

约瑟夫环^{*}

张晴川

qzha536@aucklanduni.ac.nz

April 15, 2020

1 题意

$0, 1, \dots, n-1$ 这 n 个数字排成一个圆圈，从数字 0 开始，每次从这个圆圈里删除第 m 个数字。求出这个圆圈里剩下的最后一个数字。

例如 $0, 1, 2, 3, 4$ 这五个数字组成一个圆圈，从数字 0 开始每次删除第 3 个数字，则删除的前 4 个数字依次是 $2; 0; 4; 1$ ，因此最后剩下的数字是 3。

2 数据范围

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq 10^6$

3 题解

一句话题解：通过剩余 x 个人时的答案反推 $x+1$ 个人时的答案。由于只剩一个人的时候答案必然为 0，层层反推即可。

首先我们用 $f(n)$ 表示剩余 n 个人的时候，从**当前**起点开始走 $f(n)$ 步会到达赢家的位置。

假设现在有 n 个人活着，那么**当前**起点是 0。而杀完编号为 $m-1$ 的人后，**新的**起点则是 m 。假设 $f(n-1)$ 已知，那么我们需要走 m 步到新的起点，再走 $f(n-1)$ 步走到赢家位置。即一共需要走的步数为：

$$\underbrace{m}_{\text{新起点}} + \underbrace{f(n-1)}_{\text{额外步数}}$$

^{*}<https://leetcode-cn.com/problems/yuan-quan-zhong-zui-hou-sheng-xia-de-shu-zi-lcof/>

[†]更多内容请访问：<https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials>

由于是在环上走，所以步数需要对 n 取模，所以最终结果是：

$$f(n) = (m + f(n - 1)) \bmod n$$

4 代码

```
1  class Solution {
2  public:
3      int lastRemaining(int n, int m) {
4          /*
5           设 ind 表示上一层的结果，len 表示当前人数
6           则  $f(len) = (m + f(len-1)) \bmod len$ 
7           */
8          int ind = 0;
9          for(int len = 2; len <= n; len++) {
10             ind = (m + ind) % len;
11         }
12         return ind;
13     }
14 };
```