目录

1 实数和一元数列的极限

1.1 数列和数列的定义

1. 根据数列极限的ε-N定义证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}+1}=\dfrac{2}{3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}=0\quad(a>1)$.

2. 设$x_n\leqslant a\leqslant y_n, n=1,2,\cdots$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n))=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

证明 由$x_n\leqslant a\leqslant y_n, n=1,2,\cdots$ 有 $0\leqslant a-x_n\leqslant y_n-x_n$, 故$|a-x_n|\leqslant|y_n-x_n|$; 同理有$0\geqslant a-y_n\geqslant x_n-y_n$, 故$|a-y_n|\leqslant|y_n-x_n|$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n))=0$可知对于任意固定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$使得当$n>N$时,

$$|a-x_n|\leqslant|y_n-x_n|<\varepsilon,\quad |a-y_n|\leqslant|y_n-x_n|<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

3. 设存在常数$0<\lambda<1$使得$|x_{n+1}|\leqslant\lambda|x_n|, n=1,2,\cdots$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明 $|x_n|\leqslant\lambda|x_{n-1}|\leqslant\lambda^2|x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^{n-1}|x_1|$, 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 要使$|x_n|\leqslant\varepsilon$, 只需要$n>\dfrac{\ln\varepsilon-\ln|x_1|}{\ln\lambda}+1$即可, 于是对于上面给定的$\varepsilon$, 取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon-\ln|x_1|}{\ln\lambda}\right]+2$, 则当$n>N$时,

$$|x_n|\leqslant\lambda^{n-1}|x_1|<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.

证明 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 知对于任意固定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$, 因此对于上面给定的$\varepsilon$和$N$, 由三角不等式

$$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$;
同理可知对于任意固定的$\varepsilon>0$, 存在正整数N使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon$, 因此对于上面给定的$\varepsilon$和$N$,

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$;
同理可知对于任意固定的$\varepsilon>0$, 存在正整数N使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$, 因此对于上面给定的$\varepsilon$和$N$,

$$|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{ax_n}+\sqrt[3]{a^2}}\leqslant\frac{|x_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}}<\varepsilon,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.

5. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

证明

"$\Rightarrow$" 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$可知对于任意固定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$, 故$|x_n-a|<\varepsilon(n>2N)$且$|x_n-a|<\varepsilon(n>2N-1)$,即对于上面给定的$\varepsilon$和$N$, 当$n>N$时, $2n>2n-1>n>N$, $|x_{2n}-a|<\varepsilon$且$|x-2n-1-a|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.
"$\Leftarrow$" 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$知对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N_1$使得当$n>N_1$时有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$; 同理, 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$知存在正整数$N_2$使得当$n>N_2$时有$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$. 令$N=\max\{2N_1,2N_2-1\}$, 则当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

6. 已知$|b|<a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$.

证明

由$|b|<a$, 故$\dfrac{a}{|b|}>1$, 于是

$$|\sqrt[n]{a^n+b^n}-a|=|b|\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a}{|b|}\right)^n+1}-\frac{a}{|b|}\right)$$

7. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx_n]}{n}=a$.

证明

由Gauss函数性质, $nx_n\leqslant[nx_n]\leqslant nx_n+1$, 即$x_n\leqslant\dfrac{[nx_n]}{n}\leqslant x_n+\dfrac{1}{n}$.

$$\left|\frac{[nx_n]}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{[nx_n]}{n}-x_n\right|+|x_n-a|\leqslant\frac{1}{n}+|x_n-a|,$$

对于任意给定的$\varepsilon>0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知存在正整数$N_1$使得当$n>N_1$时有$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知存在正整数$N_2$使得当$n>N_2$时有$\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令$N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当$n>N$时有

$$\left|\frac{[nx_n]}{n}-a\right|\leqslant\frac{1}{n}+|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx_n]}{n}=a$.

8. 已知 $x_n\neq0,n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=l<1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明

$$|x_n|=\left|x_n\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}}\frac{x_{n-2}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_1}{x_1}\right|\leqslant\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{x_2}{x_1}\right||x_1|,$$

对于任意给定的$\xi<\dfrac{1-l}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=l$知存在正整数$M$使得当$n>M$时, $\left|\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|-l\right|<\xi$, 从而$\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|<l+\xi<1$. 于是当$n>M$时,

$$|x_n|\leqslant\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{x_{M+1}}{x_M}\right|\left|\frac{x_M}{x_{M-1}}\right|\cdots\left|\frac{x_2}{x_1}\right||x_1|<(l+\xi)^{n-M}\left|\frac{x_N}{x_{N-1}}\right|\cdots\left|\frac{x_2}{x_1}\right||x_1|=(l+\xi)^{n-M}\cdot C,$$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 要使上式小于ε, 只需要$n > \dfrac{\ln\varepsilon - \ln C}{\ln(l+\xi)} + M$, 于是令$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon - \ln C}{\ln(l+\xi)}\right] + M + 1$, 则当$n > N$时, $|x_n| < \varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

9. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = l < 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$.

证明

对于任意给定的$\xi < \dfrac{1-l}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = l$知存在正整数$M$使得当$n > M$时, $||x_n| - l| < \xi$, 即$|x_n| < l + \xi < 1$. 于是当$n > M$时,

$$|x_n^n| < (l+\xi)^n,$$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 要使$|x_n^n| < \varepsilon$, 只需要$n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(l+\xi)}$, 于是令$N = \max\left\{\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(l+\xi)}\right] + 1, M\right\}$, 则当$n > N$时, $|x_n^n| < (l+\xi)^n < \varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$.

10. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} = a$.

证明

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} - a\right| &= \left|\frac{(x_1 - a) + 2(x_2 - a) + \cdots + n(x_n - a)}{1 + 2 + \cdots + n}\right| \\ &\leqslant \frac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + n|x_n - a|}{1 + 2 + \cdots + n}\end{aligned}$$

对于任意的$\varepsilon > 0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$知存在正整数$N1$使得当$n > N$时有$|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而当$n > N$时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} - a\right| &\leqslant \frac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + N|x_N - a| + (N+1)|x_{N+1} - a| + \cdots + n|x_n - a|}{1 + 2 + \cdots + n} \\ &< \frac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + N|x_N - a| + [(N+1) + n]\dfrac{n-N}{2} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2}}{1 + 2 + \cdots + n},\end{aligned}$$

取定N后, 由于$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + N|x_N - a|}{1 + 2 + \cdots + n} = 0$, 存在正整数$N' > N$使得当$n > N'$时,

$$\frac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + N|x_N - a|}{1 + 2 + \cdots + n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当$n > N'$时就有

$$\left|\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} - a\right| < \frac{|x_1 - a| + 2|x_2 - a| + \cdots + N|x_N - a|}{1 + 2 + \cdots + n} + \frac{[(N+1) + n]\dfrac{n-N}{2}}{1 + 2 + \cdots + n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} = a$.

11. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = a$.

证明

$$\left|\frac{x_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{|(x_n - x_{n-1}) - a| + \cdots + |(x_2 - x_1) - a| + |x_1 - a|}{n},$$

对于任意的$\varepsilon > 0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = a$知存在正整数$N$使得当$n > N$时有$|(x_{n+1} - x_n) - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{n} - a\right| &\leqslant \frac{|(x_n - x_{n-1}) - a| + \cdots + |(x_2 - x_1) - a| + |x_1 - a|}{n} \\ &< \frac{(n-N) \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} + |(x_N - x_{N-1}) - a| + \cdots + |(x_2 - x_1) - a| + |x_1 - a|}{n},\end{aligned}$$

取定N后，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(x_N-x_{N-1})-a|+\cdots+|(x_2-x_1)-a|+|x_1-a|}{n}=0$，存在正整数$N'>N$使得当$n>N'$时，

$$\frac{|(x_N-x_{N-1})-a|+\cdots+|(x_2-x_1)-a|+|x_1-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当$n>N'$时就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{n}-a\right|&<\frac{|(x_N-x_{N-1})-a|+\cdots+|(x_2-x_1)-a|+|x_1-a|}{n}+(1-\frac{N}{n})\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=a$.

1.2 收敛数列的性质

1. 根据数列极限的四则运算和已经掌握的极限求以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n-2}{2n^3-3n+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}+1}{5\sqrt[3]{n}+3\sqrt{n}-2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{5^n+(-3)^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^nn^2a+2^nn^3b}{3^nn^2+2^nn^3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}(|a|<1,|b|<1)$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

解

(1) $$\frac{3n^3+2n^2-n-2}{2n^3-3n+1}=\frac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{2-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}\to\frac{3}{2}\quad(n\to\infty).$$

(2) $$\frac{2\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}+1}{5\sqrt[3]{n}+3\sqrt{n}-2}=\frac{\dfrac{2}{\sqrt[3]{n^2}}-1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{5}{\sqrt[3]{n^2}}+3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}}\to-\frac{1}{3}\quad(n\to\infty).$$

(3) $$\frac{3^n+(-2)^n}{5^n+(-3)^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

(4) $$\frac{3^nn^2a+2^nn^3b}{3^nn^2+2^nn^3}=\frac{3^nn^2a\left(1+n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{b}{a}\right)}{3^nn^2\left(1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}=a\cdot\frac{1+n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{b}{a}}{1+n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}\to a\quad(n\to\infty).$$

其中用到了$n^kq^n\to 0\quad(n\to\infty,k\in\mathbb{N}^*,0<q<1)$.

(5) $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}=\frac{\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{n-1}}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

(6) $$\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}}+1}\to\frac{1}{3}.$$

(7) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}\to 1.$

(8) $\dfrac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2n^2}=1.$

(9) $\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}\cdot\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}\to\dfrac{1-b}{1-a}\quad(n\to\infty,|a|<1,|b|<1).$

(10) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{3}\cdots\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to\dfrac{1}{2}\quad(n\to\infty).$

(11) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1-\dfrac{1}{2^{2n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2n}}\to 2\quad(n\to\infty).$$

(12) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty).$$

2. 利用两边夹法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n!}{\sqrt{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\mathrm{e}^{\cos^2 n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\log_2 n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}}\right]$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\sqrt{n^n+n}$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x$;

解

(1) $1-\dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} \leqslant 1, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} \to 1.$

(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\sin n!}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin n!}{\sqrt{n}} \to 0.$

(3) $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1, \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \cos^2 n \leqslant 1, \quad \Rightarrow \quad 1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \mathrm{e}^{\cos^2 n} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \mathrm{e}, \quad \Rightarrow$ $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \mathrm{e}^{\cos^2 n} \to 0.$

(4) $\log_2 n \leqslant n, \forall n \in \mathbf{N}, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{n\log_2 n} \leqslant \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{n \log_2^n} \to 1.$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}} \to 1,$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}} \to 1,$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1.$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{(2n+1)^2}{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{4n^2+4n+1}{n^2+1}} \to 2,$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \geqslant \dfrac{2n+1}{(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{n+1} \to 2,$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \to 2.$

(7) $0 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \dfrac{1}{n} \to 0, \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$

(8) $1 \leqslant \sqrt[n^2]{n!} \leqslant \sqrt[n^2]{n^n} = ((n^2)^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \to 1, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n^2]{n!} \to 1.$ -

(9)

3. 已知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}, \lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}.$$

证明

若$a = b$, 显然成立. 若$a \neq b$, 不妨设$a > b$, 断言存在N使得当$n > N$时有$x_n > y_n$.事实上, 取$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$知分别存在$N_1, N_2$使得

$$|x_n - a| < \frac{a-b}{2}(\text{当}n > N_1\text{时}), \quad |y_n - b| < \frac{a-b}{2}(\text{当}n > N_2\text{时}),$$

则当$n > \max\{N_1, N_2\}$时

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > y_n.$$

于是当$n > N$时, $\max\{x_n, y_n\} = x_n$, $\min\{x_n, y_n\} = y_n$. 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$知对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 分别存在$N_1', N_2'$使得

$$|x_n - a| < \frac{a-b}{2}(\text{当}n > N_1'\text{时}), \quad |y_n - b| < \frac{a-b}{2}(\text{当}n > N_2'\text{时}),$$

于是分别当$n > \max\{N, N_1'\}$和$n > \max\{N, N_2'\}$时

$$|\max\{x_n, y_n\} - \max\{a, b\}| = |x_n - a| < \varepsilon, \quad |\min\{x_n, y_n\} - \min\{a, b\}| = |y_n - b| < \varepsilon.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$.

4. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbf{R}^+$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$.

证明

记$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a$, 显然有$a\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma^n}=a\sqrt[n]{m}\to a$, 由两边夹法则知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a$.

5. 已知$x_n>0,n=1,2,\cdots$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

证明

取$\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知存在$N>0$使得对于一切$n>N$有$|x_n-a|<\dfrac{a}{2}$, 即

$$\frac{a}{2}<x_n<\frac{3a}{2}$$

不等式两边同时开n次根号, 由于$x_n>0,n=1,2,\cdots$, 有

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\frac{3a}{2}},$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}=1$, 由两边夹法则知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

6. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明:

(1) 对任意$b>0$有$\lim\limits_{n\to\infty}b^{x_n}=b^a$;

(2) 对任意$b>0$有$\lim\limits_{n\to\infty}\log_b x_n=\log_b a$(假定$x_n>0,n=1,2,\cdots$, 且$a>0$);

证明

(1) 对于任意给定的$\delta_1=1>0$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 知存在$N\in\mathbb{N}$使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\delta$

(2) 对任意$b>0$有$\lim\limits_{n\to\infty}\log_b x_n=\log_b a$(假定$x_n>0,n=1,2,\cdots$, 且$a>0$);

7. 已知$x_n>0,n=1,2,\cdots$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

证明

对于任意给定的$\varepsilon>0$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$, 知存在$N>0$使得当$n>N$时有$|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}-a|<\varepsilon$, 即

$$\begin{aligned}x_n(a-\varepsilon)<&x_{n+1}<x_n(a+\varepsilon),\\x_{n-1}(a-\varepsilon)<&x_n<x_{n-1}(a+\varepsilon),\\&\cdots\\x_N(a-\varepsilon)<&x_{N+1}<x_N(a+\varepsilon),\end{aligned}$$

将以上不等式反复迭代, 有

$$x_N(a-\varepsilon)^{n-N}<x_n<x_N(a+\varepsilon)^{n-N},$$

记$A=\dfrac{x_N}{(a-\varepsilon)^N},B=\dfrac{x_N}{(a+\varepsilon)^N}$, 则

$$A(a-\varepsilon)^n<x_n<B(a+\varepsilon)^n,\forall n>N.$$

同时开n次根号, 得

$$\sqrt[n]{A}(a-\varepsilon)<\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{B}(a+\varepsilon).$$

由于A,B均为常数, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{B}=1$, 由极限保序性知有

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{x_n}<a+\varepsilon,\forall n>N.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

8. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+m)}$($m$是正整数);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k k}{(k+2)!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\left[1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+n(n+2)\right]$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

解

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+m)}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+m}\right)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n+k}\right)\to\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{k}$.

(2)

(3)
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)^3-3(k+3)^2+2(k+3)-1}{(k+3)!}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+3)^2}{(k+2)!}-\frac{3(k+3)}{(k+2)!}+\frac{2}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+2)^2+2(k+2)+1}{(k+2)!}-\frac{3(k+2)+3}{(k+2)!}+\frac{2}{(k+2)!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]\\
&=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\to\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^3}\left[1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+n(n+2)\right]=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)\\
&=\frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&=\frac{n^3+3n^2+2n}{3n^3}\to\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}
&\frac{2^3-1}{2^3+1}\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdots\frac{(n-1)(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2+n-1)}\\
&=\left(\frac{1}{3}\frac{2}{4}\frac{3}{5}\cdots\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n}\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{7}{3}\frac{13}{7}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)\\
&=\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2n^2+2n+2}{3n^2+3n}\to\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

9. 证明: 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在.

证明

假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, 在等式

$$\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$$

两边取极限($n\to\infty$), 有$0=2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 再在等式

$$\sin^2 n+\cos^2 n=1$$

两边取极限有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=1$, 矛盾.

10. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^0+C_n^1x_1+C_n^2x_2+\cdots+C_n^{n-1}x_{n-1}+C_n^nx_n}{2}=a$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\lambda x_{n-1}+\lambda^2x_{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1}x_1)=a$;

证明

三个极限采用相同的模式证明:

1° **当$a=0$时**: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 知对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在 $N_0>0$, 使得当$n>N_0$时有$|x_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 并记$\hat{x}=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|\}$, 当$n>N_0$时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}\right|&\leqslant\left|\frac{x_n+\cdots+(n-N_0)x_{N_0+1}}{n(n+1)}\right|+\left|\frac{(n-N_0+1)x_{N_0}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}\right|\\&<\frac{[1+(n-N_0)](n-N_0)}{n(n+1)}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{[(n-N_0+1)+n]N_0}{n(n+1)}\hat{x}\\&=\frac{n^2-2nN_0+N_0^2-N_0}{n^2+n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2nN_0-N_0^2+N_0}{n^2+n}\hat{x}\}.\end{aligned}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nN_0-N_0^2+N_0}{n^2+n}=0$, 故对于上面给定的$\varepsilon$, 存在$N_1>0$使得当$n>N_1$时有

$$\frac{2nN_0-N_0^2+N_0}{n^2+n}\hat{x}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当$n>\max\{N_0,N_1\}$时

$$\left|\frac{x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}\right|<\frac{n^2-2nN_0+N_0^2-N_0}{n^2+n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2nN_0-N_0^2+N_0}{n^2+n}\hat{x}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}=0.$

$$\left|\frac{C_n^0+C_n^1x_1+\cdots+C_n^nx_n}{2^n}\right|\leqslant\frac{C_n^0+C_n^1|x_1|+\cdots+C_n^{N_0}|x_{N_0}|}{2^n}+\frac{C_n^{N_0+1}+C_n^{N_0+2}+\cdots+C_n^n}{2^n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于任意的$1\leqslant k\leqslant N_0$, $0<\dfrac{C_n^k}{2^n}<\dfrac{n^{k+1}}{2^n}\to0$, 于是右边第一项是有限$N_0$个无穷小量的和, 还是无穷小量. 于是对于上面给定的ε, 存在$N_2>0$使得当$n>N_2$时有

$$\frac{C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{N_0}}{2^n}\hat{x}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当$n>\max\{N_0,N_2\}$时

$$\left|\frac{C_n^0+C_n^1x_1+\cdots+C_n^nx_n}{2^n}\right|\leqslant\frac{C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{N_0}}{2^n}\hat{x}+\frac{C_n^{N+1}+C_n^{N+2}+\cdots+C_n^n}{2^n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^0+C_n^1x_1+C_n^2x_2+\cdots+C_n^{n-1}x_{n-1}+C_n^nx_n}{2}=0.$

$$\left|x_n+\lambda x_{n-1}+\lambda^2x_{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1}x_1\right|\leqslant\left|1+\cdots+\lambda^{n-N_0-1}\right|\frac{\varepsilon}{2}+|\lambda^{n-N_0}x_{N_0}+\cdots+\lambda^{n-1}x_1|$$

对于任意的$1\leqslant k\leqslant N_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^{n-k}=0$, 于是邮编第二项是有限$N_0$个无穷小量之和, 是一个无穷小量. 于是对于上面给定的ε, 存在$N_3>0$使得当$n>N_3$时有

$$\lambda^{n-N_0}+\cdots+\lambda^{n-1}\hat{x}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|x_n+\lambda x_{n-1}+\lambda^2x_{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1}x_1\right|<(1+\cdots+\lambda^{n-N_0-1})\frac{\varepsilon}{2}+(\lambda^{n-N_0}+\cdots+\lambda^{n-1})\hat{x}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

2° **当$a\neq 0$时**: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n-a=0$.

由(1)知有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-a)+2(x_{n-1}-a)+\cdots+n(x_1-a)}{n(n+1)}=0.$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x_n-a)+2(x_{n-1}-a)+\cdots+n(x_1-a)}{n(n+1)}+\frac{a}{2}\right]=0+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}.$$
由(2)知有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^0+C_n^1(x_1-a)+\cdots+C_n^n(x_n-a)}{2}=0.$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^0+C_n^1x_1+\cdots+C_n^nx_n}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{C_n^0+C_n^1(x_1-a)+\cdots+C_n^n(x_n-a)}{2}+a\right]=0+a=a.$$
由(3)知有
$$\lim_{n\to\infty}[(x_n-a)+\lambda(x_{n-1}-a)+\cdots+\lambda^{n-1}(x_1-a)]=0.$$
故
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+\lambda x_{n-1}+\cdots+\lambda^{n-1}x_1)=\lim_{n\to\infty}\left[(x_n-a)+\cdots+\lambda^{n-1}(x_1-a)+\frac{a}{1-\lambda}\right]=0+\frac{a}{1-\lambda}=\frac{a}{1-\lambda}.$$

11. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 又设$\{p_n\}$是正数列, 满足
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0.$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1x_n+p_2x_{n-1}+\cdots+p_nx_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$.

证明

1° 当$a=0$时. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在相应的$N_1$使得当$n>N_1$时有$|x_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是
$$\left|\frac{p_1x_n+p_2x_{n-1}+\cdots+p_nx_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|\leqslant\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{n-N_1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p_{n-N_1+1}|x_{N_1}|+\cdots+p_n|x_1|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$
由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}=0$是无穷小量, 故$\dfrac{p_{n-N_1+1}+\cdots+p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$是无穷小量. 对于上面给定的$\varepsilon$, 存在相应的$N_2$使得当$n>N_2$时有$\dfrac{p_{n-N_1+1}+\cdots+p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\max\{|x_1|,\cdots,|x_{N_1}|\}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是
$$\left|\frac{p_1x_n+\cdots+p_nx_1}{p_1+\cdots+p_n}\right|<\frac{p_1+\cdots+p_{n-N_1}}{p_1+\cdots+p_n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p_{n-N_1+1}+\cdots+p_n}{p_1+\cdots+p_n}\max\{|x_1|,\cdots,|x_{N_1}|\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1x_n+p_2x_{n-1}+\cdots+p_nx_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$.

2° 当$a\neq 0$时. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n-a=0$, 由1°可知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1(x_n-a)+p_2(x_{n-1}-a)+\cdots+p_n(x_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$$
于是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1x_n+\cdots+p_nx_1}{p_1+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{p_1(x_n-a)\cdots+p_n(x_1-a)}{p_1+\cdots+p_n}+\frac{p_1a+\cdots+p_na}{p_1+\cdots+p_n}\right]=0+a=a.$$

12. 已知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_{n-1}y_2 + x_ny_1}{n} = ab$$

证明

1° 当$b = 0$时. 由于$\{x_n\}$收敛因而有界, 从而存在$M > 0$使得$|x_n| \leqslant M$. 于是

$$\left|\frac{x_1y_n + \cdots + x_ny_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|}{n} \to 0$$

这里收敛的断言参见$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$的证明.

2° 当$b \neq 0$时. 则有$\lim\limits_{n\to\infty} y_n - b = 0$, 由1°的结论可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1(y_n - b) + x_2(y_{n-1} - b) + \cdots + x_n(y_1 - b)}{n} = 0.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_1(y_n - b) + \cdots + x_n(y_1 - b)}{n} + b\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right] \\ &= 0 + ab = ab.\end{aligned}$$

1.3 趋向无穷的数列和三个记号

1. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}\right)=+\infty$, 其中$a>0,b>0$;8

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1^3\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^3\cdot(n+1)}}\right)=+\infty$.

证明

(1)

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\to+\infty,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=+\infty$.

(2)

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}\geqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2(a+b)}+\cdots+\frac{1}{n(a+b)}=\frac{1}{a+b}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\to+\infty,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}\right)=+\infty$.

(3)

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1^3\cdot 2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^3\cdot(n+1)}}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\to+\infty,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1^3\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^3\cdot(n+1)}}\right)=+\infty$.

2　一元函数的极限和连续性

2.1　函数的极限

1. 应用$\varepsilon-\delta$语言证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{2x^2+1}=\dfrac{1}{3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}-1}=3$;

(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\cos\dfrac{x-\pi}{2x-\pi}=0$.

2. 设n为正整数. 应用$\varepsilon-\delta$语言证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\frac{1}{n}}=x_0^{\frac{1}{n}}(x_0>0)$.

证明

当$0<|x-x_0|<|x_0|$时, x,x_0同号, 于是有

$$\begin{aligned}|x^n-x_0^n| \leqslant&|x-x_0||x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}|\\ \leqslant&|x-x_0|(C_{n-1}^0x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}x_0+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x_0^{n-1})\\ =&|x-x_0||x+x_0|^{n-1}\\ \leqslant&|x-x_0||2x_0+1|^{n-1}\end{aligned}$$

取$\delta=\min\{|x_0|,1,\dfrac{\varepsilon}{|2x_0+1|^{n-1}}\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|x-x_0|\leqslant|x-x_0||2x_0+1|^{n-1}<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$.

同理, 有

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}x_0}+\cdots+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}\leqslant\frac{|x-x_0|}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}.$$

取$\delta=\min\{x_0,(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}\varepsilon\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}|<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{x\to x_0} x^{\frac{1}{n}}=x_0^{\frac{1}{n}}$.

3. 已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$. 应用$\varepsilon-\delta$语言证明以下结论:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)\mathrm{sgn}f(x)=a^2\mathrm{sgn}a$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$.

证明

(1) 若$a=0$, 则由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$知对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在相应的$\delta>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$, 从而

$$|f^2\mathrm{sgn}f(x)|\leqslant|f^2|\leqslant|f|^2<(\sqrt{\varepsilon})^2=\varepsilon.$$

若$a\neq 0$, 有

$$|f^2\mathrm{sgn}f(x)-a^2\mathrm{sgn}a|=|(f^2-a^2)\mathrm{sgn}f(x)+a^2(\mathrm{sgn}f(x)-\mathrm{sgn}a)|\leqslant|f^2-a^2|+a^2|\mathrm{sgn}f(x)-\mathrm{sgn}a|.$$

由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, 若$a>0$, 存在$\delta_+>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta_+$时, $f(x)>\dfrac{a}{2}>0$, 从而有$\mathrm{sgn}f(x)=\mathrm{sgn}a$, 同理当$a<0$时存在$\delta_->0$使得当$0<|x-x_0|<\delta_-$时, $f(x)<\dfrac{a}{2}<0$, 从而也有$\mathrm{sgn}f(x)=\mathrm{sgn}a$. 而由于

$$|f^2-a^2|=|f^2-fa+fa-a^2|\leqslant|f||f-a|+|f-a||a|$$

由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta_M>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta_M$时, $|f(x)|\leqslant M$ 并且$|f(x)-a|<\dfrac{\varepsilon}{M+|a|}$. 从而对于上面给定的$\varepsilon$, 取$\delta=\min\{\delta_+,\delta_-,\delta_M\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|f^2\mathrm{sgn}f(x)-a^2\mathrm{sgn}a|\leqslant|f^2-a^2|<\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)\mathrm{sgn}f(x)=a^2\mathrm{sgn}a$.

(2) 若$a=0$, 由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$知对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在相应的$\delta>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)|<\varepsilon^3$, 从而

$$|\sqrt[3]{f(x)}|\leqslant\sqrt[3]{|f(x)|}<\sqrt[3]{\varepsilon}=\varepsilon.$$

若$a\neq 0$, 由上题(2)即可得证. 从而$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$

4. 应用函数极限的四则运算规律求以下极限(m,n均表示自然数):

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3-2x-1}{x^3+x-2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{2x^3+x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2+x)^4-(5+4x)}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

(6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^5-2x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n-1)x+n}{(x-1)^2}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{x^m-1}-\dfrac{n}{x^n-1}\right)$;

解

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^3-2x-1}{x^3+x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2+x-2}{x^3+x-2}=\dfrac{-2}{-2}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x-2}=\dfrac{3}{-1}=-3.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1-3x)-1}{2x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{6x^3+7x^2}{2x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{6x+7}{2x+1}=-7.$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2+x)^4-(5+4x)}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^4+4(x+1)^3+6(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2+4(x+1)+6}{x^2+2x+3}=\dfrac{6}{2}=3.$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3+3(x-1)^2}{(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+3}{(x-1)^2+4(x-1)+6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}.$

(6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^5-2x-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^3-3(x+1)^2}{(x+1)^4-5(x+1)^3+10(x+1)^2-10(x+1)+3}=\dfrac{0}{3}=0.$

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{4}{3}.$

(8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{[4-(x+5)](1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+x)(2+\sqrt{x+5})}=-\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt{x+5}}=-\dfrac{3}{4}.$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2-x)-x}{(2-x)-x}\dfrac{\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{x(2-x)}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}.$

(10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}+\dfrac{x-a}{(x+a)\sqrt{x-a}}\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{x+a}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}.$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}\dfrac{x^{m-1}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+\cdots+x+1}=\dfrac{m}{n}.$

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n-1)x+n}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{n+1}-1)-(n+1)x+(n+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n+\cdots+x+1)-(n+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n+\cdots+x^2+x)-n}{x-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

(14)

5. 已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$. 证明:

$$\lim_{x\to x_0}\max\{f(x),g(x)\}=\max\{a,b\},\ \lim_{x\to x_0}\min\{f(x),g(x)\}=\min\{a,b\}.$$

证明 显然当$a=b$时成立, 当$a\neq b$时, 不妨设$a>b$. 由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, 断言存在$\delta>0$, 使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)>g(x)$: 事实上, 对于$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}>0$, 由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, 存在$\delta_1>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时有$|f(x)-a|<\dfrac{a-b}{2}$, 即$f(x)>a-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$; 另一方面, 由于$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, 存在$\delta_2>0$使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时有$|g(x)-b|<\dfrac{a-b}{2}$, 即$g(x)<b+\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$. 从而令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时有$g(x)<\dfrac{a+b}{2}<f(x)$. 于是在$x_0$的$\delta$领域内,

$$\max\{f(x),g(x)\}=f(x),\min\{f(x),g(x)\}=g(x),\max\{a,b\}=a,\min\{a,b\}=b.$$

从而由于 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, 知

$$\lim_{x\to x_0} \max\{f(x), g(x)\} = \lim_{x\to x_0} f(x) = a = \max\{a, b\},$$
$$\lim_{x\to x_0} \min\{f(x), g(x)\} = \lim_{x\to x_0} g(x) = b = \min\{a, b\}.$$

2.2 函数的极限(续)

1. 求以下单侧极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{3x-2\sqrt{x}-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}+3\sqrt[4]{1-x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[3x]}{x+2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[3x]}{x+2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]^2-1}{x^2-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]^2-1}{x^2-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 2^+}\arctan\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 2^-}\arctan\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

解

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{3x-2\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(3\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{1}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}+3\sqrt[4]{1-x}}\xlongequal{y=\sqrt[12]{1-x}}\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{y^4-y^3}{y^4+3y^3}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{y-1}{y+3}=-\dfrac{1}{3}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[3x]}{x+2}=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[3x]}{x+2}=\dfrac{2}{3}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]^2-1}{x^2-1}=1.$

(6) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]^2-1}{x^2-1}=0.$

(7) $\lim\limits_{x\to 2^+}\arctan\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}=\dfrac{\pi}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to 2^-}\arctan\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}=-\dfrac{\pi}{2}.$

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0.$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1.$

2. 求以下无穷远处的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^{-}2x})$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}})$;

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+\sqrt{x^2-2x})^n+(x-\sqrt{x^2-2x})^n}{\sqrt[3]{x^{3n}+1}+\sqrt[3]{x^3n-1}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$;

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$;

解

(1)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}+1}=a+b.$$

(2)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^-2x})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^3}\right)}+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}+1}=1+1=2$$

(3)

3. 根据极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求以下极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(a,b\neq0)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}(a,b\neq0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{\sin x^2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2xtan(\dfrac{\pi}{4}-x)$;

(8) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})^2}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

4. 根据极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求以下极限 (必要时需作变量变换并使用对数法):

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^x$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^3+\mathrm{e}^{2x})}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}(2\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{x}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}(2\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{1+x^2}{x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\dfrac{3}{x})$;

(12) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2$.

5. 求以下综合类型的极限:

(1)

6. 设函数f在$(a,+\infty)$上单增. 证明:

(1) 如果存在数列$\{x_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$;

(2) 如果f严格单增, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

证明 若存在这样的数列, 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 于是从有限多项后数列的每一项都落在区间$(a,+\infty)$上, 由于数列自身的性质, 这两个数列在敛散性上完全相同, 因此不加区分地也将这个去掉前面有限多项的数列记为$\{x_n\}$.

(1) 断言对于任意的$n\in\mathbb{N}^+$, $f(x_n)\leqslant a$: 若存在$N_0\in\mathbb{N}^+$, $f(x_{N_0})>a$, 则对于$\varepsilon=f(x_{N_0})-a>0$, 由于$f(x_n)\to a(n\to\infty)$知存在$N_1\in\mathbb{N}^+$, 使得当$n>N_1$时有$|f(x_n)-a|<\varepsilon$; 又由于$x_n\to+\infty(n\to\infty)$, 则对于$x_{N_0}$, 存在$N_2\in\mathbb{N}^+$, 使得当$n>N_2$时有$x_n>x_{N_0}$, 由于函数$f$在$(a,+\infty)$上单增, 当$n>N_2$时有$f(x_n)\geqslant f(x_{N_0})$, 进而当$n>\max\{N_1,N_2\}$时, $f(x_n)-a\geqslant f(x_{N_0})-a=\varepsilon$, 这与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$矛盾.

对于任意$x>a$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$知存在$N_x\in\mathbb{N}^+$, 使得当$n>N_x$时有$x_n>x$, 故$f(x)\leqslant f(x_n)\leqslant a$. 对于任意$\varepsilon>0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$, 知存在$N>0$使得当$n>N$时, $f(x_n)>a-\varepsilon$, 则当$x>x_{N+1}$时, $f(x)\geqslant f(x_{N+1})>a-\varepsilon$. 故对于上面的$\varepsilon>0$ 取$M=\max\{a,x_{N+1}\}$, 则当$x>M$时就有

$$a-\varepsilon<f(x_{N+1})\leqslant f(x)\leqslant f(x_{N_x+1})\leqslant a<a+\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

(2) 断言$f(x)<a$: 首先证明$f(x)\leqslant a$, 否则存在$f(x_0)>a$, 对于$\varepsilon=f(x_0)-a>0$, 当$x>x_0$时, $f(x)>f(x_0)$, 即$f(x)-a>f(x_0)-a=\varepsilon$, 这与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$矛盾; 在证明$f(x)\neq a$, 否则存在$f(x_1)=a$, 当$x>x_1$时, 有$f(x)>f(x_1)=a$, 这与前面已证明的$f(x)\leqslant a$矛盾.

对于任意$M>0$, $f(M)<a$, 取$\varepsilon=a-f(M)>0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$, 知存在$N>0$使得当$n>N$时, $f(x_n)>a-\varepsilon=f(M)$. 由于$f$在$(a,+\infty)$上严格单调递增, f的反函数f^{-1}存在, 并且f^{-1}也是$(a,+\infty)$上的严格单调递增函数. 上式左右取反函数, 当$n>N$时,

$$x_n=f^{-1}\circ f(x_n)>f^{-1}\circ f(M)=M,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

7. 定义在区间 $(a,+\infty)$ 上的函数 f 称为是**渐进 T 周期的**, 其中 T 是正常数, 如果存在 T 周期函数 g 使成立

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

证明: f 是渐进 T 周期函数的充要条件是成立

$$\lim_{m,n\to\infty}[f(x+mT)-f(x+nT)]=0,\quad \forall x>a.$$

证明

必要性: f 是渐进 T 周期函数, 故存在 T 周期函数 g 使成立

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0.$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 对于给定的 $\varepsilon>0$, 当

$m, n > N = \dfrac{M}{T}$ 时, $x + mT, x + nT > M$,

$$\begin{aligned}
&|f(x+mT) - f(x+nT)| \\
=&|[f(x+mT) - g(x)] + [g(x) - f(x+nT)]| \\
\leqslant&|f(x+mT) - g(x)| + |f(x+nT) - g(x)| \\
=&|f(x+mT) - g(x+mT)| + |f(x+nT) - g(x+nT)| \\
<&\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
=&\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{m,n\to\infty}[f(x+mT) - f(x+nT)] = 0, \quad \forall x > a$. 其中第二个"="是由于 $g(x)$ 是 T 周期函数, 故 $g(x) = g(x+mT) = g(x+nT)$.

充分性: $\lim\limits_{m,n\to\infty}[f(x+mT) - f(x+nT)] = 0, \quad \forall x > a$. 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在相应 $\bar{N}_x > 0$, 当 $m, n > \bar{N}_x$ 时,

$$|f(x+mT) - f(x+nT)| < \varepsilon, \quad \forall x > a.$$

故由Cauchy收敛准则知对于 $\forall x > a$, 数列 $\{f(x+nT)\}$ 收敛, 做映射

$$\begin{aligned}
g : (a, +\infty) \quad &\mapsto \quad \mathbb{R} \\
x \quad &\to \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x+nT)
\end{aligned}$$

而 $g(x+T) = \lim\limits_{n\to\infty} f[(x+T)+nT] = \lim\limits_{n\to\infty} f[x+(n+1)T] = \lim\limits_{n\to\infty} f(x+nT) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是 $(a, +\infty)$ 上的 T 周期函数.

8. 证明**Cauchy定理**: 设函数 f 定义在区间 $(a, +\infty)$ 上, 并在每个有穷区间 (a, b) 上有界. 则当等式右端的极限存在时, 成立

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)]$;

   (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

9. 设函数 f 定义在区间 (a, ∞) 上, 并且在每个有穷区间 (a, b) 上有界. 又设

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^p} = c,$$

其中 p 为正常数. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{p+1}} = \frac{c}{p+1}.$$

2.3 函数的连续性

1. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 都在区间 I 上连续. 证明下列函数也在区间 I 上连续:

   (1) $a(x) = |f(x)|$;

   (2) $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$;

   (3) $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$;

   (4) 函数 $u(x)$, 其定义是对每个$x \in I$, $u(x)$ 的值等于 $f(x), g(x), h(x)$ 三个数中位于另外两个中间的那个数;

   (5) $f_c(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } |f(x)| \leqslant c, \\ c, & \text{当 } f(x) > c, \\ -c, & \text{当 } f(x) < -c. \end{cases}$

2. 设 f 是定义在开区间 I 上的函数, x_0 是 I 中一点, f 在 x_0 点附近有界. 对充分小的 $\delta > 0$, 令

$$\omega_{f,x_0}(\delta) = \sup_{x,y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)|,$$

   这里 $B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $\omega_{f,x_0}(\delta)$ 叫做 f 在 $B_\delta(x_0)$ 上的**振幅**. 证明: 函数 f 在 x_0 点连续的充要条件是 $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_{f,x_0}(\delta) = 0$.

3. 设 S 是$\mathbb{R}$的非空子集. 定义点$x \in \mathbb{R}$到S的距离为

$$d(x, S) = \mathrm{dist}(x, S) = \inf\{|x - y| : y \in S\}.$$

   证明: 对$\mathbb{R}$的任意非空子集S, 函数$x \mapsto d(x, S)$都是$\mathbb{R}$上的连续函数.

4. 设 f 是定义在区间 $[a, +\infty)$ 上的连续函数. 对每个 $x \geqslant a$, 令

$$m(x) = \inf_{a \leqslant t \leqslant x} f(t), \qquad M(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant x} f(t).$$

   证明: 函数 $m(x)$ 和 $M(x)$ 都在区间 $[a, +\infty)$ 上连续.

5. 证明: 非常数的连续周期函数必有最小正周期.

6. 证明: 单调函数最多只有第一类间断点.

7. 定义在开区间 I 上的函数 f 称为**凸函数**, 如果对任意 $x, y \in I$ 和任意 $0 < \theta < 1$ 都成立不等式

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y).$$

   在几何上, 这意味着如果 A, B, C 是曲线 $y = f(x)$ 上的三个点并且 B 位于 A 和 C 之间, 则 B 位于弦 AC 上或 AC 的下方. 证明: 凸函数都是连续函数.

8. 设 f 是区间 I 上的连续函数, 满足以下条件: 对任意 $x, y \in I$ 都成立不等式

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

   证明: f 是区间 I 上的凸函数.

9. 设 I 是一个闭区间, 即 I 是四种区间 $[a, b], [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty)$ 之一. 又设 f 是定义在 I 上的函数, 满足以下两个条件:

(1) f 的值域含于 I, 即 f 把区间 I 映照进 I;

(2) 存在常数 $0<\lambda<1$ 使对任意 $x, y \in I$ 都成立 $|f(x)-f(y)| \leqslant \lambda|x-y|$.

任取 $x_0 \in I$, 按以下递推公式构作数列 $\{x_n\}$:

$$x_n=f(x_{n-1}), \quad n=1,2,\cdots.$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并且其极限 $\bar{x}=\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 是方程 $f(x)=x$ 在 I 中的唯一根.

2.4 连续函数的性质

1. 举例说明:

(1) 开区间上的连续函数不一定有界;

(2) 不连续的函数, 即使定义在闭区间上, 也不一定有界;

(3) 开区间上的连续函数, 即使有界, 也不一定达到最大值和最小值;

(4) 不连续的函数, 即使定义在闭区间上且有界, 也不一定达到最大值和最小值;

(5) 不连续的函数, 即使定义在闭区间上且变号, 也不一定有零点.

2. 设 I 是开区间, f 是 I 上的连续函数. 令 $m = \inf x \in I f(x), M = \sup_{x\in I} f(x)$. 规定当 f 无下界时 $m = -\infty$, 当 f 无上界时 $M = +\infty$. 证明: 对任意 $m < c < M$, 必存在 $\xi \in I$ 使 $f(\xi) = c$.

3. 证明: 奇数次的实系数代数方程必有实数根.

证明

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0,\ n \text{ 为奇数}).$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}) = 1,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$. 因此当 $a_n > 0$时, 由于 n 为奇数, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. 于是对于任意 $M > 0$, 存在 $x_M > 0$ 使得当 $x \geqslant x_M$ 时成立 $f(x) > M > 0$; 对于任意 $N < 0$, 存在 $x_N < 0$ 使得当 $x \leqslant x_N$ 时成立$f(x) < N < 0$. 在区间 $[x_N, x_M]$ 上使用零值定理, 则存在 $\xi \in (x_N, x_M)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 于是 ξ 就是奇数次实系数代数方程 $f(x) = 0$ 的一个实数根.

4. 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且值域含于 $[a, b]$, 证明: f 有不动点, 即存在 $\bar{x} \in [a, b]$ 使 $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

证明

考虑辅助函数 $F(x) = f(x) - x$. 由于 $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, 故 $a \leqslant f(a) \leqslant b$, $a \leqslant f(b) \leqslant b$. 于是 $f(a) - a \geqslant 0$, $f(b) - b \leqslant 0$. 如果上面两个不等式等号至少有一个成立, 则 a 或 b 就是 f 的不动点; 若不等号均不成立, 则 $F(a) > 0$, $F(b) < 0$, 在闭区间 $[a, b]$ 上使用零值定理, 则存在 $\bar{x} \in (a, b)$ 使得 $F(\bar{x}) = 0$, 即 $\bar{x}$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的不动点.

5. 设 f 是区间 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明: 对任意 $0 < l < 1$, 存在 $x_0 \in [0, 1 - l]$ 使 $f(x_0) = f(x_0 + l)$.

证明

考虑辅助函数 $F(x) = f(x) - f(x + l)$. f 是 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, 则 $f(l) \geqslant 0$, $f(1 - l) \geqslant 0$. 故 $f(0) - f(l) \leqslant 0$, $f(1 - l) - f(1) \geqslant 0$. 若 $f(0) - f(l) = 0$ 或 $f(1 - l) - f(1) = 0$, 令 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 1 - l$ 即可; 若 $f(0) - f(l) \neq 0$, $f(1 - l) - f(1) \neq 0$, 则 $F(0) < 0$, $F(1 - l) > 0$, 关于 F 在区间 $[0, 1 - l]$ 上使用零值定理, 则存在 $x_0 \in (0, 1 - l)$ 使得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f(x_0 + l)$.

6. 设 I 是一个区间, f 是 I 上的连续函数. 证明: 对 I 中的任意有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 必存在 $\xi \in I$ 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

证明

设 $f(x_M) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k), f(x_m) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f(x_k)$, $1 \leqslant m, M \leqslant n$. 不妨设$x_M \leqslant x_m$, 则在闭区间 $[x_M, x_m]$ 上(若 $x_m \leqslant x_M$ 则在闭区间 $[x_m.x_M]$ 上), 由于

$$f(x_m) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \leqslant f(x_M),$$

关于 f 使用介值定理, 则存在 $\xi\in[x_M,x_n]\subseteq I$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

7. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=+\infty$. 证明: 存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使 $f(x_0)\leqslant f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

   证明

   由于 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=+\infty$, 对于 $\forall c\in(-\infty,+\infty)$, 存在 $M>0$ 使得当 $|x|>M$ 时 $f(x)>f(c)$. 任取 $x_1,x_2\in x:|x|>M$ 使得 $x_1<c<x_2$, 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subseteq(-\infty,+\infty)$ 上连续, 故 f 在$[x_1,x_2]$ 中存在最小值; 又由于 $c\in(x_1,x_2)$, 且 $f(c)<f(x_1),f(c)<f(x_2)$, 故最小值在 (x_1,x_2) 中取到, 设为 $f(x_0)$, 则对于 $x\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$, $f(x)>f(c)\leqslant f(x_0)$, 故 $f(x_0)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值, 即

   $$f(x_0)\leqslant f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

8. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且存在 $0<\lambda<1$ 使对任意 $x\in[a,b]$, 存在相应的 $y\in[a,b]$ 使 $|f(y)|\leqslant\lambda|f(x)|$. 证明: f 在区间 $[a,b]$ 上有零点.

   证明

   对于$\forall x_0\in[a,b]$, 存在$x_1\in[a,b]$使得$|f(x_1)|\leqslant\lambda|f(x_0)|$; 同理存在$x_2\in[a,b]$使得$|f(x_2)|\leqslant\lambda|f(x_1)|$; 按照这一步骤下去, 应用数学归纳法, 或者在某有限步时得到了$x_i\in[a,b]$使得 $f(x_i)=0$, 或者得到了一个数列$\{f(x_n)\},x_n\in[a,b],n=1,2,\cdots$: 一方面, 由于$x_n\in[a,b],n=1,2,\cdots$, 故$\{x_n\}$是有界数列, 存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$, $\xi\in[a.b]$. 另一方面, $|f(x_n)|\leqslant\lambda|f(x_{n-1})|\leqslant\lambda^2|f(x_{n-2})|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^n|f(x_0)|$. 于是对于任意的$\varepsilon>0$, 当$n>N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon/|f(x_0)}{\ln\lambda}\right]+1$时, $|f(x_n)|\leqslant\lambda^n|f(x_0)<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$, 从而$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=0$. 由于$f$在区间$[a,b]$上连续, 特别地在$\xi\in[a,b]$一点连续, 于是$\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$. 由Heine定理, $f(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi}=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=0$, 即$\xi$是$f$在$[a,b]$上的零点.

9. 设函数 f 在开区间 (a,b) 上连续, 且有两列数$x_n,y_n\in(a,b)(n=1,2,\cdots)$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=B$. 证明: 对 A 与 B 之间的任意数 c, 存在数列 $z_n\in(a,b)(n=1,2,\cdots)$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=c$.

10. 证明:

    (1) 如果 f 在区间 I 和 J 上都一致连续, 且 $I\cap J\neq\varnothing$, 则 f 也在 $I\cup J$ 上一致连续;

    (2) 设 f 在 I 上一致连续, g 在 J 上一致连续, 且 $f(I)\subseteq J$, 则 $g\circ f$ 在 I 上一致连续.

11. 证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数必在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

12. 设函数f在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且存在常数 A 使成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明: f 也在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

13. 称函数 f 在区间 I 上**局部 μ 阶Hölder连续**, 这里 $0<\mu\leqslant 1$ 是常数, 如果对每个 $x_0\in I$ 都存在相应的 $\delta>0$ 和 $C>0$, 使对任意 $x,y\in I\cap B_\delta(x_0)$ 都有

    $$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\mu.$$

    证明: 如果 f 在区间 $[a,b]$ 上局部 μ 阶Hölder连续, 则 f 也在此区间上**一致 μ 阶Hölder连续**, 即存在常数 $C>0$ 对于任意 $x,y\in I$ 都成立

    $$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\mu.$$

3 一元函数微分学

3.1 导数的定义

1. 根据导数的定义证明:

(1) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

(2) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

(3) $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n-1}}$;

(4) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(5) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$;

(6) $(a^x)' = a^x \ln a (a>0, a\neq 1)$.

证明

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\right]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\\
&\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2(1-x^2)-x^2[1-(x+\Delta x)^2]}{x[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}\\
&\text{作变换 } y=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\\
&\text{作变换 } z=\arcsin y\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{2x}{2x\sqrt{1-x^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

2. 证明下列函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 并求 $f'(0)$:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{当}x\text{是有理数},\\ 0, & \text{当}x\text{是无理数}.\end{cases}$

3. 设 a 是正常数. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $f(x)=\begin{cases} |x|^{a-1}x, & x\neq 0,\\ 0 & x=0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}|x|^a\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0 & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x^a, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

4. 证明: 如果 $f(x)$ 是偶函数, 且在点 $x=0$ 可导, 则 $f'(0)=0$.

5. 证明: 如果 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 则对任意实数 a,b 都成立

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{\Delta x}=(a-b)f'(x_0).$$

6. 证明:

(1) 定义在区间 (a,b) 上的连续函数 f 在点 $x_0\in(a,b)$ 可导的充要条件是函数

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

在 x_0 点补充定义后是 (a,b) 上的连续函数;

(2) 可导的偶函数的导数是奇函数, 可导的奇函数的导数是偶函数;

(3) 可导的 T 周期函数的导数是 T 周期函数.

7. 设函数 g 在 $x=a$ 点附近有定义并在该点连续且 $g(a)\neq 0$. 证明:

(1) 函数 $f(x)=(x-a)g(x)$ 在点 $x=a$ 可导;

(2) 函数 $f(x)=|x-a|g(x)$ 在点 $x=a$ 不可导, 但有左导数 $f'_-(a)$ 和右导数 $f'_+(a)$.

8. 证明:

(1) 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 点的任意邻域中都有不可导的点, 但它在该点可导;

(2) 函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续, 但它在该点既无左导数, 又无右导数.

9. 设定义在区间 $[0,1)$ 上的函数 f 在点 $x=0$ 右连续, $f(0)=0$, 且对某常数 $a>1$成立

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(ax)-f(x)}{x}=c.$$

证明: f 在点 $x=0$ 右可导, 且 $f'_+(0)=\dfrac{c}{a-1}$.

10. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数, 而

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx,\quad x\in\mathbb{R}.$$

假设已知对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$, 证明: $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

证明

对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$, 即 $-\sin x\leqslant f(x)\leqslant\sin x$, 注意到 $f(0)=\sin 0=0$, 于是,

$$|\frac{f(x)-f(0)}{x}|\leqslant\frac{|f(x)-f(0)|}{x}\leqslant\frac{|\sin x-\sin 0|}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

不等式两边令$x\to 0^+$, 则

$$|f'_+(0)|\leqslant 1.$$

3.2 函数的微分

1. 设函数 f 在点 x_0 附近有定义, 并在该点可微. 又设函数 g 在 $y_0=f(x_0)$ 附近有定义并在该点可微. 用微分的定义证明: 复合函数 $g\circ f$ 在点 x_0 可微, 且 $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

   证明

   由 f 在点 x_0 可微及函数的微分和导数之间的关系, 有

   $$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

   又设 $u=g(y)$, 由 g 在 $y_0=f(x_0)$ 可微及函数的微分和导数之间的关系, 有

   $$\Delta u=g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y).$$

   于是有

   $$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g'(y_0)\Delta y+o(\Delta y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g'(y_0)[f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)]+o(\Delta y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g'(y_0)f'(x_0)+g'(y_0)\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=g'(y_0)f'(x_0)+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(\Delta y)}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=g'(y_0)f'(x_0)+0\cdot f'(x_0)\\&=g'(y_0)f'(x_0)\end{aligned}$$

   这说明 $g\circ f$ 在x_0可导从而可微, 又由

   $$\Delta u=(g\circ f)'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

   知 $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

2. 设函数 f 在点 x_0 附近有定义, 并在该点可微. 又设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 f 的定义域中的两个数列, 满足:

   (1) $x_n<x_0<y_n, n=1,2,\cdots,$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

   证明:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(x_0).$$

   证明

   由f在x_0可微, 故在x_0左可导且右可导. 由Heine定理, 有

   $$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

和

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-y_n}-\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{x_n-y_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\frac{x_n-x_0}{x_n-y_n}-\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-y_0}\frac{y_n-y_0}{x_n-y_n}\\&=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_0}{x_n-y_n}-\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-y_n}\\&=f'(x_0)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n-x_0}{x_n-y_n}-\frac{y_n-x_0}{x_n-y_n}\right)\\&=f'(x_0)\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-y_n}{x_n-y_n}\\&=f'(x_0)\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 可微, 且 $f(x_0)\neq 0$, $f'(x_0)\neq 0$. 再设

$$af(x_0+\Delta x)+bf(x_0+2\Delta x)-f(x_0)=o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

求 a 和 b.

4. 设 $f(x_0)=0$. 再设 $\phi(t)$ 在 $t=0$ 的一个邻域里有连续的导数且 $\phi(0)=x_0$, $\phi'(0)\neq 0$. 证明: 极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\phi(t))}{t}$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可微.

5. 设函数 f 和 g 都在点 x_0 附近有定义并在该点可微, 且 $f(x_0)=g(x_0)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)}{g\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)}\right)^n.$$

6. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-a}{x-x_0}=b$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^a}{x-x_0}=\mathrm{e}^a b$.

7. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有定义, $f(0)=0$, 并在 $x=0$ 有右导数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}f'_+(0).$$

根据以上命题求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2}{n^2}\cdots\cos\dfrac{n}{n^2}$.

证明

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right]\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{f\left(\frac{n}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{n}{n^2}}\cdot\frac{n}{n^2}\right]\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{n}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{n}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\\
=&f'_+(0)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\\
=&\frac{1}{2}f'_+(0).
\end{aligned}
$$

于是有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right]=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{n^2}\cos\frac{2}{n^2}\cdots\cos\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}(\ln(\cos x))'|_{x=0}=-\frac{1}{2}\tan 0=0.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n^2}\cos\frac{2}{n^2}\cdots\cos\frac{n}{n^2}=1.$

3.3 微分中值定理

1. 证明**广义Rolle定理**: 设函数 f 在有穷或无穷区间 (a,b) 上处处可微且成立

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x).$$

   这个等式的意思是或者等式两端的极限都存在且相等, 或者等式两端都是正无穷大或都是负无穷大. 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

2. 对于 n 阶实系数多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$, 证明:

   (1) $P(x)$ 最多只有 n 个不同的实根;

   (2) 如果 $P(x)$ 的 n 个根(重根按重数计算) 都是实数, 则其各阶导数 $P'(x),P''(x),\cdots,P^{(n)}(x)$ 的根也都是实数.

3. 证明:

   (1) 方程 $ax^3+bx^2+cx=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}$ 在区间 $(0,1)$ 上至少有一个根;

   (2) 设 $a^2-3b<0$. 则方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 只有一个实根.

4. 对于方程 $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}=0$, 证明:

   (1) 当 n 是奇数时只有一个实根;

   (2) 当 n 是偶数时没有实根.

5. 证明**Strum定理**: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 I 上的可微函数, 且 $f(x)g'(x)\neq f'(x)g(x),\forall x\in I$. 则在 $f(x)$ 的任意两个零点之间都夹有$g(x)$的至少一个零点.

6. 设 $f(x)$ 是可微函数, a 是常数. 证明:

   (1) 在 $f(x)$ 的两个零点之间必有 $f'(x)+af(x)$ 的一个零点;

   (2) 在 $f(x)$ 的两个正零点之间必有 $xf'(x)+af(x)$ 的一个零点.

7. 设函数 f 在区间 I 上可微且导函数有界. 证明: 存在常数 $C>0$ 使成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|,\quad \forall x,y\in I.$$

8. 设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微. 证明:

   (1) 存在 $\xi\in(a,b)$ 使成立 $f'(\xi)f(a+b-\xi)=f(\xi)f'(a+b-\xi)$;

   (2) 如果 $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使成立

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)};$$

   (3) 存在 $\xi\in(a,b)$ 使成立

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi)\\ g(a) & g(b) & g'(\xi)\\ h(a) & h(b) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

9. 证明下列不等式:

   (1) $\dfrac{a-b}{1+a^2}<\arctan a-\arctan b<\dfrac{a-b}{1+b^2}(a>b>0)$;

(2) $\dfrac{a-b}{a} < \ln ab < \dfrac{a-b}{b}$, 设 $a, b > 0$;

(3) $pb^{p-1}(a-b) \leqslant a^p - b^p \leqslant pa^{p-1}(a-b)$, 设 $a, b > 0$ 且 $p > 1$.

10. 设 $p > 0$. 证明: 对任意自然数 n 成立不等式

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < 1^p + 2^p + \cdots + n^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}.$$

11. 设 m, n 都是自然数且 $m > n$. 证明: 对任意 $x > 0$ 成立不等式

$$\frac{m}{n} \min\{1, x^{m-n}\} \leqslant \frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} \leqslant \frac{m}{n} \max\{1, x^{m-n}\},$$

且等号成立当且仅当 $x = 1$.

12. 证明:

(1) 如果 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导且 $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = +\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上不一致连续.

13. 设 $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上连续, 在 $(0, \delta)(0 < \delta \leqslant a)$ 上可导, 且存在 $0 < \mu < 1$ 和 $C > 0$ 使对任意 $x \in (0, \delta)$ 有 $|f'(x)| \leqslant Cx^{-\mu}$. 证明: $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上一致连续.

14. 证明**Darboux定理**: 设函数 f 在区间 I 上处处可微. 记 $A = \inf\limits_{x \in I} f'(x)$, $B = \sup\limits_{x \in I} f'(x)$ (当 f' 无下界时规定 $A = -\infty$, 当 f' 无上界时规定 $B = +\infty$). 则对任意 $A < c < B$, 必存在相应的 $\xi \in I$ 使 $f'(\xi) = c$.

15. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上有二阶导数. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使成立

$$f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

3.4 L'Hospital法则

1. 设 $f(x)$ 有二阶导数. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

证明

等式左边的极限使用L'Hospital法则,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{2h}+\frac{f'(x)-f'(x-h)}{2h}\right]\\&=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)\\&=f''(x).\end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+bf(x)]=c(b\neq 0)$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{c}{b}$.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{bx}f(x)}{\mathrm{e}^{b}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{bx}(f'(x)+bf(x))}{b\mathrm{e}^{bx}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+bf(x)}{b}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+bf(x)]}{b}\\&=\frac{c}{b}.\end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有二阶导数且 $f''(0)\neq 0$. 对充分接近于零的 $x\neq 0$, 由Lagrange中值定理知存在 $\theta=\theta_x\in(0,1)$ 使

$$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x.$$

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

证明

考虑辅助函数 F:

$$F(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}.$$

一方面, 有

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)x-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}.$$

注意到 $0<\theta<x$, 所以当 $x\to 0$ 时, $\theta=\theta_x\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\theta\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}=f''(0)\cdot\lim_{x\to 0}\theta.$$

另一方面, 对 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$ 应用L'Hospital法则, 有

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

由于上面两式都是 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$, 由极限的唯一性有 $f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}f''(0)$, 注意到 $f''(0)\neq 0$, 则有 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

3.5 利用导数判断两个函数相等

1. 设函数 f 在区间 I 上满足以下条件: 存在常数 $\mu>1$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\mu},\quad \forall x,y\in I.$$

证明: f 在区间 I 上是常值函数.

证明

对于任意的 $x_0\in I$,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant C|x-x_0|^{\mu-1},\quad \forall x\in I.$$

于是对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 由于 $\mu>1$, 当 $|x-x_0|<\sqrt[\mu-1]{\frac{\varepsilon}{C}}$ 时就有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<C\sqrt[\mu-1]{\frac{\varepsilon}{C}}=\varepsilon.$$

即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,\forall x_0\in I$, 于是 f 在区间 I 上是常值函数.

2. 设函数 f 和 g 在区间 I 上可微, $g(x)\neq 0,\forall x\in I$, 且成立

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}=0,\quad \forall x\in I.$$

证明: 存在常数 c 使 $f(x)=cg(x),\forall x\in I$.

证明

f 和 g 在区间 I 上可微, $g(x)\neq 0,\forall x\in I$, 故 $\dfrac{f}{g}$ 也在 I 上可微. 由导数的四则运算

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{1}{g^2(x)}\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}=0,\quad \forall x\in I.$$

故 $\dfrac{f}{g}$ 在区间 I 上是常函数, 即存在常数 c 使 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=c,\forall x\in I$.

3. 设函数 f 在区间 I 上可微且导数是一常数: $f'(x)=a,\forall x\in I$. 证明: f在区间 I 上是一线性函数 $f(x)=ax+b,\forall x\in I$, 其中 a,b 是常数.

证明

f 在区间 I 上可微, 故函数

$$F(x)=f(x)-ax,\forall x\in I,$$

也在 I 上可微, 并且 $F'(x)=(f(x)-ax)'=f'(x)-a=0,\forall x\in I$. 故 F 在区间 I 上是一常值函数, 即存在常数 b 使成立 $F(x)=b,\forall x\in I$, 也即 f 在 I 上是一线性函数.

4. 设 I 是正半轴上的一个区间, 函数 f 在 I 上可微且满足 $xf'(x)+af(x)=0,\forall x\in I$, 其中 a 是常数. 证明: 存在常数 C 使成立 $f(x)=Cx^{-a},\forall x\in I$.

证明

f 在 I 上可微, 故函数

$$F(x)=x^af(x),\forall x\in I,$$

也在 I 上可微, 并且 $F'(x)=(x^af(x))'=x^{a-1}(af(x)+xf'(x))=0,\forall x\in I$. 故 F 在区间 I 上是一常值函数, 即存在常数 C 使成立 $F(x)=x^af(x)=C,\forall x\in I$, 也即 $f(x)=Cx^{-a},\forall x\in I$.

5. 设函数 f 在区间 I 上可微. 证明:

(1) 如果 $f'(x) = b\mathrm{e}^{ax}, \forall x \in I$, 其中 a, b 是常数, 则 $f(x) = \dfrac{b}{a}\mathrm{e}^{ax} + c, \forall x \in I$, 其中 c 是常数;

(2) 如果 $f'(x) = af(x) + b, \forall x \in I$, 其中 a, b 是常数, 则 $f(x) = c\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}, \forall x \in I$, 其中 c 是常数.

证明

分别取 I 上的辅助函数 F 和 G 为:

$$F(x) = f(x) - \frac{b}{a}\mathrm{e}^{ax}, \quad G(x) = (f(x) + \frac{b}{a})\mathrm{e}^{-ax}.$$

由 f 在区间 I 上可微知, F 和 G 均在 I 上可微, 并能验证其导数各自均恒为零即得证.

6. 设函数 f 在 $[0, +\infty)$上连续, 在 $(0, +\infty)$ 上可微, 且存在常数 $C > 0$ 使得 $|f'(x)| \leqslant C|f(x)|, \forall x > 0$. 又设 $f(0) = 0$. 证明: $f(x) = 0, \forall x \geqslant 0$.

7. 设函数 f 在区间 I 上可微, 且存在常数 $a > 0$ 使得 $|f'(x)| \leqslant a, \forall x \in I$. 证明: 存在常数 $b > 0$ 使 $|f(x)| \leqslant a|x| + b, \forall x \in I$.

4 一元函数积分学(Riemann积分)

4.1 定积分的基本概念和性质

1. 用定义证明以下函数在任意区间 $[a,b]$ 上Riemann可积且:

   (1) $\displaystyle\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$;

   (2) $\displaystyle\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$;

   (3) $\displaystyle\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin b - \sin a$;

   (4) $\displaystyle\int_a^b \sin x\mathrm{d}x = \cos a - \cos b$.

2. 设 $0 \leqslant a < b$, m 是正整数. 证明:

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}).$$

3. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Hölder 连续, 即存在常数 $0<\mu\leqslant 1$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^{\mu}, \quad \forall x,y\in[a,b].$$

又设存在在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微的函数 F 使 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

证明

对于 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$和相应的介点集 Ξ, 有

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - (F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^n (F(x_k)-F(x_k-1)).$$

对每个小区间 $[x_{k-1},x_k], 1\leqslant k\leqslant n$, $F(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上连续, 在 (x_{k-1},x_k) 上可微, 应用Lagrange中值定理则存在 $\eta_k\in(x_{k-1},x_k), k=1,2,\cdots,n$ 使得

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - (f(b)-f(a))| =&|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\eta_k)\Delta x_k| \\ \leqslant&\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)-f(\eta_k)|\Delta x_k| \\ \leqslant&\sum_{k=1}^n C|\xi_k-\eta_k|^{\mu}\Delta x_i \\ \leqslant&C||\Delta||^{\mu}(b-a).\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{C(b-a)}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, 则当 $||\Delta||<\delta$ 时有

$$|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - (f(b)-f(a))| \leqslant C||\Delta||^{\mu}(b-a) < \varepsilon.$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: $f(x-c)$ 在 $[a+c,b+c]$ 上可积, 且

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 是以 $T>0$ 为周期的周期函数, 且在 $[0,T]$ 上可积. 证明: 对任意实数 $a<b$, f 也在 $[a,b]$ 上可积, 且当 $b-a=nT+c$, 其中 n 是非负整数而 $0\leqslant c<T$ 时, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{a+c} f(x)\mathrm{d}x.$$

特别地,

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且积分值为 I. 在 $[a,b]$ 上任意有限个点处改变函数 $f(x)$ 的值, 得到一个新的函数为 $f^*(x)$. 证明 $f^*(x)$ 也在 $[a,b]$ 上也可积, 且积分值仍为 I.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意有限子区间上可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$. 证明:

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = c.$$

8. 设 f 是以 $T>0$ 为正周期的周期函数, 且在 $[0,T]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 已知当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积时, $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. 据此证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right).$$

10. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, $g(x)$ 满足 $0\leqslant g(x)\leqslant 1, \forall x\in[a,b]$. 令 $\theta=\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 证明:

(1) $\displaystyle\int_{b-\theta}^b [1-g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{b-\theta} g(x)\mathrm{d}x, \int_a^{a+\theta}[1-g(x)]\mathrm{d}x = \int_{a+\theta}^b g(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{b-\theta}^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{a+\theta} f(x)\mathrm{d}x$.

4.2 定积分的计算

1. 利用定积分求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$, f 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln 2$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}n\sin\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\dfrac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)=\displaystyle\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$.

2. 设 f 是连续函数. 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{a}x^3f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x\quad(a>0)$;

(4) $\displaystyle\int_1^{a}f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=a\int_1^{a}f\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\quad(a>1)$.

证明

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (\pi - x)f[\sin(\pi - x)]\mathrm{d}(\pi - x) = \pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x$,
故$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a x^3f(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a x^2f(x^2)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^a f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^a f\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{a}{x}\right) = a\int_1^a f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

3. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数. 证明下述**Hadamard不等式**:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导且二阶导函数有界. 证明:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| + \frac{1}{6}(b-a)^3\sup_{a<x<b}|f''(x)|.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明:

(1) $\left|f(x)\cdot\frac{b-a}{(x-a)(b-x)}\right| \leqslant \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x$;

(2) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0) = 0$, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[0,1]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}
&\left|n\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_0^1 \frac{f(x^n)\mathrm{d}x^n}{x^n - 1} - \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_0^1 \frac{f(x)\sqrt[n]{x}}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_0^1 \frac{f(x)}{x}(\sqrt[n]{x} - 1)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\int_0^1 \left|\frac{fx}{x}\right| |\sqrt[n]{x} - 1|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由于对于任何 $n > 0$, $g(x) = \sqrt[n]{x} - 1$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $g(x_0) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}$. 又由于 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[0,1]$ 上可积, 于是 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ 也在 $[0,1]$ 上可积. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} - 1 = 0$, 故对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得

$$|\sqrt[n]{x_0} - 1| < \frac{\varepsilon}{\int_0^1 \left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x}.$$

从而对于 $\varepsilon > 0$ 和 N, 有

$$\begin{aligned}
&\left|n\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\int_0^1 |\frac{f(x)}{x}|\left|\sqrt[n]{x} - 1\right|\mathrm{d}x \\
\leqslant&|\sqrt[n]{x_0} - 1|\int_0^1 \left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x \\
<&\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$

4.3 连续函数的可积性

1. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且在此区间上不恒等于零. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

证明. 由于非负函数 f 在 $[a,b]$ 上不恒等于零, 故存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) \geqslant 0$, 又由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故存在 $\delta > 0$ 使得$[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$ 且 $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta], f(x) > 0$. 于是有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x = 2\delta f(x) > 0.$$

□

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且存在在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导的函数 F 使得 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$. 不使用 Newton-Leibniz 公式直接证明: f在$[a,b]$上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明. 由微积分基本定理, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}(t) = f(x).$$

于是$\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 又因为 $F(x)$ 也是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数, 于是有

$$\int_a^x f(t)d(t) = F(x) + C, \quad C \text{ 是常数}.$$

在上式中令 $x = a$有 $C = -F(a)$, 再令 $x = b$ 就有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_{x=b} = (F(x) - F(a))|_{x=b} = F(b) - F(a).$$

□

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续. 证明: 对任意 $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ 成立

$$\lim_{h\to 0}\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(\beta) - f(\alpha).$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x =& \frac{1}{h}\left[\int_\alpha^\beta f(x+h)\mathrm{d}x - \int_{alpha}^\beta f(x)\mathrm{d}x\right] \\ =& \frac{1}{h}\left[\int_{\alpha+h}^{\beta+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right] \\ =& \frac{1}{h}\left[\int_\beta^{\beta+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

由于函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 故 $\int_\beta^x f(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t$ 分别在 $[\beta,\beta+h]$ 和 $[\alpha,\alpha+h]$ 上连续且可微. 分别应用Lagrange中值定理, 则存在 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x =& \frac{1}{h}[f(\beta+\theta_1 h)(\beta+h-\beta)-f(\alpha+\theta_2 h)(\alpha+h-\alpha)]\\ =& f(\beta+\theta_1 h)-f(\alpha+\theta_2 h)\to f(\beta)-f(\alpha), \text{当 } h\to 0.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(\beta)-f(\alpha)$. □

4. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微且导函数在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}[f(\pi)-f(-\pi)],$$
$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0.$$

证明. 对每个自然数 n 有

$$\begin{aligned} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi-n\pi}^{2k\pi-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{2(k-1)\pi-n\pi}^{(2k-1)\pi-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x + \int_{(2k-1)\pi-n\pi}^{2k\pi-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\mathrm{d}x\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi-n\pi}^{(2k-1)\pi-n\pi}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x+\pi}{n}\right)\right]\sin x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因为 $\sin x$ 在区间 $[2(k-1)\pi-n\pi,(2k-1)\pi-n\pi]$ 上不变号, 对等号右端的积分应用积分第一中值定理, 存在 $2(k-1)\pi-n\pi\leqslant\xi_k\leqslant(2k-1)\pi-n\pi$ 使得

$$\begin{aligned} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x =& \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]\int_{2(k-1)\pi-n\pi}^{(2k-1)\pi-n\pi}\sin x\mathrm{d}x\\ =&(-1)^n\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\sin x\mathrm{d}x\\ =&(-1)^n\cdot 2\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可微, 由 Lagrange 中值定理知存在 $\frac{\xi_k}{n}<\eta_k<\frac{\xi_k+\pi}{n}$, 即 $\frac{2(k-1)\pi}{n}-\pi<\eta_k<\frac{2k\pi}{n}-\pi$, 使得

$$n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^n\cdot 2\cdot -\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k) = (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k).$$

这是 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上关于 n 等分该区间所得分割的一个积分和. 由 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积就有

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}[f(\pi)-f(-\pi)].$$

同理有

$$\begin{aligned} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x =& \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x = \int_{-n\pi}^{\frac{\pi}{2}-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x\\ &+\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x + \sum_{k=1}\int_{(2k-\frac{3}{2})\pi-n\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

于是因为 $\cos x$ 分别在 $[-n\pi, \frac{\pi}{2}-n\pi]$ 和 $[-\frac{\pi}{2}+n\pi, n\pi]$ 上不变号, 由积分第一中值定理知存在 $\delta \in [-n\pi, \frac{\pi}{2}-n\pi]$ 和 $\sigma \in [-\frac{\pi}{2}+n\pi, n\pi]$, 当 $n\to\infty$ 时, 根据两边夹法则和 f 在区间中可微从而连续以及 Heine 原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\delta) = f(-\pi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sigma) = f(\pi)$, 从而

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{-n\pi}^{\frac{\pi}{2}-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x + \int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} f(\delta)\int_{-n\pi}^{\frac{\pi}{2}-n\pi}\cos x\mathrm{d}x + f(\sigma)\int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{n\pi}\cos x\mathrm{d}x\\
=&(-1)^n[f(-\pi)-f(\pi)].
\end{aligned}$$

类似地也存在 $(2k-\frac{3}{2})\pi - n\pi \leqslant \xi_k \leqslant (2k-\frac{1}{2})\pi - n\pi$ 和 $\frac{2(k-1)}{n}\pi - \pi < \frac{4k-3}{2n}\pi - \pi < \eta_k < \frac{4k-1}{2n}\pi - \pi < \frac{2k}{n}\pi - \pi$ 使得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}\int_{(2k-\frac{3}{2})\pi-n\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi-n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\mathrm{d}x =& \sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-\frac{3}{2})\pi-n\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi-n\pi}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x+\pi}{n}\right)\right]\cos x\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]\int_{(2k-\frac{3}{2})\pi-n\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi-n\pi}\cos x\mathrm{d}x\\
=&(-1)^{(n-1)}\cdot(-2)\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]\\
=&(-1)^n\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1} f'(\eta_k)\\
\to&(-1)^n\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x(n\to\infty)\\
=&(-1)^n[f(\pi)-f(-\pi)].
\end{aligned}$$

相加就有 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0.$ □

5. 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数连续. 证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x\in[a,b].$$

证明:

(1) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上**Lipschiz 连续**, 即存在常数 $C>0$ 使成立

$$|F(x)-F(y)| \leqslant C|x-y|, \quad \forall x,y\in[a,b];$$

(2) 对任意使 $f(x)$ 存在右极限 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 的点 $x_0\in[a,b)$, $F(x)$ 在 x_0 点有右导数, 且 $F'_+(x_0) = f(x_0^+)$; 对任意使 $f(x)$ 存在左极限 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 的点 $x_0\in(a,b]$, $F(x)$ 在 x_0 点有左导数, 且 $F'_-(x_0) = f(x_0^-)$;

(3) $F(x)$ 在点 $x_0 \in (a,b)$ 可微当且仅当 $f(x)$ 在点 x_0 连续或 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点. 这时 $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. 特别当 $f(x)$ 在点 x_0 连续时有 $F'(x_0) = f(x_0)$.

4.4 函数的可积性理论

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: 函数 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明

对于 $[a,b]$ 的任意分割 Δ, 由 f 在 $[a,b]$ 上可积可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$使得当$||\Delta||<\delta$时有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon.$$

注意到

$$\omega_k(|f|)=\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}||f(x)|-|f(y)||\leqslant\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}|f(x)-f(y)|=\omega_k(f).$$

于是当 $||\Delta||<\delta$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(|f|)\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon.$$

故 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

2. (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积. 证明: 函数 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 和 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也都在 $[a,b]$ 上可积.

证明

对于 $\forall x\in[a,b]$,

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

由于 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积, 故 $f+g$, $|f-g|$ 以及 $\dfrac{f+g\pm|f-g|}{2}$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 于是 $M(x)$ 和 $m(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 对任意函数 $f(x)$, 令

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f_-(x)=\min\{f(x),0\},$$

他们分别叫做 $f(x)$ 的**正部**和**负部**, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积.

证明

必要性. 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时, 由(1)可知 $f_+=\max\{f,0\}$ 和 $f_-=\min\{f,0\}$ 都在 $[a,b]$ 上可积.

充分性. 设 f_+ 和 f_- 都在 $[a,b]$ 上可积, 则当 $f(x)>0$ 时, $f_+(x)=f(x),f_-(x)=0$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: $f(x)$ 可以写成两个单调递增的连续函数之差.

证明

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故有

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

对于 $f'(x)$ 有 $f'(x)=f'_+(x)+f'_-(x)=f'_+(x)-[-f'_+(x)]$. 其中$f'_+,f'_-$ 是 f' 的正部和负部, 由上题可知 $f'_+(x)$, $-f'_-(x)$ 均在 $[a,b]$ 上非负可积, 于是

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f'_+(t)\mathrm{d}t-\int_a^x -f'_-(t)\mathrm{d}t,\quad x\geqslant a.$$

是两个非负连续函数之差, 其中非负性由 f'_+,f'_- 的非负性立得, 连续性由可积函数的原函数 Lipschiz 连续从而连续即得.

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 值域含于 $[\alpha,\beta]$. 又设 f 是 $[\alpha,\beta]$ 上的可积函数. 假设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多只有限次改变增减性, 且在任何区间上都不恒取常值. 证明复合函数 $f\circ\varphi$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

证明. 先证明当 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调时, $f(\varphi(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

不妨假设 $\varphi(x)$ 严格单增. 由于 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 对于任意的分割 $\pi:\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得只要 $||\pi||=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\varphi_k-\varphi_{k-1}\}<\delta$ 就有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta\varphi_i<\varepsilon.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续从而一致连续, 于是对于 $\delta>0$, 存在 $\xi>0$ 使得对于任意 $x,y\in[a,b]$, 只要 $|x-y|<\xi$ 就有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\delta$. 对于 $[\alpha,\beta]$, 按照如下方法取一个相应的 $[a,b]$ 的分割. 对于每个 φ_k, 由于 $\varphi(x)$ 严格单调故有反函数, 取 $x_k=\varphi^{-1}(\varphi_k)$, 并且由于 $\varphi(x)$ 严格单增, $\varphi(a)=\alpha,\varphi(b)=\beta$, 如果这个分割的模大于 $\psi=\min\{\delta,\xi\}$, 则再添加一些分点(并按照顺序重新编号)形成分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$, 于是 $||\Delta||\leqslant||\pi||<\delta$. 记分割 $\pi_\Delta=\{x\in\Delta|\varphi(x)\}$ 的每个点为 φ_k^{Δ}, 则

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k(f\circ\varphi)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m}\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}|f(\varphi(x))-f(\varphi(y))|\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m}\sup_{x,y\in[\varphi_{k-1}^{\Delta},\varphi_k^{\Delta}]}|f(x)-f(y)|\Delta x_k.$$

即 $f\circ\varphi$ 在 $[a,b]$ 上可积. □

4. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 使

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

证明. 必要性由 Daurbox 准则的 II 立得.
充分性. 为了证明 $\lim\limits_{||\Delta||\to 0}\sum_k=1^n\omega_k(f)\Delta x_k=0$, 由于左边极限始终存在, 于是只需证明存在一个分割序列 $||\Delta_m||$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}||\Delta_m||=0$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty}\sum_k=1^{n_m}\omega_k^m(f)\Delta x_k^{(m)}=0$. 事实上, 取 $\Delta_1=\Delta$, 对于任意正整数 m, Δ_m取为在 Δ_{m-1} 的相邻的每对分点之间添加其中点形成的分割, 则显然 $\lim\limits_{m\to\infty}||\Delta_m||=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{||\Delta||}{2^{m-1}}=0$.
对于任意正整数 m, 由于$\omega_k^m(f)\leqslant\omega_{c_k}(f),k=1,2,\cdots,n^m,c_k=\lceil k/2^{m-1}\rceil$, 故有

$$\sum_{k=1}^{n_m}\omega_k^m(f)\Delta x_k^{(m)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_m}\omega_k^m(f)\Delta x_k^{(m)}=0.$$

于是由 Daurbox 准则的 II 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. □

5. 设 $f(x)$ 是定义在半开闭区间 $(a,b]$ 上的函数, 它在该区间上有界, 且对任意充分小的 $\sigma>0$, $f(x)$ 在 $[a+\sigma,b]$ 上可积. 证明: 任意补充 $f(x)$ 在区间端点处的值, 所得函数 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{a+\sigma}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f^*(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 由于 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界, 任意补充端点的值得到 $f^*(x)$ 也在 $[a,b]$ 上有界, 设其为 M. 为证明 $f^*(x)$ 可积, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{4M+1}$, 由于 $f(x)$ 在 $[a+\sigma,b]$ 上可积, 故存在一个$[a+\sigma,b]$ 的分割 Δ' 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k'(f)\Delta' x_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 在 Δ' 中添加一分点 a 并重新对全部分点编号, 得到分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, 这里有 $x_1 = a+\sigma$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\omega_k(f)\Delta x_k = \omega_1(f)\sigma + \sum_{k=1}^{n}\omega_k'(f)\Delta' x_k \leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M+1}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

故 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

为证明 $\lim\limits_{\sigma\to0^+}\displaystyle\int_{a+\sigma}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^*(x)\mathrm{d}x$, 对于任意的 $\eta>0$, 取 $\delta = \dfrac{\eta}{M} > 0$, 则当 $0<\sigma<\delta$ 时,

$$\int_a^b f^*(x)\mathrm{d}x - \int_{a+\sigma}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+\sigma} f^*(x)\mathrm{d}x \leqslant M\sigma < \eta,$$

即

$$\lim_{\sigma\to0^+}\int_{a+\sigma}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^*(x)\mathrm{d}x.$$

□

6. 证明: 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon'>0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得振幅 $\omega_i(f)\geqslant\varepsilon$ 的那些小区间的长度总和

$$\sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i < \varepsilon'.$$

证明. 充分性. 对于任意给定的 $\xi>0$, 取 $\varepsilon' = \dfrac{\xi}{4M}, \varepsilon = \dfrac{\xi}{2(b-a)}$, 其中 M 是函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上的界, 即 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[a,b]$, 从而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{\omega_i(f)<\varepsilon}\omega_i(f)\Delta x_i \leqslant 2M\cdot\sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i + (b-a)\varepsilon < 2M\varepsilon' + (b-a)\varepsilon = \xi.$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

必要性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 则对于 $\xi = \varepsilon\varepsilon' > 0$, 存在分割 Δ 使得

$$\varepsilon\sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i \leqslant \sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \xi = \varepsilon\varepsilon'.$$

即 $\sum\limits_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i < \varepsilon'$. □

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 值域含于区间 $[\alpha,\beta]$. 又设 g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. 证明: 复合函数 $g(f(x))$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明. g 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续从而一致连续, 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使对于任意 $x,y\in[\alpha,\beta]$ 只要满足 $|x-y|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 对于此 $\delta>0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故对于任意 $\xi>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 Δ 使成立

$$\sum_{\omega_i(f)\geqslant\delta}\Delta x_i < \xi.$$

于是

$$\sum_{\omega_i(g\circ f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i = (b-a) - \sum_{\omega_i(g\circ f)<\varepsilon}\Delta x_i \leqslant (b-a) - \sum_{\omega_i(f)<\delta}\Delta x_i = \sum_{\omega_i(f)\geqslant\delta}\Delta x_i < \xi.$$

即 $g(f(x))$ 也在 $[a,b]$ 上可积. □

8. 设定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 满足以下条件: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的有限个子区间, 其长度的总和小于 ε, 使 f 在 $[a,b]$ 去掉这有限个子区间之后剩下的每个小区间上都连续, 证明: f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明. 设 f 有界 M, 即 $|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[a,b]$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $I_1,I_2,\cdots,I_m\subseteq[a,b]$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}|I_i|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, 并且若记 $I=\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$, 有 f 在 $[a,b]\backslash I$ 上连续. 因此 f 在 $[b-a]\backslash I$ (是 $(m+1)$ 个不连通子区间) 上可积, 从而存在关于这 $(m+1)$ 个小区间上的分割 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{m+1}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{l_n}\omega_k(f)\Delta x_k^{(l)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2(m+1)},\quad l=1,2,\cdots,m-1.$$

对于 $[a,b]$ 做分割 $\bigcup_{k=1}^{m+1}\cup a,b$, 并将全部割点重新编号记为 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=\sum_{[x_{k-1},x_k]\subseteq I}\omega_k(f)\Delta x_k+\sum_{[x_{k-1},x_k]\nsubseteq I}\omega_k(f)\Delta x_k<2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2(m+1)}\cdot(m+1)=\varepsilon.$$

故 f 在 $[a,b]$ 上可积. $\square$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: $f(x)$ 具有积分的连续性, 即对任意 $x\in[a,b]$ 成立

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

这里假定 $x\notin[a,b]$ 时 $f(x)=0$.

证明. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故等式左边的积分有意义. 为证明等式, 将区间 n 等分, 取 $\xi_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}, k=1,2,\cdots,n$. 由 f 可积性, 对于任意的 $\varepsilon>0$和 $[a,b]$的等分分割, 当 $\dfrac{b-a}{n}<\delta$ 时有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由定积分定义, 对于$\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $\dfrac{b-a}{n}<\delta'$ 时$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}|f(\xi_k+h)-f(\xi_k)|\Delta x_k-\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$, 故当 $|h|<\dfrac{b-a}{2n}<\min\{\delta,\delta'\}$ 时,

$$0\leqslant\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k+h)-f(\xi_k)|\Delta x_k+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$ $\square$

4.5 广义积分

5 无穷级数

6 函数级数

6.1 函数列的一致收敛

1. 证明函数序列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的充要条件是存在收敛于零的正数列 $\varepsilon_n(n=1,2,\cdots)$ 使成立

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant \varepsilon_n, \forall x\in I, n=1,2,\cdots.$$

证明. 必要性. 令 $\varepsilon_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, 则对于任意的正整数 n 和 $x\in I$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n$. 由 f_n 一致收敛的充要条件, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)|=0$.

充分性. 若存在这样的 $\{\varepsilon_n\}$, 则对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 知存在正整数 N使对于 $n>N$ 有 $\varepsilon_n<\varepsilon$, 从而对于 $n>N$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n<\varepsilon, \forall x\in I.$$

即 f_n 在 I 上一致收敛于 f. □

2. 证明 $f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是存在点列 $x_n\in I(n=1,2,\cdots)$ 使当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0$.

证明. 必要性. $f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$, 即存在 $\varepsilon>0$, 对于任意的 $N>0$, 存在 $n>N$ 和 $x\in I$ 使得 $|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$. 下面取一个 I 中的点列.

取 $N_1=1$, 则存在 $n_1>1$ 和 $x_{n_1}\in I$ 使得 $|f_{n_1}(x_{n_1})-f(x_{n_1})|\geqslant\varepsilon$;

取 $N_2=n_1$, 则存在 $n_2>n_1$ 和 $x_{n_2}\in I$ 使得 $|f_{n_2}(x_{n_2})-f(x_{n_2})|\geqslant\varepsilon$;

... ...

以此类推, 归纳地可以取一个单调递增数列 $\{n_k\}$. 对于 $n\neq n_k, k=1,2,\cdots$, 任取 $x_n\in I$, 由此可以得到一个 I 中数列 $\{x_n\}$ 并且有子数列 $\{x_{n_k}\}$使得 $|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon$, 从而 $f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0$.

充分性. 若存在这样的 $\{x_n\}$, 则存在 $\varepsilon>0$, 对于任意的 $N>0$, 存在 $n>N$ 使得 $|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon$, 由于对于每个正整数 n 都有 $x_n\in I$, 即存在 $n>N$ 和 $x\in I$ 使得 $|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$(每个 x_n 都符合), 即 $f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$. □

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 都在 I 上一致收敛, 且对每个 n, $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都是 I 上的有界函数. 证明: $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 设 $\{f_n\}$ 一致收敛到 f, $\{g_n\}$ 一致收敛到 g. 故对于$\varepsilon=1$, 存在 N_1 当 $n>N_1$ 时对于所有 $x\in I$ 有 $|f(x)-f_n(x)|<1$. 取定 n 后由于 $f_n(x)$ 在 I 上有界, 故存在 $M'>0$ 使对于所有 $x\in I$ 有 $|f_n(x)|\leqslant M'$, 从而对于所有 $x\in I$ 有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)|<1+M'.$$

即 f 也是 I 上有界函数. 再次用 $n>N_1$ 时对于所有 $x\in I$ 有 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant 1$, 则当 $n>N_1$ 时,

$$|f_n(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|<1+1+M', \forall x\in I.$$

从而取 $M_f=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N_1},2+M'\}$, 则 M 是全体 $\{f_n\}$ 公共的上界. 同理存在 M_g 是全体 $\{g_n\}$ 公共的上界. 对于任意的 ε, 由一致收敛的 Cauchy 准则, 存在 N_2,N_3 当 $m,n>N_2$ 时对于所有 $x\in I$ 有 $|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2M_g}$, 当 $m,n>N_3$ 时对于所有的 $x\in I$ 有 $|g_m(x)-g_n(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2M_f}$. 取 $N=\max\{N_2,N_3\}$, 则当 $m,n>N$ 时对于所有 $x\in I$ 有

$$|f_m(x)g_m(x)-f_n(x)g_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f_n(x)||g_m(x)|+|f_n(x)||g_m(x)-g_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2M_g}M_g+M_f\frac{\varepsilon}{2M_f}=\varepsilon.$$

从而由一致收敛的 Cauchy 准则知 $\{f_ng_n\}$ 在 I 上一致收敛. □

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$, 且对于每个 n, $f_n(x)$ 都是 I 上的有界函数, 值域含于闭区间 J. 又设 $g(x)$ 是 J 上的连续函数. 证明: $\{g(f_n(x))\}$ 在 I 上一致收敛于函数 $g(f(x))$.

证明. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由 g 在 J 上连续, 从而一致连续可知, 存在 $\delta > 0$ 使对于任意 $x, y \in J$, 只要 $|x-y| < \delta$, 就有 $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. 对于这个 $\delta > 0$, 由 f_n 在 I 上一致收敛于 f 可知存在 N 当 $n > N$ 时对于所有 $x \in I$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta$. 对于每个 n, $f_n(x)$ 是 I 上的有界函数, 值域含于闭区间 $J = [a, b]$, 即对于每个 n,

$$a \leqslant f_n(x) \leqslant b, \forall x \in I.$$

由 f_n 一致收敛于 f, 从而 f_n 也逐点收敛到 f, 对于每个 $x \in I$, 在上式中令 $n \to \infty$, 则

$$a \leqslant f(x) \leqslant b, \forall x \in I.$$

即对于任意的 n, f_n 和 f在 I 上的值域都含于 J. 从而当 $n > N$ 时对于所有 $x \in I$, $f_n(x), f(x) \in J$ 且 $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, 于是

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

即 $g_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $g(f(x))$. □

5. 设存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 使成立

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant M_n, \forall x \in I, n = 1, 2, \cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由级数收敛的 Cauchy 法则, 存在 $N > 0$ 使对于 $n > N$ 和任意 p 有 $\sum_{k=1}^{p} M_{n+k} < \varepsilon$. 对于任意的 $m, n > N$ (不妨设 $m > n$, 否则交换 m, n) 有

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k - f_{k-1}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \sum_{k=1}^{m-n} M_k < \varepsilon, \forall x \in I.$$

于是由一致收敛的 Cauchy 准则知, f_n 在 I 上一致收敛. □

6. 设 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上逐点收敛于函数 $f(x)$, 且存在 $M > 0$ 和 $0 < \alpha \leqslant 1$ 使成立

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in I, n = 1, 2, \cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 任取 $x_0 \in I$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta < \sqrt[\alpha]{\dfrac{\varepsilon}{3M}}$, 则对于任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant M|x - x_0|^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

在上面不等式中令 $n \to \infty$, 则有 $|f(x_0) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ 知存在 N 使得当 $n > N$ 时有 $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是当 $n > N$ 时对于任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即 f_n 在 x_0 附近局部一致收敛于 f. 由 x_0 任意性, f_n 在 I 上一致收敛于 f. □

7. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a, b]$ 上的一列单调函数, 且在 $[a, b]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 任取 $x_0 \in I$, 由于 f 在 I 上连续, 特别在 x_0 连续, 故存在 $\delta > 0$ 使对于满足 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in I$ 均有 $|f(x_0) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 对于每个 n, 由于 $f_n(x)$ 是I 上的单调函数, 特别在 $I_{x_0} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I$ 上单调从而可积, 将 I_{x_0} 分为 m 份使得 $\dfrac{b-a}{m+1} < \delta < \dfrac{b-a}{m}$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\Delta x_k < \dfrac{\delta\varepsilon}{3}$, 从而对于 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in I$ 有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)|\delta \leqslant \omega(f_n)\delta = \sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\delta < \frac{\delta\varepsilon}{3}.$$

即 $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 由于 f_n 在 I 上逐点收敛于 f, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 即存在 N 使对于 $n > N$ 有 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是当 $n > N$ 时对于 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in I$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即 f_n 在 x_0 附近局部一致收敛于 f. 由 x_0 任意性, f_n 在 I 上一致收敛于 f. □

8. 设对每个正整数 n, 函数 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界. 又设当 $n \to \infty$ 时, $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$. 证明:

(1) 极限函数 $f(x)$ 在 I 上有界;

(2) 函数序列 $f_n(x)(n = 1, 2 \cdots)$ 在 I 上一致有界, 即存在 $M > 0$ 使对所有 n 都有

$$|f_n(x) \leqslant M, \forall x \in I.$$

证明. 对于$\varepsilon = 1$, 由于 f_n 在 I 上一致收敛于 f, 存在 N 当 $n > N$ 时对于所有 $x \in I$ 有 $|f(x) - f_n(x)| < 1$. 取定 n, 由于 $f_n(x)$ 在 I 上有界, 故存在 $M' > 0$ 使对于所有 $x \in I$ 有 $|f_n(x)| \leqslant M$, 从而对于所有 $x \in I$ 有

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M'.$$

即 f 也是 I 上有界函数. 再次用 f 在 I 上一致收敛于 f, $n > N$ 时对于所有 $x \in I$ 有 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1$, 则当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| < 1 + 1 + M', \forall x \in I.$$

从而取 $M_f = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_{N_1}, 2 + M'\}$, 则对于所有 n 都有

$$|f_n(x) \leqslant M, \forall x \in I.$$

即 f_n 在 I 上一致有界. □

9. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 且在左端点 0 处右连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} f(0).$$

6.2 Weierstrass 逼近定理和 Arzelà-Ascoli 定理

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots$. 证明: $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

证明. 设 $f(x) \not\equiv 0$, 即存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 不妨设为 $f(x_0) > 0$. 则由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续知, 存在 $\delta > 0$ 使得任意 $x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0,1], f(x)x^n > 0$.

$$\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x \geqslant \int_I f(x)x^n\mathrm{d}x > 0.$$

与 $\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x > 0$ 矛盾, 故 $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. □

7 重积分

1. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D xy(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=[a,b]\times[c,d]$;

(2) $\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=[0,a]\times[0,b]$;

(3) $\iint\limits_D \dfrac{x}{1+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=[0,1]\times[0,1]$;

证明. (1)

(2)

(3) $\iint\limits_D \dfrac{x}{1+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{x}{1+xy}\mathrm{d}y = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \ln 4 - 1.$

(4) $\iint\limits_D \sin x\sin y\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \sin^2 x\sin y\cos y - \sin x\cos x\sin^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x\sin y\cos y - \sin x\cos x\sin^2 y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\sin^2 x - \dfrac{\pi}{4}\cos x\sin x\right)\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x = 0$

□