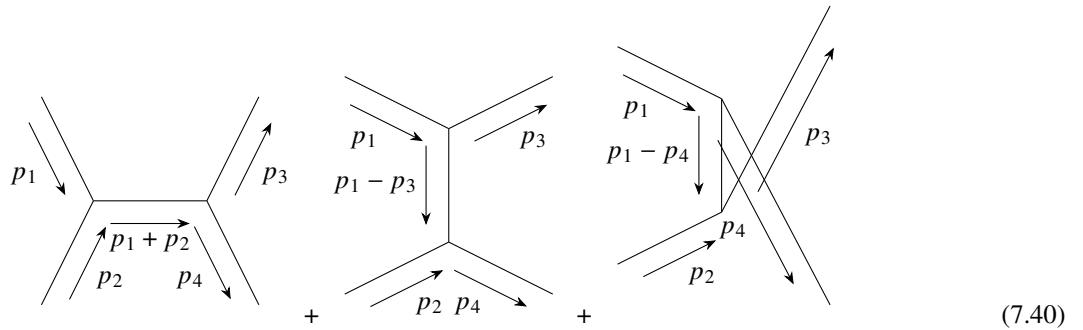
$$\begin{aligned}
\langle f|i \rangle &= i \int d^4y d^4z d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4k g^2 e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2 + ip_3 x_3 + ip_4 x_4} \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(y-z)}}{-k^2 + m^2} \left( \delta^{(4)}(x_1 - y) \delta^{(4)}(x_2 - y) \delta^{(4)}(z - x_3) \delta^{(4)}(z - x_4) + \delta^{(4)}(x_1 - y) \delta^{(4)}(x_2 - z) \delta^{(4)}(y - x_3) \delta^{(4)}(z - x_4) \right. \\
&\quad \left. + \delta^{(4)}(x_1 - y) \delta^{(4)}(x_2 - z) \delta^{(4)}(x_3 - z) \delta^{(4)}(x_4 - y) \right) \\
&= i \int d^4y d^4z d^4k g^2 \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(y-z)}}{-k^2 + m^2} \left( e^{-i(p_1+p_2)y + i(p_3+p_4)z} + e^{-i(p_1-p_3)y + i(-p_2+p_4)z} + e^{-i(p_1-p_4)y + i(-p_2+p_3)z} \right) \\
&= i \int d^4k g^2 (2\pi)^4 \frac{1}{-k^2 + m^2} \left( \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + k) \delta^{(4)}(p_3 + p_4 + k) \right. \\
&\quad \left. + \delta^{(4)}(p_1 - p_3 + k) \delta^{(4)}(-p_2 + p_4 + k) + \delta^{(4)}(p_1 - p_4 + k) \delta^{(4)}(-p_2 + p_3 + k) \right) \\
&= i g^2 (2\pi)^4 \left( \frac{1}{-(p_1 + p_2)^2 + m^2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) + \frac{1}{-(p_1 - p_3)^2 + m^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_3 + p_2 - p_4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{-(p_1 - p_4)^2 + m^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_4 + p_2 - p_3) \right) \\
&= i g^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \left( \frac{1}{-(p_1 + p_2)^2 + m^2} + \frac{1}{-(p_1 - p_3)^2 + m^2} + \frac{1}{-(p_1 - p_4)^2 + m^2} \right) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{in} - p_{out}) i\mathcal{T}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

确实可以发现  $\langle f|i \rangle$  以及  $\mathcal{T}$  是 Lorentz Invariant 的。 $\delta$  函数暗含了能量守恒。

**动量空间的 Feynman 规则** 先画图, 考虑 Generating Functional 的 Symmetry Factor, 进而考虑 n-point functional 的 Symmetry Factor。左侧是入射侧, 动量从外流向节点; 最右侧是出射侧, 动量从节点流向外面。这些动量都是自己标记的, 标记为  $k_1 \dots k_l, \dots$  之类的。每一个节点都是 4 动量守恒的。总结起来, 可以是下面这些关键点。

- (1) 每个最外侧的 propagator 当作 1
- (2) 每个内侧动量是  $k$  的传播子当作  $\frac{-i}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} = \frac{1}{i} \Delta(k^2)$
- (3) 每个节点贡献  $iZ_g g$
- (4) 每个没有确定的动量 1 贡献积分:  $\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$
- (5) Leftover Symmetry 可以通过圈图贡献直接计算。具体来说, 当有圈图时, 如果有改变 propagator 和 vertex 导致的结果相同, 那么就会贡献 Leftover symmetry。(不用从 Generating Functional 开始算了)
- (6) 需要考虑 Counterterm Vertex 他是:  $-i(-Z_\varphi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2$
- (7) 将所有图计算完之后的结果就是  $i\mathcal{T}$

利用 Feynman Rule In Momentum space, 可以将上面的树图贡献的  $i\mathcal{T}$  写为:



### 7.3 散射截面

**Lorentz 不变相空间** Lorentz 变换后的相空间:

$$dp'_x dp'_y dp'_z \quad (7.41)$$

Lorentz 变换:

$$\begin{cases} p'_x = p_x & p'_y = p_y & p'_z = \gamma(p_z - \frac{\beta}{c}E) & E' = \gamma(E - \beta c p_z) & E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \end{cases} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= dp_x dp_y dp_z \gamma(1 - \beta/c \frac{\partial E}{\partial p_z}) \\ &= dp_x dp_y dp_z \gamma(1 - \beta c \frac{p_z}{E}) \\ &= dp_x dp_y dp_z \frac{E'}{E} \end{aligned} \quad (7.43)$$

也就是:

$$\frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \quad (7.44)$$

它定义为 Lorentz 不变相空间

**散射截面的定义** 考虑两个粒子的散射，他们散射后变成了  $k$  个出射粒子。

两个粒子的速度分别是  $v_1$  与  $v_2$ , 如果说两个粒子的体积都估计为  $V$ ，同时他们的相对速度是  $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ 。这样相当于一个粒子用这个相对速度去撞击另一个粒子。既然一个粒子占据的体积是  $V$ 。那么相当于有一个入射流(单位时间单位面积入射的粒子数量)

$$\Phi = \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \quad (7.45)$$

然后考虑一个原子物理里面的微分截面的东西。其实也就是入射粒子流中的一个小小面积元  $d\sigma$ , 在时间  $T$  之后, 认为这个面积元对应的  $p_j dp_j$  ( $j \in \{1, 2 \dots k\}$ ), 出射状态, 就是说给定了一个出射状态, 当然, 这个状态是怎么说, 无穷小的。一个状态元。就和原子物理里面出射到一个球面角元是一样的。然后在这个状态元的粒子数量是  $dP$ , 当然他是小于 1 的, 这个时候应该理解为概率

所以上面的话就描述的是这个式子。

$$d\sigma \frac{1}{V} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| T = dP \quad (7.46)$$

也就是说:

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP \quad (7.47)$$

一般来说, 散射截面是在实验室参考系中定义的。在实验室参考系中, 一般将靶粒子 2 固定, 此时, 相对速度是  $\frac{|\vec{p}_1|_{FT}}{(E_1)_{FT}}$ 。(FT means fixed target)

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{(E_1)_{FT}}{|\vec{p}_1|_{FT}} dP \quad (7.48)$$

**发生反应的概率** 然后, 我们从量子的角度考虑  $dP$  (发生反应的概率)

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} \Pi_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_j \quad (7.49)$$

至于这里为什么加入了一个体积  $V$  (注意连乘符号后面的所有东西都是要连乘的...), 可以理解成一维动量量子化后的结果是  $p_i = \frac{2\pi}{L} i$

接下来考虑粒子态。

$$\sqrt{(2\pi)^3 2w_k} a_k^\dagger |0\rangle = |k\rangle \quad (7.50)$$

同时, 湮灭算符和产生算符有对易关系

$$[a_p, a_p^\dagger] = \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (7.51)$$

这样, 动量为  $\mathbf{p}$  的单粒子态和自己的内积就是 (动量空间的 delta 函数可以用坐标空间的积分表示)

$$\langle p|p \rangle = 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = 2\omega_p V \quad (7.52)$$

于是

$$\langle i|i \rangle = (2E_1 V)(2E_2 V) \quad (7.53)$$

$$\langle f|f \rangle = \Pi_j (2E_j V) \quad (7.54)$$

$\mathbf{S}$  就是相互作用绘景里面的时间演化算符。我们说  $\mathbf{S}$  可以展开成平庸的部分和演化的一部分。

$$S = 1 + i\mathcal{M} = 1 + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) i\mathcal{T} \quad (7.55)$$

这个演化项作用在初态, 再和末态做内积后:

$$|\langle f|S|i \rangle|^2 = \delta^{(4)}(0) \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^8 |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2 = VT \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2 \quad (7.56)$$

于是:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\delta^{(4)}(0) \delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^8 |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)\Pi_j(2E_j V)} \Pi_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_j \\ &= VT \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p) (2\pi)^4 |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)\Pi_j(2E_j V)} \Pi_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_j \\ &= \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2 - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \end{aligned} \quad (7.57)$$

于是

$$d\sigma = \frac{(E_1)_{FT}}{(2E_1)(2E_2)|\vec{p}_1|_{FT}} |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2 - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (7.58)$$

其中后面的那个叫洛伦兹不变相空间体元。(Lorentz invariant phase space-LIPS)

$$dLIPS_{n'}(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_j p_j) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (7.59)$$

为了使得计算出的  $dP$  中含有的  $T/V$  能和  $d\sigma$  的定义式中的  $V/T$  能消掉, 要求计算出射粒子也是要在 Fixed-Target Frame。此时:

$$d\sigma = \frac{1}{4(E_2)_{FT}|\vec{p}_1|_{FT}} |\langle f|\mathcal{T}|i \rangle|^2 - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (7.60)$$

后面的这些项都是 Lorentz-Invariant 的。

**Mandelstam 变量** Mandelstam 变量定义为:(使用了能动量守恒的性质)

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (k_{1'} + k_{2'})^2 \quad \text{中间是横线} \\ t &= (k_1 - k_{1'})^2 = (k_2 - k_{2'})^2 \quad \text{中间是竖线} \\ u &= (k_1 - k_{2'})^2 = (k_2 - k_{1'})^2 \quad \text{中间是竖线但是交换出射粒子} \end{aligned} \quad (7.61)$$

它们三个并不是完全互相独立的。满足约束关系

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_{1'}^2 + m_{2'}^2 \quad (7.62)$$

它的意义在于, 它是一个 Lorentz 不变量。同时, 他可以用来表示其他的量。比如, 在 Fixed-Target Frame 中,  $|\vec{k}_2| = 0$ 。

$$s = (E_1 + m_2)^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad E_1 = \sqrt{m_1^2 + |\vec{k}_1|^2} \quad (7.63)$$

可以得到:

$$|\vec{k}_1|_{FT} = \frac{1}{2m_2} \sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad (7.64)$$

又比如在 Center-of-Mass 参考系中:

$$s = (E_1 + E_2)^2 \quad E_1 = \sqrt{m_1^2 + |\vec{k}_1|^2} \quad E_2 = \sqrt{m_2^2 + |\vec{k}_1|^2} \quad (7.65)$$

可以得到:

$$|\vec{k}_1|_{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad (7.66)$$

类似的, 对于出射粒子:

$$s = (E_{1'} + E_{2'})^2 \quad E_{1'} = \sqrt{m_{1'}^2 + |\vec{k}_{1'}|^2} \quad E_{2'} = \sqrt{m_{2'}^2 + |\vec{k}_{1'}|^2} \quad (7.67)$$

可以得到:

$$|\vec{k}_{1'}|_{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2(m_{1'}^2 + m_{2'}^2)s + (m_{1'}^2 - m_{2'}^2)^2} \quad (7.68)$$

对于 Mandelstam 变量 t:

$$t = (k_1 - k_{1'})^2 = (E_1 - E_{1'})^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_{1'})^2 = m_1^2 + m_{1'}^2 - 2E_1 E_{1'} + 2|\vec{k}_1||\vec{k}_{1'}|\cos\theta \quad (7.69)$$

如果是在 CM 系,  $t \propto \cos(\theta)$ 。

**2-2 散射的散射截面表达** 对于 2-2 散射问题,

$$d\sigma = \frac{1}{4(E_2)_{FT}|\vec{p}_1|_{FT}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (7.70)$$

利用性质:

$$\left\{ (E_2)_{FT}|\vec{p}_1|_{FT} = m_2|\vec{p}_1|_{FT} = \sqrt{s}|\vec{p}_1|_{CM} \right. \quad (7.71)$$

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{s}|\vec{p}_1|_{CM}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_{1'} - p_{2'}) \frac{d^3 p_{1'} d^3 p_{2'}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2E_{1'} 2E_{2'}} \quad (7.72)$$

由于除了第一项, 后面的都是 Lorentz Invariant 的, 可以在任何参考系计算。这里在 Center of mass 参考系计算。首先计算后面的部分:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_{1'} - p_{2'}) \frac{d^3 p_{1'} d^3 p_{2'}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2E_{1'} 2E_{2'}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_{1'} - E_{2'}) \delta^{(3)}(0 - p_{1'} - p_{2'}) d^3 p_{1'} d^3 p_{2'} \frac{1}{2E_{1'} 2E_{2'}} \end{aligned} \quad (7.73)$$

对  $p_{2'}$  积分:

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_{1'} - E_{2'}) \frac{d^3 p_{1'}}{2E_{1'} 2E_{2'}} \quad E_{1'} = \sqrt{|\vec{p}_{1'}|^2 + m_{1'}^2} \quad E_{2'} = \sqrt{|\vec{p}_{1'}|^2 + m_{2'}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2(E_{1'})_{CM} 2(E_{2'})_{CM}} \delta(\sqrt{s} - E_{1'} - E_{2'}) |p_{1'}|^2 d|p_{1'}| d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (7.74)$$

delta 函数有性质:

$$\left\{ \int dx \delta(f(x)) = \delta(f(x)) df(x) \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} \right. \quad (7.75)$$

于是经过积分, 筛选出能动量守恒解出的  $|p_{1'}|_{CM}$ :

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2(E_{1'})_{CM} 2(E_{2'})_{CM}} |\vec{p}_{1'}|_{CM}^2 d\Omega_{CM} \frac{1}{|\frac{d}{d|\vec{p}_{1'}|}(\sqrt{s} - E_{1'} - E_{2'})|} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2(E_{1'})_{CM} 2(E_{2'})_{CM}} |\vec{p}_{1'}|_{CM}^2 d\Omega_{CM} \frac{1}{|\vec{p}_{1'}|_{CM} \left( \frac{1}{E_{1'}} + \frac{1}{E_{2'}} \right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2(E_{1'})_{CM} 2(E_{2'})_{CM}} |\vec{p}_{1'}|_{CM}^2 d\Omega_{CM} \frac{1}{|\vec{p}_{1'}|_{CM} \left( \frac{\sqrt{s}}{E_{2'} E_{1'}} \right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\sqrt{s}|\vec{p}_{1'}|_{CM}} |\vec{p}_{1'}|_{CM}^2 d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (7.76)$$

于是:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4\sqrt{s}|\vec{p}_1|_{CM}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\sqrt{s}|\vec{p}_{1'}|_{CM}} |\vec{p}_{1'}|_{CM}^2 d\Omega_{CM} \\ &= \frac{|\vec{p}_{1'}|_{CM}}{64\pi^2 s|\vec{p}_1|_{CM}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 d\Omega_{CM} \end{aligned} \quad (7.77)$$

微分散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{|\vec{p}_{1'}|_{CM}}{64\pi^2 s|\vec{p}_1|_{CM}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \quad (7.78)$$

有时候, 采用 t 作为变量, 由于:

$$\begin{cases} t &= m_1^2 + m_{1'}^2 - 2E_1 E_{1'} + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_{1'}|\cos\theta \\ dt &= 2|\vec{p}_1||\vec{p}_{1'}|d\cos\theta \quad \text{只有在 CM 系可以这样算, 否则 } |\vec{p}_{1'}| \text{ 也是 } \theta \text{ 的函数} \\ &= -2|\vec{p}_1|_{CM}|\vec{p}_{1'}|_{CM}\frac{1}{2\pi}d\Omega_{CM} \end{cases} \quad (7.79)$$

于是:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{\pi}{|\vec{p}_1|_{CM}|\vec{p}_{1'}|_{CM}} \frac{|\vec{p}_{1'}|_{CM}}{64\pi^2 s|\vec{p}_1|_{CM}} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \\ &= -\frac{1}{64\pi s|\vec{p}_1|_{CM}^2} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \end{aligned} \quad (7.80)$$

**对称因子** 如果出射的粒子 j 有  $n_j$  个与他相同。这些粒子有  $n_j!$  种排布顺序导致的散射结果都是相同的。也就是只用  $\frac{1}{n_j!}$  的散射截面就可以得到同样的散射结果。

$$\sigma \rightarrow \frac{1}{S} \sigma \quad S = \Pi_j \frac{1}{n_j!} \quad (7.81)$$

$\varphi^3$  2-2 树图散射最低阶对散射截面的贡献 ... 懒得写了, 在 Srednicki 上面

**衰变概率** 这部分好像是有点问题, LSZ formula 可能本来不适用, 如果直接认为 LSZ formula 仍然适用。需要改变的是

$$\langle i|i \rangle = 2E_1 V \quad 2E_2 V \rightarrow \langle i|i \rangle = 2E_1 V \quad (7.82)$$

原来两个粒子碰撞时候:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\delta^{(4)}(0)\delta^{(4)}(\Sigma p)(2\pi)^8 |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)\Pi_j(2E_j V)} \Pi_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_j \\ &= \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \end{aligned} \quad (7.83)$$

现在改写为:

$$dP = \frac{T}{1} \frac{1}{(2E_1)} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \Pi_j \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} \quad (7.84)$$

$$\frac{dP}{T} = \Gamma = \frac{1}{2E_1} |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 dLIPS_{n'}(p_1) \quad (7.85)$$

$1/E_1$  和时间膨胀有关系

## 7.4 Optics Theorem

在 Schrodinger 绘景中, 散射 S 算符写为

$$S = 1 + iT. \quad (7.86)$$

由于  $S$  是一个幺正算符,

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= (1 - iT^\dagger)(1 + iT), \\ &= 1 - iT^\dagger + iT + T^\dagger T, \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7.87)$$

于是

$$T^\dagger T = i(T^\dagger - T). \quad (7.88)$$

现在对上等式左右用态矢量  $|i\rangle$  做内积

$$\langle i|T^\dagger T|i\rangle = i\langle i|T^\dagger - T|i\rangle. \quad (7.89)$$

对左式中间插入完备基,

$$\langle i|T^\dagger T|i\rangle = i\langle i|T^\dagger - T|i\rangle \quad (7.90)$$

$$\sum_j \langle i|T^\dagger|j\rangle\langle j|T|i\rangle = 2Im\langle i|T|i\rangle. \quad (7.91)$$

考虑到  $S$  operator 的具体形式

$$\left\{ S = 1 + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) i\mathcal{T} \right. \quad (7.92)$$

并将插入完备基的求和变为积分

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p) \int d\widetilde{p}_1 \cdots d\widetilde{p}_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p) |\langle i|i\mathcal{T}|j\rangle|^2 = 2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p) Im\langle i|\mathcal{T}|i\rangle \quad (7.93)$$

$$\int d\widetilde{p}_1 \cdots d\widetilde{p}_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p) |\langle i|i\mathcal{T}|j\rangle|^2 = 2 Im\langle i|\mathcal{T}|i\rangle, \quad (7.94)$$

$$\int dLIPS |\langle i|i\mathcal{T}|j\rangle|^2 = 2 Im\langle i|\mathcal{T}|i\rangle. \quad (7.95)$$

需要注意,  $\mathcal{T}$  不是散射振幅  $i\mathcal{T}$  才是。

## 7.5 维度分析

Lagrangian 写为:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_\varphi \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{1}{n!} Z_g g \varphi^n + Y \varphi \quad (7.96)$$

自然单位制下,  $\hbar = c = 1$ 。所有单位都可以用质量单位表示。考虑自然单位的定义。

$$[\hbar] = [m][L]^2[T]^{-1} \quad [c] = [L][T]^{-1} \quad (7.97)$$

得到:

$$[m] = [m] \quad [L] = [T] = [m]^{-1} \quad (7.98)$$

由于作用量的单位是 1 (作用量出现在  $e$  指数上), 观察 Lagrangian 中第一项

$$[L]^d [\varphi]^2 [L]^{-2} = 1 \Rightarrow [\varphi] = [L]^{(2-d)/2} = [m]^{(d-2)/2} \quad (7.99)$$

$g$  的单位 (也是通过作用量的单位为 1 得到) :

$$[L]^d [g] [\varphi]^n = 1 \Rightarrow [m]^{-d} [g] [m]^{n(d-2)/2} = 1 \Rightarrow [g] = [m]^{d-\frac{1}{2}(d-2)n} \quad (7.100)$$

发现有特殊点:  $d = 4, n = 3 \Rightarrow [g] = 1$

## 7.6 Lehmann-Kallen form of exact propagator

**场和真空归一化条件** 在 Poincare 变换章节中讲到推广的 Heisenberg Equation of motion (4.39)。

$$\left\{ \exp\left(-\frac{1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right) \phi(x_1) \exp\left(\frac{1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right) = \phi(x_2) \right. \quad (7.101)$$

考虑内积式:

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle \quad (7.102)$$

利用量子场的平移关系:

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \exp(iP \cdot x) \varphi(0) \exp(-iP \cdot x) | 0 \rangle \quad (7.103)$$

对于上面的式子,  $|0\rangle$  代表 Heisenberg Pic 下的真空。四维动量  $P$  是场的动量。同时也是 Poincare 变化的生成元算符。通过 Poincare 代数生成元的对易关系,  $P$  之间是相互对易的, 意味着它们在 Heisenberg Pic 中是不随时间变化的。同时, 知道在  $t \rightarrow \pm\infty$  时, 场可以按照生成湮灭算符展开, 此时, 能动量算符  $P$  也可以用产生湮灭算符展开。也就是  $P|0\rangle = 0$ 。于是:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \exp(iP \cdot (x - x_0)) \varphi(x_0) \exp(-iP \cdot (x - x_0)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \varphi(x_0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.104)$$

实际上  $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle$  是一个与  $x$  没有关系的量, 它对于所有的  $x$  都相等。

特别的, 要求计算  $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle|_{t \rightarrow \infty}$  时场可以用产生湮灭算符展开。此时  $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0$ 。于是:

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (7.105)$$

**场和动量本征态归一化条件** 考虑:

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle. \quad (7.106)$$

这个式子中的  $|0\rangle$  就是 Heisenberg pic 的真空态, 而  $|p\rangle$  是单粒子能动量的本征态, 满足归一化关系:

$$\langle p | p' \rangle = (2\pi)^{d-1} 2w_p \delta^{(d-1)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1} 2w_p} |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}_1. \quad (7.107)$$

其中  $I_1$  是单粒子子空间单位算符。使用 Poincare 代数导出的场算符的平移关系:

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \langle p | \exp(+iP \cdot (x - x_0)) \varphi(x_0) \exp(-iP \cdot (x - x_0)) | 0 \rangle. \quad (7.108)$$

真空态是能动量算符的本征态, 本征值是 0。考虑到这一点,

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \exp(+ip \cdot (x - x_0)) \langle p | \varphi(x_0) | 0 \rangle. \quad (7.109)$$

对于上式, 取  $t_{x_0} \rightarrow \infty$ , 此时场可以用自由场展开。要求 ( $|p\rangle$  是单粒子态) :

$$\langle p | \varphi(x_0) | 0 \rangle = \exp(ip \cdot x_0). \quad (7.110)$$

于是:

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \exp(+ip \cdot x) \times 1. \quad (7.111)$$

**小结归一化条件** 量子化条件要求:

$$\langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \exp(+ip \cdot x), \quad \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (7.112)$$

**多粒子态** 多粒子态定义为:

$$|p, n\rangle, \quad P|p, n\rangle = p|p, n\rangle, \quad \langle p, n | p', n' \rangle = \delta_{n,n'} (2\pi)^{d-1} 2w_p \delta^{(d-1)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \sum_n \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1} 2w_p} |p, n\rangle \langle p, n| = \mathbb{I}_{\mathcal{H}/I_1}. \quad (7.113)$$

我对多粒子的理解是，在 $t \rightarrow +\infty$ 时自由场生成的Fock空间中定义的多粒子态。单用他们的总动量 $p$ 是不能描述状态的， $n$ 中包含了粒子的数量和他们的相对速度性质。所以：

$$w_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad M \geq 2m. \quad (7.114)$$

利用 Poincare 代数平移性质：

$$\left\langle \exp\left(-\frac{1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right) \phi(x_1) \exp\left(\frac{1}{i\hbar}P \cdot (x_2 - x_1)\right) \right\rangle = \phi(x_2). \quad (7.115)$$

多粒子态的内积性质

$$\begin{aligned} \langle p, n | \varphi(x) | 0 \rangle &= \langle p, n | \exp(+iP \cdot x) \varphi(0) \exp(-iP \cdot x) | 0 \rangle \\ &= \exp(+ip \cdot x) \langle p, n | \varphi(0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.116)$$

因为这一项没有办法在平移到自由场状态时找到普遍规律，所以就先写为这个形式。（如果简单的将多粒子态考虑为 $t \rightarrow +\infty$ 时候的粒子态，那么它和真空态与场算符的缩并一定是0，不过实际上不是，Srednicki 40页说了，以后再整理吧）

**真实场真空中内积关系** 考虑真实场和真空的内积关系：

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle. \quad (7.117)$$

考虑由所有本征态组成的单位算符：

$$\{I = |0\rangle\langle 0| + \int d\tilde{p}|p\rangle\langle p| + \sum_n \int d\tilde{p}|p, n\rangle\langle p, n|. \quad (7.118)$$

将它插入到内积关系中：

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \varphi(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \int d\tilde{p} \langle 0 | \varphi(x) | p \rangle \langle p | \varphi(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \sum_n \int d\tilde{p} \langle 0 | \varphi(x) | p, n \rangle \langle p, n | \varphi(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.119)$$

利用粒子态的内积性质：

$$\begin{cases} \langle p, n | \varphi(x) | 0 \rangle = \exp(+ip \cdot x) \langle p, n | \varphi(0) | 0 \rangle \\ \langle p | \varphi(x) | 0 \rangle = \exp(+ip \cdot x), \quad \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0. \end{cases} \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle &= \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} + \sum_n \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} \langle 0 | \varphi(0) | p, n \rangle \langle p, n | \varphi(0) | 0 \rangle \\ &= \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \int d\tilde{p} e^{-i\sqrt{s+p^2}(x^0-y^0)+ip(x-y)} \rho(s). \end{aligned} \quad (7.121)$$

上面式子中的 $s$ 表示了多粒子态粒子数以及相对运动速度。在固定 $s$ 后，多粒子态的能量可以写为 $\sqrt{s+p^2}$   $s \geq (2m)^2$ 。

真实传播子：

$$\langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle. \quad (7.122)$$

考虑到计算自由场传播子时候的性质以及一些积分围道的巧妙选取(6.3)：

$$\Delta(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} = \theta(x^0 - x'^0) \int i d\tilde{k} e^{-ik(x-x')} + \theta(x'^0 - x^0) \int i d\tilde{k} e^{+ik(x-x')}. \quad (7.123)$$

而真实传播子可以写为:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \int d\tilde{p} e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int d\tilde{p} e^{-ip(y-x)} \\
&\quad + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \int \left( \theta(x^0 - y^0) d\tilde{p} e^{-i\sqrt{s+p^2}(x^0-y^0)+ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) d\tilde{p} e^{-i\sqrt{s+p^2}(y^0-x^0)+ip(y-x)} \right) \\
&= \frac{1}{i} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{i} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + s - i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{7.124}$$

考虑真实传播子的定义以及动量空间中的传播子:

$$\left\{ i \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Delta(k^2) \right. \tag{7.125}$$

于是, 真实传播子以及真实传播子在动量空间中的函数为:

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + s - i\epsilon}, \\
\Delta(k^2) &= \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{e^{-ik(x-x')}}{-k^2 + s - i\epsilon}
\end{aligned} \tag{7.126}$$

**重要的性质** Lehmann-Kallen 真实传播子告诉我们真实传播子在动量空间中存在奇点  $k^2 = m^2$ 。并且留数是 1。

## 7.7 Loop Correction to Propagator

**1 Particle Irreducible diagram and Real propagator** 定义 Real propagator 为 (Generation Func:  $Z[J] = \exp iW[J]$ ,  $iW[J]$  is Connected Diagram without Tadpoles With two-point counterterm):

$$\frac{1}{i} \Delta(x_1 - x_2) = \langle 0 | T \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{i\delta J(x_1)} \frac{1}{i\delta J(x_2)} iW[J]|_{J=0} \tag{7.127}$$

Real Propagator 总可以表示成几何级数的形式 (观察得到)

$$\text{---} + \text{---} (\Pi) \text{---} + \text{---} (\Pi) (\Pi) \text{---} + \dots \tag{7.128}$$

中间的圈叫做”1 particle Irreducible diagram”。如图, Real Propagator 在动量空间可以写为 (它并不是 LSZ Reduction formula 得到的):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i} \Delta(k^2) + \frac{1}{i} \Delta(k^2) i\Pi(k^2) \frac{1}{i} \Delta(k^2) + \dots \\
&= \frac{1}{i} \Delta(k^2) \frac{1}{1 - \Pi(k^2) \Delta(k^2)}
\end{aligned} \tag{7.129}$$

考虑动量空间传播子的表达式:

$$\left\{ \frac{1}{i} \Delta(k^2) = \frac{-i}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} \right. \tag{7.130}$$

$$\text{上式} = \frac{1}{i} \frac{1}{-k^2 + m^2 - i\epsilon - \Pi(k^2)} \tag{7.131}$$

按照 lehmann-kallen form propagator 中的推导 (这个推导一直看不明白), 1-PI 图应该满足性质, 这个是用来确定 Counterterm 的。

$$\Pi(m^2) = 0 \quad \Pi'(m^2) = 0 \tag{7.132}$$

**1-PI in lowest order** 直接在动量图里考虑 Real Propagator。考虑 2 阶修正，Real Propagator 可以表示为：

$$\frac{1}{i}\Delta(k^2) = \overrightarrow{k} + \text{loop diagram with momentum } l + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} + \text{higher order} \quad (7.133)$$

具体用积分表示为(第二个图上下 propagator 交换与左右 vertex 同时交换腿的结果相同所以有一个 symmetry factor 1/2):

$$\frac{1}{i}\Delta(k^2) = \frac{1}{i}\Delta(k^2) + \frac{1}{i}\Delta(k^2)[i\Pi(k^2)]\frac{1}{i}\Delta(k^2) + O(g^4) \quad (7.134)$$

其中

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta((l+k)^2) \Delta(l^2) - i(-(Z_\varphi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2) + O(g^4) \quad (7.135)$$

有时将 Counter term 表示为：

$$A = (Z_\varphi - 1) \quad B = (Z_m - 1) \quad (7.136)$$

按照前文，1-PI diagram 的最低阶为 (d<4 时收敛，使用维度正规化拓展到 6 维)：

$$i\Pi(k^2) = \frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta((l+k)^2) \Delta(l^2) - i(-(Z_\varphi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2) + O(g^4) \quad (7.137)$$

我们现在计算它在约束条件  $\Pi(m^2) = 0$   $\Pi'(m^2) = 0$  下的值。

**Feynman 参数法** Feynman Formula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} &= \int dF_n (x_1 A_1 + \cdots x_n A_n)^{-n} \\ \int dF_n &= \int_0^1 (n-1)! dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots x_n - 1) \\ \int dF_n &= 1 \end{aligned} \quad (7.138)$$

对  $n = 2$  时候，

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{1}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^2} \\ &= \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(x_1 A_1 + (1-x_1) A_2)^2} \end{aligned} \quad (7.139)$$

在这个例子中 ( $m^2 - i\epsilon$  简写为  $m^2$ )：

$$\begin{aligned} \Delta((k+l)^2) \Delta(l^2) &= \frac{1}{(-l^2 + m^2)(-(l+k)^2 + m^2)} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x(-(l+k)^2 + m^2) + (1-x)(-l^2 + m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[-(l+kx)^2 + m^2 - x(1-x)k^2]^2} \end{aligned} \quad (7.140)$$

取 (D<sup>2</sup> 中的  $k^2$  如果很大的，D<sup>2</sup> 是有可能小于 0 的，我觉得解释这一点的方法是认为  $k^2$  总是在  $m^2$  附近的)：

$$q = l + kx \quad D^2 = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon \quad (D^2 > 0) \quad D \sim \sqrt{m^2 - x(1-x)k^2} - i\epsilon' \quad (7.141)$$

需要考虑的积分(先只考虑 1PI 中的第一项)变为：

$$\frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta((l+k)^2) \Delta(l^2) = \frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[-q^2 + D^2]^2} \quad (7.142)$$

做积分变换:

$$dl \rightarrow dq \quad (7.143)$$

于是:

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-q^2 + D^2]^2} \\ &= \frac{1}{2}(g)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{d-1} q dq^0}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[-(q^0 - \sqrt{|q|^2 + D^2})(q^0 + \sqrt{|q|^2 + D^2})\right]^2} \end{aligned} \quad (7.144)$$

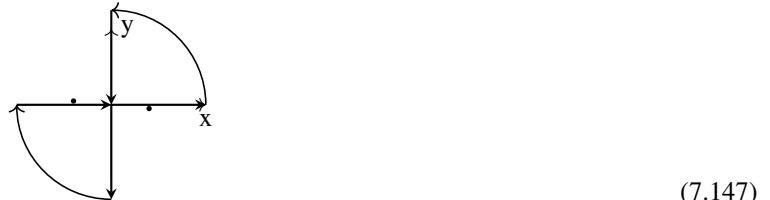
其中:

$$\sqrt{|q|^2 + D^2} \sim \sqrt{|q|^2 + m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon'} \quad (7.145)$$

**Wick Rotation** 如果先对  $q^0$  积分, 它的积分围道是:



现在把积分扩展到复平面, 首先考虑如果进行如下围道的积分:



因为它不经过任何奇点, 所以它的积分值是 0, 而圆周部分的积分, 如果在无穷远处也是 0 的话, 就可以把  $-\infty \rightarrow +\infty$  的积分转化为  $-i\infty \rightarrow +i\infty$  的积分。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq^0 \sim \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 \sim \quad (7.148)$$

为了方便, 一般定义新变量:

$$q^0 = iq^d \rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dq^d \quad ; \quad q^2 = (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^d|^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^{(d)}|^2 \quad (7.149)$$

将这个操作用到上面的积分 (把  $q^{(d)}$  理解为 minkowski 空间中的向量, 后面就不写这个上指标了。):

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{2}(ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{(d-1)} q dq^0}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-q^2 + D^2]^2} \\ &= i \frac{1}{2}(g)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{(d-1)} q dq^d}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q^{(d)})^2 + D^2]^2} \\ &= i \frac{1}{2}(g)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q^{(d)}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q^{(d)})^2 + D^2]^2} \end{aligned} \quad (7.150)$$

**利用 Gamma Function 积分** 积分公式写为 (式子中所有向量都是 Euclidian 空间的):

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b - a - \frac{1}{2}d)\Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a-d/2)} \quad (7.151)$$

对于所要考虑的积分,  $a = 0, b = 2$ , 重新定义了一下  $D, D^2 \rightarrow D$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= i \frac{1}{2} (g)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q^{(d)}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q^{(d)})^2 + D^2]^2} \\ &= i \frac{1}{2} (g)^2 \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d) \Gamma(\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(2) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-d/2)} \\ D &= m^2 - x(1-x)k^2 \end{aligned} \quad (7.152)$$

根据维度分析的结论, 在自然单位制下  $[g] = [m]^{d-\frac{1}{2}(d-2)n}$ 。对于这个问题,  $n = 3$ , 于是  $[g] = [m]^{3-\frac{1}{2}d}$  取  $d = 6-\epsilon$ 。  
 $[g] = [m]^{\epsilon/2}$ 。(这种  $\epsilon \rightarrow 0$  的方法是 Dimensional Regularization) 为了让  $g$  是一个没有量纲的数:

$$g \rightarrow g \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \quad [\tilde{\mu}] = [m] \quad (7.153)$$

于是

$$\begin{aligned} \text{上式} &= i \frac{1}{2} (g \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^2 \int_0^1 dx \frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^3 (4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}}} D^{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ &= i \frac{1}{2} (g)^2 \frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\epsilon/2} \end{aligned} \quad (7.154)$$

Gamma Function 具有性质 (非负整数  $n$  和小量  $x$ ):

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!}{n! 2^n} \sqrt{\pi} \\ \Gamma(-n+x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right] \\ \gamma &= 0.5772 \end{cases} \quad (7.155)$$

按照这个性质进行展开 ( $A^{\frac{\epsilon}{2}} = \exp[\frac{\epsilon}{2} \ln(A)] \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(A)$ ):

$$\begin{aligned} \text{上式} &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1 \right) \int_0^1 dx D \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right) + O(\epsilon^2) \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) D - \gamma D + D \ln \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right) + O(\epsilon) \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) D + D \ln \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{e^\gamma D} \right) + O(\epsilon) \right) \end{aligned} \quad (7.156)$$

考虑到  $D$  的表达式, 并定义新的变量:

$$\begin{cases} D &= m^2 - x(1-x)k^2 \rightarrow \int dx D = m^2 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^2 = m^2 - \frac{1}{6}k^2 \\ \mu &= \sqrt{4\pi} e^{\gamma/2} \tilde{\mu} \end{cases} \quad (7.157)$$

$$\text{上式} = -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) (m^2 - \frac{1}{6}k^2) + \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{\mu^2}{D} \right) \right) \quad (7.158)$$

1-PI in lowest order.

$$\begin{aligned} i\Pi(k^2) &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) (m^2 - \frac{1}{6}k^2) + \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{\mu^2}{D} \right) \right) - i \left( -(Z_\varphi - 1)k^2 + (Z_m - 1)m^2 \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) (m^2 - \frac{1}{6}k^2) + \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{\mu^2}{D} \right) \right) - i \left( -Ak^2 + Bm^2 \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) (m^2 - \frac{1}{6}k^2) + \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{m^2}{D} \right) + \int_0^1 dx 2D \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) - i \left( -Ak^2 + Bm^2 \right) \\ &= -i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( \left( \frac{2}{\epsilon} + 1 \right) (m^2 - \frac{1}{6}k^2) + \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{m^2}{D} \right) + 2(m^2 - \frac{1}{6}k^2) \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) - i \left( -Ak^2 + Bm^2 \right) \\ &= i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + i \left( \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right] + A \right) k^2 - i \left( \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right] + B \right) m^2 \end{aligned} \quad (7.159)$$

取系数 A,B 分别为:

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] - \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} k_A \\ B = -\frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] - \frac{g^2}{(4\pi)^3} k_B \end{cases} \quad (7.160)$$

$$i\Pi(k^2) = i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + i \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left( -\frac{1}{6} k_A k^2 + k_B m^2 \right) \quad (7.161)$$

将系数写为:

$$\alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \quad (7.162)$$

$$i\Pi(k^2) = i \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + i \alpha \left( -\frac{1}{6} k_A k^2 + k_B m^2 \right) \quad (7.163)$$

为了满足条件: $\Pi(m^2) = 0$   $\Pi'(m^2) = 0$ 。直接计算发现可以这样给定系数  $k_A = -\frac{1}{2}$ ,  $k_B = -\frac{1}{12}$

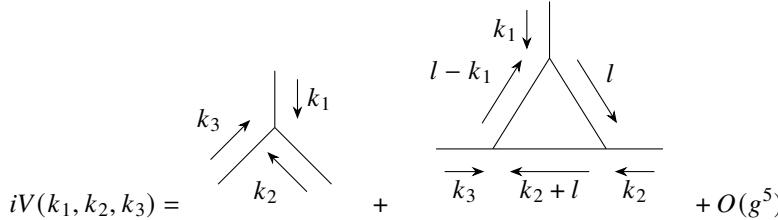
$$i\Pi(k^2) = i \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{D_0} \right) - i \alpha \left( -\frac{1}{12} k^2 + \frac{1}{12} m^2 \right) \quad (7.164)$$

其中

$$\begin{cases} D = m^2 - x(1-x)k^2 & D_0 = m^2 - x(1-x)m^2 \\ \alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \end{cases} \quad (7.165)$$

## 7.8 Loop Correction to the vertex

这里也是  $\varphi^3$  场, 直接在动量空间中考虑。对于 Exact 3-point vertex function  $iV(k_1, k_2, k_3)$ . 它定义为 sum of one-particle irreducible diagrams with 3 external lines。直接考虑 Exact 3-point vertex function 在动量表示中的最低阶修正:



$$iV(k_1, k_2, k_3) = \text{bare vertex} + \text{loop diagram} + O(g^5) \quad (7.166)$$

用式子表达上面的图为

$$iV(k_1, k_2, k_3) = iZ_g g + (ig)^3 \left( \frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \Delta((l - k_1)^2) \Delta((l + k_2)^2) \Delta(l^2) \quad (7.167)$$

**Feynman 参数法** 考虑积分中的传播子相乘:

$$\begin{aligned} \Delta((l - k_1)^2) \Delta((l + k_2)^2) \Delta(l^2) &= \frac{1}{-(l - k_1)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{-(l + k_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{-(l)^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &= \int dF_3 \left[ -x_1(l - k_1)^2 - x_2(l + k_2)^2 - x_3 l^2 + m^2 \right]^{-3} \end{aligned} \quad (7.168)$$

其中

$$\int dF_3 = 2dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \quad (7.169)$$

于是:

$$\begin{aligned}
-x_1(l - k_1)^2 - x_2(l + k_2)^2 - x_3l^2 + m^2 &= -x_1(l^2 + k_1^2 - 2lk_1) - x_2(l^2 + k_2^2 + 2lk_2) - (1 - x_1 - x_2)l^2 + m^2 \\
&= -l^2 + 2l(x_1k_1 - x_2k_2) - x_1k_1^2 - x_2k_2^2 + m^2 \\
&= -(l - (x_1k_1 - x_2k_2))^2 + (x_1k_1 - x_2k_2)^2 - x_1k_1^2 - x_2k_2^2 + m^2 \\
&= -(l - (x_1k_1 - x_2k_2))^2 - x_1(1 - x_1)k_1^2 - x_2(1 - x_2)k_2^2 - 2x_1x_2k_1k_2 + m^2 \\
&= -q^2 + D
\end{aligned} \tag{7.170}$$

$$\begin{aligned}
D &= -x_1(1 - x_1)k_1^2 - x_2(1 - x_2)k_2^2 - 2x_1x_2k_1k_2 + m^2 \\
&= -x_1(1 - x_1 - x_2)k_1^2 - x_2(1 - x_2 - x_1)k_2^2 - x_1x_2k_1^2 - x_1x_2k_2^2 - 2x_1x_2k_1k_2 + m^2 \\
&= -x_1(1 - x_1 - x_2)k_1^2 - x_2(1 - x_2 - x_1)k_2^2 - x_1x_2(k_1 + k_2)^2 + m^2 \\
&= -x_1x_3k_1^2 - x_2x_3k_2^2 - x_1x_2k_3^2 + m^2
\end{aligned} \tag{7.171}$$

$$q = l - (x_1k_1 - x_2k_2)$$

经过 Feynman 参数法后, Vertex Function 修正为 ( $d < 6$  时才收敛, 采用维度正规化逼近 6 维):

$$\begin{aligned}
iV(k_1, k_2, k_3) &= iZ_g g + (ig)^3 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int dF_3 \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-q^2 + D]^3} \\
&= iZ_g g + (g)^3 \int dF_3 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-q^2 + D]^3}
\end{aligned} \tag{7.172}$$

**Wick Rotation** 如果考虑到虚数部分,

$$D = -x_1x_3k_1^2 - x_2x_3k_2^2 - x_1x_2k_3^2 + m^2 - i\epsilon \tag{7.173}$$

和上一节一样, 可以使用 Wick Rotation。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dq &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq \\
q^0 = iq^d &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dq^d \quad q^2 = (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^{(d)}|^2
\end{aligned} \tag{7.174}$$

使用 Wick Rotation 之后, 积分变为 Euclidian 空间中的积分:

$$iV(k_1, k_2, k_3) = iZ_g g + i(g)^3 \int dF_3 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + D]^3} \tag{7.175}$$

**Gamma Function 积分** Gamma Function 积分公式写为 (其中所有向量都是 Minkowski 空间中的):

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b - a - \frac{1}{2}d)\Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a-d/2)} \tag{7.176}$$

在这个问题中,  $a = 0, b = 3$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + D]^3} &= \frac{\Gamma(3 - \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3)} D^{-(3 - \frac{d}{2})} \\
&= \frac{\Gamma(3 - \frac{1}{2}d)}{2(4\pi)^{d/2}} D^{-(3 - \frac{d}{2})}
\end{aligned} \tag{7.177}$$

在  $d = 6 - \epsilon$  处考虑。 $\epsilon$  是小量。并且改写  $g \rightarrow g\tilde{\mu}^{\epsilon/2}$ , 改写后的  $g$  是一个无量纲的量。此时, Vertex Function 写为:

$$\begin{aligned} iV(k_1, k_2, k_3) &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 (\tilde{\mu})^{3\epsilon/2} \int dF_3 \frac{\Gamma(3 - \frac{1}{2}d)}{2(4\pi)^{d/2}} D^{-(3-\frac{d}{2})} \\ &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 (\tilde{\mu})^{3\epsilon/2} \int dF_3 \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{2(4\pi)^3 (4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}}} D^{-(3-\frac{d}{2})} \\ &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 (\tilde{\mu})^{3\epsilon/2} \int dF_3 \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{2(4\pi)^3 (4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}}} D^{-\frac{\epsilon}{2}} \\ &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 \int dF_3 \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{2(4\pi)^3} \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^3}{D} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \end{aligned} \quad (7.178)$$

Gamma Function 具有性质 (非负整数  $n$  和小量  $x$ ):

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!}{n! 2^n} \sqrt{\pi} \\ \Gamma(-n+x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right] \\ \gamma &= 0.5772 \end{cases} \quad (7.179)$$

$$\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (7.180)$$

于是 ( $A^x \sim \exp(x \ln(A)) \sim 1 + x \ln(A)$ ):

$$\begin{aligned} iV(k_1, k_2, k_3) &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 \int dF_3 \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{2(4\pi)^3} \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^3}{D} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= iZ_g g\tilde{\mu}^{\epsilon/2} + i(g)^3 \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \int dF_3 \frac{1}{2(4\pi)^3} \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^3}{D} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2} \left( Z_g + \frac{1}{2} g^2 \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \int dF_3 \frac{1}{(4\pi)^3} \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right) \end{aligned} \quad (7.181)$$

$$\begin{aligned} &= ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2} \left( Z_g + \frac{1}{2} (g)^2 \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \int dF_3 \frac{1}{(4\pi)^3} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right) + O(\epsilon^2) \right) \right) \\ &= ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2} \left( Z_g + \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{2}{\epsilon} - \int dF_3 \gamma + O(\epsilon) \right) \left( 1 + \int dF_3 \frac{\epsilon}{2} \ln \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right) + O(\epsilon^2) \right) \right) \\ iV(k_1, k_2, k_3) &= ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2} \left( Z_g + \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{2}{\epsilon} + \int dF_3 \ln \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma D} \right) + O(\epsilon) \right) \right) \end{aligned} \quad (7.182)$$

**Counter Term** 取 Counter term 以及系数  $g$  中含有的质量项分别为:

$$Z_g = 1 + C \quad \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma} = \mu^2 \quad (7.183)$$

$$\begin{aligned} \frac{iV(k_1, k_2, k_3)}{ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2}} &= 1 + C + \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{2}{\epsilon} + \int dF_3 \ln \left( \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma D} \right) \right) \\ &= 1 + C + \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \int dF_3 \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (7.184)$$

取  $C$  为:

$$C = -\frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) + K_C \right) \quad (7.185)$$

于是:

$$\frac{iV(k_1, k_2, k_3)}{ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2}} = 1 - \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} K_C - \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \int dF_3 \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) \quad (7.186)$$

并且发现式子与  $g$  中的质量项  $\mu$  没有关系了。

归一化条件写为

$$iV_3(0, 0, 0) = ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2} \quad (7.187)$$

注意到:

$$D = -x_1x_3k_1^2 - x_2x_3k_2^2 - x_1x_2k_3^2 + m^2 \rightarrow \underline{k_1 = k_2 = k_3 = 0} \rightarrow D = m^2 \quad (7.188)$$

可以取

$$K_C = 0 \quad (7.189)$$

于是:

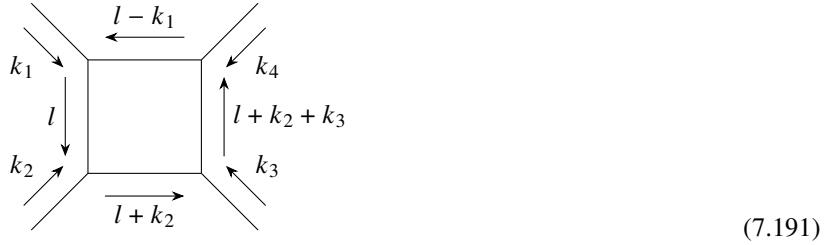
$$\frac{iV(k_1, k_2, k_3)}{ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \int dF_3 \ln\left(\frac{D}{m^2}\right) \quad (7.190)$$

## 7.9 Other 1PI vertices

在计算圈图对 vertices 修正时, 方法是先考虑有三个外腿的 1PI diagram。在计算 Feynman 图时不考虑外腿。同样的方法可以用来计算圈图对 n-point vertex 的修正。其中, n-point vertex 定义为  $iV_n(k_1, \dots, k_n)$ 。

将刚才提到的计算方法用到计算 4-point Vertex  $iV_4(k_1, k_2, k_3, k_4)$  上。

**画出 1-PI, 4 外腿图** 如果仅考虑最低阶修正, 图画为:



另外两种不同的构型对 4-point vertex 也有贡献。

**计算 4-point vertex** 按照第一段说的方法, 直接写出:

$$iV_4 = (i)^4 g^4 \int \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{l^4} \Delta((l - k_1)^2) \Delta((l + k_2)^2) \Delta((l + k_2 + k_3)^2) \Delta(l^2) + (k_3 \leftrightarrow k_2) + (k_3 \leftrightarrow k_4) + O(g^6) \quad (7.192)$$

Feynman 参数法:

$$\begin{aligned} & \Delta((l - k_1)^2) \Delta((l + k_2)^2) \Delta((l + k_2 + k_3)^2) \Delta(l^2) \\ &= \int dF_4 [-x_1(l - k_1)^2 - x_2(l + k_2)^2 - x_3(l + k_2 + k_3)^2 - x_4l^2 + m^2]^{-4} \\ &= \int dF_4 [q^2 + D_{1234}]^{-4}. \end{aligned} \quad (7.193)$$

其中(我直接抄书了, 好懒啊我):

$$\begin{cases} D_{1234} = -x_1x_4k_1^2 - x_2x_4k_2^2 - x_2x_3k_3^2 - x_1x_3k_4^2 - x_1x_2(k_1 + k_2)^2 - x_3x_4(k_3 + k_4)^2 + m^2 \\ q = l - x_1k_1 + x_2k_2 + x_3(k_2 + k_3) \end{cases} \quad (7.194)$$

先用 Wick Rotation 再用 Gamma Function 积分(自己没算, 好懒啊我):

$$\left\{ \int \frac{d^6 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{(-q^2 + D)^4} = \frac{i}{6(4\pi)^3 D} \right. \quad (7.195)$$

总的来说:

$$V_4 = \frac{g^4}{6(4\pi)^3} \int dF_4 \left( \frac{1}{D_{1234}} + \frac{1}{D_{1324}} + \frac{1}{D_{1423}} \right) + O(g^6) \quad (7.196)$$

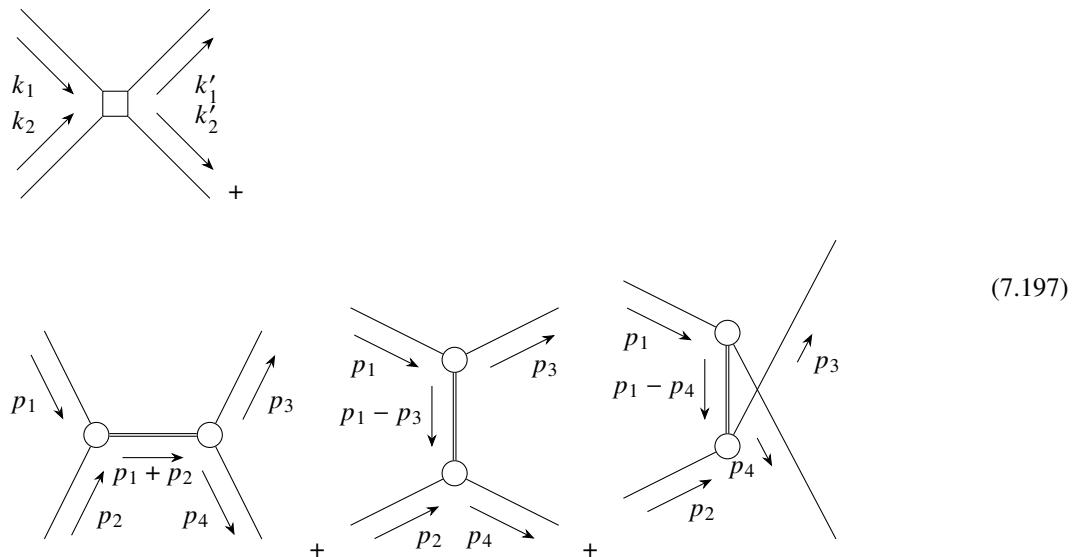
## 7.10 skeleton expansion

对于有  $E$  个外腿的图。可以通过 Skeleton expansion 的方法直接求出散射振幅。

- 根据归一化条件  $\Pi(p^2) = 0$   $\Pi'(p^2) = 0$  以及  $V_3(0, 0, 0) = g$  逐级确定 Counter term。
- 计算出真实传播子以及真实 3 点 vertex  $iV_3$
- 首先计算  $n$  point vertex。 $(4 \leq n \leq E)$ 。(画出有  $n$  个外腿的 1-PI 图，计算他们对  $n$ -point Vertex 的贡献。注意，画  $n$ -point 图时不要考虑圈图对传播子的修正以及圈图对 vertex 的修正。)
- 计算  $n$  point vertex 时，将传播子当作真实传播子算，将 vertex 当作真实 vertex 算。
- 画有  $E$  个外腿的树图，其中含有 Vertex  $iV_3 \dots iV_n$ 。并且他们之间的传播子是真实传播子。

**2 particle elastic scattering at one loop** 之前在介绍用 LSZ reduction formula 计算散射振幅并且引入了动量空间的 Feynman 图时，计算了  $\varphi^3$  弹性散射（出射粒子数目 = 入射粒子数目）的最低阶树图修正。现在想用 Skeleton 展开的方法求它的低阶修正（圈图修正）。

按照 Skelton expansion 的方法，现在有  $E = 4$  个外腿，需要考虑的  $n$ -point vertex 有  $iV_3, iV_4$ 。按照 Skeleton expansion 的方法，直接画出对 2 粒子弹性散射有贡献的图。



按照计算树图散射振幅的 Symmetry factor 性质，他们的 Symmetry factor 都是 1。按照 Skeleton expansion 的方法，图中的方框 vertex 和圆圈 vertex 分别是 4-point vertex  $iV_4$ ，以及 3-point vertex  $iV_3$ 。（上面有的写成  $p$  了，不想改了，反正他们都是  $k$  实际上，我好懒）

利用 Mandelstam 变量：

$$\begin{cases} s = (k_1 + k_2)^2 = (k'_1 + k'_2)^2, \\ t = (k_1 - k'_1)^2 = (k_2 - k'_2)^2, \\ u = (k_1 - k'_2)^2 = (k_2 - k'_1)^2, \\ s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m'_1^2 + m'_2^2 = 4m^2 \quad (\varphi^3 \text{ theory}). \end{cases} \quad (7.198)$$

之前计算过的  $n$ -point Vertex ( $n=3$  or  $4$ )，以及真实传播子  $\Delta$ :

$$\begin{cases} \Delta(s) &= \frac{1}{-s+m^2-i\epsilon-\Pi(s)}, \\ i\Pi(s) &= i\frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dxF \ln\left(\frac{D}{D_0}\right) - i\alpha\left(-\frac{1}{12}s + \frac{1}{12}m^2\right), \\ \frac{iV(k_1, k_2, k_3)}{ig\bar{\mu}^{\epsilon/2}} &= 1 - \frac{1}{2}\frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \int dF_3 \ln\left(\frac{D_3}{m^2}\right), \\ V_4 &= \frac{g^4}{6(4\pi)^3} \int dF_4 \left(\frac{1}{D_{1234}} + \frac{1}{D_{1324}} + \frac{1}{D_{1423}}\right) + O(g^6). \end{cases} \quad (7.199)$$

其中（推导 n-point vertex 时将他们的动量都当做了入射动量，不过这里入射和出射是分开的，需要注意）：

$$\begin{cases} D = m^2 - x(1-x)s & D_0 = m^2 - x(1-x)m^2 & \alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3}, \\ D_3 = -x_1x_3k_1^2 - x_2x_3k_2^2 - x_1x_2k_3^2 + m^2, \\ D_{1234} = -x_1x_4k_1^2 - x_2x_4k_2^2 - x_2x_3k_3^2 - x_1x_3k_4^2 - x_1x_2(k_1+k_2)^2 - x_3x_4(k_3+k_4)^2 + m^2 \end{cases} \quad (7.200)$$

观察发现， $V_3$  如果有两个入射，一个出射，并且入射的都是 on-shell 的。那么它的值之和出射的量有关。对于上面的  $D_3$ ，取  $k_1 + k_2 = -k_3$ 。

$$\begin{aligned} D_3 &= -x_1x_3k_1^2 - x_2x_3k_2^2 - x_1x_2k_3^2 + m^2, \\ &= (1 - x_3(x_1 + x_2)) m^2 - x_1x_2k_3^2, \\ &= (1 - x_3(x_1 + x_2)) m^2 - x_1x_2s^2, \\ &= D_3(s). \end{aligned} \quad (7.201)$$

同样的，对于 4-point vertex，如果入射的全都是 on-shell(满足能动量方程)，那么它也可以写为简单的形式：

$$D_{1234} = -x_1x_2s - x_3x_4t + (1 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)) m^2. \quad (7.202)$$

同理：

$$\begin{aligned} D_{1324} &= -x_1x_2t - x_3x_4u + (1 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)) m^2, \\ D_{1423} &= -x_1x_2u - x_3x_4s + (1 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)) m^2. \end{aligned} \quad (7.203)$$

之后将这三个 4-point vertex 中的 D 函数写为。

$$D_4(s, t) = -x_1x_2s - x_3x_4t + (1 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)) m^2. \quad (7.204)$$

并且，使用 Feynman 参数法的积分是：

$$\begin{aligned} \int dF_n &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots + x_{n-1} - 1) f(x), \\ &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} f(x)|_{x_n=1-x_1-\cdots-x_{n-1}}. \end{aligned} \quad (7.205)$$

直接写出散射振幅：

$$i\mathcal{T}_{1-loop} = (iV_3(s))^2 \frac{1}{i} \Delta(s) + (iV_3(t))^2 \frac{1}{i} \Delta(t) + (iV_3(u))^2 \frac{1}{i} \Delta(u) + iV_4(s, t, u). \quad (7.206)$$

散射振幅不容易直接计算，取高能近似来计算。具体来说就是取各个出入射动量比质量  $m$  大很多。类似于将静质量设置为 0。（计算直接抄的 srednicki，我好懒）

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= -\frac{1}{2} \alpha s \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\right) \right] + \frac{1}{12} \alpha s, \\ &= -\frac{1}{12} \alpha s \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + 3 - \pi\sqrt{3} \right]. \end{aligned} \quad (7.207)$$

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \frac{1}{-s - \Pi(s)}, \\ &= -\frac{1}{s} \left( 1 + \frac{1}{12} \alpha \left[ \ln\left(-s/m^2\right) + 3 - \pi\sqrt{3} \right] \right) + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (7.208)$$

$$\begin{aligned} V_3(s)/g &= 1 - \frac{1}{2} \alpha \int dF_3 \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \ln(x_1x_2) \right], \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) - 3 \right]. \end{aligned} \quad (7.209)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dF_4}{D_4(s, t)} &= -\frac{3}{s+t} \left( \pi^2 + [\ln(s/t)]^2 \right), \\ &= \frac{3}{u} \left( \pi^2 + [\ln(s/t)]^2 \right). \end{aligned} \quad (7.210)$$

最终散射振幅的计算结果是:

$$\mathcal{T}_{\text{1-loop}} = g^2 [F(s, t, u) + F(t, u, s) + F(u, s, t)], \quad (7.211)$$

其中

$$F(s, t, u) = -\frac{1}{s} \left( 1 - \frac{11}{12}\alpha \left[ \ln(-s/m^2) + c \right] - \frac{1}{2}\alpha [\ln(t/u)]^2 \right), \quad (7.212)$$

其中  $c = (6\pi^2 + \pi\sqrt{3} - 39)/11 = 2.33s$ 。

在上面的计算中, 用到了性质  $s > 0, t < 0, u < 0$ 。

## 7.11 Modified minimal subtraction

重新考虑确定 Counter term 前的 Real propagator 中的 1-PI 项

$$i\Pi(k^2) = i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + i \left( \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] + A \right) k^2 - i \left( \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] + B \right) m^2. \quad (7.213)$$

其中

$$D = -x(1-x)k^2 + m^2. \quad (7.214)$$

考虑到 Real propagator 的性质, 用来确定 Counter term 的条件一般是  $\Pi(m^2) = 0, \Pi'(m^2) = 0$ 。但是在  $m = 0$  时, 关于一阶导数的条件是没办法满足的, 因为计算 1-PI 项时会遇到 ill-defined 积分。这个现象的深层原因是用 Lehmann-Callan Form Real-propagator 确定真实传播子时如果  $m = 0, 4m^2$  和  $m^2$  会接在一起。最终导致奇点并不是  $k^2 = m^2$ , 并且留数并不是 1。

如果不采用原来的正规化条件, 在确定 Counter term 后, 认为真实传播子有了奇点  $m_{ph}^2$ , 同时在这个地方的留数是  $R$ 。现在重新考虑用 LSZ reduction formula 计算 S matrix 以及引出散射振幅的过程。在推导 LSZ reduction formula 时, 用的是没有 Counter-term 的场。但是却把它用在了有 Counter-term 的情况下。从物理直觉上, 为了让 LSZ formula 能够生成和之前一样的散射振幅形式需要对他进行修改。

- 为了让出入射粒子保持静质量是  $m_{ph}$  的 on-shell 状态,  $\partial^2 + m^2 \rightarrow \partial^2 + m_{ph}^2$ 。
- 为了让 Real propagator 在奇点的留数是 1, 在计算 n-point function 时  $\varphi \rightarrow R^{-1/2}\varphi$ 。

将这些操作叫做 modified minimal subtraction scheme。在这个 scheme 下, 散射振幅的变化是:

- 每个外腿不再是 1, 而是  $R^{1/2}$ , 这是因为计算场缩并时引入了  $R^{-1/2}$ , 结合奇点的留数  $R$ , 最终得到。
- 内部的传播子仍然是  $\frac{1}{i-k^2+m^2}$ , 这里的质量是 Lagrangian 中的质量。
- 每一个 Vertex 仍然是  $iZ_g g$ , 并且也要考虑 2-point vertex 引起的 counter term。

**$\overline{MS}$  Scheme for  $\varphi^3$**  到现在, 依然没有说 Counterterm 应该怎么选取。选取规则就是, 只要一个发散项, 不要常数项。对于  $\varphi^3$  theory

$$i\Pi(k^2) = i \frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx D \ln \left( \frac{D}{m^2} \right) + i \left( \frac{1}{6} \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] + A \right) k^2 - i \left( \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right] + B \right) m^2. \quad (7.215)$$

选取最少的项抵消发散:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{6}\alpha \frac{1}{\epsilon}, \\ B &= -\alpha \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (7.216)$$

同样的, 对于 3-point Vertex

$$\frac{iV(k_1, k_2, k_3)}{ig\tilde{\mu}^{\epsilon/2}} = 1 + C + \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln(\frac{\mu}{m}) \right) - \frac{1}{2} \frac{(g)^2}{(4\pi)^3} \int dF_3 \ln(\frac{D}{m^2}). \quad (7.217)$$

也是选择最少的抵消项

$$C = -\alpha \frac{1}{\epsilon}. \quad (7.218)$$

在用了这些抵消项之后，1-PI diagram 以及 3-Vertex 写为：

$$\begin{aligned}\Pi_{\bar{MS}}(k^2) &= -\frac{1}{12}\alpha(-k^2 + 6m^2) + \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D \ln(D/\mu^2) + O(\alpha^2), \\ V_{3,\bar{MS}} &= g \left[ 1 - \frac{1}{2} \int dF_3 \ln(D_3/\mu^2) + O(\alpha^2) \right].\end{aligned}\quad (7.219)$$

其中  $D = -x(1-x)k^2 + m^2$ ,  $D_3 = xyk_1^2 + yzk_2^2 + zxk_3^2 + m^2$ 。

**物理质量以及留数** 物理质量指的是 Real propagator 出现奇点的地方。

$$-m_{ph}^2 + m^2 - \Pi_{\bar{MS}}(m_{ph}^2) = 0. \quad (7.220)$$

近似解写为

$$m_{ph}^2 = m^2 - \Pi_{\bar{MS}}(m^2) + O(\alpha^2). \quad (7.221)$$

结果是

$$m_{ph}^2 = m^2 \left[ 1 + \frac{5}{12}\alpha \left( \ln(\mu^2/m^2) + c' \right) + O(\alpha^2) \right], \quad (7.222)$$

其中  $c' = (34 - 3\pi\sqrt{3})/15 = 1.18$ 。

对于真实传播子，它在  $k^2 = m_{ph}^2$  奇点处的留数是

$$R^{-1} = 1 + \Pi'(m_{ph}^2). \quad (7.223)$$

计算得到

$$R^{-1} = 1 + \frac{1}{12}\alpha \left( \ln(\mu^2/m^2) + c'' \right) + O(\alpha^2), \quad (7.224)$$

其中  $c'' = (17 - 3\pi\sqrt{3})/3 = 0.23$ 。

**散射振幅** 在这个 Scheme 下计算散射振幅得到

$$\mathcal{T} = R^2 \mathcal{T}_0 \left[ 1 - \frac{11}{12}\alpha \left( \ln(s/\mu^2) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (7.225)$$

再考虑解决红外发散时引入的系数

$$|\mathcal{T}|_{obs}^2 = |\mathcal{T}|^2 \left[ 1 + \frac{1}{3}\alpha \left( \ln(\delta^2 s/m^2) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (7.226)$$

其中  $\mathcal{T}_0$  是没有任何修正的树图散射振幅。

**红外发散** 这一部分没有看的很明白，但是核心思想是，当粒子的质量很小时，有时候出射粒子并不是一个，但是探测器却把他们当做一个，导致的结果是（其中  $\delta$  表示了仪器的分辨率）

$$|\mathcal{T}|_{obs}^2 = |\mathcal{T}_0|^2 \left[ 1 - \alpha \left( \frac{3}{2} \ln(s/m^2) + \frac{1}{3} \ln(1/\delta^2) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (7.227)$$

**观测量不含修正  $\mu$**  需要保证观测量  $|\mathcal{T}|_{obs}^2$  不随  $\mu$  变化

$$\ln |\mathcal{T}|_{obs}^2 = C_1 + 2\ln\alpha + 3\alpha(\ln\mu + C_2) + O(\alpha^2). \quad (7.228)$$

其中  $C_1$  以及  $C_2$  都与  $\mu$  以及  $\alpha$  独立。需要观测量与  $\mu$  无关，于是对它求导。

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{d\ln\mu} \ln |\mathcal{T}|_{obs}^2, \\ &= \frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\ln\mu} + 3\alpha + O(\alpha^2).\end{aligned}\quad (7.229)$$

最终得到:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d \ln \mu} &= -\frac{3}{2}\alpha^2 + O(\alpha^3), \\ \alpha(\mu_2) &= \frac{\alpha(\mu_1)}{1 + \frac{3}{2}\alpha(\mu_1) \ln(\mu_2/\mu_1)}.\end{aligned}\tag{7.230}$$

类似的, 物理质量也不能和  $\mu$  有关系

$$\frac{dm}{d \ln \mu} = \left(-\frac{5}{12}\alpha + O(\alpha^2)\right)m.\tag{7.231}$$

# 第八章 Dirac 方程

这一章讲 Dirac 方程的基本性质。不过由于这一章用的 gamma matrix 和一般量子化时用的不一样，所以这一章只是用来理解 Dirac 方程。和量子场论的主线关系不大。

## 8.1 Dirac 方程的导出

**Dirac 方程导出** 类似于 Schrodinger 方程，考虑相对论波函数满足 Dirac 方程

$$\hat{E}\psi = (\alpha \cdot \hat{\mathbf{P}} + \beta m)\psi \quad (8.1)$$

认为能量和动量算符分别为  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$   $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar \nabla$  Dirac 方程就是 (没有用四维指标，如果用了的话应该是  $\hat{P}^\mu = i\hbar \partial^\mu$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\psi \quad (8.2)$$

平方得到:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)(-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\psi \\ &= -\alpha_x^2 \partial_x^2 - \alpha_y^2 \partial_y^2 - \alpha_z^2 \partial_z^2 + \beta^2 m^2 \psi \\ &\quad - (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) \partial_x \partial_y \psi - (\alpha_x \alpha_z + \alpha_z \alpha_x) \partial_x \partial_z \psi - (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) \partial_y \partial_z \psi \\ &\quad - im(\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) \partial_x \psi - im(\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) \partial_y \psi - im(\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) \partial_z \psi \end{aligned} \quad (8.3)$$

为了满足狭义相对论的 Einstein 能量-动量关系-其实也就是满足 Klein-Gordan 方程

$$\hat{E}^2 \psi = (\hat{\mathbf{P}}^2 + m^2)\psi \quad (8.4)$$

这也也就要求了  $\alpha$  和  $\beta$  的代数关系:

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 &= 1 \quad \beta^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \{\alpha_j, \beta\} &= 0 \\ \beta^\dagger &= \beta \quad \alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \text{由于 } \hat{E} \text{ 的幺正性} \end{aligned} \quad (8.5)$$

这些都是矩阵。 $\psi$  被称为 Dirac spinor

**Dirac 方程的协变形式,  $\gamma$  矩阵** 接下来，引出  $\gamma$  矩阵。给 Dirac 方程同时乘以  $\beta$  得到:

$$i\beta \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + i\beta \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + i\beta \frac{\partial}{\partial t} \psi - \beta^2 m \psi = 0 \quad (8.6)$$

定义  $\Gamma$  矩阵:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^1 \equiv \beta \alpha_x \quad \gamma^2 \equiv \beta \alpha_y \quad \gamma^3 \equiv \beta \alpha_z \quad (8.7)$$

Dirac 方程可以写为更为简单的形式:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (8.8)$$

对  $\alpha$  和  $\beta$  矩阵的要求可以转变为对  $\gamma$  矩阵的要求。

$$\begin{aligned} \{\beta, \beta \alpha_i\} &= \beta \beta \alpha_i + \beta \alpha_i \beta = \alpha_i - \alpha_i = 0 \\ \{\beta, \beta\} &= \beta^2 + \beta^2 = 2 \\ \{\beta \alpha_i, \beta \alpha_i\} &= 2\beta \alpha_i \beta \alpha_i = -2\beta^2 \alpha_i^2 = -2 \\ \{\beta \alpha_i, \beta \alpha_j\} &= \beta \alpha_i \beta \alpha_j + \beta \alpha_j \beta \alpha_i = -\beta^2 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0 \\ \beta^\dagger &= \beta \quad (\beta \alpha_i)^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \end{aligned} \quad (8.9)$$

也就是:

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k\end{aligned}\tag{8.10}$$

### 命题 8.1 (Dirac 方程)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0\tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k\end{aligned}\tag{8.12}$$

## 8.2 \* Pauli's Fundamental Theorem

不同  $\gamma$  表示之间的相似性 想要验证。对于不同的  $\gamma$  矩阵表示  $\gamma_\mu$  和  $\gamma'_\mu$ 。它们之间满足相似性:  $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$

(0) 构建 16 个  $4 \times 4$  矩阵

$$\begin{aligned}\Gamma_A = &\mathbb{I}, \gamma_0, i\gamma_1, i\gamma_2, i\gamma_3, \\ &i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_0, \gamma_2\gamma_0, \gamma_3\gamma_0, \\ &\gamma_1\gamma_2\gamma_3, i\gamma_1\gamma_2\gamma_0, i\gamma_3\gamma_1\gamma_0, i\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \\ &i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \quad (A = 1 \cdots 16)\end{aligned}\tag{8.13}$$

另外, 定义矩阵  $\gamma_5$ :

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0\tag{8.14}$$

满足几个性质:

$$\Gamma_A^2 = 1 \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad \Gamma_A \Gamma_B = Const \quad \Gamma_C \quad (A \neq B \Rightarrow C \neq 1; \text{ 固定 } A \text{ 的同时 } B \text{ 遍历 } 16 \Rightarrow C \text{ 遍历 } 16)\tag{8.15}$$

(1) 对于所有的  $\Gamma_A \quad A \neq 1$ , 一定可以找到一个  $\Gamma_B$  s.t.:

$$\Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B = -\Gamma_A\tag{8.16}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccc} A & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline B & 9 & 4 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 7 & 2 \end{array}$$

(2) 对于所有的  $\Gamma_A \quad (A = 2 \cdots 16)$ ,  $tr(\Gamma_A) = 0$

$$tr(-\Gamma_A) = tr(\Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B) = tr(\Gamma_B^2 \Gamma_A) = tr(\Gamma_A) = 0\tag{8.17}$$

(3)  $\Gamma_A$  是相互线性无关的。也就是要证明:

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A = 0 \Rightarrow a_A = 0 \quad (A = 1 \cdots 16)\tag{8.18}$$

**证明** 认为

$$\sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A = 0\tag{8.19}$$

于是:

$$\begin{aligned} \Gamma_B \left( \sum_{A=1}^{16} a_A \Gamma_A \right) &= a_B \Gamma_B^2 + \sum_{A \neq B} a_A \Gamma_B \Gamma_A = 0 \\ a_B + \sum_{C \neq 1} a_A \text{Const } \Gamma_C &= 0 \\ 4a_B + \sum_{C \neq 1} a_A \text{Const } \text{tr}(\Gamma_C) &= 0 \\ a_B &= 0 \quad (B = 1 \dots 16) \end{aligned} \tag{8.20}$$

□

(4) 所有的  $4 \times 4$  矩阵可以用  $\Gamma_A$  展开。因为上面说已经找到了 16 个线性无关的矩阵基底。

$$\chi = \sum_A \chi_A \Gamma_A, \quad \chi_B = \frac{1}{4} \text{tr}(\Gamma_B \chi) \tag{8.21}$$

(5) 如果有一个矩阵和所有的  $\Gamma_A$  都对易，那么它正比于  $\mathbb{I}$ 。认为:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_B \Gamma_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_A|_{B \neq 1} \\ \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C &= -\Gamma_B \\ \Gamma_C \chi &= \chi \Gamma_C \Rightarrow \chi = \Gamma_C \chi \Gamma_C \end{aligned} \tag{8.22}$$

于是:

$$\begin{aligned} \chi_B \Gamma_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_A|_{B \neq 1} &= \chi_B \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C + \sum_{A \neq B} \chi_A \Gamma_C \Gamma_A \Gamma_C|_{B \neq 1} \\ \chi_B \text{tr}(\Gamma_B^2) + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} &= \chi_B \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_C \Gamma_B \Gamma_C) + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_C \Gamma_A \Gamma_C)|_{B \neq 1} \\ 4\chi_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} &= -4\chi_B + \sum_{A \neq B} \chi_A \text{tr}(-\Gamma_B \Gamma_A)|_{B \neq 1} \quad (\Gamma_A \Gamma_B \sim \Gamma_D|_{D \neq 1}) \\ \chi_B &= 0 \end{aligned} \tag{8.23}$$

那么:

$$\chi \sim \mathbb{I} \tag{8.24}$$

(6) 能找到两组 Dirac 基底  $\gamma_\mu$  和  $\gamma'_\mu$ ，它们构成 16 维空间中的基底  $\Gamma_A$  和  $\Gamma'_A$ 。那么可以定义  $S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B$  ( $F$  是任意 4 维矩阵) 使得:

$$\Gamma'_A S = S \Gamma_A \tag{8.25}$$

**证明**

$$\Gamma'_A S \Gamma_A = \sum_B \Gamma'_A \Gamma'_B F \Gamma_B \Gamma_A \tag{8.26}$$

考虑到:

$$\left\{ \Gamma_B \Gamma_A = \epsilon_C \Gamma_C \quad \Gamma_A \Gamma_B = \frac{1}{\epsilon_C} \Gamma_C \right. \tag{8.27}$$

于是:

$$\text{上式} = \sum_C \Gamma'_C F \Gamma_C = S \tag{8.28}$$

也就是:

$$\Gamma'_A S = S \Gamma_A \tag{8.29}$$

□

(7) 上一点提到的  $S$  矩阵可以不是 0 矩阵。为了证明这一点，先取一个特殊的  $F$  矩阵：

$$F_{\nu\sigma} = 1 \quad others = 0 \quad (8.30)$$

$$S_{\mu\rho} = \sum_B (\Gamma'_B F \Gamma_B)_{\mu\rho} = \sum_B (\Gamma'_B)_{\mu\nu} (\Gamma_B)_{\sigma\rho} \quad (8.31)$$

如果不论怎么取  $F$ ,  $S$  都是 0。就意味着：

$$\sum_B (\Gamma'_B)_{\mu\nu} \Gamma_B = 0 \quad (8.32)$$

但是因为前面提到  $\Gamma_B$  是线性无关的。所以这个等式不成立。

(8) 可以合理的取  $F$ , 让  $S$  的行列式不等于 0 (可逆)。下面是证明, 首先构造

$$S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B \quad T = \sum_B \Gamma_B G \Gamma'_B \quad (8.33)$$

满足：

$$\Gamma_A T = T \Gamma'_A \quad \Gamma'_A S = S \Gamma_A \quad (8.34)$$

那么：

$$\Gamma_A T S = T \Gamma'_A S = T S \Gamma_A \quad (8.35)$$

于是  $TS$  对易于所有的  $\Gamma_A$ 。于是：

$$TS = k \mathbb{I} \quad (8.36)$$

如果  $\det(S) = 0$  那么  $k = 0$ 。

$$TS = \sum_{B=1} T \Gamma'_B F \Gamma_B = 0 \quad (8.37)$$

取：

$$F_{\nu\sigma} = 1 \quad others = 0 \quad (8.38)$$

那么：

$$\sum_B (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} (\Gamma_B)_{\sigma\rho} = 0 \quad (\forall \mu, \nu, \sigma, \rho) \quad (8.39)$$

于是：

$$\begin{aligned} \sum_B (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} \Gamma_B &= 0 \quad (\forall \mu, \nu) \\ &\Downarrow \\ (T \Gamma'_B)_{\mu\nu} &= 0 \quad (\forall \mu, \nu) \\ &\Downarrow \\ T &= 0 \end{aligned} \quad (8.40)$$

也就是说, 只要  $T \neq 0$ , 那么一定可以找到  $S$ , 使得  $\det(T)\det(S) \neq 0$ 。

$$\gamma'_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} \quad (8.41)$$

相似变换可以用幺正算符表示 当  $\gamma_\mu^\dagger = g_{\mu\mu} \gamma_\mu$ ,  $\gamma'_\mu^\dagger = g_{\mu\mu} \gamma'_\mu$  时。通过前面的证明已经找到了  $S$  使得：

$$\gamma'_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} \quad (8.42)$$

定义：

$$V = (\det S)^{-1/4} S \quad \gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \quad \det(V) = 1 \quad (8.43)$$

先证明：如果  $\gamma'_\mu = V_1 \gamma_\mu V_1^{-1}$ ,  $\gamma'_\mu = V_2 \gamma_\mu V_2^{-1}$ 。那么： $V_1 = k V_2$ 。

证明

$$\begin{aligned} V_1 \gamma_\mu V_1^{-1} &= V_2 \gamma_\mu V_2^{-1} \\ V_2^{-1} V_1 \gamma_\mu &= \gamma_\mu V_2^{-1} V_1 \\ V_2^{-1} V_1 \Gamma_A &= \Gamma_A V_2^{-1} V_1 \end{aligned} \quad (8.44)$$

由前面提到的 Shur's lemma:

$$V_1 = k V_2 \quad (8.45)$$

由于  $\det(V_1) = \det(V_2) = 1$ , 于是:  $V_2 = V_1 \exp(im\pi/2)$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ )

□

由于

$$\left\{ \gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^{-1} \right. \quad (8.46)$$

那么

$$\gamma'^\dagger_\mu = (V^\dagger)^{-1} \gamma^\dagger_\mu V^\dagger \quad (8.47)$$

考虑:

$$\left\{ \gamma^\dagger_\mu = g_{\mu\mu} \gamma_\mu \right. \quad (8.48)$$

$$\gamma'_\mu = (V^\dagger)^{-1} \gamma_\mu V^\dagger \quad (8.49)$$

于是:

$$\begin{aligned} (V^\dagger)^{-1} &= V \exp(im\pi/2) \quad (m = 0, 1, 2, 3) \\ V^\dagger V &= \exp(im\pi/2) \\ (V^\dagger V)_{ii} &= \sum_j V_{ji} V_{ji}^* > 0 \Rightarrow m = 0 \quad (V^\dagger)^{-1} = V, V^\dagger = V^{-1} \end{aligned} \quad (8.50)$$

也就找到了一个幺正变换。

**命题 8.2 (Dirac 矩阵表示之间的幺正变化)**

$$\gamma'_\mu = V \gamma_\mu V^\dagger \quad (8.51)$$

其中:

$$V = (\det S)^{-1/4} S \quad (S = \sum_B \Gamma'_B F \Gamma_B) \quad (8.52)$$

□

## 8.3 Dirac 方程的 Lorentz 协变性

注: 这部分没有提到 gamma 的具体形式是什么。

$\psi'(x')$  与  $\psi(x)$  之间的转变

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \Rightarrow \psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') \quad (8.53)$$

满足:

$$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1}) \quad (8.54)$$

**S 满足的基础关系** 考虑 Dirac 方程:

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c) \psi(x) &= 0 \\ (i\hbar\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c S^{-1}(\Lambda)) \psi'(x') &= 0 \\ \left( i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c \right) \psi'(x') &= 0 \end{aligned} \quad (8.55)$$

考虑到:

$$\left\{ x'^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu \right. \quad (8.56)$$

于是:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right. \quad (8.57)$$

$$\left. \left( i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m_0 c \right) \psi'(x') \right. = 0 \quad (8.58)$$

要保证在所有的参考系中的方程形式一样:

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu = \gamma^\nu \quad (8.59)$$

利用  $\Lambda$  矩阵的正交性:

$$\left\{ \Lambda_\mu^\nu \Lambda_\nu^\rho = \delta_\mu^\rho \right. \quad (8.60)$$

$$S(\Lambda) \gamma^\rho S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\nu^\rho \gamma^\nu \quad (8.61)$$

**S 生成算符的对易关系** 首先构建在微小 Lorentz 变换下的 S 算符:

$$S(\Delta w^{\mu\nu}) = \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta w^{\mu\nu} \quad (\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}) \quad (8.62)$$

$$S^{-1}(\Delta w^{\mu\nu}) = \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta w^{\mu\nu} \quad (8.63)$$

由前文对 S 算符的要求:

$$\left\{ S(\Lambda) \gamma^\rho S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\nu^\rho \gamma^\nu \right. \quad (8.64)$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left( \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) &= \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu \\ \left( \mathbb{I} - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) \gamma^\nu \left( \mathbb{I} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta w^{\alpha\beta} \right) &= \left( \delta_\mu^\nu + \Delta w_\mu^\nu \right) \gamma^\mu \\ -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) &= \Delta w_\mu^\nu \gamma^\mu \\ -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) &= \Delta w^{\beta\nu} \gamma_\beta \\ -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) &= \Delta w^{\beta\alpha} g_\alpha^\nu \gamma_\beta \\ -\frac{i}{4} \Delta w^{\alpha\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \sigma_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \Delta w^{\beta\alpha} (g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha) \end{aligned} \quad (8.65)$$

于是得到 S 生成算符的对易关系:

$$2i \left( g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta \right) = [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \quad (8.66)$$

**找到满足条件的 S 的生成算符** 直接假定:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (8.67)$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] &= \left[ \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu \right] \\
&= \frac{i}{2} [\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha, \gamma^\nu] \\
&= \frac{i}{2} ([\gamma_\alpha \gamma_\beta, \gamma^\nu] - [\gamma_\beta \gamma_\alpha, \gamma^\nu])
\end{aligned} \tag{8.68}$$

考虑到  $\gamma$  矩阵满足的基本性质:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} \Rightarrow \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta \end{array} \right. \tag{8.69}$$

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \frac{i}{2} (2 [\gamma_\alpha \gamma_\beta, \gamma^\nu] - 2 [g_{\alpha\beta} \mathbb{I}, \gamma^\nu]) \\
&= i (\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta)
\end{aligned} \tag{8.70}$$

考虑到:

$$\begin{cases} \gamma_\beta \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\beta = 2g_\beta^\nu \\ \gamma_\alpha \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\alpha = 2g_\alpha^\nu \end{cases} \tag{8.71}$$

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= i (-\gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta + 2g_\beta^\nu \gamma_\alpha - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
&= i (\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - 2g_\alpha^\nu \gamma_\beta + 2g_\beta^\nu \gamma_\alpha - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
&= 2i (g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta)
\end{aligned} \tag{8.72}$$

也就是, 满足生成元算符的对易条件:

$$2i (g_\beta^\nu \gamma_\alpha - g_\alpha^\nu \gamma_\beta) = [\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] \tag{8.73}$$

## 8.4 Dirac 自由粒子的 spinor

简单起见:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^1 \equiv \beta \alpha_x \quad \gamma^2 \equiv \beta \alpha_y \quad \gamma^3 \equiv \beta \alpha_z \tag{8.74}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.75}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \tag{8.76}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8.77}$$

总角动量与自旋的引入

定义自旋，求其与哈密顿量之间的对易关系 定义自旋算符为(同时也是 $\Sigma$ 算符的定义):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (8.78)$$

观察自旋算符和 Dirac 哈密顿量之间的对易关系:

$$[H_D, S_x] = \left[ (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + m_0\beta), \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \right] \quad (8.79)$$

考虑到:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ \text{and} \\ \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (8.80)$$

于是:

$$\text{上式} = \left[ \alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, \frac{1}{2} \Sigma_x \right] \quad (8.81)$$

考虑到 Pauli 矩阵之间的对易性质:

$$\{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\epsilon_k \quad (8.82)$$

得到:

$$\left\{ [\alpha_i, \Sigma_x] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_x - \sigma_x\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_x - \sigma_x\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ixk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ixk}\alpha_k \right. \quad (8.83)$$

于是:

$$\text{上式} = -iP_y\alpha_z + iP_z\alpha_y = i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P})_x \quad (8.84)$$

总结起来:

$$[H_D, \mathbf{S}] = i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P}) \quad (8.85)$$

轨道角动量与  $H_D$  之间的对易关系 轨道角动量算符定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (8.86)$$

和哈密顿量的对易:

$$\begin{aligned} [H_D, \mathbf{L}] &= [\alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, \mathbf{L}] \\ [H_D, L_x] &= [\alpha_x P_x + \alpha_y P_y + \alpha_z P_z, yP_z - zP_y] \\ &= -i\alpha_y P_z + i\alpha_z P_y \\ &= -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P})_x \end{aligned} \quad (8.87)$$

合理推断:

$$[H_D, \mathbf{L}] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{P}) \quad (8.88)$$

角动量算符和  $H_D$  之间的对易关系

$$[H_D, \mathbf{J}] = 0 \quad (8.89)$$

$\mathbf{S}$  与  $\mathbf{L}$  之间的对易关系 首先观察  $\mathbf{S}$  之间的对易关系:

$$[S_i, S_j] = \frac{1}{4} [\Sigma_i, \Sigma_j] = i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_k = i\epsilon_{ijk}S_k \quad (8.90)$$

$\mathbf{S}$  和  $\mathbf{L}$  之间是对易的:

$$[S_i, L_k] = 0 \quad (8.91)$$

最后观察  $\mathbf{L}$  之间的对易关系:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijl}L_k \quad (8.92)$$

自旋  $\frac{1}{2}$  发现:

$$|\mathbf{S}|^2 = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\Sigma}|^2 = \frac{1}{4}(1+1+1)\mathbb{I} = \frac{3}{4}\mathbb{I} \quad (8.93)$$

于是可以改写 Feynman

$$s = \frac{1}{2} \quad s(s+1) = \frac{3}{4} \quad (8.94)$$

共同本征态

能量和动量共同本征态 考虑 Dirac 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta) \psi \quad (8.95)$$

可以发现 Dirac 能量算符  $H_D$  和动量算符  $\mathbf{P}$  是对易的。所以可以找到他们的共同本征态。认为:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\epsilon t) \quad (8.96)$$

$$H_D \psi(x) = \epsilon \psi(x) \quad \mathbf{P} \psi(x) = \mathbf{p} \psi(x) \quad (8.97)$$

现在带入 Dirac 方程得到:

$$\begin{aligned} \epsilon \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} &= (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + m_0 \beta) \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p} + m_0 \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.98)$$

得到线性方程组:

$$\begin{aligned} (\epsilon - m_0) \varphi_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 &= 0 \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\epsilon + m_0) \chi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (8.99)$$

要得到不为 0 的解, 行列式是 0:

$$\det \begin{bmatrix} (\epsilon - m_0) & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\epsilon + m_0) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.100)$$

考虑到 Pauli 矩阵的性质:

$$\{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{I} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\} \quad (8.101)$$

得到:

$$\epsilon^2 = m_0^2 + \mathbf{p}^2 \Rightarrow \epsilon = \lambda E_P \quad (E_P = \sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2}; \quad \lambda = \pm 1) \quad (8.102)$$

于是:

$$\chi_0 = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \epsilon} \varphi_0 \quad \text{可以假定 } \varphi_0 = U \text{ 满足: } U^\dagger U = 1 \quad (8.103)$$

最终得到能量和动量共同本征态的 Spinor 是:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = N_{\mathbf{p}, \lambda} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_P} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_P t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad (8.104)$$

可以验证, 为了满足归一化和正交条件:(通过直接计算, 正交已经满足。不过需要通过调整  $N$  的值来归一化)

$$\left\{ \int d^3x \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger(x) \Psi_{\mathbf{p}', \lambda'}(x) = \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right\} \quad (8.105)$$

得到:

$$N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.106)$$

能量/动量/螺旋度的共同本征态 定义螺旋度 Helicity:

$$\Lambda_S = S \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{p}|} \quad (8.107)$$

考虑到:

$$\left\{ H_D = \alpha \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta \quad S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \right. \quad (8.108)$$

对易关系:

$$[H_D, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] = [\alpha \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] \quad (8.109)$$

考虑到:

$$\left\{ \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \right. \quad (8.110)$$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= [\alpha \cdot \mathbf{P}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathbf{P} \\ \sigma \cdot \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \mathbf{P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot \mathbf{P} \\ \sigma \cdot \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.111)$$

考虑螺旋度的平方:

$$\Lambda_S^2 = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{P})^2 \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} = \frac{1}{4} \quad \{ (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{I} + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \} \quad (8.112)$$

所以如果 spinor 是螺旋度的本征态,

$$\Lambda_S \Psi(x) = \lambda_S \Psi(x) \quad (8.113)$$

那么:

$$\lambda_S = \pm \frac{1}{2} \quad (8.114)$$

所以  $\Lambda_S, H_D, \mathbf{P}$  可以拥有共同的本征态。接下来要寻找他们的共同本征态。前面已经得到了能量和动量的共同本征态:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.115)$$

要通过合理的选取  $U$ , 使得它也是螺旋度的本征态:

$$\Lambda_S \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) = \pm \frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{p}, \lambda}(x) \quad (8.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} &= \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} &= \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.117)$$

研究列向量中的前两个:

$$\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \sigma \cdot \mathbf{p} U = \pm \frac{1}{2} U \quad (8.118)$$

考虑到:

$$\left\{ \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right. \quad (8.119)$$

带入得到:

$$\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & p_z \end{pmatrix} U = \pm \frac{1}{2} U \quad (8.120)$$

认为:

$$\left\{ p_z = |\mathbf{p}| \cos \theta \quad p_x = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi \quad p_y = |\mathbf{p}| \sin \theta \sin \phi \right. \quad (8.121)$$

带入得到:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} U = \pm U \quad (8.122)$$

得到 (只用看上面的第一行, 由于行列式是 0, 所以不用考虑下面一行):

$$(\pm 1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (8.123)$$

向上螺旋态  $\lambda_s = 1/2$  此时:

$$(1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (8.124)$$

考虑到  $U$  向量的归一化条件  $U_1 U_1^* + U_2 U_2^* = 1$ :

$$\begin{aligned} U_1 U_1^* \left( 1 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) &= 1 \\ U_1 U_1^* &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ U_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \\ U &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.125)$$

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_0 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.126)$$

带入  $U$ , 化简之后得到:

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.127)$$

向下螺旋态  $\lambda_s = -1/2$  此时:

$$(-1 - \cos \theta) U_1 = \sin \theta e^{-i\phi} U_2 \quad (8.128)$$

考虑到  $U$  向量的归一化条件:

$$U_1 U_1^* \left( 1 + \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right) = 1 \quad (8.129)$$

得到:

$$U_1 U_1^* = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.130)$$

于是:

$$U = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (8.131)$$

于是，向上螺旋态的 spinor 是：

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \downarrow}(x) = N \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.132)$$

**小结** 至此，确定了同时是  $H_D, \mathbf{P}, \Lambda_S$  的本征态 Spinor：

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \uparrow}(x) = N \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.133)$$

$$\Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \downarrow}(x) = N \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{m_0 + \lambda E_p} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \frac{\exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t))}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad N = \sqrt{\frac{m_0 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (8.134)$$

并且满足归一化条件：

$$\int d^3x \Psi_{\mathbf{p}, \lambda, \lambda_S}^\dagger(x) \Psi_{\mathbf{p}', \lambda', \lambda'_S}(x) = \delta_{\lambda_S, \lambda'_S} \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (8.135)$$

## 8.5 用 Lorentz 变换从静粒子波函数到动粒子波函数

**静止系中的波函数** 假设在静止参考系中的波函数写为：

$$\psi^r(x) = w^r(0) \exp(-i\epsilon_r p_{r.s}^\mu x_\mu) \quad \epsilon_r = 1 \text{ for } r = 1, 2 \quad \epsilon_r = -1 \text{ for } r = 3, 4 \quad (8.136)$$

因为是在静止参考系中，此时：

$$p_{r.s} = (m, 0) \quad (8.137)$$

在静止参考系中定义四维向量  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s}_{r.s} = (0, \mathbf{s}_{r.s.}) \quad (8.138)$$

定义（先不写具体形式，知道有这个东西， $\mathbf{u}$  对应的能量本征值是正， $\mathbf{v}$  对应的能量本征值是负）：

$$\begin{aligned} w^1(0) &= u(p_{r.s.}, \mathbf{s}_{r.s.}) & w^2(0) &= u(p_{r.s.}, -\mathbf{s}_{r.s.}) \\ w^3(0) &= v(p_{r.s.}, -\mathbf{s}_{r.s.}) & w^4(0) &= v(p_{r.s.}, \mathbf{s}_{r.s.}) \end{aligned} \quad (8.139)$$

当然，也需要满足 Dirac-Equation：

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + m_0 \beta) \psi \quad (8.140)$$

其中：

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (8.141)$$

将静止系中 spinor 定义为特定方向自旋的本征值 已知自旋算符  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ 。要求上面定义的 spinor 满足：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_{r.s.} u(p_{r.s.}, \pm \mathbf{s}_{r.s.}) &= \pm \frac{1}{2} u(p_{r.s.}, \pm \mathbf{s}_{r.s.}) \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_{r.s.} v(p_{r.s.}, \pm \mathbf{s}_{r.s.}) &= \mp \frac{1}{2} v(p_{r.s.}, \pm \mathbf{s}_{r.s.}) \end{aligned} \quad (8.142)$$

在静止系中，定义三维  $s$  向量是 ( $\mathbf{p}$  是在运动参考系中，粒子的动量)

$$\mathbf{s}_{r.s.} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (8.143)$$

考虑到：

$$\begin{cases} \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ p_x = |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi & p_y = |\mathbf{p}| \sin \theta \sin \phi & p_z = |\mathbf{p}| \cos \theta \end{cases} \quad (8.144)$$

于是：

$$\frac{1}{2} \Sigma \cdot \mathbf{s}_{r.s.} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_z & p_x - ip_y \\ 0 & 0 & p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.145)$$

考虑一个线性方程的解：

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$$

$$(8.146)$$

上面方程的解是：

$$U_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad U_- = \begin{pmatrix} -\sin \theta / 2 \\ \cos \theta / 2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (8.147)$$

利用这个解，可以确定满足方程8.142的 Spinor。

$$\begin{aligned} w^1(0) &= u(p_{r.s.}, \mathbf{s}_{r.s.}) = \begin{pmatrix} U_+ \\ 0 \end{pmatrix} & w^2(0) &= u(p_{r.s.}, -\mathbf{s}_{r.s.}) = \begin{pmatrix} U_- \\ 0 \end{pmatrix} \\ w^3(0) &= v(p_{r.s.}, -\mathbf{s}_{r.s.}) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_+ \end{pmatrix} & w^4(0) &= v(p_{r.s.}, \mathbf{s}_{r.s.}) = \begin{pmatrix} 0 \\ U_- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.148)$$

**运动参考系 Spinor 转换** 对于相对于粒子静止的参考系，运动系以  $-\mathbf{v}$  的速度相对运动（也就是粒子在运动系中的运动速度是  $\mathbf{v}$ ）。

首先，对于坐标变换以及动量变换：

$$(m, 0, 0, 0) \cdot x = p \cdot x' \quad (8.149)$$

其次，在这个运动参考系中的 spinor 是：S 矩阵的推导具体过程见 ipad

$$\psi'(x') = S\psi(x) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi(x) \quad (8.150)$$

最终：

$$\psi''^r(x') = w^r(\mathbf{p}) \exp(-i\epsilon_r p^\mu x'_\mu) \quad (8.151)$$

其中：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w^1(\mathbf{p}) & w^2(\mathbf{p}) & w^3(\mathbf{p}) & w^4(\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} U_+ & U_- & \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_+ & -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_- \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_+ & -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} U_- & U_+ & U_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u(p, s) & u(p, -s) & v(p, -s) & v(p, s) \end{pmatrix} \\ p &= (\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \mathbf{p}) \\ U_+ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad U_- = \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.152)$$

用 Lorentz 变化方法得到的波函数和前面直接求解本征态得到的波函数之间的关系是：

$$\begin{aligned} \psi'^1 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{\mathbf{p},+, \uparrow} \quad \psi'^2 = \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{\mathbf{p},+, \downarrow} \\ \psi'^3 &= \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{-\mathbf{p},-, \uparrow} \quad \psi'^4 = \sqrt{\frac{E}{m}} \Psi_{-\mathbf{p},-, \downarrow} \end{aligned} \quad (8.153)$$

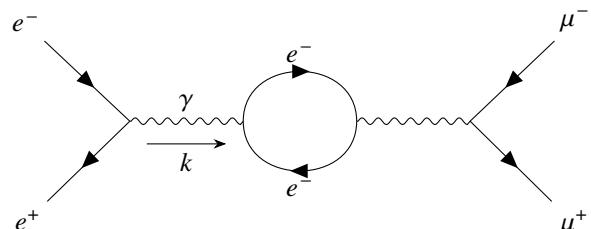
如何理解这个结果：利用波函数的坐标变化，也可以得到 H, P,  $\Lambda_S$  的共同本征态。

**Spinor** 上面计算出的  $u, v$  就叫做 spinor。具体来说：

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p}, -s) = \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\ v(\mathbf{p}, -s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.154)$$

对应的解是（分别是  $\psi'_{1,2,3,4}$ ）

$$u(\mathbf{p}, \pm s) \exp(-ip \cdot x) \quad v(\mathbf{p}, \mp s) \exp(ip \cdot x), \quad p = (\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \mathbf{p}) \quad (8.155)$$



这个图随便画的，没有什么意义。

## 8.6 PCT of Dirac equation

这一部分讲经典 Dirac 场的 CPT 变换，这里的推导和 Dirac 矩阵所在的表象没有关系，所以在量子化后，这里的结论也可以直接用。

**Parity Transformation** Dirac 方程是

$$(i\partial - m_0 c) \psi = 0. \quad (8.156)$$

现在进行坐标变换  $x' = (t, -\mathbf{x})$ ，想找到一个新的场  $\psi'(x')$  并且希望它也满足 Dirac 方程

$$(i\gamma^0 \partial'_0 + i\gamma^i \partial'_i - m_0 c) \psi'(x') = 0. \quad (8.157)$$

注意到 gamma matrix 之间的对易关系

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0, \quad \{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\mathbb{I}. \quad (8.158)$$

直接定义  $\psi'(x') = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(x)$ . 带入变换后的场满足的 Dirac 方程 (8.157) 得到:

$$(i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^i\partial'_i - m_0c)\psi'(x') = 0 \quad (8.159)$$

$$(i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^i\partial'_i - m_0c)e^{i\varphi}\gamma^0\psi(x) = 0 \quad (8.160)$$

$$(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i - m_0c)e^{i\varphi}\gamma^0\psi(x) = 0 \quad (8.161)$$

$$e^{i\varphi}\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m_0c)\psi(x) = 0. \quad (8.162)$$

上式和 Dirac 方程是自治的。总的来说, Dirac 场的 Parity 变换就是

$$\mathcal{P} = e^{i\varphi}\gamma^0. \quad (8.163)$$

Note: 有的时候将相位因子写为

$$\mathcal{P} = \eta_P\gamma^0 \quad (8.164)$$

**Charge Conjugation** 有电荷的 Dirac 场方程写为

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m_0)\psi = 0. \quad (8.165)$$

现在想找到 Charge Conjugation 后的场  $\psi_c$ , 它应该满足反电荷对应的 Dirac 方程。

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m_0)\psi_c = 0. \quad (8.166)$$

直接定义, 其中的 K 是 Hermitian conjugate 算符, 它会将所有的数变成复共轭。U 是作用到 Spinor 空间的一个矩阵。再次之后, 想通过验证变换后的 Spinor 性质解出假设中的 U, 这样就得到了 Charge conjugate 变换。

$$\psi_c = C\psi = UK\psi = U\psi^*. \quad (8.167)$$

下面, 将假设的 Charge Conjugate 变换作用到原始 Dirac 方程上。

$$UK(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m_0)\psi = 0 \quad (8.168)$$

$$U(-i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m_0)K\psi = 0 \quad (8.169)$$

$$(-iU\gamma^{\mu*}U^{-1}\partial_\mu - eU\gamma^{\mu*}U^{-1}A_\mu - m_0)U\psi^* = 0. \quad (8.170)$$

对比想要得到的 Charge conjugate 场满足的 Dirac 方程。相当于是要求变换矩阵 U 满足

$$U\gamma^{\mu*}U^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (8.171)$$

直接给出一个满足条件的 U , 首先注意到它的逆可以写为

$$U = i\gamma^2 \Rightarrow U^{-1} = i\gamma^2 \quad i\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^2 = -(-1) = \mathbb{I} \Rightarrow U^{-1} = i\gamma^2. \quad (8.172)$$

其次, 直接带入可以验证 U 确实满足 Charge conjugate 变换的要求。

$$U\gamma^{\mu*}U^{-1} = i\gamma^2\gamma^{\mu*}i\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^{\mu*}\gamma^2. \quad (8.173)$$

在我所知道的两种表象中,  $\gamma$  都有性质  $\gamma^{2*} = -\gamma^2$  others Invariant under complex conjugate. 于是

$$U\gamma^{2*}U^{-1} = -\gamma^2\gamma^{2*}\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^2, \quad (8.174)$$

$$U\gamma^{\mu*}U^{-1} = -\gamma^2\gamma^{\mu*}\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^\mu = -\gamma^\mu \quad (\mu \neq 2). \quad (8.175)$$

总的来说, Charge conjugate transformation 是

$$C = U K = i\gamma^2 K. \quad (8.176)$$

有时候会写为

$$C = (-1) - i\gamma^2\gamma^0\gamma^0 K = -C\gamma^0 K. \quad (8.177)$$

其中的 C 矩阵的具体形式是

$$C = -i\gamma^2\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (8.178)$$

Note, 其实在求解 U 矩阵的时候, 可以发现 U 并不是只有一种解, 其实比如说  $i\gamma^2 e^{i\varphi}$  也是满足条件的。也就是有一个相位的自由度可以随便选择。一般写为

$$C = \eta_C C \gamma^0 = -i\eta_C \gamma^2 K, \quad (\eta_C C \gamma^0)^{-1} = \eta_C^* C \gamma^0 \quad (8.179)$$

**Time Reverse** 和上面一样的套路, 本来的 Dirac 方程是

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi = 0. \quad (8.180)$$

现在进行时间反演变换  $x' = (-t, \mathbf{x})$ , 希望找到一个新的场  $\psi'(x')$  并且也满足 Dirac 方程。

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m_0) \psi'(x') = 0. \quad (8.181)$$

直接定义场的 time-reverse 变换。其中 K 是 Hermitian Conjugate 算符。

$$T = T_0 K \quad T\psi = T_0 \psi^*. \quad (8.182)$$

将变换作用到原来的 Dirac 方程上得到

$$T_0 K (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi = 0 \quad (8.183)$$

$$T_0 (-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu - m_0) K \psi = 0 \quad (8.184)$$

$$(-iT_0 \gamma^{\mu*} T_0^{-1} \partial_\mu - m_0) T_0 K \psi = 0 \quad (8.185)$$

$$(-iT_0 \gamma^{\mu*} T_0^{-1} \partial_\mu - m_0) T_0 \psi^* = 0 \quad (8.186)$$

$$(iT_0 \gamma^{\mu*} T_0^{-1} \partial'_0 - iT_0 \gamma^i T_0^{-1} \partial'_i - m_0) T_0 \psi^* = 0 \quad (8.187)$$

对比希望得到的 Time-reverse Dirac 方程。得到  $T_0$  满足的方程。

$$T_0 \gamma^{0*} T_0^{-1} = \gamma^0, \quad T_0 \gamma^{i*} T_0^{-1} = -\gamma^i. \quad (8.188)$$

直接给出一个解

$$T_0 = i\gamma^1 \gamma^3. \quad (8.189)$$

首先注意到它的逆矩阵

$$T_0(T_0) = i\gamma^1 \gamma^3 i\gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 = \mathbb{I}, \Rightarrow T_0^{-1} = T_0 = i\gamma^1 \gamma^3. \quad (8.190)$$

然后直接验证希望  $T_0$  满足的条件

$$T_0 \gamma^{0*} T_0^{-1} = i\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{0*} (i)\gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^0 = \gamma^0, \quad (8.191)$$

$$T_0 \gamma^{1*} T_0^{-1} = i\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{1*} (i)\gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 = -\gamma^1, \quad (8.192)$$

$$T_0 \gamma^{2*} T_0^{-1} = i\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{2*} (i)\gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{2*} \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^2 = -\gamma^2, \quad (8.193)$$

$$T_0 \gamma^{3*} T_0^{-1} = i\gamma^1 \gamma^3 \gamma^{3*} (i)\gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 = -\gamma^3. \quad (8.194)$$

其中, 反复用到了 Gamma matrix 的性质

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\gamma^2)^* = -\gamma^2, \quad (\gamma^\mu)^* = \gamma^\mu \quad \mu \neq 2. \quad (8.195)$$

总的来说, 经典 Dirac 场的 Time reverse 变换是

$$T = T_0 K = i\gamma^1 \gamma^3 K. \quad (8.196)$$

有的时候会写为 ( $C$  是 Charge conjugate 部分定义的矩阵)

$$T = iC \gamma^5 K. \quad (8.197)$$

这一点不是特别显然，稍微证明一下。首先，要用到的性质是

$$\begin{cases} \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & C = -i\gamma^2\gamma^0, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \end{cases} \quad (8.198)$$

然后直接计算

$$iC\gamma^5 = (-i)i\gamma^2\gamma^0\gamma^5 = (-i)i\gamma^2\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^1\gamma^3 \quad (8.199)$$

如果考虑到  $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = -i\gamma^2\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$ ,

$$i\gamma^1\gamma^3 = -\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = -iC\gamma^5 = -i\gamma^5C. \quad (8.200)$$

Note, 和之前一样, Charge conjugation 变换同样有一个相位可以随便选, 所以一般将它写为

$$T = \eta_T \gamma^1 \gamma^3 K = \eta_T \gamma^5 C K, \quad (\eta_T \gamma^1 \gamma^3)^{-1} = (\eta_T \gamma^5 C)^{-1} = -\eta_T^* \gamma^1 \gamma^3 = -\eta_T^* \gamma^5 C. \quad (8.201)$$

# 第九章 Spin 1/2

## 9.1 Lorentz Transformation and Lagrangian

**Classical Field** 群论中提到 Lorentz Transformation 有 Left-handed spinor representation

$$\left\{ \Lambda = \exp(t^i \tilde{J}_i + s^i \tilde{K}_i) \mapsto R_L(\Lambda) = R_{(1/2,0)}(\Lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}(-s^i - it^i)\sigma_i\right]. \right. \quad (9.1)$$

考虑在表示空间中定义的二维向量场  $\varphi_a(x)$ 。由量子 Poincare 变换部分讲到的，对于经典场，Lorentz 不变的意思是

$$\begin{cases} S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial^\mu \varphi_a(x)), \\ S' = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial^\mu \phi'_a(x')). \end{cases} \quad (9.2)$$

其中，场满足变换条件

$$\phi'_a(x') = R(\Lambda)_a^b \phi_b(x), \quad \partial'^\mu \phi'_a(x') = \Lambda^\mu_\nu R(\Lambda)_a^b \partial^\nu \phi_b(x). \quad (9.3)$$

其中的  $R$  是 Lorentz 群的表示。这里应该是 Left-handed spinor representation。

**Lorentz Invariant Lagrangian** 由 Group Theory, Spinor Representation 中有 Lorentz 不变的项 Weyl Mass 以及按照 Lorentz Transformation 变化的项

$$\begin{cases} (\chi_L^c)^\dagger \psi_L, \quad (\chi_R^c)^\dagger \psi_R, \\ \chi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_R, \quad \chi_L^\dagger \sigma_\mu \psi_L, \\ \sigma_\mu = (\mathbb{I}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}_\mu = (\mathbb{I}, -\sigma_i). \end{cases} \quad (9.4)$$

为了和场论书中的符号相同，一般写为（其中 conjugate of Left-spinor 定义为  $\chi_L^c = \sigma_2 \chi_L^*$ , 按照 Right-handed spinor 变换）

$$\begin{cases} (\chi_L^c)^\dagger \psi_L, \quad (\chi_R^c)^\dagger \psi_R, \\ \chi_R^\dagger \sigma_\mu \psi_R, \quad \chi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_L, \\ \sigma^\mu = (\mathbb{I}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\sigma_i). \end{cases} \quad (9.5)$$

构建 Lorentz Invariant Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_D = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R). \quad (9.6)$$

其中， $m$  是实数，后一项质量项是实数。前两个动量项也可以证明是实数，用第一项来说（用到了分部积分）

$$(i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger = -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (9.7)$$

**Dirac Spinor And gamma matrix** 有一种简单的写法

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

这种写法下，质量项是

$$\mathcal{L}_{D,m} = -m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \psi = -m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R). \quad (9.9)$$

动能项是

$$\mathcal{L}_{D,k} = i\psi^\dagger \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \psi = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L. \quad (9.10)$$

方便的写法是定义 Gamma Matrix 为，这里的 gamma matrix 和以前正则量子化写的不一样了（以后再改一下前面的吧。。或者直接不要了）

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

进一步定义

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (9.12)$$

于是，Lagrangian 可以写为整齐的形式

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi. \quad (9.13)$$

为了方便起见，有时候也会定义  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Majorana spinor** 刚才构建 Lagrangian 时，分别用到了左右手场  $\psi_L \psi_R$ . 实际上也可以只用左手场来构建 Lorentz-invariant Lagrangian. 这样构建出的 Lagrangian 是 Majorana Lagrangian。

首先重新考虑 Lorentz 不变的 Weyl mass term。(在群论 note 里搜索 weyl mass term)

$$(\chi_L^c)^\dagger \psi_L = \chi_L^T \sigma_2 \psi_L.$$

可以构建 Lorentz invariant mass term 为

$$-i\psi_L^T \sigma_2 \psi_L. \quad (9.14)$$

这一项有一些奇怪，因为具体来说它等于 0

$$-i\psi_L^T \sigma_2 \psi_L = -i \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_2 \psi_1 - \psi_1 \psi_2. \quad (9.15)$$

所以其实它只能是 Grassman 数，不过先不讨论这个问题。以后有时间了再看看它的量子化以及经典场到底应该是什么样子的。

类似的，也可以只用 Left-handed spinor 得到动能项，直接写为

$$i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L. \quad (9.16)$$

Lagrangian 写为

$$\mathcal{L}_M = i\bar{\psi}_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m \left( -i\psi_L^T \sigma_2 \psi_L \right). \quad (9.17)$$

对于 Majorana spinor 方程的解后面再说。

## 9.2 Dirac Equation and its solution

之前利用左右手 weyl spinor 构建了 Lorentz invariant 的 Lagrangian.

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (9.18)$$

**Dirac Equation** 直接对 Dirac Lagrangian 中的  $\bar{\psi}$  做变分得到 Dirac 方程:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (9.19)$$

**Weyl equation** 将 Dirac equation 中的左右手旋量拆分开

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (9.20)$$

考虑到 gamma matrix 的具体形式

$$\begin{cases} \gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} & \sigma^\mu = (\mathbb{I}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\sigma_i). \end{cases} \quad (9.21)$$

带入得到

$$\left( i\partial_0 \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} + i\partial_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & i\partial_0 + i\sigma \cdot \nabla \\ i\partial_0 - i\sigma \cdot \nabla & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (9.22)$$

分开写做右手 spinor 对应的方程为

$$\begin{aligned} (i\partial_0 + i\sigma \cdot \nabla) \psi_R - m\psi_L &= 0, \\ (i\partial_0 - i\sigma \cdot \nabla) \psi_L - m\psi_R &= 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

如果没有质量，左右手旋量对应的方程可以拆分开，叫做 **Weyl Equation**

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \psi_R &= 0, \\ (\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) \psi_L &= 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

**Dirac spinor satisfy KleinGordon equation** 对于 Dirac equation

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (9.25)$$

直接计算发现

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0, \\ [-(\gamma^\mu \partial_\mu) (\gamma^\mu \partial_\mu) - m^2] \psi &= 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

注意到 gamma matrix 有性质

$$\begin{aligned} \not{a} \not{a} &= a_\mu a_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= a_\mu a_\nu \left\{ \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [ \gamma^\mu, \gamma^\nu ] \right\}, \\ &= a_\mu a_\nu \left( g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} [ \gamma^\mu, \gamma^\nu ] \right), \\ &= a_\mu a^\mu = a^2. \end{aligned} \quad (9.27)$$

带入上面的计算发现 Dirac spinor 确实满足 Klein-Gordon 方程。

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \psi = 0. \quad (9.28)$$

**正负能量解** 由于 Dirac spinor 满足 Klein-gordon equation, 直接将解写为正负能量解的线性叠加

$$\Psi(x) = u(p)e^{-ipx} + v(p)e^{ipx}, \quad p = \left( \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \mathbf{p} \right). \quad (9.29)$$

考虑 Dirac Equation, 可以找到正反粒子 spinor  $u, v$  满足的方程:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p) &= 0, \\ (\not{p} + m) v(p) &= 0. \end{aligned} \quad (9.30)$$

**用 Lorentz 变换得到解** 在 rest frame 中, 粒子的动量写为  $p = (m, 0)$ . 考虑正粒子 spinor 满足的方程

$$(\not{p} - m) u(0) = (\gamma^0 m - m) u(0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(0) = 0 \quad (9.31)$$

直接将解写为如下形式并归一化,

$$u(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} \quad \xi^{s'\dagger} \xi^s = \delta_{s,s'}, \quad \sum_s \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbb{I} \quad (9.32)$$

虽然  $\xi$  有两种取法, 但是先不说是具体是哪个, 后面几小段先直接当作  $\xi$  来推导。

接下来考虑 Lorentz 变换，只考虑 z 方向的 Lorentz 变换，Lorentz 变换过后希望能动量是  $(E, p^3)$ 。首先考虑 Lorentz 变换，z-boost Lorentz 变换用指数形式写为

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \exp \left[ \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (9.33)$$

简单起见，只考虑 Lorentz 变换的时间分量和 z-空间分量，要求在变换后的参考系中粒子具有 z 方向的动量  $p^3$ ，将这个对群参数的要求具体写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \exp \left( \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}^{2n} = 1, \quad \mathbb{J}^{2n+1} = \mathbb{J}. \quad (9.34)$$

对  $\exp$  函数展开

$$\begin{aligned} \exp \left( \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta \mathbb{J})^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\eta \mathbb{J})^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\eta \mathbb{J})^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cosh \eta \mathbb{J} + \sinh(\eta) \mathbb{J}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

于是，Lorentz 变换后动量为  $p^3$  的条件写为

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

这样定义的群参数叫做 rapidity 快度，快度在连续 Lorentz 变化下可以相加，简单来说

$$(\cosh \eta \mathbb{J} + \sinh(\eta) \mathbb{J}) (\cosh \eta' \mathbb{J} + \sinh(\eta') \mathbb{J}) = (\cosh(\eta + \eta') \mathbb{J} + \sinh(\eta + \eta') \mathbb{J}). \quad (9.37)$$

这个式子可以通过直接计算验证，先不写过程了。

接下来考虑 Dirac spinor 的 Lorentz boost. 由群论中的知识，与 Lorentz trans 对应的 Dirac spinor 的 Lorentz transformation 是

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \exp(\omega_{\nu}^{\mu}) \Leftrightarrow \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right), \quad S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}], \quad S^{03} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

对于我们考虑的 Lorentz 变换，Lorentz 变换的参数写为

$$\omega_{\nu}^{\mu} = \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.39)$$

对于这个 Lorentz 变换的参数，对应的 Dirac spinor 变换写为

$$\exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) = \exp \left( -i \omega_{03} S^{03} \right) = \exp \left( -i \eta \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \right) = \exp \left( -\eta \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \right). \quad (9.40)$$

考虑到  $\sigma_3$  matrix 的性质

$$(\sigma_3)^{2n} = 1, \quad (\sigma_3)^{2n+1} = \sigma_3, \quad \sum_n \frac{1}{(2n)!} (x)^{2n} = \cosh(x), \quad \sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)!} (x)^{2n+1} = \sinh(x) \quad (9.41)$$

Dirac Spinor 在 z-boost 下变换具体写为

$$\begin{aligned} \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ (-\frac{\eta}{2})^{2n} \frac{1}{(2n)!} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} + (-\frac{\eta}{2})^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \cosh(\frac{\eta}{2}) \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} - \sinh(\frac{\eta}{2}) \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

现在知道了 Dirac Spinor 的 Lorentz boost, 将它用到 rest frame 中的 spinor 得到 boost 参考系中的 Spinor

$$\begin{aligned} u(p) &= \left[ \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} - \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \right] u(0), \\ &= \sqrt{m} \left[ \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} - \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \\ &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} \frac{1-\sigma_3}{2} e^{\eta/2} + \frac{1+\sigma_3}{2} e^{-\eta/2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sigma_3}{2} e^{\eta/2} + \frac{1-\sigma_3}{2} e^{-\eta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.43)$$

稍微解释一下为什么可以直接用 Lorentz 变换得到解。在经典场中, 如果在原本的坐标系中有解  $\psi(x)$ , 在新的坐标系中也可以有解  $\psi'(x')$ , 他们之间的关系是

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi(x), \quad x' = \Lambda x \quad (9.44)$$

对于所需要考虑的解,

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} \Rightarrow \psi'(x') = u'(p')e^{-ip'\cdot x'}, \quad u'(p') = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)u(p), \quad p' \cdot x' = p \cdot x. \quad (9.45)$$

可以看到 spinor 确实是按照 Dirac spinor representation 变换的。

**求解快度并带入** 回到之前需要快度满足的条件 (9.36).

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix} \Rightarrow E = m \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}, \quad p^3 = m \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} \Rightarrow me^\eta = E + p^3 \quad me^{-\eta} = E - p^3. \quad (9.46)$$

带入所得到的快度解来确定 spinor

$$u(p) = \begin{pmatrix} \left( \sqrt{E+p^3} \frac{1-\sigma_3}{2} + \sqrt{E-p^3} \frac{1+\sigma_3}{2} \right) \xi \\ \left( \sqrt{E+p^3} \frac{1+\sigma_3}{2} + \sqrt{E-p^3} \frac{1-\sigma_3}{2} \right) \bar{\xi} \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

有一种将它写为更对称形式的方法。首先注意到

$$\left( \sqrt{E+p^3} \frac{1-\sigma_3}{2} + \sqrt{E-p^3} \frac{1+\sigma_3}{2} \right)^2 = (E+p^3) \left( \frac{1-\sigma_3}{2} \right)^2 + (E-p^3) \left( \frac{1+\sigma_3}{2} \right)^2 + 2\sqrt{(E+p^3)(E-p^3)} \frac{1-\sigma_3}{2} \frac{1+\sigma_3}{2} \quad (9.48)$$

考虑到 pauli 矩阵性质

$$(1 \pm \sigma_3)^2 = (1 + \sigma_3^2 \pm 2\sigma_3) = 2(1 \pm \sigma_3), \quad (1 + \sigma_3)(1 - \sigma_3) = 0. \quad (9.49)$$

于是前面的平方项写为

$$(\dots)^2 = (E+p^3) \frac{1-\sigma_3}{2} + (E-p^3) \frac{1+\sigma_3}{2} = E - p^3 \sigma^3. \quad (9.50)$$

于是 boost 后的参考系中的 spinor 确定为

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} \sigma_3 \xi \\ \sqrt{E+p^3} \sigma_3 \bar{\xi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\xi} \end{pmatrix}. \quad (9.51)$$

理所当然的认为这个解可以推广到所有的动量情况(不仅是 z 方向的动量)。

对于  $v(p)$ , 同理, 也可以用这样的方法来求解任意的动量对应的 Spinor。只是需要注意 0 动量的 rest frame 解是

$$v(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

**正交关系** 直接验证得到正粒子 spinor 的正交关系 ( $\sigma$  是 hermitian matrix)

$$u^\dagger(p)u(p) = \left( \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \sigma}, \bar{\xi}^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\xi} \end{pmatrix} = (p \cdot \sigma + p \cdot \bar{\sigma}) \xi^\dagger \xi = 2p^0 \xi^\dagger \xi = 2E_p \quad (9.53)$$

因为 Dirac Spinor Lagrangian 中有  $\bar{\psi}$  形式的量, 这里也定义对应的

$$\bar{u}(p) \equiv u^\dagger(p)\gamma^0. \quad (9.54)$$

同样可以验证正交关系

$$\bar{u}(p)u(p) = \begin{pmatrix} \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 2\sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})}\xi^\dagger \xi. \quad (9.55)$$

**Conclusion** Dirac Equation 的正反粒子解是

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u_s(p)e^{-ipx}, & (\not{p} - m)u(p) &= 0, \\ \psi(x) &= v_s(p)e^{+ipx}, & (\not{p} + m)v(p) &= 0. \end{aligned} \quad (9.56)$$

其中 spinor 的具体形式以及他们满足的正交关系是

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs}, \quad u_r^\dagger(p)u_s(p) = 2E_p\delta_{rs}. \quad (9.57)$$

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs}, \quad v_r^\dagger(p)v_s(p) = 2E_p\delta_{rs}. \quad (9.58)$$

另外, 直接计算可以发现

$$\bar{u}_r(p)v_s(p) = \bar{v}_r(p)u_s(p) = 0, \quad u_r^\dagger(p^0, \mathbf{p})v_s(p^0, -\mathbf{p}) = v_r^\dagger(p^0, -\mathbf{p})u_s(p^0, \mathbf{p}) = 0. \quad (9.59)$$

**Spin sums** 有一个技巧性的求和公式

$$\begin{aligned} \sum_{s=+1,-1} u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \sum_{s=+1,-1} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} & p \cdot \sigma \xi^s \xi^{s\dagger} \\ p \cdot \bar{\sigma} \xi^s \xi^{s\dagger} & \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.60)$$

利用  $\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} = m$  以及  $\sum_s \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbb{I}$  (完备条件) 得到

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \not{p} + m \quad (9.61)$$

类似的, 对于负能量解的 Spinor 也满足 Spin-sum 的条件

$$\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \begin{pmatrix} -m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} = \not{p} - m \quad (9.62)$$

注意到之前说的正反粒子解的 spinor 满足的 spinor 方程, 以及正反 spinor 的正交关系

$$\begin{cases} (\not{p} - m)u(p) = 0, \\ (\not{p} + m)v(p) = 0, \\ \bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs}, \\ \bar{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs}. \end{cases} \quad (9.63)$$

可以发现 Spin sum 也相当于投影算符 (关于正反粒子的投影算符)

$$P_+ \equiv \frac{1}{2m} \sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p), \quad P_+u_s(p) = u_s(p), \quad P_+v_s(p) = 0, \quad (9.64)$$

$$P_- \equiv \frac{-1}{2m} \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p), \quad P_-v_s(p) = v_s(p), \quad P_-u_s(p) = 0. \quad (9.65)$$

**Use Helicity state to constrct** 在之前的正反粒子 spinor 中都有一个二维度的 weyl spinor  $\xi$  没有确定，现在直接给定 helicity state

$$\xi^1 = \xi^\uparrow = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \xi^\downarrow = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

这些态是正交归一的

$$(\xi^{s'})^\dagger \xi^s = \delta_{s,s'}. \quad (9.67)$$

这样定义的 weyl spinor 确实是 helicity 的本征态

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^\uparrow = +\xi^\uparrow, \quad (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^\downarrow = -\xi^\downarrow. \quad (9.68)$$

之后，定义另一种 weyl spinor

$$\xi^{-s} \equiv -i\sigma_2(\xi^s)^*. \quad (9.69)$$

它的 helicity 本征值和原来的是相反的

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^{-\uparrow} = -\xi^{-\uparrow}, \quad (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^{-\downarrow} = +\xi^{-\downarrow}. \quad (9.70)$$

可以用这个 helicity state 构造 Dirac spinor

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (9.71)$$

**另一种解法** 用上面的方法构造出的 Dirac spinor 不是 Helicity 的本征态，不过有另一种方法，能够直接构造出 Helicity 本征态的 Dirac Spinor。现在直接写一个螺旋态，他是螺旋态算符的本征态。

$$\xi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2|p|(|p|+p^3)}} \begin{bmatrix} -p^1 + ip^2 \\ |p| + p^3 \end{bmatrix} \quad \xi_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2|p|(|p|+p^3)}} \begin{bmatrix} |p| + p^3 \\ -p^1 + ip^2 \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

螺旋态算符和他对应的螺旋态方程是：

$$(\hat{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi_\lambda(p) = \lambda \xi_\lambda(p) \quad (9.73)$$

螺旋度有正交归一关系

$$\begin{aligned} \xi_+^\dagger(p) \xi_+(p) &= 1 \\ \xi_-^\dagger(p) \xi_-(p) &= 1 \\ \xi_+^\dagger(p) \xi_-(p) &= 0 \end{aligned} \quad (9.74)$$

和完备性关系：

$$\sum_{\lambda=\pm} \xi_\lambda(p) \xi_\lambda^\dagger(p) = I \quad (9.75)$$

可以用螺旋态定义  $u$  和  $v$  (他们是满足 Dirac 方程的):

$$u(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \omega_{-\lambda}(p) \xi_\lambda(p) \\ \omega_\lambda(p) \xi_\lambda(p) \end{bmatrix} \quad v(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \omega_\lambda(p) \xi_{-\lambda}(p) \\ -\lambda \omega_{-\lambda}(p) \xi_{-\lambda}(p) \end{bmatrix} \quad (9.76)$$

$$\omega_\lambda(p) = \sqrt{E_p + \lambda|p|} \quad (9.77)$$

这两个基底也是这个算符的本征向量：

$$\begin{aligned} (\hat{p} \cdot S) u(p, \lambda) &= \frac{\lambda}{2} u(p, \lambda) \\ (\hat{p} \cdot S) v(p, \lambda) &= -\frac{\lambda}{2} v(p, \lambda) \end{aligned} \quad (9.78)$$

$u$  和  $v$  满足正交的关系，也满足 Dirac 方程：

$$\begin{aligned}\bar{v}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2m\delta_{\lambda\lambda'} \\ \bar{u}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2m\delta_{\lambda\lambda'} \\ \bar{u}(p, \lambda)v(p, \lambda') &= \bar{v}(p, \lambda)u(p, \lambda') = 0 \\ v^\dagger(p, \lambda)v(p, \lambda') &= 2E_p\delta_{\lambda\lambda'} \\ u^\dagger(p, \lambda)u(p, \lambda') &= 2E_p\delta_{\lambda\lambda'} \\ u^\dagger(p, \lambda)v(p, \lambda') &= v^\dagger(p, \lambda)u(p, \lambda') = 0\end{aligned}\tag{9.79}$$

投影算符 定义  $\gamma^5$  为

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{9.80}$$

左右手投影矩阵定义为

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5), \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5).\tag{9.81}$$

螺旋度 Helicity 螺旋度定义为

$$h \equiv \hat{\mathbf{p}} \cdot S = \frac{1}{2}\hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}\tag{9.82}$$

结论是，对于没有质量的费米子，

- 1) 没有质量的，螺旋度  $h = 1/2$  正粒子是右手 Fermion,  $h = -1/2$  是左手 Fermion.
- 2) 没有质量的，螺旋度  $h = 1/2$  反粒子是左手 Fermion,  $h = -1/2$  是右手 Fermion.

感觉这部分很多地方证明的很不靠谱，后面如果有时间了应该想想怎么证明 (need details)

## 9.3 Quantization (need details)

不加证明的写出量子化后的 Dirac 场

$$\Psi = \sum_{s=\pm 1/2} \int \widetilde{dp} \left( b_s(p)u_s(p)e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger v_s(p)e^{ip \cdot x} \right).\tag{9.83}$$

以及

$$\bar{\Psi} = \sum_{s'=\pm 1/2} \int \widetilde{dp'} \left( b_{s'}^\dagger(p')\bar{u}_{s'}(p')e^{-ip' \cdot x} + d_{s'} v_{s'}(p')e^{ip' \cdot x} \right).\tag{9.84}$$

ETCR, 等时对易关系写为

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = 0, \quad \{\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}_\beta(\mathbf{y}, t)\} = 0.\tag{9.85}$$

利用 Dirac 方程的正反粒子 spinor  $u(p)$   $v(p)$  的正交性质，可以将产生湮灭算符从场的模式展开中提取出来

$$\begin{aligned}b_s(p) &= \int d^3x e^{ipx} \bar{u}_s(p) \gamma^0 \Psi(x), \quad b_s^\dagger(p) = \int d^3x e^{-ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u_s(p), \\ d_s^\dagger(p) &= \int d^3x e^{-ipx} \bar{v}_s(p) \gamma^0 \Psi(x), \quad d_s(p) = \int d^3x e^{ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 v_s(p).\end{aligned}\tag{9.86}$$

将 Equal-Time-Commutation relation 带入场的模式展开中可以得到升降算符的对易关系

$$\{b_s(p), b_{s'}^\dagger(p')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(p - p')\delta_{ss'}, \quad \{d_s^\dagger(p), d_{s'}(p')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(p - p')\delta_{ss'}.\tag{9.87}$$

others anti-commutation equals to 0.

**Propagator** 传播子直接计算出结果为 (need details)

$$S(x-y)_{\alpha,\beta} = \langle 0 | \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{(\not{p} + m)_{\alpha,\beta}}{-p^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (9.88)$$

**粒子态** 正反粒子态直接定义为

$$|p, s, +\rangle = b_s^\dagger(p)|0\rangle, \quad |p, s, -\rangle = d_s^\dagger(p)|0\rangle. \quad (9.89)$$

满足归一化条件

$$\langle p, s, q | p', s', q' \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(p-p') \delta_{ss'} \delta_{qq'}. \quad (9.90)$$

稍微注意一下顺序, 因为算符都是反对易的  $|1, 2\rangle = -|2, 1\rangle$ , 为了方便起见生成粒子的时候总是把 1 粒子的生成算符写在前面。

## 9.4 $\mathcal{CP}\mathcal{T}$ Discrete Symmetry

学校的健身房也叫做  $\mathcal{CP}\mathcal{T}$  笑死了。。。

**Parity** 对于经典 Dirac 场, Parity 变换为

$$\psi'(x') = \mathcal{P}\psi(x) = \eta_p \gamma^0 \psi(x) \quad (9.91)$$

对于量子场, 做 Parity 变换后的场相当于给所有的态矢量做了一个量子 Parity 变换, 这个变换是么正且等于自身的逆。

$$|\alpha\rangle \rightarrow \hat{P}|\alpha\rangle, \quad |\beta\rangle \rightarrow \hat{P}|\beta\rangle. \quad (9.92)$$

变换后的态矢量对原来场的期望值等于原来态矢量感受到的变换后的场。

$$\langle \beta' | \psi(t, \mathbf{x}) | \alpha' \rangle = \langle \beta | \psi'(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle = \langle \beta | \mathcal{P}\psi(t, -\mathbf{x}) | \alpha \rangle. \quad (9.93)$$

具体来说, 场的变换是:

$$\hat{P}\psi(t, \mathbf{x})\hat{P} = \eta_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}), \quad (9.94)$$

同样的,

$$\hat{P}\bar{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{P} = \hat{P}\psi^\dagger \gamma^0 \hat{P} = \hat{P}\psi^\dagger \hat{P}\gamma^0 = (\hat{P}\psi \hat{P})^\dagger \gamma^0 \quad (9.95)$$

$$= (\eta_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}))^\dagger \gamma^0 = \eta_p^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0. \quad (9.96)$$

带入场的模式展开, 可以直接得到产生湮灭算符的的量子 Parity 变换性质 (need details)

$$\hat{P}b_{\mathbf{p},s}\hat{P} = \eta_P b_{-\mathbf{p},s}, \quad \hat{P}d_{\mathbf{p},s}\hat{P} = -\eta_P^* d_{-\mathbf{p},s}, \quad (9.97)$$

$$\hat{P}b_{\mathbf{p},s}^\dagger \hat{P} = \eta_P^* b_{-\mathbf{p},s}^\dagger, \quad \hat{P}d_{\mathbf{p},s}^\dagger \hat{P} = -\eta_P d_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (9.98)$$

有时, 为了方便, 一般会直接取  $\eta_P = 1$ 。

**Charge Conjugate** 对于经典 Dirac 场, Charge conjugate 变换是

$$\psi'(x) = C\psi(x) = \eta_C C\gamma^0 K\psi(x) = -i\eta_C \gamma^2 \psi^*(x). \quad (9.99)$$

对于量子场, 么正变换后的场等于新的场

$$\langle \beta' | \psi(t, \mathbf{x}) | \alpha' \rangle = \langle \beta | \psi'(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle = \langle \beta | -i\eta_C \gamma^2 \psi^*(t, \mathbf{x}) | \alpha \rangle. \quad (9.100)$$

上式中的最后一项中的复共轭对于经典场就是简单的复共轭, 但是对于量子场, 实际上是厄米共轭。一般来说, 将最后一项写为

$$-i\eta_C \gamma^2 \psi^*(x) = \eta_C (-i)(\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T. \quad (9.101)$$

于是得到量子场的 Charge conjugate 变换

$$\hat{C}\psi\hat{C} = -i\eta_C\gamma^2\psi^* = \eta_C(-i)(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T. \quad (9.102)$$

同样的，

$$\hat{C}\bar{\psi}\hat{C} = \hat{C}\psi^\dagger\gamma^0\hat{C} = (\hat{C}\psi\hat{C})^\dagger\gamma^0 = (-i\eta_C\gamma^2\psi^*)^\dagger\gamma^0 = i\eta_C^*\psi^T(\gamma^2)^\dagger\gamma^0 = -i\eta_C^*\psi^T\gamma^{2T}\gamma^{0T} = -i\eta_C^*(\gamma^0\gamma^2\psi)^T. \quad (9.103)$$

**Time reverse** 时间反演变化是反幺正的，和量子力学中的一样，定义时间反演后的态矢量为

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \hat{T}|\alpha\rangle, \quad |\tilde{\beta}\rangle = \hat{T}|\beta\rangle. \quad (9.104)$$

在反幺正变化下，

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle. \quad (9.105)$$

在经典情况下，Dirac 场的 time-reverse 变换是

$$\psi'(x') = \eta_T\gamma^1\gamma^3\psi^*(x) \quad (9.106)$$

在量子情况下，时间反演变化是

$$\langle\tilde{\alpha}|\psi(x')|\tilde{\beta}\rangle = \langle\beta|\psi'(x')|\alpha\rangle = \langle\beta|\eta_T\gamma^1\gamma^3\psi^*(x)|\alpha\rangle. \quad (9.107)$$

考虑到反幺正算符有性质

$$\{\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\Theta X^\dagger\Theta^{-1}|\tilde{\beta}\rangle. \quad (9.108)$$

于是，场算符与时间反演变换满足

$$\hat{T}\left(\eta_T\gamma^1\gamma^3\psi^*(x)\right)^*\hat{T} = \psi(x') \quad (9.109)$$

也就是

$$\hat{T}\psi(t, \mathbf{x})\hat{T} = \eta_T^*\gamma^1\gamma^3\psi(-t, \mathbf{x}). \quad (9.110)$$

类似的

$$\hat{T}\bar{\psi}\hat{T} = \hat{T}\psi^\dagger\gamma^0\hat{T} = \hat{T}\psi^\dagger\hat{T}(\gamma^0)^* = (\hat{T}\psi\hat{T})^\dagger\gamma^0 = [\eta_T^*\gamma^1\gamma^3\psi(-t, \mathbf{x})]^\dagger\gamma^0 \quad (9.111)$$

$$= \eta_T\psi^\dagger(-t, \mathbf{x})(\gamma^3)^\dagger(\gamma^1)^\dagger\gamma^0 = -\eta_T\psi^\dagger(-t, \mathbf{x})\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\eta_T\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma^1\gamma^3. \quad (9.112)$$

其中，有一点需要说明一下，

$$\hat{T}\psi^\dagger\hat{T} = (\hat{T}\psi\hat{T})^\dagger. \quad (9.113)$$

anti-unitary 算符的共轭是没有意义的。但是已经证明所有的 anti-Unitary 算符都可以写成  $\hat{T} = UK$  的形式，并且由于分立对称性变换算符满足  $\hat{T}\hat{T} = UU = 'I'$ ,  $U^\dagger = U = U^{-1}$ , 所以

$$UK\psi^\dagger UK = U\psi^\dagger U = (U\psi U)^\dagger = (\hat{T}\psi\hat{T})^\dagger. \quad (9.114)$$

## 9.5 LSZ reduction formula for Dirac Field

认为场在时间  $t \rightarrow \pm\infty$  的时候也可以用模式展开，并且此时的产生湮灭算符恰好可以在  $t \rightarrow \pm\infty$  处生成粒子。

考虑两个正粒子散射为两个正粒子的过程。(b 下面的数字角标标记了粒子的自旋 s), 稍微注意一下顺序，因为算符都是反对易的  $|1, 2\rangle = -|2, 1\rangle$  生成粒子的时候总是把 1 粒子的生成算符写在前面。

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|T b_{2'}(p_{2'}, +\infty)b_{1'}(p_{1'}, +\infty)b_1^\dagger(p_1, -\infty)b_2^\dagger(p_{2'}, -\infty)|0\rangle. \quad (9.115)$$

不去直接求解它，而是去看一个式子

$$b_1^\dagger(p_1, -\infty) - b_1^\dagger(+\infty) = -\int_{-\infty}^+ dt \partial_0 b_1^\dagger(t). \quad (9.116)$$

将式子写成这个形式的目的是用  $b^\dagger(+\infty)$  去表示  $b^\dagger(-\infty)$ , 然后回到散射过程的定义式子，利用时序乘积，将  $t =$

$+\infty$  的生成算符移到式子左边, 最终和真空作用得到 0. 回到之前得到的利用场的模式展开反解出产生湮灭算符的式子9.86

$$b_s^\dagger(p) = \int d^3x e^{-ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u_s(p). \quad (9.117)$$

将这个式子带入得到

$$\begin{aligned} b_1^\dagger(p_1, -\infty) - b_1^\dagger(p_1, +\infty) &= - \int d^4x \partial_0 \left( e^{-ip_1 \cdot x} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u_s(p_1) \right) \\ &= - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - i\gamma^0 p_1^0 \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x}. \end{aligned} \quad (9.118)$$

利用正粒子解 Spinor 旋量满足的方程

$$(\not{p} - m) u(p) = 0. \quad (9.119)$$

考虑这个的目的主要是为了将里面的  $p_1^0$  项改写, 具体来说

$$\text{上式} = - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - i \left( \gamma^0 p_1^0 - \gamma^i p_1^i + \gamma^i p_1^i \right) \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x}, \quad (9.120)$$

$$= - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - i(m + \gamma^i p_1^i) \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x}, \quad (9.121)$$

$$= - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - im - i\gamma^i p_1^i \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x}, \quad (9.122)$$

$$= - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - im + \gamma^i \vec{\partial}^i \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x} \quad (9.123)$$

$$= - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0 - im - \gamma^i \vec{\partial}^i \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x} = - \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - im \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x}, \quad (9.124)$$

$$= i \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left( i \not{\partial} + m \right) u(p_1) e^{-ip_1 \cdot x} \quad (9.125)$$

其中的倒数第二步用到了分部积分, 最终写为了比较好看的形式之后利用这个方法可以用  $t = +\infty$  的产生算符表示  $t = -\infty$  的产生算符, 而由于算符的前面有一个时间序列排序,  $t = +\infty$  的产生算符会被移到最左边而和真空消掉, 因此只用考虑上面的含有场算符的那一项就可以了。By the way, 至于为什么产生算符移到最左边时没有和本来就在左边湮灭算符产生对易关系, 这是因为他们是不同动量(只考虑不同动量粒子的散射过程)。

之后的计算我想跳过, (details) 总之各种粒子的散射过程都可以用这种办法转化为用场算符来表示  $\langle f | i \rangle$  的办法, 最终的结果是

$$b_s^\dagger(p)_{in} \rightarrow i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i \not{\partial} + m) u_s(p) e^{-ipx}, \quad (9.126)$$

$$b_s(p)_{out} \rightarrow i \int d^4x e^{ip \cdot x} \bar{u}_s(p) (-i \not{\partial} + m) \Psi(x), \quad (9.127)$$

$$d_s^\dagger(p)_{in} \rightarrow -i \int d^4x e^{-ip \cdot x} \bar{v}_s(p) (-i \not{\partial} + m) \Psi(x), \quad (9.128)$$

$$d_s(p)_{out} \rightarrow -i \int d^4x \bar{\Psi}(x) (i \not{\partial} + m) v_s(p) e^{ipx}, \quad (9.129)$$

$$(9.130)$$

有了这个 LSZ 约化关系之后, 求解  $\langle f | i \rangle$  的问题转化为了求解  $\langle 0 | T \Psi_{\alpha'_1}(x_1') \cdots \bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1) \cdots | 0 \rangle$  的问题。

## 9.6 Grassmann algebra and Path integral

**Above all** 这一节的核心目的是求出 grassmann 数满足的 Gauss 积分的性质。因为本质上 path Integral 的来源是 Gauss 积分。

**回顾标量场** 首先先回顾一下之前的标量场以及 charged 标量场的路径积分是怎么来的，首先是自由标量场，它的 Lagrangian 写为。

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (9.131)$$

$$= -\frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2) \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu (\varphi \partial^\mu \varphi). \quad (9.132)$$

然后证明了场算符的真空期望值 n-point function 可以写为泛函求导的形式

$$\langle T \varphi(x_1) \cdots \rangle = \frac{\delta}{i \delta J(x_1)} \cdots Z_0(J)|_{J=0} \quad (9.133)$$

其中的生成函数是一个含有作用量  $S$  的泛函积分

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right). \quad (9.134)$$

现在回到 Lagrangian 的形式 (9.131)，可以看到泛函积分有点类似于无穷维矩阵积分

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2) \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu (\varphi \partial^\mu \varphi) + J\varphi \right) \right) \Leftrightarrow \int d^n x \exp \left( -\frac{1}{2} x^T M x + b^T x \right); \quad x, b, M_{ij} \in \mathbb{R}; \quad M^T = M. \quad (9.135)$$

而对于后面一项，可以用 Gauss 积分的方式积分得到，首先做积分变换（这是因为积分对于  $x$  有着平移不变形）

$$\int d^n x \exp \left( -\frac{1}{2} x^T M x + b^T x \right) \xrightarrow{x \rightarrow x + M^{-1} b} \int d^n x \exp \left( -\frac{1}{2} x^T M x + \frac{1}{2} b^T M^{-1} b \right) = (2\pi)^{n/2} (\det M)^{-1/2} \exp \left( \frac{1}{2} b^T M^{-1} b \right). \quad (9.136)$$

而前面的系数都会被归一化掉，于是用泛函积分的生成函数直接写为

$$Z_0[J] = \exp \left( \frac{1}{2} \int d^4x d^4y i J(x) \frac{1}{i} \Delta(x-y) i J(y) \right), \quad (9.137)$$

无限维高斯积分的  $M^{-1}$  是通过

$$i(\partial_x^2 + m^2) \frac{1}{i} \Delta(x-y) = \delta^4(x-y), \quad (9.138)$$

体现的。并且，生成函数满足归一化关系  $Z_0[0] = 1$ 。从这里出发可以构建有相互作用的生成函数以及 n-point function。

Note: 前面这么写其实不是很严格，具体来说

$$M(x-y) \equiv i(\partial_y^2 + m^2) \delta^{(4)}(x-y), \quad \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(x) M(x-y) \varphi(y) = \int d^4x \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2) \varphi. \quad (9.139)$$

其中  $M$  中的偏导数是作用在 delta 函数上的。这样写的好处是可以更直观的看出  $M^{-1}$  的效果

$$\int d^4z M(x-z) \frac{1}{i} \Delta(z-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (9.140)$$

再回顾一下 Charged 标量场的路径积分，首先是自由 Charged 标量场，它的 Lagrangian 写为。

$$\mathcal{L}_0 = \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi, \quad (9.141)$$

$$= -\varphi^\dagger (\partial^2 + m^2) \varphi + \partial_\mu (\varphi^\dagger \partial^\mu \varphi). \quad (9.142)$$

然后证明了场算符的真空期望值 n-point function 可以写为泛函求导的形式

$$\langle T \varphi(x_1) \cdots \varphi^\dagger(y_1) \cdots \rangle = \frac{\delta}{i \delta J^\dagger(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i \delta J^\dagger(y_1)} \cdots Z_0(J^\dagger, J)|_{J=J^\dagger=0} \quad (9.143)$$

其中的生成函数是一个含有作用量  $S$  的泛函积分

$$Z_0[J^\dagger, J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J^\dagger \varphi + J \varphi^\dagger) \right). \quad (9.144)$$

现在回到 Lagrangian 的形式 (9.131)，可以看到泛函积分有点类似于无穷维矩阵积分

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^\dagger \exp \left( i \int d^4x \left( -\varphi^\dagger (\partial^2 + m^2) \varphi + \partial_\mu (\varphi^\dagger \partial^\mu \varphi) + J^\dagger \varphi + J \varphi^\dagger \right) \right) \Leftrightarrow \int d^n x d^n x^* \exp \left( -x^\dagger M x + b^\dagger x + x^\dagger b \right); \\ M^\dagger = M. \quad (9.145)$$

而对于后面一项，可以用 Gauss 积分的方式积分得到，首先做积分变换（这是因为积分对于  $x$  有着平移不变形）

$$\int d^n x d^n x^* \exp(-x^\dagger M x + b^\dagger x + x^\dagger b) \xrightarrow{x \rightarrow x + M^{-1} b} \int d^n x d^n x^* \exp(-x^\dagger M x - b^\dagger M^{-1} b). \quad (9.146)$$

然后考虑高斯积分， $x$  本质上是一个复数，现在将它改写成  $z$ （为了记号的美观），并且将它的复共轭  $x^*$  标记为  $\bar{z}$ ，也是为了记号美观，现在需要考虑的高斯积分变为了

$$\int d^n z d^n \bar{z} \exp(-z^\dagger M z) = (2\pi)^n (\det M)^{-1} \quad (9.147)$$

当然，这个系数是可以被归一化掉的，所以知道有这个东西就行了，关键的是用泛函积分的生成函数直接写为

$$Z_0[J^\dagger, J] = \exp \left( \int d^4 x d^4 y i J^\dagger(x) \frac{1}{i} \Delta(x-y) i J(y) \right), \quad (9.148)$$

有线维高斯积分的  $M^{-1}$  是通过

$$i(\partial_x^2 + m^2) \frac{1}{i} \Delta(x-y) = \delta^4(x-y), \quad (9.149)$$

体现的。并且，生成函数满足归一化关系  $Z_0[0, 0] = 1$ 。从这里出发可以构建有相互作用的生成函数以及 n-point function。

**引出 spin1/2 场** 对于 Spin 1/2 场，首先，它的 Lagrangian 写为

$$\mathcal{L}_0 = i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi, \quad (9.150)$$

$$= -\bar{\Psi}(-i\not{\partial} + m)\Psi. \quad (9.151)$$

然后考虑 Generating Function，具体写为

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[ i \int d^4 x (\mathcal{L}_0 + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta) \right], \quad (9.152)$$

$$= \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[ i \int d^4 x (-\bar{\Psi}(-i\not{\partial} + m)\Psi + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta) \right] \quad (9.153)$$

$$= \exp \left( \int d^4 x d^4 y i \bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x-y) i \eta(y) \right). \quad (9.154)$$

理所当然的认为类似于刚才找逆矩阵  $M^{-1}$  的方法，认为上式中的

$$(-i\not{\partial}_x + m)S(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (9.155)$$

当然，这个  $S$  是可以被量子化 Dirac 场时的传播子满足的。

对于 Spin 1/2 场，由于场算符都是反对易的，为了体现这一点，场算符的期望值应该写为如下的泛函导数形式（自由场）

$$\langle T \Psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \bar{\Psi}_{\beta_1}(y_1) \cdots \rangle \quad (9.156)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} \cdots i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_1}(y_1)} \cdots Z_0(\bar{\eta}, \eta) |_{\eta=\bar{\eta}=0} \quad (9.157)$$

其中的  $\eta, \bar{\eta}$  应该是 grassmann 数，这样就可以体现出交换场算符会导致负号的效果。而相应的泛函求导对不同的场有一个正负号的区别。这是因为在计算

$$\frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_1}(y_1)} \int d^4 x d^4 y i \bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x-y) i \eta(y) \quad (9.158)$$

的时候，是要穿过  $\bar{\eta}$  的，所以会产生一个负号，为了抵消这个负号，应该对它的泛函求导项前的  $\frac{1}{i}$  变为  $i$ 。

这里引入了 Grassmann algebra，有点奇怪，为了说明确实可以这样引入，这一节主要写 Grassmann algebra 的性质。

**Grassmann 数的基本性质** Grassmann 数最基本的性质就是它的反对易性质

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0. \quad (9.159)$$

反对易性质的结果是 Grassmann 数不能有高阶的幂次，具体来说

$$\psi^2 = 0. \quad (9.160)$$

**Grassmann 数为变量的函数的 Taylor 展开** 由于 Grassmann 数最多有 2 阶的幂次，以 Grassmann 数为变量的函数的 Taylor 展开最多到二阶，也就是只有线性项

$$f(\psi) = a + \psi b. \quad (9.161)$$

需要注意的是一般所考虑的函数是 ordinary 的函数，并不是 Grassmann 数。为了满足这个性质，展开系数中的 a 应该是 Ordinary 数，b 是 Grassmann 数。

**Grassmann 数为变量的函数的积分** 要求以 Grassmann 数为变量函数的积分应该满足两个性质，一个是线性性质，另一个是平移不变的性质

$$\begin{aligned} \int_{-}^{+} d\psi c f(\psi) &= c \int_{-}^{+} d\psi f(\psi), \\ \int_{-}^{+} d\psi f(\psi + d) &= \int_{-}^{+} d\psi f(\psi). \end{aligned} \quad (9.162)$$

其中，在线形性质的要求中的系数 c 是 ordinary number。在平移不变性质中的 d 是 Grassmann number。如果要同时满足这两个性质，Grassmann 数的积分性质被确定为

$$\int d\psi a = 0, \quad \int d\psi \psi b = b \quad (9.163)$$

**Grassmann 数为变量的函数的导数** Grassmann 导数有两种，一种是 Left-derivative, 一种 right-derivative, 不妨考虑  $f(\psi) = a + b\psi$  并考虑这两种导数的效果

$$\partial_{\psi} f(\psi) = b, \quad f(\psi) \overleftarrow{\partial}_{\psi} = -b. \quad (9.164)$$

Note, 通常说的正则动量项  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$  指的是 Right derivative。

**多 Grassmann 数为变量的函数形式** 刚才讨论的 Grassmann 数为变量的函数都是只有一个 Grassmann 数作为变量，现在拓展到 n 个 Grassmann 数作为变量，相当于是推广了一下刚才的结果。直接写出 Generalized Function of Grassmann number.

$$f(\psi) = a + \psi_i b_i + \frac{1}{2!} \psi_{i1} \psi_{i2} C_{i1,i2} + \cdots + \frac{1}{n!} \psi_{i1} \psi_{i2} \cdots \psi_{in} D_{i1,i2,\dots,in}. \quad (9.165)$$

其中，需要注意的是为了保证最终函数的值是 Ordinary number，上式中的展开系数应该是 Ordinary number For Even Term, Grassmann number for odd term. 并且对于所有的指标都是 Anti-symmetric 的。总结起来可以写为

$$D_{i1,\dots,in} = D \epsilon_{i1\dots,in}, \quad D = \begin{cases} \text{ordinary} & n \text{ is even} \\ \text{Grassmann} & \text{odd} \end{cases} \quad (9.166)$$

**多 Grassmann 数为变量的函数导数** 上面的多变量函数的求导

$$\frac{\partial}{\partial \psi_j} f(\psi) = b_j + \psi_i C_{ji} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \psi_{i2} \cdots \psi_{in} D_{j,i2,\dots,in}. \quad (9.167)$$

**多 Grassmann 数为变量的函数的积分** 直接写出它的积分定义式（需要注意其中的积分变量的排列顺序规则）

$$\int d^n \psi f(\psi) = \int d\psi_n \cdots d\psi_1 f(\psi) = D. \quad (9.168)$$

稍微详细写一下上面的这个积分，首先有贡献的只有包含所有积分变量的最后一项，而考虑到 Grassmann 数的反对易性质

$$\int d\psi_n \cdots d\psi_1 \psi_{i1} \cdots \psi_{in} D \epsilon_{i1,\dots,in} = (n!) \int d\psi_n \cdots d\psi_1 \psi_1 \cdots \psi_n D = n! D. \quad (9.169)$$

**Grassmann 数积分变量变换** 类似于多元函数积分时候的变量代换，直接考虑变量代换

$$\psi_i = J_{ij} \psi'_j. \quad (9.170)$$

其中的  $J$  matrix 中的数字都是 Ordinary Number. 考虑了变量替换之后的函数可以写为

$$f(\psi(\psi')) = a + \cdots + \frac{1}{n!} (J_{i1,j1} \psi'_{j1}) \cdots (J_{in,jn} \psi'_{jn}) \epsilon_{i1,\dots,in} D. \quad (9.171)$$

考虑到有一个线性代数里面矩阵行列式 Determinant 的性质

$$\epsilon_{i1,\dots,in} (J_{i1,j1}) \cdots (J_{in,jn}) = \det(J) \epsilon_{j1,\dots,jn}. \quad (9.172)$$

利用这个性质，变量代换后的函数写为

$$f(\psi(\psi')) = a + \cdots + \frac{1}{n!} \psi'_{i1} \cdots \psi'_{in} \epsilon_{i1,\dots,in} (\det J) D. \quad (9.173)$$

如果对变量代换后的函数积分，它应当是

$$\int d^n \psi' f(\psi(\psi')) = \det J D, \quad (9.174)$$

并且注意到

$$\int d^n \psi f(\psi(\psi')) = D \quad (9.175)$$

于是认为

$$\int d^n \psi f(\psi) = (\det J)^{-1} \int d^n \psi' f(\psi(\psi')). \quad (9.176)$$

为了对比起见，对于 Ordinary 数为变量的函数进行变量代换的效果是

$$x = Jx' \Rightarrow \int d^n x = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right) \int d^n x' = \det(J) \int d^n x'. \quad (9.177)$$

这一点和经典情况不一样。

**Grassmann 数的 Gauss 积分** 想要考虑的积分是

$$\int d^n \psi \exp\left(\frac{1}{2} \psi^T M \psi\right), \quad M_{ij} \in \mathbb{C}, \quad M_{ij} = -M_{ji}. \quad (9.178)$$

首先先考虑线性代数中的性质，对于 Anti-symmetry, Complex matrix, 可以通过变换得到 Block-diagonal 形式的矩阵

$$U^T M U = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -m_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad m_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0. \quad (9.179)$$

利用上一段发现的积分变换的性质，取积分变换

$$\psi_i = U_{ij} \psi'_j. \quad (9.180)$$

带入所需要考虑的积分

$$\int d^n \psi \exp\left(\frac{1}{2} \psi^T M \psi\right) = (\det U)^{-1} \int d^n \psi' \exp\left(\frac{1}{2} \psi'^T U^T M U \psi'\right), \quad (9.181)$$

$$= (\det U)^{-1} \int d^n \psi' \left( \frac{1}{2} \psi'^T U^T M U \psi' \right), \quad (9.182)$$

$$= (\det U)^{-1} \prod_{I=1}^{n/2} \int d^2 \psi_I \left( \frac{1}{2} \psi_I^T M_I \psi_I \right). \quad (9.183)$$

能够把  $\exp$  去掉是因为高阶幂次都是 0，能把他们分成连乘的形式是因为交换的次数总是偶数。

这里的推导暗含了一个假设，就是 Grassmann 变量的个数  $n$  是一个偶数，如果是奇数的话，变换后的分块

矩阵最后一行以及最后一列都是 0。考虑一下它的后果，这种情况下  $\psi'^T U^T M U \psi'$  会是这样的一个数

$$(\dots) \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\dots) \quad (9.184)$$

考虑一下矩阵作用在右侧列向量的结果是一个列向量，这个列向量的特点是 A. 最后一项是 0 B. 前 n-1 项都不含有  $\psi_{n'}$ . 这个列向量和前面的行向量乘积的结果是：表达式中没有  $\psi_{n'}$ 。于是如果做 Grassmann 积分，得到的一定是。

现在考虑将分块矩阵提出来后的积分

$$\int d^2\psi_I \frac{1}{2} \psi_I^T M_I \psi_I = \int d\psi_{I2} \psi_{I1} m_I (\psi_{I1} \psi_{I2}) = m_I. \quad (9.185)$$

于是，最开始考虑的积分结果是

$$\int d^n\psi \exp\left(\frac{1}{2}\psi^T M \psi\right) = (\det U)^{-1} \prod_{I=1}^{n/2} m_I. \quad (9.186)$$

然后考虑一下变换前后矩阵的 determinant

$$(\det U)^2 \det(M) = \prod_{I=1}^{n/2} m_I^2 \quad (9.187)$$

于是

$$\int d^n\psi \exp\left(\frac{1}{2}\psi^T M \psi\right) = (\det M)^{1/2}. \quad (9.188)$$

为了方便起见，和实数的情况做一个对比

$$\int d^n x \exp(-\frac{1}{2}x^T M x) = (2\pi)^{n/2} (\det M)^{-1/2}. \quad (9.189)$$

**Complex conjugate of grassmann number** 用两个 Grassmann number 定义互为 complex conjugate 的 Complex Grassmann Number

$$\chi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2), \quad \bar{\chi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2). \quad (9.190)$$

变换矩阵是

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\chi} \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (9.191)$$

上面变换矩阵的行列式是  $-i$ , 于是, 按照之前的积分变量变换

$$d^2\psi = d\psi_2 d\psi_1 = (-i)^{-1} d\chi d\bar{\chi}. \quad (9.192)$$

注意到  $\psi_1 \psi_2 = -i\bar{\chi}\chi$ , 有积分性质

$$\int d\chi d\bar{\chi} \bar{\chi}\chi = \frac{1}{(-i)^{-1}} \int d\psi_2 d\psi_1 \frac{1}{-i} \psi_1 \psi_2 = 1 \quad (9.193)$$

于是 Complex Grassmann number 和普通的 Grassmann number 的性质类似，只用将互为 complex 的当作独立的变量就好了。

**Integral of Complex Grassmann Variable** 定义 Complex Grassmann variable 的函数的积分元写为

$$d^n\chi d^n\bar{\chi} \equiv d\chi_n d\bar{\chi}_n \cdots d\chi_1 d\bar{\chi}_1. \quad (9.194)$$

对于 Complex Grassmann variable 的积分变换  $\chi_i = J_{ij} \chi'_j$  以及  $\bar{\chi}_i = K_{ij} \bar{\chi}'_j$ , 积分变换效果是

$$d^n\chi d^n\bar{\chi} = (\det J)^{-1} (\det K)^{-1} d^n\chi' d^n\bar{\chi}'. \quad (9.195)$$

现在考虑我们想要计算的积分，并且有一个线性代数的性质 — 任何 Complex matrix 都可以用 Unitary matri-

ces U,V 计算出  $VMU$ , 使得它只有对角元素并且是正数  $m_i$ 。

$$\int d^n \chi d^n \bar{\chi} \exp(\chi^\dagger M \chi) = (\det U)^{-1} (\det V)^{-1} \prod_{i=1}^n \int d\chi_i d\bar{\chi}_i \exp(m_i \bar{\chi}_i \chi_i), \quad (9.196)$$

$$= (\det U)^{-1} (\det V)^{-1} \prod_{i=1}^n m_i, \quad (9.197)$$

$$= \det M. \quad (9.198)$$

利用它的平移对称性  $\chi \rightarrow \chi - M^{-1}\eta$ ,  $\chi^\dagger \rightarrow \chi^\dagger - \eta^\dagger M^{-1}$ . 得到积分表达式

$$\int d^n \chi d^n \bar{\chi} \exp(\chi^\dagger M \chi + \eta^\dagger \chi + \chi^\dagger \eta) = (\det M) \exp(-\eta^\dagger M^{-1} \eta). \quad (9.199)$$

作为比较, 也是考虑 Ordinary Complex number 的这种形式积分

$$\int d^n z d^n \bar{z} \exp(-z^\dagger M z) = (2\pi)^n (\det M)^{-1}. \quad (9.200)$$

**Spin-1/2 Dirac field** 不妨回到开头, 对于 Spin-1/2 Field, 用路径积分的方法计算生成函数时实际上是在计算 (9.152)

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[ i \int d^4x (-\bar{\Psi}(-i\cancel{\partial} + m)\Psi + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta) \right]. \quad (9.201)$$

对于 Complex Grassmann Variable 的积分结果 (9.199), 利用它的平移对称性后的式子就可以验证之前的猜解了 (9.152)。 (details 其实还有个  $\gamma^0$  的问题)

**小结** 场算符的期望值应该写为如下的泛函导数形式 (自由场)

$$\langle T \Psi_{\alpha_1}(x_1) \cdots \bar{\Psi}_{\beta_1}(y_1) \cdots \rangle \quad (9.202)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} \cdots i \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_1}(y_1)} \cdots Z_0(\bar{\eta}, \eta) |_{\eta=\bar{\eta}=0} \quad (9.203)$$

其中

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp \left( \int d^4x d^4y i\bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x-y) i\eta(y) \right). \quad (9.204)$$

传播子是

$$S(x-y)_{\alpha, \beta} = \langle 0 | \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{(\cancel{p} + m)_{\alpha, \beta}}{-p^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (9.205)$$

# 第十章 Spin-1

## 10.1 Massive-spin-1 Canonical Quantization

**Lagrangian 与运动方程** 首先电磁场的能量动量张量是这个:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \quad (10.1)$$

然后有质量矢量场的 Lagrangian 是这个:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \quad (10.2)$$

对应的 Euler-Lagrange 方程是这个:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \\ -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= m^2 A^\nu \end{aligned} \quad (10.3)$$

然后这个方程有一个名字叫做 Proca 方程。一般写成这个形式.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (10.4)$$

这个方程有一个直接的要求叫做 **Lorentz 条件**, 推导是对 Proca 方程取一个散度。

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (10.5)$$

注意到  $F$  他是反对称的, 所以第一项就直接是 0 了。于是就有了 Lorentz 条件:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (10.6)$$

有了这个条件之后, Proca 方程就变成了 Klein-Gordan 方程。

$$(\partial^2 + m^2) A^\mu(x) = 0 \quad (10.7)$$

总的来说, 场需要满足运动方程以及 Lorentz 规范条件

$$\text{运动方程 } (\partial^2 + m^2) A^\mu(x) = 0, \quad (10.8)$$

$$\text{规范条件 } \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (10.9)$$

**正则动量与对易关系** 生成的动量算符是这样定义的:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} = -F_{0\mu} \quad (10.10)$$

一般写成协变矢量:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} = -F_0^\mu \quad (10.11)$$

由于  $F$  是反对称的, 00 分量就是 0, 于是其实对于正则动量, 只有空间分量的指标是非零的, 具体来说, 写为

$$\vec{\pi} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} A_0 \quad (10.12)$$

而场的量子化条件是这样的:

$$[A^i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)] = i\delta^i_j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad [A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{y}, t)] = [\pi_i(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (10.13)$$

**极化矢量与完备基** 运动方程很容易满足, 只要写成  $e^{ipx}$  的形式就能满足, Klein-Gordon 方程相当于只是要求了能动量条件。对于有质量矢量场, 它自动满足 Lorentz 规范条件。所以找到一个和四维动量正交的矢量比较有用, 他们叫做极化矢量。现在考虑 4 个基底。在下面的式子里面,  $\mu$  代表着向量中的不同项。 $\sigma = 0, 1, 2, 3$ 。代表着有四个基底。他们叫做 **极化矢量**。

$$e^\mu(p, \sigma) \quad (10.14)$$

正交关系是这样的:

$$e^\mu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'} \quad (10.15)$$

完备性关系是这样的:

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = g_{\mu\nu} \quad (10.16)$$

一个矢量的展开是这样的:

$$\sum_{\sigma} \left( g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) \right) e_\mu(p, \sigma) = V_\mu \quad (10.17)$$

什么叫做完备性, 就是任意一个矢量都可以展开到这个基底上, 展开系数是基底和向量的内积。但是上面的式子里面多了一个  $g_{\sigma\sigma}$  我只是想说这一项和正交关系是自洽的。因为如果把上面的矢量展开式左右同时用  $e^\mu(p, \sigma')$  做内积的话, 得到的结果是:

$$LHS \equiv \sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma) e^\mu(p, \sigma'), \quad RHS \equiv V_\mu e^\mu(p, \sigma') \quad (10.18)$$

利用前面的正交性关系:

$$LHS = \sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} V^\nu e_\nu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma) e^\mu(p, \sigma') = \sum_{\sigma} g_{\sigma\sigma} g_{\sigma\sigma'} V^\nu e_\nu(p, \sigma) \quad (10.19)$$

按照 Minkowski 空间的度规的话, 上面的式子当然就是  $V^\nu e_\nu(p, \sigma') = RHS$  了。所以是自洽的。

**选取极化矢量** 先选择两个满足四维横向条件 ( $e^\mu p_\mu = 0$ ) 与三维横向条件 (三维部分和动量的三维部分点乘是 0) 的类时极化矢量。

$$|p_T| = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \quad (10.20)$$

$$\vec{e}(p, 1) = \frac{1}{|\vec{p}| |p_T|} (p^1 p^3, p^2 p^3, -|p_T|^2) \quad (10.21)$$

$$e^\mu(p, 1) = (0, \vec{e}(p, 1))$$

$$\vec{e}(p, 2) = \frac{1}{|p_T|} (-p^2, p^1, 0) \quad (10.22)$$

$$e^\mu(p, 2) = (0, \vec{e}(p, 2))$$

然后再找一个满足四维横向条件与三维纵向条件 (三维部分和动量的三维部分方向相同) 的类空极化矢量:

$$e^\mu(p, 3) = \left( \frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p^0 \vec{p}}{m |\vec{p}|} \right) \quad (10.23)$$

然后再找一个不满足四维横向条件, 的类时极化矢量:

$$e^\mu(p, 0) = \frac{p^\mu}{m} = \frac{1}{m} (p^0, \vec{p}) \quad (10.24)$$

反正这样构造出来的向量是满足正交关系:

$$e^\mu(p, \sigma) e_\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'} \quad (10.25)$$

也是满足归一化关系的

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = g_{\mu\nu} \quad (10.26)$$

但是如果我们要不要第零个极化矢量, 因为他不满足四维横向条件, 那么:

$$\sum_{\sigma=1}^3 e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \quad (10.27)$$

**螺旋度本征态** 于是我们构造三个**极化矢量**(左极化-1, 右极化+1, 纵向极化0)

$$\epsilon^\mu(p, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp e^\mu(p, 1) - i e^\mu(p, 2)) \quad (10.28)$$

$$e^\mu(p, 0) = e^\mu(p, 3)$$

他们满足正交条件和极化求和条件

$$\begin{aligned}\epsilon_\mu^*(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda') &= -\delta_{\lambda\lambda'} \\ \Sigma_\lambda \epsilon^{\mu*}(p, \lambda)\epsilon^\nu(p, \lambda) &= -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\end{aligned}\quad (10.29)$$

直接吧这个定义的三个极化矢量带入矩阵方程就可以发现他恰好是螺旋度的本征向量。什么是螺旋度，就是自旋角动量算符在动量方向上面的投影。具体来讲，自旋角动量矩阵是 Lorentz 群的生成元矩阵。 $(\lambda = -0+)$

$$(\hat{p} \cdot \mathcal{J})_\nu^\mu(p, \lambda) = \lambda \epsilon^\mu(p, \lambda) \quad (10.30)$$

所以说极化矢量恰好是螺旋度的本征向量。有点类似于光学里的偏振光，不过光子场不应该有质量，所以下一部分无质量的场的圆偏振极化矢量描述的确实是自然界的偏振光。

**模式展开** 认为量子矢量场的平面波展开是：

$$A^\mu(x) = \int d\vec{p} \Sigma_{\lambda=\pm,0} (\epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx}) \quad (10.31)$$

如果把这个平面波展开直接带入到量子 Lorentz 变换生成元算符和场算符之间的对易关系的式子中，就可以得到湮灭算符和量子角动量算符（量子 Lorentz 变换的转动部分生成元）的对易关系

$$[a_{p,\lambda}, \hat{p} \cdot \mathbf{J}] = \lambda a_{p,\lambda}. \quad (10.32)$$

对他取共轭就得到了产生算符的对易关系，写开是这样的：

$$(\hat{p} \cdot \mathbf{J}) a_{p,\lambda}^\dagger = a_{p,\lambda}^\dagger (\hat{p} \cdot \mathbf{J}) + \lambda a_{p,\lambda}^\dagger \quad (10.33)$$

在前面有一个小节叫做（量子场的 Lorentz 变换）。得到了量子矢量场算符和量子 lorentz 变换生成元算符之间的对易关系

$$[A^\mu(x), \mathbf{J}] = \mathbf{L} A^\mu(x) + (\mathcal{J})_\nu^\mu A^\nu(x) \quad (10.34)$$

基态时这样定义的：

$$a_{p,\lambda}|0\rangle = J|0\rangle = 0 \quad (10.35)$$

动量为  $\mathbf{p}$ , 螺旋度为  $\lambda$  的粒子态这样定义：

$$|p, \lambda\rangle = a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (10.36)$$

这个粒子态有这样的性质—他的螺旋度恰好是  $\lambda$ :

$$(\hat{p} \cdot \vec{J})|p, \lambda\rangle = \lambda|p, \lambda\rangle \quad (10.37)$$

如果要满足正则量子化条件，得到生成湮灭算符之间的对易关系（求对易关系的过程以后有时间了补充上来吧 details）

$$\begin{aligned}[a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p - q) \\ [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] &= [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0\end{aligned}\quad (10.38)$$

系统总的哈密顿量 Hamiltonian, 后面的那一项一般叫做（也没有仔细去验证这个 Hamiltonian 的展开式是否正确）：

$$H = \Sigma_{\lambda=\pm,0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{3}{2} E_p \quad (10.39)$$

## 10.2 Massless Canonical Quantization

我们先考虑规范对称性。电磁场，或者说无质量矢量场的 Lagrangian 和 Euler-Lagrange 方程分别是

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\quad (10.40)$$

无质量矢量场是有规范对称性的。

如果定义一个新的矢量场，他和原来矢量场的关系是：

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x) \quad (10.41)$$

于是用上面的式子完全可以用  $A'(x)$  来表示  $A(x)$ 。于是可以用  $A'$  来表示拉格朗日量。然后发现拉格朗日量的形式是完全相同的。对应的 Euler-Lagrange 方程也是完全相同的。所以  $A'$  满足的方程和  $A$  是完全相同的。我们说这个叫做规范对称性。

**规范固定项** 然后我们用一个辅助场 (Auxiliary field)  $\xi$  人为实现 Lorentz 规范  $\partial_\mu A^\mu = 0$ 。考虑了辅助场之后的 Lagrangian 是这样的：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (10.42)$$

引入的辅助场也可以叫做规范固定项， $\xi = 0$  叫做 Landau 规范，它的意义很简单，如果  $\partial_\mu A^\mu \neq 0$  Lagrangian 会发散，所以相当于规定了  $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ ，也就是 Lorentz 规范。

**$\xi \neq 0$  时 Lorentz 规范不能满足** 按照这个 Lagrangian，可以得到动量密度算符：(这里已经带入了 +--- 的度规。)

$$\pi_i = -F_{0i} \quad \pi_0 = -\frac{1}{\xi} \partial_\mu A^\mu \quad (10.43)$$

然后我们假设规定量子化条件

$$[A^\mu(x, t), \pi_\nu(y, t)] = i\delta_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad [A^\mu(x, t), A^\nu(y, t)] = [\pi_\mu(x, t), \pi_\nu(y, t)] = 0 \quad (10.44)$$

但是这样简单的规范固定和量子化程序不是自洽的。出现问题的点在于 (这个  $\pi_0$  就是用拉格朗日量算出来的动量密度算符)

$$[A^0(x, t), \partial_\mu A^\mu(y, t)] = [A^0(x, t), -\xi \pi_0(y, t)] = -\xi [A^0(x, t), \pi_0(y, t)] = -i\xi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (10.45)$$

这个不是 0。也就是说第一项里面的  $\partial_\mu A^\mu$  不能是 0。这个问题叫做 Lorentz 规范不可能满足。

**Feynman 规范** 然后引入一个 Feynman 规范，就是将规范固定项设为  $\xi = 1$  相应得到的 Euler-Lagrange 方程叫做 D'alembert 方程：

$$\partial^2 A^\mu(x) = 0 \quad (10.46)$$

于是假设场算符有平面波解的形式：

$$A^\mu(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\sigma=0}^3 e^\mu(p, \sigma) (b_{p, \sigma} e^{-ipx} + b_{p, \sigma}^\dagger e^{ipx}) \quad (10.47)$$

这样的话 Hamiltonian 算符是这样的 (提前用了产生湮灭算符的对易关系)(这个真空能我也没有自己算，以后有时间了应该算一下 detail)：

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (-b_{p,0}^\dagger b_{p,0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma}) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 2E_p \quad (10.48)$$

**$m = 0$  时定义极化矢量** 因为  $e(p, 0)$  和  $e(p, 3)$  的定义式中出现了静质  $m$ 。于是他们在定义光子时是不对的。于是要这样定义。

$$e^\mu(p, 3) = \frac{p - n(p \cdot n)}{((p \cdot n)^2 - p^2)^{1/2}}, \quad e^\mu(p, 0) = n^\mu. \quad (10.49)$$

其中，上式中的  $n$  是一个用四维矢量  $(1, 0, 0, 0)$  变换得到的矢量。这样的定义有几个性质，

1)  $n \cdot n = 1$

2)  $\epsilon(p, 3)\epsilon(p, 3) = -1$ , 具体来说

$$\epsilon(p, 3) \cdot \epsilon(p, 3) = \frac{(p - n(p \cdot n))(p - n(p \cdot n))}{(p \cdot n)^2 - p^2} \quad (10.50)$$

$$= \frac{p \cdot p + n \cdot n(p \cdot n)^2 - 2n \cdot p(p \cdot n)}{(p \cdot n)^2 - p^2} \quad (10.51)$$

$$= \frac{-(p \cdot n)^2 + p^2}{(p \cdot n)^2 - p^2} = -1 \quad (10.52)$$

3)  $\epsilon(p, 3)$  和  $n$  正交。

$$\epsilon(p, 3) \cdot n = \frac{p - n(p \cdot n)}{((p \cdot n)^2 - p^2)^{1/2}} \cdot n = 0. \quad (10.53)$$

4) 满足完备性条件—这一点我没有算。(need details)

$$\sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} e_{\mu}(k, \lambda) e_{\nu}(k, \lambda) = g_{\mu\nu}. \quad (10.54)$$

5) 当  $n = (1, 0, 0, 0)$  时,

$$\epsilon(p, 3) = (0, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}). \quad (10.55)$$

6) 当  $n = (1, 0, 0, 0)$  时候, 正交性和完备性都可以满足

$$\sum_{\sigma=0}^3 g_{\sigma\sigma} e_{\mu}(p, \sigma) e_{\nu}(p, \sigma) = g_{\mu\nu}, \quad e_{\mu}(p, \sigma) e^{\mu}(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'}, \quad (10.56)$$

注意, 0 和 3(新定义的两个) 都不满足四维横向条件, 不过由于无质量矢量场在 Feynman 规范条件下并不需要满足 Lorentz 规范条件, 所以模式展开也没必要满足思维横向场条件。

当然, 如果不考虑新定义的两个极化矢量, 完备性条件就变成了(也许应该叫做极化求和 **Polarization Sums** 条件):(我也不知道这时候还能不能叫做完备条件)。其中  $\epsilon$  的定义和有质量矢量场是一样的。

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^2 e_{\mu}(p, \sigma) e_{\nu}(p, \sigma) &= -g_{\mu\nu} + e_{\mu}(p, 0) e_{\nu}(p, 0) - e_{\mu}(p, 3) e_{\nu}(p, 3) \\ &= -g_{\mu\nu} + n_{\mu} n_{\nu} - \frac{(p_{\mu} - n_{\mu}(p \cdot n))(p_{\nu} - n_{\nu}(p \cdot n))}{(p \cdot n)^2 - p^2} \\ &= \sum_{\lambda=\pm} \epsilon_{\mu}^{*}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}(p, \lambda) \end{aligned} \quad (10.57)$$

这个极化求和关系在计算散射振幅的时候比较有用。

为了方便, 将前面提到的圆极化矢量的正交性再写一下

$$\epsilon_{\mu}^{*}(p, \lambda) \epsilon^{\mu}(p, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (10.58)$$

在下面正则量子化中, 因为要将不同的产生湮灭算符分离出来, 所以取  $n = (1, 0, 0, 0)$ 。实际上, 在所有计算中先认为都是取  $n = (1, 0, 0, 0)$ 。

**对易关系与粒子态** 到此为止, 再采用场算符的量子化条件, 得到生成和湮灭算符之间的对易关系(ipad 上有一些过程, 以后有时间了补充上来吧 details):

$$[b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}^{\dagger}] = -2E_p(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(p - q) \quad [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}] = [b_{p,\sigma}^{\dagger}, b_{q,\sigma'}^{\dagger}] = 0 \quad (10.59)$$

顺理成章的定义粒子态:

$$|p, \sigma\rangle = b_{p,\sigma}^{\dagger} |0\rangle \quad (10.60)$$

然后要指出一个  $\sigma = 0$  时候会面临的问题。首先粒子态的内积是这样的:

$$\langle q, \sigma' | p, \sigma \rangle = -2E_p(2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (10.61)$$

如果两个  $\sigma$  都是 1 的时候, 会发现  $g$  就变成了 1。这个时候会发现他们的内积是小于 0 的。这个事情放到能量的测量值上会有更大的问题:

$$\langle p, 0 | p, 0 \rangle = (E_{vac} + E_p) \langle p, 0 | p, 0 \rangle < 0 \quad (10.62)$$

负能量问题就会出现。

**Gupta-Bleuler Requirement** 为了规避这个事情，引入弱 Lorentz 条件。

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0 \quad (10.63)$$

有一个更加强大的条件叫做**Gupta-Bleuler**条件。满足他就一定满足弱 Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) | \Psi \rangle = 0 \quad (10.64)$$

实际上把正能量解的平面波展开式直接带入。因为  $e^\mu(p, \sigma)$  只在  $\sigma = 0$  或者  $3$  的时候不满足四维横向条件。所以求四维三度的时候也只有这两个  $\sigma$  会有贡献。**Gupta-Bleuler** 条件意味着

$$(b_{p,0} - b_{p,3}) | \Psi \rangle = 0 \quad (10.65)$$

于是(可以将  $3$  的湮灭算符直接换成  $0$  的湮灭算符):

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \langle \Psi | -b_{p,0}^\dagger b_{p,0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle + E_{vac} \langle | \Psi | \Psi \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\sigma=1}^2 \langle \Psi | b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle + E_{vac} \langle | \Psi | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (10.66)$$

动量也是一样的:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | P | \Psi \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p}{2E_p} \langle \Psi | -b_{p,0}^\dagger b_{p,0} + \sum_{\sigma=1}^3 b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p}{2E_p} \sum_{\sigma=1}^2 \langle \Psi | b_{p,\sigma}^\dagger b_{p,\sigma} | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (10.67)$$

也就是说只要态矢量满足了 **Gupta-Bleuler** 条件，那么就不会有能量有负号这样的事情。实际上  $|p, 0\rangle$  和  $|p, 3\rangle$  都是不满足 **Gupta-Bleuler** 条件的态矢量。

**圆极化态矢量** 然后用  $\sigma = 1, 2$  的两个状态定义新的产生湮灭算符:

$$a_{p,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp b_{p,1} + i b_{p,2}) \quad (10.68)$$

这里引入了  $\pi/2$  的相位，他和光学里面的圆偏振有关系。然后和有质量的矢量场一样的。定义极化矢量  $\epsilon^\mu(p, \lambda)$  然后就有一些性质，首先是产生湮灭算符之间的对易关系:

$$\begin{aligned} [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= 2E_p (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] = [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0 \quad \lambda, \lambda' = \pm \\ [a_{p,\lambda}, b_{q,\sigma}] &= [b_{q,\sigma}, a_{q,\lambda}^\dagger] = [a_{p,\lambda}, b_{q,\sigma}] = [a_{p,\lambda}^\dagger, b_{q,\sigma}^\dagger] = 0 \quad \lambda = \pm, \sigma = 0, 3 \\ [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}^\dagger] &= -2E_p (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}] = [b_{p,\sigma}^\dagger, b_{q,\sigma'}^\dagger] = 0 \quad \sigma = 0, 3 \end{aligned} \quad (10.69)$$

同时有这样的极化矢量对应的算符的转换关系

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^2 e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma} &= \sum_{\lambda=\pm} \epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} \\ \sum_{\sigma=1}^2 e^\mu(p, \sigma) b_{p,\sigma}^\dagger &= \sum_{\lambda=\pm} \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger \end{aligned} \quad (10.70)$$

于是量子化后的量子矢量场是这样的:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\sigma=0,3} \epsilon^\mu(p, \sigma) (b_{p,\sigma} e^{-ipx} + b_{p,\sigma}^\dagger e^{ipx}) \\ &+ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda=\pm} (\epsilon^\mu(p, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \epsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx}) \end{aligned} \quad (10.71)$$

书上说一行对应于非物理极化态，第二行对应于两种物理的圆极化态。注，场的生成湮灭算符写为

$$[b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}^\dagger] = -2E_p (2\pi)^3 g_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(p-q) \quad [b_{p,\sigma}, b_{q,\sigma'}] = [b_{p,\sigma}^\dagger, b_{q,\sigma'}^\dagger] = 0 \quad (10.72)$$

极化矢量满足正交性关系以及完备性关系

$$\epsilon_\mu(p, \sigma) \epsilon^\mu(p, \sigma') = g_{\sigma\sigma'}. \quad (10.73)$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 e_\mu(p, \sigma) e_\nu(p, \sigma) = -g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - \frac{(p_\mu - n_\mu(p \cdot n))(p_\nu - n_\nu(p \cdot n))}{(p \cdot n)^2 - p^2} = \sum_{\lambda=\pm} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) \quad (10.74)$$

$$\epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon^\mu(p, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (10.75)$$

**Propagator** 直接计算得到传播子 (Feynman Gauge  $\xi = 1$ )

$$i\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (10.76)$$

## 10.3 LSZ Reduction formula

有些繁琐，不想写了，寒假有空的话补充上去吧。直接写结论吧。(need details)

**LSZ reduction formula** 场的生成算符可以用场算符积分得到

$$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) = -i\epsilon_\lambda^*(\mathbf{k}) \int d^3 x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \mathbf{A}(x), \quad (10.77)$$

$$a_\lambda(\mathbf{k}) = +i\epsilon_\lambda(\mathbf{k}) \int d^3 x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \mathbf{A}(x), \quad (10.78)$$

Srednicki 上说，可以将初入射粒子生成湮灭算符变为场算符，我也没有算，好懒，先抄上去

$$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})_{\text{in}} \rightarrow i\epsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k}) \int d^4 x e^{-ikx} (-\partial^2) A_\mu(x), \quad (10.79)$$

$$a_\lambda(\mathbf{k})_{\text{out}} \rightarrow i\epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \int d^4 x e^{+ikx} (-\partial^2) A_\mu(x). \quad (10.80)$$

## 10.4 Path Integral Quantization

这一部分，首先讲按照往常一样的方法算 Path integral 有什么问题，然后在引入 Faddeev-Popov 方法。

**场作用量** Spin-1 场的作用量是

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (10.81)$$

将  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  带入可以得到更加简单的形式

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad (10.82)$$

$$= -\frac{1}{4} \int d^4 x (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu), \quad (10.83)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4 x (A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu), \quad (10.84)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4 x A_\mu (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu = \frac{1}{2} \int d^4 x A^\mu (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu. \quad (10.85)$$

如果利用 Fourier Transformation 将作用量写为动量空间的形式，

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp(-ik \cdot x) A_\mu(k). \quad (10.86)$$

带入作用量的表达式可以将它表达为

$$S = \frac{1}{2} \int d^4 k \frac{1}{(2\pi)^4} A_\mu(-k) (-g^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu) A_\nu(k). \quad (10.87)$$

在计算 Path integral 的时候，一般来说计算的是

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right\} \quad (10.88)$$

$$= \exp \left\{ i \int d^4k \frac{1}{2(2\pi)^4} \left[ A_\mu(-k) (-g^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu) A_\nu(k) + J^\mu(-k) A_\mu(k) + J^\mu(k) A_\mu(-k) \right] \right\}. \quad (10.89)$$

按照标量场的办法，是需要考虑类似于  $(-g^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu)^{-1}$  的东西。但是可以发现，这个矩阵有本征值为 0 的本征态，也就是

$$(-g^{\mu\nu} k^2 + k^\mu k^\nu) k_\nu = 0. \quad (10.90)$$

所以之前的办法是不可以的。问题的来源是因为场有规范不变性，路径积分实际上算重复了。要做的就是确定规范。

**Faddeev-Popov Method** 首先考虑单变量函数的一个恒等式

$$\int dx \delta[f(x)] \frac{df(x)}{dx} = 1. \quad (10.91)$$

可以推广到多变量的情况 ( $dx^i = dx^1 \cdots dx^n$ )，可以注意到后面那个 determinant 实际上就是 Jacobi 行列式。

$$\int dx^i (\Pi_j \delta[f^j(x)]) \det \left( \frac{df^i(x)}{dx^j} \right) = 1 \Rightarrow \int dx^i (\Pi_j \delta[y^j(x)]) \det \left( \frac{dy^i(x)}{dx^j} \right) = \int dy^i (\Pi_j \delta[y^j(x)]) = 1. \quad (10.92)$$

如果拓展到无穷个变量，

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta[G(A_\alpha)] \det \left( \frac{\delta G(A_\alpha)}{\alpha} \right). \quad (10.93)$$

相当于对于每一个时空坐标  $x$ ，都有一个原来的变量  $\alpha(x)$ ，变量变换为了新的无穷个变量  $G(A_\alpha)(x)$ 。

上面函数的意思实际上是选定了一个  $\alpha(x)$  使得  $G(A_\alpha)(x) = 0$ 。在这里，理解为确定了一个规范，定义为

$$A_\alpha = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad G(A_\alpha) = \partial^\mu (A_{\alpha\mu}) - \omega(x) = \partial^\mu \left( A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) - \omega(x). \quad (10.94)$$

将这一项插入到路径积分表达式中（这里没有考虑生成函数以及  $J$ ，单纯是考虑了一个真空期望值）

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \delta[G(A_\alpha)] \det \left( \frac{\delta G(A_\alpha)}{\delta \alpha} \right) \exp(iS[A]) \quad (10.95)$$

注意到因为是线性变换，行列式是一个不依赖于场的常数  $\det \left( \frac{\delta G(A_\alpha)}{\delta \alpha} \right) = \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right)$ 。于是

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\alpha \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}A \delta[G(A_\alpha)] \exp(iS[A]), \quad (10.96)$$

注意到  $A$  与  $A_\alpha$  差的是一个平移变换，或者说规范变换，并且作用量是规范不变的  $S[A] = S[A_\alpha]$ 。于是，

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\alpha \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}A \delta[G(A)] \exp(iS[A]), \quad (10.97)$$

$$= \int \mathcal{D}\alpha \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}A \delta[\partial^\mu A_\mu - w] \exp(iS[A]). \quad (10.98)$$

会发现这里巧妙的点在于 delta 函数本来是对场  $\alpha$  的一个约束，现在成为了对  $w$  的一个约束。由于上式对任意的  $w$  函数都成立，所以可以对不同的  $w$  函数求和

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \mathcal{N}(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \int \mathcal{D}\alpha \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right) \int \mathcal{D}A \delta[\partial^\mu A_\mu - \omega] \exp(iS[A]), \quad (10.99)$$

$$= \mathcal{N} \det \left( -\frac{1}{e} \partial^2 \right)(\xi) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A] - i \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2 / 2\xi}, \quad (10.100)$$

$$\propto \mathcal{D}A \exp \left( iS[A] - i \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2 / 2\xi \right). \quad (10.101)$$

于是，任何规范不变的算符  $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(A_\alpha)$  对真空的期望值都可以用路径积分的方法给出

$$\langle \Omega | T\mathcal{O}(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp i \int_{-T}^{+T} d^4x [\mathcal{L}_\gamma - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2]}{\int \mathcal{D}A \exp i \int_{-T}^{+T} d^4x [\mathcal{L}_\gamma - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2]} \quad (10.102)$$

其实，可以发现，这里的 Faddeev Popov 操作相当于说明了在正则量子化时候强行加入 Lagrangian 的规范修正项实际上是有道理的。

**传播子** 考虑了规范变换后的作用量写为

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(-k) \left( -g^{\mu\nu} k^2 + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu \right) A_\nu(k). \quad (10.103)$$

于是，生成函数写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \exp \left( i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ A_\mu(-k) \left( -g^{\mu\nu} k^2 + (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu \right) A_\nu(k) + J^\mu(-k) A_\mu(k) + J^\mu(k) A_\mu(-k) \right\} \right). \quad (10.104)$$

首先考虑一个矩阵乘积关系

$$\left( g^{\mu\nu} k^2 - (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu \right) \frac{1}{k^2} \left( g_{\nu\rho} - (1 - \xi) \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} \right) \quad (10.105)$$

$$= \frac{1}{k^2} \left( \delta_\rho^\mu k^2 - (1 - \xi) \frac{k_\rho k^\mu}{k^2} - (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k_\rho + (1 - \frac{1}{\xi})(1 - \xi) \frac{k^\mu k_\rho}{k^2} k^\nu k_\nu \right) \quad (10.106)$$

$$= \frac{1}{k^2} \left( \delta_\rho^\mu k^2 - (1 - \xi) \frac{k_\rho k^\mu}{k^2} - (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k_\rho + (1 - \xi) \frac{k^\mu k_\rho}{k^2} k^\nu k_\nu + (1 - \frac{1}{\xi}) \frac{k^\mu k_\rho}{k^2} k^\nu k_\nu \right) \quad (10.107)$$

$$= \delta_\rho^\mu. \quad (10.108)$$

将这个关系简记为  $M^{\mu\nu} (M^{-1})_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ , 并且注意到他们都是对称的  $M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu}$ ,  $(M^{-1})_{\nu\rho} = (M^{-1})_{\rho\nu}$  于是重新定义积分变量.

$$\varphi_\mu(k) = A_\mu(k) - (M^{-1})_{\mu\rho} J^\rho(k). \quad (10.109)$$

重新定义积分变量的好处在于

$$-A_\mu(-k) \left( g^{\mu\nu} k^2 - (1 - \frac{1}{\xi}) k^\mu k^\nu \right) A_\nu(k) + J^\mu(-k) A_\mu(k) + J^\mu(k) A_\mu(-k) \quad (10.110)$$

$$= - \left( \varphi_\mu(-k) + (M^{-1})_{\mu\alpha} J^\alpha(-k) \right) M^{\mu\nu} \left( \varphi_\nu(k) + (M^{-1})_{\nu\beta} J^\beta(k) \right) + J^\mu(-k) \left( \varphi_\mu(k) + (M^{-1})_{\mu\alpha} J^\alpha(k) \right) \\ + J^\mu(k) \left( \varphi_\mu(-k) + (M^{-1})_{\mu\alpha} J^\alpha(-k) \right), \quad (10.111)$$

$$= -\varphi_\mu(-k) M^{\mu\nu} \varphi_\nu(k) + J^\alpha(-k) (M^{-1})_{\alpha\beta} J^\beta(k). \quad (10.113)$$

其中，用到了 **M** 矩阵的 Transpose equivalent 性质。再次之后，将对 **A** 的泛函积分变为对  $\varphi$  的泛函积分，得到

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( -\varphi_\mu(-k) M^{\mu\nu} \varphi_\nu(k) + J^\alpha(-k) (M^{-1})_{\alpha\beta} J^\beta(k) \right) \right) \quad (10.114)$$

$$\propto \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} J^\alpha(-k) (M^{-1})_{\alpha\beta} J^\beta(k) \right\}, \quad (10.115)$$

$$= \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} J^\alpha(-k) \Delta_{F,\alpha\beta}(k) J^\beta(k) \right\}. \quad (10.116)$$

其中

$$(M^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{g_{\alpha\beta} - (1 - \xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}}{k^2}. \quad (10.117)$$

一般来说，将传播子定义为 (**M** 定义为了 **D**)

$$\xi = 0 \rightarrow \frac{1}{i} D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad \text{Landau Gauge,} \quad (10.118)$$

$$\xi = 1 \rightarrow \frac{1}{i} D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{Feynman Gauge.} \quad (10.119)$$

再利用 Fourier 变换变回到坐标空间, 利用  $J$  与传播子的 Fourier 变换性质

$$\begin{cases} J_\mu(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x} J_\mu(x), \\ \Delta_F^{\mu\nu}(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x} \Delta_F^{\mu\nu}(x). \end{cases} \quad (10.120)$$

直接带入可以得到更加实用的生成函数

$$Z[J] \propto \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J_\mu(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x - x') J_\nu(x') \right\}. \quad (10.121)$$

## 10.5 Feynman Rules for QED

前面已经讨论过了 Dirac 场的量子化以及电磁场的量子化, 现在考虑 Dirac 场和电磁场的耦合 Lagrangian, 直接写出 Lagrangian 为

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (10.122)$$

上面式子中的  $e$  是一个负数。

**规范不变性** 不难发现, 上面写出的 Lagrangian 在场的规范变换

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \psi \exp(i\alpha(x)), \\ A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \end{cases} \quad (10.123)$$

下是不变的。有一种更简单的写 Lagrangian 的形式

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (10.124)$$

其中, 定义了协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (10.125)$$

**生成函数** 自由的 Dirac spin-1/2 场的生成函数以及 spin-1 场的生成函数分别是:

$$\begin{aligned} Z_{spin-1}[J] &\propto \exp \left\{ i \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J_\mu(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x - x') J_\nu(x') \right\}, \\ Z_{spin-1/2}[\bar{\eta}, \eta] &= \exp \left( \int d^4x d^4y i\bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x - y) i\eta(y) \right). \end{aligned} \quad (10.126)$$

按照标量场的办法, 将相互作用项按围绕的方式考虑, 于是 QED 的生成函数是

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] \propto \exp \left\{ -ie \int d^4x \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \left( i \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)} \right) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\beta(x)} \right) \right\} \quad (10.127)$$

$$\exp \left\{ i \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' J_\mu(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x - x') J_\nu(x') \right\} \exp \left( \int d^4x d^4y i\bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x - y) i\eta(y) \right). \quad (10.128)$$

需要注意的是  $S$  并不是对称的矩阵, 所以在坐标空间画 Feynman 图的时候就需要给传播子上带一个箭头, 规则是:

$$\overset{x'}{\otimes} \rightarrow \overset{x}{\otimes} = \int d^4x d^4x' i\bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x - x') i\eta(x') = \int d^4x d^4x' i\bar{\eta}(x) \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle i\eta(x'). \quad (10.129)$$

这个记法暗含了一个约定-矩阵的左指标在图中的位置是箭头的终点。虽然不严谨, 但是可以说一下, 在之前计算 spin-1/2 的 LSZ 约化公式时, 正粒子的产生算符是用场  $\bar{\psi}$  产生的。而  $\bar{\psi}$  又是通过  $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}$  产生的。所以入射的正粒子 external line 是一个箭头指向 vertex (Fermion 线的起点)。并且入射正粒子在 LSZ 约化公式中有一个  $u$ 。在 spinor 指标相乘的时候, 它相当于一个列向量, 总是写在式子的最后面(最右边)。所以在根据动量空间 Feynman 图写散射振幅的时候, 总是从 Fermion 线的终点开始写。

按照标量场的处理办法, 硬先用生成函数计算多点关联函数, 然后用多点关联函数和 LSZ reduction formula 计算散射振幅, 但是我先不算了, 直接写出散射振幅的一般规律。

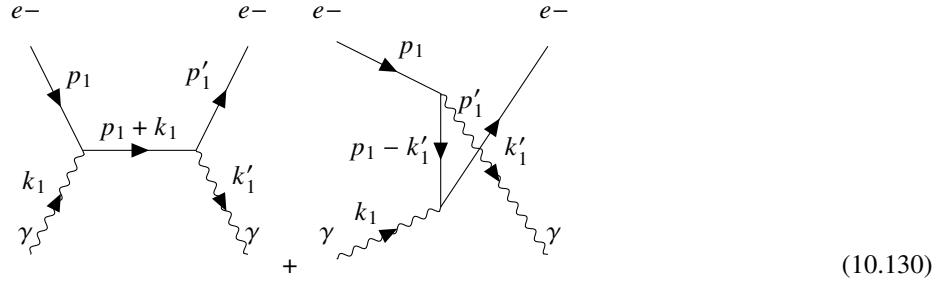
**Feynman Rules** 不像之前在标量场从树图散射振幅归纳得到 Feynman 规则，这里的 feynman 规则就直接不加计算的直接给出了。这里给出的是动量空间的 Feynman Rules，Feynman 图中的所有线都是带有箭头的，其中用 Dirac Spinor 描述的 Fermion 用实线表示，用 Polarization vector 描述的 spin-1 玻色子用波浪线表示。

- 1) 每一个入射的动量为  $p_i$  的正粒子，箭头指向 vertex，箭头上带有的动量是  $p_i$ 。
- 2) 每一个出射的动量为  $p'_i$  的正粒子，箭头从 vertex 指出，箭头上带有的动量是  $p'_i$ 。
- 3) 每一个入射的动量为  $p_i$  的反粒子，箭头从 vertex 指出，箭头上带有的动量是  $-p_i$ 。
- 4) 每一个出射的动量为  $p'_i$  反粒子，箭头指向 vertex，箭头上带有的动量是  $-p'_i$ 。
- 5) 每一个入射的动量为  $k_i$  的光子，箭头指向 vertex，箭头上带有的动量是  $k_i$ 。
- 6) 每一个出射的动量为  $k'_i$  的光子，箭头从 vertex 指出，箭头上带有的动量是  $k'_i$ 。
- 7) vertex 上总是连接着两个 fermion 实线以及一个描述光子的波浪线。对于描述 Fermion 的实线，一个箭头指向 vertex，一个箭头从 vertex 指出。对于描述光子的波浪线，箭头可以指向 vertex 也可以从 vertex 指出。
- 8) Feynman 图中的所有线上都带有动量，最外部的 external Line 上带有的动量通过最开始的几个规则确定，每一个节点的动量都是守恒的。
- 9) 每一个入射的动量为  $k_i$ ，螺旋度为  $\lambda_i$  的光子 external line 对应的 polarize vector 写为  $\epsilon_{\lambda_i}^*(k_i)$ 。
- 10) 每一个出射的动量为  $k'_i$ ，螺旋度为  $\lambda'_i$  的光子 external line 对应的 polarize vector 写为  $\epsilon_{\lambda'_i}(k'_i)$ 。
- 11) 每一个入射的动量为  $p_i$  螺旋度为  $s_i$  的正 Fermion 粒子，external line 对应的 spinor 写为  $u_{s_i}(p_i)$
- 12) 每一个出射的动量为  $p'_i$  螺旋度为  $s'_i$  的正 Fermion 粒子，external line 对应的 spinor 写为  $\bar{u}_{s'_i}(p'_i)$
- 13) 每一个入射的动量为  $p_i$  螺旋度为  $s_i$  的反 Fermion 粒子，external line 对应的 spinor 写为  $\bar{v}_{s_i}(p_i)$ 。
- 14) 每一个出射的动量为  $p'_i$  螺旋度为  $s'_i$  的正 Fermion 粒子，external line 对应的 spinor 写为  $v_{s'_i}(p'_i)$ 。
- 15) 每一个节点表示为  $-ie\gamma_\mu$ 。(这里的 e 理解为负值)
- 16) 每一个内部光子传播子 (Feynman Gauge) 对应的传播子是  $\frac{1}{i}\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$ 。如果将所考虑的规范也写到其中，传播子就是  $\frac{1}{i}\frac{1}{k^2+i\epsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)$ (也就它的分母和别人是反着的。)
- 17) 每一个内部 Fermion 传播子对应的是  $\frac{1}{i}\frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{-p^2+m^2-i\epsilon}$ 。
- 18) Spinor 指标的缩并规则是：对于每一个 Fermion 线，先找到它的结束点，这个地方的 external line (一般来说会有一个  $\bar{u}$  或者  $\bar{v}$  形式的旋量)。将这个旋量写在式子的最左边，然后从左往右依次写在 Fermion 线上遇到的项，直到写到 Fermion 线的出发点 (一般来说会有一个  $u$  或者  $v$ ) 形式的旋量。
- 19) 判断树图的相对正负号规则方法：将所有的 Fermion 线水平画出，所有的箭头都从左指向右。对于每一个图，左侧的 External line 对应的粒子顺序是确定的。观察各个图的右侧 external line 对应的粒子，从上到下依次写出他们的顺序，如果两个图对应的这个顺序是一个偶置换，那么两个图的相对符号是 +1，如果两个图对应的这个顺序相差一个奇置换，那么两个图相对符号是 -1。
- 20) 一条 Fermion 线上是同一种粒子。
- 21) 圈图会贡献一个 -1。

## 10.6 Compton Scattering

在计算 QED 散射振幅的时候，有一些常用的技巧，比如说 spin sum 或者说 polarization sum 以及 trace technic。在这里就把他们用一下。

首先 Compton 散射是指电子和光子散射为电子和光子的过程。对应的 Feynman 图有两个，画为



当然，由于大家的下指标都是 1，所以就不写下指标了。按照前面提到的 feynman 规则，直接写出散射振幅。

$$\begin{aligned} i\mathcal{T} &= (-ie)^2 \frac{1}{i} \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \frac{\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma_\mu}{-(p+k)^2 + m^2} u_s(p) \\ &\quad + (-ie)^2 \frac{1}{i} \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \frac{\gamma_\mu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma_\nu}{-(p-k')^2 + m^2} u_s(p) \\ &= -ie^2 \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \left[ \frac{\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma_\mu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma_\mu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma_\nu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u_s(p). \end{aligned} \quad (10.131)$$

先对这个式子做初步的简化

1) 首先，注意到初入射粒子满足能动量关系  $p^2 = m^2, k^2 = 0$ ，于是两个分母可以分别简化为

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k, \quad (p-k')^2 - m^2 = -2p \cdot k' \quad (10.132)$$

2) 考虑到正粒子的 Spinor 满足 Dirac 方程

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \Rightarrow (\not{p} + m)\gamma_\nu(p) = (p^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu + m\gamma_\nu)u(p) \quad (10.133)$$

$$= (p^\mu (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) + m\gamma_\nu)u(p) \quad (10.134)$$

$$= (2p_\nu + (m - \not{p})\gamma_\nu)u(p) \quad (10.135)$$

$$= 2p_\nu u(p). \quad (10.136)$$

将这两个简化用到散射振幅的式子中得到。

$$i\mathcal{T} = -ie^2 \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \left[ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{-\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu + 2\gamma_\mu p_\nu}{-2p \cdot k'} \right] u_s(p) \quad (10.137)$$

$$= -ie^2 \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \left[ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_s(p). \quad (10.138)$$

3) 想要计算的量实际上是散射振幅的模平方，所以算一下它的复共轭是比较有用的，不过对于 Dirac Spinor 有性质（可以直接用 Gamma matrix 的性质验证）

$$[\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)]^* = \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p), \quad (10.139)$$

$$[\bar{u}(p') \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu u(p)]^* = \bar{u}(p) \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu u(p').$$

考虑到这些性质之后，散射振幅的复共轭写为：

$$(i\mathcal{T})^* = ie^2 \epsilon^\mu(k) \epsilon^{\nu*}(k') \bar{u}_s(p) \left[ \frac{\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\nu \not{k}' \gamma_\mu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_{s'}(p') \quad (10.140)$$

$$= ie^2 \epsilon^\alpha(k) \epsilon^{\beta*}(k') \bar{u}_s(p) \left[ \frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\beta \not{k}' \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha p_\beta}{2p \cdot k'} \right] u_{s'}(p') \quad (10.141)$$

现在想要考虑散射振幅的模平方，方法是直接将他们乘在一起，并且对初态求平均，末态求和。稍微说一下之前的计算中，初入射的光子都没有明确的说出它的螺旋度，实际上，应该在每个入射光子下面带一个下标  $\lambda$  表示它的螺旋度，每一个出射光子下面带一个下标  $\lambda'$  表示它的螺旋度。最终在计算散射截面有意义的散射振幅模

平方写为

$$\langle |\mathcal{T}|^2 \rangle = \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} \frac{1}{4} e^4 \epsilon^{\mu*}(k) \epsilon^\nu(k') \bar{u}_{s'}(p') \left[ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_s(p) \quad (10.142)$$

$$\times \epsilon^\alpha(k) \epsilon^{\beta*}(k') \bar{u}_s(p) \left[ \frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\beta \not{k}' \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha p_\beta}{2p \cdot k'} \right] u_{s'}(p'). \quad (10.143)$$

4) 下一个技巧是关于极化矢量的求和性质 **polarization sums**. 在量子化 spin-1/2 场的时候就提到过

$$\Sigma_{\lambda=\pm} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - \frac{(p_\mu - n_\mu(p \cdot n))(p_\nu - n_\nu(p \cdot n))}{(p \cdot n)^2 - p^2}. \quad (10.144)$$

在这里, 认为光子是没有质量的, 所以这个式子简化为:

$$\Sigma_{\lambda=\pm} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - \frac{(p_\mu - n_\mu(p \cdot n))(p_\nu - n_\nu(p \cdot n))}{(p \cdot n)^2}. \quad (10.145)$$

进一步, 有一个性质是在计算散射振幅的时候, 与光子四维动量平行的部分是 0

$$\mathcal{T} \propto p_\mu \mathcal{T}^\mu = 0. \quad (10.146)$$

所以上面的极化求和条件进一步化简为了

$$\Sigma_{\lambda=\pm} \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) = -g_{\mu\nu}. \quad (10.147)$$

5) 同样的, 也可以考虑 spin-sum, 这一部分在 Dirac 方程的解那一部分有推导, 最终的结论是,

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\not{p} + m). \quad (10.148)$$

考虑极化求和条件, 以及 spin-sum 条件, 并且注意到  $u^T v = Tr(vu^T)$  可以将散射振幅的模平方写为

$$\langle |\mathcal{T}|^2 \rangle = \sum_{spin} \frac{e^2}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} Tr \left\{ u_{s'}(p') \bar{u}_{s'}(p') \left[ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] u_s(p) \right. \quad (10.149)$$

$$\left. \times \bar{u}_s(p) \left[ \frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\beta \not{k}' \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha p_\beta}{2p \cdot k'} \right] \right\} \quad (10.150)$$

$$= \frac{e^2}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} Tr \left\{ (\not{p}' + m) \left[ \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p_\mu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\mu p_\nu}{2p \cdot k'} \right] \right. \quad (10.151)$$

$$\left. \times (\not{p} + m) \left[ \frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha}{2p \cdot k} + \frac{\gamma_\beta \not{k}' \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha p_\beta}{2p \cdot k'} \right] \right\} \quad (10.152)$$

到此为止, 比较巧妙的方法就用完了, 之后就要反复计算各种 gamma 矩阵乘在一起然后取 trace, 不过因为这个计算太复杂了, 我先不写.... 我好懒。反正这部分主要是用来说一下前面的 5 种近似方法能够怎么用。

## 10.7 Loop correction to photon propagator

**Counterterm Lagrangian** 有 Counterterm QED Lagrangian 是 ( $d = 4 - \epsilon$ )

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \quad (10.153)$$

$$+ i(Z_2 - 1) \bar{\psi} \not{\partial} \psi - (Z_m - 1) m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (10.154)$$

**Counterterm feynman rules** 这一部分, 想要确定 Counter term 在动量空间 Feynman 图中产生的 Counterterm 节点是什么。

1) 首先来看第一项

$$i(Z_2 - 1) \bar{\psi} \not{\partial} \psi \Rightarrow (i) \int d^4x i(Z_2 - 1) i \frac{\delta}{\delta \eta} \not{\partial} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}. \quad (10.155)$$

回顾传播子的定义,

$$\overset{x'}{\otimes} \rightarrow \overset{x}{\otimes} = \int d^4x d^4x' i\bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S(x-x') i\eta(x') = \int d^4x d^4x' i\bar{\eta}(x) \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle i\eta(x'). \quad (10.156)$$

可以直接画出有 Counterterm 的一种 Feynman 图。

$$\overset{x'}{\otimes} \rightarrow \times \rightarrow \overset{x''}{\otimes} = (i) \int d^4x d^4x' i\bar{\eta}(x'') \frac{1}{i} S(x''-x) i(Z_2-1) \not{\partial}_x \frac{1}{i} S(x-x') i\eta(x'). \quad (10.157)$$

含有 Counter term 的 Feynman 图大概可以画为

在坐标空间中, 它产生的 Counterterm vertex 就是

$$\rightarrow \times \rightarrow = \int d^4x - (Z_2-1) \not{\partial}_x \quad (10.158)$$

注意, 上面的偏导数只会作用在接在这个节点上的右侧的传播子的坐标上。(并不是作用在两个传播子上) 接下来考虑在动量空间中的 Feynman 规则, 注意到传播子

$$S(x-y)_{\alpha,\beta} = \langle 0 | \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{(\not{p} + m)_{\alpha,\beta}}{-p^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (10.159)$$

对  $x$  的偏导数  $\not{\partial}_x$  会产生  $-i\not{p}$  所以动量空间的 Counterterm 节点就是

$$\rightarrow \overset{Z_2}{\times} \rightarrow = i(Z_2-1) \not{p} \quad (10.160)$$

2) 第二个 Counterterm. 类似的,  $Z_m$  产生的 Counterterm 在坐标空间的 Counterterm vertex 是

$$\rightarrow \overset{Z_m}{\times} \rightarrow = \int d^4x - i(Z_m-1) \quad (10.161)$$

在动量空间的 Counterterm vertex 是

$$\rightarrow \overset{Z_m}{\times} \rightarrow = -i(Z_m-1) \quad (10.162)$$

3) 对于第三个, 电磁场的部分的 Counterterm, 这一项对作用量的贡献是

$$\int d^4x (Z_3-1) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (10.163)$$

注意到在求解路径积分量子化时, 得到了一个公式

$$\int d^4x - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x A^\mu \left( g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu. \quad (10.164)$$

所以, 这个 Counterterm 对作用量的贡献是

$$\int d^4x (Z_3-1) \frac{1}{2} A^\mu \left( g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu. \quad (10.165)$$

在坐标空间中, Counterterm 节点是

$$\sim \sim \sim \sim \overset{Z_3}{\sim} \sim = \int d^4x i (Z_3-1) \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \partial_x^2 - \partial_{x,\mu} \partial_{x,\nu} \right). \quad (10.166)$$

在动量空间中, Counterterm 节点画为

$$\sim \overset{p}{\sim} \overset{Z_3}{\sim} \overset{p}{\sim} = -i (Z_3-1) \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu \right). \quad (10.167)$$

**Loop Correction to photon propagator** 现在考虑光子传播子的圈图修正。Real propagator 为

$$\frac{1}{i} \Delta_{\mu\nu}(x_1-x_2) = \langle 0 | T A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{i\delta J^\mu(x_1)} \frac{1}{i\delta J^\nu(x_2)} iW[J]|_{J=0} \quad (10.168)$$

Real Propagator 总可以表示成几何级数的形式

$$\sim \sim + \sim \overset{\Pi}{\sim} \sim + \sim \overset{\Pi}{\sim} \sim \overset{\Pi}{\sim} \sim + \dots \quad (10.169)$$

中间的圈叫做”1 particle Irreducible diagram”。如图, Real Propagator 在动量空间可以写为(它并不是 LSZ Reduction formula 得到的):

$$\frac{1}{i}\Delta(k^2) + \frac{1}{i}\Delta(k^2)i\Pi(k^2)\frac{1}{i}\Delta(k^2) + \dots \quad (10.170)$$

当然, 上面式子中的传播子或者 1PI 图都是矩阵。

**Projection op** 定义一个投影算符

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (10.171)$$

可以证明它确实是投影算符

**证明**

$$P_\alpha^\mu P_\nu^\alpha = \left(g_\alpha^\mu - \frac{k^\mu k_\alpha}{k^2}\right) \left(g_\nu^\alpha - \frac{k^\alpha k_\nu}{k^2}\right) \quad (10.172)$$

$$= g_\nu^\mu - \frac{k^\mu k_\nu}{k^2} = P_\nu^\mu. \quad (10.173)$$

□

经过它投影的算符和四维动量正交

$$k_\mu P_\nu^\mu A^\nu = 0. \quad (10.174)$$

1-PI 图和四维动量正交

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \quad (10.175)$$

可以将 1-PI 图的指标部分写为投影算符,

$$\Pi^{\mu\nu}(k^2) = \Pi(k^2)k^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \quad (10.176)$$

**Geometric series sum** 考虑到光子传播子是

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(P^{\mu\nu} + \xi \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right). \quad (10.177)$$

真实传播子的几何级数求和可以写为

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(P_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(P_{\mu\alpha} + \xi \frac{k_\mu k_\alpha}{k^2}\right) i\Pi(k^2)k^2 P^{\alpha\beta} \frac{1}{i} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(P_{\beta\nu} + \xi \frac{k_\beta k_\nu}{k^2}\right) + \dots, \quad (10.178)$$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(P_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + P_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \Pi(k^2)k^2 \frac{1}{k^2 + i\epsilon} + \dots, \quad (10.179)$$

$$= P_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \Pi(k^2)k^2 \frac{1}{k^2 + i\epsilon}} + \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (10.180)$$

$$= P_{\mu\nu} \frac{1}{(1 - \Pi(k^2))k^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (10.181)$$

**1-PI diagram** 直接画出 1-PI 的动量图

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = \text{[diagram]} + \text{[higher order terms]} \quad (10.182)$$

具体表达式写为

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (-1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{i}\right)^2 Tr \left[ S(k+l)(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \gamma^\mu) S(l)(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \gamma^\nu) \right] - i(Z_3 - 1) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) + O(e^4). \quad (10.183)$$

其中的  $-1$  来自于圈图。将电子传播子的具体形式带入

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} Tr [S(k+l)\gamma^\mu S(l)\gamma^\nu] - i(Z_3 - 1) \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\right) + O(e^4), \quad (10.184)$$

$$= (-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} Tr \left[ \frac{k+l+m}{-(k+l)^2 + m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{l+m}{-l^2 + m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \right] - i(Z_3 - 1) \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\right) + O(e^4), \quad (10.185)$$

$$= (-1) \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} Tr [(k+l+m) \gamma^\mu (l+m) \gamma^\nu] \frac{1}{-(k+l)^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{1}{-l^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (10.186)$$

$$- i(Z_3 - 1) \left(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\right) + O(e^4). \quad (10.187)$$

**Feynman Parametrization** Feynman Formula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} &= \int dF_n (x_1 A_1 + \cdots x_n A_n)^{-n} \\ \int dF_n &= \int_0^1 (n-1)! dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots x_n - 1) \\ \int dF_n &= 1 \end{aligned} \quad (10.188)$$

对  $n = 2$  时候,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{1}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^2} \\ &= \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(x_1 A_1 + (1-x_1) A_2)^2} \end{aligned} \quad (10.189)$$

在这个例子中 ( $m^2 - i\epsilon$  简写为  $m^2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{-(k+l)^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{1}{-l^2 + m^2 + i\epsilon} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x(-(l+k)^2 + m^2) + (1-x)(-l^2 + m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[-(l+kx)^2 + m^2 - x(1-x)k^2]^2}. \end{aligned} \quad (10.190)$$

一般会做变量代换

$$q = l + xk \quad D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.191)$$

**Trace technic for numerator** 考虑到 Gamma matrix 的 Trace 性质

$$\{Tr [\text{odd number of } \gamma] = 0, \quad Tr [\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu] = 4(g^{\beta\nu} g^{\mu\alpha} - g^{\beta\alpha} g^{\mu\nu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}), \quad Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}\}. \quad (10.192)$$

对于其中的 Trace 项,

$$Tr [(k+l+m) \gamma^\mu (l+m) \gamma^\nu] = Tr [(k+l)_\beta l_\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu + (k+l)_\beta m \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu + ml_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu], \quad (10.193)$$

$$= (k+l)_\beta l_\alpha Tr [\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu] + m^2 Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu], \quad (10.194)$$

$$= (k+l)_\beta l_\alpha 4(g^{\beta\nu} g^{\mu\alpha} - g^{\beta\alpha} g^{\mu\nu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}) + 4m^2 g^{\mu\nu}, \quad (10.195)$$

$$= 4 \{(k+l)^\mu l^\nu + l^\mu (k+l)^\nu - (k+l) \cdot l g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}\}. \quad (10.196)$$

变量代换为 Feynman parametrization 后的变量  $l = q - xk$ , 并且舍去所有的对  $q$  的一次项。

$$Tr [(k+l+m) \gamma^\mu (l+m) \gamma^\nu] = 4 \{(k+l)^\mu l^\nu + l^\mu (k+l)^\nu - (k+l) \cdot l g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu}\} \quad (10.197)$$

$$= 4 \{ (k + q - xk)^\mu (q - xk)^\nu + (q - xk)^\mu (k + q - xk)^\nu - (k + q - xk) \cdot (q - xk) g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu} \} \quad (10.198)$$

$$= 4 \left\{ 2q^\mu q^\nu - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + (m^2 + x(1-x)k^2 - q^2) g^{\mu\nu} \right\}. \quad (10.199)$$

积分公式

$$\left\{ \int d^d q \ q^\mu q^\nu f(q^2) = \int d^d q \ \frac{1}{d} g^{\mu\nu} q^2 f(q^2). \right. \quad (10.200)$$

$$Tr [(\not{k} + \not{l} + m) \gamma^\mu (\not{l} + m) \gamma^\nu] \Rightarrow 4 \left\{ \frac{2}{d} g^{\mu\nu} q^2 - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + (m^2 + x(1-x)k^2 - q^2) g^{\mu\nu} \right\} \quad (10.201)$$

**Combine Results above** 总的来说, 1-PI 图是

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (-1) \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left( -iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \quad (10.202)$$

$$\frac{1}{[-q^2 + D]^2} 4 \left\{ \frac{2}{d} g^{\mu\nu} q^2 - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + (m^2 + x(1-x)k^2 - q^2) g^{\mu\nu} \right\} \quad (10.203)$$

$$- i (Z_3 - 1) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + O(e^4), \quad (10.204)$$

$$= (-1) \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left( -iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \quad (10.205)$$

$$\frac{1}{[-q^2 + D]^2} 4 \left\{ -2x(1-x)k^\mu k^\nu + \left( \left( \frac{2}{d} - 1 \right) q^2 + m^2 + x(1-x)k^2 \right) g^{\mu\nu} \right\} \quad (10.206)$$

$$- i (Z_3 - 1) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + O(e^4), \quad (10.207)$$

其中

$$q = l + xk, \quad D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.208)$$

**Wick Rotation** 如果考虑到虚数部分,

$$D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.209)$$

和之前一样, 可以使用 Wick Rotation。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dq &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq \\ q^0 = iq^d &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dq^d \quad q^2 = (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^{(d)}|^2 \end{aligned} \quad (10.210)$$

使用 Wick Rotation 之后, 积分变为 Euclidian 空间中的积分:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (-1)(i) \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left( -iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \quad (10.211)$$

$$\frac{1}{[q^2 + D]^2} 4 \left\{ -2x(1-x)k^\mu k^\nu + \left( -\left( \frac{2}{d} - 1 \right) q^2 + m^2 + x(1-x)k^2 \right) g^{\mu\nu} \right\} \quad (10.212)$$

$$- i (Z_3 - 1) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + O(e^4). \quad (10.213)$$

**Gauss Integral** Gauss integral formula 是

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b - a - \frac{1}{2}d) \Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(b) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a-d/2)} \quad (10.214)$$

考虑

$$-\left( \frac{2}{d} - 1 \right) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)}{(q^2 + D)^2} = -\left( \frac{2}{d} - 1 \right) \frac{\Gamma(2 - 1 - \frac{1}{2}d) \Gamma(1 + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(2) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-1-\frac{1}{2}d)}, \quad (10.215)$$

$$= -\left(\frac{2}{d} - 1\right) \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{2}d)\Gamma(1 + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(1-\frac{1}{2}d)}, \quad (10.216)$$

$$= -\left(\frac{2}{d} - 1\right) \frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} D^{1-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (10.217)$$

以及

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d)\Gamma(\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-\frac{1}{2}d)}, \quad (10.218)$$

$$= D^{-1} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} D^{1-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (10.219)$$

Gamma function approximation

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!}{n!2^n} \sqrt{\pi} \\ \Gamma(-n+x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right] \quad n \geq 0 \\ \Gamma(n+x) &= (n-1)! \left( 1 + \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right) x + O(x) \right) \quad n \geq 1 \\ \gamma &= 0.5772 \end{cases} \quad (10.220)$$

考虑

$$-\left(\frac{2}{d} - 1\right) \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2}) = -\left(\frac{2}{4-\epsilon} - 1\right) \frac{-1}{1} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1 + O(\epsilon) \right] (2!) \left( 1 - \left( \frac{3}{2} - \gamma \right) \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \right) \quad (10.221)$$

$$= \left( \frac{2}{4} + \frac{2}{4^2} \epsilon - 1 \right) \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + 1 - \frac{3}{2} + \gamma + O(\epsilon) \right) 2 \quad (10.222)$$

$$= (-1 + \frac{1}{4}\epsilon) \left( \frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right) \quad (10.223)$$

$$= \left( -\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right), \quad (10.224)$$

$$= -\left( \frac{2}{\epsilon} - 1 + O(\epsilon) \right). \quad (10.225)$$

以及

$$\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) = \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \left( 1 - (1 - \gamma) \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \right), \quad (10.226)$$

$$= \left( \frac{2}{\epsilon} - 1 + O(\epsilon) \right). \quad (10.227)$$

也就是,

$$-\left(\frac{2}{d} - 1\right) \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})\Gamma(3 - \frac{\epsilon}{2}) = -\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}). \quad (10.228)$$

于是,

$$-\left(\frac{2}{d} - 1\right) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)}{(q^2 + D)^2} = -D \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2}. \quad (10.229)$$

所以, 可以将计算 1-PI 图中的积分化简

$$-\left(\frac{2}{d} - 1\right) q^2 \rightarrow -D. \quad (10.230)$$

其中

$$q = l + xk, \quad D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.231)$$

最终, 计算 1-PI 图的积分是

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = (-1)(i) \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left( -iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \quad (10.232)$$

$$\frac{1}{[q^2 + D]^2} 4 \left\{ -2x(1-x)k^\mu k^\nu + \left( -\left(\frac{2}{d} - 1\right) q^2 + m^2 + x(1-x)k^2 \right) g^{\mu\nu} \right\} \quad (10.233)$$

$$- i(Z_3 - 1) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) + O(e^4), \quad (10.234)$$

$$= (-1)(i) \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left( -i Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + D]^2} 4 \left\{ +2x(1-x) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \right\} \quad (10.235)$$

$$- i(Z_3 - 1) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) + O(e^4), \quad (10.236)$$

$$= (-i) \left( Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + D]^2} 4 \left\{ +2x(1-x) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \right\} \quad (10.237)$$

$$- i(Z_3 - 1) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) + O(e^4). \quad (10.238)$$

继续考虑 Gauss 积分

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d)\Gamma(\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-\frac{1}{2}d)}, \quad (10.239)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} D^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (10.240)$$

$$= \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} D^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (10.241)$$

再利用近似关系

$$\left\{ A^x = e^{x \ln A} = 1 + x \ln(A) \right. \quad (10.242)$$

直接带入

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{D}{4\pi}\right) + O(\epsilon^2) \right), \quad (10.243)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{D}{4\pi}\right) + O(\epsilon) \right), \quad (10.244)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{D}{4\pi} e^\gamma\right) + O(\epsilon) \right). \quad (10.245)$$

将耦合常数中的有量纲项乘在前面

$$\tilde{\mu}^\epsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{D}{4\pi} e^\gamma\right) + O(\epsilon) \right) \left( 1 + \epsilon \ln(\tilde{\mu}) + O(\epsilon^2) \right), \quad (10.246)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{D}{4\pi} e^\gamma \tilde{\mu}^{-2}\right) + O(\epsilon) \right). \quad (10.247)$$

重新定义变量

$$\left\{ \mu^2 = 4\pi e^{-\gamma} \tilde{\mu}^2 \right. \quad (10.248)$$

最终得到光子传播子 1-PI term:

$$i\Pi^{\mu\nu}(k^2) = -i(Z_1 e)^2 \int_0^1 dx 8x(1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{D}{\mu^2}\right) + O(\epsilon) \right) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) \quad (10.249)$$

$$- i(Z_3 - 1) \left( k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right) + O(e^4), \quad (10.250)$$

其中

$$D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.251)$$

**Conclusion** 注意到之前所定义的

$$\Pi^{\mu\nu}(k^2) = \Pi(k^2) k^2 \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right). \quad (10.252)$$

对比得到

$$\Pi(k^2) = -i(Z_1 e)^2 \int_0^1 dx \frac{1}{\pi^2} x(1-x) \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(\frac{D}{\mu^2}) + O(\epsilon) \right) - i(Z_3 - 1) + O(e^4), \quad (10.253)$$

$$D = m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon. \quad (10.254)$$

## 10.8 Loop correction to fermion propagator

类似于之前各种 Real propagator 的分析。fermion real propagator 可以写为

$$\frac{1}{i} S(p) = \frac{1}{i} S(p) + \frac{1}{i} S(p) i\Sigma(p) \frac{1}{i} S(p) + \dots \quad (10.255)$$

稍微解释一下其中的变量定义。首先，传播子的自变量是  $p$  对应的 Lorentz 不变量，有两个 Lorentz 不变量，他们是  $p^2$  以及  $\not{p}$ ，注意到  $p^2 = \not{p}\not{p}$ ，所以就把自变量写为了  $\not{p}$ 。对于自由场的传播子，一般也进行一些改写

$$S(p) = \frac{\not{p} + m}{-p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (10.256)$$

$$= \frac{\not{p} + m}{-\not{p}\not{p} + m^2 - i\epsilon} = \frac{\not{p} + m}{-(\not{p} + m)(\not{p} - m) - i\epsilon}, \quad (10.257)$$

$$= \frac{1}{-\not{p} + m - i\epsilon}. \quad (10.258)$$

**几何级数求和** 真实传播子的几何级数求和结果为

$$S(p) = \frac{1}{-\not{p} + m - i\epsilon} \frac{1}{1 - \Sigma(p) \frac{1}{-\not{p} + m - i\epsilon}}, \quad (10.259)$$

$$= \frac{1}{-\not{p} + m - \Sigma(p) - i\epsilon}. \quad (10.260)$$

**1-PI Diagram** Fermion 的 1-PI 图画为

$$i\Sigma(p) = \text{Diagram} + \text{higher order.} \quad (10.261)$$

具体的表达式写为

$$i\Sigma(p) = \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{l} + m}{-(p + l)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \Delta_{\mu\nu}(l) + ct, \quad (10.262)$$

$$= \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{l} + m}{-(p + l)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{l^2 - m_\gamma^2 - i\epsilon} \quad (10.263)$$

$$+ i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1) \quad (10.264)$$

其中，直接将光子传播子取为了 Feynman Gauge，并且假定了光子有质量  $m_\gamma$ 。

**Feynman Parametrization** Feynman Formula:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} &= \int dF_n (x_1 A_1 + \cdots x_n A_n)^{-n} \\ \int dF_n &= \int_0^1 (n-1)! dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots x_n - 1) \\ \int dF_n &= 1 \end{aligned} \quad (10.265)$$

对  $n = 2$  时候,

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1 A_2} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - 1) \frac{1}{(x_1 A_1 + x_2 A_2)^2} \\ &= \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(x_1 A_1 + (1-x_1) A_2)^2}\end{aligned}\quad (10.266)$$

在这个例子中 ( $m^2 - i\epsilon$  简写为  $m^2$ )

$$\begin{aligned}\frac{1}{-(p+l)^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{1}{-l^2 + m_\gamma^2 + i\epsilon} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x(-(p+l)^2 + m^2) + (1-x)(-l^2 + m_\gamma^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(-l+px)^2 - x(1-x)p^2 + m^2 x + (1-x)m_\gamma^2}.\end{aligned}\quad (10.267)$$

**numerator simplification** Consider the term (Using the formula  $\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -(d-2)\not{p}$  and  $\gamma^\mu \gamma_\mu = d$ )

$$\gamma^\nu (\not{p} + \not{l} + m) \gamma_\mu = -(d-2)(\not{p} + \not{l}) + dm. \quad (10.268)$$

**Combine results** 将计算的结果整理一下, 1-PI 图表示的积分表达为 (忽略了线性项的积分)

$$i\Sigma(\not{p}) = \left(-iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{l} + m}{-(p+l)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{l^2 - m_\gamma^2 - i\epsilon} \quad (10.269)$$

$$+ i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1) \quad (10.270)$$

$$= -\left(Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{l}) + dm}{[-q^2 + D]} \quad (10.271)$$

$$+ i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1) \quad (10.272)$$

$$= -\left(Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} - x\not{p}) + dm}{[-q^2 + D]^2} \quad (10.273)$$

$$+ i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1) \quad (10.274)$$

$$(10.275)$$

其中

$$q = l + px, \quad D = -x(1-x)p^2 + m^2 x + (1-x)m_\gamma^2. \quad (10.276)$$

**Wick rotation 以及 Gauss 积分** Wick rotation 效果是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq \rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq \quad (10.277)$$

$$q^0 = iq^d \rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dq^d \quad q^2 = (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^{(d)}|^2$$

使用 Wick Rotation 之后, 积分变为 Euclidian 空间中的积分:

$$i\Sigma(\not{p}) = -i \left(Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2}\right)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(\not{p} - x\not{p}) + dm}{[q^2 + D]^2} \quad (10.278)$$

$$+ i(Z_2 - 1)\not{p} - i(Z_m - 1) \quad (10.279)$$

$$(10.280)$$

Gauss 积分公式

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d) \Gamma(\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(2) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2 - \frac{1}{2}d)}, \quad (10.281)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(2) \Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})} D^{-\frac{\epsilon}{2}} = \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \frac{1}{(4\pi)^{2 - \frac{\epsilon}{2}}} D^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (10.282)$$

$$= \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\frac{D}{4\pi}) + O(\epsilon^2) \right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln(\frac{D}{4\pi}) + O(\epsilon) \right), \quad (10.283)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln(\frac{D}{4\pi} e^\gamma) + O(\epsilon) \right). \quad (10.284)$$

于是

$$\tilde{\mu}^\epsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln(\frac{D}{4\pi} e^\gamma) + O(\epsilon) \right) \left( 1 + \epsilon \ln(\tilde{\mu}) + O(\epsilon^2) \right), \quad (10.285)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln(\frac{D}{4\pi \tilde{\mu}^2} e^\gamma) + O(\epsilon) \right) \quad (10.286)$$

总的来说,

$$i\Sigma(p) = -i \left( Z_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \right)^2 \int dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)(p - x p) + dm}{[-q^2 + D]^2} \quad (10.287)$$

$$+ i(Z_2 - 1)p - i(Z_m - 1) \quad (10.288)$$

$$= -i (Z_1 e)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \int dx \left( -(d-2)(p - x p) + dm \right) \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln(\frac{D}{4\pi \tilde{\mu}^2} e^\gamma) + O(\epsilon) \right) \quad (10.289)$$

$$+ i(Z_2 - 1)p - i(Z_m - 1) \quad (10.290)$$

$$= -i (Z_1 e)^2 \frac{1}{8\pi} \int dx \left( -(2-\epsilon)(1-x)p + dm \right) \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(\frac{D}{\mu^2}) + O(\epsilon) \right) \quad (10.291)$$

$$+ i(Z_2 - 1)p - i(Z_m - 1) \quad (10.292)$$

其中

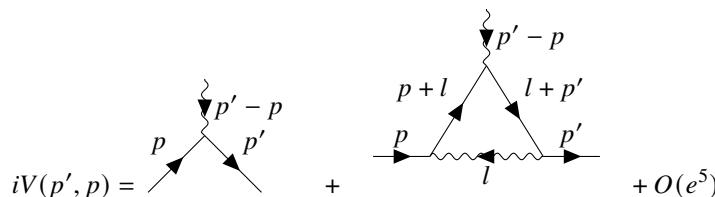
$$\mu^2 = 4\pi e^\gamma \tilde{\mu}^2, \quad D = -x(1-x)p^2 + m^2x + (1-x)m_\gamma^2. \quad (10.293)$$

所以

$$\Sigma(p) = -i \frac{(Z_1 e)^2}{8\pi} \int dx \left( -(2-\epsilon)(1-x)p + (4-\epsilon)m \right) \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(\frac{D}{\mu^2}) + O(\epsilon) \right) + i(Z_2 - 1)p - i(Z_m - 1). \quad (10.294)$$

## 10.9 Loop correction to vertex

考虑圈图对顶点的修正，修正后的顶点写为



$$iV(p', p) = \text{Diagram} + O(e^5) \quad (10.295)$$

相应的顶点写为

$$iV(p, p') = -iZ_1 e \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \gamma^\mu + iV_{loop}^\mu(p, p') + \dots \quad (10.296)$$

其中

$$iV_{loop}^\mu(p, p') = (-ie \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left( \frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} [\gamma^\rho S(l + p') \gamma^\mu S(p + l) \gamma^\nu] \Delta_{\nu\rho}(l) \quad (10.297)$$

经过计算，(我没算，need details-还是算一下吧，不然感觉不靠谱)。将传播子的具体形式写出

$$iV_{loop}^\mu(p, p') = (-ie \tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left( \frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[ \gamma^\rho \frac{l + p' + m}{-(l + p')^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{p + l + m}{-(p + l)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \right] \quad (10.298)$$

$$\frac{1}{-l^2 + m_\gamma^2 - i\epsilon} (-g_{\nu\rho}). \quad (10.299)$$

**Feynman Parametrization** 传播子的 Denominator, 用 Feynman 参数法的办法将她们结合在一起。

$$\frac{1}{-(l+p')^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{-(p+l)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{-l^2 + m_\gamma^2 - i\epsilon} = \int dF_3 [ -x_1(l+p')^2 - x_2(p+l)^2 - x_3l^2 + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon ]^{-3}, \quad (10.300)$$

$$\int dF_3 = \int (3-1)! dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1). \quad (10.301)$$

化简括号中的一长串

$$\begin{aligned} & -x_1(l+p')^2 - x_2(p+l)^2 - x_3l^2 + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon \\ &= -l^2 - 2l \cdot (x_1p' + x_2p) - x_1p'^2 - x_2p^2 + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon, \\ &= -(l+x_1p' + x_2p)^2 + (x_1p' + x_2p)^2 - x_1p'^2 - x_2p^2 + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon, \\ &= -(l+x_1p' + x_2p)^2 + x_1(x_1-1)p'^2 + x_2(x_2-1)p^2 + 2x_1x_2p' \cdot p + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon. \end{aligned}$$

可以简单记为

$$\int dF_3 (-q^2 + D)^{-3}, \quad (10.302)$$

其中

$$q = l + x_1p' + x_2p, \quad (10.303)$$

$$D = x_1(x_1-1)p'^2 + x_2(x_2-1)p^2 + 2x_1x_2p' \cdot p + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon. \quad (10.304)$$

**Numerator evaluation** 现在分析 numerator 的行为, 把光子传播子中的度归也考虑进去

$$\gamma_\nu (l + p' + m) \gamma^\mu (p + l + m) \gamma^\nu \quad (10.305)$$

将变量 1 做替换

$$\left\{ l = q - x_1p' - x_2p. \right. \quad (10.306)$$

得到

$$\gamma_\nu (l + p' + m) \gamma^\mu (p + l + m) \gamma^\nu \quad (10.307)$$

$$= \gamma_\nu (q - x_1p' - x_2p + p' + m) \gamma^\mu (p + q - x_1p' - x_2p + m) \gamma^\nu, \quad (10.308)$$

$$= \gamma_\nu q \gamma^\mu q \gamma^\nu + \tilde{N}^\mu + \text{Linear term in } q. \quad (10.309)$$

第二个等式相当于是将  $q$  的二次项和一次项拆分了出来, 留下来了一个和  $q$  无关的量, 叫做  $\tilde{N}^\mu$ . 具体来说这一项是

$$\tilde{N}^\mu = \gamma_\nu (-x_1p' - x_2p + p' + m) (p - x_1p' - x_2p + m) \gamma^\nu, \quad (10.310)$$

$$= \gamma_\nu (-x_2p + (1-x_1)p' + m) ((1-x_2)p - x_1p' + m) \gamma^\nu. \quad (10.311)$$

**Superficial degree of divergent** 与化简 对于分子中的那几部分, 发散来自于

$$\gamma_\nu q \gamma^\mu q \gamma^\nu = \gamma_\nu q_\alpha \gamma^\alpha q_\beta \gamma^\beta \gamma^\nu. \quad (10.312)$$

利用公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \int d^d q q^\mu q^\nu f(q^2) = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int d^d q q^2 f(q^2), \\ \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho = -(d-2) \gamma^\mu. \end{array} \right. \quad (10.313)$$

化简

$$\gamma_\nu q_\alpha q_\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu = \frac{q^2}{d} \gamma_\nu g_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu, \quad (10.314)$$

$$= -\frac{q^2}{d} \gamma_\nu (d-2) \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{q^2}{d} (d-2)^2 \gamma^\mu. \quad (10.315)$$

**整理结果** 注意光子传播子那里有一个负号。

$$iV_{loop}^\mu(p, p') = (-ie\tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[ \gamma^\rho \frac{l + p' + m}{-(l + p')^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu \frac{p + l + m}{-(p + l)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \right] \quad (10.316)$$

$$= \frac{1}{-l^2 + m_\gamma^2 - i\epsilon} (-g_{\nu\rho}), \quad (10.317)$$

$$= -(-ie\tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int \int dF_3 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-q^2 + D)^3} \left( \frac{q^2}{d} (d-2)^2 \gamma^\mu + \tilde{N}^\mu \right). \quad (10.318)$$

**Wick rotation** wick rotation:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dq &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq \\ q^0 = iq^d &\rightarrow \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} dq^d \quad q^2 = (q^0)^2 - |\vec{q}|^2 = -|q^{(d)}|^2 \end{aligned} \quad (10.319)$$

经历过 wick rotation 后的 loop correction 积分是

$$iV_{loop}^\mu(p, p') = i(-ie\tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int \int dF_3 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^3} \left( -\frac{q^2}{d} (d-2)^2 \gamma^\mu + \tilde{N}^\mu \right). \quad (10.320)$$

**Gauss 积分** Gauss 积分公式是

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b-a-\frac{1}{2}d)\Gamma(a+\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a-d/2)}. \quad (10.321)$$

需要考虑的是

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^1}{(q^2 + D)^3} = \frac{\Gamma(3-1-\frac{1}{2}d)\Gamma(1+\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(3-1-d/2)}, \quad (10.322)$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^0}{(q^2 + D)^3} = \frac{\Gamma(3-\frac{1}{2}d)\Gamma(\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(3-d/2)}. \quad (10.323)$$

稍微化简一下，利用 Gamma Function 的性质

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!}{n!2^n} \sqrt{\pi} \\ \Gamma(-n+x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right] \quad n \geq 0 \\ \Gamma(n+x) &= (n-1)! \left( 1 + \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right) x + O(x) \right) \quad n \geq 1 \\ \gamma &= 0.5772 \end{cases} \quad (10.324)$$

其实第二个式子根本就不会发散，所以展开第一个式子到线性阶得到

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^1}{(q^2 + D)^3} = \frac{\Gamma(3-1-\frac{1}{2}d)\Gamma(1+\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(3-1-d/2)}, \quad (10.325)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\Gamma(3-\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}} 2 \Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} D^{-\frac{\epsilon}{2}} = \frac{\left(\frac{\epsilon}{2}-\gamma+O(\epsilon)\right) 2 \left(1+\left(\frac{3}{2}-\gamma\right) \frac{\epsilon}{2}+O(\epsilon^2)\right)}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}} 2 \left(1+(1-\gamma)\frac{\epsilon}{2}+O(\epsilon^2)\right)} D^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (10.326)$$

$$= \left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\frac{1}{2}+O(\epsilon)\right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{D}{4\pi}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (10.327)$$

考虑到指数函数的展开

$$(\tilde{\mu})^\epsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^1}{(q^2 + D)^3} = \left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\frac{1}{2}+O(\epsilon)\right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1-\frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{D}{4\pi}\right)+\epsilon \ln(\tilde{\mu})+O(\epsilon^2)\right), \quad (10.328)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon}+\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{D}{4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2}\right)+O(\epsilon)\right) \quad (10.329)$$

**Combine results** 整理结果,

$$iV_{loop}^\mu(p, p') = -i(-ie\tilde{\mu}^{\epsilon/2})^3 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int \int dF_3 \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D)^3} \left(-\frac{q^2}{d}(d-2)^2\gamma^\mu + \tilde{N}^\mu\right), \quad (10.330)$$

$$= -i(-ie)^3 \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int dF_3 \quad (10.331)$$

$$\left(-\frac{1}{d}(d-2)^2\gamma^\mu \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{D}{4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2}\right) + O(\epsilon)\right) + \frac{1}{2}\tilde{N}^\mu \frac{1}{(4\pi)^2} D^{-1}\right), \quad (10.332)$$

$$= i(e)^3 \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \int dF_3 \quad (10.333)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{4}(4-3\epsilon)\gamma^\mu \left(\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{D}{4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2}\right) + O(\epsilon)\right) + \frac{1}{2}\tilde{N}^\mu D^{-1}\right), \quad (10.334)$$

$$= i(e)^3 \tilde{\mu}^{\epsilon/2} \int dF_3 \quad (10.335)$$

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\gamma^\mu \left(\frac{2}{\epsilon} - 1 - \ln\left(\frac{D}{4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2}\right) + O(\epsilon)\right) + \frac{1}{2}\tilde{N}^\mu D^{-1}\right), \quad (10.336)$$

$$= -\frac{i(e)^3 \tilde{\mu}^{\epsilon/2}}{8\pi^2} \left\{ \gamma^\mu \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int dF_3 \ln\left(\frac{D}{4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2}\right) \right) - \frac{1}{4} \int dF_3 \tilde{N}^\mu D^{-1} + O(\epsilon) \right\}. \quad (10.337)$$

其中

$$\mu^2 = 4\pi e^{-\gamma}\tilde{\mu}^2, \quad \int dF_3 = \int (3-1)! dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1), \quad (10.338)$$

$$D = x_1(x_1-1)p'^2 + x_2(x_2-1)p^2 + 2x_1x_2p' \cdot p + (x_1+x_2)m^2 + x_3m_\gamma^2 - i\epsilon, \quad (10.339)$$

$$\tilde{N}^\mu = \gamma_\nu (-x_2\cancel{p} + (1-x_1)\cancel{p}' + m) ((1-x_2)\cancel{p} - x_1\cancel{p}' + m) \gamma^\nu. \quad (10.340)$$

## 第十一章 Yang Mills Field

# 第十二章 数学基础

## 12.1 泛函

### 12.1.1 泛函微分

泛函就是有无限个自变量的传统函数。。。暂且这么理解吧，或者可以理解为把一个函数当作自变量的一个函数，(把一个函数映射到一个值上面去)。首先考虑有 N 个自变量的多元函数，他在  $y = 0$  地方的泰勒展开自然而然可以写成这样。

$$F(y_1, y_2 \dots y_N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N \frac{\delta F(y_1 \dots y_N)}{\delta y_{k_1} \dots \delta y_{k_n}} \delta y_{k_1} \dots \delta y_{k_n} \quad (12.1)$$

接下来考虑无穷自变量的函数，无穷个自变量的函数写作  $J(x)$ ，其中  $x$  的取值范围是  $[-\infty, +\infty]$ 。

我们认为函数  $F[J]$  可以表示成  $\int dx J(x) f(x)$  的形式，来方便理解吧.. 然后我们说在  $x_1$  这个地方函数值该变量是  $dJ(x_1)$ (以前是  $J(x_1)$ ) 那么这个函数因为在这个地方  $J$  的改变而发生的改变就是  $f(x_1)\epsilon J(x_1)$ . 这个  $\epsilon$  表示的是积分的时候分段的长度。

实际上我们把他写成这个样子

$$\frac{\delta \int dx J(x) f(x)}{\delta J(x_1)} = \int dx \delta(x - x_1) f(x) \epsilon \quad (12.2)$$

当然，如果整个函数都有发生变化，那么函数对应的微分就可以用积分来表达

$$\int dx_1 dJ(x_1) \int dx \delta(x - x_1) f(x) \quad (12.3)$$

这样我们定义泛函微分这样定义

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta(x - x_1) \quad (12.4)$$

这样，我们说泛函展开：

$$W[J] = \sum_{n=0}^{+\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(x_1) \dots J(x_n) \quad (12.5)$$

是这样的，然后在场论里面，因为我们一般说  $W[J]$  是 Generating Function. 生成的是 n-Point Function

$$W[J] = \sum_{n=0}^{+\infty} \int dx_1 \dots dx_n \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(x_1) \dots J(x_n) \quad (12.6)$$

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \quad (12.7)$$

## 12.2 群的知识

### 12.2.1 Group

群是定义了乘法的集合

- 群对群乘法有封闭性  $\forall g_1, g_2 \in G$  则  $g_1 g_2 \in G$
- 群乘法满足结合律  $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$  for  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- 群中一定有恒元  $e$ : s.t  $eg=ge=g$  for  $\forall g \in G$
- 任意群元  $g$  一定有逆元  $g^{-1}$  for  $\forall g \in G$ ,  $\exists g^{-1} \in G$ , s.t  $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

一些特殊的群

- Abel 群:  $g_1 g_2 = g_2 g_1$
- 子群: 群  $G$  的子集  $H$ 。  $H$  满足群的定义则称  $H$  是  $G$  的子群，记为  $H < G$

$S$  代表行列式是 1。  $O$  是 orthogo 正交。  $U$  是 unitary 幺正。  $SO(1,3)$  是固有保时向 Lorentz 群。

### 12.2.2 群的线性表示

线性表示: 一些  $m$  阶方正  $D(G)$  和  $G$  中元素的乘法关系完全相同。这样就可以用这些方阵来表示群  $G$ 。矩阵们构成了  $G$  的线性表示。并且  $D(G)$  中的一个元素至少对应于  $G$  中的一个群元。

同态: 群  $G$  的线性表示  $D(G)$  和群  $G$  之间有同态关系。

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2) \quad (12.8)$$

- 恒等表示: 1 维线性表示, 矩阵取 1.
- 同构/忠实表示:  $G$  中的群元素和  $D(g)$  中的群元素一一对应
- 么正表示:  $D(G)$  中的矩阵是么正的
- 自身表示/基础表示: 群元素本来就是矩阵, 然后要表示自己
- 等价表示: 两个群线性表示之间存在变换:  $D_2(g) = S^{-1}D_1(g)S$
- 可约表示: 如果存在一个矩阵  $S$ 。则说  $D(g)$  是可约表示, 否则就是不可约表示。

$$S^{-1}D_1(g)S = \begin{bmatrix} D_1(g) & M(g) \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

### 12.2.3 $SO(1, 3)^\dagger$ 固有保时 Lorentz 群

emm, 我其实不知道写的对不对..... 其实我只是想说狭义相对论罢了。。

我只是想说几个喜闻乐见的性质。

保度归条件:

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} \quad (12.10)$$

证明他只需要保证 lorentz 变化前后的两个矢量的度量是一样的  $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$

洛伦兹变换的逆矩阵:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = g_{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \Lambda^\alpha_\beta \quad (12.11)$$

证明这个式子只用证明他和  $\Lambda$  乘之后是一个科洛内科 delta 符号就好了。

逆变矢量的 lorentz 逆变换:

$$x_\nu = x'_a \Lambda^a_\nu \quad (12.12)$$

证明他也不难, 反正就是把逆变矢量的定义和 Lorentz 逆变换结合起来就好了。