第十章 数项级数

§1 级数问题的提出

1.证明：若微分方程$xy''+y'+xy=0$有多项式解

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n;$$

则必有$a_i=0,i=1,2,\cdots,n.$

证明：若$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$微分方程的一个解,那么

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$$
$$y''=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2};$$

于是可得

$$xy''=2a_2x+6a_3x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-1}$$
$$xy=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1}.$$

因此可知

$$xy''+y'+xy=a_1+(4a_2+a_0)x+(9a_3+a_1)x^2+\cdots+(n^2a_n+a_{n-2})x^{n-1}+a_nx^n=0$$

那么由多项式相等可知有

$$\begin{cases} a_1=0 \\ n^2a_n+a_{n-2}=0 \qquad n>2. \\ a_n=0 \end{cases}$$

递推可知有$a_i=0,i=1,2,\cdots,n$成立。

2.试确定系数$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$,使$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$满足勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0.$$

解：将级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$两次逐项求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2};$$

把它们代入勒让德方程可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+l(l-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

整理后可得

$$\begin{cases}2a_1=0\\ a_n=\dfrac{(n-2)(n-1)-l(l+1)}{(n-1)n}a_{n-2},n=2,3,4,\cdots\end{cases}$$

那么由以上递推公式可得方程的解为

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0\left[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4-\cdots\right]\\&\quad+a_1\left[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots\right]\\&=a_0y_1(x)+a_1y_2(x).\end{aligned}$$

其中a_0,a_1为任意常数,由a_0,a_1的任意性可以知道$y_1(x),y_2(x)$都是勒让德方程的特解,并且容易验证它们是线性无关的。

§2 数项级数的收敛性及其基本性质

1.求下列级数的和：

(1)$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$$

(2)$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)=\frac{2}{3}.$$

$$(4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n};$$

设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$,则$\frac{1}{2}S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,于是$S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{2^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$,

于是$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx,|r|<1;$$

解：记$S_n=\sum_{k=1}^{n}r^k\sin kx$.则

$$\begin{aligned}2r\cos xS_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(r^{k+1}2\cos x\sin kx\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}r^{k+1}\left(\sin(k+1)x+\sin(k-1)x\right)\\&=\left[S_n-r\sin x+r^{n+1}\sin(n+1)x\right]+r^2\left[S_n-r^n\sin nx\right]\\&=\left(1-r^2\right)S_n-r\sin x+r^{n+1}\sin(n+1)x-r^{n+2}\sin nx,\end{aligned}$$

于是可得

$$S_n=\frac{r\sin x-r^{n+1}\sin(n+1)x+r^{n+2}\sin nx}{1-r^2-2r\cos x};$$

由于$|r|<1$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{r\sin x}{1-r^2-2r\cos x}.$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, |r|<1;$

解：记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} r^k \cos kx$.则

$$\begin{aligned}
2r\cos xS_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(r^{k+1}2\cos x\cos kx\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n} r^{k+1}\left(\cos(k+1)x-\cos(k-1)x\right)\\
&=\left[S_n-r\cos x+r^{n+1}\cos(n+1)x\right]+r^2\left[1+S_n-r^n\cos nx\right]\\
&=\left(1+r^2\right)S_n-r\cos x+r^{n+1}\cos(n+1)x-r^{n+2}\cos nx+r^2,
\end{aligned}$$

于是可得

$$S_n=\frac{r\cos x-r^{n+1}\cos(n+1)x+r^{n+2}\cos nx-r^2}{1+r^2-2r\cos x};$$

由于 $|r|<1$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{r\cos x-r^2}{1+r^2-2r\cos x}.$$

2.讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$,故原级数发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$; 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 都收敛故原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$; $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=1\neq 0$,故原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 收敛。 (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$. 收敛。

3.证明定理10.2:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

证明:设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列分别为 $\{U_n\},\{V_n\}$.由题意可知数列 $\{U_n\},\{V_n\}$ 的极限存在,可设 $\lim_{n\to\infty}U_n=u,\lim_{n\to\infty}V_n=v.$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的部分和数列为 $\{U_n\pm V_n\}$,那么由数列极限的性质可知数列 $\{U_n\pm V_n\}$ 收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\{U_n\pm V_n\}=\lim_{n\to\infty}U_n\pm\lim_{n\to\infty}V_n=u\pm v;$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

4.设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$各项是正的,把级数的项经过组合而得到的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$,即

$$U_{n+1}=u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}},n=0,1,2,\cdots,$$

其中$k_0=0,k_0<k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}<\cdots$.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$收敛, 证明原来的级数也收敛。

证明:根据柯西收敛原理, 由级数$\sum_{n=1}^{\infty}U_n$收敛可知:$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1$时, 对于$\forall p>0$有

$$\left|U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}\right|=\left|u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+\cdots+u_{k_{n+1}}+\cdots+u_{k_{n+p-1}+1}+u_{k_{n+p-1}+2}+\cdots+u_{k_{n+p}}\right|<\varepsilon.$$

那么对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有:$\forall\varepsilon>0,\exists N=k_{N_1}>0$,当$n>N$时, 对于$\forall p>0$有

$$\left|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}\right|<\left|U_{N_1+1}+\cdots+U_{N_1+p}\right|<\varepsilon;$$

那么由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

§3 正项级数

1.判断下列级数的收敛性:

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$,由于调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,那么可以知道原级数发散。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$;　由于$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}\le\frac{1}{2^n}$,由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}=\frac{1}{2}$,那么可以知道原级数发散。

(4)$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;　由于$\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(5)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n},\alpha>1$;　由于$\frac{1}{1+\alpha^n}\le\frac{1}{\alpha^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(6)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt[n]{n}}$,而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,那么可以知道原级数发散。

(7)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$;　由于$\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n\le\frac{1}{2^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(8)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^n}$;　由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left[\ln(n+1)\right]^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$,那么可以知道原级数收敛。

(9)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$; 由于$\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(10)$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 由于$2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\le\pi\cdot\frac{2^n}{3^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$收敛,那么可以知道原级数收敛。

(11)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n\sin\frac{\pi}{5^n}$; 由于$\left(3+(-1)^n\right)^n\sin\frac{\pi}{5^n}\le\pi\cdot\frac{4^n}{5^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}$收敛,故原级数收敛。

(12)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}$; 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin 2^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)n!}}{\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)\sin 2^{\frac{1}{n}}}=0<1$,故原级数收敛;

由于$\frac{\sin 2^{\frac{1}{n}}}{n!}\le\frac{1}{n^2}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故原级数收敛。

(13)$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; 由于$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故原级数发散。

(14)$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 由于$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$,故原级数发散。

(15)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故原级数收敛。

(16)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n^2}$; 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\ln(1+n)}{n^2}=0<1$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故原级数收敛。

(17)$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\arcsin\frac{1}{n}$; 由于$\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{1}{n}\arcsin\frac{1}{n}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t\arcsin t}{t^2}=1$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故级数收敛。

(18)$\sum_{n=1}^{\infty}n\arctan\frac{\pi}{2^n}$; 由于$n\arctan\frac{\pi}{2^n}\le\frac{n\pi}{2^n}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2^n}$收敛,故原级数收敛。

(19)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2}+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$; 发散。

(20) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)$; 收敛。

2.判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$, 故发散。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\ln n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$, 故原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n2}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1$, 故收敛。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n3}{(n+1)^n}=\frac{3}{e}>1$, 故发散。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{n!e^n}{n^n}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{e}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-e\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\overset{P_5\S_2T_1(17)}{=}-\frac{1}{2}<1, \text{故发散。}$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}}=0<1$, 因此原级数收敛。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n}{2}}$; 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{3n-2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$, 因此原级数收敛。

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}$; 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(3n^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(3n^2+n)^{\frac{n+1}{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$, 因此原级数收敛。

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)},(x\ge 0)$;

解：当 $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$, 收敛;

当 $1>x>0$ 时, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}x<1$, 故收敛;

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, 故也收敛;

当 $x>1$ 时, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}0<1$, 故亦收敛.

综上当 $x\ge 0$ 时, 级数收敛。

(10) $\frac{3}{1}+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}+\cdots$.

解：可以得到级数的通项为 $u_n=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(3+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\cdots\cdot(1+3n)}$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(3+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\cdots\cdot(1+3n)}}\overset{p_3\S_2T_{16(2)}}{=}\frac{2}{3}<1,$$

因此原级数收敛。

3.判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$; 解：由于 $\exists N=9$, 当 $n>N$ 时, 有 $\frac{1}{n^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此原级数收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

解：由于 $\exists N=\left[e^{e^2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{(\ln e^{e^2})^{\ln n}}=\frac{1}{e^{2\ln n}}=\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$; 解:由于 $\frac{1}{2^{\ln n}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,因此原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$; 解:由于 $\frac{1}{3^{\ln n}}<\frac{1}{e^{1.0986\cdot\ln n}}=\frac{1}{n^{1.0986}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.0986}}$ 收敛,因此原级数收敛。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$;

解：由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$,故$\exists N>0$,当$n>N$时,$\sqrt{n}>\ln n$,即$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{3^{\ln n}}$;由上题可知此级数收敛。

(6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$;　　解：由于$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}=0$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\sqrt{n}}}$收敛。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$;

解：当$p\le 1$时，有$\frac{\ln n}{n^p}>\frac{1}{n}$,而调和级数发散，因此次级数发散;

当$p>1$时，总$\exists\delta>0$,使得$p-\delta>1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{p-\delta}\ln n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\delta}=0$;由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\delta}}$收敛,因此原级数收敛。

综上可知级数$\begin{cases}\text{发散} & p\le 1\\ \text{收敛} & p>1\end{cases}$.

(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$.

解：当$p=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;函数$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$在区间$[2,+\infty)$上单调递减且连续,显然有$f(n)=\frac{1}{n\ln n}$;极限$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$,那么由柯西积分判别法可知级数发散。

由于当$p\le 1$时,$\frac{1}{n^p\ln n}\ge\frac{1}{n\ln n}$,故可知此时级数发散。

当$p>1$时，由于$\frac{1}{n^p\ln n}<\frac{1}{n^p}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,因此此时原级数收敛。

综上可知级数$\begin{cases}\text{收敛}p>1\\ \text{发散}p\le 1\end{cases}$.

4.利用泰勒公式估算无穷小量的阶,从而判别下列级数的敛散性：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$;

解：由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)},$$

于是有

$$\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p=\left[e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^p=e^p\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p=e^p\left(\frac{1}{2n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right).$$

它与$\frac{1}{n^p}$是同阶无穷小量,因此当$p\le 1$时原级数发散, 当$p>1$时原级数收敛。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^p$;

解：易知有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^p\ln^p\left(\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

又由于

$$\begin{aligned}\ln^p\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)&=\ln^p\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{2^p}\left(-\sin^2\frac{\pi}{n}+o\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\right)^p\\&=\frac{1}{2^p}\left(-\sin^2\frac{\pi}{n}+o\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\right)^p\\&=\frac{1}{2^p}\left(-\frac{\pi}{n^{2p}}+o\left(\frac{\pi}{n^{2p}}\right)\right),\end{aligned}$$

因此它与$\frac{1}{n^{2p}}$同阶无穷小量, 于是当$p>\frac{1}{2}$时, 级数收敛;当$p\le\frac{1}{2}$时, 级数发散。

$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\frac{n-1}{n+1};$

解：由于

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{p}\ln\frac{n-1}{n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{p}\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{p}\left(-\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

因此于是级数的通项是与$\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$同阶的无穷小量，于是当$p>0$时，级数收敛；否则发散。

$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^{2}+n+b}\right).$

解：由于

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^{2}+n+b}=\frac{n+a-\sqrt{n^{2}+n+b}}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}$$

$$=\frac{(n+a)^{2}-\left(n^{2}+n+b\right)}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}\cdot\frac{1}{n+a+\sqrt{n^{2}+n+b}}$$

$$=\frac{(2a-1)n-b+a^{2}}{\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^{2}+n+b}}\cdot\frac{1}{n+a+\sqrt{n^{2}+n+b}},$$

因此当$a=\frac{1}{2}$时，级数的通项与$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是同阶无穷小量，故此时收敛；否则通项与$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是同阶无穷小量，级数发散。

5.讨论下列级数的敛散性：

$(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}};$

解：对于函数$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{p}}$，我们知道它在区间$[2,+\infty)$上连续且单调递减，显然有$f(n)=u_{n}$.

我们考察极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx.$

当$p=1$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\big|_{2}^{+\infty}=+\infty$，那么由柯西积分判别法可以知道此时级数发散；

那么当$p<1$时，由于$\frac{1}{n(\ln n)^{p}}<\frac{1}{n\ln n}$，由比较判别法可以知道此时级数发散；

当$p>1$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{2}^{t}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{2}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}=\frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}$，那么由柯西积分判别法可以知道此时级数收敛。

综上可以知道级数$\begin{cases}发散 & p\le 1\\ 收敛 & p>1\end{cases}.$

(2)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$;

解：函数$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$在区间$[2,+\infty)$上连续且单调下降，显然有$f(n)=u_n$；我们考察以下极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}dx=\ln\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

因此由柯西积分判别法可以知道级数发散。

(3)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}\cdot\ln\ln n},\sigma>0$;

解：当$\sigma>0$时，由于$\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}\cdot\ln\ln n}\le\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}}$，由本题(1)可知级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}}$收敛，那么由比较判别法可知此级数收敛。

(4)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解：当$p>1$时，由于$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\le\frac{1}{n(\ln n)^p}$，而由本题(1)可以知道级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$收敛，于是由比较判别法可以知道此时级数收敛。

当$p=1$时，若此时$q\le1$，那么由本题(2)再利用比较判别法可以知道级数发散；

若$q>1$时，由于函数$f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$在区间$[2,+\infty)$上连续且单调下降，易知$f(n)=u_n$.

我们考察极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}dx=\frac{1}{1-q}(\ln\ln\ln x)^{1-q}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{q-1}(\ln\ln\ln 2)^{1-q},$$

那么由柯西积分判别法可以知道此时级数收敛。

当$p<1$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n\ln\ln n}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{1-p}(\ln\ln n)^{1-q}=+\infty$，那么由比较判别法可以知道此时级数发散。

综上有级数$\begin{cases}\text{收敛} & p>1\text{或}p=1\text{且}q>1\\ \text{发散} & p<1\text{或}p=1\text{且}q\le1\end{cases}$.

6.利用拉阿比判别法研究下列级数的敛散性：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$, p是实数;

解：此级数的通项为$u_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$，那么

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \cdot \left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right]^p=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p;$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\frac{p}{2}.$$

因此当$p>2$时，级数收敛;当$p<2$时级数发散。当$p=2$时，拉阿比判别法失效。

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^\beta}$.

解：可以知道

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^\beta}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}\cdot\frac{1}{(n+1)^\beta}=\frac{n+1}{\alpha+n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{\alpha+n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\frac{1}{\alpha+n}}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta+1}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\alpha x}\cdot(1+x)^{\beta+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\beta+1)(1+x)^\beta(1+\alpha x)-\alpha(1+x)^{\beta+1}}{(1+\alpha x)^2}$$

$$=\beta+1-\alpha.$$

因此当$\beta>\alpha$时级数收敛，$\beta<\alpha$时级数发散。当$\beta=\alpha$时，拉阿比判别失效。

7.已知两正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，问$\sum_{n=1}^{\infty}\max(u_n,v_n),\sum_{n=1}^{\infty}\min(u_n,v_n)$两级数的收敛性如何？

解：由比较判别法易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\max(u_n,v_n)$发散。

此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\min(u_n,v_n)$可能收敛也可能发散，例如

$$u_n=\begin{cases}n & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}\quad v_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2} & n=2k\\ n & n=2k+1\end{cases};$$

两级数都发散，但$\sum_{n=1}^{\infty}\min(u_n,v_n)$收敛.

但是当$u_n=n,v_n=n$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\min(u_n,v_n)$发散。

8.若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$

证明：由于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.那么根据柯西收敛原理可以知道：$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0,$当$n>N_1$时，对于$\forall p$有

$$x_{n+p}+x_{n+p-1}+\cdots+x_n=\left|x_{n+p}+x_{n+p-1}+\cdots+x_n\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

设$\sum_{n=1}^{N_1+1}a_n=M$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$，因此$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0,$当$n>N_2$时，$\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max(N_1,N_2)>0,$当$n>N$时，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\right|\\&=\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+(N_1+1)a_{N_1+1}}{n}+\frac{(N_1+2)a_{N_1+2}+(N_1+3)a_{N_1+3}+\cdots+na_n}{n}\right|\\&\le\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+(N_1+1)a_{N_1+1}}{n}\right|+\left|\frac{(N_1+2)a_{N_1+2}+(N_1+3)a_{N_1+3}+\cdots+na_n}{n}\right|\\&\le\frac{M}{n}+\left|a_{N_1+2}+a_{N_1+3}+\cdots+a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$

9.设$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{n^2}, n\neq k^2, k=1,2,\cdots \\ a_{k^2}=\dfrac{1}{k^2}, k=1,2,\cdots \end{cases}$;

求证:(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,(2)$\lim\limits_{n\to\infty} na_n \neq 0$.

证明:(1)我们已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,那么级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2}}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$也收敛,又由于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$收敛;因此级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k^2}}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$也收敛,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

(2)数列$\{na_n\}$的一个子列$\{k^2 a_{k^2}\}$,其极限为$\lim\limits_{k\to\infty} k^2 a_{k^2}=1$,而另一个子列$\{(k^2+1)a_{k^2+1}\}$的极限为$\lim\limits_{k\to\infty}(k^2+1)a_{k^2+1}=0$;因此由海涅原理可知极限$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$不存在,于是可知$\lim\limits_{n\to\infty} na_n\neq 0$.

10.设$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$.求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$,反之是否成立?

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}}$;由于$a_n>0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}=1$,而根据$p_3\S_2T_{16(2)}$可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

因此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

反之不成立:$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{n^2}, n\neq k^2, k=1,2,\cdots \\ a_{k^2}=\dfrac{1}{k^2}, k=1,2,\cdots \end{cases}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在。

11.利用级数收敛的必要条件证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$;

证明:取$u_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=0,$$

于是我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$收敛,那么可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$成立。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0, a>1.$

证明：取$u_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{a^{(n+1)!}}\cdot\frac{a^{n!}}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n+1}}=0,$$

于是我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$收敛,那么可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$成立。

12设$a_n\geq 0$,且数列$\{na_n\}$有界,证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

证明：由于数列$\{na_n\}$有界,因此我们可设$\exists M>0$,使得$|na_n|\leq M,\forall n\in\mathbb{N}^+$.那么可知$a_n\leq\frac{M}{n}$,即$a_n^2\leq\frac{M^2}{n^2}$,我们知道级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,于是根据比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

13.设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$也收敛。

证明：由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$也收敛, 因此易知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛。

我们知道$\sqrt{a_na_{n+1}}\leq\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$,因此根据比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$也收敛。

14.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,求证：

(1)当$l>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛;

(2)当$l<1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$发散;问$l=1$时会有什么结论?

证明:(1)若$l>1$,那么$\exists\delta>0$,使得$l>1+2\delta$;由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,根据极限的保号性可知$\exists N$,当$n>N$时,$a_n>1+\delta$.

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}<\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}},$$

由于级数$\sum\limits_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$收敛,因此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛。

(2)若$l<1$,那么$\exists\delta>0$,使得$l<1-2\delta$;由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,根据极限的保号性可知$\exists N$,当$n>N$时,$a_n<1-\delta$.

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}>\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^{a_n}}+\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta}},$$

由于级数$\sum\limits_{n=N+2}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta}}$发散,因此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$发散。

(3)当$l=1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$可能收敛也可能发散。我们考察数列$a_n=1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}$,显然有极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}\right)=1$.

但是对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}}}$,可知$n^{1+\frac{p\ln\ln n}{\ln n}}=n(\ln n)^p$(两边取对数易知等式成立);此时,根据$T_{5(1)}$我们知道当$p>1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛,当$p\le 1$时级数发散。

§3 一般项级数

1.讨论下列级数的收敛性:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

解:这是个交错级数,且通项u_n满足$|u_n|=\frac{\sqrt{n}}{n+100}$单调下降趋于零,那么由莱布尼兹判别法可以知道这个级数收敛。

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$;

解:可以知道级数$\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq 2k}}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$是一个交错级数,且$\left|\frac{\ln n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|$是随$n$单调下降趋于零的,故由莱布尼兹判别法可以知道这个级数收敛;

而级数$\sum\limits_{\substack{k=1\\ n=2k}}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$必是收敛的,那么这两个级数的和也是收敛的,即原级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

解：由于

$$n+1+\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n-1}+\frac{n+1}{n}>n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}+1+\frac{n}{n+1}$$

因此有

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}>\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{n+1}.$$

再根据$p_3\S_2T_{17(1)}$可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0;$$

于是可知级数的通项u_n满足$|u_n|$单调下降趋于零。

这是个交错级数,根据莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

解：整理可得

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right);$$

于是可知原级数化为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n}\right).$$

我们知道级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)$都收敛,而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,因此原级数发散。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

解：由于

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right);$$

可以证得从$n=2$开始$\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$单调下降趋于零,那么由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$;

解：我们知道 $\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}\right|=\frac{1}{3^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 必是收敛的;因此我们知道原级数绝对收敛,因此原级数收敛。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}, p>0$;

解：由于 $\frac{1}{n^p}$ 当 $p>0$ 时单调下降趋于零, 那么由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}$;

解：由于 $\left|\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|\le\frac{1}{3^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛, 因此可以知道原级数绝对收敛。

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$;

解：我们考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$ 的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\cos 2k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{k}-2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{\cos(4k+2)}{2k+1}.$$

对于 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2k}{k}$，有

$$2\sin 1\sum_{k=1}^{n}\cos 2k=\sum_{k=1}^{n}2\sin 1\cos 2k=\sum_{k=1}^{n}\big(\sin(2k-1)-\sin(2k+1)\big)=\sin 1-\sin(2n-1),$$

因此可知

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k=\frac{\sin 1-\sin(2n-1)}{2\sin 1}\le\frac{1}{2\sin 1};$$

而数列 $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ 单调下降趋于零, 那么由狄理克雷判别法可以知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛。

同理可以知道级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)}{2n+1}$ 收敛, 因此可知原级数收敛。

$(10)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$;

解：可以整理得

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n};$$

我们知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{2n}$都收敛,因此该级数收敛。

$(11)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}, x\neq 0$;

解：根据泰勒公式可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n o\left(\frac{1}{n}\right);$$

由莱布尼兹判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x}{n},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n o\left(\frac{1}{n}\right)$都收敛,因此原级数收敛。

$(12)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$;

解：由于$\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}\right|$单调下降趋于零,因此由莱布尼兹判别法可以知道原级数收敛。

$(13)\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\cdots$;

解：由于

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1},$$

对于$\forall N$,取$n=3N, p=6N$,可以知道

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+p}+1}\right|$$
$$=\left|\frac{2}{n-1}+\cdots+\frac{2}{n+p-1}\right|=\left|\frac{2}{3N-1}+\cdots+\frac{2}{9N-1}\right|$$
$$\geq\left|\frac{6N}{9N-1}\right|\geq\left|\frac{6N}{9N}\right|=\frac{2}{3}.$$

那么由柯西收敛原理可以知道原级数发散。

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}, a>0;$

解：当$a=1$时，由莱布尼兹判别法可以知道级数收敛;

当$a>1$时，$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}\right|<\frac{1}{a^{n-1}}$，由比较判别法可知原级数绝对收敛;

当$a<1$时，由于$\frac{a}{1+a^n}$随n的变化单调有界，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，那么由阿贝尔判别法可以知道级数收敛。

综上级数始终收敛。

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n}.$

解：整理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}+\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}.$$

当$n\geq 2$时$\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$单调趋于零，而$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n, \sum_{n=1}^{\infty}\cos n$易证得有界，那么由狄理克雷判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}$都收敛，于是原级数收敛。

2.讨论下列级数是否绝对收敛或条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x};$

解：取$N=[x]+1$，则当$n>N$时，$\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|$单调下降趋于零，那么由莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right|n=1$，由于调和级数不收敛，因此由比较判别法可知此级数不绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!};$

解：由于$\left|\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right|\leq\frac{1}{n!}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$熟练，因此此级数绝对收敛。

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},0<x<\pi;$

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$,这个部分和满足

$$2\sin xS_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin x\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\left(-\cos(k+1)x+\cos(k-1)x\right)=1-\cos(n+1)x;$$

因此

$$S_n=\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin x}\le\frac{1}{|\sin x|}.$$

即对于$\forall x\in(0,\pi)$,$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和有界。

而数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调下降趋于零,因此由狄理克雷判别法可知级数收敛。

由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\ge\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n},$$

容易证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛(狄理克雷判别法),而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,因此原级数不绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

(4)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},0<x<\pi;$

解：当$0<p\le1$时，仿本题(3)可知级数条件收敛;

当$p>1$时，由于$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\le\frac{1}{n^p}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,因此级数绝对收敛;

当$p=0$时,由于$\lim_{n\to\infty}\cos nx\ne0$,可知级数发散,那么根据比较判别法可知当$p<0$时原级数发散。

综上级数$\begin{cases}\text{发散} & p\le0\\ \text{条件收敛} & p\in(0,1]\\ \text{绝对收敛} & p\in(1,+\infty)\end{cases}$.

(5)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n};$

解：可以证明$\exists N$,当$n>N$时,$\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|$单调下降趋于零,那么根据莱布尼兹判别法可以知道级数收敛。而$\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right|\ge\frac{1}{n}$,由于调和级数发散,因此此级数仅是条件收敛。

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{5^n}\sin n$;

解：由于 $\left|\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{5^n}\sin n\right|\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$，我们知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 收敛,因此由比较判别法可以知道此级数绝对收敛。

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$;

解：利用泰勒展式可得

$$(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}=(-1)^n\sqrt[n]{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+(-1)^n\sqrt[n]{n}o\left(\frac{1}{n}\right);$$

由莱布尼兹判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ 条件收敛,由比较判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

综上可知级数条件收敛。

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

解：可以知道 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调上升有上界，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 由阿贝尔判别法可知其收敛，那么由狄理克雷判别法可知原级数收敛。

由于 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|\ge\frac{1}{n}$ 因此由比较判别法可知此级数只是条件收敛。

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+\frac{1}{n}},\ p>0$;

解：根据泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{n^p+\frac{1}{n}}=\frac{(-1)^n}{n^p}\square\frac{1}{1+\frac{1}{n^{1+p}}}=\frac{(-1)^n}{n^p}\square\left(1+\frac{-1}{n^{1+p}}+o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right)\right);$$

它与 $\frac{1}{n^p}$ 是同阶无穷小量,因此当 $p>1$ 时，级数绝对收敛，当 $p\in(0,1]$ 级数条件收敛。

(10)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}, p>0;$

解：根据泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot\left(1+\frac{-p(-1)^n}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

可知$\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}$是与$\frac{1}{n^p}$同阶的无穷小量,因此级数$\begin{cases}\text{条件收敛} & p\in(0,1]\\ \text{绝对收敛} & p\in(1,+\infty)\end{cases}$.

(11)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}};$

解：当$p\in(1,+\infty)$,有$\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\le\frac{1}{n^p}$成立,可知此时级数绝对收敛;

当$p\in(0,1]$,由狄理克雷判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛,而数列$\left\{\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$单调有界,那么由阿贝尔判别法可知此时级数收敛;由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{p+\frac{1}{n}}}=\begin{cases}1 & p=1\\ +\infty & p<1\end{cases},$$

那么由比较判别法可知此时级数只是条件收敛。

当$p\in(-\infty,0]$,易知$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\neq 0$,故此时级数发散。

(12)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

解：由于

$$(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}=(-1)^n\frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n};$$

那么当$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$时总有$1>\delta>0$且$\left|2\sin^2 x\right|<\delta$,于是有$\left|(-1)^n\frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n}\right|\le\delta^n$,

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n$收敛,因此此时级数绝对收敛。

当$x\in\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$时，由于$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\left(2\sin^2 x\right)^n}{n}\ne 0$,故级数发散。

当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$时,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$,此时级数条件收敛。

其中$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(13)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n$,$\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$;

解：当$|x|>a$时，级数发散。此时$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\ne 0$.

当$|x|<a$时，级数绝对收敛。此时有极限的保号性可知$\exists N$,当$n>N$时，$\exists\delta\in(0,1)$,使得$\left|\frac{x}{a_n}\right|$

$<\delta$,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{N}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|\le\sum_{n=1}^{N}\left|\left(\frac{x}{a_n}\right)^n\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\delta^n\right|$$

由比较判别法可知此时级数绝对收敛。

当$|x|=a$时，不能判断级数的敛散性。例如$a_n=1+\frac{1}{n}$,由于$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pm1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{\pm1}{e}\ne 0$因此此时

级数发散;但是对于$a_n=\left(\frac{1}{n^p}\right)^{\frac{1}{n}}$,有$\lim_{n\to\infty}a_n=1$;$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pm1}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n^p}$,显然它随着$p$的不

同敛散性也是不同的。

(14)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^{n+\sqrt{n}}$,$r>0$;

解：当$r\ge1$,$\lim_{n\to\infty}(-1)^n r^{n+\sqrt{n}}\ne 0$,故此时级数发散。当$r\in(0,1)$易知级数绝对收敛。

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

解：当 $|x|<e$ 时，由于

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!x^n}{n^n}\right|}=\frac{n^n|x|}{(n+1)^n},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n|x|}{(n+1)^n}=\frac{|x|}{e}<1.$$

那么此时级数绝对收敛。

当 $|x|\geq e$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!x^n}{n^n}\neq 0$，因此可知此时级数发散。

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right], p>0$;

解：由泰勒展式可得

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+\frac{(-1)^n}{3n^{3p}}-\frac{1}{4n^{4p}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2k-1)n^{(2k-1)p}}-\frac{1}{2kn^{2kp}}\cdots$$

显然当 $p>1$ 时，级数绝对收敛；

当 $p\leq 1$ 级数发散。{???}

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}$;

解：由泰勒展式可得

$$\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^{\frac{p}{2}}}\cdot\left(1+\frac{p(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

显然当 $p>2$ 时，级数绝对收敛；当 $p\leq 2$ 时，级数发散。{???}

(18)$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}$.

解：由泰勒展式可得

$$\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p+\sin\frac{n}{4}\pi}=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p\left(1+\dfrac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\right)}=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)=\frac{\sin\frac{n}{4}\pi}{n^p}-\frac{\sin^2\frac{n}{4}\pi}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right);$$

当$p>1$时，级数绝对收敛;当$p\le 1$时，级数发散。$\{???\}$

3.利用柯西收敛原理判断下列级数的敛散性：

(1)$a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n+\cdots,|q|<1,|a_n|<A,n=0,1,2,\cdots;$

解：对于$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\log_q\dfrac{(1-q)\varepsilon}{A}\right]+1$，则对于$\forall p>0$及$n>N$有

$$\begin{aligned}&\left|a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots a_{n+p}q^{n+p}\right|\\<{}&A\left|q^{n+1}+q^{n+2}+\cdots q^{n+p}\right|=Aq^{n+1}\frac{1-q^p}{1-q}\\<{}&\frac{Aq^{n+1}}{1-q}<\frac{Aq^{\log_q\frac{(1-q)\varepsilon}{A}}}{1-q}=\varepsilon;\end{aligned}$$

于是由 柯西收敛原理可知级数收敛。

(2)$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots;$

解：$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{6}$，对于$\forall N,\exists n=3N,p=3N+1$这时

$$\begin{aligned}&\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{n+p}\right|=\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n+1}\right|\\=&\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+2}-\frac{1}{3N+3}+\frac{1}{3N+4}+\frac{1}{3N+5}-\frac{1}{3N+6}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-1}-\frac{1}{6N}+\frac{1}{6N+1}\right|\\>&\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+4}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N+1}\right|>\frac{N+1}{6N+1}>\frac{1}{6}=\varepsilon_0;\end{aligned}$$

那么由柯西收敛原理可知级数发散。

4.求证：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,(a_n\ge 0,n=1,2,\cdots)$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,但是反之不成立,请举出反例。

证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则必有$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,那么$\exists N$,当$n>N$时有$a_n<1$,即此时有$a_n^2<a_n$成立。

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{N}a_n^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n^2<\sum_{n=1}^{N}a_n^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n,$$

由正项级数的比较判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

反之不成立,例如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,但是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

5.若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$,问是否能断定$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛？研究例子$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},b_n=a_n+\frac{1}{n}$.

答：不能,如题中所给例子：显然有$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{a_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}=1.$

由莱布尼兹判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;但是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

由于调和级数发散, 我们知道此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散。

6.证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(A)$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(B)$都收敛, 且

$$a_n < c_n < b_n, n = 1, 2, \cdots;$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$也收敛, 若级数$A, B$都发散, 则$C$如何？

证明：由题意可知对于$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当$n > N$时, 对于$\forall p$, 有

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

$$\left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| < \varepsilon;$$

由于$a_n < c_n < b_n, n = 1, 2, \cdots$, 我们知道此时必有

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} < b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}.$$

那么此时必有下列之一成立：

$$\left| c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} \right| < \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

$$\left| c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p} \right| < \left| b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \right| < \varepsilon;$$

于是可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(C)$也收敛。

当级数A, B都发散, 则C不一定发散, 例如取$a_n = -\frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}, c_n = \frac{(-1)^n}{n}$;由于调和级数不收敛, 因此级数$A, B$都发散, 但是由莱布尼兹判别法可知级数$C$收敛。

7.证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 则当$x > x_0$时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$也收敛;若$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$发散, 则当$x < x_0$时$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$也发散。

证明：i.由于$x > x_0$, 可设$x = x_0 + \delta$, 其中$\delta > 0$; 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0+\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{\delta}};$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 而数列$\left\{ \frac{1}{n^{\delta}} \right\}$单调有界, 则由阿贝尔判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$收敛。

ii.用反证法, 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$收敛, 那么由$i$中所证可知此时级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛, 矛盾。故可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$发散。

8.求证：若数列$\{na_n\}$有极限，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛。

证明：取$b_n = 1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$；我们对$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的部分和$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$做阿贝尔变换：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n;$$

其中$B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = n$，那么

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) B_k + a_n B_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + n a_n.$$

在上式两边同时对$n \to \infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} n a_n;$$

由于数列$\{na_n\}$有极限，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛，因此可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

9.求证：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

证明：由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_0)$收敛，可以知道极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，即数列$\{a_n\}$收敛。那么可设$\forall n$，有$|a_n| < M$成立。由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$是绝对收敛，因此$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$，$\forall p > 0$有$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \varepsilon$.同样由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$，$\forall p > 0$有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

此时我们对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的余项$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} \le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| \sum_{i=n+1}^{k} b_i + M \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\le \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + M \frac{\varepsilon}{M} \le \varepsilon \cdot \varepsilon + \varepsilon = (\varepsilon + 1)\varepsilon.$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

10.求证：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

都收敛。

证明：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$有

$$|a_n b_n| \le \frac{a_n^2 + b_n^2}{2},$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛,因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$收敛,那么由正项级数的比较判别法可以知道级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛。

于是可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛, 那么可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$收敛。

取$a_n = \frac{1}{n}$,可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,收敛,那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$收敛。

11.设正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界,求证:$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛。

证明：可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}.$$

取$b_n = x_{n+1} - x_n, a_n = \frac{1}{x_{n+1}}$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0)$,由正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界可知$\{x_n\}$收敛,那么$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_0)$存在,即级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。由于正项数列$\{x_n\}$单调上升且有界可知$\left\{\frac{1}{x_{n+1}}\right\}$单调有界。

那么由阿贝尔判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$收敛。

12.对数列$\{a_n\},\{b_n\}$,定义$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,\Delta b_k=b_{k+1}-b_k$,求证:

(1)如果$\{S_n\}$有界,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛,且有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$;

(2)若果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

证明:(1)设

$$A_{n+k}=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}=S_{n+k}-S_n,k=0,1,2,\cdots,p,\forall p;$$

由于$\{S_n\}$有界可知$\{A_{n+k}\}$有界,设对$\forall n$有$|S_n|<M$成立,那么$|A_{n+k}|<2M$成立;于是可得

$$|A_n|=|A_{n+0}|=|a_n|<2M.$$

对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛的尾项部分和$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k$做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_{n+k}+A_{n+p}b_{n+p}<2M\left[\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_{n+p}|\right];$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_k|$收敛,那么由柯西收敛原理可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1,\exists p>0$有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|\Delta b_k|=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|<\frac{\varepsilon}{4M};$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当$n>N_2$有$|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$.

综上可知$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max(N_1,N_2)>0$,当$n>N$有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k<2M\left[\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_{n+p}|\right]<2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon,$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛收敛。

对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$的部分和做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(-\Delta b_k)+S_nb_n=-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\Delta b_k+S_nb_n.$$

在上式两边对$n\to\infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n+\lim_{n\to\infty}S_nb_n;$$

又因为$\{S_n\}$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}S_nb_n=0$,于是有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$.

(2)将T_9中a_n,b_n对调即可知所证成立。

13.设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 且$\lim_{n\to\infty}na_n=0$,求证$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛,且有$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

证明：取$b_n=1$,则可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛, 我们对$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$做阿贝尔变换可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_nB_n=\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})+na_n,$$

上式两边对$n\to\infty$取极限可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})+\lim_{n\to\infty}na_n,$$

由于$\lim_{n\to\infty}na_n=0$,可知$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

14.下列命题对的请给予证明,错的请举出反例：

(1)若$a_n>0$,则$a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$收敛;

答：错;如$a_n\equiv1$,则级数$a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$有0和1两个聚点。

(2)若$a_n\to0$,则$a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$收敛;

答：正确;对于这个级数的部分和数列$\{S_n\}$的偶数项必为零;而奇数项$S_{2k+1}=a_{2k+1}$,由于$a_n\to0$,可知$S_{2k+1}\to0$,于是可知级数的部分和数列趋近于零,因此级数收敛于零。

(3)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$收敛;

答：错;例如$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;但是级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

(4)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$绝对收敛;

答：正确;由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛可知$\lim_{n\to\infty}a_n^2=0$,于是可知$\exists N_1$,当$n>N_1$时,$|a_n|<1$;与此同此$\forall\varepsilon>0,\exists N_2$,当$n>N_2$时, $\forall p>0$有$\sum_{k=n}^{n+p}|a_k^2|=\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k^2\right|<\varepsilon$成立。那么$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max(N_1,N_2)$,当$n>N,\forall p>0$有

$$\sum_{k=n}^{n+p}|a_k^3|=\sum_{k=n}^{n+p}|a_n|\cdot|a_k^2|\le\sum_{k=n}^{n+p}|a_k^2|=\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k^2\right|<\varepsilon.$$

那么由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$绝对收敛。

(5)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,则a_n不趋近于零;

答：错误;调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,但是显然有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(6)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$b_n\to 1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛;

答：错误;例如取$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$b_n=\dfrac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,由莱布尼兹判别法易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,

且有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=1$成立,但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

易知后者发散,因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散。

(7)若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,$b_n\to 1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛;

答：正确;由$b_n\to 1$可知数列$\{b_n\}$有界;不妨设对于$\forall n$有$|b_n|<M$.由于$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,根据柯西收敛原理可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时,$\forall p>0$有$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\dfrac{\varepsilon}{M}$,那么此时有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_kb_k|<M\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

于是由柯西收敛原理可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

(8)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛;

答：错误;如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛,但是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

(9)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

答：错误;可见§$3T_{9(2)}$.

15.求下列极限(其中$p>1$):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$;

解：由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p>1$时收敛;那么由柯西收敛原理可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right|<\varepsilon$$

于是可知有$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]=0$成立。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$;

解：由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$在$p>1$时收敛;那么由柯西收敛原理可知对于$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当$n>N$时有

$$\left|\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right|<\varepsilon$$

于是可知有$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right]=0$成立。

16.若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$a_{n+1}\le a_n, n=1,2,\cdots$;求证:$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证明：由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,根据柯西收敛原理可知$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,对于$\forall n>N_1, p=n$有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+n}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

那么根据级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$各项非负且有$a_{n+1}\le a_n$,于是可得

$$|na_{2n}|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+n}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即$|2na_{2n}|<\varepsilon$,那么对于$\forall\varepsilon>0,\exists K=2N_1$,当$k>K$时有$|ka_k|<\varepsilon$,于是有$\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

§5 无穷级数与代数运算

1.不用可惜准则,求证：如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

证明：取$a_n^+=\frac{a_n+|a_n|}{2},a_n^-=\frac{a_n-|a_n|}{2}$,那么$0\le a_n^+\le|a_n|,0\le -a_n^-\le|a_n|$;由比较判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$都收敛,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+|a_n|+a_n-|a_n|}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^++a_n^-\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-;$$

于是易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

2.设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,求证：将相邻奇偶项交换后所成的级数收敛,且具有相同的和数。

证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和为S_n,且有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$;将相邻奇偶项交换后所成的级数的部分和为$S_n^*$,那么显然有$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1$时有$|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}$;与此同时有

$$|S_n^*-S|=|S_n^*-S_n+S_n-S|\le|S_n^*-S_n|+|S_n-S|$$

当$n=2k$时,有

$$|S_n^*-S|\le|S_n^*-S_n|+|S_n-S|=0+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon;$$

当$n=2k+1$时,有

$$|S_n^*-S|\le|S_n^*-S_n|+|S_n-S|=|a_{2k+1}-a_{2k+2}|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可知必有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,那么$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当$n>N_2$时有$|a_n|<\frac{\varepsilon}{4}$,此时有

$$|S_n^*-S|\le|a_{2k+1}-a_{2k+2}|+\frac{\varepsilon}{2}\le|a_{2k+1}|+|a_{2k+2}|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

那么综上可知$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\left(N_1,N_2\right)>0$,当$n>N$时有$|S_n^*-S|<\varepsilon$.因此可以知道交换后所成的级数收敛,且与原级数具有相同的和数。

3.求证：由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$重排所得的级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

发散。

证明：对$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$进行加括号得：

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots$$

取$u_1=1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\cdots,u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},\cdots.$

那么对于$\forall n$,有

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}}>0,$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,由于$u_n>\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\square\frac{1}{\sqrt{n}}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

这说明在加括号之前级数就是发散的,否则由定理10.19可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

4.证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛,则可把级数重排,使新级数部分和数列有一子列趋向于$+\infty$,有一子列趋向于$-\infty$.

证明：由引理1可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+,\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$分别发散到$+\infty,-\infty$.

那么我们首先在$\{u_n^+\}$依次取足够多的N_1项,并使这N_1项的和大于1;然后在$\{u_n^-\}$依次取足够多的N_2-N_1项,使这N_2项的和小于$-1\left(\text{由于}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-\text{发散到}-\infty,\text{我们知道这是可以办到的}\right)$.

同样的我们再在$\{u_n^+\}$依次取足够的N_3-N_2项,并使这N_3项的和大于2;然后在$\{u_n^-\}$依次取足够的N_4-N_3项,使这N_4项的和小于$-2\left(\text{由于}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-\text{发散到}-\infty,\text{我们知道这是可以办到的}\right)$.

持续这样下去,我们得到的新级数的部分和数列$\{S_n^*\}$,有两个子列分别满足

$$S_N^*\begin{cases}>k & N=2k+1\\<-k & N=2K\end{cases};$$

于是可知数列$\{S_N^*\}$的奇数子列是无穷大量,趋近于$+\infty$;偶数子列也是无穷大量趋近于$-\infty$.

5.已知$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=c+\ln n+r_n$,$c$是欧拉常数,$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$,求证:

(1).$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}r_m$;

(2).若把级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$的各项重排,而使依次$p$个正项的一组与依次$q$个负项的一组相交替;则新级数的和为$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证明:(1).$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}r_m$.

(2).我们首先将新级数加括号使得

$$u_n=\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right)-\left(\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq-2}\right);$$

我们考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n^*=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$,由于我们考察的只是一个“部分和”，因此在这里我们可以对它的各项进行交换, 那么可知

$$\begin{aligned}S_n^*=\sum_{k=1}^{n}u_k&=\left(H_{2np-1}-\frac{1}{2}H_{np}\right)-\frac{1}{2}H_{nq}=c+\ln(2np-1)+r_{2np-1}\\&-\frac{1}{2}\left(c+\ln(np)+r_{np}+c+\ln(nq)+r_{nq}\right)\\&=\ln\frac{2np-1}{np}+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+r_{2np-1}-\frac{1}{2}\left(r_{np}+r_{nq}\right);\end{aligned}$$

那么在上两边对$n\to\infty$取极限,又由于$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$可得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

我们重新将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的括号去掉, 设其级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,部分和为$S_n$,取

$$m_n=\max\left(\left|\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right|,\left|\frac{1}{2(n-1)q+2}+\frac{1}{2(n-1)q+4}+\cdots+\frac{1}{2nq-2}\right|\right)$$

那么可知有$\left|S_n-S_n^*\right|\le m_n<\frac{q+p}{2n-2}$,显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n-S_n^*\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{q+p}{2n-2}=0,$$

于是可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛于$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

即得所证。

6.求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$的平方(柯西乘积)是收敛的。(???怎么办呢，不会做???)

7.令$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,求证：$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$.

证明：将级数展开可知

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots.$$

由于级数$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是绝对收敛的,因此我们可得

$$\begin{aligned}&e^x\cdot e^y\\&=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots\right)\\&=1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}\right)+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y}{1!}+\frac{x}{1!}\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,y);\end{aligned}$$

其中

$$a_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\left(C_n^ix^i\cdot y^{n-i}\right)}{n!}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

因此可得

$$e^x\cdot e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}.$$

8.证明：若级数的项加括号所成的级数收敛,并且在同一个括号内项的符号相同,那么去掉括号后,此级数亦收敛;并由此考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$的收敛性。

证明：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,其中$a_n=\sum_{k=1}^{m_n}b_{n_k},b_{n_k}\ (k=1,2,\cdots,m_n)$具有相同的符号。那么必有$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,即$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1$时,$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=I$,那么$\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$,当$n>N_2$时,$\left|\sum_{k=1}^{n}a_n-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列为$\{S_n\}$,将其去掉括号后级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}b_{n_k}$的部分和数列记为$\{S_{r_n}^*\}$,其中$S_{r_n}^*=S_{n+\Delta m_{n+1}}^*=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=1}^{m_l}b_{l_k}+\sum_{k=1}^{\Delta m_{n+1}}b_{(n+1)_k},r=\sum_{i=1}^{n}m_i+\Delta m_{n+1}$;那么必有$\left|S_n-S_{r_n}^*\right|\le|a_{n+1}|$.

取$N=\max\left(\sum_{i=1}^{N_1}m_i,\sum_{i=1}^{N_2}m_i\right)$,那么对于$\forall\varepsilon>0$,当$r_n>N$时, 必有

$$\left|S_{r_n}^*-I\right|=\left|S_{r_n}^*-S_n+S_n-I\right|\le\left|S_{r_n}^*-S_n\right|+\left|S_n-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon;$$

即$\lim_{n\to\infty}S_{r_n}^*=I$,即得所证。

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$,我们取$A_k=\left\{n\,|\left[\sqrt{n}\right]=k\right\},k=1,2,3,\cdots$.则$A_k$内的元素$n$满足$:k\le\sqrt{n}\le k+1$;元素个数为$p_k=2k+1$.

我们将$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$中的同号项相加得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right];$$

显然有$\frac{2}{k+1}<\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2}{k}$;于是$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right]=0$.且易知此级数的通项是单调的。那么由莱布尼兹判别法可知加括号后的级数收敛。

因此加括号之前的级数也收敛。