第十三章 幂级数

§13.1 幂级数的收敛半径与收敛域

1．求下列各幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$；

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}x^n$；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+7^n}$；

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

（12）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$；

（13）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

（14）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；

（15）$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n,\ (0<a<1)$；

（16）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解（1）由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\Big/\frac{2^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$，故收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+2)}{n+2}\Big/\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+2)}\cdot\frac{n+1}{n+2}=1$，故收敛半径 $R=1$.

在 $x=1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，发散；在 $x=-1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，由交错级数的 Leibniz 判别法，知其收敛，因而收敛域为 $[-1,1)$.

（3）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，所以收敛半径 $R=\frac{1}{e}$. 由于

$$\left|\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\pm\frac{1}{e}\right)\right)^n\right|\to\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0\ (n\to\infty),$$

故在 $x=\pm\frac{1}{e}$ 级数发散，因此收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

（4）由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$，知收敛半径 $R=1$.

在 $|x|=1$，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n^2}}{2^n}$ 绝对收敛，故收敛域为 $[-1,1]$.

（5）由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}=4$，故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$.

在 $x=\frac{1}{4}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}$，将其奇偶项分开，拆成两个部分，分别为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ 和

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$，前一项级数发散，后一项级数收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}$发散；

同样，$x=-\frac{1}{4}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}(-1)^n$，也可拆成两部分，前一部分为$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，另一部分$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}$，前者发散，后者绝对收敛，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n4^n}(-1)^n$发散，所以收敛区域是$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

（6）$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\frac{3+(-2)\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\right]=3$，所以级数的收敛半径是$R=\frac{1}{3}$.

当$x+1=\frac{1}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$发散；当$x+1=-\frac{1}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$收敛.

因此，收敛域为$-\frac{1}{3}\le x+1\le\frac{1}{3}$即$\left[-\frac{3}{4},-\frac{2}{3}\right]$.

（7）$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(n+1)!!}{(2n+3)!!}\Big/\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+3}=1$，所以收敛半径$R=1$.

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，由于$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}<1$，故由Raabe判别法，知级数发散；

当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n$（实际上，由其绝对收敛立知其收敛），这是交错级数，由于

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}=\frac{2n+2}{2n+3}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

故$\left\{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right\}$单调下降，且由$0<\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$（用数学归纳法证之）及夹迫性知

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0$，由 Leibniz 判别法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}$，所以收敛半径 $R=e$.

由于 $\left|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}(\pm e)^n\right|\to\sqrt{e}\neq 0\ (n\to\infty)$，故级数在 $x=\pm e$ 发散，因而收敛域为 $(-e,e)$.

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1\sqrt[n+1]{n+1}}\bigg/\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\right|=1$，所以 $R=1$.

在 $x=1$，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$，由 Leibniz 判别法，知其收敛；在 $x=-1$，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散，故收敛域 $(-1,1]$.

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5^{n+1}+7^{n+1}}\bigg/\dfrac{1}{5^n+7^n}\right)=\dfrac{1}{7}$，所以 $R=7$.

在 $x=\pm\dfrac{1}{7}$，由于 $\left|\dfrac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}\right|\to 1\ (n\to\infty)$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}$ 一般项 $\dfrac{(\pm 7)^n}{5^n+7^n}$ 当 $n\to\infty$ 时不趋于 0，因此级数发散，故收敛域 $(-7,7)$.

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\bigg/\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}$，因此 $R=4$.

在 $x=\pm 4$，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，因为级数一般项的绝对值为

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n\right|=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}>1$$

对一切 n 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n\neq 0$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$ 发散，因此收敛域为 $(-4,4)$.

（12） 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1})\bigg/(1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n})\right)=1$，所以 $R=1$.

而在 $x=\pm1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(\pm1)^n=\infty\neq0$，故级数在 $x=\pm1$ 均发散，因而收敛区间为 $(-1,1)$.

（13）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以 $R=1$.

又在 $x=\pm1$，显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\pm1)^n$ 均发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

（14）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n+1)!}\bigg/\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-2)^2}{2n(2n+1)}=0<1$，故 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 均绝对收敛，因而收敛半径 $R=+\infty$，收敛域 $(-\infty,\infty)$.

（15）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$（$0<a<1$），所以 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（16）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}\bigg/\frac{1}{n^p}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}=1$，所以 $R=1$.

在 $x=\pm1$，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n^p}$，故当 $p>1$ 时都收敛；$0<p\le1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，$p\le0$ 时一般项不趋于 0，均发散．因此，当 $p>1$ 时，收敛域 $[-1,1]$；$0<p\le1$ 时，收敛域为 $[-1,1)$；而当 $p\le0$ 时，收敛域为 $(-1,1)$.

2．设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 Q，讨论下列级数的收敛半径：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)x^n$.

解（1）由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{R}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right|=\dfrac{1}{R}x^2$，故当 $\dfrac{1}{R}x^2<1$，即 $|x|<\sqrt{R}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 绝对收敛，而当 $\dfrac{1}{R}x^2>1$，即 $|x|>\sqrt{R}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 发散，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$.

（2）收敛半径必 $\geq\min\{R,Q\}$，而不定，需给出 a_n，b_n 的具体表达式才可确定，可以举出例子.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n}\right|=\dfrac{1}{RQ}$，所以收敛半径为 RQ，只有当 R,Q 中一个为 0，另一个为 $+\infty$ 时，不能确定，需看具体 a_n，b_n 来确定，可以是 $[0,+\infty)$ 中任一数.

3．设 $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x_1^k\right|\leq M\ (n=1,2,\cdots,x_1>0)$，求证：当 $0<x<x_1$ 时，有

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛；

（2）$\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right|\leq M$.

证明（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_1^n\left(\dfrac{x}{x_1}\right)^n$，而由于 $0<x<x_1$，故数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{x_1}\right)^n\right\}$ 单调递减趋于 0，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_1^n$ 的部分和数列 $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right|\leq M$ 有界，由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛.

（2）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的部分和为 $s_n(x)$，则由 Abel 变换，有

$$|s_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k x^k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k x_1^k\left(\frac{x}{x_1}\right)^k\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^k-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{k+1}\right]\sum_{i=1}^{k}a_i x_1^i\right\}+\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\sum_{k=1}^{n}a_k x_1^k\right|$$

$$\le M\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^k-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{k+1}\right]+\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right\}=M\frac{x}{x_1}<M\ ,$$

所以，$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\left|\lim_{n\to\infty}s_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|s_n(x)\right|\le M$.

§13.2 幂级数的性质

1．设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<r$ 时收敛，那么当 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛时有

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

不论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=r$ 时是否收敛.

证明 由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 的收敛半径至少不小于 r，且该幂级数在 $x=r$ 收敛，因而该幂级数在 $[0,r]$ 一致收敛（Abel 第二定理），因此该幂级数的和函数 $s(x)$ 在 $x=r$ 连续，即 $\lim_{x\to r^-}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$. 又 $\forall 0<x<r$，由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<r$ 时收敛，故可逐项积分，即 $\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}=s(x)$，即 $\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to r^-}s(x)$，令 $x\to r^-$ 取极限即有 $\int_0^r f(x)dx=\lim_{x\to r^-}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

2．利用上题证明 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证明 $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ ，$|x|<1$，故 $\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$，$|x|<1$，而级数 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$ 是收敛的，利用上题结论，就有 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3. 用逐项微分或逐项积分求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$；

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!2^n}x^n$；

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n+1}$；

（8）$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$；

（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1}$.

解（1）因为 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$, $|x|<1$，所以当 $|x|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，且当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，由 Abel 第二定理，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$, $-1\le x<1$.

（2）设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，则 $\frac{s(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $|x|<1$，逐项积分，有

$$\int_0^x \frac{s(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, |x|<1,$$

所以，$\frac{s(x)}{x} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$，即 $s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, |x|<1$.

（3）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$，$|x|<1$，则有

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x^2}{(1-x)^2}, |x|<1,$$

所以，$s(x) = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$，$|x|<1$.

（4）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$，$|x|\le 1$，则

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}x^{2n-1}, \quad -1<x\le 1,$$

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2}x^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}, \quad |x|<1,$$

所以，

$$s'(x) = \int_0^x \frac{1}{2\left(1+t^2\right)}dt = \frac{1}{2}\arctan x, \quad -1<x\le 1,$$

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\arctan t dt = \frac{1}{2}x\arctan x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2), \quad |x|\le 1.$$

（5） 设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!2^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!2^n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}x^n = \sigma(x) + e^{\frac{x}{2}} - 1$，$|x|<+\infty$.

由于 $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!2^n}x^n \Rightarrow \int_0^x \frac{\sigma(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!2^n}x^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$，所以，$\sigma(x) = \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}x^2 e^{\frac{x}{2}}$，故 $s(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{x}{2}} - 1$.

（6）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$，$|x|<+\infty$，则 $[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}(-x)^n$，所以，

$$\int_0^x \frac{1}{t}[ts(t)]' dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(-x)^n = \left(x^2 - x\right)e^{-x} \Rightarrow [xs(x)]' = -xe^{-x}\left(x^2 - 3x + 1\right),$$

$$xs(x)=\left(x^3+x+1\right)e^{-x}-1,$$

则 $s(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}+\dfrac{e^{-x}-1}{x}$（在 $x=0$ 理解为极限值）.

（7）令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n+1}$， 则 $x^2s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1},|x|<1$，所以，

$$\left[x^2s(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^4\right)^n=\frac{x^4}{1-x^4},$$

故 $x^2s(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$，因此 $s(x)=\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{\arctan x-2x}{2x^2}$（在 $x=0$ 理解为极限值）.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}2\sqrt[n]{2-\dfrac{1}{2^n}}=2$，收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$，在 $x=\pm\dfrac{1}{2}$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\left(2-\frac{1}{2^n}\right),$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(\pm1)^n\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\neq0$，故级数发散．可得

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

（9）设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},|x|<1$，则有

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\Rightarrow\int_0^x\left(\frac{1}{u}\int_0^u s(t)dt\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以，

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

即 $\int_0^x s(t)dt=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，所以 $s(x)=\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$，$|x|<1$.

（10）设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n!}x^{2n+1},|x|<+\infty$，则有（逐项积分），

$$\int_0^x \frac{s(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n+1} \Rightarrow \int_0^x\left(\frac{1}{t}\int_0^t \frac{s(u)}{u}du\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1} = x\left(e^{x^2}-1\right)$$

所以，

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{s(u)}{u}du = \left(2x^2+1\right)e^{x^2}-1,\quad \int_0^x \frac{s(u)}{u}du = \left(2x^3+x\right)e^{x^2}-x,$$

$$\frac{s(x)}{x} = \left(4x^4+2x^2+6x+1\right)e^{x^2}-1,$$

则 $s(x) = \left(4x^5+2x^3+6x^2+x\right)e^{x^2}-x$.

4. 求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

解 （1）考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n} = s(x)$，$|x|<1$. 由于 $\frac{s(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$，逐项积分，$\int_0^x \frac{s(t)}{t^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2\right)^{n-1} = \frac{x}{1-x^2}$，所以，

$$\frac{s(x)}{x^2} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow s(x) = \frac{x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2},\quad |x|<1.$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3.$$

（2）设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)n}x^{2n+1}$，则级数在 $|x|\le 1$ 绝对收敛，所以，

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n},\quad s''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1} = \frac{2x}{1-x^2},\quad |x|<1.$$

因此，

$$s'(x) = \int_0^x \frac{2t}{1-t^2}dt = -\ln(1-x^2),$$

$$s(x) = -\int_0^x \ln(1-x^2)dx = -x\ln(1-x^2)+2x+\ln\frac{1-x}{1+x},\quad |x|\le 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)n} = s(1) = \lim_{x\to 1^-}s(x)$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[(1-x)\ln(1-x)+2x-(1+x)\ln(1+x)\right]=2-2\ln2 .$$

5．证明：

（1） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

解（1）对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$，由 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{[4(n+1)]!}\Big/\frac{1}{(4n)!}\right)=0$，故收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，而采取用逐项求导得，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{[4(n-1)]!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!},$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$.

（2）级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$，通过逐项求导得，

$$y'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2},\qquad y''=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}\right)''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2},$$

所以，

$$xy''+y'-y=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n}}{[(n+1)!]^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n}}{[(n+1)!]^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}=0,$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

6．设 $f(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上的和函数，若 $f(x)$ 为奇函数，则级数中仅出现奇次幂的项；若 $f(x)$ 为偶函数，则级数中仅出现偶次幂的项.

证明 由于 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-R,R)$.

$\forall x\in(-R,R)$，由 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n+1]a_nx^n=0,$$

故 $\forall n\in\{0\}\cup N$，有 $[(-1)^n+1]a_n=0$，故当 n 为偶数时 $2a_n=0\Rightarrow a_n=0$，即级数中偶次幂系数均为 0，因此级数中仅出现奇次幂的项.

同样，若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-1]a_nx^n=0$，故 $\forall n$，有 $[(-1)^n-1]a_n=0$，当 n 为奇数时，有 $-2a_n=0\Rightarrow a_n=0$，即级数中奇次幂的系数均为 0，因此级数中仅出现偶次幂的项.

7．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$．求证：

（1） $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续， $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续；

（2） $f(x)$ 在点 $x=-1$ 可导；

（3） $\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty$；

（4） $f(x)$ 在点 $x=1$ 不可导；

证明（1）由于 $\left|\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\le\frac{1}{n^2\ln(1+n)}$，$|x|\le1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln(1+n)}$ 收敛，由 M 判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛，而级数的每一项为幂函数在 $[-1,1]$ 连续，故和函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$ 在 $[-1,1]$ 连续.

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 的收敛半径为 $R=1$，因此在 $(-1,1)$ 内，其和函数 $f'(x)$ 连续.

（2）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 在 $x=-1$ 成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$，由 Leibniz 判别法，知级数收敛，由 Abel 第二定理，幂级数在 $[-1,0]$ 一致收敛，因而其和函数 $f'(x)$ 在 $x=-1$ 右连续，

因此 $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)$ 存在，且 $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)$.

（3） $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}=+\infty$.

（4）因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^n-1)/(x-1)}{n^2\ln(1+n)}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{n^2\ln(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}=+\infty,$$

故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 不可导.

§13.3 函数的幂级数展式

1．利用基本初等函数的展式，将下列函数展开为 Maclaurin 级数，并说明收敛区间.

（1） $\dfrac{1}{a-x}$, $a\neq 0$；

（2） $\dfrac{1}{(1+x)^2}$；

（3） $\dfrac{1}{(1+x)^3}$；

（4） $\cos^2 x$；

（5） $\sin^3 x$；

（6） $\dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$；

（7） $(1+x)e^{-x}$；

（8） $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

（9） $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$；

（10） $\arcsin x$；

（11） $\ln\left(1+x+x^2\right)$；

（12） $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

（13） $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$；

（14） $\int_0^x \cos t^2 dt$.

解（1） $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$ （$\left|\frac{x}{a}\right|<1$）

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}x^n \quad (|x|<|a|).$$

（2） $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,\ |x|<1.$$

（3） $\frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)x^2,\ |x|<1.$$

（4） $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ |x|<+\infty.$$

（5） $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$=\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-3^{2k})x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ |x|<+\infty.$$

（6） $\frac{x}{\sqrt{1-3x}} = x(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-3x)^n\right) \quad (|3x|<1)$$

$$=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}x^{n}\right),\quad |x|<\frac{1}{3}.$$

（7）$(1+x)e^{-x}=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^{n}$ （$|-x|<+\infty$）

$$=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}\quad（|x|<+\infty）$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n+1}\quad（|x|<+\infty）$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right](-1)^{n-1}x^{n},\quad |x|<+\infty.$$

（8）$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\right)'=\left(1+x^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(x^{2}\right)^{n}\quad（|x^{2}|<1）$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!}x^{2n},\quad |x|<1,$$

所以，

$$\int_{0}^{x}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\right)'dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!(2n+1)}x^{2n+1},\quad |x|\le 1,$$

即 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{2^{n}n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

（9）$\frac{1}{1-3x+2x^{2}}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\quad（|2x|<1\text{且}|x|<1）$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^{n},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

（10）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(-x^{2}\right)^{n}$ （$|-x^{2}|<1$）

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}\text{,}\quad |x|<1\text{,}$$

所以，

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}\text{,}\quad |x|<1\,.$$

在 $x=\pm 1$，由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}\bigg/\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)}-1\right)=\frac{3}{2}>1\text{,}$$

用 Raabe 判别法知右端级数收敛，因而收敛区间为$[-1,1]$.

（11）$\ln(1+x+x^2)=\ln\dfrac{1-x^3}{1-x}=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x^3)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{3n}\text{,}\quad -1\le x<1\,.$$

（12）$x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=x\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^x\frac{xdx}{1+x^2}dx$

$$=x\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)dx-\int_0^x x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)(n+1)}x^{2(n+1)}\text{,}\quad |x|\le 1\,.$$

（13）$\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}t^{2k+1}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k}dt$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}x^{2k+1}\text{,}\quad |x|<+\infty\,.$$

（14）$\displaystyle\int_0^x\cos t^2dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(t^2)^{2k}dt=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{4k}dt$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)}x^{4k+1}\text{,}\quad |x|<+\infty\,.$$

2．利用幂级数相乘求下列函数的 Maclaurin 展开式：

（1）$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$；

（2）$(\arctan x)^2$；

（3）$\ln^2(1-x)$.

解（1）$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^{n-1}}{n}x^n\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k(-1)^{n-k}x^{n-k}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)x^n,\quad |x|<1.$$

（2）$(\arctan x)^2=\left[\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\right]^2=\left[\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt\right]^2$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{2(n-k)+1}x^{2(n-k)+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2(n-k)+1)}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}x^{2(n+1)},\quad |x|\le 1.$$

（3）$\ln^2(1-x)=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right]^2=\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k}\dfrac{x^{n+1-k}}{n+1-k}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}\right)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^{n+1},\quad -1\le x\le 1.$$

3．将下列函数在指定点 x_0 展开为 Taylor 级数：

（1）$\dfrac{1}{a-x}$，$x_0=b\ (\neq a)$；

（2）$\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$，$x_0=-1$；

（3）$\ln x$，$x_0=2$；

（4）e^x，$x_0=1$.

解（1）$\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{1}{(a-b)-(x-b)}=\dfrac{1}{(a-b)}\dfrac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}}$

$$=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^{n}}{(a-b)^{n-1}}，\ |x-b|<|a-b|.$$

（2）$\ln\frac{1}{2+2x+x^{2}}=-\ln\left[1+(x+1)^{2}\right]$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(x+1)^{2}\right]^{n}=\sum_{n}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}(x+1)^{2n}，\ -2\le x\le 0.$$

（3）$\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n}$　（$-1<\frac{x-2}{2}\le 1$）

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{n}}(x-2)^{n}，\ 0<x\le 4.$$

（4）$e^{x}=e^{1+(x-1)}=ee^{x-1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^{n}，\ -\infty<x<+\infty.$

4．展开 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)$ 为 x 的幂级数，并推出 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解　$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}-1\right)\right]=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}，\ |x|<+\infty，$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{e^{x}(x-1)+1}{x^{2}}\Big|_{x=1}=1.$

5．试将 $f(x)=\ln x$ 展开成 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.

解　令 $t=\frac{x-1}{x+1}$，则 $x=\frac{1+t}{1-t}$，因而有

$$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-t)^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}t^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}，\ x>0.$$

6．函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的各阶导数一致有界，即 $\exists M>0$，对一切 $x\in(a,b)$，有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M，\ n=1,2,\cdots，$$

证明：对 (a,b) 内任意点 x 与 x_0，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

证明 由 Taylor 公式，$\forall x\in(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $|R_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，$\forall x\in(a,b)$，其中 ξ 在 x 与 x_0 之间．故 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可以展成 $(x-x_0)$ 的幂级数，即 $\forall x\in(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$