北京工业大学 2017——2018 学年第一学期

《复变函数与积分变换》期末考试试卷

考试说明：考试时长 95 分钟；闭卷；解题必须给出必要的步骤，否则不给分

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：________ 学号：________ 班号：________

注：本试卷共 ___ 大题，共 ___ 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	总成绩
满分	20	15	45	15	5	
得分						

得 分

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、设 $z=-i-\frac{3i}{1-i}$，则 $|z|=$ $\frac{\sqrt{34}}{2}$，$\mathrm{Im}\,z=$ $-\frac{5}{2}$。

2、设 $z=\cos 2-i\sin 2$，则 $Argz=$ $-2+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$。

tan~ tanz

3、$\int_0^i z\sin z\,dz=$ $-ie^{-1}$；$\oint_{|z|=4} z\sin z\,dz=$ 0。

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}z^n$ 的收敛半径为 1。

5、函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+1}$ 在 $z_0=0$ 处的 Taylor 展式的收敛半径是 1。

6、$1^{\sqrt{2}}=$ $\cos 2\sqrt{2}k\pi+i\sin 2\sqrt{2}k\pi$

$\left|\frac{n^2+i^n}{(n+1)^2+i^{n+1}}\right|$

7、0是函数$\frac{z-\sin z}{z^{10}}$的___7___级极点。

$\sin z$ $1-\cos z$

8、$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt =$ ___$f(0)$___。

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$

得 分

二、下列函数在何处可导、何处解析？在可导时求导数（15 分）

1、$f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$

解：设 $z = x+iy$

$f(z) = (x+iy)y = xy + iy^2$

则 $u = xy$，$v = y^2$

所以，有 $\frac{\partial u}{\partial x} = y$，$\frac{\partial u}{\partial y} = x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

由C-R方程得：

$\begin{cases} y = 2y \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\therefore f(z)$ 在 $z=0$ 处可导

整个复平面处处不解析

$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$

2、$f(z) = \frac{1}{e^z+1}$

解：由 $e^z+1=0$ 得

$z = \mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\,\mathrm{Arg}(-1)$

$= i(\pi + 2k\pi)$ $k \in Z$

$\therefore f(z)$ 在除去 $z = i(\pi+2k\pi)$ 外处处解析，处处可导

$f'(z) = -\frac{e^z}{(e^z+1)^2}$

得 分

三、计算题。(共 45 分)

1、计算 $I=\int_L x^2+iy\,dz$ 其中 L 为自 0 到 $1-2i$ 的直线段 。

解：L 的参数方程为：$z(t)=(1-2i)t\ ,0\le t\le 1$

则 $I=\int_0^1 (t^2-2it)(1-2i)dt$

$=(1-2i)\int_0^1 (t^2-2it)dt$

$=(1-2i)\left(\frac{t^3}{3}-it^2\right)\Big|_0^1$

$=(1-2i)\left(\frac{1}{3}-i\right)$

$=\frac{1}{3}-2-\frac{2}{3}i-i$

$=-\frac{5}{3}-\frac{5}{3}i$

2、利用留数计算积分 $I=\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}dz$ 。

$\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$

解：$z=0$ 为一级极点，

$z=1$ 为二级极点，

且均在 $|z|=2$ 内，由留数定理得：

$\therefore\ I=2\pi i\left[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right]$

$\because\ \mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0} z\cdot\frac{\cos z}{z(z-1)^2}=1$

$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\cdot\frac{\cos z}{z(z-1)^2}$

$=\lim\limits_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z}\right)$

$=\lim\limits_{z\to 1}\frac{-\sin z\cdot z-\cos z}{z^2}=-\sin 1-\cos 1$

$\therefore\ I=2\pi i(1-\sin 1-\cos 1)$

3、利用留数计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

解：令 $R(z)=\frac{z}{1+z^2}$，其在上半平面的孤立奇点为 $z=i$，且为一级极点。

$$I=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}[R(z)e^{iz},i]\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)}\right]=\mathrm{Im}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{e}$$

4、计算 $f(t)=e^{-|t|}$ 的 Fourier 变换。

解：
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-i\omega)t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{(-1-i\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{1-i\omega}e^{(1-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1-i\omega}\left(1-\lim_{t\to-\infty}e^{t}[\cos\omega t-i\sin\omega t]\right)-\frac{1}{1+i\omega}\left[\lim_{t\to+\infty}e^{-t}[\cos\omega t-i\sin\omega t]-1\right]$$

$$=\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$$

5、计算 $f(t)=\cos^2 t$ 的 Fourier 变换。

解：
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2 t\,e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{2it}+2+e^{-2it})e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(2-\omega)t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}dt+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(2+\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\cdot2\pi\delta(\omega-2)+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)+\frac{1}{4}\cdot2\pi\delta(\omega+2)$$

$$=\frac{1}{2}\pi\delta(\omega-2)+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2}\pi\delta(\omega+2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-\omega)t}\,dt = 4a\,\delta(\omega-2)$$

得 分

四、求已知函数的展开式。（共 15 分）

1、把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z_0=0$ 处展开成泰勒级数。

解：$f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1,\ |z|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\quad |z|<1.$$

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$ 在在圆环域 $1<|z|<+\infty$. 内展成洛朗级数。

解：由于 $\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=\dfrac{-2z}{(1+z^2)^2}$

所以 $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}=-\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$

$$= -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{-2n}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2(n+1)}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-2(n+1)\right)z^{-2n-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{-2n-4}$$

得 分

五、证明：（5分）

若 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点，则 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点

证明：由 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点，可得

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z).$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点处解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$

而 $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}$

$$=(z-z_0)^{-m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}$$

由于 $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 点解析，且 $\dfrac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$.

则由 m 级极点的定义知 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点.

2017－2018

填空

1. $z=-i-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

$|z|=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{5}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

$\mathrm{Im}=-\frac{5}{2}$

2. $z=\cos(-2)+i\sin(-2)$. $\mathrm{Arg}z=-2+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

3. $\int_0^i z\sin z\,dz=-\int_0^i z\,d\cos z=-z\cos z\Big|_0^i+\int_0^i\cos z\,dz$

$=-i\cos i+\sin z\Big|_0^i=-i\cos i+\sin i$

$=-i(\cos i+i\sin i)=-ie^{i\cdot i}=-ie^{-1}$

$\oint_{|z|=4} z\sin z\,dz=0$ 柯西－古萨基本定理

4. $\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2+i^{n+1}}}{\frac{1}{n^2+i^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+i^n}{(n+1)^2+i^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{i^n}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{i^{n+1}}{n^2}}\right|$

$=1$

$\therefore R=\frac{1}{\lambda}=1$

5. $f(z)$ 的奇点为 $z=\pm i$，$z=\pm i$ 与 $z_0=0$ 之间的距离为 1

$\therefore R=1$

6. $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1}=e^{\sqrt{2}(\ln|1|+i(\cancel{\ }2k\pi))}=e^{2\sqrt{2}k\pi i}=\cos 2\sqrt{2}k\pi$

$+i\sin 2\sqrt{2}k\pi$

7. $z-\sin z\Big|_{z=0}=0$

$(z-\sin z)'\Big|_{z=0}=1-\cos z\Big|_{z=0}=0$

$(z-\sin z)''\Big|_{z=0}=\sin z\Big|_{z=0}=0$

$(z-\sin z)'''\Big|_{z=0}=\cos z\Big|_{z=0}=1\neq 0$

$\therefore$ $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点，

$z=0$ 是 z^{10} 的十级零点，

$\therefore$ $z=0$ $\dfrac{z-\sin z}{z^{10}}$ 的7级极点，

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,dt=f(0)$