

**北京工业大学2018—2019学年第一学期**  
**《概率论与数理统计》(工类) 课程考试 A 卷参考答案与评分标准**

**一、填空题 (15 个空, 每空 2 分, 共 30 分)**

1. 设  $P(A) = 0.5$ ,  $P(A \cup B) = 0.7$ . 则当  $A$  与  $B$  互斥时,  $P(B) = \underline{0.2}$ ;  $A$  与  $B$  相互独立时,  $P(B) = \underline{0.4}$ .
2. 在相同条件下做 4 次独立试验, 假设每次试验时事件  $A$  发生的概率都是  $p$ , 且 4 次试验中  $A$  恰发生 1 次与发生 2 次的概率相等. 用  $X$  表示 4 次试验中  $A$  发生的次数时,  $E(X) = \underline{1.6}$ ,  $Var(X) = \underline{0.96}$ .
3. 设随机变量  $X$  服从参数  $\lambda$  的泊松分布, 且  $P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-2}$ , 则  $\lambda = \underline{2}$ ,  $E(X^2) = \underline{6}$ .
4. 设随机变量  $X$  可能取的值为  $-2, 0$  和  $1$ , 且  $P\{X = -2\} = 0.4$ ,  $P\{X = 0\} = 0.3$ . 则  $E(X) = \underline{-0.5}$ ,  $Var(X) = \underline{1.65}$ .
5. 若随机变量  $X_1, X_2$  相互独立, 且  $X_1 \sim N(3, 3^2)$ ,  $X_2 \sim N(1, 2^2)$ ,  $X = X_1 - 2X_2$ , 则  $X \sim \underline{N(1, 5^2)}$ ,  $P\{-4 < X < 6\} = \underline{0.6826}$ .
6. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为抽自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机样本,  $\mu$  与  $\sigma^2$  为未知常数,  $\bar{X}$  与  $S^2$  分别为样本均值与方差, 即  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . 则  $\bar{X} \sim \underline{N(\mu, \sigma^2)}$ ,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \underline{\chi_{n-1}^2}$ ,  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim \underline{t_{n-1}}$ ,  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间  $\underline{[\bar{X} - (S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2), \bar{X} + (S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2)]}$ ,  $\sigma^2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间  $\underline{[(n-1)S^2/\chi_{n-1}(\alpha/2), (n-1)S^2/\chi_{n-1}(1-\alpha/2)]}$ .

**二、解答题 (每题 14 分, 共 70 分)**

1. 有型号相同的产品三箱, 第一箱装 12 件, 其中 2 件为次品; 第二箱装 8 件, 其中只有 1 件为次品; 第三箱装 20 件, 其中 4 件为次品.

- (1). 从三箱抽取 1 箱, 然后从中随机抽取 1 件产品, 求抽到次品的概率;
- (2). 如发现抽到的产品为次品, 求其抽自第 1 箱的概率.

**解** 设  $A_1, A_2, A_3$  分别表示抽到第一至三箱的产品,  $B$  表示 {抽到次品}, 则

$$P(A_i) = 1/3, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$P(B|A_1) = 2/12 = 1/6, \quad P(B|A_2) = 1/8, \quad P(B|A_3) = 4/20 = 1/5.$$

**(假设 2 分, 概率和条件概率 2 分, 共 4 分)**

$$(1). \quad P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \frac{59}{360} \approx 0.163889;$$

**(全概率公式 3 分, 结果 2 分)**

$$(2). \quad P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{j=1}^3 P(A_j)P(B|A_j)} = \frac{20}{59} \approx 0.338983.$$

**(贝叶斯公式 3 分, 结果 2 分)**

2. 设随机变量  $X_1, X_2$  相互独立, 且二者均服从  $[0, 1]$  区间上均匀分布, 令  $X = X_1 + X_2$ , 求

(1).  $X$  的概率密度函数  $f_X(x)$ ;

(2).  $E(X)$  和  $Var(X)$ ;

(3).  $Y = X^2$  的概率密度函数  $f_Y(y)$ .

**解** (1). 设  $F_X(x)$  为  $X$  的分布函数, (2 分)

当  $x < 0$  时,  $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X_1 + X_2 \leq x\} = 0$ ;

$0 \leq x \leq 1$  时,  $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X_1 + X_2 \leq x\} = x^2/2$ ;

$1 \leq x \leq 2$  时,  $F_X(x) = P\{X_1 + X_2 \leq x\} = 1 - (2 - x)^2/2$ ;

$x \geq 2$  时,  $F_X(x) = 1$ . (分布函数正确 2 分)

于是,

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

(概率密度函数正确 1 分)

(2).  $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 1$ ,  $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{1}{6}$ ;

(各 2 分, 共 4 分)

(3). 考虑  $y = g(x) = x^2$  ( $0 < x \leq 2$ ) 的反函数  $x = h(y) = \sqrt{y}$  ( $0 < y \leq 4$ ) 是单调增函数, 且导函数存在, 则有 (2 分)

$$\begin{aligned} f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})h'(y) &= \begin{cases} \sqrt{y} \times \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ (2 - \sqrt{y}) \times \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.5, & 0 < y < 1 \\ 1/\sqrt{y} - 0.5, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

(公式 2 分, 结果 1 分)

3. 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  有联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} ay(1 - x), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1). 确定常数  $a$ ;

(2). 求边缘概率密度函数  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ ;

(3). 回答  $X$  与  $Y$  是否独立? 为什么?

(4). 计算  $E(Y)$ .

解 (1). 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x ay(1-x) dy = \frac{a}{2} \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{a}{24} = 1,$$

得  $a = 24$ . (累次积分、积分值、令积分值等于 1 并求出  $a$  各 1 分, 共 3 分)

(2). 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f_X(x) = \int_0^x 24y(1-x) dy = 12x^2(1-x)$ ; (每步 1 分, 共 2 分)  
 $x \notin [0, 1]$  时,  $f_X(x) = 0$ . (1 分)

当  $y \in [0, 1]$  时,  $f_Y(y) = \int_y^1 24y(1-x) dx = 12y(1-y)^2$ ; (每步 1 分, 共 2 分)  
 $y \notin [0, 1]$  时,  $f_Y(y) = 0$ . (1 分)

(3).  $X$  与  $Y$  不独立. 因  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ . (结论、原因各 1 分, 共 2 分)

(4).  $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x 24y^2(1-x) dy = 8 \int_0^1 (1-x)x^3 dx = 0.4$ . (累次积分、定积分、积分值各 1 分, 共 3 分)

4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$  的随机样本,  $\sigma^2 > 0$  是未知参数. 求

(1).  $\sigma^2$  的矩估计  $\widehat{\sigma^2}$ ; (2).  $\sigma^2$  的极大似然估计  $\widetilde{\sigma^2}$ ; (3). 回答  $\widehat{\sigma^2}$  是否为  $\sigma^2$  的无偏估计, 为什么?

解 (1).  $E(X^2) = \sigma^2$ , (2 分)

令  $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , (2 分)

得  $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ; (1 分)

(2).  $\sigma^2$  的似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right\} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}; \quad (2 \text{ 分})$$

对数似然函数为

$$\ell(\sigma^2) = \ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (1 \text{ 分})$$

上式对  $\sigma^2$  求导, 并令其等于零, 得 (2 分)

$$\frac{d\ell(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \quad (2 \text{ 分})$$

解上述方程, 得

$$\widetilde{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2; \quad (2 \text{ 分})$$

(3).  $\widehat{\sigma^2}$  是  $\sigma^2$  的无偏估计. 因对任意的  $\sigma^2 > 0$ , 均有

$$E(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \sigma^2.$$

(结论、原因各 1 分, 共 2 分)

5. 假设某品牌日光灯的使用寿命 (单位: 小时) 服从正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  和  $\sigma^2$  未知. 现从该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验, 测得它们寿命的平均值为 100.4, 样本方差为 0.49. 问在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 从样本看:

(1). 能否认为  $\mu = 100$ ? (2). 能否认为  $\sigma^2 < 0.5$ ?

**解**  $n = 9$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\bar{x} = 100.4$ ,  $s^2 = 0.49$ ,  $s = 0.7$ ,  $\mu_0 = 100$ ,  $\sigma_0^2 = 0.5$ . (2 分)

(1).  $H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$ . (2 分)

由  $0.4 = |\bar{x} - \mu_0| < \frac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}(\alpha/2) = (0.7/3) \times 2.3060 \approx 0.5387$ , (公式 2 分、计算 1 分)

接受原假设, 即能认为  $\mu = 100$ . (1 分)

(2).  $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ . (2 分)

由  $7.84 = \frac{8 \times 0.49}{0.5} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(1-\alpha) = 2.733$ , (公式 2 分、计算 1 分)

接受原假设, 即不能认为  $\sigma^2 < 0.5$ . (1 分)