2023-2024-1 复变函数与积分变换复习

一. 复数与复变函数

1. 复数
   - 基本计算：四则，Re，Im，$|z|$，$\bar{z}$，Argz argz，z^n，$z^{\frac{1}{n}}$，e^z，Lnz lnz，z^μ，sinz cosz，反（性质）
   - 几何意义：
     - $z \leftrightarrow$ 点 $\leftrightarrow$ 向量 { $|z|$，Argz } $\longrightarrow$ 形式 { 一般 $a+bi$；三角 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$；指数 $re^{i\theta}$ }
     - 四则 { $+-$：▱，△；$\times\div$：旋转+放缩 }

例：e^z 周期
lnz 解析？
sinz 无界

2. 区域 …… 复平面上的拓扑
3. 复变函数
   - 定义：$w=f(z)$
   - 实质：$f(z)=u+iv$，$z=x+iy$
   - 极限：$w\to u_0+iv_0 \Longleftrightarrow u\to u_0$ & $v\to v_0$
   - 连续：$f(z)$ 连续 $\Longleftrightarrow u,v$ 连续

二. 解析函数：解析＝"邻域"可导

$\Rightarrow$ 解析函数的导数仍解析。

区域内解析 $\Longleftrightarrow$ 区域内可导.

求导数
- 定义，运算法则 同高数
- C-R方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$　$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

三. 积分

1. 定义与实质：路径方程 $\underline{\text{直线段，圆周}}$　一代二换三定限　$\left(\int_{z_0}^{z} f\right)' = f(z)$　{ 凑微分；分部积分 }
2. Cauchy-Goursat
   - 单连通、解析 $\Rightarrow \oint_C f(z)dz=0 \longrightarrow$ 路径无关 $\longrightarrow$ 原函数 $\longrightarrow$ N-L
   - 解析函数、C内无奇点 $\Rightarrow \oint_C f(z)dz=0 \xrightarrow{\text{有奇点}}$ 闭路变形、化简路径 $\xrightarrow{\text{多个奇点}}$ 复合闭路定理
     - $\downarrow$ Cauchy积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$\downarrow$ 高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

四. 级数

1. 复数列 $\alpha_n=a_n+ib_n \to a+ib \Longleftrightarrow \begin{cases} a_n\to a \\ b_n\to b\end{cases}$　$|\alpha_n|\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.
2. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)$ 收敛（绝）条件 $\Longleftrightarrow$ { $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛（绝）条件；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛（绝）条件 }

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \xrightarrow{\text{Abel}}$ 收敛圆盘 { 圆心：$z=z_0$；半径：比值/根值. }

四. 函数展开 $15'$ $\begin{cases} \text{Taylor 级数（证明收敛域）} \\ \text{Laurent 级数（不同收敛圆环内的展开）} \end{cases}$

· Taylor 级数 $z_0=0$, $\frac{1}{a+z}=\frac{1}{a(1+\frac{z}{a})}\cdots$, $\frac{1}{a-z}=\frac{1}{a(1-\frac{z}{a})}\cdots$

$$\frac{1}{(a-z)(b-z)}=\begin{cases} a\neq b, & \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-z}-\frac{1}{a-z}\right), \quad |z|<\min\{|a|,|b|\} \\ a=b, & \frac{1}{(a-z)^2}=\left(\frac{1}{a-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\right)'=\sum_{\boxed{n=1}}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{a^{n+1}}, \quad |z|<|a| \end{cases}$$

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$, $\sin z$, $\cos z\cdots$

$z=z_0$ 处展开, $\frac{1}{a-z}=\frac{1}{(a-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{a-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}}=\cdots$

$|z-z_0|<|a-z_0|$.

$e^z=e^{+z_0}e^{z-z_0}=\cdots$

· Laurent 级数 $R_1<|z-z_0|<R_2 \Rightarrow$ 在 z_0 处展开!

五. 留数

1. 孤立奇点 $\begin{cases} \text{定义} \\ \text{分类：可去、极点、本性奇点.} \\ \text{性质} \end{cases}$

· 零点的阶 $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, $f^{(m)}(z_0)\neq0$ m 级零点

· 极点的阶 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ $\begin{matrix} m\text{级零点} \\ n\text{级零点} \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $n-m$ 级极点 $(n>m)$

2. 留数 $\begin{cases} \text{定义：} \operatorname{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \\ \text{计算：一级极点: I, II} \quad m\text{级极点: II, II}' \\ \text{应用} \begin{cases} \text{计算复积分：} \oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k] \\ \text{计算实积分：} \begin{cases} ① \int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta \\ ② \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx \\ ③ \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin ax\,dx \text{ or } \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax\,dx \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

①② = 选一

上半平面奇点 < ③

③ 必考 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx$

六. Fourier 变换 $10'$

1. 定义: $\mathcal{F}[f](w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx$, $\mathcal{F}^{-1}[F](t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw$

2. 计算: ① 有限区间 ② 指数衰减.

3. 性质: 线性. 平移. 伸缩. 会用. 会证明