第十九章 含参变量的积分

§1 含参变量的正常积分

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$；

（2）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha x dx$；

（3）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$.

解（1）由于 $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在$[-1,1]\times[-1,1]$上连续，故$I(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$在$[-1,1]$连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=2\int_{0}^{1}xdx=1.$$

（2）由于 $f(x,\alpha)=x^2\cos\alpha x$ 在$[0,2]\times[0,2]$上连续，故$I(\alpha)=\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha xdx$在$[0,2]$连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos\alpha xdx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{8}{3}.$$

（3）$\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx-\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx+\int_{1}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$，

由于 $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在$[0,1]\times[0,1]$上连续，故$I(\alpha)=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$在$[0,1]$连续，所以，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

而对$\forall\alpha\in R$，$x\in R$有，$\left|\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx\right|\le|\alpha|$，$\left|\int_{1}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx\right|\le|\alpha|$，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\int_{1}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=0,$$

因而，

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx-\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$$
$$-\lim_{\alpha\to 0}\int_{1}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2．求$F'(x)$，其中：

（1）$F(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}dy$；

（2）$F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$；

（3）$F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin(xy)}{y}dy$；

（4）$F(x)=\int_0^x[\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)ds]dt$.

解（1）$F'(x)=-\int_x^{x^2} e^{-xy^2}y^2dy+e^{-x(x^2)^2}\cdot 2x-e^{-xx^2}=-\int_x^{x^2} e^{-xy^2}y^2dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}$.

（2）$F'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(\cos x)'-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\sin x)'$

$=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dy-e^{x|\sin x|}\sin x-e^{x|\cos x|}\cos x$.

（3）$F'(x)=\int_{a+x}^{b+x}\cos(xy)dy+\frac{\sin(x(b+x))}{b+x}(b+x)'-\frac{\sin(x(a+x))}{z+x}(a+x)'$

$=(\frac{1}{x}+\frac{1}{b+x})\sin[x(x+b)]-(\frac{1}{x}+\frac{1}{a+x})\sin[x(x+a)]$.

（4）$F'(x)=\int_0^x(\frac{\partial}{\partial x}\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)ds)dt+\int_{x^2}^{x^2} f(x,s)ds=\int_0^x 2xf(t,x^2)dt$.

3．设 $f(x)$ 为连续函数，

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x[\int_0^x f(x+\xi+\eta)d\eta]d\xi ,$$

求 $F''(x)$.

解　由于 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_0^x f(x+\xi+\eta)d\eta=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_{x+\xi}^{2x+\xi} f(u)du$，所以，

$F'(x)=\frac{1}{h^2}[\int_{2x}^{3x} f(u)du+\int_0^x(\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{2x+\xi} f(u)du)d\xi]$

$=\frac{1}{h^2}\{\int_{2x}^{3x} f(u)du+\int_0^x[2f(2x+\xi)-f(x+\xi)]d\xi\}$,

$F''(x)=\frac{1}{h^2}[3f(3x)-2f(2x)+2f(3x)-f(2x)]=\frac{1}{h^2}[5f(3x)-3f(2x)]$.

注记　该题的函数应为 $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h[\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta]d\xi$（这从该教材第二版亦可得到印证），则

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta=\frac{1}{h^2}\int_0^x d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du ,$$

所以，

$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^x[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u)du]d\xi=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi$

$=\frac{1}{h^2}[\int_{x+h}^{x+2h} f(u)du-\int_x^{x+h} f(u)du]$,

$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)]=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)+f(x)]$.

4．研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续且为正的函数．

解 当 $y\neq 0$ 时，被积函数在相应的闭矩形上是连续的，因此 $F(y)$ 在 $y\neq 0$ 连续．当 $y=0$ 时，$F(0)=0$．

而 $y>0$ 时，设 m 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值，则 $m>0$．由于

$$F(y)\geq m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = m\arctan\frac{1}{y}\text{，而}\lim_{y\to 0^+}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}\text{，}$$

故有 $\lim\limits_{y\to 0^+}F(y)$ 若存在，必然 $\lim\limits_{y\to 0^+}F(y)\geq \frac{m\pi}{2}>0=F(0)$ 或不存在，因而 $F(y)$ 在 $y=0$ 时间断．

5．应用积分号下求导法求下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)dx$（$a>1$）；

（2）$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$ $(|a|<1)$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx$ $(a,b\neq 0)$；

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$ $(|a|<1)$．

解（1）设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)dx$，则有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\partial}{\partial x}\ln(a^2-\sin^2 x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\sin^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{a+\sin x}+\frac{1}{a-\sin x})dx=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}(\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}+\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}})$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\text{，}$$

即

$$I(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}da=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+c\text{．}$$

c 的确定较为困难，可如下进行．

$$c=I(a)-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)dx-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln a^2+\ln(1-\frac{\sin^2 x}{a^2})]dx-\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\frac{\sin^2x}{a^2})dx-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a},$$

令 $a\to+\infty$，$\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\to\pi\ln 2$，又 $0<1-\frac{1}{a^2}<1-\frac{\sin^2 x}{a^2}\le 1$，所以，

$$\ln(1-\frac{1}{a^2})\le\ln(1-\frac{\sin^2 x}{a^2})\le 0,$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\frac{\sin^2 x}{a^2})dx\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln(1-\frac{\sin^2 x}{a^2})\right|dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\ln(1-\frac{1}{a^2})\right|dx=\frac{\pi}{2}\left|\ln(1-\frac{1}{a^2})\right|\to 0\ (a\to+\infty),$$

$\Rightarrow c=\pi\ln 2$，即 $I(a)=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

（2）设 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$，则

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}dx=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{1}{(1+a^2)-2a\cos x}dx=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-\frac{2a}{1+a^2}\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\frac{2(1-a)}{(1-a)^2(1+a)}\arctan(\frac{1+a}{1-a}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{(1+a^2)a}\frac{\pi}{2}=\frac{a\pi}{1+a^2},$$

所以，$I(a)=I(a)-I(0)=\int_0^{a}\frac{a\pi}{1+a^2}da=\frac{\pi}{2}\ln(1+a^2)$.

（3）将 a 看作参变量，b 认为是常数，记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)dx$．可先设 $a>0$，$b>0$，则

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\partial}{\partial a}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx.$$

若 $a=b$，则 $I'(a)=\frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2b}$，若 $a\ne b$ 作代换 $t=\tan x$，得

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^2)(t^2+\frac{b^2}{a^2})}$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{1+t^2}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{(t^2+\frac{b^2}{a^2})}\right)dt=\frac{\pi a}{a^2-b^2}-\frac{\pi b}{a^2-b^2}=\frac{\pi}{a+b},$$

所以，$I(a)=\int\frac{\pi}{a+b}da=\pi\ln(a+b)+c$，而 $I(b)=\pi\ln b=\pi\ln(2b)+c\Rightarrow c=-\pi\ln 2$，于是

$$I(a)=\pi\ln(a+b)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

若 $a<0$ 或 $b<0$，则可以 $-a$ 或 $-b$ 代替 a 或 b，因而总有 $I(a)=I(|a|)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.

（4）记 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$，令 $f(x,a)=\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$，当 $x=0,\frac{\pi}{2}$ 时，f 无定义，

但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x,a)=a$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x,a)=0$，故补充定义 $f(0,a)=a$，$f(\frac{\pi}{2},a)=0$，则 f 在 $[0,2\pi]\times[-b,b]$

连续（$0<b<1$），从而 $I(a)$ 在 $(-1,1)$ 连续.

$$f_a(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\tan^2 x}, & x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\\ 0, & x=0,\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

显然 $f_a(x,0)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 点不连续，但 $f_a(x,a)$ 分别在 $[0,2\pi]\times(-1,0)$ 和 $[0,2\pi]\times(0,1)$ 连续，故有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_a(x,a)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}dx,\quad a\in(-1,0)\text{ 或 }a\in(0,1).$$

令 $\tan x=t$，

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1+a^2t^2-a^2t^2-a^2}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt$$

$$=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+t^2)}-\frac{a^2}{(1+a^2t^2)}\right]dt=\frac{\pi}{2(1+|a|)},\quad a\in(-1,0)\text{ 或 }a\in(0,1).$$

积分之

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+c_1,\quad a\in(0,1);$$

$$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)+c_2,\quad a\in(-1,0).$$

因为 $I(a)$ 在 $(-1,1)$ 连续，故 $I(0)=\lim\limits_{a\to 0^+}I(a)=0=\lim\limits_{a\to 0^-}I(a)$，得 $c_1=c_2=0$，从而得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\ln(1+|a|)\text{，}\ |a|<1\,.$$

6．应用积分交换次序求下列积分：

（1）$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a>0,b>0)$；

（2）$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a>0,b>0)$．

解（1）$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1dx\int_a^b x^ydy=\int_a^b dx\int_0^1 x^ydx=\int_a^b\frac{1}{1+y}dy=\ln(1+y)|_a^b$

$$=\ln(1+b)-\ln(1+a)=\ln\frac{1+b}{1+a}\,.$$

（2）$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1[\sin(\ln\frac{1}{x})\int_a^b x^ydy]dx=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin(\ln\frac{1}{x})dx\,.$

记 $I(y)=\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^ydx$，则

$$I(y)=\frac{1}{y+1}\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})dx^{y+1}=\frac{1}{y+1}[\sin(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}\Big|_0^1-\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}(-\frac{1}{x})dx]$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})x^ydx=\frac{1}{(y+1)^2}[\cos(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}\Big|_0^1-\int_0^1(-\sin(\ln\frac{1}{x})x^{y+1}(-\frac{1}{x})dx]$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}(1-\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^ydx)=\frac{1}{(y+1)^2}(1-I(y))\text{，}$$

所以，$I(y)=\frac{1}{(y+1)^2+1}$，因此，

$$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b I(y)dy=\int_a^b\frac{1}{(1+y)^2+1}dy=\arctan\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}\,.$$

7．设 f 为可微函数，试求下列函数的二阶导数：

（1）$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$；

（2）$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy\ (a<b)$．

解（1）$F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)$，$F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$．

（2）$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy$

$$=\begin{cases}\int_a^b f(y)(y-x)dy, & x\le a,\\ \int_a^x f(y)(x-y)dy+\int_x^b f(y)(y-x)dy, & a<x<b,\\ \int_a^b f(y)(x-y)dy, & x\ge b,\end{cases}$$

$$F'(x)=\begin{cases}-\int_a^b f(y)dy, & x\le a,\\ \int_a^x f(y)dy-\int_x^b f(y)dy, & a<x<b,\\ \int_a^b f(y)dy, & x\ge b,\end{cases}$$

$$F''(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 2f(x), & a<x<b,\\ 0, & x\ge b\end{cases}=\begin{cases}2f(x), & a<x<b,\\ 0, & x\le a \text{ or } x\ge b.\end{cases}$$

8．证明：$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \ne \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

证明 $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_0^1 dx[2x^2\int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dy-\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dy]$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\arctan x\,|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\int_0^1 dy[\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dx-2y^2\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dx]$$

$$=-\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy=-\arctan y\,|_0^1=-\frac{\pi}{4},$$

所以，$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \ne \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

9．设 $F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$，问是否成立

$$F'(0)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx.$$

解 $F(0)=\int_0^1 \ln|x|dx=\int_0^1 \ln x dx=-1$，所以，

$$\frac{F(y)-F(0)}{y}=\frac{1}{y}(\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}dy+1)=\frac{1}{y}[\ln\sqrt{1+y^2}+\int_0^1 \frac{y^2}{x^2+y^2}dx-\int_0^1 dx+1]$$

$$=\frac{1}{y}[\ln\sqrt{1+y^2}+y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1]=\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\to\frac{\pi}{2}\ (y\to0^+),$$

即 $F'_+(0)=\frac{\pi}{2}$，同样 $F'_-(0)=-\frac{\pi}{2}$，因此 $F'(0)$ 不存在，而

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx=\int_0^1 0dx=0,$$

因此，$F'(0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{y=0}dx$ 不成立.

10．设

$$F(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)d\theta,$$

求证 $F(x)\equiv2\pi$.

证明 $\forall x_0\in R$，函数 $f(x,\theta)=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ 在矩形域 $[-(|x_0|+1),|x_0|+1]\times[0,2\pi]$ 连续，

$$f_x(x,\theta)=e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos(x\sin\theta)+e^{x\cos\theta}[-\sin(x\sin\theta)]\sin\theta$$

亦在矩形域 $[-(|x_0|+1),|x_0|+1]\times[0,2\pi]$ 连续，故由积分号下求导数可得

$$F'(x_0)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}f(x,\theta)\Big|_{x=x_0}d\theta=\int_0^{2\pi}[e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos(x\sin\theta)-e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\sin\theta]_{x=x_0}d\theta$$

$$=\frac{1}{x_0}\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}d\sin(x_0\sin\theta)-\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\sin\theta d\theta\qquad(x_0\neq0)$$

$$=\frac{1}{x_0}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{x_0}\int_0^{2\pi}\sin(x_0\sin\theta)e^{x_0\cos\theta}\cdot x_0(-\sin\theta)d\theta$$

$$-\int_0^{2\pi}e^{x_0\cos\theta}\sin(x_0\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=0,$$

当 $x_0=0$ 时，显然 $F'(0)=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\sin\theta\Big|_0^{2\pi}=0$.

由 $x_0\in R$ 的任意性，$F'(x)=0$，因此，$F(x)\equiv C$，而 $C=F(0)=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$，所以，

$$F(x)\equiv2\pi.$$

11．设 $f(x)$ 为两次可微函数，$\varphi(x)$ 为可微函数，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)dz$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件

$$u(x,0)=f(x)，\ u_t(x,0)=\varphi(x).$$

证明 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\dfrac{1}{2a}[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)]$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2a}[a\varphi(x+at)+a\varphi(x-at)]\\&=\frac{a}{2}[-f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$$

所以，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]\\&=a^2\{\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]\}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\end{aligned}$$

即满足弦振动方程．又

$$u(x,0)=\frac{1}{2}[f(x)+f(x)]+\frac{1}{2a}\int_x^x\varphi(z)dz=f(x),$$

$$u_t(x,0)=\frac{a}{2}[-f'(x)+f'(x)]+\frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(x)]=\varphi(x),$$

即满足初始条件．

§2 含参变量的广义积分

1．证明下列积分在指定的区间内一致收敛：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}dy$（$x\ge a>0$）；

（2）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}dy$ $(-\infty<x<+\infty)$；

（3）$\displaystyle\int_1^{+\infty}y^xe^{-y}dy$ $(a\le x\le b)$；

（4）$\int_1^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos y}{y^p}dy$（$p>0$，$x\ge 0$）；

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$ $(p\ge 0)$.

证明（1）因为当$x\ge a>0$时，$\forall y\in[0,+\infty]$，有

$$\left|\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{a^2+y^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+y^2}dy$收敛，由 M 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}dy$在$x\ge a>0$是一致收敛的.

（2）因为，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[0,+\infty)$成立

$$\left|\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\right|\le\frac{1}{1+y^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy$收敛，由 M 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}dy$在$-\infty<x<+\infty$一致收敛.

（3）因为$\forall x\in[a,b]$，$y\in[1,+\infty)$，成立

$$\left|y^xe^{-y}\right|\le y^{\max\{|a|,|b|\}}e^{-y}\le y^Me^{-y},$$

其中$M=\max\{|a|,|b|\}\ge 0$，而$\int_1^{+\infty}y^Me^{-y}dy$收敛，所以$\int_1^{+\infty}y^xe^{-y}dy$在$a\le x\le b$一致收敛.

（4）用 Abel 判别法. 已知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y^p}dy$收敛(见第十一章§3 习题 3(3))，又对每一个$x\in[0,+\infty)$，函数e^{-xy}关于y是单调函数，且$\forall x\in[0,+\infty)$，$y\in[1,+\infty)$，有$\left|e^{-xy}\right|\le 1$，由 Abel 判别法知

$$\int_1^{+\infty}e^{-xy}\frac{\cos y}{y^p}dy$$

在$[0,+\infty)$一致收敛.

（5）由于$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$收敛（见 p56−§11.1-例 10），又对每一个$p\in[0,+\infty)$，函数$\frac{1}{1+x^p}$是单调减函数，且$\forall x\in[0,+\infty)$，$p\in[0,+\infty)$，有$\left|\frac{1}{1+x^p}\right|\le 1$，由 Abel 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$ $(p\ge 0)$在$[0,+\infty)$一致收敛.

2．讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx \quad (0<\alpha<+\infty)$；

（2）$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$，

（i）$x\in[a,b] \quad (a>0)$，　（ii）$x\in[0,b]$；

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，

（i）$a<\alpha<b$，　（ii）$-\infty<\alpha<+\infty$；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin xdy \quad (0<x<+\infty)$．

解（1）$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{(-\sqrt{\alpha}x)^2}d(\sqrt{\alpha}x)\ \underline{\underline{\sqrt{\alpha}x=u}}\ \int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (\alpha>0)$，当 $\alpha=0$ 时积分为 0．

$\forall A>0$，由于 $\lim\limits_{\alpha\to o^+}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim\limits_{\alpha\to o^+}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故 $\exists\varepsilon_0: 0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\exists\alpha_0>0$，使得有 $\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx>\varepsilon_0$，因此积分非一致收敛．

（2）积分对于每一个定值 $x\ge0$ 是收敛的．

当 $x=0$ 时，$\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy=0$；当 $x>0$ 时 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy=-e^{-xy}\mid_0^{+\infty}=1$．

（i）$x\in[a,b]\,(a>0)$，由于 $0<\int_A^{+\infty}xe^{-xy}dy=e^{-xA}\le e^{-aA}$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，使当 $A>A_0$ 时，就有 $\int_A^{+\infty}xe^{-xy}dy<e^{-aA_0}=\varepsilon$，于是，在区间 $x\in[a,b]\,(a>0)$ 上积分一致收敛．

（ii）由于 $x\to0^+$ 时，$e^{-Ax}\to1$，故 $\exists\varepsilon_0:0<\varepsilon_0<1$，对于足够小的 x_0 值，$e^{-Ax_0}>\varepsilon_0$，故在 $[0,b]$ 上，积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 不一致收敛．

（3）对任意固定的 α，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 都收敛，且（作代换 $x-\alpha=t$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,.$$

（i）取正数 R 充分大，使得 $-R<a<b<R$，显然，当 $|x|\ge R$ 时，对一切 $a<\alpha<b$，有

$$0<e^{-(x-\alpha)^2}<e^{-(|x|-R)^2},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(|x|-R)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(x-R)^2}dx$ 收敛，由 M 判别法，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $a<\alpha<b$ 一致收敛．

（ii）$\forall A>0$，有 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_A^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{A-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$，故当 α 充分大时，

$$\int_A^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \varepsilon_0 ,$$

由此可知$\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$非一致收敛，因而$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$在$-\infty<\alpha<+\infty$更非一致收敛.

（4）$\forall A>0$，有

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy = \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \int_{Ax}^{+\infty} e^{-t^2} dt \to \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (x \to 0^+) ,$$

因此，积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy$在$0<x<+\infty$非一致收敛.

3．设$f(t)$在$t>0$连续，$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$当$\lambda=a$，$\lambda=b$时皆收敛，且$a<b$．求证：$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$关于$\lambda$在$[a,b]$一致收敛.

证明 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt = \int_0^1 t^{\lambda-a} t^a f(t)dt + \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} t^b f(t)dt$.

由于$\int_0^1 t^a f(t)dt$收敛，因而，对$\lambda\in[a,b]$一致收敛，$t^{\lambda-\alpha}$当λ固定时，对t在$[0,1]$单调，且$\left|t^{\lambda-\alpha}\right| \le 1$，因此，由 Abel 判别法，积分$\int_0^1 t^{\lambda-a} t^a f(t)dt = \int_0^1 t^\lambda f(t)dt$在$[a,b]$一致收敛.

又因为$\int_1^{+\infty} t^b f(t)dt$收敛，故对$\lambda\in[a,b]$亦一致收敛，$t^{\lambda-b}$当$\lambda$固定时，对$t$在$[1,+\infty]$单调递减，且$\left|t^{\lambda-b}\right| \le 1$，由 Abel 判别法，积分$\int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} t^b f(t)dt = \int_1^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$在$[a,b]$一致收敛.

因此，$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)dt$在$[a,b]$上一致收敛.

4．讨论下列函数在指定区间上的连续性：

（1）$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy$ ，$x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^x} dy$，$x>3$；

（3）$F(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}} dy$，$x\in(0,2)$.

解（1）当$x\neq 0$时，

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} d(\frac{y}{x}) = \arctan \frac{y}{x}\Big|_0^{+\infty} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x<0 , \\ \frac{\pi}{2}, & x>0 , \end{cases}$$

而$F(0)=0$，因此，$F(x)$在$x\neq 0$连续，在$x=0$间断（第一类间断点）.

（2）因为

$$\frac{y^2}{1+y^x}=\frac{1}{y^{-2}+y^{x-2}}<\frac{1}{y^{x-2}},\ (y\ge 1)\ ,$$

而当 $x>3$ 时，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{x-2}}dx$ 收敛，$F(x)=\int_0^1\frac{y^2}{1+y^x}dy$ 在 $x>3$ 是常义积分，因而 $F(x)$ 在 $x>3$ 有意义.

$\forall x_0>3$，$\exists 3<b<x_0$，当 $y\ge 1$ 时，　$\forall x\in[b,+\infty)$，有

$$\frac{y^2}{1+y^x}=\frac{1}{y^{-2}+y^{x-2}}<\frac{1}{y^{x-2}}\le\frac{1}{y^{b-2}},$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{b-2}}dy$ 收敛，因而 $\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dy$ 在 $[b,+\infty)$ 一致收敛，因此，$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dx$ 在 $x_0\in[b,+\infty)$ 连续，由 $x_0\in(3,+\infty)$ 的任意性可知，$F(x)$ 在 $x>3$ 连续.

（3）$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(\pi-y)}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy$，

所以，$\forall x_0\in(0,2)$，$\exists\delta>0$，使得 $0<\delta<x_0<2-\delta$，当 $x\in[\delta,2-\delta]$ 时，有

$$\left|\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}\right|\le\frac{1}{y^{x-1}(\pi-y)^{2-x}}\le\frac{1}{y^{1-\delta}(\pi-\frac{\pi}{2})^{\delta}}=\frac{1}{y^{1-\delta}(\frac{\pi}{2})^{\delta}},\quad y\in(0,1],$$

$$\left|\frac{\sin(\pi-y)}{y^x(\pi-y)^{2-x}}\right|\le\frac{1}{y^x(\pi-y)^{1-x}}\le\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^{2-\delta}(\pi-y)^{1-\delta}},\quad y\in[\pi-1,\pi),$$

$\int_0^1\frac{1}{y^{1-\delta}(\frac{\pi}{2})^{\delta}}dy$ 及 $\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^{2-\delta}(\pi-y)^{1-\delta}}dy$ 均收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dx$ 及 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dx$ 均在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 一致收敛，因而 $\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y^x(\pi-y)^{2-x}}dy$ 在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 一致收敛.

因此，$F(x)$ 在 $x\in[\delta,2-\delta]$ 连续，因而在 $0<\delta<x_0<2-\delta$ 连续，由 $x_0\in(0,2)$ 的任意性，知 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 连续.

5．若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，含参变量广义积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

在$[a,b)$收敛，在$x=b$时发散，证明$I(x)$在$[a,b)$不一致收敛.

证明 目的在于证明：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$及$x\in[a,b]$，使得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right|\ge\varepsilon_0 . \qquad (1)$$

因为

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right|=\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)]dy+\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|$$

$$\ge\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|-\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)]dy\right| ,$$

因此，若能证明$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$及$x\in[a,b]$，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|\ge 2\varepsilon_0 ,\quad \left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)dy\right|<\varepsilon_0 , \qquad (2)$$

则（1）式即可得到．剩下的问题在于证明（2）.

1^0 因$\int_c^{+\infty} f(b,y)dy$发散，故$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A''>A'>A_0$，使得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(b,y)dy\right|\ge 2\varepsilon_0 .$$

2^0 但$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,+\infty)$连续，从而在有界闭区域$a\le x\le b$，$A'\le y\le A''$上一致连续，于是对上述1^0中$\varepsilon_0>0$，$\exists\delta>0$，当$|x'-x''|<\delta$，$|y'-y''|<\delta$且x'，$x''\in[a,b]$，y'，$y''\in[A',A'']$时，有

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\frac{\varepsilon_0}{A''-A'} ,$$

从而$|x-b|<\delta$时，有$|f(x,y)-f(b,y)|<\dfrac{\varepsilon_0}{A''-A'}$，由此推得

$$\left|\int_{A'}^{A''}[f(x,y)-f(b,y)dy\right|<\varepsilon_0 .$$

6．含参变量的广义积分$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$[a,b]$一致收敛的充要条件是：对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$（其中$A_1=c$），函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在$[a,b]$上一致收敛.

证明 必要性. $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在$[a,b]$一致收敛，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>c$，当$A>A_0$时，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

对$x\in[a,b]$一致地成立.

对任意递增数列$\{A_n\}$：$A_n\to\infty\ (A_1=c)$，首先，

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,y)dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_c^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=I(x),\quad \forall x\in[a,b]\text{成立}.$$

其次，由于$\{A_n\}$单调递减趋于$+\infty$，故对上述$A_0>c$，$\exists N$满足$A_N\geq A_0$，因此当$n>N$时，$A_n>A_N\geq A_0$，因此，有

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,y)dy\right|=\left|\int_{A_n}^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

$\forall x\in[a,b]$一致地成立，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$I(x)$.

充分性. 采用反证法. 若不然，设对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$（其中$A_1=c$），函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy$在$[a,b]$上一致收敛，但广义积分$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$[a,b]$不一致收敛，因此$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall A_0>c$，$\exists A>A_0$，$\exists x_0\in[a,b]$，使得$\left|\int_A^{+\infty} f(x_0,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$.

取$A_0^{(1)}=[c]+1>0$，$\exists A_2>A_0^{(1)}$，$\exists x_1\in[a,b]$，使得$\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x_1,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$；

取$A_0^{(2)}=A_1+1$，$\exists A_3>A_0^{(2)}$，$\exists x_2\in[a,b]$，使得$\left|\int_{A_3}^{+\infty} f(x_2,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$；

取$A_0^{(3)}=A_2+1$，$\exists A_4>A_0^{(3)}$，$\exists x_3\in[a,b]$，使得$\left|\int_{A_4}^{+\infty} f(x_3,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$；

如此一直下去．得到一列单调递增序列$\{A_n\}$（令$A_1=C$），且$A_n\to+\infty\ (n\to\infty)$和一列$\{x_n\}\subset[a,b]$，使得

$$\left|\int_{A_{n+1}}^{+\infty} f(x_n, y)dy\right| \geq \varepsilon_0,$$

即函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 非一致收敛，矛盾！

因此，$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

7．用上题的结论证明含参变量广义积分 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 的积分交换次序定理（定理 19．12）和积分号下求导数定理（定理 19．13）.

证明 积分交换次序定理 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，且含参变量的广义积分

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\int_a^b I(x)dx = \int_c^{+\infty} dy\int_a^b f(x,y)dx,$$

即
$$\int_a^b dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

由于 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 一致收敛 $\Rightarrow$ 对任意递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$（$A_1 = c$），函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $I(x)$，由已知条件，$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，因而亦在 $[a,b]\times[A_n, A_{n+1}]$ 上连续，故 $u_n(x) = \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 连续，因此利用函数项级数和函数的逐项积分定理，有

$$\int_a^b I(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b dx\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\int_c^{A_{n+1}} dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_c^{+\infty} dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

积分号下求导数定理 设 $f(x,y)$ 和 $f_x(x,y)$ 都在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy,$$

即
$$\frac{d}{dx}\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy = \int_c^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy.$$

由于 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上收敛，故对任意趋于 $+\infty$ 的递增函数列 $\{A_n\}$（$A_1 = C$），级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $I(x)$，又 $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，故函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，用函数项级数和函数的逐项求导定理，知

$$I'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f_x(x,y)dy=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy.$$

8．利用微分交换次序计算下列积分：

（1）$I_n(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$ （n 为正整数，$a>0$）；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$（$a>0$，$b>0$）；

（3）$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$（$a>0$）.

解（1）由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 对一切 $a_0>0$ 在 $a\ge a_0$ 上一致收敛，得

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{1}{x^2+a})dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}=-I_1(a),$$

由 $a_0>0$ 的任意性，知上式对一切 $a>0$ 成立．同理对积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导，得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}=(-1)^n n! I_n(a),$$

但

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}(\frac{\pi}{2\sqrt{a}})=-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}},$$

$$\frac{d^2}{da^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{d}{da}(-\frac{\pi}{2^2}\frac{1}{\sqrt{a^3}})=(-1)^2\frac{1\cdot 3\pi}{2^3}\frac{1}{\sqrt{a^5}},$$

用数学归纳法，可得

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}}\frac{1}{\sqrt{a^{2n+1}}},$$

所以，

$$I_n(a)=\frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}\cdot n!}\cdot a^{-(n+\frac{1}{2})}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

（2）当 $m=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=0$，下设 $m\neq 0$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx=0$，因此 $x=0$ 不是瑕点，从而当 $a>0$，$b>0$ 时，被积函数在 $0\le x<+\infty$ 内连续（$x=0$ 的函数值理解为极限值 0），又由于

$$\left|\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\right|\le\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\quad(x>0),$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ 收敛，由比较判别法，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$ 收敛.

当 $a\ge a_0>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mxdx$ 是一致收敛的．事实上，由 $\left|e^{-ax}\sin mx\right|\le e^{-a_0x}$ $(x\ge 0)$ 立即得到此结论．于是 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx$ 在 $a\ge a_0>0$ 时可以在积分号下求导数，得

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin mxdx=-\frac{m}{a^2+m^2},$$

由 $a_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $a>0$ 均成立，从而

$$I(a)=-\int\frac{m}{a^2+m^2}da=-\arctan\frac{a}{m}+c,$$

其中 c 为待定常数，令 $a=b$，则得 $I(b)=0=-\arctan\frac{b}{m}+c\Rightarrow c=\arctan\frac{b}{m}$．所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mxdx=\arctan\frac{b}{m}-\arctan\frac{a}{m}=\arctan\frac{m(b-a)}{m^2+ab}\quad(m\neq 0).$$

（3）
$$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\sin bxd(e^{-ax^2})=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$$
$$=\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$$

设 $I(b)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$，由于 $e^{-ax^2}\cos bx$ 与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$ 都是 $x\ge 0$，$-\infty<b<+\infty$ 上的连续函数，且此时

$$\left|e^{-ax^2}\cos bx\right|\le e^{-ax^2},\quad\left|xe^{-ax^2}\sin bx\right|\le xe^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$ 都收敛，因此积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$ 与 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bxdx$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，从而可以在积分号下求导数．所以，

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx dx = -\frac{b}{2a}I(b),$$

解得，$I(b) = ce^{-\frac{b^2}{4a}}$，其中 c 是待定常数．但 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx dx = \frac{b}{2a}I(b) = \frac{b}{2a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} = \frac{b\sqrt{a\pi}}{4a^2}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

9．利用对参数的积分法计算下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx$（$a > 0$，$b > 0$）；

（2）$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx$（$a > 0$，$b > 0$）．

解（1）$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx = -\int_0^{+\infty} xdx\int_b^a e^{-tx^2}dt = \int_a^b dt\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}dx$

$$= -\int_a^b \frac{1}{2t}dt\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}d(-tx^2) = -\int_a^b \frac{1}{2t}e^{-tx^2}\Big|_0^{+\infty}dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\ln t\Big|_a^b = \frac{1}{2}(\ln b - \ln a) = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

（2）$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx = \int_0^{+\infty} \sin mx dx\int_a^b e^{-tx}dt = \int_a^b dt\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin mx dx$

$$= \int_a^b \frac{m}{t^2 + m^2}dt = \arctan\frac{t}{m}\Big|_a^b = \arctan\frac{b}{m} - \arctan\frac{a}{m} = \arctan\frac{m(b-a)}{m^2 + ab}\ (m \neq 0),$$

而 $m = 0$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx = 0$，这也可以归结到前面最终答案中 $m = 0$ 的情形，所以，

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx = \arctan\frac{m(b-a)}{m^2 + ab}.$$

10．利用 $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}dy$ 计算 Laplace 积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx$$

和

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin \alpha x}{1+x^2}dx.$$

解 先计算 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx$.

若 $\alpha = 0$，则 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$，故下设 $\alpha \neq 0$.

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy)\cos\alpha xdx=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}\cos\alpha xdx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}e^{-\frac{\alpha^2}{4y}}dy\ \underline{\underline{\sqrt{y}=t}}\ \int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}e^{-(t^2+\frac{\alpha^2}{4t^2})}dt=\sqrt{\pi}e^{|\alpha|}\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt\,,$$

其中第四个等号应用了 8（3）中 $I(b)$ 的结果．下面计算

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt\,.$$

设 $t-\frac{|\alpha|}{2t}=u$，则 $0<t<+\infty$ 时，$-\infty<u<+\infty$，$t+\frac{|\alpha|}{2t}=\sqrt{u^2+2|\alpha|}\ \Rightarrow t=\frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2+2|\alpha|})$，

从而有 $dt=\frac{1}{2}(1+\frac{2u}{2\sqrt{u^2+2|\alpha|}})du=\frac{1}{2}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du$，代入得

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du$$

$$=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du)$$

$$=\frac{1}{2}(\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{\sqrt{u^2+2|\alpha|}-u}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du+\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}\frac{u+\sqrt{u^2+2|\alpha|}}{\sqrt{u^2+2|\alpha|}}du)\ \text{（前者作负代换）}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}2du=\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+2|\alpha|)}du=e^{-2|\alpha|}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|\alpha|}\,,$$

所以，$L=\sqrt{\pi}\cdot e^{|\alpha|}\int_0^{+\infty}e^{-(t+\frac{|\alpha|}{2t})^2}dt=\sqrt{\pi}\cdot e^{|\alpha|}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|\alpha|}=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

再计算 $L_1=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$．显然

$$L_1=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\alpha}\frac{\cos ux}{1+x^2}du=\int_0^{\alpha}du\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2}e^{-|u|}du=\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}e^{-|u|}du$$

$$=\frac{\pi}{2}\begin{cases}\int_0^{\alpha}e^{-u}du, & \alpha\ge 0,\\ \int_0^{\alpha}e^{u}du, & \alpha<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-e^{-\alpha}), & \alpha\ge 0,\\ \frac{\pi}{2}(e^{\alpha}-1), & \alpha<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-|\alpha|})\operatorname{sgn}\alpha\,.$$

11．利用 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy\ (x>0)$ 计算 Fresnel 积分

$$F=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,$$

和
$$F_1=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$$

解 在积分 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy$ 的两端乘以 $\sin x$，再在 $0<x_0\le x\le x_1$ 上积分，则得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}dx\int_0^{+\infty}\sin xe^{-xy^2}dy.$$

由于 $\left|\sin x\cdot e^{-xy^2}\right|\le e^{-x_0y^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-x_0y^2}dy$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\sin xe^{-xy^2}dy$ 对 $x_0\le x\le x_1$ 一致收敛，从而可以进行积分顺序的交换，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dy\int_{x_0}^{x_1}\sin x\cdot e^{-xy^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}[-\frac{e^{-xy^2}(y^2\sin x+\cos x)}{1+y^4}]_{x_0}^{x_1}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}y^2}{1+y^4}dy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_0\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_0y^2}}{1+y^4}dy$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy,$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0\le x_0<+\infty$，$0\le x_1<+\infty$ 都是一致收敛的（$e^{-x_0y^2}\le 1$，$e^{-x_1y^2}\le 1$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}$ 均收敛）. 于是，它们分别是 x_0,x_1（$0\le x_0<+\infty$，$0\le x_1<+\infty$）的连续函数，从而令 $x_0\to 0^+$，可在积分号下取极限，得

$$\int_0^{x_1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x_1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy,$$

且由于上式右端后两个积分均不超过积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x_1y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x_1}}\to 0\ (x_1\to+\infty)$. 故

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}y^2}{1+y^4}dy\to 0,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_1y^2}}{1+y^4}dy\to 0\ (x_1\to+\infty),$$

令 $x_1\to+\infty$ 取极限，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

所以，$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

同理可得，$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

12．利用已知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}，\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

计算下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$；

（2）$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy$；

（3）$\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx$（$a>0$）；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx$（$a>0$）；

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx$（$a>0$）.

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^4 xd(\frac{1}{x})=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos x}{x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{4x}d(4x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

（2）$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)y+\sin(1-x)y}{y}dy$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)y}{y}dy+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-x)y}{y}dy]$$

$$=\begin{cases}1, & -1<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=-1\ or\ x=1,\\ 0, & x<-1\ or\ x>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

（3）由于 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = xe^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}(-2ax)dx = 2a\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx$，所以，

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi a}}{4a^2}.$$

（4）$\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx = \int_0^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}dx = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\int_0^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2}dx = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\int_{\frac{b}{2a}}^{+\infty} e^{-at^2}dt$

$$= e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt - \int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-at^2}dt\right) = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-u^2}du\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-u^2}du\right).$$

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx = 2e^{2a}\int_0^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx$，

设 $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx$，令 $x-\frac{a}{x}=u$，则 $0<x<+\infty$ 时，$-\infty<u<+\infty$. $x+\frac{a}{x}=\sqrt{u^2+4a}$，

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2+4a})$，$dx = \frac{1}{2}\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du$，代入 $I(a)$，得

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^0 e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du + \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{\sqrt{u^2+4a}-u}{\sqrt{u^2+4a}}du + \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+4a)}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+4a}}{\sqrt{u^2+4a}}du\right) \text{（前者作负代换）}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+4a)}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4a},$$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx = 2e^{2a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-4a} = \sqrt{\pi}e^{-2a}$.

13．求下列积分：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt$；

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$.

解(1)引入参变量$\alpha(>0)$，考虑含参变量的积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos tdt$，则要求的积分为$I(1)$.

由于$\forall\alpha>0$，$\exists b>0$：$b<\alpha$，函数$\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t$及$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t)=e^{-\alpha t}\cos t$均在$[b,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续，且$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tdt$在$[b,+\infty)$一致收敛，（M 判别法．$\left|e^{-\alpha t}\cos t\right|\le e^{-bt}$，$\forall\alpha\in[b,+\infty)$），故在点$\alpha>0$，有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos tdt=\frac{-\alpha\cos t+\sin t}{\alpha^2+1}e^{-\alpha t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+1},$$

由$\alpha>0$的任意性，上式$I'(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$对一切$\alpha>0$成立．所以，$I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)+c$，再由$0=I(0)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}I(\alpha)=c$，即知

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1),$$

因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}\cos tdt=I(1)=\frac{1}{2}\ln2.$$

（2）引入参变量α：$0\le\alpha<\infty$，考虑含参变量的积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$，则要求的积分为$I(1)$．由于$f(\alpha,x)=\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}$在$[0,\infty)\times[0,\infty)$连续，且当$0\le\alpha\le\alpha_1$（$\alpha_1>0$为任何有限正数）时一致收敛．事实上，当$0\le\alpha\le\alpha_1$时，

$$0\le\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\le\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}\quad(0\le x<+\infty),$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}dx$收敛（$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+\alpha_1^2x^2)}{1+x^2}=0$），于是$I(\alpha)$是$0\le\alpha\le\alpha_1$上的连续函数．由$\alpha_1>0$的任意性知，$I(\alpha)$当$0\le\alpha<+\infty$时连续．而

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}]=\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)},$$

由于当$0<\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$时，有

$$0\le\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\le\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}\quad(0\le x<+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx$ 收敛，于是 $\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}dx$ 在 $0<\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$ 时是一致收敛的．从而

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha_1x^2}{(1+x^2)(1+\alpha_0^2x^2)}dx=\frac{\pi}{\alpha+1},$$

由 $\alpha_0>0$ 及 $\alpha_1>\alpha_0$ 的任意性知，上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 均成立．所以，

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+1)+c\ （0<\alpha<+\infty），$$

令 $\alpha\to0^+$ 取极限，注意到 $I(\alpha)$ 在 $0\le\alpha<+\infty$ 连续，可得 $0=I(0)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}I(\alpha)=c$，所以，$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+1)$．因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx=I(1)=\pi\ln2.$$

14．证明：

（1）$\int_0^1\ln(xy)dy$ 在 $[\frac{1}{b},b]$（$b>1$）上一致收敛；

（2）$\int_0^1\frac{dx}{x^y}$ 在 $(-\infty,b]$（$b<1$）上一致收敛．

证明（1）显然，$\forall x\in[\frac{1}{b},b]$，瑕积分 $I(x)=\int_0^1\ln(xy)dy$ 是收敛的，且 $x\in[\frac{1}{b},b]$，$y\in[0,\frac{1}{b}]$ 时，$|\ln(xy)|\le|\ln(by)|$，而积分 $\int_0^1\ln(by)dy$ 收敛，由 M 判别法，知 $\int_0^1\ln(xy)dy$ 在 $[\frac{1}{b},b]$ 上一致收敛．

（2）$\forall y\in(-\infty,b]$ $(b<1)$，积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^y}$ 收敛（$y\in(-\infty,0]$ 时是常义积分，$y\in[0,b]$ $(b<1)$ 时是瑕点为 0 的 p 积分）．且 $y\in(-\infty,b]$ 时，$\frac{1}{x^y}\le\frac{1}{x^b}$，而 $\int_0^1\frac{dx}{x^b}$ $(b<1)$ 收敛，由 M 判别法知 $\int_0^1\frac{dx}{x^y}$ 在 $(-\infty,b]$ $(b<1)$ 一致收敛．

§3　Euler 积分

1．利用 Euler 积分计算下列积分：

（1）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$；

（2）$\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$；

（3）$\int_0^1 \sqrt{x^3(1-\sqrt{x})}dx$；

（4）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$；

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx$；

（6）$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$；

（7）$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$（$n$ 为正整数）；

（8）$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$ ；

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx$（$n$ 为正整数）；

（10）$\int_0^1 x^m(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx$ （n 为正整数，$m>-1$）.

解（1）令 $x^{\frac{1}{4}}=t$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}=4\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=4\mathrm{B}(4,\frac{1}{2})=4\cdot\frac{4-1}{4+\frac{1}{2}-1}\mathrm{B}(3,\frac{1}{2})=4\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{2\frac{1}{2}}\mathrm{B}(2,\frac{1}{2})$$

$$=4\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{B}(1,\frac{1}{2})=\frac{64}{35}\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{128}{35}\Gamma(1)=\frac{128}{35}.$$

（2）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{1}{8}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{1}{8}(\sqrt{\pi})^2=\frac{\pi}{8}$.

（3）令 $x^{\frac{1}{2}}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，

$$\int_0^1 \sqrt{x^3(1-\sqrt{x})}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{1}{2}}2tdt=2\int_0^1 t^4(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=2\mathrm{B}(5,\frac{3}{2})$$

$$=2\frac{\Gamma(5)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(6\frac{1}{2})}=\frac{512}{3465}.$$

（4）令 $\frac{x^2}{a^2}=u$，则 $x=a\sqrt{u}$，$dx=\frac{a}{2\sqrt{u}}du$，所以，

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^1 a^2u(a^2-a^2u)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{a^4}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{a^4}{2}\mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{8}\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{a^4}{32}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{32}a^4 .$$

（5）令 $\sin^2 x = t$，则 $x=\frac{\pi}{2}$时，$t=1$；$x=0$时，$t=0$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{7}{2},\frac{5}{2}) = \frac{3}{512}\pi .$$

（6）先作代换 $x^4 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{4}}$，$dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t}$.

再令 $\frac{t}{1+t} = u$，$t = \frac{u}{1-u}$，$dt = \frac{1}{(1-u)^2}du$，因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t} = \frac{1}{4}\int_0^1\frac{(\frac{u}{1-u})^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{1-u}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{4}}\,du = \frac{1}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

（这里用到了 Γ 函数的余元公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$ $(0<x<1)$，参见陈纪修等《数学分析》（下册）P377-379，高等教育出版社 2000 年 4 月）.

（7）令 $x^2 = t$，则 $x = \sqrt{t}$，$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$，有

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}t^n e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} .$$

（8）$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{2+2\sin^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$\xlongequal{\sin\frac{x}{2}=t}\ \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\underline{\underline{t^4=u}}\ \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4}).$$

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx\ \underline{\underline{\sin x=t}}\ \int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt\ \underline{\underline{t^2=u}}\ \frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

（10）$\int_0^1 x^m(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx\ \underline{\underline{x=e^{-u}}}\ \int_{+\infty}^0(e^{-u})^m u^{n-1}d(e^{-u})=\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-(m+1)u}du$

$$\underline{\underline{(m+1)u=t}}\ \frac{1}{(m+1)^n}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}dt=\frac{1}{(m+1)^n}\Gamma(n)=\frac{(n-1)!}{(m+1)^n}.$$

2．将下列积分用 Euler 积分表示，并求出积分的存在域：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx$；

（2）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$　（$m>0$）；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n xdx$；

（4）$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^p dx$；

（5）$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx\quad(\alpha>0)$.

解（1）当$n>0$时，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+\frac{x^n}{2}}dx\ \underline{\underline{x^n=2t}}\ \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(2t)^{\frac{m-1}{n}}}{1+t}\frac{2}{nt^{\frac{n-1}{n}}}dx$$

$$=\frac{2^{\frac{m}{n}-1}}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt\ \underline{\underline{\frac{t}{1+t}=u}}\ \frac{2^{\frac{m}{n}-1}}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{-\frac{m}{n}}du$$

$$=\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}),$$

要求$\frac{m}{n}>0$且$1-\frac{m}{n}>0$，即$0<\frac{m}{n}<1$，也即$0<m<n$.

当$n=0$时，则积分为$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{3}dx$对一切的$x$发散.

当$n<0$时，$x^n=2t$，则$x=0$时$t=+\infty$；$x=+\infty$时$t=0$，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{2+x^n}dx=-\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt=-\frac{2^{\frac{m}{n}}}{2n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}),$$

同样要求$\frac{m}{n}>0$且$1-\frac{m}{n}>0$，即$0>m>n$.

积分的收敛域为：$0<m<n$或$n<m<0$.

（2）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}\xlongequal{x^m=t}\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{m}B(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n})$,

存在域为$1-\frac{1}{n}>0$，即$n>1$或$n<0$.

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^n xdx\xlongequal{\sin x=t}\int_0^1\frac{t^n}{(1-t^2)^{\frac{n+1}{2}}}dt\xlongequal{t^2=u}\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{n+1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{n+1}{2},\frac{1-n}{2})$

存在域为$\frac{n+1}{2}>0$且$\frac{1-n}{2}>0$，即$-1<n<1$.

（4）$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^p dx\xlongequal{x=e^{-t}}\int_0^{+\infty}t^p e^{-t}dt=\Gamma(p+1)$，$p+1>0$即$p>-1$为存在域.

（5）由对Γ函数分析性质的证明，可知$\forall p$：$-1<p_0\le p\le p_1$，积分$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx\ (\alpha>0)$

在$[p_0,p_1]$一致收敛．故当$p_0\le p\le p_1$时，

$$\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx,$$

但$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p e^{-t}dt=\frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}}$，故

$$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln xdx=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}dx=\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}}\right),\quad -1<p_0\le p\le p_1,$$

由$-1<p_0<p_1$的任意性，知上式对一切$p>-1$均成立.

3．证明：

（1）$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})\quad(n>0)$；

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$. .

证明（1）令 $x^n = t$，则 $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$，所以，$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})$.

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma(1+\frac{1}{n}) = \Gamma(1) = 1$.

4．证明：

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx;$$

$$\Gamma(\alpha) = s^\alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-sx} dx \quad (s>0).$$

证明 $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$，令 $x = \frac{1}{1+t}$，则 $x=1$时，$t=0$；$x=0$时，$t=+\infty$，

$$1-x = 1-\frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}, \quad dx = -\frac{1}{(1+t)^2} dt,$$

所以，

$$B(a,b) = -\int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+t)^{a-1}} \cdot (\frac{t}{1+t})^{b-1} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt,$$

在后一积分中作倒代换 $t = \frac{1}{u}$，则 $t=1$时，$u=1$；$t=+\infty$时，$u=0$.

$$dt = -\frac{1}{u^2} du, \quad \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} = \frac{(\frac{1}{u})^{b-1}}{(1+\frac{1}{u})^{a+b}} = \frac{u^{a+1}}{(1+u)^{a+b}},$$

所以，

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = -\int_1^0 \frac{u^{a+1}}{(1+u)^{a+b}} \cdot \frac{1}{u^2} du = \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt,$$

因此，

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt + \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{a-1}+t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \underline{\underline{\ x=st\ }} \int_0^{+\infty} (st)^{\alpha-1} e^{-st} s dt = s^\alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt = s^\alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-sx} dx.$$