

得分

一、填空题 (每空 2 分,共 20 分)

1、设 $z = \frac{3}{i} - \frac{3+4i}{1+i}$, 则 $|z| =$ _____, $\operatorname{Re} z =$ _____,

$\arg z =$ _____。

2、设 $f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$, 则 $f(z)$ 的奇点为 _____ , 它们是 _____ 级极点, 在解

析处 $f'(z) =$ _____。

3、 $\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz =$ _____; $\oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2} dz =$ _____。

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2^n i} z^n$ 的收敛半径为 _____。

5、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-2)t} dt =$ _____。

得分

二、计算题。(共 60 分)

1、计算 $(1+i)^i$ 与 $(1+i)^{10}(\sqrt{3}-i)^6$ 的值;

2、设函数 $f(z) = (ay + bxy) + (x^2 + cy^2 + x)i$ 是 $z = x + iy$ 的解析函数, 试确定 a, b, c, d 的值;

3、计算 $I = \int_L \bar{z} \operatorname{Im} z dz$ 其中 L 为自 0 到 $2-i$ 的直线段；

4、计算 $I = \int_0^i e^z \cos z dz$ ；

5、利用留数计算积分 $I = \oint_{|z-2|=3} \frac{1}{z \sin z} dz$ 。

6、利用留数计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx$ 。

7、计算 $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 的 Fourier 变换。

8、计算 $f(t) = \delta(t-1)$ 的 Fourier 变换。

得 分

三、求已知函数的展开式。(共 15 分)

1、设函数 $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$ ，将 $f(z)$ 在 $z_0 = 0$ 处展开成泰勒级数

2、设 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 1}$ ，将 $f(z)$ 在环域 $|z| > 1$ 内展开成洛朗级数

得 分

四、证明：(5 分)

若 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级极点，证明：
$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right] = -m$$