数学分析题习课讲义

参考答案

Chapter 2

数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 思考题 pp.13.

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;

   (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall m \in \mathbf{N}_+, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;[1]

   (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

   试证明以上定义与数列收敛等价.

   证明. (1) $\Rightarrow$ 取 $N = N_0 + 1$. $\Leftarrow$ 显然.

   (2) $\Rightarrow$ 取 $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}_+$. $\Leftarrow$ 由于 $\lim\limits_{m\to\infty} 1/m = 0$, 故存在 $M \in \mathbf{N}_+$, 当 $m > M$ 时, $1/m < \varepsilon$. 选定 m, 使用定义, 存在$N_0 \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, 有 $|a_n - a| < 1/m < \varepsilon$.

   (3) $\Rightarrow$ 取 $K = 1$. $\Leftarrow$ 取 $\varepsilon' = \varepsilon/K$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\varepsilon' = \varepsilon$. □

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

   答. 否. 对于任意的ε, 存在一个 $N_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N_0$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而 $\forall N > N_0$ 都可以是符合定义的 N, 即每一个 ε 都可以对应无穷多个 N, 故不是. □

3. 判断: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

   答. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 从而 $|a_{n+1} - a| < \varepsilon/2$, 于是对于 $n > N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

[1]有些像级数的 Weierstrass-M 判别法, 事实上也可以用 Cauchy 收敛准则给出一个和 Weierstrass-M 判别法类似的证明. 本条是所有二分法/三分法证明的基础.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. 举一反例 $\{(-1)^n 1/n\}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 1/n = 0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}1/(n+1)}{(-1)^n 1/n} = \lim_{n\to\infty} -1\cdot\frac{n}{n+1} = -1. \qquad \square$$

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答. 从某一项开始后每一项均相同. 取 $\varepsilon = 1/2$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使对 $n > N$ 有 $|a_{n+1} - a_n| < 1/2$, 注意到 $a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$, 知 $a_{n+1} = a_n, \forall n > N$. $\square$

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答. 均不一定. 如分别取 $\{a + (-1)^n 1/m\}$(收敛但不单调) 和 $\{(-1)^n 1/n\}$(无穷小量但不单调). $\square$

6. [2]问: 正无穷大量数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定为无穷大量?

答. 均不一定. 如分别取 $\{n + 2\sin n\}$(正无穷大量但不单调) 和 $\{n\cdot\sin n\}$(无界但非无穷大). $\square$

7. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

答. 不一定. 如取 $\{a_n\}$ 为形如

$$1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/4, 1/8, 1/12, \cdots, 1/n, 1/2n, \cdots, 1/n(n-1), 1/(n+1), \cdots$$

的数列, 由于 $1/n$ 和 $1/(n+1)$ 之间的所有项都严格小于 $1/(n+1)$, 于是 $\{a_n\}$ 的上控数列[3] $\{\overline{a_n}\}$ 为 $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/4, \cdots$, 其中 $1/n$ 连续出现了 $n-3$ 次$(n \geqslant 3)$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a_n} = 0$. 而全为正项的数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{1/n\}$ 收敛于 0, 故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = 0$, 但显然 $\{|a_n|\}$ 并不单调. $\square$

8. 判断: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是整数.

答. 非负数列的极限是非负数. 反证法. 假设非负数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $A < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < -A/2$, 即当 $n > N$ 时有 $3A/2 < a_n < A/2 < 0$, 与 $\{a_n\}$ 非负矛盾.

正数列的极限不一定为正数, 如取 $\{1/n\}$, 其极限为 0. $\square$

[2]原本的6题中, 一个很小很小的量显然不是一个无穷小量, 注意无穷小量是一个趋于零的极限过程即可.

[3]请结合数列的上下极限部分.

2.1.2 练习题 pp.17.

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=3$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

证明. 对于任何 $\varepsilon>0$,

(1) 取 $N=[\sqrt{12/\varepsilon+4}]+1$, 当 $n>N$ 时, $|\dfrac{3n^2}{n^2-4}-3|=\dfrac{12}{n^2-4}<\varepsilon$;

(2) 取 $N=[1/\varepsilon]$, 当 $n>N$ 时, $|\dfrac{\sin n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$;

(3) 由于 $(1+n)^{\frac{1}{n}}>1,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 故令 $y_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}-1>0$, 有$n+1=(1+y_n)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)}{2}y_n^2$, 即

$$\sqrt[n]{n+1}-1=y_n\leqslant\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}$, 故存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 使当 $n>N$ 时有 $\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}<\varepsilon<1$, 故当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{n+1}-1=y_n\leqslant\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}<\sqrt{\varepsilon}<\varepsilon;$$

(4) 若 $0<a\leqslant 1$, 显然取 $N=[\varepsilon]+1$, 当 $n>N$ 时

$$\frac{a^n}{n!}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

若 $a>1$, 则存在 $k\in\mathbf{N}_+$ 使得 $k<a<k+1$, 于是

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdots a\cdot a\cdot a\cdots a\cdot a}{n\cdot(n-1)\cdots(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1}\leqslant\frac{a}{n}\frac{a\cdots a}{a\cdots a}\cdot\frac{a}{k}\frac{a}{k-1}\cdots\frac{a}{2}\frac{a}{1}.$$

注意上式中最后一项是一常数, 可记为 K, 取 $N=[aK/\varepsilon]+1$, 当 $n>N$ 时有 $\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$. □

2. 设 $a_n\geqslant 0,n\in\mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证明. $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leqslant\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|\leqslant\sqrt{a}\varepsilon$. 故当 $n>N$ 时, $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\leqslant\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. □

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之如何?

证明. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 故当 $n>N$ 时, $||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. □

4. [4] 设 $a>1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$. (可以利用已知的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.)

[4]关于原先的 5 题, 完全可以使用相应函数极限的定义加上 Heine 定理证明, 并且本质没有任何不同.

证明.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\log_a n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\log_a 1=0.$$

其中第二个等号用到了 $\log_a x$ 的连续性. □

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 思考题 pp.18.

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

   证明. $\{a_n+b_n\}$ 发散. 反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A$, 则对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1,N_2\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N_1$ 时, $|(a_n+b_n)-A|<\varepsilon/2$; 当 $n>N_2$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon/2$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

   $|b_n-(A-a)|=|[(a_n+b_n)-A]-(a_n-a)|\leqslant|(a_n+b_n)-A|+|a_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$

   即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A-a$, 与 $\{b_n\}$ 发散矛盾.

   $\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n=1/n, b_n=n\sin n$, 则 $a_nb_n=\sin n$, $\{a_nb_n\}$ 发散; 取 $a_n=1/n, b_n=(-1)^n$, 则 $a_nb_n=(-1)^n1/n$, $\{a_nb_n\}$ 收敛. □

2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

   证明. $\{a_n+b_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n=(-1)^n, b_n=(-1)^{n+1}$, 则 $a_n+b_n=0$, $\{a_n+b_n\}$ 收敛; 取 $a_n=b_n=(-1)^n$, 则 $a_n+b_n=(-1)^n\cdot 2$, $\{a_n+b_n\}$ 发散.

   $\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n=b_n=(-1)^n$, 则 $a_nb_n=1$, $\{a_nb_n\}$ 收敛; 取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$, 则 $a_nb_n=(-1)^n\cdot n$, $\{a_nb_n\}$ 发散. □

3. 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n, n\in\mathbf{N}_+$, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?

   证明. $\{b_n\}$ 不一定收敛. 取一反例, $a_n=n, b_n=n+1/2n, c_n=n+1/n, n\in\mathbf{H}_+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$, 但显然 $\{b_n\}$ 发散. □

4. 找出下列运算中的错误:

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

   证明. 问题在于第二个等号, 极限的四则运算法则之对于有限次的加减乘除(除法要求分母的数列不为零)成立, 对于可列次的四则运算没有意义. □

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又对每个 n 有 $b<a_n<c$, 问: 是否成立 $b<a<c$?

   证明. 不一定成立. 如取 $b=0, c=1, a_n=1/n, n\in\mathbf{N}_+$, 则有 $b<a_n<c, \forall n\in\mathbf{H}_+$, 但 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 故 $a=c$. □

6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又有 $b \leqslant a \leqslant c$, 问: 是否存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leqslant a \leqslant c$?

证明. 两次应用数列极限的保序性, 所得的正整数分别记为 N_1 和 N_2, 则取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$. □

7. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 问是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

证明. [5] 对于 $\varepsilon_0 = 1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知存在 $N \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n| < 1$, 记 $K = |a_1 a_2 \cdots a_N|$. 对于 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\exists N' \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N'$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/K$. 因此对于 $n > \max\{N, N'\}$, $|a_1 a_2 \cdots a_n| = K|a_{N+1} \cdots a_n| \leqslant K|a_n| < K \cdot \varepsilon/K = \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$. □

2.2.2 练习题 pp.25.

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.

证明. 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 当 $k > N$ 时, $2k > 2k-1 > N$, 故当 $k > N$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$.
充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_1 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_1$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$; $\exists K_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_2$ 时, $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{K_1, K_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. □

2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

(1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$;

(2) 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(3) 设 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明. (1) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} \leqslant \sqrt[n]{n \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k^n} = \sqrt[n]{n} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \to \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k (n \to \infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k$;

(2) $\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

(3) $\sqrt[n]{n \cdot 1/n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{[}{n}]n \to 1 (n \to \infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;

---

[5] 结合无穷级数的相关知识可以给出另一证明. 记 $u_n = a_1 \cdots a_n$, 由无穷级数的 d'Alembert 比值判别法, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, 有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(4) 取 $\varepsilon = a/2 > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < a/2$, 即当 $n > N$ 时 $a/2 < a_n < 3a/2$. 同时开 n 次根号, 有 $\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{3a/2}, \forall n > N$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

3. 求以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x| < 1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$, 其中 $\nu \in \mathbf{N}_+, \nu > 1$.

(最后两个题是 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的推广.)

证明. (1)
$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) &= \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \cdots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) &= \frac{2}{1+2}\cdot\frac{2+3}{1+2+3}\cdots\frac{2+\cdots+n}{1+2+\cdots n} \\ &= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2!(n-1)!(n+2)!}{3!n!(n+1)!} \\ &= \frac{n+2}{3n} \to \frac{1}{3}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ =&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] \\ =&\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \to \frac{1}{4}\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

(5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)}\right)$

$$=\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\nu}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}\right)\to\frac{1}{\nu\cdot\nu!}\ (n\to\infty)$$

□

4. 设 $s_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n$, $|a|<1$, 求 $\{a_m\}$ 的极限.
(试计算 s_n-as_n.)

证明.

$$\begin{aligned}S_n&=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n;\\ aS_n&=\qquad a^2+\cdots+(2n-3)a^n+(2n-1)a^{n+1}.\end{aligned}$$

上面两式相减, 有

$$(1-a)S_n=a+2(a^2+a^3+\cdots+a^n)-(2n-1)a^{n+1}=\frac{a(1+a)}{1-a}-(2n-1)a^{n+1}-\frac{2a^{n+1}}{1-a}.$$

故

$$S_n=\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}-\frac{1}{1-a}\left((2n-1)a^{n+1}+\frac{2a^{n+1}}{1-a}\right)\to\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}\ (n\to\infty).$$

□

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0, 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$, 则对 $\varepsilon=A/2>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $|x_n-A|<A/2$, 即当 $n>N$ 时, $x_n>A/2$, 记 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,A/2\}$, 则 $x_n\geqslant M,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 即 M 是 $\{x_n\}$ 的一个正的下界.

举一个无最小数的例子: $x_n=1+1/n,n\in\mathbf{N}_+$. □

6. 证明: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

证明. 任取 $k\in\mathbf{N}_+$, 对于 a_k, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时有 $a_n>a_k$. 取 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N,a_k\}$, 则 $a\leqslant a_n,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 同时 a 是 $\{a_n\}$ 中的某一项, 故 a 是 $\{a_n\}$ 中的最小数. □

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 不妨设其无上界, 即对任意 $M>0$, $\exists n\in\mathbf{N}_+$ 使得 $x_n>M$.

对于 $M_1=1$, $\exists n_1\in\mathbf{N}_+$, 使得 $x_{n_1}>1$;

对于 $M_2=2$, $\exists n_2\in\mathbf{N}_+,n_2>n_1$, 使得 $x_{n_2}>2$, 断言这样的 n_2 是可以找到的, 否则 $\forall n>n_1$, $x_n\leqslant M_2$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾;

假设已经找出了 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k}>x_{n_{k-1}}$, $x_{n_k}>M_k=k$, 则对于 $M_{k+1}=k+1$, $\exists n_{k+1}\in\mathbf{N}_+,n_{k+1}>n_k$, 使得 $x_{n_{k+1}}>k+1$, 断言这样的 n_{k+1} 是可以找到的, 否则 $\forall n>n_k$, $x_n\leqslant M_{k+1}$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾. 由数学归纳法可知找出了数列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$, $x_{n_k}>k,k\in\mathbf{N}_+$. 这说明 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 并且 $\{x_{n_k}\}$ 是正的无穷大量. 同理若 $\{x_n\}$ 无下界时可找到一个子列是负的无穷大量. □

8. 证明: 数列 $\{\tan n\}$ 发散.

证明.

$$\begin{aligned}|\tan(n+1)-\tan n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{\cos(n+1)}-\frac{\sin n}{\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(n+1)\cos n-\cos(n+1)\sin n}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin 1}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &\geqslant \sin 1,\ \forall n\in\mathbf{N}_+.\end{aligned}$$

这说明 $\exists\varepsilon_0=\sin 1$, $\forall N\in\mathbf{N}_+$, $\exists n>N$ 使得 $|\tan(n+1)-\tan n|\geqslant\sin 1>0$. 由 Cauchy 收敛准则知, $\{\tan n\}$ 发散. □

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}, n\in\mathbf{N}_+.$$

证明: $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: (1)$p\leqslant 0$; (2)$0<p<1$.

证明. 当 $p\leqslant 0$ 时, $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{n^p}=\begin{cases}1, & p=0;\\ n^{-p}, & p<0.\end{cases}$ 由 Cauchy 收敛准则知 $\{S_n\}$ 发散.

当 $0<p<1$ 时, 对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $\exists k\in\mathbf{N}_+$ 使得 $2^k<n<2^{k+1}$, 故

$$\begin{aligned}S_n\geqslant & S_{2^k}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{2^{kp}}\\ \geqslant & 1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+2)^p}\cdots+\frac{1}{2^{kp}}\right)\\ \geqslant & 1+\frac{1}{2^p}+\frac{2}{4^p}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^{kp}}\\ = & 1+\frac{1}{2}(2^{1-p}+2^{2(1-p)}+\cdots+2^{k(1-p)})\\ = & 1+\frac{2^{1-p}}{2}\frac{2^{k(1-p)}-1}{2^{1-p}-1}\to+\infty\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

故 $\{S_n\}$ 发散. □

2.3 单调数列

2.3.1 练习题 pp.30.

1. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

证明. 不妨设 $\{x_n\}$ 单增.

若 $x_n\leqslant 0, n=1,2,\cdots$, 则 $\{|x_n|\}$ 是单调递减数列;

若 $\exists n_0$ 使得 $x_{n_0}>0$, 则在集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$ 中必可找出 n_1 使得 $x_{n_1}<0<x_{n_1+1}$, 于是 $x_n>0,\forall n>n_1$, 又由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 知 $\{|x_n|\}$ 从 n_1 项后单调递增.

反之不成立. 举一反例, $x_n=(-1)^n n, n\in\mathbf{N}_+$, 则易知 $\{|x_n\}$ 单调递增, 但 $\{x_n\}$ 在任意项之后都不单调. $\square$

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等.

证明. $\{a_n-b_n\}$ 收敛从而有界, 即 $\exists M>0, \forall n\in\mathbf{N}_+, |a_n-b_n|\leqslant M$. 特别有 $a_n\leqslant b_n+M, \forall n\in\mathbf{N}_+$. 由于 $\{b_n\}$ 单调减少, $a_n\leqslant b_1+M, \forall n\in\mathbf{N}_+$, 即 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 b_1+M, 故 $\{a_n`\}$ 收敛. 同理可知 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 a_1-M, 故 $\{b_n\}$ 也收敛. 由极限的四则运算法则, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. $\square$

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列极限的任何一项.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 若 $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0}>a$, 则由 $\{x_n\}$ 单调增加知 $\forall n\in\mathbf{N}_+, n>n_0$, $x_n\geqslant x_{n_0}>a$. 对于 $\varepsilon_0=\dfrac{x_{n_0}-a}{2}>0$, $x_n-a\geqslant x_{n_0}-a>\varepsilon$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 矛盾.
设 $\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 则 $\{-y_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}-y_n=-b$. 由前可知, $\forall n\in\mathbf{N}_+, -y_n\leqslant -b$, 即 $\forall n\in\mathbf{N}_+, y_n\geqslant b$. $\square$

4. 设 $x_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdots\dfrac{n+1}{2n+1}, n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n\in\mathbf{N}_+, x_n>0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{n+1}{2n+1}<1, \forall n\in\mathbf{N}_+$. $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n=\dfrac{n+1}{2n+1}x_{n-1}$ 两边令 $n\to\infty$, 有 $a=a/2$, 故 $a=0$ 或 1. 由 3 题可知, a 不大于 $\{x_n\}$ 的任意一项, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. $\square$

5. 设 $a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}, n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n\in\mathbf{N}_+, a_n>0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{n+9}{2n-1}<1, \forall n\in\mathbf{N}_+, n>10$. $\{x_n\}$ 从第 11 项起单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n=\dfrac{n+9}{2n-1}x_{n-1}$ 两边令 $n\to\infty$, 有 $a=a/2$, 故 $a=0$ 或 1. 同上题推理有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. $\square$

6. 在例题 2.2.6 的基础上证明: 当 $p>1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}, n\in\mathbf{N}_+.$$

证明. 对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $\exists k\in\mathbf{N}_+$ 使得 $2^{k-1}<n<2^k$, 故

$$\begin{aligned}S_n\leqslant&S_{2^k-1}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\\ \leqslant&1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\frac{1}{(2^{k-1})^p}\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^p}\right)\\ =&1+2^{1-p}+2^{2(1-p)}+\cdots+2^{(k-1)(1-p)}\\ =&\frac{1-2^{k(1-p)}}{1-2^{1-p}}\leqslant\frac{1}{1-2^{1-p}}\end{aligned}$$

这表明 $\{S_n\}$ 有界, 又显然 $\{S_n\}$ 单调递增, 故由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛. □

7. 设 $0<x_0<\dfrac{\pi}{2}, x_n=\sin x_{n-1}, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明. $\sin x<x,\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}$, 故由数学归纳法易知 $x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}, n=1,2,\cdots$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减; 又由 $x_0>0$ 易知 $x_n>0, n=1,2,\cdots$, 即 0 是 $\{x_n\}$ 的下界. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 在 $x_n=\sin x_{n-1}$ 两边令 $n\to\infty$, 注意 $\sin x$ 是其定义域上的连续函数, 由 Heine 定理及极限的保序性, $\xi=\sin\xi,\xi\in[0,\pi/2]$, 故 $\xi=0$. □

8. 设 $a_n=\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.
(观察 $a_n=\left(\dfrac{1\cdot3}{2\cdot2}\right)\left(\dfrac{3\cdot5}{4\cdot4}\right)\cdots\left(\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\dfrac{2n-1}{(2n)^2}\right)$.)

证明.

$$0\leqslant a_n=\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\right)\left(\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right).$$

由平均值不等式可知 $(2n-3)(2n-1)\leqslant\left(\dfrac{(2n-3)+(2n-1)}{2}\right)^2=(2n-2)^2$, 即 $\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\leqslant 1$, 于是 $0\leqslant a_n\leqslant\dfrac{2n-1}{4n^2}\to0\ (n\to\infty)$. 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. □

9. 设 $a_n=\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\dfrac{1}{2n+1}, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
(方法与上一题类似. 在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\dfrac{\pi}{2}$. 这就是 Wallis 公式.)

证明.

$$\begin{aligned}a_n&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}\\ &=\left(\frac{2}{1^2}\right)\left(\frac{2\cdot4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right)\cdot\frac{2n}{2n+1}\leqslant2.\end{aligned}$$

其中用到了基本不等式 $(2n-2)(2n)\leqslant\left(\dfrac{(2n-2)+(2n)}{2}\right)^2=(2n-1)^2$, 即 $\dfrac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\leqslant 1$, 于是 $\{a_n\}$ 有上界; 又由

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{4n^2}{4n^2-1}\geqslant1.$$

故 $\{a_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. □

10. 下列数列中, 哪些是单调的?

$$(1)\ \left\{\frac{1}{1+n^2}\right\};\quad (2)\ \{\sin n\};\quad (3)\ \{\sqrt[n]{n!}\}.$$

证明. (1) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1+(n-1)^2}{1+n^2}\leqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减少;

(2) 由于 $\{\sin n\}$ 有界, 若其单调, 则 $\{\sin n\}$ 收敛, 而已知其发散, 故不单调;

(3) 由于 $n!<(n+1)^n$, 故 $(n!)^{n+1}<(n!)^n(n+1)^n$, 不等式两边开 $n(n+1)$ 次根号, 就有

$$\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n+1]{n!\cdot(n+1)}=\sqrt[n+1]{(n+1)!},$$

故 $\{\sqrt[n]{n!}\}$ 单调增加. □

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

证明. 必要性. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 均收敛.

充分性. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增加, 则其任意子列也单调增加. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=a$. 则由 3 可知, $\forall k\in\mathbf{N}_+, a_{n_k}\leqslant a$. 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在 $n_0\in\mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0}>a$, 从而对于充分大的 $k\in\mathbf{N}_+$, 有 $a_{n_k}\geqslant a_{n_0}>a$. 这与 $a_{n_k}\leqslant a,\forall k\in\mathbf{N}_+$ 矛盾. 故 $\{a_n\}$ 有上界. 从而由单调有界原理, $\{a_n\}$ 收敛. □

12. 对每个自然数 n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 中的根.[6] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 令 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$, 则 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,\forall x>0$. 注意 $f_n(0)=0, f_n(1)=n\geqslant 1,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 故由 $f_n(x)$ 的单调性及连续函数的介值定理知, $f_n(x)$ 的零点在 $[0,1]$ 上存在唯一.

$$f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=f_n(x_{n+1})+x_{n+1}^{n+1}\geqslant f_n(x_{n+1}),\forall n\in\mathbf{N}_+,$$

由 $f_n(x)$ 的单调性易知 $x_n\geqslant x_{n+1}, n\in\mathbf{N}_+$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 在 $1=f_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}$ 的两侧取极限, 有 $1=2\xi-\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n+1}$. 注意到 $0\leqslant x_n^{n+1}\leqslant x_2^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$, 故 $\xi=1/2$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1/2$. □

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.4.1 思考题 pp.35.

若在这三个命题的条件中将极限值 l 改为不带符号的无穷大量 ∞, 则结论不成立. 请读者举出反例.

[6] 事实上, 这里需要使用函数的单调性及连续性证明方程的根在闭区间 $[0,1]$ 中存在唯一.

2.4.2 练习题 pp.37.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = +\infty$.

证明. 对于 $\forall M>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 知存在 $N_1\in\mathbf{N}_+$ 使当 $n>N_1$ 时有 $x_n>3M$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} =&\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+\cdots+x_n}{n}\\ >&\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot 3M\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}\to 0, \dfrac{n-N_1}{n}\to 1\ (n\to\infty)$ 故存在 $N_2\mathbf{N}_+$ 使当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}>-M/2$ 且 $\dfrac{n-N_1}{n}>1/2$. 于是当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>3M/2-M/2=M.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$. □

2. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明. 断言 $\forall n\in\mathbf{N}_+, x_n\leqslant a$. 否则存在 $n_0\mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0}>a$, 不妨设 $x_{n_0-1}\leqslant a<x_{n_0}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a =&\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+(x_n-a)}{n}\\ \geqslant&\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{n_0-1}-a)}{n}+\frac{(n-n_0+1)(x_{n_0}-a)}{n}\\ =&x_{n_0}-a+\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{n_0-1}-a)-(n_0-1)(x_{n_0}-a)}{n}\\ \to&x_{n_0}-a>0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$ 矛盾. 故 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant x_n\leqslant a, \forall n\in\mathbf{N}_+$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. □

3. 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a, $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 b, 其 $a\neq b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
(注意: 虽然数列 $\{a_n\}$ 发散, 但前 n 项的算术平均值所组成的数列仍可以有极限.[7] 一个典型例子就是 $\{(-1)^n\}$.)

证明. 记 $y_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则由 Cauchy 命题, 有

$$y_{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}+\frac{a_2+a_4+\cdots+a_2n}{n}\right)\to\frac{a+b}{2},$$

$$y_{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{n+1}+\frac{n}{n+1}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}\right)\to\frac{a+b}{2},\ n\to\infty.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n+1}=\dfrac{a+b}{2}$, 由 pp.25. 1. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1+a_2+\cdots+a_nn=\dfrac{a+b}{2}$. □

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.
(本题可以说是 Cauchy 命题的另一种形式, 也很有用.)

---

[7]这里可以和级数的 Cesàro 求和结合起来看.

证明. 定义[8] $a_0=0$, 记 $y_n=a_n-a_{n-1}, n=1,2,\cdots$, 则由 Cauchy 命题可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=d$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$.
(本题与 Cauchy 命题的关系是明显的.)

证明. 由基本不等式知,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbf{N}_+.$$

若 $A=0$, 则 $0\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 由 Cauchy 命题知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$. 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$.

若 $A>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{A}$, 由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{A}}=A,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

故由夹逼定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$. □

6. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.
(本题对类型为 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的极限问题很有用, 可以说是例题 2.1.2 的一个发展. 这个结果在无穷级数的研究中也很重要.[9])

证明. 定义 $a_0=0$, 则 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_1}{a_0}},\forall n\in\mathbf{N}_+$. $\{a_n\}$ 是正数列, 故 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n-a}}\right\}$ 也是正数列. 由 5 可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=l.$$ □

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$.

证明. 定义 $x_{-1}=x_0=0$, 并记 $a_n=x_n-x_{n-2}, n=1,2,\cdots$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=0$. 由 Cauchy 命题知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}\frac{x_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}=0.$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\frac{x_{2n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}=0.$$

故由 pp.25. 1. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$. □

---

[8]这里定义的合理性在于任意改变数列的有限项, 数列的敛散性不变, 并且若其收敛, 其极限值不变.

[9]参见正项级数的比值判别法(d'Alembert)和根值判别法(Cauchy), 我们有: 前者有效时后者一定有效, 但反之不成立, 如 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$.

8. 设 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明. 定义 $x_{-1} = x_0 = 0$, 并记 $a_n = x_n - x_{n-2}, n = 1, 2, \cdots$. 由 Cauchy 命题知, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n + x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 由 7 知, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n + x_{n+1}}{n} - \frac{2(n-1)}{n}\frac{x_{n-1}}{n-1} = 0. \qquad \square$$

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0 < a_1 < 1$ 和 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 证明: $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$.

证明. 由于 $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 故

$$0 < a_2 = a_1(1 - a_1) \leqslant \left(\frac{a_1 + (1 - a_1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1,$$

归纳地可以得到 $\forall n \in \mathbf{N}_+, 0 < a_n < 1$. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n < 1$, 知 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故其收敛. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 在递推式 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ 两侧令 $n \to \infty$, 就有 $a = a(1 - a)$, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

又由 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 同时取倒数就有

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(1 - a_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1 - a_n},$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 - a_n} = 1$. 由 Cauchy 命题可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = 1$, 即 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na_n} - \frac{1}{na_1}\right) = 1$. 于是就有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n} = 1$, 故 $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$. $\square$

10. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = \alpha\beta$.

证明. [10] 当 $\beta = 0$ 时, 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 故存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| \leqslant M, n = 1, 2, \cdots$; 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N_1$ 时, $|b_n| \leqslant \varepsilon/2M$, 于是

$$\left|\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}\right| \leqslant M \cdot \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|}{n} + M \cdot \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2M}.$$

对于常数 $M' = M \cdot (|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|)$, 存在 $N_2 \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N_2$ 时, $\frac{M'}{n} < \varepsilon/2$. 故当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$\left|\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}\right|| \leqslant M \cdot \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|}{n} + M \cdot \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0$.

当 $\beta \neq 0$ 时, 由 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 知 $\lim_{n\to\infty}(b_n - \beta) = 0$. 故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(b_n - \beta) + a_2(b_{n-1} - \beta) + \cdots + a_n(b_1 - \beta)}{n} = 0.$$

[10]本题的证明方法可以用于一切类似 Teoplitz 定理(pp. 58. 10.)的极限证明, 事实上 Teoplitz 定理也能类似给出证明.

即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+1_nb_1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(b_n-\beta)+a_2(b_{n-1}-\beta)+\cdots+a_n(b_1-\beta)}{n}\\&+\lim_{n\to\infty}\beta\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\&=0+\beta\alpha=\alpha\beta.\end{aligned}$$ □

2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

2.5.1 练习题 pp.45.

1. 计算下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n;\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n;$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n;\qquad (4)\ {}^{11}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n;\qquad (6)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

(在计算中可以应用 2.1.5 小节的题 5 中有关连续性的结果. 但是要请读者注意, 在现阶段如下的做法是缺乏依据的 (以题 (3) 为例):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.)$$

证明.

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\mathrm{e},\ \text{故}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}};$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{\mathrm{e}};$$

$$\begin{aligned}(3)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^2;\end{aligned}$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)\frac{n^2}{n-1}}=0;$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^0=1;$$

$$(6)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}.$$ □

2. 设 $x\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

---

[11] 原题为 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, 显然也可以用本题的方法计算, 但结果为一个无穷大量.

证明. 由 pp.38 **命题 2.5.1** 中的不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 两边取对数, 可以得到不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\cdot\frac{n+k-1}{n+k-1}\cdots\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+k-2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

就有

$$\frac{k}{n+k} < \frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n+k-1}+\frac{1}{n+k-2}+\cdots+\frac{1}{n} < \frac{k}{n}.$$

□

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

证明. 记 $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right), y_n = \ln x_n, n\in\mathbf{N}_+$. 则由上题有

$$\begin{aligned}y_n &< \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2}\ (n\to\infty),\\ y_n &> \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\mathrm{e}}$. □

4. [12] 设 $\{p_n\}$ 是正数列, 且 $p_n\to+\infty$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}$.

证明. 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$, 有 $[p_n]\leqslant p_n<[p_n]+1$, $\dfrac{1}{[p_n]+1}\leqslant\dfrac{1}{[p_n]}$, 因此

$$\left(1+\frac{1}{[p_n]+1}\right)^{[p_n]} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n]+1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$, 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-\mathrm{e}\right|<\varepsilon \text{ 且 } \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\mathrm{e}\right|<\varepsilon.$$

特别地, 当 $n>N$ 时有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n>\mathrm{e}-\varepsilon \text{ 且 } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\mathrm{e}+\varepsilon.$$

[12]本题的结果与 Heine 定理结合就给出了一个 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的证明.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, 对于 $N>0$, 存在 $M \in \mathbf{N}_+$ 使得 $n>M$ 时, $[p_n]>N$, 于是当 $n>M$ 时, 就有

$$\mathrm{e}-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[p_n]+1}\right)^{[p_n]} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n]+1} < \mathrm{e}+\varepsilon.$$

即当 $n>M$ 时 $\left|\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}-\mathrm{e}\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$. □

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}$.[13]

证明. □

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

证明. 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+1-\ln n}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}.$$

□

7. 证明: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.
([14]由此又可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.)

证明. 数学归纳法.

(1) $n=1$ 时, 由于 $2<\mathrm{e}<4$, 故有 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1<\dfrac{4}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}\cdot\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^2$, 即 $n=1$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}(n+1)! &< (n+1)\cdot\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^2\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} < \mathrm{e}\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2},\\ &> (n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

这里用到了

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < \mathrm{e} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.$$

由数学归纳法可知

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.$$

对于 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立. □

[13]事实上, 对于通项带有 a^n 项的数列, 可以尽情利用 Cauchy 根值判别法或者 d'Alembert 比值判别法. 如果记 $a_n=\dfrac{n!2^n}{n^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

[14]只需应用本题及夹逼准则即可.

8. 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n, n\in\mathbf{N}_+$. 证明: 对 $n\geqslant 2$ 成立不等式

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\leqslant S_n\leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

证明. 数学归纳法.

(1) $n=2$ 时, $2^2\left(1+\frac{1}{4(2-1)}\right)=5=S_2<2^2\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(2-1)}\right)$, 即 $n=2$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\leqslant S_n\leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}
S_{n+1}=S_n+(n+1)^{n+1} <& n^n\left(1+\frac{2}{e(n-1)}\right)+(n+1)^{n+1}\\
=&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right)\right)\\
<&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{2}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)\\
<&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}n}\right),\\
S_{n+1}=S_n+(n+1)^{n+1} >& n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)+(n+1)^{n+1}\\
=&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\right)\\
\geqslant&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)\\
\geqslant&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{4n}\right).
\end{aligned}$$

这里用到了

$$\mathrm{e}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\leqslant 4.$$

由数学归纳法可知

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\leqslant S_n\leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right)$$

对于 $n\geqslant 2$ 恒成立. □

9. 设有 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1), n=2,3,\cdots$, 又设 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right), n\in\mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 对于 $n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) &= \frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n+1}{a_n} \\ =&\frac{a_2}{2a_1}\cdot\frac{a_3}{3a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} \\ =&\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \\ =&\frac{(n+1)(a_n+1)}{(n+1)!} \\ =&\frac{1}{n!}+\frac{a_n}{n!} \\ \cdots& \\ =&\frac{1}{n!}+\cdots+\frac{1}{2!}+\frac{a_2}{2!} \\ =&\frac{1}{n!}+\cdots+\frac{1}{2!}+\frac{2(a_1+1)}{2!} \\ =&\frac{1}{n!}+\cdots+\frac{1}{2!}+1+1. \end{aligned}$$

即 $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, n \in \mathbf{N}_+$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}$. □

2.6 由迭代生成的数列

2.6.1 练习题 pp.52

在以下各题中均可使用几何方法, 或做出几何解释.

1. (1) 设 $a>0, x_1=\sqrt{a}, x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (2) 设 $a>0, x_1=\sqrt{a}, x_{n+1}=\sqrt{ax_n}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

   (这两题外形相似, 都可用本节方法解决. 但题 (2) 有更简单的直接解法.)

2. 设 $A>0, 0<b_0<A^{-1}, b_{n+1}=b_n(2-Ab_n), n \in \mathbf{N}_+$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A^{-1}$.

2.7 对于教学的建议

2.7.1 第一组参考题

1. 设 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 取子数列 $\{a_{3k}\}$ 奇数项和偶数项所排成的子列 $\{a_{6k-3}\}$ 和 $\{a_{6k}\}$, 它们均为同一收敛数列的子列, 故均收敛且极限相等. 注意到, $\{a_{6k-3}\}$ 也是收敛数列 $\{a_{2k-1}\}$ 的一个子列, $\{a_{6k}\}$ 也是收敛数列 $\{a_{2k}\}$ 的一个子列, 从而

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim_{k\to\infty} a_{6k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k}.$$

即 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}$ 收敛到相同的极限, 故由 pp.25 1 知 $\{a_n\}$ 收敛. □

2. 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n \leqslant a_{n+2}, a_n \leqslant a_{n+3}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 由题意, 有

$$a_1 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_{2k-1} \leqslant \cdots;$$

$$a_2 \leqslant a_4 \leqslant \cdots \leqslant a_{2k} \leqslant \cdots;$$

$$a_3 \leqslant a_6 \leqslant \cdots \leqslant a_{3k} \leqslant \cdots.$$

即数列 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 均单调, 注意到 $\{a_n\}$ 有界, 故均收敛. 由 1. 知 $\{a_n\}$ 收敛. □

3. 设 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n + a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+2}) = B$. 则由极限的四则运算有,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+2} - a_{n+1}) = B - A,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{B - A + A}{2} = \frac{B}{2}.$$

□

4. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 有存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$. 证明: $a \leqslant 1$.

证明. 反证法. 若 $a > 1$, 则对于 $\varepsilon = \frac{a-1}{2} > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, 则存在 $N_1 \in \mathbf{N}_+$ 使当 $n > N_1$ 时有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > a - \varepsilon = \frac{1+a}{2} > 1.$$

要使极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在, 则对于 $N_1 > 0$, 存在 $N > N_1, N \in \mathbf{N}_+$ 使得 $a_N \neq 0$. 因此,

$$|a_n| = \left|a_N \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}\right| > |a_N| \cdot \left(\frac{1+a}{2}\right)^{n-N} \to +\infty.$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 矛盾. □

5. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right), n \in \mathbf{N}_+$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

证明. 对 $k = 1, \cdots, n$, 有 $\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \dfrac{k}{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1\right)}$, 并且

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

注意当 $n \to \infty$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1\right)} = \frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \to \frac{1}{4};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}\to\frac{1}{4}.$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$. □

6. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

证明. 由于 $\forall p$ 是素数, $p\geqslant 2$, 对于 n 的素因子分解 $n=p_1^{r(1)}p_2^{r(2)}\cdots p_{p(n)}^{r(p(n))}$, 显然有 $n\geqslant 2^{p(n)}$, 故

$$0\leqslant\frac{p(n)}{n}\leqslant\frac{\ln n}{n\ln 2}\to 0\ (n\to\infty).$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$. □

7. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})$.

证明. 由 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$ 知 $a_0=-(a_1+\cdots+a_p)$, 故

$$\begin{aligned}a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}=&a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots+a_p(\sqrt{n+p}-n)\\=&a_1\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots+a_p+\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\\\to&0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

□

8. 证明: 当 $0<k<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k-n^k]=0$.

证明.

$$0\leqslant(1+n)^k-n^k\leqslant n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]\leqslant n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-k}}\to 0.$$

□

9. (1) 设 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1}),n\in\mathbf{N}_+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

(2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明: $\{y_n\}$ 收敛于零.

证明. (1) $\{y_n\}$ 不一定收敛, 举一反例: 令 $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$. 首先证明其收敛:[15] 注意

$$\begin{aligned}x_{2n}=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=x_{2(n-1)}+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\geqslant x_{2(n-1)};\\x_{2n}=&1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}\leqslant 1.\end{aligned}$$

故 $\{x_{2n}\}$ 收敛, 记其极限为 A, 则由于 $x_{2n}=x_{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$, 在等号两边令 $n\to\infty$, 有 $\{x_{2n-1}\}$ 也收敛于 A. 故 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

而 $y_n=n(x_n-x_{n-1})=n\cdot(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=(-1)^{n+1}$ 显然发散.

[15]这里所用的方法事实上就是交错级数的 Leibniz 判别法.

(2) 若 $\{y_n\}$ 收敛, 设其极限为 B, 则由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}y_n=B.$$

注意 $\{x_n\}$ 收敛因而有界, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是无穷大量, 故 $B=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. □

10. (1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$, 证明: $\{a_n\}$ 是无穷大量.

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明: $\{a_n\}$ 无界.

证明. (1) 注意 $\{a_n\}$ 是正数列, 故只需证明 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是无穷小量. 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=0$. 故对于 $\forall 0<\varepsilon<1$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$ 使当 $n>N$ 时, $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right|<\varepsilon$. 则

$$|b_n|=\left|b_{N+1}\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}\right|\leqslant|b_{N+1}|\varepsilon^{n-N-1}\to 0.$$

(2) 反证法. 若 $\{a_n\}$ 有界. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 则对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\dfrac{1}{2}$, 即当 $n>N$ 时有 $2a_n<a_{n+1}+a_{n+2}$. 断言 $n>N$ 时有 $a_n<a_{n+1}$ 或 $a_n<a_{n+2}$: 否则存在 $n_0>N$, $a_{n_0}\geqslant a_{n_0+1}, a_{n_0}\geqslant a_{n_0+2}$, 即 $2a_{n_0}\geqslant a_{n_0+1}+a_{n_0+2}$, 矛盾.

(a) 若 $a_n<a_{n+1}, \forall n>N$. 则 $\{a_n\}$ 收敛, 设其极限为 α, 则显然 $\alpha>0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\alpha}=\dfrac{1}{2}>0$;

(b) 若 $a_n<a_{n+2}, \forall n>N$. 则 $\{a_{2n-1}\},\{a_{2n}\}$ 收敛, 设其极限分别为 α,β, 则显然 $\alpha,\beta>0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}+a_{2n+2}}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}>0$.

均与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$ 矛盾. □

11. 证明: $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n<n!<\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 其中右边的不等式当 $n\geqslant 6$ 时成立.

证明. 数学归纳法.

左边.

(a) $n=1$ 时, $\dfrac{1}{3}<1$;

(b) 假设 $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n<n!$, 则

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)>\left(\frac{n\cdot\frac{n}{3}+(n+1)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n^2+3n+3}{3(n+1)}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

右边.

(a) $n=6$ 时, $6!=720<729=3^6$;

(b) 假设 $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 则

$$(n+1)!=n!(n+1)<\left(\frac{n}{2}\right)^n(n+1)<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

其中最后一个不等号成立当且仅当 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$, 而由于 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 严格单调递增, 故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1}=2.$$

□

12. 证明: $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证明. 数学归纳法.

左边.

(a) $n=1$ 时, $\frac{1}{\mathrm{e}}<1$;

(b) 假设 $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$, 则

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n(n+1)>\left(\frac{n^2+(n+1)\mathrm{e}}{\mathrm{e}(n+1)}\right)^{n+1}>\left(\frac{n^2+2n+1}{\mathrm{e}(n+1)}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.$$

右边.

(a) $n=1$ 时, $1<\frac{\mathrm{e}}{2}$;

(b) 假设 $n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 则

$$(n+1)!=n!(n+1)<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n(n+1)<\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

其中最后一个不等式成立当且仅当 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$, 而由于 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 严格单调递增, 故

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1}=2.$$

□

13. (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) 当 $n\geqslant 2$ 时成立

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}=3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-cdots-\frac{1}{n!(n-1)n};$$

(2) $\mathrm{e}=3-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)}$;

(3) 用 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!n}$ 计算 e 要比不加上最后一项好得多.

证明. (1) 数学归纳法. 记等式左边为 a_n, 则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}-\frac{1}{n!n}=-\frac{1}{n!(n+1)n}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}=-\frac{1}{(n+1)!(n+1)n}.$$

注意 $n=2$ 时

$$a_2 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!2} = \frac{11}{4} = 3-\frac{1}{2!\cdot 1\cdot 2},$$

等式成立. 假设

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n} = 3-\frac{1}{2!1\cdot 2} - cdots - \frac{1}{n!(n-1)n},$$

则

$$a_{n+1} = a_n + (a_{n+1}-a_n) = 3-\frac{1}{2!1\cdot 2} - cdots - \frac{1}{n!(n-1)n} - \frac{1}{(n+1)!(n+1)n}.$$

(2)

$\square$

14. 设 $a_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明.

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0.$$

注意 $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

$$\begin{aligned}
a_n =& 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n} \\
>& 2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2\sqrt{n} \\
=& 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-2 \\
>& -2.
\end{aligned}$$

$\square$

15. 设已知存在极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

证明. 不妨设 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} \to A-A=0.$$

$\square$

16. 证明: $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

证明. 由 pp. 56. 11. 知, 当 n 充分大时, 有 $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$\left(\frac{n}{3}\right)^{1/n} = \left(\frac{n}{3}\right)^{n\cdot 1/n^2} < (n!)^{1/n^2} < \left(\frac{n}{2}\right)^{n\cdot 1/n^2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{1/n}.$$

注意

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{2}\right)^{1/n} =& \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[n]{n}\to 1; \\
\left(\frac{n}{3}\right)^{1/n} =& \sqrt[n]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[n]{n}\to 1,\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

$\square$

17. 设对每个 n 有 $x_n<1$ 和 $(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\frac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明. 由 $(1-x_n)x_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$ 和 $x_n < 1$, 可知 $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$. 由基本不等式,

$$\frac{1}{4} \leqslant (1-x_n)x_{n+1} < \left(\frac{(1-x_n+x_{n+1})}{2}\right)^2 = \frac{[(1-x_n)+x_{n+1}]^2}{4}.$$

即 $[(1-x_n)+x_{n+1}]^2 > 1$, 由于 $(1-x_n)$ 和 x_{n+1} 均为正数, 故 $(1-x_n)+x_{n+1} > 1$, 即 $x_{n+1}-x_n > 0$. 于是 $\{x_n\}$ 单调增加有上界, 故 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. 在不等式 $\dfrac{1}{4} \leqslant (1-x_n)x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$,

$$\frac{1}{4} \leqslant (1-\xi)\xi \leqslant \frac{[(1-\xi)+\xi]^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

故 $\xi = \dfrac{1}{2}$. □

18. 设 $a_1 = b, a_2 = c$, 在 $n \geqslant 3$ 时 a_n 由 $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 定义. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

证明. 不妨令 $b \leqslant c$. 则

$$\begin{aligned} a_3 =& \frac{a_1+a_2}{2} \in [a_1, a_2] \\ a_4 =& \frac{a_2+a_3}{\in}[a_3, a_2] \\ &\cdots, \end{aligned}$$

由数学归纳法易知对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$a_1 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n-1} \leqslant a_{2n} \leqslant \cdots \leqslant a_4 \leqslant a_2.$$

故 $\{a_{2n-1}\}$ 单调增加有上界, $\{a_{2n}\}$ 单调递减有下界. 分别令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \xi, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \eta$, 则在递推式 $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 两边令 $n \to \infty$, 易知 $\xi = \eta$. 故由 pp. 25. 1. 可知 $\{x_n\}$ 收敛. 注意

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} = a_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{2},$$

反复使用就有

$$a_n + \frac{a_{n+1}}{2} = a_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{2} = \cdots = a_2 + \frac{a_1}{2} = \frac{2c+b}{2}.$$

令 $n \to \infty$, 有 $\dfrac{3\xi}{2} = \dfrac{2c+b}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi = \dfrac{2c+b}{3}$. □

19. 设 a, b, c 是三个给定的实数. 令 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$, 并以递推公式定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n+c_n}{2}, b_{n+1} = \frac{c_n+a_n}{2}, c_n = \frac{a_n+b_n}{2}, n \in \mathbf{N}_+.$$

求这三个数列的极限.

证明. 注意对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$,

$$a_{n+2} = \frac{b_{n+1}+c_{n+1}}{2} = \frac{c_n+a_n}{4} + \frac{a_n+b_n}{4} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n+c_n}{4} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}.$$

同理有 $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}+b_n}{2}$, $c_{n+2} = \dfrac{c_{n+1}+c_n}{2}, \forall n \in \mathbf{N}_+$. 由 p. 56. 18. 知 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

均收敛, 且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{a_1+2a_2}{3} = \frac{a_1}{3} + \frac{b_1+c_1}{3} = \frac{a+b+c}{3};\\ \lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{b_1+2b_2}{3} = \frac{b_1}{3} + \frac{c_1+a_1}{3} = \frac{a+b+c}{3};\\ \lim_{n\to\infty} c_n &= \frac{c_1+2c_2}{3} = \frac{c_1}{3} + \frac{a_1+b_1}{3} = \frac{a+b+c}{3}.\end{aligned}$$

□

20. (1) 设 $a_1 > b_1 > 0, a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 在 $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π. (这里可以利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n} = \pi$.)

(注意本题与例题 2.3.5 完全不同. 实际上这就是计算圆周率的 Archimedes-刘徽 方法的迭代形式. 在 (2) 中的两个数列就是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 就是单位圆的外切和内接正多边形的半周长(请求出边数与 n 的关系).)

证明. (1) 注意 $b_1 < a_2 < a_1$, $b_1 < b_2 < a_2 < a_1$. 利用数学归纳法可以证明, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1.$$

故 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛. 令其极限分别为 α, β. 由基本不等式, 显然又有

$$\sqrt{a_{n+1}b_n} = b_{n+1} < a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} < \sqrt{a_nb_n}.$$

令 $n \to \infty$, 就有 $\alpha = \beta = \sqrt{\alpha\beta}$.

(2) 容易知道, 单位圆的外切 n 边形的半周长为 $n\tan\dfrac{\pi}{n}$, 内接 n 边形的半周长为 $n\sin\dfrac{\pi}{n}$. 并且, 若记 $\alpha_n = n\tan\dfrac{\pi}{n}, \beta_n = n\sin\dfrac{\pi}{n}$, 则

$$\frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n+\beta_n} = \frac{2\left(n\tan\dfrac{\pi}{n}\right)\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)}{\left(n\tan\dfrac{\pi}{n}\right)\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)} = 2n\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{1+\cos\dfrac{\pi}{n}} = 2n\tan\frac{\pi}{2n} = \alpha_{2n};$$

$$\sqrt{\alpha_{2n}\beta_n} = \sqrt{\left(2n\tan\frac{\pi}{2n}\right)\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)} = \sqrt{\left(2n\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}\tan\frac{\pi}{2n}\right)^2} = 2n\sin\frac{\pi}{n} = \beta_{2n}.$$

并且 $a_1 = 2\sqrt{3} = 6\tan\dfrac{\pi}{6} = \alpha_6$, $b_1 = 3 = 6\sin\dfrac{\pi}{6} = \beta_6$, 故用数学归纳法容易证明,

$$a_n = \alpha_{6n}, b_n = \beta_{6n}.$$

又由于当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x < x < \tan x$ (pp. 7. 命题 1.3.6), 故

$$\pi = n\cdot\frac{\pi}{n} > n\sin\frac{\pi}{n} > \pi\cos\frac{\pi}{n} \to \pi.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n} = \pi$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} (6n)\sin\dfrac{\pi}{6n} = \pi$. □

2.7.2 第二组参考题

1. 设 $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

2. 证明: 对于每个自然数 n 成立不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} - \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin 2\pi n!\mathrm{e}$.

4. 记 $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, n\in\mathbf{N}_+$. 用 K_n 表示使 $S_k \geqslant n$ 的最小下标, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$.

5. 设 $x_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}, n\in\mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. 将二项式系数 $\dbinom{n}{0},\dbinom{n}{1},\cdots,\dbinom{n}{n}$ 的算术平均值和几何平均值分别记为 A_n 和 G_n. 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n} = 2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

7. 设 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, n\in\mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 又有一个单调增加的正数数列 $\{p_n\}$, 且为无穷大量. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n} = 0$.

8. 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2) = 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n = 1$.

9. 设数列 $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ 对每个非负整数 n 满足条件

$$u_n = \lim_{m\to\infty}(u_{n+1}^2+u_{n+2}^2+\cdots+u_{n+m}^2),$$

证明: 若存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$, 则只能是每个 $u_n = 0$.

10. (Teoplitz 定理) 设对 $n,k\in\mathbf{N}_+$ 有 $t_{nk}\geqslant 0$. 又有 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk} = 1, \lim\limits_{\to\infty}t_{nk} = 0$. 若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, 定义 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.
(几种变形: (1) 将条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk} = 1$ 改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk} = 1$; (2) 不要求 t_{nk} 非负, 将 (1) 中条件 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk} = 1$ 改为存在 $M>0$, 使得对每个 n, 成立不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}|t_{nk}|\leqslant M$. 则结论对于 $a=0$ 仍成立.)

11. 用 Teoplitz 定理导出 Stolz 定理.

12. 设 $0<\lambda<1$, $\{a_n\}$ 收敛于 a. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}.$$

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$, 并且存在常数 K 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K$ 对每个 n 成立. 令 $z_n = x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1, n\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n = 0$.
(从本体的条件已可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$. 但是可以举出例子说明仅有条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$ 不能得到

$$\lim_{n\to\infty}x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1 = 0.)$$

Chapter 3

实数系的基本定理

3.1 确界的概念和确界存在定理

3.1.1 练习题 pp.69.

1. 试证明确界的唯一性.

2. 设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$. 问: 在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leqslant a$ 中哪个是对的?

3. 设数集 A 以 β 为上界, 又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 证明: $\beta = \sup A$.

4. 求下列数集的上确界和下确界:

   (1) $\{x \in \mathbf{Q} | x > 0\}$; (2) $\{y | y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\}$;

   (3) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n | n \in \mathbf{N}_+\right\}$; (4) $\{n\mathrm{e}^{-n} | n \in \mathbf{N}_+\}$;

   (5) $\{\arctan x | x \in (-\infty, \infty)\}$; (6) $\{(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1} | n \in \mathbf{N}_+\}$;

   (7) $\{1 + n\sin\frac{n\pi}{2} | n \in \mathbf{N}_+\}$.

5. 证明:

   (1) $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$;

   (2) $\int\{x_n + y_n\} \geqslant \inf\{x_n\} + \inf\{x_n\}$.

6. 设有两个数集 A 和 B, 且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leqslant y$. 证明: $\sup A \leqslant \inf B$.

7. 设数集 A 有上界, 数集 $B = \{x + c | x \in A\}$, 其中 c 是一个常数. 证明:
$$\sup B = \sup A + c, \inf B = \inf A + c.$$

8. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \subset \{x + y | x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \leqslant \sup A + \sup B$. 举出严格成立不等号的例子.

9. 设 A, B 是两个有上界的数集, 又有数集 $C \supset \{x+y|x \in A, y \in B\}$, 则 $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. 举出严格成立不等号的例子.

(合并以上两题可见, 当且仅当 $C = \{x+y|x \in A, y \in B\}$ 时成立 $\sup C = \sup A + \sup B$.)

3.2 闭区间套定理

3.2.1 练习题 pp. 72.

1. 如果数列是 $\{(-1)^n\}$, 开始的区间是 $[-1, 1]$. 试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列. 又问: 你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列?

2. 如果区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n, b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立.

3. 如 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件 $a_n < b_n, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \neq \varnothing$.

4. 用闭区间套定理证明确界存在定理.

5. 用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理.

3.3 凝聚定理

3.4 Cauchy 收敛准则

3.5 覆盖定理

3.6 数列的上极限和下极限

3.7 对于教学的建议