1. 设总体X的分布律为：

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta(1-\theta)$	θ^2

其中 $(0<\theta<1)$ 未知．以 n_i 表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数(i=1,2,3)，求 θ 的最大似然估计．

解　样本的似然函数为：

$$L(\theta)=(1-\theta)^{n_1}\times[\theta(1-\theta)]^{n_2}\times(\theta^2)^{n_3}$$

所以，$\ln L(\theta)=n_1\ln(1-\theta)+n_2[\ln\theta+\ln(1-\theta)]+2n_3\ln\theta$

令　$0=\dfrac{d\ln \mathrm{L}(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n_1}{1-\theta}+n_2(\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta})+\dfrac{2n_3}{\theta}$

得参数 θ 的最大似然估计值为：$\hat{\theta}=\dfrac{n_2+2n_3}{n_1+2n_2+2n_3}$

2. 某元件的使用寿命X的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0\quad, & x<\theta\end{cases}$$

其中　$(\theta<0)$ 未知．设 $x_1, x_2,\dots, x_n$ 是X的一组样本观测值，求 θ 的矩估计和最大似然估计．

解 由于 $E(X)=\int_\theta^{+\infty}2xe^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\int_\theta^{+\infty}e^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\dfrac{1}{2}$

令 $\theta+\dfrac{1}{2}=\bar{x}$，得 θ 的矩估计值为：$\hat{\theta}=\bar{x}-\dfrac{1}{2}$.

样本的似然函数为：$L(\theta)=2^ne^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$，$x_i\ge\theta, i=1,2,\dots,n$

可见，θ 的最大似然估计值为：$\hat{\theta}=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$

3. 设$\hat{\theta}$是未知参数θ的无偏估计量，方差$D(\hat{\theta})$依赖于子样容量n，若$\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta})=0$，试证$\hat{\theta}$是$\theta$的相合估计量.

解 由于$E(\hat{\theta})=\theta$，由切比雪夫不等式有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}\geq \lim_{n\to\infty}[1-\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}]=1$$

即，$\hat{\theta}$是θ的相合估计量.

4. 已知一批零件的长度X(单位：cm)服从正态分布N(μ，1)，从中随机地抽取16个零件，算得长度的平均值为40cm，求X的置信度为0.95的置信区间。

解 由于$1-\alpha=0.95$，所以$\alpha=0.05$，查表得$z_{0.025}=1.96$，于是，X 的置信度为0.95的一个置信区间为：

$$(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

$$=(40-\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96,40+\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96)$$

$$=(39.51,\quad 40.49)$$

5. 用某仪器间接测量温度，重复测5次得数据：1250, 1265, 1245, 1260, 1275. 设温度X服从正态分布，试求置信度为0.99的温度均值的置信区间.

解 由$1-\alpha=0.99$，得$\alpha=0.01$，查表得$t_{0.005}(4)=4.6041$，

而且，$\overline{x}=1259$，$s^2=142.5$，

于是， 的置信度为0.99的一个置信区间为：

$$(\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2})$$

$$=(1259-\sqrt{\frac{142.5}{5}}\times 4.6041,1259+\sqrt{\frac{142.5}{5}}\times 4.6041)$$

$$=(1234.42，1283.58)$$

6. 设分别从总体N(1, 2)和N(2, 2)中抽取容量为n, m的两个独立样本，它们的样本方差分别为S_{12}和S_{22}. 试证：(1) 对于任意常数a, b(a+b=1)，$Z=aS_{12}+bS_{22}$都是2的无偏估计量; (2)确定常数a, b, 使D(Z)达到最小.

证明 (1)由于$(n-1)S_{12}/2\sim\chi^2(n-1)$, $(m-1)S_{22}/2\sim\chi^2(m-1)$ ，

所以, $E(Z)=aE(S_{12})+bE(S_{22})=(a+b)\times 2=2$

所以, $(n-1)E(S_{12})/2=n-1$, $(m-1)E(S_{22})/2=m-1$,

即，$Z=aS_{12}+bS_{22}$是2的无偏估计量.

(2) $D(Z)=a^2D(S_{12})+b^2D(S_{22})=a^2\times 2\times 4/(n-1)+b^2\times 2\times 4/(m-1)=8[(m+n-2)a^2-2(n-1)a+(n-1)]/(n-1)(m-1)$

所以，当$a=(n-1)/(m+n-2)$, $b=(m-1)/(n+m-2)$时取最小值.