第二十二章　各种积分间的联系与场论初步

§1 各种积分间的联系

1．应用格林公式计算下列积分：

（1）$\oint_L xy^2dy - x^2ydx$ ，其中 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 取正向；

（2）$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy,$ L 同（1）；

（3）$\oint_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$， L 是顶点为 $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$ 的三角形的边界，取正向；

（4）$\oint_L (x^3+y^3)dx-(x^3-y^3)dy,$ L为$x^2+y^2=1,$ 取正向；

（5）$\oint_L e^y\sin xdx+e^{-x}\sin ydy,$ L 为矩形 $a\le x\le b,$ $c\le y\le d$ 的边界，取正向；

（6）$\oint_L e^{xy}[(y\sin xy+\cos(x+y))dx+(x\sin xy+\cos(x+y))dy],$ 其中 L 是任意逐段光滑闭曲线．

解（1）原式 $=\iint_D\left(y^2-(-x^2)\right)dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$

$=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta\right)rdr$ （广义极坐标变换）

$=\dfrac{1}{3}ab\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)d\theta=\dfrac{\pi}{3}ab(a^2+b^2)$.

（2）$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy=\iint_D(1-1)dxdy=0$.

（3）原式 $=\iint_D(2x-2(x+y))dxdy$

$=-2\iint_D ydxdy=-2\left(\int_1^2 ydy\int_{\frac{y+3}{4}}^{2y-1}dx+\int_2^5 ydy\int_{\frac{y+3}{4}}^{\frac{11-y}{3}}dx\right)$

$=-2(\int_1^2\dfrac{7}{4}(y^2-y)dy+\int_2^5\dfrac{7}{12}(5y-y^2)dy)=-\dfrac{143}{9}$.

（4）原式$=\iint_D(-3x^2-3y^2)dxdy=-3\iint_D(x^2+y^2)dxdy=-\dfrac{3}{2}\pi$.

（5）原式 $=\iint_D(-e^{-x}\sin y-e^y\cos x)dxdy$

$=-(\int_a^b e^{-x}dx\int_c^d\sin ydy+\int_a^b\cos xdx\int_c^d e^{ydy})$

$=(\dfrac{1}{e^a}-\dfrac{1}{e^b})(\cos d-\cos c)+(e^d-e^c)(\sin b-\sin a)$.

（6） $P(x,y)=e^{xy}[y\sin xy+\cos(x+y)]$， $Q(x,y)=e^{xy}[x\sin xy+\cos(x+y)]$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=ye^{xy}[x\sin xy+\cos(x+y)]+e^{xy}[\sin xy+xy\cos xy-\sin(x-y)]$$

$$=e^{xy}[xy(\sin xy+\cos xy)\sin xy+y\cos(x+y)-\sin(x-y)],$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=xe^{xy}[y\sin xy+\cos(x+y)]+e^{xy}[\sin xy+xy\cos xy-\sin(x+y)]$$

$$=e^{xy}[xy(\sin xy+\cos xy)+\sin xy+x\cos xy-\sin(x+y)],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{xy}(y-x)\cos(x+y),$$

所以，

原式 $=\iint\limits_D e^{xy}(y-x)\cos(x+y)dxdy$，其中 D 为 L 包围的平面区域.

2．利用格林公式计算下列曲线所围成的面积：

（1）双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$；

（2）笛卡尔叶形线 $x^3+y^3=3axy(a>0)$；

（3） $x=a(1+\cos^2 t)\sin t$， $y=a\sin^2 t\cdot\cos t$， $0\le t\le 2\pi$.

解（1） $|D|=\iint\limits_D dxdy=2\iint\limits_{D_1}dxdy=2\times\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[r\cos\theta r\cos\theta-r\sin\theta(-r\sin\theta)]d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta=a^2,$$

其中 D_1 由 $r^2=a^2\cos 2\theta$， $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ 所围成.

（2）作代换 $y=tx$，则得曲线的参数方程为 $x=\frac{3at}{1+t^3}$， $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. 所以，

$$dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt,\quad dy=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}dt,$$

从而， $xdy-ydx=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt$，于是，面积为

$$|D|=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{3}{2}a^2.$$

（3） $|D| = \dfrac{1}{2}\left|\oint_c xdy - ydx\right| =$

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\{a(1+\cos^2 t)\sin t\cdot a(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)-a\sin^2 t\cos t\cdot a[(1+\cos^2 t)\cos t+2\cos t(-\sin t)\sin t]\}dt\right|$$

$$\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\{a(1+\cos^2 t)\sin t\cdot a(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)-a\sin^2 t\cos t\cdot a[(1+\cos^2 t)\cos t+2\cos t(-\sin t)\sin t]\}dt\right|$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left|\int_0^{2\pi}\sin^2 t(1+\cos^2 t)\cos 2t dt\right|$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2$$

3．利用高斯公式求下列积分：

（1） $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.其中

（a） S 为立方体 $0\le x,y,z\le a$ 的边界曲面外侧；

（b） S 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$,下侧.

解：（a） $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\iint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

$$=2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz$$

$$=3a^4$$

(b)补充平面 $S_1: x^2+y^2\le h^2$， $z=h$ 的上侧后， $S+S_1$ 成为闭曲面的外侧，而

$$\iint\limits_{S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} h^2dxdy=h^2\cdot\pi h^2=\pi h^4$$

所以： $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy+\pi h^4$

$$=\iint\limits_{S+S_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

$$=2\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[2h(x+y)+h^2-2(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h[2hr(\cos\theta+\sin\theta)+h^2-2r^2(\cos\theta+\sin\theta)-r^2]rdr$$

$$=\frac{1}{12}h^4\int_0^{2\pi}(2\cos\theta+2\sin\theta+3)d\theta=\frac{\pi}{2}h^4$$

所以 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{\pi}{2}h^4-\pi h^4=-\frac{\pi}{2}h^4$

（2）$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 S 是单位球面的外侧；

解：$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4d\rho$$

$$=\frac{12}{5}\pi$$

（3）设 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，求

（a）$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $\iint\limits_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解：补充平面 S_1： $z=0,\ x^2+y^2\le a^2$，下侧后，$S+S_1$ 成为闭曲面的外侧，而

（a） $\iint\limits_{S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=0$

所以 $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{S+S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_V dxdydz$

$$=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2}=2\pi a^3$$

(b) $\iint\limits_{S_1} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}2xydxdy=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\sin\theta\cos\theta dr=0$$

所以 $\iint\limits_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{S+S_1}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{4}{5}\pi a^5$$

（4）$\iint\limits_S(x-y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S 是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解：$\iint_S (x-y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$=3\iiint_V dxdydz \ =3|V|=3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi\ R^3$$

4．用斯托克斯公式计算下列积分：

（1）$\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz$，其中

（a）L 为圆周 $x^2+y^2=a^2,\quad z=0$，方向是逆时针；

（b）L 为 $y^2+z^2=1,\ x=y$ 所交的椭圆，沿 x 轴正向看去，按逆时针方向；

解：（a）取平面 $z=0$ 上由交线围成的平面块为 S，上侧，由 Stokes 公式

$$\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

$$=-3\iint_S x^2y^2dxdy$$

$$=-3\int_0^a x^2dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2dy$$

$$=-2\int_0^a x^2(\sqrt{a^2-x^2})^3dx$$

$$=-\frac{\pi}{16}a^6$$

（b）取平面 $x=y$ 上由交线围成的平面块为 S，上侧，由由 Stokes 公式

$$\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

$$=-3\iint_S x^2y^2dxdy$$

$$=-3\iint_{D_{xy}} x^2y^2dxdy=-\frac{\pi}{16}a^6$$

（2）$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，$L$ 是从 $(a,0,0)$ 经 $(0,a,0)$ 至 $(0,0,a)$ 回到 $(a,0,0)$ 的三角形；

解：三角形所在的平面为 $x+y+z=a$，取平面 $x+y+z=a$ 上由以上三角形围成的平面块为 S，取上侧，由 stokes 公式

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

$$=-2\left(\iint_S dydz + \iint_S dzdx + \iint_S dxdy\right)$$

$$=-2\left(\iint_{D_{yz}} dydz + \iint_{D_{zx}} dzdx + \iint_{D_{xy}} dxdy\right)$$

$$=-3a^2$$

（3）$\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+y^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中

（a）L 为 $x+y+z=1$ 与三坐标轴的交线，其方向与所围平面区域上侧构成右手法则；

（b）L 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2rx$（$0<r<R,\quad z>0$），它的方向与所围曲面的上侧构成右手法则；

解：（a）中取平面 $x+y+z=1$ 上与三坐标面交线所围平面块为 S，上侧；（b）中取曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 上由 L 所围曲面块为 S，上侧， 则由 stokes 公式，得

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+y^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

$$=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=2\left(\iint_S (y-z)dydz+\iint_S (z-x)dzdx+\iint_S (x-y)dxdy\right)$$

则（a） $\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$

$$=\ 2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$=0$ （因为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$）

（b） 注意到球面的法线的方向余弦为： $\cos\alpha=\frac{x-R}{R}$，$\cos\beta=\frac{y}{R}$，$\cos\gamma=\frac{z}{R}$，所以

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$=2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$

$=2\iint_S (z-y)dS$

由于曲面 S 关于 oxz 平面对称，故 $\iint_S ydS=0$. 又

$\iint_S zdS=\iint_S R\cos\gamma dS=R\cdot\pi r^2$

于是 $\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\pi Rr^2$

（4）$\oint_L ydx+zdy+xdz$，L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，从 x 轴正向看去圆周是逆时针方向.

解：平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，于是，

$$\int_L ydx+zdy+xdz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS=-\pi a^2\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\pi a^2$$

5. 设 L 为平面上封闭曲线 L， l 为平面的任意方向，证明：$\oint_L \cos(n,l)ds=0$，其中 n 是 L 的外法线方向。

证明：不妨规定 L 的方向为逆时针的，以 $\vec{t}$ 表示，由于夹角 $(\vec{n},\vec{l})=(\vec{l},x)-(\vec{n},x)$

故得 $\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos(\vec{l},x)\ \cos(\vec{n},x)+\sin(\vec{l},x)\ \sin(\vec{n},x)$

但 $\sin(\vec{n},x)=\sin[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}]=-\cos(\vec{t},x)$

$\cos(\vec{n},x)=\cos[(\vec{t},x)-\frac{\pi}{2}]=\sin(\vec{t},x)$

且 $\cos(\vec{t},x)=\dfrac{dx}{ds}$，$\sin(\vec{t},x)=\dfrac{dy}{ds}$，因此，有：$\cos(\vec{n},\vec{l})ds=\cos(\vec{l},x)dy-\sin(\vec{l},x)dx.$

再利用 Green 公式，并注意到 $\sin(\vec{l},x)$ 和 $\cos(\vec{l},x)$ 均为常数，即得

$$\oint_L \cos(\vec{n},\vec{l})ds=\oint_L[-\sin(\vec{l},x)dx+\cos(\vec{l},x)dy]=\iint_D 0dxdy=0$$

6．设 S 是封闭曲线，$\vec{l}$ 为任意固定方向，证明：$\oiint_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=0$.

证明：因为 $\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos\alpha\cos(\vec{l},x)+\cos\beta\cos(\vec{l},y)+\cos\gamma\cos(\vec{l},z)$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦，故有

$$\iint_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iint_S \cos(\vec{l},x)dydz+\cos(\vec{l},y)dzdx+\cos(\vec{l},z)dxdy$$

而 $\vec{l}$ 为固定方向，从而 $\cos(\vec{l},x),\cos(\vec{l},y),\cos(\vec{l},z)$ 均为常数，于是由 Gauss 公式，得

$$\iint_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iiint_V (\frac{\partial\cos(\vec{l},x)}{\partial x}+\frac{\partial\cos(\vec{l},y)}{\partial y}+\frac{\partial\cos(\vec{l},z)}{\partial z})dxdydz=\iiint_V 0dxdydz=0$$

7. 求 I=$\oint_L [x\cos(\vec{n},x)+y\cos(\vec{n},y)]ds$， L 为包围有界区域 D 的光滑闭曲线，$\vec{n}$ 为 L 的外发向。

解： 设 $\vec{\tau}$为曲线 L 的逆时针切线方向，则 $(\vec{\tau},x)=(\vec{n},x)+\frac{\pi}{2}$，即：$(\vec{n},x)=(\vec{\tau},x)-\frac{\pi}{2}$

而 $(\vec{\tau},y)+(\vec{n},y)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(\vec{n},y)=\frac{\pi}{2}-(\vec{\tau},y)$

所以，$\cos(\vec{n},x)=\cos[(\vec{\tau},x)-\frac{\pi}{2}]=\sin(\vec{\tau},x)=\frac{dy}{ds}$

$$\cos(\vec{n},y)=\cos[\frac{\pi}{2}-(\vec{\tau},y)]=\sin(\vec{\tau},y)=-\cos(\vec{\tau},x)=-\frac{dx}{ds}$$

于是 $I=\oint_l x\cos(\vec{n},x)+y\cos(\vec{n},y)]ds=\oint_l xdy-ydx=2|D|$

8. 证明 Gauss 积分 $\oint_l \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=0$，其中 L 是平面一单连通区域 σ 的边界，而 r 是 L 上一点到 σ 外某一定点的距离，$\vec{n}$ 是 L 的外法线方向. 又若 r 表示 L 上一点到 σ 内某一定点的距离，则这个积分之值等于 2π.

证明： 设 $\vec{n}$ 与 ox 轴夹角为 α， $\vec{r}$ 与 ox 轴的夹角为 β， 则 $(\vec{r},\wedge\vec{n})=\alpha-\beta$

于是 $\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，并设曲线上的点为 (ξ,η)，曲线外一点为 (x,y)，则 $\cos\beta=\frac{(\xi-x)}{r},\sin\beta=\frac{(\eta-y)}{r}$

所以 $\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha$

$$\Rightarrow u(\vec{r},\wedge\vec{n})=\oint_l\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=\oint_L(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha)ds$$

$$=\oint_l\frac{(\xi-x)}{r^2}d\eta-\frac{(\eta-y)}{r^2}d\xi$$

令 $P=\frac{-(\eta-y)}{r^2},Q=\frac{(\xi-x)}{r^2}$ ，

则有 $\frac{\partial P}{\partial\eta}=-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4}$， $\frac{\partial Q}{\partial\xi}=-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4}$

因而 P，Q 的偏导数除去点 (x,y) 外，在全平面上是连续的，且 $\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial P}{\partial \eta}$ 于是，利用 Green 公式，当点 (x,y) 在 σ 外一点时，有 $u(x,y)=\oint_l \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=0$

当 (x,y) 在 σ 内时，则在 σ 内以 (x,y) 为圆心，以 R 为半径作一小圆 l，

即得 $\oint_{L+l^-}\frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=0$ 即 $\oint_L \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=\oint_l \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds$

即 $u(x,y)=\oint_L \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=\oint_l \frac{\cos(\vec{r},\wedge\vec{n})}{r}ds=\oint_l \frac{1}{R}ds=2\pi$

9. 计算 Gauss 积分 $\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$，其中 S 为简单封闭光滑曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点（ξ,η,ζ）处的外法向，$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}, r=|\vec{r}|$. 试对下列两种情形进行讨论：

（1）曲面 S 包围的区域不含 (x,y,z) 点； （2）曲面 S 包围的区域含 (x,y,z) 点.

解： 设 $\vec{n}$ 的方向余旋为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则

$$\cos(\vec{n},\vec{r})=\cos\alpha\cos(\vec{r},\xi)+\cos\beta\cos(\vec{r},\eta)+\cos\gamma\cos(\vec{r},\zeta)$$

$$\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\xi)}{r^2}d\eta d\zeta+\frac{\cos(\vec{r},\eta)}{r^2}d\zeta d\xi+\frac{\cos(\vec{r},\zeta)}{r^2}d\xi d\eta$$

而：$\cos(\vec{r},\xi)=\frac{\xi-x}{r}$，$\cos(\vec{r},\eta)=\frac{\eta-y}{r}$，$\cos(\vec{r},\zeta)=\frac{\zeta-z}{r}$，

所以，$\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iint_S \frac{\xi-x}{r^3}d\eta d\zeta+\frac{\eta-y}{r^3}d\zeta d\xi+\frac{\zeta-z}{r^3}d\xi d\eta$

由于 $\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\xi-x}{r^3})=\frac{r^2-3(\xi-x)^2}{r^5}$，$\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{\eta-y}{r^3})=\frac{r^2-3(\eta-y)^2}{r^5}$，$\frac{\partial}{\partial\zeta}(\frac{\zeta-z}{r^3})=\frac{r^2-3(\zeta-z)^2}{r^5}$

这些偏导数除去 $r=0$ 即 (x,y,z) 点外。在全空间是连续的，且

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\xi-x}{r^3})+\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\eta-y}{r^3})+\frac{\partial}{\partial \zeta}(\frac{\zeta-z}{r^3})=\frac{r^2-3(\xi-x)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(\eta-y)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(\zeta-z)^2}{r^5}=0$$

于是（1）当曲面 S 所包围的区域 V 不含 (x,y,z) 点时，由 Gauss 公式

有 $\iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iiint\limits_V 0dxdydz=0$

（2）当则曲面 S 所包围的区域 V 含 (x,y,z) 点时，在 V 内以 (x,y,z) 为球心，以 ρ 为半径作小球面 $\sigma \subset V$，由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{S+\sigma^-}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=0 \Rightarrow \iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iint\limits_\sigma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iint\limits_\sigma \frac{1}{\rho^2}dS=4\pi$$

10．求证 $\iiint\limits_V \frac{1}{r}dxdydz=\frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS$，其中 S 是包围 V 的分片光滑封闭曲面，$\vec{n}$ 为 S 的外法线方向，$\vec{r}=(x,y,z)$，$r=|\vec{r}|$．分下两种情形进行讨论：

（1）V 中不含原点 $(0,0,0)$

（2）V 中含原点 $(0,0,0)$ 时，令 $\iiint\limits_V \frac{1}{r}dxdydz=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{1}{r}dxdydz$，其中 V_ε 是以原点为心，以 ε 为半径的球.

证明：（1）$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos\alpha\cos(\vec{r},x)+\cos\beta\cos(\vec{r},y)+\cos\gamma\cos(\vec{r},z)$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余旋，因此 $\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma$，

利用 Gauss 公式, 得

$$\oiint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS=\oiint\limits_S \frac{x}{r}dydz+\frac{y}{r}dzdx+\frac{z}{r}dxdy$$

$$=\iiint\limits_V [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r})]dxdydz=\iiint\limits_V \frac{2}{r}dxdydz$$

所以： $\iiint\limits_V \frac{1}{r}dxdydz = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS$

（2）对封闭区域$V-V_\varepsilon$应用 Gauss 公式，可得

$$\oiint\limits_{S+S_\varepsilon^-} \cos(\vec{r},\vec{n})dS = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{dxdydz}{r},$$

但在S_ε^-上，$\cos(\vec{r},\vec{n}) = -1$，于是$\iint\limits_{S_\varepsilon^-} \cos(\vec{r},\vec{n})dS = -4\pi\varepsilon^2$，令$\varepsilon \to 0$取极限，即得：

$$\iiint\limits_V \frac{1}{r}dxdydz = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{1}{r}dxdydz = \frac{1}{2}\oiint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

11. 利用 Gauss 公式变换下列积分：

（1）$\iint\limits_S xydxdy + xzdzdx + yzdydz$

（2）$\iint\limits_S (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$，其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是曲面的外法线方向余弦.

解：（1）$\iint\limits_S xydxdy + xzdzdx + yzdydz = \iiint\limits_V (\frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy))dxdydz = 0$

（2）$\iint\limits_S (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz = \iiint \Delta udxdydz$

12. 设$u(x,y)$，$v(x,y)$是具有二阶连续偏导数的函数，并设$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，

证明：（1）$\iint\limits_\sigma \Delta udxdy = \oint_l \frac{\partial u}{\partial n}ds$；

（2）$\iint\limits_\sigma v\Delta udxdy = -\iint\limits_\sigma (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy + \oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}ds$；

（3）$\iint\limits_{\sigma}(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=-\oint_l(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n})ds$. 其中$\sigma$为闭曲线$l$所围的平面区域，$\frac{\partial u}{\partial n},\frac{\partial v}{\partial n}$为沿外法线的方向导数.

证明:(1) $\oint_l \frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_l(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha)ds$

$$=\oint_l[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})]ds$$

$$=\oint_l[\frac{\partial u}{\partial x}\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})]ds$$

$$=\oint_l(-\frac{\partial u}{\partial y})dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \underline{\underline{\text{格林公式}}} \iint\limits_{\sigma}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$=\iint\limits_{\sigma}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy=\iint\limits_{\sigma}\Delta u dxdy$$

（2）$\oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_l v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx$

令 $P=-v\frac{\partial u}{\partial y}$， $Q=v\frac{\partial u}{\partial x}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

所以：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+v\Delta u$

由 Green 公式有：$\oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint\limits_{\sigma}\left[(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+v\Delta u\right]dxdy$

所以：$\iint\limits_{\sigma}v\Delta u dxdy=-\iint\limits_{\sigma}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy+\oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}ds$

（3） 由（2）已证知：

$$\iint\limits_{\sigma}v\Delta u dxdy=-\iint\limits_{\sigma}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})dxdy+\oint_l v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

$$\iint\limits_{\sigma}u\Delta v dxdy=-\iint\limits_{\sigma}(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y})dxdy+\oint_l u\frac{\partial v}{\partial n}ds$$

后式减去前式得：

$$\iint_{\sigma}(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=\oint_{l}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds=-\oint_{l}(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n})ds$$（该公式称为 Green 第二公式）

13．设 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$S$ 是 V 的边界曲面，证明：

（1）$\iiint_V \Delta u dxdydz=\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS$

（2）$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_V[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz+\iiint_V u\Delta u dxdydz$

式中 u 在 V 及其边界曲面 S 上有连续的二阶偏导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的方向导数.

证明：（1）$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint_S(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$

$$=\iiint_V[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz=\iiint_V \Delta u dxdydz$$

（2）$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint_S u(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$

$$=\iiint_V[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial u}{\partial z})]dxdydz$$

$$=\iiint_V[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}]dxdydz$$

$$=\iiint_V[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2]dxdydz+\iiint_V u\Delta u dxdydz$$

14、计算下列曲线积分：

(1) $\iint_S(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dzdx+2z(y-x)dxdy$，其中 S 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (z\geq 0)$ 下侧；

解：补充平面 $z=0$ 被 S 割下的部分上侧为 S_1，则由 Gauss 公式

$$\iint_{S+S_1}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dzdx+2z(y-x)dxdy$$

$$=-\iiint_V(2x+2y+2(y-x))dxdydz$$

$$=4\iiint_V ydxdydz$$

$$=-4\int_{-b}^{b} y dy \iint_{D_{xz}} dxdz$$

$$=-4\int_{-b}^{b} y\cdot\frac{1}{2}\pi a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$$

$$=-2\pi ab\int_{-b}^{b} y\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=0$$

而 $\iint_{S_1}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dzdx+2z(y-x)dxdy=0$

所以 $\iint_{S}(x^2-y^2)dydz+(y^2-z^2)dzdx+2z(y-x)dxdy=0$

(2) $\iint_S (x+\cos y)dydz+(y+\cos z)dzdx+(z+\cos x)dxdy$，$S$ 是立体 Ω 的边界面，而立体 Ω 由 $x+y+z=1$ 和三坐标面围成；

解： $\iint_S (x+\cos y)dydz+(y+\cos z)dzdx+(z+\cos x)dxdy$

$$\underline{\underline{Gauss公式}}\iiint_\Omega (1+1+1)dxdydz=3|\Omega|=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

(3) $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$，其中 $F=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$，$\vec{n}$ 是 S 的外法向单位向量，S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ 上侧；

解：设 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则补充 $z=0$ 被 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 割出一块的下侧 S_1，由于

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_1} z^3 ds=0$$

所以 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S+S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\iint_{S+S_1}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$

$$=3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a\rho^4 d\rho$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^5$$

(4) $\iint_S \left(\frac{x^3}{a^2}+yz\right)dydz+\left(\frac{y^3}{b^2}+z^3x^2\right)dzdx+\left(\frac{z^3}{c^2}+x^3y^3\right)dxdy$，$S$ 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (x\ge 0)$ 后侧；

解：补充 $x=0$ 被 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 割下的一块前侧为 S_1，则

$$\iint_{S_1}\left(\frac{x^3}{a^2}+yz\right)dydz+\left(\frac{y^3}{b^2}+z^3x^2\right)dzdx+\left(\frac{z^3}{c^2}+x^3y^3\right)dxdy$$

$$=\iiint_{D_{yz}} yzdydz=bc\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=0$$

由 Green 公式有：$\displaystyle\iint_{S+S_1}\left(\frac{x^3}{a^2}+yz\right)dydz+\left(\frac{y^3}{b^2}+z^3x^2\right)dzdx+\left(\frac{z^3}{c^2}+x^3y^3\right)dxdy$

$$=-3\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$$

$$=-3abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr \qquad \begin{pmatrix} x=ar\cos\theta\sin\varphi & y=br\cos\theta\sin\varphi \\ z=cr\sin\theta\sin\varphi & |J|=abcr^2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{6}{5}\pi abc$$

15．证明由曲面 S 所包围的体积等于 $V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$，式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证明：$\displaystyle\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\frac{1}{3}\iiint_V(1+1+1)dxdydz=\iiint_V dxdydz=V$

16．若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 S，求 $\displaystyle\oint_L\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z\end{vmatrix}$，其中 L 依正方向进行

解：记 $P=\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma \\ y & z\end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma$

$Q=\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x\end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha$

$R=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta \\ x & y\end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta$

则 $\displaystyle\oint_L\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z\end{vmatrix}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz \underline{\underline{\text{Stokes公式}}} \iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$

$$=2\iint_S\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)dS=2\iint_S dS=2S$$

17．设 P，Q，R 有连续的偏导数，且对任意光滑闭曲面 S，有 $\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$

证明：$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$

证明：（反证法）若不然，设在某点 $(x_0,y_0,z_0)\in R^3$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=m\neq 0$，

则由于函数 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 R^3 连续，故 $\exists\rho>0$，使得在

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq\rho^2 \text{内，} \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\geq\frac{m}{2} \quad (m>0)$$

因而在曲线 S：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2$，有

$$0=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\geq\frac{m}{2}\iiint_V dxdydz$$

$$=\frac{m}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho^3>0 \quad \text{矛盾}$$

故原命题成立.

18．设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数，而且以任意点 (x_0,y_0) 为中心，以任意正数 r 为半径的上半圆 $l: x=x_0+r\cos\theta$，$y=y_0+r\sin\theta$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ 恒有 $\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

求证：$P(x,y)\equiv 0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$

证明：$\forall(x_0,y_0)\in R^2$，考虑以 (x_0,y_0) 为内点的闭区域 D，由于 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数，而且 $D\subset R^2$，故 $\exists M>0$，使得 $\left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right|\leq M$，$\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|\leq M$ 在 D 上成立。任取 $r>0$ 且上半圆周 l：$x=x_0+r\cos\theta$，$y=y_0+r\sin\theta$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ 及平行于 x 轴的直线段 $l_1: y=y_0$，$x_0-r\leq x\leq x_0+r$ 完全与 D 内，则 $l+l_1$ 是 D 内的闭围线，由 Cauchy 积分公式得

$$\int_{l_1+l}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

其中 σ 为 $l+l_1$ 所围的闭区域，显然 $\sigma\subset D$，有已知条件有

$$\int_{l_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

即 $\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)dx = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)dx \right| = \left| \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \le \iint\limits_{\sigma} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \right) dxdy \quad \le 2M \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi M r^2$$

对 $\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)dx$，$\exists \xi \in [x_0 - r, x_0 + r]$，使得 $\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)dx = P(\xi, y_0)\cdot 2r$ 代入上式得

$$|\varphi(\xi, y_0)| \le \frac{\pi M}{2} r$$

令 $r \to 0^+$，则 $\xi \to x_0$，$\frac{\pi y}{2} r \to 0$，即得 $|P(x_0,y_0)| = 0$

即 $P(x,y_0) = 0$，由 $(x_0,y_0) \in R^2$ 的任意性，知 $P(x,y) \equiv 0$

因此 $\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \equiv 0$，$\forall r > 0$，$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$，于 σ 上. 特别在 (x_0,y_0)，$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

同样由 (x_0,y_0) 的任意性，$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

§2 积分与路径无关

1．验证下列积分与路径无关，并求它们的值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$

解：$P(x,y)=x-y$，$Q(x,y)=-(x-y)=-y-x$，在全平面有连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

因此积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$ 与路径无关。

所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)=\int_0^1 xdx+\int_0^1(y-1)dy=0$

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\dfrac{ydx-xdy}{x^2}$ 沿在右半平面的路径；

解：$P(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{1}{x}$，在右半平面有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

因此积分 $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\dfrac{ydx-xdy}{x^2}$ 与沿在右半平面的路径无关

所以 $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\dfrac{ydx-xdy}{x^2}=\int_2^1\dfrac{dx}{x}+\int_1^2(-1)dy=-\ln 2-1$

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 沿不通过原点的路径；

解：$P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 有连续的偏导数，且

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$，故 $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 沿不通过原点的路径积分与路径无关

所以 $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_1^6\dfrac{dx}{x}+\int_0^8\dfrac{ydy}{6^2+y^2}=\ln 10$

(4) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}f(x+y)(dx+dy)$，式中 $f(u)$ 是连续函数；

解：$P(x,y)=f(x+y)$，$Q(x,y)=f(x+y)$均在平面有连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=f'(x+y)=\frac{\partial P}{\partial y}$，

故积分 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(dx+dy)$ 与路径无关

所以 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f(a+y)dy$

(5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$，其中 φ，ψ 为连续函数；

解：$P(x,y)=\varphi(x)$，$Q(x,y)=\psi(y)$ 在全平面有连续的偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=0=\frac{\partial P}{\partial y}$

故积分 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$ 与路径无关

所以 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy=\int_2^1 \varphi(x)dx+\int_1^2 \psi(y)dy$

$=\int_1^2 \psi(y)dy-\int_1^2 \varphi(x)dx=\int_1^2 [\psi(x)-\varphi(x)]dx$

(6) $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz$；

解：$yzdx+xzdy+xydz=d(xyz)$，故积分与路径无关，所以

$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz=\int_1^6 6dx+\int_2^1 18dy+\int_3^1 6dz=0$

(7) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz$；

解：$xdx+y^2dy-z^3dz=d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4)$，故积分与路径无关，所以

$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=\frac{5}{12}$

(8) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 。

解：$\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=d(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

在$(x,y,z)\neq(0,0,0)$均成立， 故在区域 $x^2+y^2+z^2>0$ 内，积分与路径无关，所以

$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$(x_1,y_1,z_1)$，$(x_2,y_2,z_2)$在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)=a^2$ 上

与路径无关，且

$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=0$

2．求下列全微分的原函数：

(1) $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$；

解： $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$，$Q(x,y)=x^2-2xy-y^2$ 在全平面有连续的偏导数， 且

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2(x-y)=\dfrac{\partial P}{\partial y}$， 故 $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 且

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy+c$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)dy+c$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+c \qquad \text{（c 为实常数）}$$

(2) $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$

解： $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x$， $Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$ 在全平面上有连续的偏导数，

且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$， 因此知

$\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dx$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，且

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy+c$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)dy+c$$

$$=x^2+y^2\cos x+x^2\cos y-x^2+c$$

$$=y^2\cos x+x^2\cos y+c \qquad \text{（c 为实常数）}$$

(3) $\dfrac{a}{z}dx+\dfrac{b}{z}dy+\dfrac{-by-ax}{z^2}dz$；

解： $P(x,y,z)=\dfrac{a}{z}$， $Q(x,y,z)=\dfrac{b}{z}$， $R(x,y,z)=\dfrac{-by-ax}{z^2}$ 在 $z\neq 0$ 只有连续的偏导数， 且

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=0=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ， $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=-\dfrac{b}{z^2}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$ ， $\dfrac{\partial R}{\partial x}=-\dfrac{a}{z^2}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$ 故在 $z\neq 0$，

$\dfrac{a}{z}dx+\dfrac{b}{z}dy+\dfrac{-by-ax}{z^2}dz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分 ， 实际上

$$\frac{a}{z}dx+\frac{b}{z}dy+\frac{-by-ax}{z^2}dz=\frac{1}{z}d(ax+by)+(ax+by)d(\frac{1}{z})=d(\frac{ax+by}{z})$$

所以 $u(x,y,z)=\dfrac{ax+by}{z}+c$ （c 为实常数）. $(z\neq 0)$

(4) $\left(x^2-2yz\right)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$

解： 原式$=d(\frac{1}{3}x^3)-2(yzdx+xzdy+xydz)+d(\frac{1}{3}y^3)+d(\frac{1}{3}z^3)$

$=d(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz)$

所以 $u(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c$ （c 为实常数）.

(5) $\left(e^x\sin y+2xy^2\right)dx+(e^x\cos y+2x^2y)dy$

解： 原式$=\sin yd(e^x)+y^2d(x^2)+e^xd(\sin y)+x^2d(y^2)$

$=\left[\sin yd(e^x)+e^xd(\sin y)\right]\left[y^2d(x^2)+x^2d(y^2)\right]$

$=d(e^x\sin y)+d(x^2y^2)$

$=d(e^x\sin y+x^2y^2)$

所以全微分的原函数$u(x,y)=e^x\sin y+x^2y^2+c$ （c 为实常数）

(6) $\left(\frac{x}{(x^2-y^2)}-\frac{1}{x}+2x^2\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{(x^2-y^2)^2}+3y^3\right)dy+5z^3dz$

解： 原式$=\frac{xdx-ydy}{(x^2-y^2)^2}-d(\ln(|x|))+d(\frac{2}{3}x^3)+d(\ln|y|)+d(\frac{3}{4}y^4)+d(\frac{5}{4}z^4)$

$=\frac{1}{2}\frac{d(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2}+d(-\ln|x|+\ln|y|+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4)$

$=d\left(\frac{-1}{2(x^2-y^2)}\right)+d(\ln|\frac{y}{x}|+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4)$

$=d[\frac{1}{2(y^2-x^2)}+\ln|\frac{y}{x}|+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4]$

所以全微分的原函数为:

$u(x,y,z)=\frac{1}{2(y^2-x^2)}+\ln|\frac{y}{x}|+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}y^4+\frac{5}{4}z^4+c$，（$y^2\neq x^2$ 且 $x\neq 0$， $y\neq 0$， 即 $y\neq\pm x,x\neq 0,y\neq 0$， c 为实常数）.

3. 函数 $F(x,y)$ 应满足什么条件才能使微分式 $F(x,y)(xdx+ydy)$ 是全微分.

解：$P(x,y)=xF(x,y)$，$Q(x,y)=yF(x,y)$，要使 P,Q 有连续的偏导数，须使 $F(x,y)$ 有连续的偏导数，且要使 $\frac{\partial Q}{\partial x}=yF_x(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}=xF_y(x,y)$，只须 $yF_x(x,y)=xF_y(x,y)$，

即 $y\frac{\partial F}{\partial x}=x\frac{\partial F}{\partial y}$，因此函数 $F(x,y)$ 应满足有连续的偏导数，且 $y\frac{\partial F}{\partial x}=x\frac{\partial F}{\partial y}$ 时，才能使微分式 $F(x,y)(xdx+ydy)$ 是全微分.

4. 验证 $Pdx+Qdy=\frac{1}{2}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ 适合条件 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，其中 A，B，C 为常数，$AC-B^2>0$，求奇点 $(0,0)$ 的循环常数.

证明：$P(x,y)=\frac{-y}{2(Ax^2+2Bxy+Cy^2)}$，$Q(x,y)=\frac{x}{2(Ax^2+2Bxy+Cy^2)}$，在 $Ax^2+2Bxy+Cy^2\neq 0$ 具有连续的偏导数，而由于 $AC-B^2>0$ 可得 A,C 同号 $A\neq 0,且C\neq 0$，

且由 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=A\left[(x+\frac{B}{A}y)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}y^2\right]$ 仅在 $(0,0)$ 为 0，知

$P,Q在(x,y)\neq(0,0)$ 具有连续的偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-Ax^2+Cy^2}{2(Ax^2+2Bxy+Cy^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

以 $(0,0)$ 为心作正方形周界 $L:\begin{cases}x=\pm1, & -1\le y\le 1\\ y=\pm1, & -1\le x\le 1\end{cases}$ 逆时针方向，则由于

$$\oint P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{2(Ax^2-2Bx+C)}+\int_{-1}^{1}\frac{dy}{2(A+2By+Cy^2)}$$

$$+\int_{1}^{-1}\frac{-dx}{2(Ax^2+2Bx+C)}+\int_{1}^{-1}\frac{-dy}{2(A-2By+Cy^2)}=0$$

即 $(0,0)$ 的循环常数为 0.

5. 求 $I=\oint_l\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中 l 是不经过原点的简单闭曲线，取正方向，设 l 围成的区域为 D.

（1）D 不包含原点；

（2）D 包含原点在其内部.

解：由于 $P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，显然 P,Q 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 具有一阶连续偏导数，

且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$，因此

（1）D 不包含原点时，$I=\oint_l \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$，

（2）D 包含原点在其内时，任取 $R>0$，作圆周 $K_R=x^2+y^2=R^2$，正向，

则 $I=\oint_l \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\oint_{K_R}\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{R^2}\oint_{K_R}xdx+ydy=0$

6. 求 $I=\oint_l\left[\dfrac{y}{(x-2)^2+y^2}+\dfrac{y}{(x+2)^2+y^2}\right]dx+\left[\dfrac{2-x}{(2-x)^2+y^2}+\dfrac{-(2+x)}{(2+x)^2+y^2}\right]dy$，其中 L 是不经过 $(-2,\,0)$ 和 $(2,\,0)$ 点的简单闭曲线。

解：$P(x,y)=\dfrac{y}{(x-2)^2+y^2}+\dfrac{y}{(x+2)^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{2-x}{(x-2)^2+y^2}+\dfrac{-(2+x)}{(x+2)^2+y^2}$

则当 $(x,y)\neq(-2,0)$ 且 $(x,y)\neq(2,0)$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{(2-x)^2-y^2}{\left[(x-2)^2+y^2\right]^2}+\frac{(2+x)^2-y^2}{\left[(x-2)^2+y^2\right]^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

设 L 是不经过 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$ 点的简单闭曲线, 若

（1）$(-2,0)$ 与 $(2,0)$ 均在 L 所包围的区域 D 外，则由格林公式，

$$I=\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0$$

（2）$(-2,0)$ 与 $(2,0)$ 均在 L 所包围的区域 D 内，

则分别以 $(-2,0)$ 与 $(2,0)$ 为圆心，以很小的正数 ε 为半径做圆周 k_1，k_2，使圆周及其内部全含于 D，且 k_1 与 k_2 不交，则在由 L，k_1，k_2 为边界的区域上，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，因此

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{K_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\oint_{k_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

而在 k_1 包围区域 D_1 内，$P_1(x,y)=\dfrac{y}{(x-2)^2+y^2}$ 及 $Q_1(x,y)=\dfrac{2-x}{(x-2)^2+y^2}$ 均有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}=\dfrac{\partial P_1}{\partial y}$；

在 k_2 包围区域 D_2 内，$P_2(x,y)=\dfrac{y}{(x+2)^2+y^2}$ 及 $Q_2(x,y)=\dfrac{-2-x}{(x+2)^2+y^2}$ 均有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial Q_2}{\partial x}=\dfrac{\partial P_2}{\partial y}$，因此，得

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{k_1}P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy+\oint_{k_2}P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy$$

$$=\oint_{k_1}\frac{ydx-(2+x)dy}{(x+2)^2+y^2}+\oint_{k_2}\frac{ydx+(2-x)dy}{(2-x)^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{k_1}ydx-(2+x)dy+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{k_2}ydx+(2-x)dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}(-2)dxdy+\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_2}(-2)dxdy=-4\pi$$

（3）$(-2,0)$ 与 $(2,0)$ 一个在 L 包围的区域 D 内，另一个在 D 内，则以在园内的点为圆心，做一个小圆完全包含于 D，同（2）一样可计算得：

$$I=\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-2\pi$$

$$\text{所以有 } I=\begin{cases}0, & (-2,0),(2,0)\text{均在L所包围的区域D外；}\\ -2\pi, & (-2,0),(2,0)\text{一个在D内，另一个在D外；}\\ -4\pi, & (-2,0),(2,0)\text{均在D内；}\end{cases}$$

7. 设 $u(x,y)$ 在单连通区域 D 上有二阶连续偏导数，证明 $u(x,y)$ 在 D 内有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的充要条件是对 D 内的任一简单光滑闭曲线 L，都有 $\oint_L\dfrac{\partial u}{\partial n}ds=0$，其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 L 沿外法线方向的方向导数.

证明：“必要性”

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_L(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha)ds=\oint_L[\frac{\partial u}{\partial x}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]ds$$

$$=\oint_L\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\iint_\sigma(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy=\iint_\sigma 0dxdy=0$$

其中 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 是 L 外法线的方向余弦，σ 为 L 包围的区域.

“充分性”

若在 D 内 (x_0,y_0)，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\neq 0$，则由函数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在 (x_0,y_0) 连续, 故 $\exists\varepsilon>0$，使得当 (x,y) 落入以 (x_0,y_0) 为心, 以 ε 为半径的圆域上（包括边界）时，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}>0$ 或 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}<0$, 故得

$$0=\oint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

$$\begin{cases} > \iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2}\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}dxdy=\frac{\pi\varepsilon^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}>0 \\ < \iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2}\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}dxdy=\frac{\pi\varepsilon^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{(x_0,y_0)}<0 \end{cases}$$ 矛盾,

故 $\forall(x,y)\in D,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

8. 计算积分 $I=\int_L\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的一条不通过原点的光滑曲线，它的方程是 $y=f(x),(-1\le x\le 1)$。

解：设 $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{-(x-y)}{x^2+y^2}$, 则 P，Q 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 具有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad ((x,y)\neq(0,0)), 故$$

(1) 若 $f(0)>0$，则取 $L_1:x^2+y^2=1(y\ge 0)$ 以 A 到 B 的方向, 则由 L 和 L_1^- 围成一条闭曲线, 由格林公式知：

$$\oint\limits_{L+L_1^-}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

即 $I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$=\int_{L_1}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=\int_{L_1}(x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\int_{\pi}^{0}[(\sin\theta+\cos\theta)(-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta)]d\theta=\int_{0}^{\pi}d\theta=\pi$$

（2）若 $f(0)<0$，则取 $L_1: x^2+y^2=1(y\le 0)$ 以 A 到 B 的方向，因此有：

$$I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L_1}(x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}[(\sin\theta+\cos\theta)(-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta)]d\theta$$

$$=-\int_{\pi}^{2\pi}d\theta=-\pi$$

9. 计算积分 $I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$， 其中 L 是被积函数定义域内从点 $(2, 0)$ 至 $(0, 2)$ 的逐段光滑曲线.

解：$P(x,y)=x\ln(x^2+y^2-1)$, $Q(x,y)=y\ln(x^2+y^2-1)$，则 P, Q 在定义域

$D=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<+\infty\}$ 有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2-1}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，这里 D 为二连通区域，$x^2+y^2\le 1$ 是唯一的洞，故在围绕该洞任一路径上逆时针方向积分一周，其值相等，等于该洞的循环常数，不妨取圆周 $C: x^2+y^2=4$, 得循环常数

$$\omega=\oint_C x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy=\oint\ln 3(xdx+ydy)$$

$$=\ln 3\int_0^{2\pi}(2\cos\theta(-2\sin\theta)+4\sin\theta\cos\theta)d\theta=0$$

故积分与路径无关, 采用平行于坐标轴的折线路径,

$$I=\int_0^2 y\ln(3+y^2)dy+\int_2^0 x\ln(3+x^2)dx=0$$

§3 场论初步

1. 求$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2y - 4z$在点$O(0, 0, 0)$，$A(1, 1, 1)$，$B(-1, -1, -1)$的梯度，并求梯度为零的点.

解： $gradu = (2x + 2y - 4,\ 4y + 2x + 2,\ 6z - 4)$，故在$O(0, 0, 0)$，$A(1, 1, 1)$，$B(-1, -1, -1)$的梯度分别为$(-4, 2, -4)$，$(0, 8, 2)$ $(-8, -4, -10)$.

由$gradu = \vec{0} \Rightarrow (2x + 2y - 4,\ 4y + 2x + 2,\ 6z - 4) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 4y + 2 = 0 \\ 6z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

即梯度为零的点为$(5, -3, \frac{2}{3})$.

2. 计算下列向量场$\vec{F}$的散度和旋度：

(1) $\vec{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$;

解： $$div\vec{F} = \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial z} = 0$$

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2(y - z), 2(z - x), 2(x - y)) = 2(y - z, z - x, x - y)$$

（2） $\vec{F} = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$;

解： $div\vec{F} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2yz & xy^2z & xyz^2\end{vmatrix}=(xz^2-xy^2,x^2y-yz^2,y^2z-x^2z)$$

$$=(x(z^2-y^2),y(x^2-z^2),z(y^2-x^2))$$

(3) $\vec{F}=(\dfrac{x}{yz},\dfrac{y}{zx},\dfrac{z}{xy})$;

解: $$div\vec{F}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=\frac{x+y+z}{xyz}$$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{yz} & \dfrac{y}{zx} & \dfrac{z}{xy}\end{vmatrix}=(\frac{y}{xz^2}-\frac{z}{xy^2},\frac{z}{x^2y}-\frac{x}{yz^2},\frac{x}{y^2z}-\frac{y}{x^2z})$$

3. 证明 $\vec{F}=(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z))$ 是有势场并求势函数.

证明：只需证 $yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$ 是全微分。事实上，有

$$yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$$

$$=yzd(x^2)+y^2zdx+yz^2dx+x^2zdy+xzd(y^2)+xz^2dy+x^2ydz+xy^2dz+xyd(z^2)$$

$$=(yzd(x^2)+x^2zdy+x^2ydz)+(y^2zdx+xzd(y^2)+xy^2dz)+(yz^2dx+xz^2dy+xyd(z^2))$$

$$=d(x^2yz)+d(xy^2z)+d(xyz^2)$$

$$=d(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

故 $\vec{F}$ 是有势场，且势函数为 $u(x,y,z)=xyz(x+y+z)+c$（c 为是常数）.

4. 设 $P=x^2+5\lambda y+3yz$, $Q=5x+3\lambda xz-2$，$R=(\lambda+2)xy-4z$.

（1）计算 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$, 其中 L 是螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=ct(0\le t\le 2\pi)$；

解: $$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_0^{2\pi}\{(a^2\cos^2 t+5\lambda a\sin t+3act\sin t)(-a\sin t)+(5a\cos t+3\lambda act\cos t)a\cos t+$$
$$[(\lambda+2)a^2\sin t\cos t-4ct]c\}dt$$
$$=\pi a^2(5-3\pi c)(1-\lambda)-8c^2\pi^2$$

（2）设 $\vec{F}=(P,Q,R)$，求 $rot\vec{F}$；

解：
$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=((\lambda+2)x-3\lambda z,3y-(\lambda+2)y,(\lambda-1)(5-3z))$$

（3）在什么条件下 $\vec{F}$ 为有势场，并求势函数。

解：当 $5\lambda+3z=5+3\lambda z$，$3\lambda x=(\lambda+2)x$，$(\lambda+2)y=3y$ 时，即 $\lambda=1$ 时，$\vec{F}$ 为有势场，这时，

$$Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=(x^2+5y+3yz)dx+(5x+3xz-2)dy+(3xy-4z)dz$$
$$=d(\frac{1}{3}x^3)+5(ydx+xdy)+3(yzdx+xzdy+xydz)-d(2y)-d(2z^2)$$
$$=d(\frac{1}{3}x^3+5xy+3xyz-2y-2z^2)$$

势函数为 $u(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+5xy+3xyz-2y-2z^2+c$ （c 为实常数）

5. 设 φ 为可微函数，$\vec{r}=(x,y,z),r=|\vec{r}|$，求 $grad\varphi(r)$，$div(\varphi(r)\vec{r})$，$rot(\varphi(r)\vec{r})$.

解：
$$grad\varphi(r)=grad\varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$
$$=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$
$$=\varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$div(\varphi(r)\vec{r})=div(\varphi(r)(x,y,z))$$
$$=\varphi'(r)\frac{x^2}{r}+3\varphi(r)+\varphi'(r)\frac{y^2}{r}+\varphi'(r)\frac{z^2}{r}$$
$$=r\varphi'(r)+3\varphi(r)$$

$$rot(\varphi(r)\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z\end{vmatrix}=(0,0,0)=\vec{0}$$

6. 求向量场 $\vec{F}=(-y,x,z)$ 沿曲线 L 的环流量：

（1）L 为 Oxy 平面上的圆周 $x^2+y^2=1, z=0$，逆时针方向；

解：
$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L -ydx+xdy+zdz$$
$$=\int_0^{2\pi}[-\sin\theta(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot\cos\theta]d\theta=2\pi$$

（2）L 为 Oxy 平面上的圆周 $(x-2)^2+y^2=R^2$， $z=0$，逆时针方向；

解：
$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L -ydx+xdy+zdz$$
$$=\int_0^{2\pi}[-R\sin\theta\cdot(-R\sin\theta)+(2+R\cos\theta)\cdot R\cos\theta]d\theta$$
$$=R^2\int_0^{2\pi}d\theta+2R\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=2\pi R^2$$

（3）L 为 Oxy 平面上任一逐段光滑简单闭曲线，它围成的平面区域 D 的面积为 S .

证明 $\vec{F}$ 沿 L 的环流量为 $2S$.

证明：
$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L -ydx+xdy+zdz=\oint_L -ydx+xdy$$
$$=\iint_D[1-(-1)]dxdy=2S$$

（4）设有一平面 $\pi:\pi ax+by+cz=d(c\neq 0)$, 取 π 为上侧， π 上有一逐段光滑简单闭曲线 L，其方向关于 π 为正向. L 围成的平面区域的面积为 S，问 $\vec{F}$ 沿 L 的环流量是什么？

解：
$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_L -ydx+xdy+zdz$$
$$=\iint_S\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & z\end{vmatrix}\cdot d\vec{S}=\iint_S 2dxdy=2S$$

7. 求向量场 $\vec{F}=grad(\arctan\frac{y}{x})$ 沿曲线 L 的环流量:

（1） L 不环绕 z 轴;

（2） L 环绕 z 轴一圈;

（3） L 环绕 z 轴 n 圈.

解: $\vec{F}=grad(\arctan\frac{y}{x})=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0)$

所以 $\vec{F}$ 沿曲线 L 的环流量为 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,

$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, 均在除 $(0,0)$ 外的点具有连续偏导数，且

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$， 故

（1） L 不环绕 z 轴时， L 包围的曲面上不包括 $(0,0)$，由 Stokes 公式，I=0;

（2） L 环绕 Z 轴一圈时，可以 $(0,0)$ 为圆心，ε 为半径作一圆柱面，与 L 包围的曲面 S 的交线为 l，

则在 $L+l^-$ 上，使用 Stokes 公式，有

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon^2d\theta=2\pi$$

（3）当 L 环绕 z 轴 n 圈时，过 L 可作光滑曲 S，同样以 $(0,0)$ 为圆心，ε 为半径作一圆柱面，使与 L 包围的曲面 S 的交线 l 在 L 所包围的曲面内，在 $L+l^-$ 上，使用 Stokes 公式，同样有

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi.$$

8. 设向量场 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 在除原点 $(0,0,0)$ 外有连续的偏导数，在球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 上 $\vec{F}$ 的长度保持一固定值， $\vec{F}$ 的方向与矢径 $\vec{r}=(x,y,z)$ 相同，而且 $\vec{F}$ 的散度恒为 0，证明此向量场为 $\vec{F}=\frac{k}{r^3}\vec{r}$ （k 是常数）.

证明:

9. 设有一数量场 $u(x,y,z)$，除 $(0,0,0)$ 点外有连续的偏导数，其等值面是以原点为中心的球面. 又

数量场的梯度场的散度为零, 证明此数量场与$\frac{c_1}{r}(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$仅差一个常数, 其中$c_1$为某固定常数.

证明:

10. 设G是空间开区域, $u(x,y,z)$在G上有二阶连续的偏导数. 证明$u(x,y,z)$在G内调和的充要条件是对G内任一简单分片光滑曲面S, 都有$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$.