第十七章　隐函数存在定理

§1　单个方程的情形

1．设函数 $F(x,y)$ 满足

（1）在区域 $D: x_0-a\le x\le x_0+a, y_0-b\le y\le y_0+b$ 上连续；

（2）$F(x_0,y_0)=0$；

（3）当 x 固定时，函数 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调函数；

则可得到什么结论？试证明之.

解　由已知条件，可得结论：

(i)存在 $\alpha>0$，使得在点 (x_0,y_0) 的某一领域内，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定了一个定义在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的隐函数 $y=f(x)$，满足 $F(x,f(x))\equiv 0$，且 $y_0=f(x_0)$；

(ii)　函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内连续.

下面进行证明：

(i)　由条件(3)，当 x 固定时，函数 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调函数，不妨设 $F(x,y)$ 关于 y 严格单调递增.

固定 $x=x_0$，由条件(2)知 $F(x_0,y_0)=0$，从而

$$F(x_0,y_0-b)<0,\quad F(x_0,y_0+b)>0,$$

在 $F(x,y)$ 中分别固定 $y=y_0-b$ 和 $y=y_0+b$，由一元函数 $F(x,y_0-b)$ 和 $F(x,y_0+b)$ 在 x_0 连续，以及连续函数的保号性知，存在 $\alpha_1>0\,(\alpha_1<a)$，使得当 $x\in(x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_1)$ 时，有

$$F(x,y_0-b)<0, \tag{1}$$

同理，存在 $\alpha_2>0\,(\alpha_2<a)$，使得当 $x\in(x_0-\alpha_2,x_0+\alpha_2)$ 时，有

$$F(x,y_0+b)>0. \tag{2}$$

取 $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$，则当 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，（1）（2）两式同时成立，对任意 $\bar{x}\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，一元函数 $F(\bar{x},y)$ 在 $y\in(y_0-b,y_0+b)$ 连续，并且

$$F(\bar{x},y_0-b)<0,\quad F(\bar{x},y_0+b)>0,$$

根据一元函数的介值定理，存在 $\bar{y}\in(y_0-b,y_0+b)$，使得 $F(\bar{x},\bar{y})=0$.

又因为 $F(\bar{x},y)$ 关于 y 在 $[y_0-b,y_0+b]$ 严格单调上升，故上述 $\bar{y}$ 是唯一的，这样就确定了一个定义在区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上的隐函数 $y=f(x)$，特别地 $y_0=f(x_0)$，这样就证明了结论(i)；

(ii) 任给 $\bar{x}\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，记 $\bar{y}=f(\bar{x})$，下证 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 连续.

对 $\forall\varepsilon>0$，不妨让 ε 充分小使得 $[\bar{y}-\varepsilon,\bar{y}+\varepsilon]\subset[y_0-b,y_0+b]$，因为 y 的一元函数 $F(\bar{x},y)$ 在 $[\bar{y}-\varepsilon,\bar{y}+\varepsilon]$ 上严格单调上升且 $F(\bar{x},\bar{y})=0$，所以

$$F(\bar{x},\bar{y}-\varepsilon)<0,F(\bar{x},\bar{y}+\varepsilon)>0,$$

而 x 的一元函数 $F(x,\bar{y}-\varepsilon)$ 和 $F(x,\bar{y}+\varepsilon)>0$ 在 $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 连续，因而存在 $\delta_1>0$，满足 $(\bar{x}-\delta_1,\bar{x}+\delta_1)\subset(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，而且当 $x\in(\bar{x}-\delta_1,\bar{x}+\delta_1)$ 时，有

$$F(x,\bar{y}-\varepsilon)<0, \tag{3}$$

同理，存在 $\delta_2>0$，满足 $(\bar{x}-\delta_2,\bar{x}+\delta_2)\subset(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$，而且当 $x\in(\bar{x}-\delta_2,\bar{x}+\delta_2)$ 时，有

$$F(x,\bar{y}+\varepsilon)>0. \tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则当 $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$ 时，(3)(4)两式同时成立，因此只要 $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$，$F(x,y)$ 作为 y 的函数在 $(\bar{y}-\varepsilon,\bar{y}+\varepsilon)$ 就严格单调上升，且有唯一的零点 $y=f(x)$，显然满足 $y\in(\bar{y}-\varepsilon,\bar{y}+\varepsilon)$，即 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$，从而结论（ii）得证.

2．方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$ 在原点附近能否用形如 $y=f(x)$ 的隐函数表示？又能否用形如 $x=g(y)$ 的隐函数表示？

解 令 $F(x)=x^2+y+\sin(xy)$，则 $F(0,0)=0$，并且

$$F_x=2x+y\cos(xy),\ F_y=1+x\cos(xy),$$

它们都在全平面上连续，而且 $F_y(0,0)=1$，因而方程在 $(0,0)$ 点的邻域内可唯一地确定可微的隐函数 $y=f(x)$，但由于 $F_x(0,0)=0$，因而据此无法判定是否在 $(0,0)$ 点的某邻域内有

隐函数 $x=g(y)$ 存在.

3. 方程 $F(x,y)=y^2-x^2(1-x^2)=0$ 在哪些点的附近可以唯一地确定单值、连续且有连续导数的函数 $y=f(x)$.

解 由于 $F_x(x,y)=4x^3-2x,\ F_y(x,y)=2y$ 均在全平面连续，而且 $F_y(x,y)\big|_{y\neq 0}\neq 0$，因而在方程 $F(x,y)=0$ 的除去 $(0,0)$，$(\pm 1,0)$ 的解点处，均可唯一地确定单值、连续、且有连续导数的函数 $y=f(x)$.

4. 证明有唯一可导的函数 $y=y(x)$ 满足方程 $\sin y+\sinh y=x$，并求出导数 $y'(x)$，其中 $\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

证明 设 $F(x,y)=\sin y+\sinh y-x$，则 $F_x(x,y)=-1$，$F_y(x,y)=\cos y+\cosh y$ 均在全平面连续. 又因为当 $y=0$ 时，$F_y(x,y)=\cos y+\cosh y>0$；当 $y\neq 0$ 时，根据平均值不等式，$\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\geq\sqrt{e^ye^{-y}}=1$，也得到 $F_y(x,y)=\cos y+\cosh y>0$，因而在方程 $F(x,y)=0$ 的任一解点附近，可确定唯一可导的函数 $y=y(x)$，且

$$y'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{1}{\cos y+\cosh y}.$$

5. 方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $P_0(0,1,1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量是另外两个变量的函数.

解 设 $F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1$，则 $F(0,1,1)=0$，而且

$$F_x(x,y,z)=y+ze^{xz},F_y(x,y,z)=x+\frac{z}{y},F_z(x,y,z)=\ln y+xe^{xz}$$

均在全平面连续，又 $F_x(0,1,1)=2\neq 0, F_y(0,1,1)=1\neq 0, F_z(0,1,1)=0$，因此在点 $P_0(0,1,1)$ 的某邻域内，可以确定出隐函数 $x=x(y,z)$，亦可确定出隐函数 $y=y(x,z)$，但由于 $F_z(0,1,1)=0$，据此无法确定是否在 $P_0(0,1,1)$ 点的某邻域内有隐函数 $z=z(x,y)$ 存在.

6. 设 f 是一元函数，试问 f 应满足什么条件，方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在点 $(1,1)$ 的

邻域内能确定出唯一的 y 为 x 的函数.

解 设 $F(x,y)=2f(xy)-f(x)-f(y)$，则 $F(1,1)=0$，且当 f 连续可导时，有

$$F_x(x,y)=2yf'(xy)-f'(x),\ F_y(x,y)=2xf'(xy)-f'(y),$$

它们在 $(1,1)$ 的某邻域内连续，而且 $F_x(1,1)=2f'(1)-f'(1)=f'(1),\ F_y(1,1)=f'(1)$，因而只要 $f'(1)\neq 0$ 时，就有 $F_y(1,1)\neq 0$，这时方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在点 $(1,1)$ 的邻域内能确定出唯一的 y 是 x 的函数.

通过上述分析知，当 f 在 $x_0=1$ 的某邻域内有连续的一阶导数，而且 $f'(1)\neq 0$ 时，方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在点 $(1,1)$ 的邻域内能确定出唯一的 y 为 x 的函数.

7. 设有方程 $x=y+\varphi(y)$，其中 $\varphi(0)=0$，且当 $-a<y<a$ 时，$|\varphi'(y)|\le k<1$. 证明：存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$ 时，存在唯一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$.

证明 设 $F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则 $F(0,0)=0$，且

$$F_x(x,y)=1,\ F_y(x,y)=-1-\varphi'(y)\neq 0,$$

由 $F_y(x,y)\neq 0$ 知，函数 $F(x,y)$ 关于 y 在 $(0,0)$ 的某领域内严格单调，因而由本节习题 1 知存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x<\delta$ 时，存在唯一的可微函数 $y=y(x)$，满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 且 $y(0)=0$.

§2 方程组的情形

1. 试讨论方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2, \\ x+y+z=2. \end{cases}$$

在点 $P_0(1,-1,2)$ 的附近能否确定形如 $x=f(z),\ y=g(z)$ 的隐函数组.

解 令

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-\dfrac{1}{2}z^2, \\ G(x,y,z)=x+y+z-2. \end{cases}$$

显然 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 在全平面有连续的偏导数，故它们在点 $P_0(1,-1,2)$ 的附近固然也有连续偏导数，而且 $F(1,-1,2)=0, G(1,-1,2)=0$，又因为

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0,$$

因此在点 $P_0(1,-1,2)$ 的某邻域内方程组可唯一地确定形如 $x=f(z), y=g(z)$ 的隐函数组.

2. 求下列函数组的反函数组的偏导数：

（1）设 $u=x\cos\dfrac{y}{x}, v=x\sin\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial v}$；

（2）设 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

解（1）由于 $u=x\cos\dfrac{y}{x}, v=x\sin\dfrac{y}{x}$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\sin\frac{y}{x},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{y}{x},$$

即函数组 $u=x\cos\dfrac{y}{x}, v=x\sin\dfrac{y}{x}$ 在 $x\neq 0$ 处对 x,y 的偏导数是连续的，又由于

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x} & -\sin\dfrac{y}{x}\\ \sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} & \cos\dfrac{y}{x}\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

因而由反函数组定理得

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{y}{x},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-\sin\frac{y}{x},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}.$$

（2）由 $u=e^x+x\sin y, v=e^x-x\cos y$ 的表达式可得，它们在全平面存在对 x,y 的连续偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x-\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x\sin y,$$

又由于

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x+\sin y & x\cos y\\ e^x-\cos y & x\sin y\end{vmatrix}=x(e^x(\sin y-\cos y)+1),$$

故在 $J \neq 0$ 的任何点的邻域内，都有

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin y}{e^x(\sin y-\cos y)+1},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos y}{e^x(\sin y-\cos y)+1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos y-e^x}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x+\sin y}{x\left[e^x(\sin y-\cos y)+1\right]}.$$

3. 设 $u=\dfrac{x}{r^2},v=\dfrac{y}{r^2},w=\dfrac{z}{r^2}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 试求以 u,v,w 为自变量的反函数组；

(2) 计算 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

解 (1) 根据已知条件 $u=\dfrac{x}{r^2},v=\dfrac{y}{r^2},w=\dfrac{z}{r^2}$ 可得 $x=ur^2,y=vr^2,z=wr^2$，将其代入公式 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 知 $r^2=r^4(u^2+v^2+w^2)$，化简得

$$r^2=\frac{1}{u^2+v^2+w^2},$$

因而

$$\begin{cases} x=ur^2=\dfrac{u}{u^2+v^2+w^2}, \\ y=vr^2=\dfrac{v}{u^2+v^2+w^2}, \\ z=wr^2=\dfrac{w}{u^2+v^2+w^2}. \end{cases}$$

(2) 根据 u,v,w 的表达式可得它们对 x,y,z 的各个偏导数，从而有

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2}-\dfrac{2x^2}{r^4} & -\dfrac{2xy}{r^4} & -\dfrac{2xz}{r^4} \\ -\dfrac{2xz}{r^4} & \dfrac{1}{r^2}-\dfrac{2y^2}{r^4} & -\dfrac{2yz}{r^4} \\ -\dfrac{2xz}{r^4} & -\dfrac{2yz}{r^4} & \dfrac{1}{r^2}-\dfrac{2z^2}{r^4} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{r^{12}}\begin{vmatrix} 2x^2-r^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2-r^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2-r^2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{r^6}.$$

4. 设 f_i,φ_i 连续可微，且

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_i(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n))\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

求 $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$.

解 将 $\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n)$ 看作中间变量，根据复合函数求导法则有

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdot\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\end{vmatrix}$$

$$=\varphi_1'(x_1)\varphi_2'(x_2)\cdots\varphi_n'(x_n)\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}.$$

5. 据理说明：在点 $(0,1)$ 附近是否存在连续可微函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 满足 $f(0,1)=1$，$g(0,1)=-1$，且

$$[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0,$$

$$[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0.$$

解 令

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=u^3+xv-y,\\ G(x,y,u,v)=v^3+yu-x.\end{cases}$$

则 F,G 关于各个变元在 $P_0(0,1,1,-1)$ 附近有连续偏导数，又

$$F(0,1,1,-1)=0,\ G(0,1,1,-1)=0,$$

且 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(0,1,1,-1)}=\left.\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,-1)}=9\neq 0$，因而由隐函数存在定理，在点 $(0,1)$ 附近存在连续可微函数 $u=f(x,y)$ 和 $v=g(x,y)$，满足 $f(0,1)=1$， $g(0,1)=-1$，且

$$[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0,$$

$$[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0.$$

6. 设

$$\begin{cases} u=f(x,y,z,t), \\ g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0. \end{cases}$$

在什么条件下 u 是 x,y 的函数？求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解 考虑 $g(y,z,t)=0$ 和 $h(z,t)=0$，若 $g(y,z,t),h(z,t)$ 满足：

(1) 在某一点 $P_0(y_0,z_0,t_0)$ 附近对各变量有一阶连续偏导数；

(2) $g(y_0,z_0,t_0)=h(y_0,z_0,t_0)=0$；

(3) $J=\left.\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|_{P_0}\neq 0$.

则在 y_0 点附近方程组 $\begin{cases} g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 唯一地确定一组函数 $\begin{cases} z=z(y), \\ t=t(y) \end{cases}$，而且这组函数在 y_0 点附近连续可微，从而 $u=f(x,y,z,t)=f(x,y,z(y),t(y))$ 就是关于 x,y 的函数，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,t)}-\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,y)},$$

其中 $J=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$.

7. 设函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u=f(x,y,z), \\ g(x,y,z)=0, \\ h(x,y,z)=0. \end{cases}$$

所确定，求 $\dfrac{du}{dx},\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

解 由于原方程组能确定函数 $u=u(x)$，根据方程组中 u 的表达式可知 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 能确定 y,z 是 x 的函数，从而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}, \qquad (*)$$

因此

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}.$$

再对 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$ 左右两边关于 x 求导，有

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}.$$

其中 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$ 由（*）式给出，而且根据（*）式知 $\frac{d^2u}{dx^2}$ 的表达式中，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\right)\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,z)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)\right]\Big/\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)^2,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\right)\cdot\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,x)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)\right]\Big/\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)^2.$$

8. 设 $z=z(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} f(x,y,z,t)=0, \\ g(x,y,z,t)=0. \end{cases}$$

求 dz.

解 由已知条件知方程组能确定函数组 $z=z(x,y), t=t(x,y)$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)},$$

因而 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left[-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}\right]dx+\left[-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}\right]dy$.

9. 设

$$\begin{cases} u = f(x-ut, y-ut, z-ut), \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$. 这时 t 是自变量还是因变量?

解 在 $g(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求导，有 $g_1 + g_3\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0,\ g_2 + g_3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_1}{g_3},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_2}{g_3},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1\left(1 - t\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_2\left(-t\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_3\left(\frac{\partial z}{\partial x} - t\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= f_1 - f_1 t\frac{\partial u}{\partial x} - f_2 t\frac{\partial u}{\partial x} - f_3 t\frac{\partial u}{\partial x} + f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right).$$

从中解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{f_1 g_3 - f_3 g_1}{g_3[1 + t(f_1 + f_2 + f_3)]}$，同样由对称性得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{f_2 g_3 - f_3 g_2}{g_3[1 + t(f_1 + f_2 + f_3)]}$，其中 t 是自变量.

10. 设 (x_0, y_0, z_0, u_0) 满足方程组

$$\begin{cases} f(x) + f(y) + f(z) = F(u), \\ g(x) + g(y) + g(z) = G(u), \\ h(x) + h(y) + h(z) = H(u). \end{cases}$$

这里假定所有的函数有连续的导数.

(1) 说出一个能在该点领域内确定 x, y, z 作为 u 的函数的充分条件;

(2) 在 $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = x^3$ 的情形下，上述条件相当于什么?

解 (1) 设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0)$，则根据已知条件可知，当条件

(i) $$\begin{cases} f(x_0) + f(y_0) + f(z_0) = F(u_0), \\ g(x_0) + g(y_0) + g(z_0) = G(u_0), \\ h(x_0) + h(y_0) + h(z_0) = H(u_0); \end{cases}$$

(ii) $$J\big|_{P_0} = \left.\begin{vmatrix} f'(x) & f'(y) & f'(z) \\ g'(x) & g'(y) & g'(z) \\ h'(x) & h'(y) & h'(z) \end{vmatrix}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} f'(x_0) & f'(y_0) & f'(z_0) \\ g'(x_0) & g'(y_0) & g'(z_0) \\ h'(x_0) & h'(y_0) & h'(z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

同时成立时，方程组就能在 $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ 的邻域内确定 x, y, z 作为 u 的函数.

（2）在 $f(x)=x, g(x)=x^2, h(x)=x^3$ 的情形下，上述条件相当于

（i） $\begin{cases} x_0+y_0+z_0=F(u_0), \\ x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=G(u_0), \\ x_0{}^3+y_0{}^3+z_0{}^3=H(u_0). \end{cases}$

（ii） $J=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 3x_0{}^2 & 3y_0{}^2 & 3z_0{}^2 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0{}^2 & y_0{}^2 & z_0{}^2 \end{vmatrix}=6(y_0-x_0)(z_0-x_0)(z_0-y_0)\neq 0$.

即 x_0, y_0, z_0 两两不等.

11. 设 $x=u, y=\dfrac{u}{1+uv}, z=\dfrac{u}{1+uw}$，取 u,v 为新的自变量，w 为新的因变量，变换方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$$

解 由 $x=u, y=\dfrac{u}{1+uv}$ 可得

$$\begin{cases} u=u(x,y)=x, \\ v=v(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

由于取 u,v 为新的自变量，w 为新的因变量，因而

$$z=\frac{u}{1+uw}=z(u,w)=z(u,w(u,v))=z(u(x,y),w(u(x,y),v(x,y))),$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot 1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{u}{(1+uw)^2}\left(1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0+0+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{u}{1+uw}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\frac{u^2}{(1+uw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}.$$

代入方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，得

$$\left(\frac{u}{1+uw}\right)^2\left(1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\left(\frac{u}{1+uw}\right)^2\cdot\frac{\partial w}{\partial v}=\left(\frac{u}{1+uw}\right)^2,$$

化简后得到 $u^2\frac{\partial w}{\partial u}=0$，即 $\frac{\partial w}{\partial u}=0$，这就是方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 用 $w=w(u,v)$ 表示的新形式.