北京工业大学 2022 ——2023 学年第 一 学期

《 复变函数与数学物理方程》 期末考试试卷 A 卷

考试说明： 闭卷考试，不可携带计算器 时间：2022.12.18 10:10-11:45 线上考试;

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ____________ **学号：** ____________ **班号：** ____________

注：本试卷共 4 大题，共 4 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总成绩
满分	4	2	2	4	2	2	2	2	8	
得分										
题号	10	11	12	13	14	15	16	17		
满分	10	12	10	12	6	10	6	6		
得分										

可能用到的公式：

1. 柯西-黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$,$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

2. 柯西公式：$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

3. 高阶导数公式：$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$

4. 常见函数的 Taylor 展开式：

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$;

$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$;

$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $|z|<1$;

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、已知复数$z=2-\sqrt{2}i$，则　其共轭复数$\bar{z}=$________________，z的辐角主值

$\arg z=$____________________。

2、若复数$z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$z^2=$____________________。

3、已知二元实变函数$\varphi(x,y)$为区域D内的调和函数，则该函数需满足的拉普拉斯方程为____________________。

4、$\oint_{|z-4|=1}\frac{dz}{z-4}=$________________，$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}}=$________________。

5、级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2022}$的收敛半径$R=$________________。

6、已知$f(t)$为连续函数，$\delta(t)$为单位脉冲函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+t_0)f(t)dt=$

________________。

7、若已知函数$f_1(t)$和$f_2(t)$都是$(-\infty,+\infty)$上的绝对可积函数，则函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的 Fourier 卷积定义式为$f_1(t)*f_2(t)=$________________________。

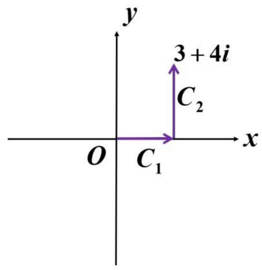
8、在典型的三类数学物理方程中，常用来描述振动及其传播过程的方程名称是

________________________。

二、计算题（共 52 分）

9、（8 分）根据柯西-黎曼方程，对于复变函数$f(z)=2x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+3y^2)$其中的$a$、$b$、$c$、$d$均为常数，$z=x+iy$。请问当$a$、$b$、$c$、$d$取何值时可以确保$f(z)$在整个复平面上处处（即$z=x+iy$取任意值的情况下）解析。

10、（10 分）沿右图所示路径计算积分$\int_c (z+1)dz$，其中C为从原点到点 $3+4i$ 的折线段



11、（12 分）求下列函数的所有奇点，并指出其类型。如果是极点，指出其级数。

（1）$f(z)=\frac{z^4}{1+z^2}$　　　　（2）$f(z)=\frac{2}{z^3-z^2-z+1}$

12、（10 分）设函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点z_1，$z_2,\ldots,z_n$外处处解析，C是D内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向简单闭曲线，

（1）根据上述条件及留数定理，写出计算 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的表达式，

（2）根据留数定理计算积分$I=\oint_{|z|=2}\frac{4e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$，

13、（12 分）（1）求函数的 Fourier 积分 $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2\le 1\\ 0, & t^2>1\end{cases}$

（2）求脉冲矩阵函数 $\mathrm{f}(t)=\begin{cases}\alpha, & 0\le t\le T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 Fourier 变换

三、求已知函数的展开式（共 16 分）

14、（6 分）将函数$f(z)=\frac{1}{1+z^3}$在$|z|<\frac{1}{2}$的区域内表示成形如$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的幂级数

15、（10 分）将函数$f(z)=\frac{2}{(z-1)(3-z)}$在圆环域 $1<|z|<3$ 内展开为 Laurent 级数

四、证明题（共 12 分）

16、(6 分)已知$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点，且当$|t|\to+\infty$时，$f(t)\to 0$。请写出$f(t)$的 Fourier 变换象函数，并证明 Fourier 变换的微分性质，即$\mathcal{F}\left[f'(t)\right]=j\omega\mathcal{F}[f(t)]$

17、（6 分）请写出$f(t)$的 Laplace 变换象函数，并证明 Laplace 变换的位移性质，即如果函数$f(t)$及$F(s)$满足变换关系$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则有$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$（$Re(s-a)>c$）