北京,/ 大学 2019——2020学年第一学期

《复变函数》期末考试试题答案(B 卷)

一、填空题（每空 4 分，共 20 分）

1、复数$\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$的实部为$\underline{\frac{3}{2}}$.

2、复数$1-\cos\varphi+i\sin\varphi(0\le\varphi\le\pi)$的指数表示式为$\underline{2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}}$.

3、计算沿 $y=x^2$ 从 0 到$1+i$的积分$\int_0^{1+i}(8z^2+4z+1)dz=\underline{-\frac{13}{3}+i\frac{31}{3}}$.

4、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(3+4i)^n z^n$的收敛半径为 $\underline{\frac{1}{5}}$.

5、设 $f(z)=\ln(1+z^2)$，则 $f^{(4)}(0)=\underline{-12}$.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、若$|z|=1$，$\omega=z^n+\frac{1}{z^n}$（n是正整数)，则（ **B** ）

A、 $\mathrm{Re}(\omega)=0$　　B、 $\mathrm{Im}(\omega)=0$　　C、 $\arg(\omega)=0$　　D、 $\arg(\omega)=\pi$

2、若$e^{z_1}=e^{z_2}$，则（ **D** ）

A、 $z_1=z_2$　　B、 $z_1=z_2+2k\pi$ (k 为任意整数)

C、 $z_1=z_2+ik\pi$　　D、 $z_1=z_2-2ik\pi$

3、C 是圆周$|z|=1$的正向，则$\oint_c\frac{\cos z}{|z|}dz$的值为（ **A** ）

A、0　　B、 $2\pi i$　　C、 $-2\pi i$　　D、1

4、设幂函数$a^{f(z)}$取$e^{a\ln f(z)}$的分支，则极限$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{i}{n})^n=$（ **C** ）

A、不存在　　B、1　　C、 $\cos 1+i\sin 1$　　D、 e

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sin(in)}$收敛性为（ **A** ）

A、绝对收敛　　B、通项不趋于 0　　C、通项趋于 0 但发散　　D、条件收敛

三、（10 分）判断函数$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$在何处可导何处解析，并在可导或解析处分别求出其导数.

解：因为$u(x,y)=x^3-y^3$，$v(x,y)=2x^2y^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,$$ 2 分

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y,$$ 2 分

易见四个一阶偏导数处处连续，为满足 **C-R** 方程，必须

$$3x^2=4x^2y,\quad -3y^2=-4xy^2,$$ 2 分

解之得 $x=y=0$， $x=y=\frac{3}{4}$。所以，当且仅当 $z=0$ 和 $z=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$ 时 $f(z)$ 可导，在复平面内处处不解析。 2 分

在两个可导点处的导数分别为

$$f'(0)=0,\quad f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{27}{16}(1+i).$$ 2 分

四、（10 分）设 $f(z)=\oint_{|\xi|=2}\frac{e^{\frac{\pi}{4}\xi}}{\xi-z}d\xi$，试求 $f(i)$， $f(-i)$ 及 $f(3-4i)$ 的值.

解：

$$f(i)=2\pi i e^{\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}\pi(-1+i),$$ 3 分

$$f(-i)=2\pi i e^{-\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}\pi(1+i),$$ 3 分

又 $|3-4i|=5>2$，故 1 分

$$f(3-4i)=0.$$ 3 分

五、（10 分）若 $f(z)=x^2+a(y)+iv(x,y)$ 解析且 $f(0)=f'(0)=0$，求实函数 $a(y)$， $v(x,y)$ 及 $f(z)$.

解： $u(x,y)=x^2+a(y)$ 为调和函数， 1 分

故 $u_{yy}=-u_{xx}=-2=a''(y)$，故 $a(y)=-y^2+C_1y+C_2$， 2 分

根据 C-R 条件， $u_x=2x=v_y$，而 $-u_y=2y+C_1=v_x$， 2 分

因此， $v=2xy+C_1x+C_3$. 1 分

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=C_3=0$；由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$， 2 分

故 $a(y)=-y^2$； $v(x,y)=2xy$； $f(z)=x^2-y^2+2xyi=z^2$ 2 分

六、（10 分）求函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $z=1$ 点的去心邻域内的 **Laurent** 展式，并指明其收敛范围。

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $z=1$ 点的去心领域内有 $0<|z-1|<1$ 2 分

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$ 2 分

在 $0<|z-1|<1$ 内，$\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{(z-1)-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$ 3 分

洛朗展式为

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$ 3 分

七、（10 分）求函数 $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 点的留数。

解：在有限点 $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 有 $z=\pm1$ 是一级极点 3 分

$$\operatorname{Re}s[\frac{e^z}{z^2-1},\pm1]=\pm\frac{1}{2}e^{\pm1},$$ 4 分

故 $\operatorname{Re}s[\dfrac{e^z}{z^2-1},\infty]=-\dfrac{1}{2}(e-e^{-1})=-sh1$. 3 分

八、（10 分）计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2i\sin\theta}$

解：令 $z=e^{i\theta}$，则 $2i\sin\theta=z-z^{-1}$， $dz=izd\theta$ 2 分

原积分 $=\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{i(z^2+z-1)}$, 2 分

若 $(z^2+z-1)=0$，则有 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 两个零点, 2 分

仅有 $z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 在 $|z|<1$ 内， $\operatorname{Re}s(\dfrac{1}{z^2+z-1},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 2 分

于是 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2i\sin\theta}=\frac{2\pi}{5}\sqrt{5}.$$ 2 分