第十二章 函数项级数

12.1 函数序列的一致收敛概念

1. 讨论下列函数序列在所示区域的一致收敛性：

（1） $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（2） $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$；

i） $x\in(-l,l)$， ii） $x\in(-\infty,+\infty)$；

（3） $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$，$x\in(0,1)$；

（4） $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$，

i） $x\in[a,+\infty)$， $a>0$， ii） $x\in(0,+\infty)$；

（5） $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$，

i） $x\in[a,+\infty)$， $a>0$， ii） $x\in(0,+\infty)$；

（6） $f_n(x)=\dfrac{nx}{x+n+1}$， $x\in[0,1]$；

（7） $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$，

i） $x\in[0,b]$， $b>0$， ii） $x\in[0,1]$， iii） $x\in[a,+\infty)$， $a>0$；

（8） $f_n(x)=x^n-x^{2n}$， $x\in[0,1]$；

（9） $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$， $x\in[0,1]$；

（10） $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$， $x\in(0,1)$；

（11） $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（12） $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$，

i） $x\in[-l,l]$， ii） $x\in(-\infty,+\infty)$.

解 （1） $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{x^2}=|x|=f(x).$$

$\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)}\le\frac{1}{n^2}n=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只须$n>\frac{1}{\varepsilon}$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，对一切$x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，

因此 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ 在$x\in(-\infty,+\infty)$一致收敛于 $f(x)=|x|$.

（2）$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0=f(x)$，

ⅰ）$\forall\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\le\frac{|x|}{n}<\frac{l}{n},$$

知只要$\frac{l}{n}<\varepsilon$，故$\exists N=\left[\frac{l}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，因此 $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$

在$(-l,l)$一致收敛于 $f(x)=0$.

ⅱ）$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，$\forall N,\exists n=N+1>1,\ x_n=\frac{n}{2}\pi\in(-\infty,+\infty)$，但

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\sin\frac{\pi}{2}=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

（3）$\forall x\in(0,1)$，

$$f_n(x)=\frac{x}{\frac{1}{n}+x}\to 1=f(x)\ (n\to\infty).$$

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall N,\exists n=N+1>N$，$x_n=\frac{1}{n}\in(0,1)$，但

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\frac{nx_n}{1+nx}-1\right|=\left|\frac{1}{1+1}-1\right|=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x)=\frac{nx}{1+nx}$ 在$(0,1)$不一致收敛到 $f(x)=1$.

（4） $\forall x \in (0,+\infty)$， $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx} \to 0 = f(x)\ (n\to\infty)$.

i ）$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \frac{1}{1+nx} \le \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} < \varepsilon \quad ,$$

只须 $n>\dfrac{1}{a\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{a\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，对 $x\in[a,+\infty)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

ii ）$\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0,\ \forall N$， $\exists n = N+1 > N$， $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,+\infty)$，但

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right| = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 ,$$

所以 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（5） $\forall x \in (0,+\infty)$， $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3} = \dfrac{\frac{x^2}{n}}{\frac{1}{n^3}+x^3} \to 0 = f(x)\ (n\to\infty)$.

i ）$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| =< \frac{n^2x^2}{n^3x^3} = \frac{1}{nx} \le \frac{1}{na} < \varepsilon ,$$

只须 $n>\dfrac{1}{a\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{a\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，对 $x\in[a,+\infty)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

ii ）$\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0,\ \forall N$， $\exists n = N+1 > N$， $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,+\infty)$，而

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right| = \frac{n^2\frac{1}{n^2}}{1+n^3\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 ,$$

即 $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（6） $f_n(x)=\dfrac{nx}{x+n+1}=\dfrac{x}{\dfrac{1+x}{n}+1}\to x=f(x)$（$n\to\infty$）， $x\in[0,1]$.

$\forall\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n},$$

取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in[0,1]$ 一致地成立，所以，

$f_n(x)=\dfrac{nx}{x+n+1}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于函数 $f(x)=x$.

$i)x\in[0,b],(b<1)$ $\quad ii)x\in[0,1]$ $\quad iii)x\in[a,+\infty),a>1$.

（7） $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}\to\begin{cases}0\,,\,0\le x<1\,,\\ \dfrac{1}{2},\,x=1\,,\\ 1,\;\,x>1\,,\end{cases}=f(x)\,(n\to\infty)$.

i ） $\forall\varepsilon>0$，由

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}\le x^n\le b^n,\ x\in[0,b]\,(b<1),$$

取 $N=[\log_b\varepsilon]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in[0,b]\,(b<1)$ 一致

地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[0,b]\,(b<1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

ii ） $\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}>0,\forall N$， $\exists n=N+1>N$， $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0,1]$，但

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}=\varepsilon_0,$$

所以 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛于 $f(x)=\begin{cases}0,\,0\le x<1,\\ \dfrac{1}{2},\,x=1.\end{cases}$

iii） $\forall\varepsilon>0$，由

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x^n}{1+x^n}-1\right|\le\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{a^n},\ x\in[a,+\infty]\,(a>1),$$

取 $N=[-\log_a \varepsilon]+1$，则当 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，所以 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $[a,+\infty]\,(a>1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（8） 显然，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0=f(x)$，$x\in[0,1]$.

$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}>0, \forall N$，$\exists n=N+1>N$，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0,1]$，但

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right|=\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

所以，$f_n(x)=x^n-x^{2n}$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

（9）显然，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x^n-x^{n+1})=0=f(x)$，$x\in[0,1]$.

$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}\equiv g(x)$，由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，令 $g'(x)=0$，$\Rightarrow x=\dfrac{n}{n+1}$，且 $0<x<\dfrac{n}{n+1}$ 时，$g'(x)>0$，当 $\dfrac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值，于是 $\forall x\in[0,1]$，有

$$g(x)\le\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $[0,1]$ 上一切 x 一致地成立，故 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（10）$\forall x\in(0,1)$，$f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\to 0=f(x)\;(n\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$，当 $0<x<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}=0$，故 $\exists\delta>0$，使当 $0<\dfrac{x}{n}<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right|<\varepsilon$，故取 $N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $0<\dfrac{x}{n}<\dfrac{1}{n}<\delta$，从而，$\left|\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}\right|<\varepsilon$ 对 $x\in(0,1)$ 一致地成立，故 $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

（11）当 $x>0$ 时，$f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln\left(1+e^{-nx}\right)\to 0\;(n\to\infty)$，

当 $x=0$ 时，$f_n(0)=\dfrac{1}{n}\ln 2\to 0\;(n\to\infty)$，

当 $x<0$ 时，由于 $-x=\frac{1}{n}\ln e^{-nx}<\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-nx}\right)<\frac{1}{n}\ln\left(e^{-nx}+e^{-nx}\right)=\frac{1}{n}\ln 2-x$，而 $\frac{1}{n}\ln 2-x\to -x\ (n\to\infty)$，故得 $f_n(x)\to -x\ (n\to\infty)$.

所以 $f_n(x)=\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的极限函数为 $f(x)=\begin{cases}0,\ x\ge 0,\\ -x,\ x<0.\end{cases}$

且 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{1}{n}\ln 2<\frac{1}{n}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致地成立. 所以 $f_n(x)=\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $f(x)$.

（12）显然 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-(x-n)^2}=0=f(x)$.

i）$\forall\varepsilon>0$，由于当 $x\in[-l,l]$ 时，$\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-n)^2}$，

当 $n>l$ 后，由于 $e^{-(x-n)^2}\le e^{-(x-l)^2}$，故当 $n>l$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-l)^2}$， 要使 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=e^{-(x-l)^2}<\varepsilon$，只须 $n>\sqrt{-\ln\varepsilon}+l$，取 $N=\left[\sqrt{-\ln\varepsilon}+l\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ 对 $x\in[-l,l]$ 一致地成立，故 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ 在 $[-l,l]$ 上一致收敛于 $f(x)=0$.

ii）$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\ \forall N$，取 $n=N+1>N$，$x_n=n$，但 $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$，

所以，$f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛于 $f(x)=0$.

2. 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有界，并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，求证：$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界.

证明 由于 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故 $\forall n\in N,\exists M_n>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，有 $\left|f_n(x)\right|\le M_n$，又 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，设极限函数为 $f(x)$，则对 $\varepsilon=1>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<1$，显然 $\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|<1$，由此推出

$$\left|f(x)\right|\le\left|f_{N+1}(x)\right|+1\le M_{N+1}+1,$$

从而 $\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|+1\le M_{N+1}+2$ 对一切 $n>N$ 成立.

取 $M=\max\{M_1, M_2, \cdots, M_N, M_{N+1}+2\}>0$，则 $\forall x\in[a,b]$，$\forall n$，有

$$|f_n(x)|\le M,$$

即 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界.

3. 设 $f(x)$ 定义于 (a,b)，令

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

求证：$f_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛于 $f(x)$.

证明 由于 $nf(x)-1<[nf(x)]\le nf(x)$，所以，

$$f(x)-\frac{1}{n}<f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\le f(x)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$. $\forall\varepsilon>0$，由于 $-\frac{1}{n}<f_n(x)-f(x)\le 0$，故

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n},$$

$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，$\forall n>N$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 (a,b) 中一切 x 成立，故 $f_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛于 $f(x)$.

4. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有连续的导数 $f'(x)$，且

$$f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],$$

求证：在闭区间 $[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$ 上，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$.

证明 $f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]=\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\to f'(x)\ (n\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$，由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 连续，故 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$ 连续，因而一致连续，故 $\exists\delta>0$，$\forall x', x''\in[\alpha,\beta]$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 而

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]-f'(x)\right|=\left|f'(x+\frac{1}{n}\theta)-f'(x)\right|,\quad 0<\theta<1,$$

故只要$\frac{\theta}{n}<\frac{1}{n}<\delta$，即$n>\frac{1}{\delta}$，就有$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，

就有$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon$对$x\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$一致地成立，故$f_n(x)$一致收敛于$f'(x)$.

5．设$f_1(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，定义函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)dt \quad (n=1,2,\cdots),$$

求证：$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于 0.

证明 由于$f_1(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，故必有界，即$\exists M>0,\ \forall x\in[a,b]$，有

$|f_1(x)|\le M$. 所以，

$$|f_2(x)|=\left|\int_a^x f_1(t)dt\right|\le\int_a^x|f_1(t)|dt\le M(x-a),$$

$$|f_3(x)|=\left|\int_a^x f_2(t)dt\right|\le\int_a^x|f_2(t)|dt\le\int_a^x M(t-a)dt=\frac{1}{2}M(x-a)^2,$$

如此，用数学归纳法，易证

$$|f_{n+1}(x)|\le\frac{1}{n!}M(x-a)^n,\ n=1,2,\cdots,$$

故$\forall x\in[a,b]$，有

$$|f_{n+1}(x)|\le\frac{1}{n!}M(x-a)^n\le\frac{1}{n!}M(b-a)^n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以，$f_{n+1}(x)\to 0\ (n\to\infty)$. 即$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，$x\in[a,b]$.

同样，$\forall n\in N$，由$|f_{n+1}(x)-0|\le\frac{1}{n!}M(b-a)^n\to 0\ (n\to\infty)$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|f_{n+1}(x)-0|<\varepsilon$，所以$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于 0.

6．问参数α取什么值时，

$$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx},\quad n=1,2,\cdots$$

在闭区间$[0,1]$收敛？在闭区间$[0,1]$一致收敛？使$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx$可在积分号下取极限？

解 $\forall\alpha$，当$x=0$时，$f_n(x)=0,\ n=1,2,\cdots$，当$0<x\le 1$时，

$$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}=\frac{n^\alpha x}{e^{nx}}\to 0\ (n\to\infty),$$

故不论参数α取何值，$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$在闭区间$[0,1]$收敛于函数$f(x)=0$. 因为

$$f_n'(x)=n^{\alpha}[e^{-nx}+e^{-nx}(-n)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx),$$

所以 $f_n(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 取最大值 $f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}=n^{\alpha-1}e^{-1}$，即

$$\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)\le n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

故当 $\alpha<1$ 时，因为 $n^{\alpha-1}e^{-1}\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于 $f(x)=0$.

当 $\alpha\ge 1$ 时，$\exists\varepsilon_0=e^{-1}>0$，$\forall N$，$\exists n=N+1>n$，$x_n=\frac{1}{n}\in[0,1]$，但

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}=n^{\alpha-1}e^{-1}\ge e^{-1}=\varepsilon_0,$$

故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛.

由于

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 n^{\alpha}xe^{-nx}dx=-n^{\alpha-1}\int_0^1 xd(e^{-nx})=-n^{\alpha-1}[e^{-n}-\int_0^1 e^{-nx}dx]$$

$$=-n^{\alpha-1}[e^{-n}+\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n}]=-n^{\alpha-2}e^{-n}(n+1)+n^{\alpha-2},$$

所以，当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=0$，$\alpha=2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=1$，$\alpha>2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx=+\infty$，而 $\int_0^1 f(x)dx=0$，因此当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限.

7．证明序列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}\ (n=1,2,\cdots)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上收敛，但

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx\ne\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

证明 当 $0<x\le 1$ 时，$f_n(x)=nxe^{-nx^2}\to 0\ (n\to\infty)$，当 $x=0$ 时，$f_n(x)=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，$x\in[0,1]$. 故 $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0$，而

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx^2}d(nx^2)=\frac{1}{2}(1-e^{-n}),$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n})=\frac{1}{2}\ne 0=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

8．设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续，且 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $f(x)$. 求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明 由于 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $f(x)$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}，\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)\text{成立}.$$

又由 $f_{N+1}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$\left|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f(x_1)-f_{N+1}(x_1)+f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)+f_{N+1}(x_2)-f(x_2)\right|$$

$$\le\left|f(x_1)-f_{N+1}(x_1)\right|+\left|f_{N+1}(x_1)-f_{N+1}(x_2)\right|+\left|f_{N+1}(x_2)-f(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

9．设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数序列，且 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$；又 $x_n\in[a,b]\ (n=1,2,\cdots)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

证明 由已知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，因而 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\in[a,b]$，故对上述 $\delta>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$，因而当 $n>N_1$ 时，

$$\left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

而 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $x\in[a,b]$ 一致地成立.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，同时成立

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ ,\qquad \left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，当 $n>N$ 时，

$$\left|f_n(x_n)-f(x_0)\right|=\left|f_n(x_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(x_0)\right|$$

$$\le\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|+\left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x_0)$.

10. 设 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$， $x_0\in(a,b)$ 且

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n\ (n=1,2,\cdots).$$

证明： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且相等，即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

证明 由于 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，故由函数列 Cauchy 收敛准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$ 时，有

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对 $x\in(a,b)$ 一致地成立．注意到 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n\ (n=1,2,\cdots)$， 在上式中令 $x\to x_0$ 左右取极限，就有 $\left|a_n-a_m\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ，由数列的 Cauchy 收敛准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设极限值为 a，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $\left|a_n-a\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

又 $\{f_n(x)\}$ 是在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，对 $x\in(a,b)$ 一致地有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则以下两式同时成立

$$\left|f_{N+1}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad \left|a_{N+1}-a\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x)=a_{N+1}$，故 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a,b)$ 且 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f_{N+1}(x)-a_{N+1}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

故当 $x\in(a,b)$ 且 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f(x)-a\right|=\left|f(x)-f_{N+1}(x)+f_{N+1}(x)-a_{N+1}+a_{N+1}-a\right|$$

$$\le \left| f_{N+1}(x) - f(x) \right| + \left| f_{N+1}(x) - a_{N+1} \right| + \left| a_{N+1} - a \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

11. 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积.

证明 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x \in [a,b]$ 一致地成立，所以，

$$\left| f_{N+1}(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x \in [a,b]$ 一致地成立，因而

$$f_{N+1}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_{N+1}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

对 $x \in [a,b]$ 一致地成立.

由于 $f_{N+1}(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积，故对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对一切分划 Δ，当分划的小区间的最大长度 $\lambda < \delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(N+1)} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $\omega_i^{(N+1)} = M_i^{(N+1)} - m_i^{(N+1)} = \sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f_{N+1}(x) - \inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f_{N+1}(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$.

若设 $M_i = \sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$，而 $m_i = \inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$，$\omega_i = M_i - m_i$，则

$$M_i \le M_i^{(N+1)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\ ,\ m_i \ge m_i^{(N+1)} - \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

所以，

$$\omega_i \le \omega_i^{(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ (i=1,2,\cdots,n).$$

故当 $\lambda < \delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_1\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}(\omega_i^{(N+1)}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)})\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(N+1)}\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon,$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积.

§12.2 函数项级数的一致收敛性及其判别法

1．求出下列函数项级数的收敛区域（绝对的和条件的）：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$；

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$；

（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；

（4）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$.

解（1）由于 $|x|<1$ 时，

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}<|x|^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 在 $|x|<1$ 时绝对收敛；

当 $|x|>1$ 时，

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}<\frac{1}{|x|^n}=\left(\frac{1}{|x|}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ 当 $|x|>1$ 时收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 在 $|x|>1$ 时绝对收敛；

$x=\pm1$ 时，级数的一般项分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{(-1)^n}{2}$，故发散．所以，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的绝对收敛区域为 $(-\infty,+\infty)\setminus\{-1,1\}$.

（2）解不等式$\left|\frac{x}{2x+1}\right|\ge 1$，得$-1\le x<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x\le -\frac{1}{3}$，因而当$-1\le x<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<x\le -\frac{1}{3}$时，级数的一般项$\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$当$n\to\infty$时不趋向于零，故这时级数发散；而当$x<-1$或$x>-\frac{1}{3}$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$绝对收敛，$\frac{n}{n+1}$单调上升且有界，由 Abel 判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{x}{2x+1}\right|^n$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$绝对收敛．所以绝对收敛域为$(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$．

（3）由$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$，得$x<-1$或$-1<x<0$，因而当$x<-1$或$-1<x<0$时，$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\to+\infty$，且$\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\to\infty\ (n\to\infty)$，故级数发散；

当$x=0$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$条件收敛；

当$x>0$时，由于$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$绝对收敛，而$\frac{1}{2n-1}$单调递减有界，由 Abel 判别法，这时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$绝对收敛；

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$绝对收敛域$(0,+\infty)$，条件收敛域$x=\{0\}$，收敛域$[0,+\infty)$．

（4）当$|a|>1$时，由于$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}<\frac{1}{\sqrt{n}x^2}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}x^2}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$对一切$x\ne 0$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$对一切$x\ne 0$收敛，而当$x=0$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散．

当$|a|\le 1$时，由于$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(1+x^2)}$对一切$x$发散，

因而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^n}$对一切$x$发散.

综上，当$|a|>1$时，收敛域也是绝对收敛域为$R\setminus\{0\}$，当$|a|\le 1$时，收敛域为ϕ.

2．按定义讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，$x\in[0,1]$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解（1）$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k=1-x^n\to s(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$（$n\to\infty$）.

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，$\forall N$，$\exists n=N+1>N$，$x_n=\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\in[0,1]$，但

$$|s_n(x_n)-s(x_n)|=\left|1-\left(\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\right)^n-1\right|=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$不一致收敛.

（2）$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}=-x^2\sum_{n=1}^{n}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^k=-x^2\frac{-\frac{1}{1+x^2}\left[1-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{x^2}{2+x^2}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^2)^n}\right]\to s(x)=\frac{x^2}{2+x^2}\ (n\to\infty).$$

由于$|s_n(x)-s(x)|=\frac{x^2}{2+x^2}\frac{1}{(1+x^2)^n}\equiv f(x)$，则

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2+n-1+\sqrt{n^2+1})(x^2+n-1-\sqrt{n^2+1})}{(2+x^2)^2(1+x^2)^{n+1}},$$

求得$f(x)$的稳定点$x=0$，$x=\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1}$，可判定$x=0$为极小值点$f(0)=0$，

又$f(x)\ge 0$，故$f(0)=0$为最小值，而$x=\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1}$为极大值点，也是最大值点，最大值为

$$f(\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1})=\frac{\sqrt{n^2+1}-n+1}{\sqrt{n^2+1}-n+3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n^2+1}-n+2)^2}$$

$$=\frac{2n}{3n-4}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n-3}{\sqrt{n^2+1}+n-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n-2\right)^n}{(4n-3)^n}<\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n \quad （当 n>1 时）$$

$$\to 0\ (n\to\infty),$$

所以，

$$|s_n(x)-s(x)|=f(x)\le f(\pm\sqrt{\sqrt{n^2+1}-n+1})<\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n \quad （n>1），$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>1$，$\forall n>N$ 时，$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致地成立，因而 $\{s_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于 $s(x)$，因此函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛于和函数 $s(x)=\frac{x^2}{2+x^2}$.

3．讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$， $x\in[0,+\infty)$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x+2^n}$， $x\in(-2,+\infty)$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$， $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$；

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$， $x\in[0,+\infty)$；

（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$， $x\in[0,1]$；

（9）$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right)$， $x\in(-\infty,+\infty)$；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$， $|x|\ge r>1$；

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$， $x\in[a,+\infty), a>1$.

解（1）因为$\left|\frac{\sin nx}{n^4+x^4}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，由M判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（2）由于$\frac{|x|}{1+n^4x^2}\le\frac{|x|}{2\sqrt{n^4x^2}}=\frac{1}{2n^2}$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

（3）因为$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$对一切$x\in[0,+\infty)$成立，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}$在$[0,+\infty)$一致收敛.

（4）由于$\left|\frac{\sin nx}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-2}\le\frac{1}{2^n-2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\ge 2)$ 对一切$x\in(-2,+\infty)$成立，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，因而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x+2^n}$在$(-2,+\infty)$一致收敛.

（5）由$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\le\frac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}$对$x\in(-\infty,+\infty)$一致地成立，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$在$(-\infty,+\infty)$一致的收敛.

（6）由$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\le\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\le\frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$对于$\frac{1}{2}\le|x|\le 2$一致地成立，

且由于$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{(n+1)+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\Big/\frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{n^2\sqrt{n+1}}=0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$收敛，

因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 在 $\frac{1}{2}\le|x|\le 2$ 一致收敛.

（7）当 $x>0$ 时，$e^{nx}>1+nx+\frac{1}{2}n^2x^2>\frac{1}{2}n^2x^2$，所以 $e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$，故 $x>0$ 时，$x^2e^{-nx}<\frac{2}{n^2}$，该式对 $x=0$ 显然也成立，故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，用 M 判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

（8）设 $f(x)=-x\ln x$，则 $f'(x)=-\ln x-1$，求得稳定点 $x=\frac{1}{e}$，且在 $x=\frac{1}{e}$ 取极大值 $\frac{1}{e}$. 又 $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$，$f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上最大值为 $\frac{1}{e}$（补充定义 $f(0)=0$. 因而 $\forall x\in[0,1]$，$f(x)\le\frac{1}{e}$.

所以 $\frac{|x^n\ln^n x|}{n!}=\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\le\frac{1}{e^n n!}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n n!}$ 由 D′ Alembert 判别法知其收敛，故由 M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛.

（9）因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right)$

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}\right|=\frac{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{(n-1)^2}}}\le\frac{(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2},\quad \forall x\in(-\infty,+\infty),$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛，故原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

（10）$\left|\frac{n}{x^n}\right|=\frac{n}{|x|^n}\le\frac{n}{r^n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{r^{n+1}}\Big/\frac{n}{r^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{rn}=\frac{1}{r}<1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^n}$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $|x|\ge r>1$ 一致收敛.

（11）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+nx)}{n}=\lim_{n\to\infty}[\ln(1+(n+1)x)-\ln(1+nx)]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{1+nx}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}+n}\right)=0,$$

对 $x\in[a,+\infty)$ $(a>1)$ 一致地成立，故 $\exists N$，当 $n>N$ 时，$\frac{\ln(1+nx)}{n}\le 1$，从而当 $n>N$ 时，

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\le\frac{1}{x^n}\le\frac{1}{a^n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>1)$ 一致收敛.

4．讨论下列函数项级数的一致收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$，$x\in[0,2\pi]$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$，$x\in(-1,+\infty)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，$x\in(0,+\infty)$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，$|x|\le a$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$，$x\in[-1,0]$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$x\in[-1,1]$.

解（1）由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{3}$ 的部分和序列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{3}\right\}=\left\{\frac{\sin\pi-\sin\frac{(2n+1)\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}}\right\}$$

有界 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，因而在 $(-\infty,+\infty)$ 一致有界，对每一固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$，数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$ 是单调下降的，且当 $n\to\infty$ 时，函数序列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$ 一致趋向于 0，因而有 Dirichlet 判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

（2）由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin x\sin nx$ 的部分和序列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right)\right\}=\left\{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)}{2}x\right)\right\}$$

有界 2，因而在 $[0,2\pi]$ 一致有界，对每个固定的 $x\in[0,2\pi]$，数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$ 单调递减且当 $n\to\infty$ 时，函数序列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$ 一致趋向于 0，由 Dirichlet 判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ 在 $[0,2\pi]$ 一致收敛.

（3）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和序列 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界 1，因而在 $(-1,+\infty)$ 一致有界，而序列 $\left\{\frac{1}{x+n}\right\}$ 对每个 $x\in(-1,+\infty)$ 单调递减且一致趋向于 0，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $(-1,+\infty)$ 一致收敛.

（4）取 $b_n(x)=(-1)^n$，$a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$，则显然 $\left|\sum_{k=2}^{n+1}b_x(x)\right|=\left|\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\right|\le 1$，而 $a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$ 对每个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且对所有 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $\left|\frac{1}{n+\sin x}\right|\le\frac{1}{n-1}\to 0$，因此 $a_n(x)=\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致趋向于 0，据 Dirichlet

判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

（5）$\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x}\right|\le 2^n\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 绝对收敛，从而收敛．但由于 $\exists\varepsilon_0=1>0$，$\forall N$，$\exists n=N+1>N$，$x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，而

$$\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x_n}\right|=\left|2^n\sin\frac{1}{3^n\frac{2}{3^n\pi}}\right|=\left|2^n\sin\frac{\pi}{2}\right|=2^n>1,$$

因而级数的一般项 $2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 不一致趋于 0，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

（6）取 $b_n(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$．则显然

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right|\le 2\quad(\forall n),$$

$a_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$ 对每一个 $x:|x|\le a$ 单调递减，且

$$|a_n(x)|=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

因此数列 $\{a_n(x)\}=\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\right\}$ 在 $|x|\le a$ 一致趋于 0，因此，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$ 在 $|x|\le a$ 一致收敛.

（7）取 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=x^n$，则 $\forall n$，有 $\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}x^k\right|=\left|\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right|\le 2$，

而 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调下降且趋于 0，因此在 $[-1,0]$ 一致趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 在 $[-1,0]$ 一致收敛.

（8）取 $b_n(x)=(-1)^n x^{2n+1}$，$a_n(x)=\dfrac{1}{2n+1}$，则 $\{a_n(x)\}$ 单调下降且在 $[-1,1]$ 一致趋于零，显然，$\forall n$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^{2k+1}\right|=\frac{\left|x^3(1-(-x^2)^n)\right|}{1+x^2}\le 2,$$

由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛.

5．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为一致收敛，但对任何 x 并非绝对收敛；而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛，但并不一致收敛.

证明 取 $b_n(x)=(-1)^{n-1}$，$a_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$，则 $\forall n$，$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\le 1$，而 $a_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$ 对每个 x 单调递减，且由于 $|a_n(x)|\le\dfrac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $\{a_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致趋于 0，由 Dirichlet 判断法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛．但 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists N$，当 $n\ge N$ 时，有 $n\ge x^2$，所以，当 $n\ge N$ 时，有

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n+x^2}\ge\frac{1}{2n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n+x^2}\right|$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+x^2}$ 对任何 x 并非绝对收敛.

而对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，若 $x=0$，则显然收敛；若 $x\ne 0$，则由于，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\bigg/\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 绝对收敛．而由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1=s(x),$$

所以，

$$|s_n(x)-s(x)|=\left|\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)-1\right|=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e<3$，故 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$．$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}>0$，$\forall N$，$\exists n=\max\{N+1,N_1\}>N$，$x_n=\sqrt{\dfrac{1}{n}}\in(-\infty,+\infty)$，但

$$|s_n(x_n)-s(x_n)|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛.

6．设每一项 $\varphi_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点为绝对收敛，那么这级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明 由于 $\varphi_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，不妨设为单调增函数，则 $\forall x\in[a,b]$，有 $\varphi_n(a)\le\varphi_n(x)\le\varphi_n(b)$，因此 $\forall x\in[a,b]$，有 $|\varphi_n(x)|\le\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点为绝对收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}$ 收敛，由 M 判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

7．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一般项 $|u_n(x)|\le c_n(x)$，$x\in X$，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 在 X 上一致收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上也一致收敛且绝对收敛.

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 在 X 上一致收敛，由 *Cauchy* 原理，$\forall\varepsilon>0$，存在与 x 无关的 N，只要 $n>N$，$\forall p$，$\forall x\in[a,b]$，都有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}c_k(x)\right|=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}c_k(x)<\varepsilon$，因此当 $n>N$ 时，$\forall p$，

$\forall x\in[a,b]$，都有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k(x)<\varepsilon$，同样由 $Cauchy$ 原理，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛；又由于 $\forall x\in X$，$|u_n(x)|\le c_n(x)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛.

§12.3 和函数的分析性质

1. 研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，　$-1<x<1$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，　$-1\le x<1$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，　$|x|\le 1$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$，　$0<x<+\infty$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$，　$|x|>0$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$，　$|x|<\infty$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$，　$|x|>0$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，　$|x|<\infty$.

解（1）$\forall x_0\in(-1,1)$，有 $|x_0|<1$，取 $|x_0|<r<1$，则级数在 $|x|\le r$ 一致收敛于和函数 $s(x)$，而每一项函数 x^n 在 $|x|\le r$ 连续，由和函数的连续性知 $s(x)$ 在 $|x|\le r$ 连续，因而在 x_0 连续，由 $x_0\in(-1,1)$ 的任意性知级数所表示的函数在 $(-1,1)$ 连续.

（2）$\forall x_0\in[-1,1)$，取 $r>0$，使 $x_0<r<1$，则在 $[-1,1)$，取 $b_n(x)=x^n$，

$a_n(x)=\dfrac{1}{n}$，则 $\forall n$，有 $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n} x^k\right|\le\dfrac{2}{1-r}$ ，而 $\{a_n(x)\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递减趋于 0，因而在 $[-1,r)$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 一致收敛于其和函数 $s(x)$，又级数的每一项函数 $\dfrac{x^n}{n}$ 在 $[-1,r)$ 连续，因而 $s(x)$ 在 $[-1,r)$ 连续，特别地 $s(x)$ 在 $x_0\in[-1,r)$ 连续，由 $x_0\in[-1,1)$ 的任意性知级数所表示的函数在 $[-1,1)$ 上连续.

（3）由于 $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right|=\dfrac{|x^n|}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$ ，$\forall x\in[-1,1]$ 成立，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故由 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 在区间 $[-1,1]$ 一致收敛，而级数的每一项 $\dfrac{x^2}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 连续，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 所表示的函数在 $|x|\le 1$ 连续.

（4） $\forall x\in(0,+\infty)$，有 $\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}<\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛，级数的每一项 $\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，由连续性定理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 所表示的函数在 $(0,+\infty)$ 连续.

（5） $\forall x_0$：$|x_0|>0$，$\exists\delta>0$，满足 $|x_0|>\delta$，在 $|x|\ge\delta$ 上考虑问题. 由于 $|x|\ge\delta$ 时，有 $\dfrac{1}{1+n^2x^2}\le\dfrac{1}{1+n^2\delta^2}<\dfrac{1}{n^2\delta^2}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\delta^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $|x|\ge\delta$ 一致收敛，又级数每一项在 $|x|\ge\delta$ 连续，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ 在 $|x|\ge\delta$ 上连续，特别在 x_0： $|x_0|>0$ 连续. 由 x_0： $|x_0|>0$ 的任意性，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ 所表示的函数在 $|x|>0$ 连续.

（6）级数的每一项 $\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，又 $\left|\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\le\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(\forall n)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 所表示的函数在

$(-\infty,+\infty)$ 连续.

（7）$\forall x_0$，满足 $|x_0|>0$，$\exists\delta>0$，使 $0<\delta<|x_0|$，当 $|x|\ge\delta$ 时，有

$$\frac{|nx|}{1+n^4x^2}\le\frac{n|x|}{n^4x^2}=\frac{1}{n^3|x|}\le\frac{1}{n^3\delta},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\delta}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $|x|\ge\delta$ 一致收敛，又级数的每一项 $\frac{nx}{1+n^4x^2}$ 在 $|x|\ge\delta$ 连续，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$ 所表示的函数在 $|x|\ge\delta$ 连续，特别地在 x_0 连续，由 x_0：$|x_0|>0$ 的任意性知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$ 所表示的函数在 $|x|>0$ 连续.

（8）和函数为 $s(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1$，$x\ne0$；而 $x=0$ 时，和为 $s(0)=0$，显然 $s(x)$ 在 $x\ne0$ 连续，在 $x=0$ 间断，且为可去间断点，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 所表示的函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续，在 $x=0$ 间断，且为可间断点.

2．求证 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，并有连续导函数.

证明 由于级数的每一项 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{|\sin nx|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，使用 M 判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛，因而函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

又 $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{1}{n^3}n\cos nx=\frac{1}{n^2}\cos nx$，同样，$\frac{1}{n^2}\cos nx$ 对每一个 n 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$\left|\frac{1}{n^2}\cos nx\right|\le\frac{1}{n^2}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，因此 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos x$

连续.

3．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$，求证：

（1） $f(x)$ 在 $x\geq 0$ 上连续；

（2） $f(x)$ 在 $x>0$ 内无穷次可微.

证明（1）当 $x\geq 0$ 时，$e^{-nx}\leq 1$，故 $\forall n$，

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\leq\frac{1}{1+n^2}<\frac{1}{n^2},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛及 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，级数的每一项 $\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 都在 $[0,+\infty)$ 连续，因此 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

(2) $\forall x_0\in(0,+\infty)$，$\exists r$，满足 $0<r<x_0$，而 $\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$，由于 $\forall n$，当 $x\in[r,+\infty)$ 时，$\left|\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}\right|=\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\leq\frac{n}{1+n^2}e^{-nr}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)r}}{1+(n+1)^2}\Big/\frac{ne^{-nr}}{1+n^2}=e^{-r}<1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}e^{-nr}$ 收敛，由 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 一致收敛，所以 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 连续，特别在 x_0 连续，由 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性知 $f'(x)$ 在 $x>0$ 可微.

若设 $f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $x>0$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x>0$ k 次可微，则 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，同样 $\exists\delta>0$，使 $0<r<x_0$，而 $\left(\frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 连续，且由 $\forall n$，当 $x\in[r,+\infty)$ 时，

$$\left|\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}\right|\leq\frac{n^{k+1}}{1+n^2}e^{-nr},$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k+1}e^{-(n+1)r}}{1+(n+1)^2}\Big/\frac{n^k e^{-nr}}{1+n^2}=e^{-r}<1,$$

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{1+n^2}e^{-nr}$ 收敛，由 M 判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[r,+\infty)$ 一致收敛，因此有 $\left[f^{(k)}(x)\right]'=f^{(k+1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}n^{k+1}e^{-nx}}{1+n^2}$ 存在且连续于 $[r,+\infty)$，特别地在点 $x_0\in(0,+\infty)$，$f(x)$ 的 $k+1$ 阶导数存在且连续，由 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性，知 $f(x)$ 的 $k+1$ 阶导数存在且连续，由归纳法原理，$f(x)$ 在 $x>0$ 任意次可微.

4．证明 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

证明 $\forall x_0>0$，$\exists\delta>0$，使 $\delta<x_0$，在 $x\in[\delta,+\infty)$ 时级数的项 ne^{-nx} 连续，且 $ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\delta}$ 收敛，因而用 M 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 连续，特别地在 $x_0\in(\delta,+\infty)$ 连续，由 $x_0>0$ 的任意性，知 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

5．设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，$u_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）在 $[a,b]$ 上连续，求证：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

（2）$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明（1）$\forall\varepsilon>0$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，$\exists N$ 与 x 无关，$\forall n>N$，$\forall p$，在 $x\in(a,b)$ 一致地有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由于 $u_n(x)$（$n=1,2,\cdots$）在 $[a,b]$ 上连续，在上式两边分别令 $x\to a^+$，$x\to b^-$ 取极限

就有

$$\left|u_{n+1}(a)+u_{n+2}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

$$\left|u_{n+1}(b)+u_{n+2}(b)+\cdots+u_{n+p}(b)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\quad,$$

因而，当$n>N$时，$\forall p\in N$，有$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$对一切$x\in[a,b]$成立，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

（2）由和函数的连续性定理，立知$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上连续.

6．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

证明　$\forall x>0$，当n增加时$\frac{1}{n^x}$减少，且都小于 1，由 Abel 判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$(0,+\infty)$一致收敛，设$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^x}$，则$s_n(x)\to s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$，　$x\in(0,+\infty)$，又$\lim_{x\to0^+}s_n(x)=\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^x}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0^+}\frac{a_k}{k^x}=\sum_{k=1}^{n}a_k$，由 § 12. 2 习题 10 知$\lim_{x\to0^+}s(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$，即$\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

7．证明

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$$

当$|r|<1$时成立，从而证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=2\pi\quad（|r|<1）.$$

证明　由 § 10. 1 习题 1（6）知$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=\frac{r\cos x-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$，$|r|<1$，所以

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=1+\frac{2(r\cos x-r^2)}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$

当$|r|<1$时成立.

又$|r|<1$时，$\forall n$有$|2r^n\cos nx|\le 2|r|^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}2|r|^n$收敛，由M判别法级数$\sum_{n=1}^{\infty}2r^n\cos nx$当$|r|<1$时在$(-\infty,+\infty)$一致收敛，因而级数$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$当$|r|<1$时在$(-\infty,+\infty)$一致收敛，且级数的每一项$1,\ 2r^2\cos 2x,\cdots,\ 2r^n\cos nx,\cdots$均在$(-\infty,+\infty)$连续，因此在$(-\infty,+\infty)$的任一闭子区间上可逐项积分，因而得到，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}r^n\cos nxdx=2\pi .$$

8．用有限覆盖定理证明Dini定理.

证明 Dini定理 若在闭区间$[a,b]$上，$u_n(x)\ge 0$（$n=1,2,\cdots$）且在$[a,b]$连续，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$逐点收敛到$s(x)$，$s(x)$在$[a,b]$连续，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛.

由于$u_n(x)\ge 0$，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和序列$\{s_n(x)\}=\left\{\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right\}$是单调上升的，令$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$，则$r_n(x)$单调下降趋于零，故$\forall n$，$\forall x\in[a,b]$，有$r_n(x)\ge 0$，且$\forall x_0\in[a,b]$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(x_0,\varepsilon)>0$，$n>N(x_0,\varepsilon)$时，有$0\le r_n(x_0)<\varepsilon$.

固定$n=N_0+1=N(x_0,\varepsilon)+1$，由于$r_n(x)$在$[a,b]$连续，既然$r_n(x_0)<\varepsilon$，故$\exists\delta_0>0$，当$x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta)$时，$r_n(x)<\varepsilon$，从而$n>N_0$时更有$r_n(x)<\varepsilon$，即

$$|r_n(x)|<\varepsilon \quad (x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta)\cap[a,b]),$$

如上所述，对每一个点$x_\lambda\in[a,b]$，可找到相应的邻域$(x_\lambda-\delta_\lambda,x_\lambda+\delta_\lambda)$以及对应的$N_\lambda$，使得当$n>N_\lambda$时，对$x\in(x_\lambda-\delta_\lambda,x_\lambda+\delta_\lambda)\cap[a,b]$，恒有$|r_n(x)|<\varepsilon$. 如此开区间集合$\{(x_\lambda-\delta_\lambda,x_\lambda+\delta_\lambda):x_\lambda\in[a,b]\}$构成了$[a,b]$的一个开覆盖，从而由有限覆盖定理，必存在子覆盖. 不妨设子覆盖为

$$\{(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\cdots,(x_r-\delta_r,x_r+\delta_r)\}.$$

于是$\forall x\in[a,b]$，$\exists i\ (1\le i\le r)$，使得$x\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$，取$N=\max\limits_{1\le i\le r}\{N_i\}$，则

当 $n > N$ 时，就有 $|r_n(x)| < \varepsilon$，因此 $r_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0，因此证得了 $s_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $s(x)$.

9．设 $\{x_n\}$ 是 $(0,1)$ 内的一个数列，即 $0 < x_n < 1$，且 $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$．试讨论函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在 $(0,1)$ 中的连续性.

解　因为 $\left|\frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，由 M 判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛.

设 $x_0 \neq x_n$（$n = 1, 2, \cdots$）为 $(0,1)$ 内任意一点，则通项 $u_n(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$ 在 x_0 连续，应用和函数连续性定理，知 $f(x)$ 在 x_0 连续．设 $x_k \in \{x_n\}$ 任意，因

$$f(x) = \sum_{n \neq k} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n} + \frac{\operatorname{sgn}(x - x_k)}{2^k},$$

右边第一项在 $x = x_k$ 处连续，第二项在 $x = x_k$ 处间断，因此 $f(x)$ 在 $x = x_k$ 处间断（$k = 1, 2, \cdots$）.