第十四章　傅里叶级数

§1　三角级数与傅里叶级数

1．证明：

（1）$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$是$[0, \pi]$上的正交系；

（2）$\sin x, \sin 3x, \cdots, \sin(2n+1)x, \cdots$是$[0, \frac{\pi}{2}]$上的正交系；

（3）$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$是$[0, \pi]$上的正交系；

（4）$1, \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$不是$[0, \pi]$上的正交系.

证明　（1）$\forall m, n \in N, m \neq n$，有

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_0^\pi - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_0^\pi] = 0,$$

所以，$\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$是$[0, \pi]$上的正交系.

（2）$\forall k, n \in N, k \neq n$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k-1)x \sin(2n-1)x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2(k-n)x - \cos 2(k+n-1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2(k-n)}\sin 2(k-n)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2(k+n-1)}\sin 2(k+n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}] = 0,$$

所以，$\sin x, \sin 3x, \cdots, \sin(2n+1)x, \cdots$是$[0, \frac{\pi}{2}]$上的正交系.

（3）由于 $\forall m,n\in N, m\neq n$，有

$$\int_0^\pi \cos mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_0^\pi-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_0^\pi]=0,$$

又，$\forall n\in N$，有

$$\int_0^\pi \cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi=0,$$

故 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$ 是 $[0,\pi]$ 上的正交系.

（4）因为 $\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2\neq 0$，因此 $1,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$ 不是 $[0,\pi]$ 上的正交系.

2．求下列周期为 2π 的函数的 Fourier 级数：

（1）三角多项式 $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$；

（2）$f(x)=x^3\quad(-\pi<x<\pi)$；

（3）$f(x)=\cos\frac{x}{2}$；

（4）$f(x)=e^{ax}\quad(-\pi<x<\pi)$；

（5）$f(x)=|\sin x|\quad(-\pi<x<\pi)$；

（6）$f(x)=x\cos x\quad(-\pi<x<\pi)$；

（7）$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi;\end{cases}$

（8） $f(x)=\pi^2-x^2 \quad (-\pi<x<\pi)$；

（9） $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$；

（10） $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi)$.

解 （1）利用三角函数系的正交性，极易得到

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)dx=\frac{1}{\pi}a_0\cdot 2\pi=2a_0,$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos kxdx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos^2 kxdx=a_k, & 0<k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos kxdx=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}b_k\sin^2 kxdx=b_k, & 0<k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

可得三角多项式 $P_n(x)$ 的 Fourier 级数为

$$P_n(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

（2） $a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cos kxdx=0$， $k=0,1,2,\cdots$，

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3\sin kxdx=\frac{2\pi}{k}(-1)^{k-1}(\pi^2-\frac{6}{k^2}),\quad k=1,2,\cdots,$$

所以， $f(x)=x^3\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\sin nx \quad (-\pi<x<\pi)$.

（3） $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx = \frac{(-1)^{n-1}4}{(4n^2-1)\pi}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

因此， $f(x) = \cos\frac{x}{2} \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$.

（4） $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \begin{cases} \frac{2}{a\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 2, & a = 0, \end{cases}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kxdx = \begin{cases} \frac{(-1)^k a}{(a^2+k^2)\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 0, & a = 0, \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kxdx = \begin{cases} \frac{(-1)^k k}{(a^2+k^2)\pi}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}), & a \neq 0, \\ 0, & a = 0, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots$.

所以，当 $-\pi < x < \pi$ 时，

$$f(x) = e^{ax} \sim \begin{cases} \frac{2}{a\pi}sh(a\pi) + \frac{2}{\pi}sh(a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx - k\sin kx), & a \neq 0, \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

（5） $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n = 0$， $n = 1, 2, \cdots$，

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & n = 1, \\ \frac{2[(-1)^{n-1}-1]}{(n^2-1)\pi}, & n > 1, \end{cases}$$

所以，

$$f(x)=|\sin x| \sim \frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1}\cos nx. \quad (-\pi<x<\pi)$$

（6） $f(x)$ 是奇函数，故 $a_n=0$， $n=0,1,2,\cdots$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]dx=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & n=1, \\ \dfrac{2(-1)^n n}{n^2-1}, & n\geq 2,\end{cases}$$

$$n=1,2,\cdots.$$

所以， $f(x)=x\cos x \sim -\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx. \quad (-\pi<x<\pi)$

（7） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

因此， $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\leq x<\pi\end{cases} \sim \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$

（8） $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\frac{3}{4}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2},$$

故有， $f(x)=\pi^2-x^2 \sim \frac{3}{8}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx. \quad (-\pi<x<\pi)$

（9） $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x$ 为偶函数，故 $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}\cos xdx=\frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)dx)=0\,,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}\cos x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\cos nxdx)=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi}(-1)^k\,, & n=2k-1\,,\\ 0\,, & n=2k\,,\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)\,,$$

所以， $f(x)\sim\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cos(2k-1)x$.

（10） $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=0$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=0\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}\,,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以， $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\quad(0<x<2\pi)$.

3． 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，证明：

（1）如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2m-1}=b_{2m-1}=0$， $m=1,2,\cdots$；

（2）如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $a_{2m}=b_{2m}=0$， $m=1,2,\cdots$.

证明 （1） $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx)$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+(-1)^n\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos ntdt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx\text{，}$$

因此，当$n=2m-1$时，有

$$a_{2m-1}=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^{2m-1}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2m-1)xdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

同样，

$$b_n=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx\text{，}$$

所以，当$n=2m-1$时，有

$$b_{2m-1}=\frac{1}{\pi}[1+(-1)^{2m-1}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2m-1)xdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

（2）$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos n(t+\pi)dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx-(-1)^n\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos ntdt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx\text{，}$$

故当$n=2m$时，

$$a_{2m}=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^{2m}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2mxdx=0\text{，}\quad m=1,2,\cdots.$$

同样，

$$b_n=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^n]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx\text{，}$$

因此，当$n=2m$时，得$b_{2m}=\frac{1}{\pi}[1-(-1)^{2m}]\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2mxdx=0$，$m=1,2,\cdots.$

§2 傅里叶级数的收敛性

1．将下列函数展开成 Fourier 级数，并讨论收敛性：

（1） $f(x)=x\sin x$， $x\in[-\pi,\pi]$；

（2） $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,\pi], \\ 1, & x\in[-\pi,0). \end{cases}$

解 （1）由于 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 可微，而在 $(-\infty,\infty)$ 处处连续，故在 $[-\pi,\pi]$， $f(x)$ 收敛于其 Fourier 级数，由于 $f(x)$ 是偶函数，因此， $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin xdx=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos nxdx$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2xdx, & n=1, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx, & n>1 \end{cases}=\begin{cases} -\frac{1}{2}, & n=1, \\ \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}, & n\ge 2, \end{cases}$$

所以， $f(x)=x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$， $x\in[-\pi,\pi]$.

（2） $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_0^\pi x^2dx)=1+\frac{1}{3}\pi^2$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_0^\pi x^2\cos nxdx)=\frac{2(-1)^n}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_0^\pi x^2\sin nxdx)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n-\pi^2+\frac{2}{n^2}(1-(-1)^n)],\qquad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x) \sim \frac{\pi^2+1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n - \pi^2 + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)]\sin nx\}.$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 逐段可微，而

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0), \quad \frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{1+\pi^2}{2},$$

因此，

$$f(x) = \frac{\pi^2+1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n\pi}[1-(-1)^n - \pi^2 + \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)]\sin nx\},$$

$x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

2. 由展开式

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

（1）用逐项积分法求 x^2， x^3， x^4 在 $(-\pi, \pi)$ 中的 Fourier 展开式；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解 （1） $\frac{1}{2}x^2 = \int_0^x x dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nx dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{\pi^2}{6}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

所以，

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx + \frac{\pi^2}{3}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

$$\frac{1}{3}x^3=\int_0^x x^2dx=\frac{\pi^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^x\cos nxdx=\frac{\pi^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$=\frac{2\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}(\frac{\pi^2}{3}-\frac{2}{n^2})\sin nx,\quad x\in(-\pi,\pi),$$

$$\Rightarrow x^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\sin nx,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

$$\frac{1}{4}x^4=\int_0^x x^3dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\int_0^x\sin nxdx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2}),\quad x\in[-\pi,\pi],$$

所以，

$$x^4=\frac{2}{3}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

（2）由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，故只须求出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$即可．在（1）中最后一式，令$x=\pi$，得到

$$\pi^4=\frac{2}{3}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{2}{3}\pi^4-90\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

由此而得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}.$$

3.（1）在 $(-\pi,\pi)$ 内，求 $f(x)=e^x$ 的 Fourier 展开式；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和.

解 （1）$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nxdx=\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi}-e^{-\pi}),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin nxdx=\frac{n(-1)^{n-1}}{1+n^2}(e^{\pi}-e^{-\pi}),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，$f(x)=e^x\sim\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi}-e^{-\pi})(\cos nx-n\sin nx)$

由于 $f(x)=e^x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 可微，故有

$$f(x)=e^x=\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(e^{\pi}-e^{-\pi})(\cos nx-n\sin nx),\quad x\in(-\pi,\pi).$$

（2）在上式中令 $x=0$，得

$$1=e^0=\frac{1}{\pi}sh\pi+2sh\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2},$$

故有，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{sh\pi}-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2\pi}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段可微，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，a_n, b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，a_n', b_n' 是 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的 Fourier 系数，证明：

$$a_0'=0, a_n'=nb_n, b_n'=-na_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明 $a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$，

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdf(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=nb_n,$$

$$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdf(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-na_n,$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

5. 证明：若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n 满足关系

$$\max\{\,|n^3a_n|,|n^3b_n|\,\}\le M,$$

M 为常数，则上述三角级数收敛，且其和数具有连续的导函数.

证明 因为 $\max\{\,|n^3a_n|,|n^3b_n|\,\}\le M$，故 $|n^3a_n|\le M$ 且 $|n^3b_n|\le M$，对一切 n 成立，因而 $|a_n|\le\frac{M}{n^3}$，$|b_n|\le\frac{M}{n^3}$ 对一切 n 成立，三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中一般

项 $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ 满足，对 $x\in(-\infty,\infty)$，

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|\le\frac{2M}{n^3}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^3}$ 收敛，用 M 判别法，三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 绝对收敛，设其和函数为 $f(x)$，则由于逐次求导后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$ 满足

$$|-na_n\sin nx+nb_n\cos nx|\le n(|a_n|+|b_n|)\le\frac{2M}{n^2},\quad x\in(-\infty,\infty),$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$ 收敛，由 M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 一致收敛，因此由函数项级数逐项求导定理，知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 可导，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx),$$

而且由于对一切 n，$-na_n\sin nx+nb_n\cos nx$ 在 $(-\infty,\infty)$ 连续，因而由和函数的连续性知 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 连续.

6．设 $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，求证：

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

证明 象 § 14.1 习题 2（1）类似地计算可得 $T_n(x)$ 的 Fourier 系数为

$$a_0'=a_0,\quad a_k'=\begin{cases}a_k, & k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}\quad b_k'=\begin{cases}b_k, & k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

因而 $T_n(x)$ 的 Fourier 级数为

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

而 $T_n(x)$ 同时也是其 Fourier 系数的前 n 项部分和，因而有

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

7．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0,2\pi)$ 上单调递减，且有界，求证：$b_n\geq 0(n>0)$.

证明　由 $f(x)$ 的假设知道，$\forall n>0$，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$ 存在．将 $[-\pi,\pi]$ n 等份，则有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+k\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nxdx+\int_{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+k\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nxdx-\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}f(t+\frac{\pi}{n})\sin ntdt\right],$$

这是在和号中后一积分中令 $x=t+\dfrac{\pi}{n}$ 换元后得到的．由此得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi+(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(k-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{n}}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nxdx,$$

由于 $f(x)$ 在以 2π 为周期，在 $(0,2\pi)$ 上单调递减，故 $f(x)-f(x+\dfrac{\pi}{n})\geq 0$，又在区间 $[-\pi+(k-1)\dfrac{2\pi}{n},-\pi+(k-\dfrac{1}{2})\dfrac{2\pi}{n}]$ 上 $\sin nx\geq 0$，因此以上等式右端和号中每一个积分都非负，因而 $b_n\geq 0(n>0)$.

8. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0,2\pi)$ 上导数 $f'(x)$ 单调上升有界，求证：$a_n \ge 0(n>0)$.

证明 $\forall n>0$，有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)d\sin nx$$

$$= \frac{1}{n\pi}(f(x)\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\sin nxdx) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}[-f'(x)]\sin nxdx,$$

由于 $f'(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0,2\pi)$ 上单调上升有界，故 $-f'(x)$ 以 2π 为周期，在 $(0,2\pi)$ 上单调减少有界，直接由上题结论，即知 $a_n \ge 0(n>0)$.

9．证明：若 $f(x)$ 在 x_0 点满足 α 阶的 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续．给出一个表明这论断的逆命题不成立的例子．$(\alpha>0)$

证明 由于 $f(x)$ 在 x_0 点满足 α 阶 $(\alpha>0)$ 的 Lipschitz 条件，故 $\exists\delta_0>0$，常数 $M>0$，使得当 $|x-x_0|\le\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|^\alpha,$$

因此，不妨设 $|x-x_0|\le\delta_0$．$\forall\varepsilon>0$，要使 $|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|^\alpha<\varepsilon$，只须 $|x-x_0|<\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，取 $\delta=\min\{\delta_0,\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\}>0$，则当 $|x-x_0|\le\delta$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln|x|}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则由于 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\ln|x|}=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$

连续．但 $\forall\alpha>0$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{\alpha}\ln|x|=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|^{\alpha}\ln|x|}=\infty$，故 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，

当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{|x|^{\alpha}\ln|x|}\right|>M$，即 $\left|\dfrac{1}{\ln|x|}-0\right|>M|x-0|^{\alpha}$ 或 $|f(x)-f(0)|>M|x-0|^{\alpha}$

对一切 $0<|x|<\delta$ 成立．即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不满足任意阶的 Lipschitz 条件．

10．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，又设 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 n 项部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,,$$

则
$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}D_n(2t)dt\,,$$

其中 $D_n(t)$ 是 Dirichlet 核．

证明
$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt$$

$$\overset{t=2u}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2u)+f(x-2u)]D_n(2u)2du$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}D_n(2t)dt\,.$$

11．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\infty,\infty)$ 连续，它的 Fourier 级数在 x_0 点收敛．求证：$S_n(x_0)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$．

证明 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，它的 Fourier 级数在 x_0 点收敛，故可设

其 Fourier 级数在 x_0 点收敛于 S．则必有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S,$$

由此可得，

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x_0) = S,$$

但由 Fejer 定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$，因此 $S = f(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$．

12．设 $f(x)$ 以 2π 为周期、连续，其 Fourier 系数全为 0，则 $f(x) = 0$．

证明 $\forall x_0 \in (-\infty, \infty)$，由 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为 0，因而其 Fourier 级数在 x_0 点收敛于 0，由上题结论知其 Fourier 级数在 x_0 点又收敛于 $f(x_0)$，因此 $f(x_0) = 0$，由 $x_0 \in (-\infty, \infty)$ 的任意性，知 $f(x) = 0$．

13．设 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 绝对可积，又设 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 满足

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} = L$$

存在．证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = L$．进一步，若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$，其中 $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k(x)$．

证明 类似于 Fejer 定理的证明，有

$$\sigma_n(x_0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x_0) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt+\int_0^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} f(x_0-u)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right]^2 du+\int_0^{\pi} f(x_0+t)\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\ .$$

由 Fejer 核的性质，$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=1$，得到 $\frac{L}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=L$，

所以，

$$\sigma_n(x_0)-L=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right]\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\ .$$

$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}=L$， 知 $\exists\delta>0$ （不妨设 $\delta<\pi$ ），使得只要 $0<t<\delta$，就有 $\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此，

$$\left|\sigma_n(x_0)-L\right|\le\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\delta\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$+\frac{1}{(n+1)\pi}\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

而 $\mathrm{I}<\dfrac{\frac{\varepsilon}{2}}{(n+1)\pi}\displaystyle\int_0^\delta\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt=\frac{\varepsilon}{2}.$

为估计 II，首先容易证明，当 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时，$|\sin t|\ge\frac{2}{\pi}|t|$，因而当 $t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ 时，$\dfrac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\le\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2}{|t|}=\dfrac{\pi}{|t|}$，由此得到当 $\delta\le t\le\pi$ 时，$\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}\le\dfrac{\pi}{t}$. 因此，

$$\mathrm{II}\le\frac{1}{(n+1)\pi}\int\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 dt$$

$$\le\frac{\pi}{n+1}\left(\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\delta^\pi\frac{1}{t^4}dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 绝对可积，因而 $\exists M>0$，使得

$$\left(\int_\delta^\pi\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-L\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\le M.$$

所以，

$$\mathrm{II} \le \frac{\pi M}{n+1}\left(\int_\delta^\pi \frac{1}{t^4}dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\pi M}{(n+1)\delta^{3/2}\sqrt{3}} < \frac{\pi M}{(n+1)\delta^{3/2}} .$$

取 $N=\left[\dfrac{2\pi M}{\varepsilon\delta^{3/2}}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\mathrm{II}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而当 $n>N$ 时，有

$$|\sigma_n(x_0)-L| \le \mathrm{I}+\mathrm{II} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon ,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=L$. 进一步，若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $L=f(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=f(x_0)$.

§3 任意区间上的傅里叶级数

1．将下列函数在指定区间上展开为 Fourier 级数，并讨论其收敛性：

（1）在区间 $(0,2l)$ 展开

$$f(x)=\begin{cases} A, 0<x<l, \\ 0, l\le x<2l; \end{cases}$$

（2）$f(x)=x\cos x$，$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$；

（3）$f(x)=x$，$(0,l)$；

（4）$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 1, & 1<x<2, \\ 3-x, & 2\le x\le 3. \end{cases}$

解 （1）$a_n=\dfrac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{1}{l}\int_0^l A\cos\dfrac{n\pi}{l}xdx=\begin{cases} A, n=0, \\ 0, n=1,2,\cdots, \end{cases}$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_0^l A\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{A}{n\pi}(1-(-1)^n),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x) \sim \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x .$$

由于 $f(x)$ 在 $(0, 2l)$ 逐段可微，故有

$$f(x) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x , \quad x \in (0, l) \cup (l, 2l) .$$

（2）由于 $f(x) = x\cos x$ 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的奇函数，因此 $a_n = 0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]dx = \frac{16n(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

且 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 可微，因此

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx , \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) .$$

（3）$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l xdx = l$，

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{2n\pi}{l}xdx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{2n\pi}{l}xdx = -\frac{l}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

由于 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 可微，故

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{l}x , \quad x \in (0, l) .$$

（4）$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}(\int_0^1 xdx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 (3-x)dx) = \frac{4}{3}$，

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi}{3}xdx$$

$$= \frac{2}{3}(\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{3}xdx + \int_1^2 \cos\frac{2n\pi}{3}xdx + \int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi}{3}xdx)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{n^2\pi^2}(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi}{3}xdx$$

$$=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi}{3}x\,dx+\int_1^2\sin\frac{2n\pi}{3}x\,dx+\int_2^3(3-x)\sin\frac{2n\pi}{3}x\,dx\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3},\qquad n=1,2,\cdots,$$

且 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上逐段可微，连续，故

$$f(x)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}(\cos\frac{2n\pi}{3}-1)]\cos\frac{2n\pi}{3}x$$

$$+(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3})\sin\frac{2n\pi}{3}x\}$$

$$=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}(x+1)+\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}(x-1)-\frac{3}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}x],$$

$$x\in[0,3].$$

2．求下列周期函数的 Fourier 级数：

（1） $f(x)=|\cos x|$；

（2） $f(x)=x-[x]$.

解 （1）这是周期为 π 的函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 连续，逐段可微，又是偶函数，故 $b_n=0$， $n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 2(n+1)x+\cos 2(n-1)x]dx=\frac{4(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)=|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx,\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

（2）该函数周期为 1，逐段可微，所有整数点是第一类间断点.

$$a_0=2\int_0^1(x-[x])dx=2\int_0^1 xdx=1$$

$$a_n=2\int_0^1(x-[x])\cos 2n\pi xdx=2\int_0^1 x\cos 2n\pi xdx=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=2\int_0^1(x-[x])\sin 2n\pi x dx=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x dx=-\frac{1}{n\pi}，\quad n=1,2,\cdots$$

所以，

$$f(x)=x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x，\quad x\in(-\infty,\infty)\text{ 且 }x\notin Z\,.$$

3．把下列函数在指定区间上展开为余弦函数：

（1）$f(x)=\sin x$，$0\le x\le\pi$；

（2）$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\le 2,\\ x-3, & 2<x<4.\end{cases}$

解 根据偶延拓计算 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\begin{cases}0, & n=1,\\ \dfrac{2}{\pi(n^2-1)}[(-1)^{n-1}-1], & n>1,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

因此，

$$f(x)=\sin x=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1}\cos nx=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx，\quad x\in[0,\pi]\,.$$

（2）根据偶延拓计算 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2(1-x)dx+\int_2^4(x-3)dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi}{4}xdx+\int_2^4(x-3)\cos\frac{n\pi}{4}xdx\right)$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n]，\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n]\cos\frac{n\pi}{4}x=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x，\quad x\in(0,4)\,.$$

4．把下列函数在指定区间上展开为正弦级数：

（1）$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$，$0\le x\le\pi$；

（2）$f(x)=x^2$，$0\le x\le 2$.

解 （1）根据奇延拓计算 Fourier 系数，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x]dx$$

$$=\frac{4}{\pi(4n^2-1)}，\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)=\cos\frac{x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\sin nx\text{，}\quad 0<x\le\pi\text{ .}$$

（2）根据奇延拓计算 Fourier 系数，

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{8}{n\pi}(-1)^{n-1}+\frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\text{，}$$

$$n=1,2,\cdots,$$

得到，

$$f(x)=x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{8}{n\pi}(-1)^{n-1}+\frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[n^2\pi^2(-1)^{n-1}+2(-1)^n-2]\sin\frac{n\pi}{2}x\text{，}\quad 0\le x<2\text{ .}$$

5．把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在 $(0,1)$ 上展开成余弦级数，并推出

$$\pi^2=6(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)\text{ .}$$

解 按偶延拓计算 Fourier 系数，

$$a_0=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(x-1)^2dx=\frac{2}{3}\text{，}$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi xdx=2\int_0^1(x-1)^2\cos n\pi xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}\text{，}\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，

$$f(x)=(x-1)^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x\text{，}\quad (0,1)\text{ .}$$

既使扩充 $f(x)$ 的定义于 $(-\infty,\infty)$ 成为偶延拓后的周期为 2 的函数 $F(x)$，亦有其 Fourier 级数收敛于 $F(x)$，而在所有点 $F(x)$ 均连续，而 $F(0)=f(0)=1$，在上式中令 $x=0$，就有 $1=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，即 $\pi^2=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

6．将函数 $f(x)$ 分别做奇延拓和偶延拓后，求函数的 Fourier 级数，其中

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

解 根据奇延拓计算 Fourier 系数.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2}),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，Fourier 级数为正弦级数

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos\frac{n\pi}{2})\sin nx,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi).$$

根据偶延拓计算 Fourier 系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此，余弦级数为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi].$$

7．应当如何把给定的区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 的可积函数延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，使得他在 $(-\pi,\pi)$ 中对应的 Fourier 级数为：

（1）$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$；

（2）$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

解 （1）先进行偶延拓至 $(-\frac{\pi}{2},0)$，再由 § 14·1 习题 3 知按 $f(x+\pi)=-f(x)$ 进行延拓至 $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},\pi)$，最后进行周期延拓，则 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 系数 $b_n=0$，$n=1,2,\cdots$，而由 § 14·1 习题 3 知 $a_{2n}=0$，$n=0,1,2,\cdots$，所以，

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$$

（2）先进行奇延拓至 $(-\frac{\pi}{2},0)$，再由 § 14·1 习题 3 知按 $f(x+\pi)=-f(x)$ 进行延拓至 $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},\pi)$，最后进行周期延拓，则 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 系数 $a_n=0$，$n=1,2,\cdots$，而由 § 14·1 习题 3 知 $b_{2n}=0$，$n=1,2,\cdots$，所以，

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x .$$

§4 傅里叶级数的平均收敛性

1．若 $f(x)$，$g(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)| dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

证明 由于 $f(x)$，$g(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，故 $f(x)\pm g(x)$ 均以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，由 Paseval 等式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\pm g(x)| dx = \frac{(a_0\pm\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\pm\alpha_n)^2 + (b_n\pm\beta_n)^2],$$

二式相减得

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)| dx = 2a_0\alpha_0 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

即，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)| dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

2．设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 平方可积，求证：

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx .$$

证明 对 $f(x)$ 作偶延拓，延拓后的函数 $F(x)$ 在 $[-l,l]$ 平方可积．令 $x=\frac{l}{\pi}t$，则

$F(x)=F(\frac{l}{\pi}t)=G(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 平方可积，且为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，其 *Fourier* 级数为

$$G(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}G(t)\cos ntdt=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

由 Paseval 等式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,$$

上式左边作积分变换 $t=\frac{\pi}{l}x$，并注意到是偶函数在对称区间上的积分即得

$$\frac{2}{l}\int_0^{l}f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.$$