● 北京工业大学 2020—2021 学年第二学期

《概率论与数理统计》周末重修试卷(工、经)

考试说明：考试时间：2021 年 5 月 16 日；考试方式：闭卷。

承诺： 本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________ 学号：____________ 班号：__________

注： 本试卷共 二 大题，共 3 页，满分 100 分。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	二	二	二	二	总成绩
满分	35	13	13	13	13	13	
得分							

一、填空题（本大题共 6 个小题，共 14 个空，每空 2 分, 共 28 分）

1、 设A,B是两个随机事件，已知$P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A\cup B)=0.8$，则$P(A\bar{B})=$ 0.2 ，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=$ 0.2 ，$P(B-A)=$ 0.3 。

2、 甲、乙、丙三人独立地向同一目标各射击一次，他们击中目标的概率分别为 0.7，0.6 和 0.8，则目标被击中的概率为 0.976 。

3、 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x^2}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，其中$a$与$b$为常数，则 $a=$ 1 ，$b=$ -1 。

4、 若随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1 \sim N(3, 2^2)$，$X_2 \sim N(1,1)$，令 $X = 2X_1 - 3X_2$，则 $X\sim$ N（3，25） ，$P\{-2<X<8\}=$ 0.6826 。**注：** $\Phi(x)$ 为正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$。

5、 设总体为$[0,\theta]$上的均匀分布，则θ的矩估计为 $2\bar{X}$ 极大似然估计为 $Max(X_1,\cdots,X_n)$

6、 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma \sim$ N(0,1) ，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ t_{n-1} ，$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim$ χ^2_{n-1} ，$E(S^2)=$ σ^2 。

二、计算题（本大题共 6 个小题，每题 12 分，共 72 分，做题时须写出解题过程，否则不能得分）

1、 一批产品共 20 件，其中有 5 件是次品，其余为正品。现从这 20 件产品中不放回地任意抽取 3 次，每次只取 1 件，求下列事件的概率：

（1） 在第一、第二次取到正品的条件下，第三次取到次品；

（2） 第三次才取到次品；

（3） 第三次取到次品。

解：用 A_i 表示事件“第 i 次取到的是正品”（$i=1,2,3$），则 $\overline{A}_i$ 表示事件“第 i 次取到的是次品”（$i=1,2,3$）。$P(A_1)=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}, P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{14}{19}=\dfrac{21}{38}$

(1) 事件“在第一、第二次取到正品的条件下, 第三次取到次品”的概率为：

$P(\overline{A}_3|A_1A_2)=\dfrac{5}{18}$。

(2) 事件“第三次才取到次品”的概率为：

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)=\frac{15}{20}\times\frac{14}{19}\times\frac{5}{18}=\frac{35}{228}$$

（3）事件“第三次取到次品”的概率为：$\dfrac{1}{4}$

此题要注意区分事件（1）、(2）的区别，一个是求条件概率，一个是一般的概率。再例如，设有两个产品，一个为正品，一个为次品。用 A_i 表示事件“第 i 次取到的是正品”（$i=1,2$），

则事件“在第一次取到正品的条件下, 第二次取到次品”的概率为：$P(\overline{A}_2|A_1)=1$；而事件“第二次才取到次品”的概率为：$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)=\dfrac{1}{2}$。区别是显然的。

2、 设某地区每天的用电量 X（单位：百万千瓦.时）是一个连续型随机变量，概率密度函数为

$$f(x)=12x(1-x)^2, 0<x<1$$

假设该地区每天的供电量仅有 80 万千瓦.时，求该地区每天供电量不足的概率。若每天的供电量上升到 90 万千瓦.时，每天供电量不足的概率是多少？

答案：

解：（1）若供电量为 80 万千瓦小时，则供电量不足的概率为：

$$P(X>0.8)=\int_{0.8}^{\infty}f(x)dx=\int_{0.8}^{1}12x(1-x)^2dx=\int_{0.8}^{1}12(x-2x^2+x^3)dx=0.0272$$

若供电量为 90 万千瓦小时，则供电量不足的概率为：

$$P(X>0.9)=\int_{0.9}^{\infty}f(x)dx=\int_{0.9}^{1}12x(1-x)^2dx=\int_{0.9}^{1}12(x-2x^2+x^3)dx=0.0237$$

3、 设随机变量$X \sim N(0,1)$，求下列随机变量Y的概率密度函数：

（1）$Y = 2X$；　（2）$Y = e^{-X}$；（3）$Y = X^2$；

解：X 的密度函数和分布函数分别为：

$$f_X(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad F_X(x) = \Phi(x) = P(X \le x),$$

（1）$F_Y(y) = F_X(y/2)$, 于是有

$$f_Y(y) = f_X(y/2)/2$$

（2）$Y = e^{-X}$ 的密度函数和分布函数分别为 $f_Y(y), F_Y(y) = P(Y \le y)$，其中

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{-X} \le y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ P(X \ge -\ln y), & y > 0 \end{cases},$$

当 $y > 0$ 时

$$F_Y(y) = P(X \ge -\ln y) = 1 - P(X < -\ln y) = 1 - P(X \le -\ln y) = 1 - \Phi(-\ln y)$$
$$= \Phi(\ln y)$$

于是 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \phi(\ln y)(\ln y)', & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{1}{y}\phi(\ln y), & y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln y)^2}{2}\right\}, & y > 0 \end{cases}$$

（3）$Y = X^2$ 的密度函数和分布函数分别为 $f_Y(y), F_Y(y) = P(Y \le y)$，其中

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ P(\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}, & y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, & y > 0. \end{cases},$$

于是Y的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 2\phi(\sqrt{y})(\sqrt{y})', & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}\phi(\sqrt{y}), & y>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left\{-\dfrac{y}{2}\right\}, & y>0\end{cases}$$

4、 已知二维随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}A, x^2\le y\le x,\\ 0, 其它,\end{cases}$$

求：(1) 常数A；

(2) 边缘密度函数$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(3) X与Y是否独立？

解：(1)因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}cdy$

$$=c\int_0^1(x-x^2)dx=c\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{c}{6}=1$$

所以 $c=6$.

(2) 因为，当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x^2}^{x}cdy=6(x-x^2)$

所以，X的边缘分布密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

又因为，当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)$

所以，Y的边缘分布密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(3) 不独立。

5、 正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty$$

其中μ，σ^2为待估参数。

求：(1) μ，σ^2的矩估计；

(2) μ，σ^2的极大似然估计。

解：(1)，σ^2的矩估计: $\hat{\mu}=\bar{X}$，$\widehat{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n$

(2) μ，σ^2的极大似然估计$\hat{\mu}=\bar{X}$，$\widehat{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n$

6、 设甲、乙两煤矿所产的煤中含煤粉率分别为$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$，其中σ^2未知。为检验这两个煤矿的煤含煤粉率有无明显差异，从两矿中取样若干份，测试结果如下：

甲矿（%）：24.3， 22.8，23.7，22.3，19.4，20.5；$\bar{x}=22.17$，$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=17.75$

乙矿（%）：15.7， 16.9，20.2，16.7，19.8；$\bar{y}=17.86$，$\sum_{j=1}^{5}(y_j-\bar{y})^2=16.17$

试在显著性水平为 0.05 下，检验“含煤粉率无差异”这个假设。

附：t分布与χ^2分布表

$t_9(0.025)=2.2622$	$t_9(0.05)=1.8331$	$t_{10}(0.025)=2.2281$	$t_{10}(0.05)=1.8125$
$\chi_9^2(0.025)=19.023$	$\chi_9^2(0.05)=16.919$	$\chi_9^2(0.975)=2.700$	$\chi_9^2(0.95)=3.325$
$\chi_{10}^2(0.025)=20.483$	$\chi_{10}^2(0.05)=18.307$	$\chi_{10}^2(0.975)=3.247$	$\chi_{10}^2(0.95)=3.940$

解：$S^2=3.77$；$t_{m+n-2}(0.025)=2.2622$

因为 $/\bar{X}-\bar{Y}/\geq 2.66$

拒绝原假设，甲乙含煤粉率有显著差异。