1、

证明：(1)

$$E(X_i)=E(X)=\mu,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

(2) $$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\bar{X}^2+n\bar{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right]$$

$\boxed{\text{利用公式：}\quad E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2}$

$$E(X_i^{\,2})=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2$$

$$E(\bar{X})^2=D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

$$(\because\ \bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}))$$

$$\therefore E(S^2)=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2+n\mu^2-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

2、

【解】 $EX=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$, $\theta=\frac{1}{4}(3-EX)$.

θ 的矩计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{X})$，根据给定的样本观察值计算 $\bar{x}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$.

因此 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{x})=\frac{1}{4}$.

对于给定的样本值似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,\quad \ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，得方程 $12\theta^2-14\theta+3=0$，解得

$$\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}\ (\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2},\text{不合题意舍去}).$$

3

【解】 我们用样本矩作为总体矩的矩估计量,用样本矩的函数估计总体矩的同一函数,为此要首先求出被估参数θ与总体矩的关系.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4\theta}\bigg|_0^{\theta}+\frac{x^2}{4(1-\theta)}\bigg|_{\theta}^{1}=\frac{2\theta+1}{4}\triangleq\mu,$$

$$\Rightarrow\qquad \theta=2\mu-\frac{1}{2}.$$

则θ的矩估计量$\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ） 判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量,就是要计算$4\overline{X}^2$的期望,并判断其是否等于被估计量θ^2.为此我们先计算EX^2,进而求出$DX,D\overline{X}$与$E\overline{X}^2$.

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x^2}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{\theta^2}{6}+\frac{1-\theta^3}{6(1-\theta)}=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48},$$

$$D\overline{X}=\frac{DX}{n},\quad E\overline{X}=EX,$$

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48n}+\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}\neq\frac{\theta^2}{4},E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2,$$

故$4\overline{X}^2$不是θ^2的无偏估计量.

4

解：由题意可知，这是一个单边右检验。令

p_1表示抽烟人群中犯心脏病的比例；

p_2表示不抽烟人群中犯心脏病的比例；

$\hat{p}_1=\frac{X_1}{n_1}=\frac{20}{80}=0.25$为抽烟人群犯心脏病的子样比例；

$\hat{p}_2=\frac{X_2}{n_2}=\frac{15}{120}=0.125$为不抽烟人群犯心脏病的子样比例；

（1）提出假设：$H_0: p_1-p_2\le 0$，

$H_1: p_1-p_2>0$。

（2）根据子样数据计算检验量的值：

$$\hat{p}=\frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}=\frac{20+15}{80+120}=0.175$$

$$z=\frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{(0.25-0.125)-0}{\sqrt{0.175(1-0.175)(\frac{1}{80}+\frac{1}{120})}}=2.28$$

（3）当$\alpha=0.05$时，查正态分布表得$z_{0.05}=1.645$，拒绝域为$(1.645,\ \infty)$因为$z=2.28\in(1.645,\ \infty)$落入拒绝域，故拒绝$H_0$，接受$H_1$，认为抽烟的人群中犯心脏病的比例要高于不抽烟的人群，表明抽烟与不抽烟的人群中犯心脏病的比例有显著性的差异。

5

解：作假设检验，令：

p_1表示初中男生视力近视的比例；p_2表示初中女生视力近视的比例。

H_0： $p_1 - p_2 \ge 0$，表示男生和女生近视的人数比例没有显著差异，

H_1： $p_1 - p_2 < 0$，男生近视的比例低于女生近视的比例。

由题意知，$\hat{p}_1 = \frac{18}{60} = 0.3$， $\hat{p}_2 = \frac{14}{40} = 0.35$。

实际检验统计量的值为：

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$$

$$= \frac{(0.30 - 0.35) - 0}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{60} + \frac{0.35(1-0.35)}{40}}} = -0.52。$$

这是一个单边左检验，当$\alpha = 0.05$时，临界值为负的，查表得$z_{0.05} = -1.645$，拒绝域为$(-\infty, -1.645)$，$u = -0.52 > -1.645$，故接受H_0，拒绝H_1，即尚不能认为该市城区初中男生近视的人数比例要低于初中女生近视的比例。

6

解：这是一个关于正态均值的双侧假设检验问题。采用t检验，拒绝域为：

$$\left\{|t| \ge t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}$$

若取α=0.05，则 $t_{0.975}(4)$= 2.776.

现由样本计算得到：$\bar{x} = 239.5$， $s = 0.4$,

故

$$t = \sqrt{5} \cdot |239.5 - 240| / 0.4 = 2.7951$$

由于2.7951>2.776，故拒绝原假设，认为该厂生产的铝材的长度不满足设定要求。