第十八章 极值与条件极值

§1 极值与最小二乘法

1．求下列函数的极大值点和极小值点：

（1） $f(x,y)=(x-y+1)^2$；

（2） $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$；

（3） $f(x,y)=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$；

（4） $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$；

（5） $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ （$0\le x,\ y\le\dfrac{\pi}{2}$）；

（6） $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2$．

解（1）由 $\begin{cases} f_x(x,y)=2(x-y+1)=0, \\ f_y(x,y)=-2(x-y+1)=0, \end{cases}$ 解得稳定点为 $y=x+1$．

而 $f_{xx}=2$， $f_{xy}=-2$， $f_{yy}=2$．

由于 $D=0$，故不能用极值的充分条件判断 f 是否在稳定点取极值，但由于当 $y=x+1$ 时， $f(x,y)=0$，而 $y\neq x+1$ 时 $f(x,y)>0$，因而在 $y=x+1$ 的点处， $f(x,y)$ 取极小值也是最小值 0．

（2）由 $\begin{cases} f_x(x,y)=3ay-3x^2=0, \\ f_y(x,y)=3ax-3y^2=0, \end{cases}$ 解出稳定点为 $(0,0),(a,a)$．

在点 $(0,0)$， $a_{11}=f_{xx}(0,0)=0$， $a_{12}=f_{xy}(0,0)=3a$， $a_{22}=f_{yy}(0,0)=0$，这时，

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-9a^2<0,$$

故 $(0,0)$ 不是极值点．在点 (a,a)，

$$a_{11}=f_{xx}(a,a)=-6a,\quad a_{12}=f_{xy}(a,a)=3a,\quad a_{22}=f_{yy}(a,a)=-6a,$$

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=27a^2>0,\quad a_{11}=-6a<0,$$

故 $f(x,y)$ 在 (a,a) 取极大值 $f(a,a)=a^3$．

(3) 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=x(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})\Big/\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}=0, \\ f_y(x,y)=y(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})\Big/\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}=0, \end{cases}$ 解得稳定点为

$P_1=(0,0)$, $P_2=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$, $P_3=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$, $P_4=(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$, $P_5=(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$.

在点 $P_1=(0,0)$， $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=1$ 且 $D<0$， 故 $f(x,y)$ 在点 $P_1=(0,0)$ 不取极值.

在点 $P_2=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3}a}<0,\ a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3}a}\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_2=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$ 取极大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}ab$.

在点 $P_3=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{4a}{\sqrt{3}a}>0,\ a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{4b}{\sqrt{3}a}\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_3=(\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$ 取极小值 $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}ab$.

在点 $P_4=(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3}a}<0,\ a_{12}=\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3}a}\text{ 且 }D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_4=(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}})$ 取极小值 $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}ab$.

在点 $P_5=(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$，有

$$a_{11}=\frac{-4a}{\sqrt{3a}}<0,\ a_{12}=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ a_{22}=\frac{-4b}{\sqrt{3a}}<0 \text{ 且 } D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4>0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $P_5=(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$ 取极大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}ab$.

（4）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=e^{2x}(1+2x+4y+2y^2)=0, \\ f_y(x,y)=2e^{2x}(1+y)=0, \end{cases}$ 解得稳定点 $(\frac{1}{2},-1)$. 而

$$a_{11}=f_{xx}(\frac{1}{2},-1)=2e>0,\ a_{22}=f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=2e>0,\ a_{12}=f_{xy}(\frac{1}{2},-1)=0,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4e^2>0$，所以， $f(x,y)$ 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 取极小值为 $-\frac{1}{2}e$.

（5）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=\cos x-\sin(x-y)=0, \\ f_y(x,y)=-\sin y+\sin(x-y)=0, \end{cases}$ 解得稳定点为 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$.

$$a_{11}=f_{xx}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0,\ a_{22}=f_{yy}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0,\ a_{12}=f_{xy}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\frac{9}{4}>0$，故 $f(x,y)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 取极大值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

（6）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x(\sqrt{x^2+y^2}-1)\Big/\sqrt{x^2+y^2}=0, \\ f_y(x,y)=2y(\sqrt{x^2+y^2}-1)\Big/\sqrt{x^2+y^2}=0, \end{cases}$ 解得稳定点为 $x^2+y^2=1$ 上的所有点，而 $P_1(0,0)$ 是导数不存在的点.

由于 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点取值 0，而 $f(x,y)\ge 0$，故 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点取极小值也是最小值 0，而在 $P_1(0,0)$，

$$f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2\le 1=f(0,0),\quad \forall\sqrt{x^2+y^2}<2,$$

因而 $P_1(0,0)$ 是极大值点，极大值为 1.

2．已知 $y=ax^2+bx+c$，观测得一组数据 $(x_i,y_i),\ i=1,2,\cdots,n$，利用最小二乘法，求系数 a,b,c 所满足的三元一次方程组.

解 记 $f(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$，为求其最小值，分别对 a,b,c 求偏导数，并令它们等于 0，即

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i^2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)x_i=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0,$$

即系数 a,b,c 所满足的三元一次方程组为

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\ , \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ , \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn=\sum_{i=1}^{n}y_i\ . \end{cases}$$

3．已知平面上 n 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

试求一点，使它与这 n 个点距离的平方和最小．

解 设平面点为 $P(x,y)$，则它到 n 个点距离的平方和为

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2],$$

由函数极值的条件得，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=0,$$

得稳定点 $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i)=(\bar{x},\bar{y})$．由于实际问题有最小值，而稳定点又唯一，故稳定点即为最小值点．因而点 $(\bar{x},\bar{y})$ 与这 n 个点距离的平方和最小．

4．求下列函数在指定范围 D 内的最大值和最小值：

（1） $f(x,y)=x^2-y^2$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$；

（2） $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$；

（3） $f(x,y,z)=(ax+by+cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$，其中 $a^2+b^2+c^2>0$， $D=R^3$．

解（1）令$\begin{cases} f_x(x,y)=2x=0, \\ f_y(x,y)=2y=0, \end{cases}$ 解得 D 内的唯一稳定点 $(0,0)$． 又因为，

$$a_{11}=f_{xx}(0,0)=2>0,\ a_{22}=f_{yy}(0,0)=-2<0,\ a_{12}=f_{xy}(0,0)=0,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-4<0$，故在 $(0,0)$ 点，$f(x,y)$ 达不到极值，在边界 $x^2+y^2=4$ 上，

$$f(x,y)=x^2-y^2=x^2-(4-x^2)=2(x^2-2)=\varphi(x),\ |x|\le 2,$$

令 $\varphi'(x)=4x=0$，得唯一的稳定点 $x=0$，且 $\varphi''(x)=4>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 取极小值，这就是函数 $f(x,y)$ 的最小值，其值为 $f(0,\pm 2)=-4$，在边界点 $x=\pm 2$ 时 $y=0$，$f(\pm 2,0)=4$，即函数在 $(\pm 2,0)$ 取最大值 4．

（2）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x-y=0, \\ f_y(x,y)=2y-x=0, \end{cases}$ 解得唯一的稳定点 $(0,0)$，从而由

$$a_{11}=f_{xx}(0,0)=2>0,\ a_{22}=f_{yy}(0,0)=2>0,\ a_{12}=f_{xy}(0,0)=-1,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=5>0$ 故 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点，也是最小值点，最小值为 $f(0,0)=0$． 而在边界 $|x|+|y|\le 1$ 上，在 $y=1-x,\ 0\le x\le 1$，

$$f(x,y)=(1-\frac{3}{2}x)^2+\frac{3}{4}x^2,$$

在 $x=0$ 或 $x=1$ 取最大值 $f(1,0)=f(0,1)=1$，在 $x=\frac{1}{2}$ 取最小值 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$．

在 $y=1+x,\ -1\le x\le 0$，

$$f(x,y)=x^2+x+1,$$

在 $x=0$ 或 $x=-1$ 取最大值 $f(-1,0)=f(0,1)=1$，在 $x=\frac{1}{2}$ 取最小值 $f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$．

在 $y=-1-x,\ 0\le x\le 1$，

$$f(x,y)=x^2-x+1,$$

在 $x=0$ 或 $x=-1$ 取最大值 $f(-1,0)=f(0,-1)=1$，在 $x=-\frac{1}{2}$ 取最小值 $f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$．

总之，在 D 上，$f(x,y)$ 取最小值 $f(0,0)=0$，取最大值 1．

（3）令

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=[a-2x(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0, \\ f_y(x,y,z)=[b-2y(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0, \\ f_z(x,y,z)=[c-2z(ax+by+cz)]e^{-(x^2+y^2+z^2)}=0, \end{cases}$$

解得稳定点为

$$P_1\left(\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\right),$$

$$P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},-\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}},-\frac{c}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}\right).$$

可以通过求在每一个稳定点的 Hesse 矩阵，知 $f(x,y,z)$ 在 P_1 取极大值，在 P_2 取极小值．由于极大值点与极小值点均唯一，故极大值点与极小值就是最大值点与最小值点，最大值为 $f(P_1)=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$，最小值为 $f(P_2)=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$．

5．求证：

（1） $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ 在 R^2 有最小值，无最大值．其中 $A>0, B^2<AC$；

（2） $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 在 $0<x,y<+\infty$ 有最小值，无最大值．

证明（1）令 $\begin{cases} f_x(x,y)=2Ax+2By+2D=0, \\ f_y(x,y)=2Bx+2Cy+2E=0, \end{cases}$

由于

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2>0,$$

故以上方程组有唯一一组解，即有唯一稳定点 $P_0(x_0,y_0)$．又因为

$$a_{11}=f_{xx}(P_0)=2A>0,\ a_{22}=f_{yy}(P_0)=2C,\ a_{12}=f_{xy}(P_0)=2B,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=4B^2-4AC<0$，故 $f(x,y)$ 在 P_0 取极小值．由于极小值点唯一，因而就是最小值点，所以 $f(x,y)$ 在 R^2 有最小值，无最大值．

（2）令

$$\begin{cases} f_x(x,y)=y-\dfrac{1}{x^2}=0, \\ f_y(x,y)=x-\dfrac{1}{y^2}=0, \end{cases}$$

解得唯一稳定点 $P_0(1,1)$，又因为

$$a_{11}=f_{xx}(P_0)=2>0,\ a_{22}=f_{yy}(P_0)=2>0,\ a_{12}=f_{xy}(P_0)=1,$$

且 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$，所以 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 在 $P_0(1,1)$ 取极小值，又极小值点唯一，故就是最小值点，即 $f(x,y)$ 在 $0<x,\ y<+\infty$ 有最小值，无最大值.

6．设 $F(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，并且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

讨论由 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值的必要和充分条件，再由

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

所确定的 $z=f(x,y)$ 的极值.

解 取极值的必要条件为在 (x_0,y_0)，有

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=-\dfrac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}=0, \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=-\dfrac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}=0, \end{cases}$$

即 $F_x(x_0,y_0,z_0)=0$ 且 $F_y(x_0,y_0,z_0)=0$ 为在 (x_0,y_0) 取得极值的必要条件.

在 $F(x,y,z)=0$ 两边对 $x,\ y$ 二次求导，有

$$\begin{cases} F_x+F_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ F_y+F_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{xx}+F_{xy}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zx}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,, \\ F_{xy}+F_{xz}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zy}\dfrac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\,, \\ F_{yy}+F_{yz}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zy}\dfrac{\partial z}{\partial y}+F_{zz}(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2+F_z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,, \end{cases}$$

并利用在(x_0,y_0)有，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，就有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}\,,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}\,,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}\,,$$

因此在(x_0,y_0)，隐函数$z=f(x,y)$取极值的充分条件为

$$(-\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})(-\frac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})-(-\frac{F_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)})^2$$

$$=\frac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)}{F_z^2(x_0,y_0,z_0)}>0\,,$$

即 $F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)>0$． 且当 $-\dfrac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}>0$ （或 $-\dfrac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}>0$）时，取极小值， 当$-\dfrac{F_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}<0$（或$-\dfrac{F_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}<0$）时，取极大值．

即当$F_{xx}(x_0,y_0,z_0)F_{yy}(x_0,y_0,z_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0,z_0)>0$时取极值，当上式为负时，不取极值，为0时不定．

设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$，则令

$$\begin{cases} F_x(x,y,z)=2x-2=0\,, \\ F_y(x,y,z)=2y+2=0\,, \end{cases}$$

解出稳定点$(1,-1)$，对应空间中的点为$P_1(1,-1,6)$与$P_2(1,-1,-2)$，且

$$F_{xx}=2,\ F_{xy}=0,\ F_{yy}=2\,,$$

因为 $D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=4>0$（在 P_1 与 P_2），且 $F_z(P_1)=(2z-4)|_{P_1}=8$，$F_z(P_2)=(2z-4)|_{P_2}=-8$，所以有：

由于 $-\dfrac{F_{xx}(P_1)}{F_z(P_1)}=-\dfrac{2}{8}<0$，故在 $P_1(1,-1,6)$ 取极大值 6；而 $-\dfrac{F_{xx}(P_2)}{F_z(P_2)}=\dfrac{2}{8}>0$，故在 $P_2(1,-1,-2)$ 取极小值 -2.

7．求下列隐函数的极大值和极小值：

（1）$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$；

（2）$z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$.

解（1）设 $F(x,y,z)=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2-3$. 则由

$$\begin{cases}F_x(x,y,z)=2(x+y)+2(z+x)=0,\\ F_y(x,y,z)=2(x+y)+2(z+y)=0,\\ F(x,y,z)=0,\end{cases}$$

得到两个稳定点 $P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$，$P_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. 因为 $F_{xx}=4, F_{xy}=2, F_{yy}=4$，所以 $D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=12>0$，且

$$F_z(P_1)=[2(y+z)+2(z+x)]|_{P_1}=-4,\quad F_z(P_2)=[2(y+z)+2(z+x)]|_{P_2}=4,$$

因此，$-\dfrac{F_{xx}(P_1)}{F_z(P_1)}=1>0$，故在 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 取极小值 $-\frac{3}{2}$；$-\dfrac{F_{xx}(P_2)}{F_z(P_2)}=-1<0$，故在 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 取极大值 $-\frac{1}{2}$.

（2）设 $F(x,y,z)=z^2+xyz-x^2-xy^2-9$，由方程

$$\begin{cases}F_x(x,y,z)=yz-2x-y^2=0,\\ F_y(x,y,z)=xz-2xy=0,\\ F(x,y,z)=0,\end{cases}$$

解得稳定点为 $P_{1,2}(0,0,\pm3)$，$P_{3,4}(0,\pm3,\pm3)$，$P_{5,6}(1,\pm\sqrt{2},\pm2\sqrt{2})$，且

$$F_{xx}=-2,\ F_{xy}=z-2y,\ F_{yy}=-2x,$$

在点 $P_1(0,0,3)$，有 $F_{xx}(P_1)=-2, F_{xy}(P_1)=3, F_{yy}(P_1)=0$，$D=-9<0$，故函数在 $P_1(0,0,3)$ 不取极值；

在点 $P_2(0,0,-3)$，有 $F_{xx}(P_2)=-2, F_{xy}(P_2)=-3, F_{yy}(P_2)=0$， $D=-9<0$，故函数在 $P_2(0,0,-3)$ 不取极值；

在点 $P_3(0,3,3)$，有 $F_{xx}(P_3)=-2, F_{xy}(P_3)=-3, F_{yy}(P_3)=0$， $D=-9<0$，故函数在 $P_3(0,3,3)$ 不取极值；

在点 $P_4(0,-3,-3)$，有 $F_{xx}(P_4)=-2, F_{xy}(P_4)=3, F_{yy}(P_4)=0$，$D=-9<0$，故函数在 $P_4(0,-3,-3)$ 也不取极值；

在点 $P_5(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$，有 $F_{xx}(P_5)=-2, F_{xy}(P_5)=0, F_{yy}(P_5)=-2$，$D=4>0$，而且 $F_z(P_5)=(2z+xy)]|_{P_5}=5\sqrt{2}$，因而

$$-\frac{F_{xx}(P_5)}{F_z(P_5)}=\frac{1}{5}\sqrt{2}>0,$$

故函数在 $P_5(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 取极小值 $2\sqrt{2}$；

在点 $P_6(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，有 $F_{xx}(P_6)=-2, F_{xy}(P_6)=0, F_{yy}(P_6)=-2$， $D=4>0$，而且 $F_z(P_6)=(2z+xy)|_{P_6}=-5\sqrt{2}$，因此

$$-\frac{F_{xx}(P_6)}{F_z(P_6)}=-\frac{1}{5}\sqrt{2}<0,$$

所以，函数在 $P_6(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ 取极大值 $-2\sqrt{2}$.

8．在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求出面积为最大的三角形．

解 设三角形其中两边长为 x, y，则另一边长为 $2p-x-y$，面积为

$$s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-(2p-x-y))}=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)},$$

由于 s 与 s^2 的最值点相同，而

$$s^2=p(p-x)(p-y)(x+y-p)\equiv F(x,y),$$

令

$$\begin{cases}F_x(x,y)=p(p-y)(2p-2x-y)=0,\\ F_y(x,y,z)=p(p-x)(2p-x-2y)=0,\end{cases}$$

解得稳定点$(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$．由于驻点唯一，实际问题又有最大值，故最大值点为$(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$，这时$z=\frac{2p}{3}$，即在已知周长为$2p$的一切三角形中，面积最大的为等边三角形．

9．有一块铁皮，宽$b=24cm$，要把它的两边折起做成一个槽，使得容积最大，求两边的倾角α和折起的宽度x（见下图）．

解 要使容积最大，只要使折起的横截面积s最大．而

$$s=\frac{1}{2}x\sin\alpha(24-2x+24-2x+2x\cos\alpha).$$

由极值的必要条件

$$\begin{cases}s_x=(24-4x+2x\cos\alpha)\sin\alpha=0,\\ s_\alpha=24x\cos\alpha+x^2\cos2\alpha-2x^2\cos\alpha=0,\end{cases}$$

解得稳定点为$(8,\frac{\pi}{3})$，由于稳定点唯一，实际又有最大值，故最大值点为$(8,\frac{\pi}{3})$，即两边的倾角$\alpha=\frac{\pi}{3}$，折起的宽度$x=8cm$时，容积最大．

§2 条件极值

1．求下列函数在给定条件下的极值：

（1）$f=x+y$，若$x^2+y^2=1$；

（2）$f=x^2+y^2$，若$x+y-1=0$；

（3）$f=x-2y+2z$，若$x^2+y^2+z^2=1$；

（4）$f=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，若$x+y=2$；

（5）$f=xyz$，若$x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$；

（6）$f=ax^2+by^2+2hxy$，若$x^2+y^2=1$；

（7）$f=x^2+y^2+z^2$，若$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$，$lx+my+nz=0$．

解（1）作 Lagrange 函数$L(x,y)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$，令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0,\\ L_y=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

由前两式得 $x=y$，代入最后一式解得稳定点 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 与 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$．

下面判别稳定点是极值点．记 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F_y(x,y)=2y$，在 P_1，P_2 均不等于 0，故方程 $x^2+y^2=1$ 在稳定点 P_1 和 P_2 附近均可唯一地确定可微函数 $y=y(x)$．令 $g(x)=x+y(x)$，由约束条件得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，再由复合函数的链式法则有

$$\frac{dg}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1-\frac{x}{y},\quad \frac{d^2g}{dx^2}=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{1}{y^3},$$

故函数 g 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点有，$\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left.-\frac{1}{y^3}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}<0$，因此 $g(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极大值，这等价于 $f=x+y$ 在 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处取得条件极大值 $f(P_1)=\sqrt{2}$；

函数 g 在 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 点有，$\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left.-\frac{1}{y^3}\right|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}>0$，因此 $g(x)$ 在 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取极小值，这等价于 $f=x+y$ 在 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处取得条件极小值 $f(P_2)=-\sqrt{2}$．

（2）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$，由

$$\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0, \\ L_y=2y+\lambda=0, \\ x+y-1=0, \end{cases}$$

由前两式得 $x=y=-\frac{\lambda}{2}$，代入第三式得 $x=y=\frac{1}{2}$，即稳定点 $P_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$．

记 $F(x,y)=x+y-1$，则 $F_y(x,y)=1\neq 0$，故方程 $x+y-1=0$ 在稳定点附近可唯一地确定可微函数 $y=y(x)$，令 $g(x)=x^2+y^2(x)$，由约束条件得 $\frac{dy}{dx}=-1$，所以

$$\frac{dg}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}=2x-2y,\quad \frac{d^2g}{dx^2}=2-2\frac{dy}{dx}=4>0,$$

所以函数 g 在 $x=\frac{1}{2}$ 取极小值，这等价于 $f=x^2+y^2$ 在 $P_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处取得条件极小值 $f(P_0)=\frac{1}{2}$.

（3）作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，由

$$\begin{cases} L_x = 1+2\lambda x=0\,, \\ L_y = -2+2\lambda y=0\,, \\ L_z = 2+2\lambda z=0\,, \\ x^2+y^2+z^2=1\,, \end{cases}$$

由前三式得 $y=-z=-2x$，代入第四个方程得稳定点 $P_1(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$， $P_2(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_z(x,y,z)=2z$ 在 P_1， P_2 均不等于 0，故方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 在稳定点 P_1， P_2 附近均可唯一地确定可微函数 $z=z(x,y)$，令

$$g(x,y)=x-2y+2z(x,y)\,,$$

由约束条件得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$，由复合函数链式法则，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1+2\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{2x}{z}\,,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-2+2\frac{\partial z}{\partial y}=-2-\frac{2y}{z}\,,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{2z-2x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{2(x^2+z^2)}{z^3}\,,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=-\frac{-2x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{2xy}{z^3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\frac{2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=-\frac{2(y^2+z^2)}{z^3}\,,$$

故函数 g 在 $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{15}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -6 \end{vmatrix}=18>0\,,$$

且 $a_{11}=-\frac{15}{4}<0$，因此 $g(x,y)$ 在 $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 处取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $P_1(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 处取得条件极大值 $f(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})=3$；

函数 g 在 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{15}{4} & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & 6 \end{vmatrix} = 18 > 0,$$

且 $a_{11} = \dfrac{15}{4} > 0$，故 $g(x,y)$ 在 $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$ 处取极小值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $P_2(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})$ 处取得条件极小值 $f(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}) = -3$.

（4）作 Lagrange 函数 $L(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \lambda(x+y-2)$，由

$$\begin{cases} L_x = -\dfrac{1}{x^2} + \lambda = 0, \\ L_y = -\dfrac{1}{y^2} + \lambda = 0, \\ x+y-2=0, \end{cases}$$

由前两式得 $\lambda = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow x^2 = y^2$，即 $y = \pm x$，再以最后一式得 $x = y = 1$（当 $y=-x$ 时无解），得稳定点 $(1,1)$.

记 $F(x,y) = x+y-2$，则 $F_y(x,y) = 1 \neq 0$，故方程 $x+y-2=0$ 在稳定点附近可唯一确定可微函数 $y = y(x)$，令 $g(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y(x)}$，由约束条件得 $\dfrac{dy}{dx} = -1$，所以，

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2(x)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^3} = \frac{2}{y^3} + \frac{2}{x^3},$$

在 $x=1$ 有，$\left.\dfrac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=1} = 4 > 0$，故函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 取极小值，这等价于 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处取条件极小值 $f(1,1) = 2$.

（5）作 Lagrange 函数 $L(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(x+y+z)$，由于

$$\begin{cases} L_x = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \\ L_y = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ L_z = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0, \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \\ x+y+z=0, \end{cases}$$

用前三式得 $x=y=z$，或 $x=y=2\lambda_1$，或 $x=z=2\lambda_1$，或 $y=z=2\lambda_1$． $x=y=z$ 不适合后两式，故有 $x=y=2\lambda_1$，或 $x=z=2\lambda_1$，或 $y=z=2\lambda_1$，这时，

$$x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad z=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}，$$

或

$$x=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad y=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}，$$

或

$$y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}，\quad x=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}，$$

由 $f(x,y,z)=xyz$,及 $x^2+y^2+z^2=1$，$x+y+z=0$ 关于 x, y, z 的对称性知，只须考虑两点 $P_1(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}.-\frac{2}{\sqrt{6}})$ 与 $P_2(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$．下面判定稳定点是否极值点.

若记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，$G(x,y,z)=x+y+z$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(y-z)，$$

在 P_1 ，P_2 点均不等于 0，故方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在两个稳定点 P_1 ，P_2 附近可唯一的确定可微函数组 $y=y(x), z=z(x)$，令 $g(x)=xy(x)z(x)$，由约束条件得

$$\frac{dy}{dx}=yz+\frac{x-z}{z-y}，\quad \frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z-y}，$$

由复合函数链式法则得

$$\frac{dg}{dx}=yz+x\frac{dy}{dx}z+xy\frac{dz}{dx}=\frac{yz^2-y^2z+x^2z-xz^2+xy^2-x^2y}{z-y}，$$

$$\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{4(xz^3+yz^3-y^3z-xy^3-x^2y^2)+2(y^4-z^4)+12xyz(y-z)}{(z-y)^3}.$$

在 $P_1(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$ 对应的 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$，有 $\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{83}{81}\sqrt{6}>0$，函数 g 在 $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 取极小值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 P_1 点取条件极小值

$$f(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})=-\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

在 $P_2(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$ 对应 $x=-\frac{1}{\sqrt{6}}$，有 $\left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=-\frac{1}{\sqrt{6}}}=-\frac{83}{81}\sqrt{6}<0$，故函数 g 在 $x=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 P_2 点取条件极大值

$$f(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=\frac{\sqrt{6}}{18}.$$

同样函数 $f(x,y,z)$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ 两点取条件极小值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$，在 $(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 与 $(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})$ 两点取条件极大值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

（6）作 Lagrange 函数 $L(x,y)=ax^2+by^2+2hxy+\lambda(x^2+y^2-1)$，令

$$\begin{cases} L_x=2ax+2hy+2\lambda x=0, \\ L_y=2by+2hx+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

由 $x^2+y^2=1$ 知 x,y 不全为 0，故前两式构成的 x,y 的线性方程组的系数矩阵必等于 0，即

$$A=\begin{vmatrix} a+\lambda & h \\ h & b+\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+(a+b)\lambda+ab-h^2=0. \qquad (*)$$

当 $(a-b)^2+4h^2=0$，即当 $a=b$ 且 $h=0$ 时，所研究的函数为常数 a，当 $(a-b)^2+4h^2>0$ 时方程（*）必有两个不等的实根，记为 λ_1,λ_2 $(\lambda_1>\lambda_2)$，由前面的方程组可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1+b)}{\sqrt{h^2+(\lambda_1-b)^2}},\quad y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1+a)}{\sqrt{h^2+(\lambda_1-a)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2+b)}{\sqrt{h^2+(\lambda_2+b)^2}},\quad y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2+a)}{\sqrt{h^2+(\lambda_2+a)^2}},$$

相应地，有 $f(x_1,y_1)=ax_1^2+by_1^2+2hx_1y_1=(ax_1+hy_1)x_1+(hx_1+by_1)y_1$，由方程可得

$$ax_1+hy_1=-\lambda_1x_1,\ hx_1+by_1=-\lambda_1y_1,$$

故得

$$f(x_1,y_1)=\lambda_1 x_1{}^2+\lambda_1 y_1{}^2=-\lambda_1 .$$

同理可得 $f(x_2,y_2)=-\lambda_1$，而 $f(x_3,y_3)=f(x_4,y_4)=-\lambda_2$.

由于函数 f 在单位圆上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值且不相等．这里稳定点取四个 $(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$，而且

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)=-\lambda_1,\quad f(x_3,y_3)=f(x_4,y_4)=-\lambda_2,$$

于是当 $x=x_{1,2}$，$y=y_{1,2}$ 时，函数 $f=ax^2+by^2+2hxy$ 取最小值 $-\lambda_1$，因而也是极小值；当 $x=x_{3,4}$，$y=y_{3,4}$ 时，函数 $f(x,y)$ 取最大值 $-\lambda_2$，因而也是极大值.

（7）照通常作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1[(x^2+y^2+z^2)^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2]$$

$$+\lambda_2(lx+my+nz),$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)x-a^2x]+l\lambda_2=0, \\ L_y=2y+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)y-b^2y]+m\lambda_2=0, \\ L_z=2z+2\lambda_1[2(x^2+y^2+z^2)z-c^2z]+n\lambda_2=0, \\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2, \\ lx+my+nz=0. \end{cases}$$

该方程组解起来颇难．因此，采用如下方法先化去一个条件.

由条件 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$，得到

$$x^2+y^2+z^2=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2},$$

求 $f=x^2+y^2+z^2$ 的极值可以看作求 $g=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ 的极值.

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\lambda(lx+my+nz)$，令

$$\begin{cases} L_x=2a^2x+\lambda l=0, \\ L_y=2b^2y+\lambda m=0, \\ L_z=2c^2z+\lambda n=0, \\ lx+my+nz=0, \end{cases}$$

得唯一稳定点 $(0,0,0)$，很显然在点 $(0,0,0)$ 处取得极小值 $f(0,0,0)=0$.

2. 求 $f=x^m y^n z^p$ 在条件 $x+y+z=a$，$a>0$，$m>0$，$n>0$，$p>0$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 之下的最大值.

解 作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=x^m y^n z^p+\lambda(x+y+z-a)$，令

$$\begin{cases} L_x=mx^{m-1}y^n z^p+\lambda=0, \\ L_y=nx^m y^{n-1}z^p+\lambda=0, \\ L_z=px^m y^n z^{p-1}+\lambda=0, \\ x+y+z=a, \end{cases}$$

由前三个方程得 $x^m y^n z^p=-\dfrac{\lambda x}{m}=-\dfrac{\lambda y}{n}=-\dfrac{\lambda z}{p}$. 设 $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}=k$，则由

$$a=x+y+z=k(m+n+p),$$

得到 $k=\dfrac{a}{m+n+p}$，故 $x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$，$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$，记对应点为 P_0，则 P_0 为稳定点. f 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦线的部分，边界由三条直线

$$\begin{cases} x+y=a, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=a, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=a, \\ x=0 \end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时，显然 $f\to 0$. 因此，函数 f 在区域内取得最大值. 由于稳定点仅一个 P_0，故就是最大值点. 即当 $x=\dfrac{ma}{m+n+p}$，$y=\dfrac{na}{m+n+p}$，$z=\dfrac{pa}{m+n+p}$ 时，函数 f 取最大值 $f(P_0)=\dfrac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

3. 求函数 $z=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在条件 $x+y=l$（$l>0$，$n\ge 1$）之下的极值，并证明：当 $a\ge 0$，$b\ge 0$，$n\ge 1$ 时

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}.$$

解 设 $L(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-l)$，令

$$\begin{cases} L_x=nx^{n-1}/2+\lambda=0, \\ L_y=ny^{n-1}/2+\lambda=0, \\ x+y=l, \end{cases} \quad \Rightarrow x=y=\frac{l}{2}.$$

f 函数定义域显然有 $x\ge 0$ 且 $y\ge 0$，故而将点 $(\frac{l}{2},\frac{l}{2})$ 与边界点 $(0,l),(l,0)$ 的函数值进行比较

$$f(0,l)=f(l,0)=\frac{1}{2}l^n>(\frac{l}{2})^2=f(\frac{l}{2},\frac{l}{2})\text{（}n\ge 1\text{），}$$

即知函数 $f=z(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，当 $x+y=l$ 时的最小值为 $(\frac{l}{2})^n$，即有 $\frac{x^n+y^n}{2}\ge(\frac{l}{2})^n$（在 $x+y=l$，$x\ge 0$，$y\ge 0$ 时）.

下面证明 $(\frac{a+b}{2})^n\le\frac{a^n+b^n}{2}$（$a\ge 0$，$b\ge 0$，$n\ge 1$ 时）.

$a=b=0$ 时，显然．$a\ge 0$，$b\ge 0$ 且 a,b 不同时为 0 时，令 $a+b=l$，则 $l>0$，于是由前一步知 $\frac{a^n+b^n}{2}\ge(\frac{l}{2})^n=(\frac{a+b}{2})^n$.

4．求表面积一定而体积最大的长方体.

解　设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，则体积 $V=xyz$，而设其表面积为 s，则 $2(xy+xz+yz)=s$（常数）．令 $L(x,y,z)=xyz+\lambda[2(xy+xz+yz)-s]$，从方程组

$$\begin{cases}L_x=yz+2\lambda(y+z)=0,\\ L_y=xz+2\lambda(x+z)=0,\\ L_z=xy+2\lambda(x+y)=0,\\ 2(xy+xz+yz)=s,\end{cases}$$

解出

$$x=y=z=\sqrt{\frac{s}{6}}.$$

实际问题有最大值，稳定点又唯一，故稳定点就是最大值点．即表面积一定而体积最大的长方体是正方体.

5．求体积一定而表面积最小的长方体.

解　设长方体的三边长分别为 x,y,z，则其表面积为

$$s=2(xy+xz+yz)$$

其体积为 V（常数），则 $xyz=V$.

作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z)=2(xy+xz+yz)+\lambda(xyz-V),$$

$$\begin{cases} L_x = 2(y+z)+\lambda yz = 0\,, \\ L_y = 2(x+z)+\lambda xz = 0\,, \\ L_z = 2(x+y)+\lambda xy = 0\,, \\ xyz = V\,, \end{cases}$$

解出

$$x = y = z = \sqrt[3]{V}\,.$$

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，故稳定点就是最小值点．即体积一定而表面积最小的长方体为正方体．

6．求圆的外切三角形中面积最小者．

解 设未知量如图所示．圆的半径为r（常数），外切三角形面积为S，

$$S = r(x+y+z)\,,$$

满足条件$\arctan\dfrac{r}{x}+\arctan\dfrac{r}{y}+\arctan\dfrac{r}{z}=\dfrac{\pi}{2}$.

作 Lagrange 函数$L(x,y,z)=r(x+y+z)+\lambda(\arctan\dfrac{r}{x}+\arctan\dfrac{r}{y}+\arctan\dfrac{r}{z}-\dfrac{\pi}{2})$，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = r-\dfrac{r\lambda}{x^2+r^2}=0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = r-\dfrac{r\lambda}{y^2+r^2}=0\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = r-\dfrac{r\lambda}{z^2+r^2}=0\,, \\ \arctan\dfrac{r}{x}+\arctan\dfrac{r}{y}+\arctan\dfrac{r}{z}=\dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

由前三个方程得$x=y=z$，代入第四个方程解得$x=y=z=\sqrt{3}r$.

由于稳定点唯一，且实际问题又有最小值．故稳定点就是最小值点．即圆的外切三角形中面积最小者是等边三角形．

7．长为a的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆．这两段的长各为多少时，它们所围正方形面积和圆面积之和最小．

解 设两段长为x,y，则$x+y=a$，围成的正方形和圆面积之和为

$$A=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4\pi}\,.$$

作 Lagrange 函数

$$L(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4\pi}+\lambda(x+y-a)\,,$$

由方程组

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{x}{8} + \lambda = 0, \\ L_y = \dfrac{y}{2\pi} + \lambda = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$

解出 $x = \dfrac{4a}{4+\pi}$， $y = \dfrac{\pi a}{4+\pi}$．

$P_0(\dfrac{4a}{4+\pi}, \dfrac{\pi a}{4+\pi})$ 为唯一稳定点，实际问题有最小值，因此稳定点就是最小值点．即当切成的两段的长度比为 $4:\pi$，且其中长是一段围成正方形，短的一段围成圆时，所围正方形和圆面积之和最小．

8．求原点到两平面 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ 的交线的最短距离．

解 设二平面交线上的点为 (x, y, z)，则原点到该点的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

d 在约束条件 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$，$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ 下的最小值点与 $\dfrac{d^2}{2}$ 在相同约束条件下的最小值点相等．作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2),$$

令

$$\begin{cases} L_x = x + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0, \\ L_y = y + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = 0, \\ L_z = z + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程得出 x, y, z 代入后两个方程解出 λ_1, λ_2，因此得 x, y, z 的唯一值．

设 $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = A_1$， $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = A_2$， $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = B$，则有

$$x = \frac{(a_1d_2 + a_2d_1)B - a_1d_1A_2 - a_2d_2A_1}{A_1A_2 - B^2} \equiv x_0,$$

$$y=\frac{(b_1d_2+b_2d_1)B-b_1d_1A_2-b_2d_2A_1}{A_1A_2-B^2}\equiv y_0,$$

$$z=\frac{(c_1d_2+c_2d_1)B-c_1d_1A_2-c_2d_2A_1}{A_1A_2-B^2}\equiv z_0,$$

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，故稳定点就是最小值点，最短距离为

$$d_{\min}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}.$$

9．求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

解 设抛物线上的点为 (x_1,y_1)，直线上的点为 (x_2,y_2)，则 $y_1=x_1^2$，$x_2-y_2=1$，两点之间的距离为 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

作 Lagrange 函数

$L(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-1)$，令

$$\begin{cases} L_{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}-2\lambda_1x_1=0, \\ L_{y_1}=\dfrac{y_1-y_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}+\lambda_1=0, \\ L_{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}+\lambda_2=0, \\ L_{y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}-\lambda_2=0, \\ y_1=x_1^2, \\ x_2-y_2=1, \end{cases}$$

解出 $x_1=\frac{1}{2}$，$y_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{7}{8}$，$y_2=-\frac{1}{8}$ 为唯一稳定点.

由于稳定点唯一，实际问题又有最小值，因此唯一的稳定点就是最小值点，即当抛物线上的点 $P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 与直线上的点 $P_2(\frac{7}{8},-\frac{1}{8})$ 之间的距离 $d=\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{7}{8})^2+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})^2}=\frac{3}{4}$ 为抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

10．求 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 时函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值．证明 a,b,c 为正实数时，

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6 .$$

解 作 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$，令

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ L_y = \dfrac{2}{y}+2\lambda y=0, \\ L_z = \dfrac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6r^2, \end{cases}$$

由前三个方程得 $-2\lambda=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{3}{z^2}$，由此得 $y^2=2x^2$，$z^2=3x^2$，代入第三个方程，

解得 $x=r$，故 $y=\sqrt{2}r$，$z=\sqrt{3}r$．下面判定稳定点是极值点．

若记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6r^2$，则 $F_z(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=2\sqrt{3}r>0$，故方程

$$x^2+y^2+z^2=6r^2$$

在稳定点的附近可唯一确定可微函数 $z=z(x,y)$．令 $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$，由约束条

件得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$，由复合函数链式法则，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{3x}{z^2},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{3y}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{z^2}+\frac{6x}{z^3}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{z^2}-\frac{6x^2}{z^4},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{6x}{z^3}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{6xy}{z^4},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\frac{2}{y^2}-\frac{3}{z^2}+\frac{6y}{z^3}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{y^2}-\frac{3}{z^2}-\frac{6y^2}{z^4},$$

故函数 g 在 $(r,\sqrt{2}r)$ 点有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{8}{3r^2} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3r^2} \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3r^2} & -\dfrac{10}{3r^2} \end{vmatrix} = \frac{8}{r^4}>0,$$

且 $a_{11}=-\dfrac{8}{3r^2}<0$，因此 $g(x,y)$ 在 $(r,\sqrt{2}r)$ 处取极大值，这等价于 $f(x,y,z)$ 在 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$ 处取条件极大值 $f(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.

分析约束集 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=6r^2, x>0, y>0, z>0\}$，它是一有界集，且当 $x\to 0^+$，或 $y\to 0^+$，或 $z\to 0^+$，或其中二者大于而趋于 0 时，函数 $f(x,y,z)$ 均趋于 $-\infty$，因此，函数 $f(x,y,z)$ 的唯一极大值点是函数的最大值点，即在 D 内有

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z\le\ln(6\sqrt{3}r^6).$$

由于在 D 内有 $r^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}$，代入上式即得

$$xy^2z^3\le 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3,$$

两边平方，就有

$$x^2y^4z^6\le 108\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6,$$

令 $x^2=a$，$y^2=b$，$z^2=c$，就有

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6,$$

其中 a,b,c 均为正实数.

11．设函数 $f(x,y,u,v)$，$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 二阶可微，Jacobbi 矩阵

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2．令

$$L(x,y,u,v)=f(x,y,u,v)+\lambda_1F(x,y,u,v)+\lambda_2G(x,y,u,v),$$

若 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 是函数 L 的稳定点，证明：当 $d^2L(P_0)>(<)\,0$ 时，P_0 是在函数 f 在约束条件

$$F(x,y,u,v)=0，\quad G(x,y,u,v)=0$$

下的条件极小（大）值点.

证明