第十一章 广义积分

§1 无穷限广义积分

1.求下列积分的值：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln 3.$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(3) $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx, a>0;=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dax^2=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2a}\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-ax^2}-1\right)=\frac{1}{2a}.$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx, a>0;$

解: $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\sin bxde^{-ax}=-\frac{1}{a}\sin bxe^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bxdx$

$$=-\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty}\cos bxde^{-ax}=-\frac{b}{a^2}\cos bxe^{-ax}\Big|_0^{+\infty}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx$$

$$=-\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx,$$

因此可得

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+p)(x^2+q)}, p,q>0.=\frac{1}{p-q}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+q}-\frac{1}{x^2+p}\right)dx=-\frac{\pi}{2(p-q)}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right).$

2.讨论下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}=1$,由于$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx$收敛,那么由比较判别法可知原积分收敛。

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$,由于$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛,则由比较判别法可知原积分收敛。

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=1$，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，因此原积分收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$； 由于 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{2x}$（当 $x>2$ 时），因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散。

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\sin^2 x}$； 由于 $\frac{1}{1+x^2\sin^2 x}\ge\frac{1}{2x}$（当 $x>2$ 时），因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散。

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{n-m}x^m}{1+x^n}=1$，因此当 $n-m>1$ 时，积分收敛；否则发散。

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^4-x^2+1}=1$，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，因此原积分收敛。

(8) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x\sqrt[3]{1+x^2}}=1$，故由比较判别法可知原积分收敛。

(9) $\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx$； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2+p}e^{-x}=0$，因此原积分收敛。

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$； $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q\ln x}{x^p}=\begin{cases}+\infty & p\le q\\ 0 & p>q\end{cases}$，因此可知当 $p>1$ 时，积分收敛；否则发散。

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^n x}{x^2}dx$，$n$ 是正整数； 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\ln^n x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^n n!}{\sqrt{x}}=0$，因此原积分收敛。

(12) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$，故可知积分发散。

(13) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$； $\int_0^{+\infty}\cos axdx$ 有界，$\frac{1}{1+x^n}$ 单调下降趋于零，由狄理克雷判别法知积分收敛。

(14) $\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x+x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx$，故积分收敛。

(15) $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}\ln\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx=\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx$，故积分发散。

(16) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)\right|dx$，由于 $\left|\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)\right|\le\left|\frac{\ln\frac{1}{2}}{x^2}\right|$，故收敛。

3.讨论下列无穷积分的收敛性（包括绝对收敛或条件收敛）：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1+\cos 2x}{2x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$，可知积分发散。

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$;

解：由于$\int_1^{+\infty}\cos xdx$有界，$\frac{1}{x}$单调下降趋于零，那么由狄理克雷判别法可知积分收敛。但是

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx,$$

由本题(1)可知积分仅条件收敛。

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$;

解：当$p\le 0$可知积分发散；

当$p\in(0,1]$由狄理克雷判别法可知积分条件收敛；

当$p>1$积分绝对收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$;

解：积分$\int_0^{+\infty}\cos xdx$有界，而$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$单调下降趋于零，因此由狄理克雷判别法可知积分收敛。

但是由于

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right|dx\ge\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}dx+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx,$$

等号右边前者发散，后者收敛，因此原积分仅是条件收敛。

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx.$

解：由于$\int_0^{+\infty}\sin xdx$有界，$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$单调下降趋于零，因此由狄理克雷判别法可知积分收敛；但是由于

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x},\exists X,\text{当}x>X\text{时成立}$$

因此积分仅是条件收敛。

4.设$f(x)\le h(x)\le g(x), a\le x\le +\infty; h(x)$在任意有限区间$[a,A]$上可积,又$\int_a^{+\infty} f(x)dx$和$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛,求证:$\int_a^{+\infty} h(x)dx$收敛。

证明：由柯西收敛原理根据$\int_a^{+\infty} f(x)dx$和$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛可知:$\forall\varepsilon>0,\exists A>a$,当$A',A''>A$时

$$I=\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon, J=\left|\int_{A'}^{A''} g(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立。由于$f(x)\le h(x)\le g(x)$,因此必有

$$\int_{A'}^{A''} f(x)dx\le\int_{A'}^{A''} h(x)dx\le\int_{A'}^{A''} g(x)dx;$$

那么可知下式成立

$$\left|\int_{A'}^{A''} h(x)dx\right|\le\max\left(I,J\right)<\varepsilon.$$

于是由柯西收敛原理可知积分$\int_a^{+\infty} h(x)dx$收敛。

5.证明定理11. 2,并举例说明其逆不成立。

证明：若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛,则$\forall\varepsilon>0,\exists A>a$,当$A',A''>A$时,有$\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$成立。由定积分的基本性质可知此时必有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|\le\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$$

成立。那么由柯西收敛原理可知积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

反之不成立,例如由狄理克雷判别法可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$不收敛,但是由于

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$$

可知积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|dx$不收敛,亦知$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$也不收敛。

6.若$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调下降,且积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0.$

证明：首先我们证明$f(x)$在$[a,+\infty)$上恒正。否则若$f(x_0)=l<0$,则在$[x_0,+\infty)$上$f(x)<l<0$成立,那么

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx\le\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{+\infty} ldx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\lim_{x\to+\infty} l(x-x_0)=-\infty$$

这与积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛矛盾。

由柯西收敛原理可知当积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛时,$\forall\varepsilon>0,\exists A>a$,当$A',A''>A$时有

$$\int_{A'}^{A''} f(x)dx=\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

成立。

那么对于$\forall x>A$有$\int_x^{2x} f(t)dt<\int_x^{2x} f(x)dt<\varepsilon$,即$xf(x)<\varepsilon$,因此可知$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0.$

7.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续,并且积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.若仅知道$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,是否仍可得到$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明:由$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续可知,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$且$|x_1-x_2|<\delta$时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又根据积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛可知,$\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,当$x_1,x_2>A$时有$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon^2}{2}$成立。

对于任意$x_1,x_2>A$,且$|x_1-x_2|=\min\left(\varepsilon,\frac{\delta}{2}\right)=\lambda$,可知$\exists x\in(x_1,x_2)$使得

$$\begin{aligned}|f(x)\lambda|&=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt-\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\\&\le\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt-\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\le\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|dt+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}\lambda+\frac{\varepsilon^2}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\lambda=\varepsilon\lambda.\end{aligned}$$

那么此时必有$|f(x)|<\varepsilon$成立,于是可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

若仅仅知道$f(x)$连续,我们不能得到$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.如下例:

$$f(x)=\begin{cases}1-2^n|x-n|, & x\in\left[n-\frac{1}{2^n},n+\frac{1}{2^n}\right];\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

此时$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{2}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$,且$f(x)\ge0$,但是$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在。

8.设$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛,求证$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明:由于

$$\int_a^{+\infty} f'(x)dx=f(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty} f(x)-f(a);$$

可知当$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$收敛时必有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在;设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

若$l>0$,那么可知$\exists X>a$,当$x>X$时,$f(x)>\frac{l}{2}$成立,则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx&=\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty} f(x)dx\ge\int_a^X f(x)dx+\int_X^{+\infty}\frac{l}{2}dx\\&=\int_a^X f(x)dx+\lim_{x\to+\infty}\frac{l(x-X)}{2}=+\infty.\end{aligned}$$

这与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛矛盾故必有$l\le0$;同理可知$l\ge0$,因此必有$l=0$,即$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

9.设$f(x)$单调下降趋于零, $f'(x)$在$[0,+\infty)$连续, 求证$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx$收敛。

证明：可以求得：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx &= \int_0^{+\infty} \sin^2 xdf(x)\\ &= \sin^2 xf(x)\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\cos xdx\\ &= \lim_{x\to+\infty}\sin^2 xf(x) - \sin^2 0f(0) - \int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx\\ &= -\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx.\end{aligned}$$

由于$\int_0^{+\infty}\sin 2xdx$有界,而$f(x)$单调下降趋于零, 根据狄理克雷判别法可知$\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$收敛。

因此可知$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx$收敛。

10.设$f(x)$和$g(x)$是定义在$[a,+\infty)$上的函数,且在任意有限区间$[a,A]$上可积,证明:$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$与$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$也都收敛。

证明：由于$|f(x)g(x)| \le \dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$,而积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^{+\infty} f^2(x)dx + \int_a^{+\infty} g^2(x)dx\right)$$

收敛,因此可知积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛,于是$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛。

由于

$$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx = \int_a^{+\infty} f^2(x)dx + \int_a^{+\infty} g^2(x)dx + 2\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx,$$

而等号右边各项都收敛,因此$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$收敛。

11.证明:(1)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left[f(0)-k\right]\ln\frac{b}{a},b>a>0;$$

(2)若上述条件$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$改为$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx\left(a>0\right)$存在,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a},b>a>0.$$

证明:(1)取$0<\delta<\Delta$,可知$\frac{f(x)}{x}$在$[\delta,\Delta]$上连续且可积,则

$$\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\Delta\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t}-f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{dt}{t}\ \left(\text{积分第一中值定理};\xi\in\left(a\delta,b\delta\right),\eta\in\left(a\Delta,b\Delta\right)\right)$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}-f(\eta)\ln\frac{b}{a}=\left[f(\xi)-f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a};$$

在上式两边分别对$\Delta\to+\infty,\delta\to0$取极限,根据函数$F(s,t)=\int_s^t\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$的连续性可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\Delta\to+\infty\\ \delta\to0}}\left[f(\xi)-f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a}=\left[f(0)-k\right]\ln\frac{b}{a}.$$

即得所证。

(2)任取$\delta>a$,则

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$=\int_{a\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t}\qquad\left(\text{积分第一中值定理};\xi\in\left(a\delta,b\delta\right)\right)$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a};$$

在上式两边令$\delta\to0$取极限,根据函数$F(s)=\int_s^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$的连续性可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\xi\to0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

即得所证。

§2 瑕积分

1.下列瑕积分是否收敛?若收敛,求其值。

(1)$\int_0^{\frac{1}{2}}\cot xdx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln\left|\sin x\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\left|\sin\frac{1}{2}\right|-\lim\limits_{x\to0}\ln\left|\sin x\right|=+\infty$;因此原瑕积分发散。

$$(2)\int_0^1 \ln x dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 1dx = -x\Big|_0^1 = -1;$$

$$(3)\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} \overset{\sqrt{a-x}=t}{=} \int_{\sqrt{a}}^0 \frac{d\left(a-t^2\right)}{t} = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{2tdt}{t} = 2t\Big|_0^{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a};$$

$$(4)\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx \overset{\sqrt{1-x}=t}{=} \int_1^0 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} d\left(1-t^2\right) = \int_0^1 \frac{2t\sqrt{1-t^2}}{t}dt \overset{t=\sin y}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos y| d\left(\sin y\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 ydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2y\right)dy = y + \frac{1}{2}\sin 2y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2.讨论下列积分的收敛性：

$$(1)\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx;$$

解：此积分的瑕点为$x=0$,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=1$,而积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$收敛,因此由比较判别法可知原积分收敛。

$$(2)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}};$$

解：整理可得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = I + J;$$

其中积分I, J的瑕点分别为$x=0, x=1$.

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=1$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=1$,而积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx=I+J;$$

其中积分I,J的瑕点分别为$x=0,x=1$.

对于I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\ln x}{1-x^2}=0$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{-2x^2}=-\frac{1}{2}$,则点$x=1$是$\frac{\ln x}{1-x^2}$的可去间断点;故积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

解：整理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=I+J;$$

其中积分I,J的瑕点分别为$x=0,x=\frac{\pi}{2}$.

对于积分I,由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin^2 x\cos^2 x}=1$,而积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{x^2}$发散,则由比较判别法可知积分$I$发散;

于是无论J收敛与否,原积分都发散。

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p dx$;

解：当$p\ge 0$时, $x=0$是积分的瑕点;此时由于$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}|\ln x|^p=0$,而积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛, 则由比较判别法可知此时原积分收敛。

当$p<0$时, $x=1$是积分的瑕点;此时根据泰勒展式可知

$$\begin{aligned}|\ln x|^p&=|\ln(1+x-1)|^p=|x-1+o(x-1)|^p=(-1)^p\left[x-1+o(x-1)\right]^p\\&=(-1)^p\left[(x-1)^p+o(x-1)^p\right]=(-1)^p(x-1)^p\left[1+o(1)\right];\end{aligned}$$

于是可知当$p\in(-1,0)$时, 积分收敛; $p\le -1$时, 积分发散。

综上可知当$p>-1$时, 积分收敛; $p\le -1$时, 积分发散。

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m} dx$;

解：由泰勒展式可知

$$\frac{1-\cos x}{x^m} = \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)}{x^m} = \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + o\left(x^2\right)}{x^{m-2}};$$

显然$x=0$是积分的瑕点，且易知当$m-2<1$时，积分收敛，否则积分发散。

综上可知当$m<3$时积分收敛，当$m\geq 3$时积分发散。

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$;

解：由于$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}=0$，因此$x=0$只是函数$\frac{1}{\ln x}$的可去间断点；$x=1$为积分的瑕点。

因为$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{1} = 1$，而积分$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$发散，故由比较判别法可知原积分发散。

(8) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$;

解：整理可得

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = I + J;$$

其中积分I,J的瑕点分别为$x=0, x=\pi$.

对于I，由于$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = 1$，因此由比较判别法可知积分$I$收敛；

对于J，由于$\lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{\sqrt{x-\pi}}{\sqrt{\sin x}} = 1$，因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

(9) $\int_0^1 x^{\alpha} \ln x dx$;

解：当$\alpha>-1$时，由于必有$\delta>0$，使得$\alpha-\delta>-1$，即$\alpha-\delta+1>0$，因此

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\delta} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1-\delta} \ln x = 0;$$

而积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\delta}}$必收敛，因此由比较判别法可知此时原积分收敛。

当$\alpha\leq -1$时，由于必有$\delta\geq 0$，使得$\alpha+\delta\leq -1$，即$\alpha+\delta+1\leq 0$，因此

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1+\delta} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1+\delta} \ln x = -\infty;$$

而积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1+\delta}}$必发散，那么由比较判别法可知此时积分发散。

(10) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=I+J;$$

对于J,由于$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(p-1)x^{p-1}-(q-1)x^{q-1}}{1}=p-q$,因此无论何时,$x=1$都只是函数的可去间断点,即$J$始终收敛;我们只考察$I$即可。

当$p=q$时, $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{0}{\ln x}dx=0$,收敛。

由于在相差一个“-1?　的情况下,p,q 的位置是对称的 因此我们只考察$p>q$ 的情况。此时可得$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}$:

$i.$当$1-q<1$时, 即$q>0$时, 可知$\exists\delta>0$,使得$1-q+\delta<1$,那么由于积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q+\delta}}$收敛,而函数$\frac{x^{\delta}}{\ln x}$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调有界,因此由阿贝尔判别法可知积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q}\ln x}$收敛;此时函数$x^{p-q}-1$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上也单调有界,于是可知积分$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}dx$收敛。

$ii.$当$1-q>1$时, 即$q<0$时, 可知$\exists\delta>0$,使得$1-q-\delta>1$,那么由于积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-q-\delta}}$发散,而极限$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}=+\infty$,那么可知$\exists\varepsilon\in(0,1)$使得当$x\in(0,\varepsilon)$时$\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}>1$,于是积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{1-q-\delta}}\square\frac{x^{p-q}-1}{x^{\delta}\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}\left(x^{p-q}-1\right)}{\ln x}dx=I;$$

发散。

$iii.$当$1-q=1$时, 即$q=0$时, $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^p-1}{x\ln x}dx$,由于$\left|\frac{x^p-1}{x\ln x}\right|\geq\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x\ln x}\right|$, 而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x}$发散,因此由比较判别法可知积分$I$发散。

综上可知积分

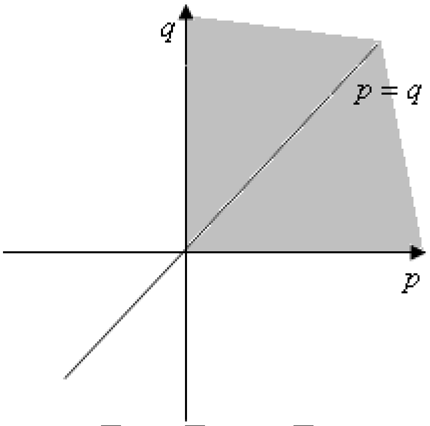
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx\begin{cases}\text{收敛} & p>q>0\\ \text{发散} & p>q\text{且}q\leq0\end{cases};$$

对称的有积分

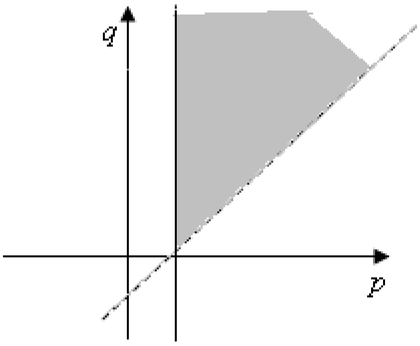
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx\begin{cases}\text{收敛} & q>p>0\\ \text{发散} & q>p\text{且}p\leq0\end{cases};$$

当$p=q$时积分始终收敛。

如图(1)当(p,q)落入第一象限(不包括坐标轴)内及直线$p=q$上时积分收敛:



图(1)题2(10)图



图(2)题3(3)图

(11)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}dx\overset{\tan x=t}{=}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}d(\arctan t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt=I+J;$$

其中$I=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt$是常积分故收敛, J是一个收敛的无穷限积分,因此原积分收敛。

(12)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\sin xdx.$

解：由于

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\cos x\ln\sin x=0,\ \lim_{x\to0^+}\cos x\ln\sin x=-\infty,$$

因此$x=0$是函数$\cos x\ln\sin x$的瑕点,由于

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\cos x\ln\sin x=0;$$

于是由比较判别法可知积分原收敛。

3.判别下列积分的敛散性：

(1)$\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx$;

解：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=0,\ \lim_{x\to1^+}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=+\infty,$$

因此点$x=1$是函数的瑕点;我们可以解得

$$\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx=\int_1^{+\infty}\ln\frac{x^2}{x^2-1}dx;$$

由于$\lim_{x\to1}\sqrt{x-1}\ln\frac{x^2}{x^2-1}=0$,因此由比较判别法可知积分收敛。

(2)$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=I+J;$$

对于J,由于$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+1}e^{-x}=0$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

对于积分$I=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}dx$,当$p>0$时,由于$\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\le\frac{e}{x^{1-p}}$,由比较判别法可知此时积分$I$收敛;当$p\le 0$时,由于$\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}>\frac{1}{x^{1-p}}$,由比较判别法可知此时积分$I$发散。

综上可知当$p>0$时原积分收敛,当$p\le 0$时原积分发散。

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx=\int_0^1\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{(\arctan x)^q}{x^p}dx=I+J.$$

对于I,当$p-q<1$时,$\exists\delta>0$使得$p-q+\delta<1$,那么由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p-q+\delta}(\arctan x)^q}{x^p}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\delta}(\arctan x)^q}{x^q}=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-q+\delta}}dx$收敛,因此由比较判别法可知此时积分$I$收敛。

当$p-q\ge1$时,$\exists\delta\ge0$使得$p-q-\delta\ge1$,那么由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{p-q-\delta}(\arctan x)^q}{x^p}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\delta}(\arctan x)^q}{x^q}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-q-\delta}}dx$发散,因此由比较判别法可知此时积分$I$发散。

对于J,当$p>1$时,$\frac{(\arctan x)^q}{x^p}\le\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^q}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛;当$p\le1$时,$\frac{(\arctan x)^q}{x^p}\ge\frac{(\arctan 1)^q}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散,因此由比较判别法可知积分$J$发散。

综上可知当$p-q>1$且$p>1$时原积分收敛,否则发散。即当点(p,q)落入图(2)所示区域(不包括边界)时,积分收敛,否则发散。

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=I+J;$$

对于I,当$p<2$时,$\exists\delta>0$使得$p+\delta<2$,即$p+\delta-1<1$,由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{p+\delta-1}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^{1-\delta}}=\begin{cases}0 & \delta\ge1\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(1-\delta)x^{-\delta}(1+x)}=0, & \delta<1\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p+\delta-1}}dx$收敛,因此由比较判别法可知此时积分$I$收敛。

当$p\ge2$时,$\exists\delta\ge0$使得$p-\delta\ge2$,即$p-\delta-1<1$,由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{p-\delta-1}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^{1+\delta}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\delta)x^{\delta}(1+x)}=\begin{cases}1 & \delta=0\\ +\infty & \delta>0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{p-\delta-1}}dx$发散,因此由比较判别法可知此时积分$I$发散。

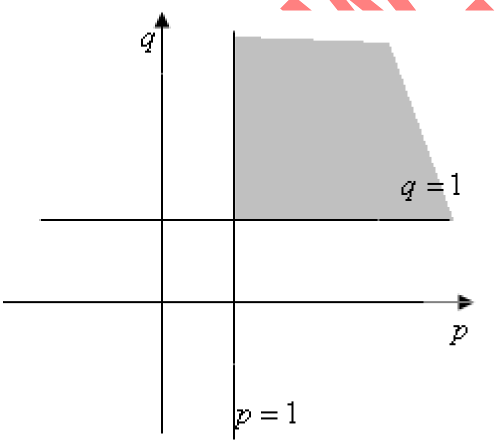
对于J,当$p>1$时,$\exists\delta>0$使得$p-\delta>1$,那么由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\delta}\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\delta}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\delta x^{\delta-1}(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\delta x^{\delta-1}+\delta x^{\delta}}=0;$$

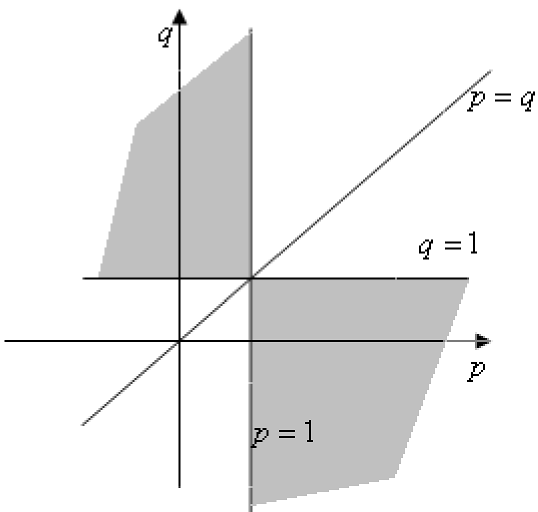
而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-\delta}}dx$收敛,因此可知此时积分$J$收敛。

当$p\le1$时,由于$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\ge\frac{\ln2}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散,因此可知此时积分$J$发散。

综上可知当$p\in(1,2)$时,原积分收敛;否则发散。



图(3)题3(5)图



图(4)题3(6)图

(5)$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$;

解：整理可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^{2}\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=I+J.$$

对于I,当$q<1$时,$\exists\delta>0$使得$q+\delta<1$,此时

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\ln^q x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\ln^q\left(1+x-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\left[\left(x-1\right)-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}+o\left((x-1)^2\right)\right]^q}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{\delta}}{x^p\left[1-\frac{\left(x-1\right)^1}{2}+o\left(x-1\right)\right]^q}=0,$$

而积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{q+\delta}}$收敛,因此此时积分$I$收敛。

当$q\ge1$时,$\exists\delta\ge0$使得$q-\delta\ge1$,此时

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q-\delta}}{x^p\ln^q x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q-\delta}}{x^p\ln^q\left(1+x-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{q+\delta}}{x^p\left[\left(x-1\right)-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}+o\left((x-1)^2\right)\right]^q}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^{-\delta}}{x^p\left[1-\frac{\left(x-1\right)^1}{2}+o\left(x-1\right)\right]^q}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{q-\delta}}$发散,因此此时积分$I$发散。

对于$J=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$,由$p_{10}\S_3T_{3(8)}$, $p_{10}\S_3T_5$可知$J\begin{cases}\text{收敛} & p>1\text{或}p=1\text{且}q>1\\ \text{发散} & p<1\text{或}p=1\text{且}q\le1\end{cases}$.

综上可知当$p>1$且$q<1$时,原积分收敛。如图当点(p,q)落入图(3)所示区域(不包括边界)时,积分收敛。

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=I+J;$$

由于p,q的位置对称,因此我们只考虑$p\ge q$的情况。

当$p=q$时,由于$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^p}$当$p<1$时收敛, $J=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$当$p>1$时收敛;因此此时原积分发散。

当$p>q$时,若$p>1$,对于J,由于$\frac{1}{x^p+x^q}<\frac{1}{x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$收敛,因此此时$J$收敛;

若$p\le 1$,对于J,由于$\frac{1}{x^p+x^q}>\frac{1}{2x^p}$,而积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$发散,因此此时$J$发散。

若$p>q\ge 1$,则对于I,有$\frac{1}{x^p+x^q}>\frac{1}{2x^q}$,而积分$\int_0^1\frac{dx}{2x^q}$发散,因此此时积分$I$发散;

若$q<1$,则对于I,有$\frac{1}{x^p+x^q}<\frac{1}{x^q}$,而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^q}$收敛,因此此时积分$I$收敛。

综上可知$p>q$时,若$p>1$且$q<1$时原积分收敛; $p<q$时,若$q>1$且$p<1$时原积分收敛。即当点(p,q)落入图(4)所示区域(不包含边界)时,积分收敛。

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$;

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_1^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}$$

$$+\int_{1.5}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5;$$

对于I_1,由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$,而积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$收敛,因此积分$I_1$收敛;

对于I_2,由于$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=-1$,而积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$收敛,因此积分$I_2$收敛;

积分I_3是一个常积分,故必收敛;

对于I_4,由于$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=\sqrt[3]{2}$,而积分$\int_{1.5}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)}}$收敛,因此积分$I_4$收敛;

对于I_5,由于$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}=1$,而积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$收敛,因此积分$I_5$收敛。

综上可知原积分收敛。

(8) $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ln|x|dx.$

解：整理可得

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ln|x|dx \overset{x=-t}{=} \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = \int_{0}^{1} e^{-t}\ln t dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = I + J;$$

其中I的瑕点为$t=0$, J为无穷限积分。

对于I,由于$\lim_{x\to 0}\sqrt{t}e^{-t}\ln t = 0$,而积分$\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$I$收敛;

对于J,由于$\lim_{x\to +\infty} t^{2}e^{-t}\ln t = 0$,而积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2}}$收敛,因此由比较判别法可知积分$J$收敛。

综上可知原积分收敛。

4.讨论下列积分的收敛性与绝对收敛性：

(1) $\int_{0}^{+\infty}\sin x^{2}dx;$

解：整理可得

$$\int_{0}^{+\infty}\sin x^{2}dx \overset{x^{2}=t}{=} \int_{0}^{+\infty}\sin t d\sqrt{t} = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = I + J;$$

其中积分I的瑕点为$t=0$,积分J为无穷瑕积分。

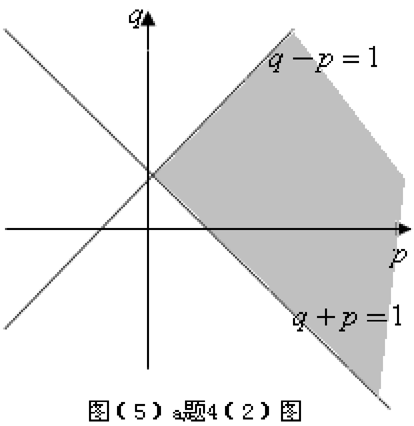
对于I,由于$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{t}}$,而积分$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$收敛,因此积分$I$绝对收敛。

对于J,由于$\int_{1}^{+\infty}\sin t dt$有界,而函数$\frac{1}{\sqrt{t}}$在区间$(1,+\infty)$上单调下降趋于零,那么由狄理克雷判别法可知积分$J$收敛。但是由于

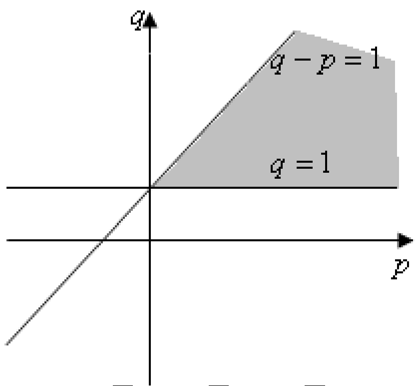
$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \ge \frac{\sin^{2} t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2t}{\sqrt{t}}\right),$$

其中$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$发散, $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}dt$由狄理克雷判别法可知收敛,因此积分$\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|dt$发散,即积分$J$仅是条件收敛。

综上可知原积分为条件收敛。



图（5）a题4（2）图



图（5）b题4（2）图

(2)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx,\ p>0;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx=\int_0^{1}\frac{\sin x^p}{x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx=I+J;$$

其中积分I的瑕点为$x=0$,积分J为无穷限积分。

对于I,当$q-p\ge 1$时,$\exists\delta\ge 0$,使得$q-p-\delta\ge 1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^p}{x^p}\square\frac{x^{q-p-\delta}}{x^{q-p}}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{q-p-\delta}}dx$发散,因此可知此时积分$I$发散。

当$q-p<1$时,$\exists\delta>0$,使得$q-p+\delta<1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x^p}{x^p}\square\frac{x^{q-p+\delta}}{x^{q-p}}\right|=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{1}{x^{q-p+\delta}}dx$收敛,因此可知此时积分$I$绝对收敛。

对于J,有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^p}{x^q}dx\overset{x^p=t}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{q}{p}}}d\left(t^{\frac{1}{p}}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}dt;$$

由于积分$\int_1^{+\infty}\sin tdt$有界,因此由狄理克雷判别法可知只要$\frac{q+p-1}{p}>0$,J就收敛;此时$q+p>1$.

若$\frac{q+p-1}{p}>1$,则$\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|<\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}$,由于积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}dt$收敛,因此可知此时积分$J$绝对收敛。当$\frac{q+p-1}{p}\in(0,1)$时,由于

$$\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|\ge\frac{\sin^2 t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}-\frac{\cos 2t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right),$$

易知此时积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{pt^{\frac{q+p-1}{p}}}\right|dt$发散。

因此综上可知当$\begin{cases}p+q>1\\ q-p<1\end{cases}$(图(5)$a$)时积分收敛;当$\begin{cases}q>1\\ q-p<1\end{cases}$(图(5)$b$)时积分绝对收敛。

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx, q\ge 0;$

解：整理可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx=\int_0^{1}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx=I+J;$$

其中积分I的可能有瑕点为$x=0$,积分J为一个无穷限积分。

对于I,当$-p-1\ge 1$,即$p\le -2$时,可知$\exists\delta\ge 0$使得$-p-1-\delta\ge 1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{-p-1-\delta}x^p\sin x}{1+x^q}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-\delta}}{1+x^q}\cdot\frac{\sin x}{x}=\begin{cases}+\infty & \delta>0\\ 1 & \delta=0\end{cases},$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{-p-1-\delta}}$发散,那么由比较判别法可知此时积分$I$发散。

当$-p-1<1$,即$p>-2$时,可知$\exists\delta>0$使得$-p-1+\delta<1$,由于

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^{-p-1+\delta}x^p\sin x}{1+x^q}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^{\delta}}{1+x^q}\cdot\frac{\sin x}{x}\right|=0,$$

而积分$\int_0^1\frac{dx}{x^{-p-1+\delta}}$收敛,那么由比较判别法可知此时积分$I$绝对收敛。

对于积分$J=\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$,若$q\le p$,可知$\forall A>1,\exists A'=[A+1]\pi+\frac{\pi}{2},A_2=[A+1]\pi+2\pi$,使得

$$\left|\int_{[A+1]\pi+\frac{\pi}{2}}^{[A+1]\pi+2\pi}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\right|\ge\left|\frac{1}{2}\int_{[A+1]\pi+\frac{\pi}{2}}^{[A+1]\pi+2\pi}\sin xdx\right|=\frac{1}{2},$$

那么由柯西收敛原理可知此时积分J发散。

若$q>p$,取$f(x)=\frac{x^p}{1+x^q}$,则

$$f'(x)=\frac{px^{p-1}\left(1+x^q\right)-qx^{q-1}x^p}{\left(1+x^q\right)^2}=\frac{px^{p-1}+(p-q)x^{q+p-1}\left(1+x^q\right)}{\left(1+x^q\right)^2}$$

显然$\exists X>1$,当$x>X$时$f'(x)<0$,又因为$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}=0$,且$\int_1^{+\infty}\sin xdx$有界,因此可由狄理克雷判别法知积分$J$收敛。

当$q\le p+1$时,有$\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\ge\frac{1}{2}$;那么

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|dx=\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\cdot\frac{\sin x}{x}\right|dx\ge\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\ge\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx$$

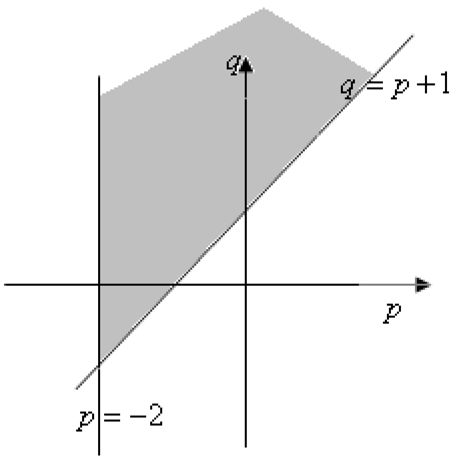
由于积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$发散,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$收敛因此可知此时积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right|dx$发散,即$J$不绝对收敛。

当$q > p+1$时,即$q-p>1$,由于

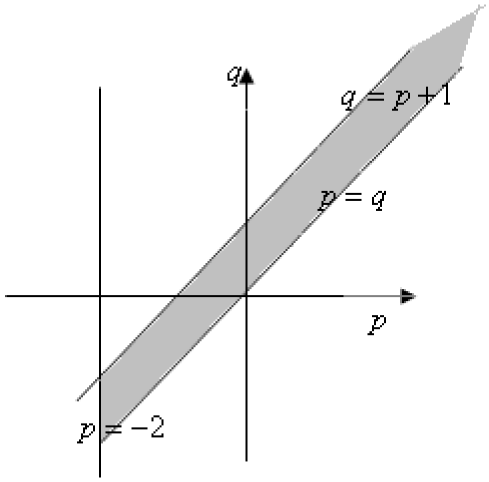
$$\left|\frac{x^p \sin x}{1+x^q}\right| \le \left|\frac{x^p}{1+x^q}\right| < \frac{1}{x^{q-p}}$$

而积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{q-p}}dx$收敛,因此此时积分$J$绝对收敛。

综上可知当$\begin{cases} p>-2 \\ q>p+1 \end{cases}$(如图(6)$a$)时积分绝对收敛;当$\begin{cases} p>-2 \\ p<q<p+1 \end{cases}$(如图(6)$b$)时积分条件收敛。



图(6)a题4(3)图



图(6)b题4(3)图

(4)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx.$

解：当$n \le 0$时的时候原积分显然发散。当$n>0$时整理可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx = \int_0^1 \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx = I+J;$$

其中积分I有瑕点$x=0$,积分J为无穷限积分。

对于J,有

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx,$$

由于

$$\int_1^{+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^{+\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)d\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty}$$

有界。而此时函数$f(x)=\dfrac{1}{x^n\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$有

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^{n+2}-x^n}\right)'=\frac{2x\left(x^{n+2}-x^n\right)-(2+n)x^{n+3}+nx^{n+1}}{\left(x^{n+2}-x^n\right)^2}=\frac{-nx^{n+3}+\left(n-2\right)x^{n+1}}{\left(x^{n+2}-x^n\right)^2};$$

易知$\exists X$,当$x>X$时,$f'(x)<0$,由于有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,因此由狄理克雷判别法可知此时积分$J$收敛。

对于积分I,有

$$I=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\int_{+\infty}^1\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^n}}d\left(\frac{1}{t}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt;$$

由我们对积分J的讨论可知当$n<2$时积分I收敛。

综上可知当$0<n<2$时原积分收敛。我们下证此时必有$\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\right|dx$发散。

由于

$$\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\right|\ge\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}=\frac{1-\cos2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2x^n}.$$

对于积分$I_1=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2x^n}dx=\int_0^1\dfrac{1}{2x^n}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x^n}dx$,可知当$n$为何值是都不收敛。对于积分$I_2=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2x^n}dx$由狄理克雷判别法可知它始终收敛。那么由比较判别法可知此时积分$\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\right|dx$发散。

综上所证可知当$0<n<2$时原积分条件收敛;无论n取何值原积分都不可能绝对收敛。

5.计算下列瑕积分的值:

$$(1)\int_0^1\left(\ln x\right)^n dx=x\left(\ln x\right)^n\Big|_0^1-\int_0^1 xd\left(\ln x\right)^n=-\lim_{x\to0}x\left(\ln x\right)^n-n\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-1}dx=-n\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-1}dx$$

$$=-n(-n+1)\int_0^1\left(\ln x\right)^{n-2}dx=\cdots=(-1)^n n!;$$

$$(2)\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx\overset{\sqrt{1-x}=t}{=}\int_1^0\frac{(1-t^2)^n}{t}d(1-t^2)=2\int_0^1(1-t^2)^n dt\overset{t=\sin y}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}ydy\overset{p_7\S_4T_2}{=}2I_{2n+1}=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

6.证明积分$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$收敛,并求其值。

证明：整理可得

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx \overset{\sin x=t}{=} \int_0^1 \ln t d\left(\arcsin t\right)=\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}dt;$$

由于

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{t\to1}\frac{1}{\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{-t^2}=0,\lim_{t\to0}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=-\infty,$$

因此只有$t=0$是积分的一个瑕点;由于$\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{1-t^2}}=0$,而积分$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$收敛,那么由比较判别法可知此积分收敛。

由于

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln(\cos t)d=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt;$$

因此可知

$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)dx\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&\overset{x-\frac{\pi}{2}=t}{=}\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos t\right)dt\right)-\frac{\pi\ln 2}{2}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2A-\frac{\pi\ln 2}{2}=A-\frac{\pi\ln 2}{2},\end{aligned}$$

于是可得$A=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

7.利用上体结果证明：

(1).$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=-\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

证明：由于

$$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta \overset{t=\pi-\theta}{=} -\int_{\pi}^0(\pi-t)\ln(\sin(\pi-t))dt=\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin t)dt-\int_0^{\pi}t\ln(\sin t)dt$$

因此可得$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin t)dt=-\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

(2) $\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta} d\theta = 2\pi\ln 2.$

证明: $\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\theta 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\int_0^{\pi} \frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$$= 2\int_0^{\pi} \theta d\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\theta\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = 2\pi\ln 2.$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ln(\sin\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right).$

证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ln(\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ln(\sin\theta)\,d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ln(\sin\theta)\,d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin\theta)\,d(\sin 2\theta)$$

$$= -\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}(\sin 2\theta)\ln(\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\ln(\sin\theta)$$

$$= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{\sin\theta}d\theta = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = -\frac{\pi}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right).$$

(4) $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

证明: $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,d(\arctan x) \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t+\cos t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin y)\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(-y+\frac{\pi}{2}\right)\right)dy$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin y)\,dy - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin y)\,dy = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

8.证明不等式：

(1) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}$;

证明：当$x\in\mathbb{R}^+$时有$e^{-x^2}>0$成立,因此

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx<\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx<\int_0^1 1dx+\int_1^{+\infty}xe^{-x^2}dx;$$

由于

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}dx^2=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

$$\int_0^1 1dx+\int_1^{+\infty}xe^{-x^2}dx=1+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx^2=1+\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty}=1+\frac{1}{2e};$$

因此可得$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)<\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}$,得证。

(2) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$.

证明：由于

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2};$$

因此可得$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$,得证。