北京工业大学 2020 — 2021 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换》 期末考试试卷 A 卷

考试说明：闭卷，考试时间 95 分钟，不可使用计算器. 除填空题外，解题须给出必要的步骤，否则不得分；试卷中 i 表示虚数单位.

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：____________ **学号：**____________ **班号：**____________

注：本试卷共 五 大题，共 六 页，满分 100 分，考试时只可使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	总成绩
满分	20	20	35	15	10	
得分						

得 分

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）.

1. $\left|\dfrac{3-4i}{1+i\sqrt{3}}\right| =$ ____________________.

2. $\mathrm{Re}\left(\mathrm{Ln}(3+4i)\right) =$ ____________________.

3. 以复数 z_1, z_2, z_3 为顶点的正三角形内接于单位圆周，其中 $z_1 = \dfrac{\sqrt{7}+i\sqrt{2}}{3}$，$z_3$ 在第三象限，则 $z_2 =$ ____________________.

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2^n + 3^n i\right) z^n$ 的收敛半径为________________.

5. 计算积分 $\int_0^i z\sin(iz)\,\mathrm{d}z =$ ____________________.

6. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\delta(x+1)\,\mathrm{d}x =$ （没讲不做）____________.

7. 判断 0 是函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{\sin z - z\cos z}$ 几级极点：________________.

8. 计算积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\dfrac{e^z}{(z-3i)^2}\mathrm{d}z=$ ________________________.

9. 计算复数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{3i}{n}}=$ ________________________.

10. 计算留数 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{-1+\cos z}{z^{2021}},0\right]=$ ________________________.

得 分

二、计算题（共 20 分）.

1. 计算 $1^{\sqrt{3}}$ 的值. (5 分)

2. 计算 $(1-i)^{19}$ 的值. (5 分)

3. 设函数 $f(z)=x^2+2xy-by^2+i(-x^2+axy+y^2)$ 在复平面解析, 求 a,b 及 $f'(z)$ 并判断此时 $\overline{f(z)}$ 的解析性。 (10 分)

得 分

三、计算留数与积分（每题 7 分，共 35 分）.

1. 计算留数 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z(z-2)^2}, 2\right]$.

2. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \dfrac{\cos z}{z^2+1}\mathrm{d}z$.

3. 计算积分 $\int_C \left(x^2+3yi\right)\mathrm{d}z$**，其中** C **是从 1 到** $2+i$ **的直线段.**

4. 利用留数计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\sin\theta-5}\mathrm{d}\theta$.

5. 利用留数计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 5x}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

得 分

四、求已知函数的展开式（共 15 分）.

1. 将函数 $\frac{1}{2z}$ 在 $z_0 = 1+i$ 处展开成泰勒级数. (7 分)

2. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(2-z)}$ 在圆环域 $2<|z-2|<+\infty$ 内展成洛朗级数. (8 分)

得 分

五、卷积与 Fourier 变换（每题 5 分，共 10 分）. （没讲不做）

1. 设函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都绝对可积且 $F_1(\omega)=\mathscr{F}\left[f_1\right](\omega)$，$F_2(\omega)=\mathscr{F}\left[f_2\right](\omega)$，证明 $\mathscr{F}\left[f_1 * f_2\right](\omega)=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$.

2. 设函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\dfrac{1}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，计算 $f*f$ 的 Fourier 变换.