1、

(1) 作变换 $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \quad i = 1, 2, \cdots, n$

显然$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$相互独立，且$Y_i \sim N(0,1) \quad i = 1, 2, \cdots, n$

于是 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} (\dfrac{X_i - \mu}{\sigma})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n)$

(2) $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \dfrac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$2X_3 - X_4 - X_5 \sim N(0, 6\sigma^2), \dfrac{(2X_3 - X_4 - X_5)^2}{6\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$a = \dfrac{1}{2\sigma^2}, \quad b = \dfrac{1}{6\sigma^2}, \quad k = 2.$

$X_1 - X_2$与$2X_3 - X_4 - X_5$相互独立，

故 $\dfrac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} + \dfrac{(2X_3 - X_4 - X_5)^2}{6\sigma^2} \sim \chi^2(2)$

62

2、

$$\because \frac{X_1}{2} \sim N(0,1), \therefore (\frac{X_2}{2})^2 + (\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2 \sim \chi^2(3)$$

$$\frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\{(\frac{X_2}{2})^2 + (\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2\}/3}} \sim t(3)$$

3、

$$\because (\frac{X_1}{2})^2 + (\frac{X_2}{2})^2 \sim \chi^2(2)$$

$$(\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2 \sim \chi^2(2)$$

$$\therefore \frac{\{(\frac{X_1}{2})^2 + (\frac{X_2}{2})^2\}/2}{\{(\frac{X_3}{2})^2 + (\frac{X_4}{2})^2\}/2} \sim F(2,2)$$

4、

解：由定理 1，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$，

$$P(|\overline{X}-\mu| \le 0.1) = P\left(\frac{-0.1}{2/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}} \le \frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right)$$

$$= \Phi(0.05\sqrt{n}) - \Phi(-0.05\sqrt{n})$$

$$= 2\Phi(0.05\sqrt{n}) - 1$$

因 $P(\left|\overline{X}-\mu\right| \le 0.1) = 0.95$。

即 $2\Phi(0.05\sqrt{n}) - 1 = 0.95$

得 $\Phi(0.05\sqrt{n}) = (1+0.95)/2 = 0.975$

由标准正态分布表 $\Phi(1.96) = 0.975$，

于是得 $n = 1536.6 \approx 1537$。

5、

解：由定理 2，$\dfrac{(10-1)S^2}{4} \sim \chi^2(10-1)$，

$$P(S^2 > 2.622) = P(\frac{9}{4}S^2 > \frac{9}{4}\times 2.622) = P(\frac{9}{4}S^2 > 5.8995)$$

由 χ^2 分布表 $\chi^2{}_{0.75}(9) = 5.899$，

则近似地有 S^2 大于 2.622 的概率为 0.75。

6、

解：由定理 3，$\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}} \sim t\,(9)$

$$P(2.1253 \le \overline{X} \le 3.8747) = P(\frac{2.1253-3}{2/\sqrt{10}} \le \frac{\overline{X}-3}{2/\sqrt{10}} \le \frac{3.8747-3}{2/\sqrt{10}})$$

$$= P(-1.3830 \le \frac{\overline{X}-3}{2/\sqrt{10}} \le 1.3830)$$

由 t 分布表得 $t_{0.1}(9) = 1.3830$，由 t 分布的对称性及α分位点的意义，上述概率为：

$$P(2.1253 \le \overline{X} \le 3.8747) = 1-2\times 0.1 = 0.8$$