〈概率论〉试题参考答案

一、填空题

1.　（1） $A\cup B\cup C$　　　（2） $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

（3） $\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

2.　0.7，　　3．3/7 ，　　4．4/7! = 1/1260 ，　　5．0.75，　　6.　1/5，

7．$a=1$，$b=1/2$，　　8．0.2，　　9．2/3，　　10．4/5，　　11．$5/7$，

12．F(b,c)-F(a,c)，　　13．F (a,b)，　　14．1/2，　　15．1.16，　　16．7.4，

17．1/2，　　18．46，　　19．85

20．$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$N(0,1)$，$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$N(0,1)$；　　21．$\mu^2+\sigma^2$，　　22，1/8 ，

23．$\overline{X}$=7，S^2=2 ，　　24．$N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，

二、选择题

1．A　2．D　3．B　4．D　5．D　6．C　7．B　8．B　9．C　10．C

11．C　12．A　13．C　14．C　15．B　16．B　17．C　18．B　19．A　20．C

21．C　22．B　23．A　24．B　25．C

28.　$t(n-1)$

29.　16

30.　提示：利用条件概率可证得。

31.　提示：参数为 2 的指数函数的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，

利用 $Y=1-e^{-2x}$ 的反函数 $x=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-y) \\ 0\end{cases}$　即可证得。

<数理统计>试题参考答案

一、填空题

1. $N(0,1)$，　2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ =1.71，　3. $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-1$，　4. 0.5，　5. $D(\hat{\theta})<D(\hat{\beta})$

6. 2 ，　7. $\frac{\sigma^2}{n}$，　8. (n-1)s^2 或 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ，　9. 0.15 ，　10. $\left\{|u|>u_{\frac{\sigma}{2}}\right\}$，其中 $u=\bar{x}\sqrt{n}$

11. $\bar{X}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 385；　12. $t=\frac{\bar{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$

13. $X_1^2+X_2^2+X_3^2-\mu$ ，　$X_{(1)}+2\mu$ ；　14. $F(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$ ，

15. $\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,X_n-6,\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$ ；　16. $\bar{X}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，

17. $F(m,n)$ ，　18. (4.808，5.196)，　19. $\frac{\sigma^2}{n}$，

21. $T=\frac{\bar{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}$，　22. F ，$F=\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}$ ，

23. $\left\{\frac{\left|\bar{X}-80\right|}{S_n^*}\sqrt{n}\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\cup\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，

25. $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ ，

26. $[4.412,5.588]$，　27. 2 ，　28. 1/8 ，　29. $\bar{X}$=7，S^2=2，　30. $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

二、选择题

1．D　2．B　3．B　4．D　5．D　6．C　7．D　8．A　9．D　10．C

11．A　12．B　13．D　14．D　15．C　16．D　17．B　18．B　19．D　20．A

21．D　22．B　23．C　24．A　29．C　30．A

三、计算题

1．

解：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是子样观察值

极大似然估计：

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$l_n L(\lambda) = n \cdot l_n \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial l_n L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\overline{x}}$$

矩估计：

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

样本的一阶原点矩为：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

所以有：$EX = \overline{X} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$

2．

解：这是方差已知，均值的区间估计，所以有：

置信区间为：$[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}]$

由题得：$\overline{X}=\frac{1}{6}(14.6+15.1+14.9+14.8+15.2+15.1)=14.95$

$\alpha=0.05 \quad Z_{0.025}=1.96 \quad n=6$

代入即得：$[14.95-\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times1.96,14.95-\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times1.96]$

所以为：$[14.754,15.146]$

3.

解：统计量为：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$

H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2=4^2$，H_1：$\sigma^2\neq\sigma_0^2$

$n=16$，$S^2=2$，$\sigma^2=4^2$代入统计量得 $\frac{15\times2}{16}=1.875$

$1.875<\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

所以H_0不成立，即其方差有变化。

4.

解：极大似然估计：

$$L(X_1,\cdots,X_n;\ \lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda+1)X_i^{\lambda}=(\lambda+1)^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\lambda}$$

$$\ln L=n\ln(\lambda+1)+\lambda\ln\prod_{i=1}^{n}X_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

得 $\hat{\lambda}=-\frac{n+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

5.

解： 这是方差已知均值的区间估计，所以区间为：

$$[\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}]$$

由题意得：

$\overline{x}=15 \quad \sigma^2=0.04 \quad \alpha=0.05 \quad n=9$ 代入计算可得

$[15-\frac{0.2}{\sqrt{9}}\times 1.96, 15+\frac{0.2}{\sqrt{9}}\times 1.96]$ 化间得：$[14.869, 15.131]$

6.

解：$H_0:\mu=\mu_0=52$，$H_1:\mu\neq\mu_0$

$$\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{51.3-52}{\frac{3}{\sqrt{9}}}=-0.7$$

$$\mu_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

$$|-0.7|=0.7<\mu_{0.025}=1.96$$

所以接受H_0，即可以认为该动物的体重平均值为52。

8.

解：由$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$得

$\sigma^2\ge\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$，$\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

所以σ的置信区间为：$[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(11)}}$，$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(11)}}]$

将$n=12$，$S=0.2$代入得 $[0.15，0.31]$

10. 解：由于μ未知，故采用$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$作枢轴量

要求$P(\sigma\ge\sigma_L)=1-\alpha$

这等价于要求 $P(\sigma^2\ge\sigma_L^2)=1-\alpha$，

也即$P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma_L^2})=1-\alpha$

而 $P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)) = 1-\alpha$

所以 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_L^2} = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，故 $\sigma_L^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

故 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\sigma_L = \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}$

由于这里 $n=9$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.95}(8)=15.507$

所以由样本算得 $\hat{\sigma}_L = 2.155$

即 σ 的置信水平为 0.95 的置信下限为 2.155。

17. 解：(1)由公式可得

$X_{(n)}$ 的概率密度函数 $p_n(x) = \begin{cases} n(\frac{x}{\theta})^{n-1} \bullet \frac{1}{\theta}，0 < x < 1 \\ 0 \qquad ,其它 \end{cases}$

即 $p_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}，0 < x < 1 \\ 0 \qquad ,其它 \end{cases}$ （2 分）

(2) $E[X_{(n)}] = \int_0^1 x \bullet p_n(x)dx = \int_0^1 x \bullet \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1}\theta$

20．解：这是两正态总体均值差的区间估计问题。由题设知，

$n_1 = 5, n_2 = 6, \bar{x} = 175.9, \bar{y} = 172$，$s_1^2 = 11.3$，$s_2^2 = 9.1$，$\alpha = 0.05.$

$s_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

=3. 1746,

选取 $t_{0.025}(9)$=2. 2622,

则 $\mu_1 - \mu_2$ 置信度为 0. 95 的置信区间为:

$$\left[\bar{x} - \bar{y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

＝[−0. 4484, 8. 2484].