北京工业大学 2021—2022 学年第 I 学期末
《概率论与数理统计》课程（工类）考试（B卷）参考答案

一、填空题(共 15 个空，每空 2 分，共 30 分)

1. 设A和B为事件，且$P(A)=0.2$，$P(A\cup B)=0.6$．则当设A与B互斥时，$P(B)=$ <u>0.4</u>；当 A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ <u>0.5</u>.

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\arcsin x, & |x|\le 1\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 其中a与b为常数，则 $a=$ <u>0.5</u>，$b=$ <u>$1/\pi$</u>.

3. 设随机变量 X~$P(2)$，且$P(X=1)=P(X=2)$，则 λ= <u>2</u>，Var(X)= <u>2</u>.

4. 若随机变量 X_1,X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(1,\ 9)$，$X_2\sim N(2,\ 4)$，$X=X_1-0.5X_2$. 则, E(X)= <u>0</u>，Var(X)= <u>10</u>.

5. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$, $E(X)=2.4$，$Var(X)=1.44$，则 $n=$ <u>6</u>，$p=$ <u>0.4</u>.

6. 若 X_1，X_2，⋯，X_n 为抽自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差. 则 $\overline{X}\sim$ <u>$N(\mu,\sigma^2/n)$</u>，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ <u>t_{n-1}</u>，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ <u>χ^2_{n-1}</u>.

7. 设 X_1，X_2，⋯，X_{25} 是抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，经计算得 $\bar{x}=5$, s^2=0.09. 根据本试卷第 6 页上的t分布表与χ^2分布表，得未知参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[<u>4.8762，5.1238</u>]，σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间为[<u>0.05487，0.17418</u>].

二、计算题(共 5 个题，每题 14 分，共 70 分)

1. 设甲盒中有 8 个球，其中 2 个白球 6 个黑球； 乙盒中有 6 个球，其中 4 个白球 2 个黑球. 现从甲盒中随机地取 2 个球放入乙盒中，再从乙盒中随机地取 1 个球.

(1). 求从乙盒中取到的球为白球的概率；

(2). 已知从乙盒中取到的球为白球，求从甲盒中放入乙盒的 2 个球都是白球的概率。

解 设 A ={从乙盒中取到的球为白球}， B_i ={从甲盒中取 2 球, 其中恰有 i 个白球}， i = 0, 1, 2， 则 $P(B_0)=C_6^2/C_8^2=15/28$, $P(B_1)=C_2^1C_6^1/C_8^2=3/7$, $P(B_2)=C_2^2/C_8^2=1/28$；$P(A|B_0)=1/2$，$P(A|B_1)=5/8$，$P(A|B_2)=6/8=3/4$. ------(假设 2 分；3 个概率、3 个条件概率各 1 分，共 4 分)

(1). 由全概率公式，得

$$P(A)=P(B_0)\,P(A|B_0)+P(B_1)\,P(A|B_1)+P(B_2)\,P(A|B_2)=\cdots=9/16;$$

------ (全概率公式 2 分，计算 2 分，结果 1 分)

(2). 由贝叶斯公式，得

$$P(B_2|A)=[P(B_2)\,P(A|B_2)]/\,P(A)=\cdots=1/21.$$

(叶斯公式 2 分，计算 2 分，结果 1 分)

2．随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ c-x, & 1<x<2 \\ 0, & 其他. \end{cases}$

求：(1)．常数 c；(2)．分布函数 $F(x)$；(3)．$E(X)$ 和 $Var(X)$；(4)．$Y=X^2$ 的概率密度函数.

解 (1)．由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，即 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 (c-x)dx=0.5+c-0.5x^2\Big|_1^2=c-1=1$，故 $c=2$.

（积分表达式、积分计算及最后结果各 1 分，共 3 分）

(2)．

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}0dt, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x tdt, & 0\le x<1 \\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^x (2-t)dt, & 1\le x<2 \\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^2 (2-t)dt+\int_2^x 0dt, & x\ge 2; \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.5x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-0.5x^2-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2; \end{cases}$$

（表达式、分段积分及结各 1 分，共 3 分）

(3)．$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\Lambda=1$，

（表达式、积分式及结果各 1 分，共 3 分）

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\Lambda=\frac{7}{6}$，（表达式、结果各 1 分）

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/6$；（最后结果 1 分，共 3 分）

(4)．由 $Y=X^2$，得其反函数为 $x=\sqrt{y},\ y>0, x>0$. 因此 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'=\begin{cases} 0.5, & 0\le y<1 \\ \sqrt{y^{-1}}-0.5, & 1\le y<4 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（公式、结果各 1 分，共 2 分）

3. 设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 24y(1-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求：(1)．X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；(2)．X 与 Y 是否独立？为什么？(3)．$E(Y)$.

解 (1)．当 $0\le x\le 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 24y(1-x)\mathrm{d}y=12x^2(1-x),$$

（积分表达式 2 分、积分结果 1 分）

所以 $f_X(x)=\begin{cases} 12x^2(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他, \end{cases}$ （最后结果 1 分，共 4 分）

同理，当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 24y(1-x)\mathrm{d}x=12y(1-y)^2$，

$$f_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他; \end{cases}$$

（同上）

(2). 因在区域$\{(x,y)|\ 0<x<1, 0<y<x\}$内(X,Y)的联合概率密度函数度等于边缘概率密度的乘积，故X与Y是否独立. **(原因 1 分、结论 2 分, 共 3 分)**

(3). $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y g f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 12y^2(1-y)^2\mathrm{d}y=\dfrac{2}{5}$. **(积分式 2 分、结果 1 分，共 3 分)**

4. 设总体X有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\, e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

其中$\lambda>0$为未知参数，X_1, X_2, $\cdots$, X_n为从总体X中抽出的随机样本。求：

(1). 求λ的矩估计$\hat{\lambda}$； (2). 求λ的极大似然估计$\tilde{\lambda}$.

解 (1). 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，由$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\Lambda=\dfrac{2}{\lambda}$.

(写出 E(X)式 1 分，算出结果 2 分)

利用 $\overline{X}=E(X)$，得$\overline{X}=\dfrac{2}{\hat{\lambda}}$. 解该式，得 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$；**(建立估计方程 2 分，矩估计结果 2 分)**

(2). 记 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\lambda^{2n}(\prod_{i=1}^n x_i)\ e^{-n\lambda\bar{x}}$ 为参数λ的似然函数。**(似然函数 2 分)**

则 $\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n \ln x_i-n\lambda\bar{x}$， **(对数似然函数 1 分)**

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-n\bar{x}$=0，解得$\tilde{\lambda}=\dfrac{2}{\bar{x}}$. 故 $\tilde{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

(建立估计方程 2 分，极大似然估计 2 分)

5. 设学生某次考试成绩服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 75.5，标准差为 3.95. 建立假设检验模型， 讨论在显著性水平 0.05 下，从样本看，是否接受

(1). “$\mu=75$”的假设？ (2). “σ < 4.0”的假设？

解 $n=25, \alpha=0.05,\ \bar{x}=75.5,\ s=3.95,$ **(写出已知 2 分)**

(1). 建立假设检验模型 $H_0:\mu=75 \Leftrightarrow H_1:\mu\ne 75$. 由

$$|\bar{x}-\mu_0|=|75.5-75|=0.5<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=\frac{3.95}{5}\times 2.0639=1.62977,$$

知接受原假设，即接受“$\mu=75$”的假设；

(2). 建立假设检验模型 H_0: σ⩾4.0 ↔ H_1: σ < 4.0. 由

$$(n\text{-}1)s^2/\sigma_0^2 = 24\times 3.952/\ 42 = 23.40375 > \chi^2_{24}(0.95)=13.848.$$

知接受原假设，即不接受“σ < 4.0”的假设. **(每问 6 分：模型、公式与计算、结论各 2 分)**