浙江大学攻读硕士学位
研究生入学考试业务课试题

[819] 数学分析

浙江大学二〇〇八年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一三年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析
浙江大学二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析

浙江大学攻读硕士学位
研究生入学考试业务课试题

[601] 高等代数

浙 江 大 学

二〇〇八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (20分)

   (a) 证明: 当 $t \neq 0$ 时,
$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cdots\cos\frac{t}{2^n} = \frac{\sin t}{t}.$$

   (b) 利用上式证明等式:
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

2. (15分) 设 $f(x)$ 为实轴上的连续函数, 在原点处可导, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=5$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$.

3. (15分) 讨论下面级数的收敛性:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}.$$

4. (15分) 证明函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在正数 M, 使得当 $x, y\in I, x\neq y$ 且 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > M$ 时, 成立 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5. (20分) 证明: $f(x) =_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内连续, 但不一致连续.

6. (15分) 计算第二类曲面积分 $\displaystyle\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$.

7. (15分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, & x,y\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{elsewhere},\end{cases}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域, $\alpha>0$. 试问:

   (a) $f(x,y)$ 在原点处是否连续? 是否可微? 并请证明你的结论.

(b) 讨论 $f(x,y)$ 在其他点处的连续可微情况, 并说明理由.

8. (15分) 设 f 是连续函数, 证明:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\mathrm{d}u,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

9. (15分) 设 $f(x),g(x)$ 均为数轴上的连续函数, 且满足 $g(x+1)=g(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x = (\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x).$$

浙 江 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算题(每小题10分，共40分)

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x(ab \neq 0)$,

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\cos t\mathrm{d}t - x}{(e^x-1)^2(1-cos^2x)\arctan x}$,

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

   (d) $\displaystyle\iint_D (x+y)\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

2. (15分) 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内可导, 且 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\frac{1}{2}$. 证明: $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值.

3. (15分) 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点 $O(0,0,0)$ 到椭球面 $\Sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 上点 $p(x,y,z)$ 处的切平面的距离. 求第一类曲面积分 $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}s}{f(x,y,z)}$.

4. (20分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\displaystyle\min_{x\in[a,b]} f(x)=1$. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right)\frac{1}{n}=1$.

5. (20分) 设对任意 $a>0$, $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上黎曼可积, 且 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=C$. 证明:

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = C.$$

6. (20分) 证明 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(0,1)$ 上与 $(-1,0)$ 上均一致连续, 但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 中不一致连续. (注: 称 $y=f(x)$ 在集合 $D(D\subset\mathbb{R})$ 上一致连续是指: 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall x',x''\in D$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.)

7. (20分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降, 且 $f'(b) > 0$. 证明: $|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{2}{f'(b)}$.

浙 江 大 学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列极限和积分(60分，每小题10分)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$;

(b) $\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} y\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x - x(1-x)}{\sin^3 x}$;

(d) 计算 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是 三角形$\{(x,y,z): x,y,z\geqslant 0, x+y+z=1\}$, 其法方向与 $(1,1,1)$ 相同.

(e) $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

(f) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. (15分) 设$a_n=\sin a_{n-1}, n\geqslant 2$, 且 $a_1>0$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}a_n$.

3. (15分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, n 为奇数. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}=1$, 则方程 $f(x)+x^n=0$ 有实根.

4. (20分) 证明: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛(其中 $\delta>0$).

5. (20分) 设 $f(x)$ 连续, 证明 Poisson 公式:

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\mathrm{d}t.$$

6. (20分) 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}, \{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 为实数数列, 满足 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=\infty$; (2) $\left\{\dfrac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right\}_{n\geqslant 1}$ 有界. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 也存在.

浙 江 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算题(60分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

   (b) $\iint_{[0,2]\times[0,2]}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $[\alpha]$ 表示 α 的整数部分.

   (c) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{sinxy}{y}\mathrm{d}y, x>0$, 求 $F'(x)$.

   (d) 计算 $\iint_{\Omega}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 这六个平面所围立方体表面, 正法方向为立方体表面外侧.

   (e) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

   (f) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

2. (15分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 试证: $f(x,y)$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 偏导数 ${f'}_x(x,y),{f'}_y(x,y)$ 有界, $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不可微.

3. (15分) 设 $f(x)$ 是 $[a,a+1]$ (a 为常数) 上的连续正值函数, 记 $M=\max\limits_{x\in[a,a+1]}f(x)$. 证明: $A_n=\sqrt[n]{\displaystyle\int_a^{a+1}[f(x)]^n\mathrm{d}x}$ 关于 n 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\displaystyle\int_a^{a+1}[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$.

4. (15分) 设 $\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y=1$, 其中 $\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$.

5. (15分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的收敛性和一致收敛性.

6. (15分) 设 a_1, b_1 为任意选定的实数, a_n 和 b_n 定义为:

$$\begin{cases} a_n = \int_0^1 \max\{b_{n-1}, x\}\mathrm{d}x, & n = 2, 3, \cdots \\ b_n = \int_0^1 \min\{a_{n-1}, x\}\mathrm{d}x, & n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}-1$.

7. (15分) 证明: 设 $a_1 \in (0,1)$, 且 $a_{n+1} = a_n(1-a_n), n \geqslant 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = 1$.

浙 江 大 学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (15分) 设 n 为正整数, $f_n(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \cos xt\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R}$. 证明: $x^2 f_n(x) = 2n(2n-1)f_{n-1}(x) - 4n(n-1)f_{n-2}(x), n \geqslant 2$.

2. (15分) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且对任意
$$x, y \in [0,1], f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(1/2)$.

3. (20分) 设实数 λ, $|\lambda| < 1$, 求 $f(\lambda) = \int_0^\pi \ln(1+\lambda\cos x)\mathrm{d}x$.

4. (20分) 设函数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $a_i (i \geqslant 0)$ 为实数, 且对充分大的 x 有 $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充要条件是 $a_0 = a_1 = 0$.

5. (20分) 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时, 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 数列. 证明: 函数 f 在有界区间 A 上一致收敛的充要条件是对 A 中任意 Cauchy 数列 $\{x_n\}$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 数列.

6. (30分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内有连续的一阶导数, 且
$$f'(0) = 0, f''(0) = 1.$$
求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$.

7. (30分) 设实数 $\lambda > -4$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{\lambda}{2}, x_{n+1} = x_1 + \frac{x_n^2}{2}, n \geqslant 1$. 试讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

浙 江 大 学

二〇一三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos 4\theta}{1+\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$.

   (c) 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\sqrt{3},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (d) 设 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

2. (10分) 论证是否存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数使得 $f(f(x))=e^{-x}$.

3. (15分) 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^x}$ 的收敛性与一致收敛性.

4. 证明:

   (a) (5分) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

   (b) (10分) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^n\mathrm{d}x=0$.

5. (a) (5分) 构造一个在闭区间 $[-1,1]$ 上处处可微的函数, 使得他的导函数在 $[-1,1]$ 上无界.

   (b) (15分) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 证明存在 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ 使得 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界.

6. (15分) 设二元函数 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近存在, 且 $f_{xy}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 证明: $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

7. (20分) 已知对于实数 $n \geqslant 2$, 有公式 $\sum\limits_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$, 其中求和是对于所有不超过 n 的素数 p 求和. 求证:

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = C + \ln\ln n + O(\frac{1}{\ln n}),$$

其中求和也是对于所有不超过 n 的素数 p 求和, C 是某个与 n 无关的常数.

浙 江 大 学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{x-1}{2}}-\sqrt{x}}{\ln^2(2x-1)}$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1-t)^{2013}}\,dt$.

   (c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}\,dx dy$.

   (d) $\displaystyle\iint\limits_{S} x^3\,dy dz+y^3\,dz dx+z^3\,dx dy$, 其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半球面下侧.

2. ([redacted]分)

   (a) 用闭区间套定理证明有限覆盖定理;

   (b) 用有限覆盖定理证明: 对 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$, $f(x)>0$, 则存在常数 c, 使得 $f(x)\geqslant c$.

3. ([redacted]分) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 求满足条件的 α, 使得 f 在原点满足:

   (a) 连续;

   (b) 可微;

   (c) 方向导数存在.

4. ([redacted]分) 和函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}, x\in[0,1]$. 证明其对 x 一致收敛, 并分析其连续性, 可积性和可微性.

5. ([redacted]分) $f(x)$ 可微, 则 $f'(x)$ 可积的充要条件是: 存在可积函数 $g(x)$, 使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,d(t).$$

6. ([redacted]分) 空间体积为 V 的 Ω, $X_0 \in \Omega$, $0 < a < 3$, 证明:

$$\int\limits_{\Omega} |X - X_0|^{a-3}\,\mathrm{d}X \leqslant CV^{\frac{a}{3}},$$

其中, C 与 a 有关.

7. ([redacted]分) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单增, 证明:

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^1 f(x)\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0^+).$$

8. ([redacted]分) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\xi > 0$, 序列 $\{f(n\xi)\}$ 极限存在, 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

浙 江 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+n)}{(n^{-}1)(n^2-2)\cdots(n^2-n)}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}$.

   (c) $I(r)=\displaystyle\oint_L \frac{y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中曲线方程为 $x^2+y^2+xy=r^2$, 取正向, 求 $\lim\limits_{r\to\infty} I(r)$.

   (d) $\displaystyle\int_{e^{-2n\pi}}^{0}\sin\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. ([redacted]分)考察黎曼函数的连续性, 可微性, 黎曼可积性.

3. ([redacted]分) 在 $\mathbb{R}^n$ 中, f 定义为在某个区域上的一个函数, 有一阶连续偏导, 且偏导数有界. 证明:

   (a) 若 D 为凸区域, 证明 f 一致连续;

   (b) 考查 D 不是凸区域的情况.

4. ([redacted]分) $\{f_n\}$ 为一个连续函数列, 且对任意给定的 x, $\{f_n(x)\}$ 有界, 证明存在一个小区间, 在此区间内, $\{f_n\}$ 一致有界.

5. ([redacted]分)

   (a) 证明 $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无穷次可微;

   (b) 证明 $\Gamma(s),\ln(\Gamma)$ 都是严格凸函数.

6. ([redacted]分) f 二阶可微, 且 f,f',f'' 都大于等于零, 且存在一个正数 c, $f''(x)\leqslant cf(x)$. 证明:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

(b) 存在一个正数 a, 有 $f < af'$, 并求出 a.

7. ([redacted]分) 证明 Fejer 定理.

8. ([redacted]分) 设 f 在 $[A,B]$ 上 Riemann 可积, $0 < f < 1$, 对任意 $\varepsilon > 0$ 构造一个函数 g 使得

(a) g 是一个阶梯函数, 且取值只能为 0 或 1;

(b) $|\int_a^b f\,\mathrm{d}x - \int_a^b g\mathrm{d}x| < \varepsilon$, $[a,b] \subset [A,B]$, 不等号关于 $[a,b]$ 是一致的.

浙 江 大 学

二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列各题(40分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{(\cos x-1)\ln(1-2x)}$.

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

   (d) $\displaystyle\iint\limits_D x(1+y\mathrm{e}^{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为由曲线 $y=x^3, x=-1, y=1$ 围成的区域.

2. (20分，每小题10分)

   (a) 设 A,B 为非空数集, 记 $E=A\cup B$. 证明: $\sup E=\max\{\sup A,\sup B\}$.

   (b) 若 $x_n>0$, 且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. (15分) 利用有限覆盖定理证明: 有界数列必有收敛子列.

4. (15分) 设$f(x)$ 定义在 (a,b) 上, 证明: 若对 (a,b) 内任一收敛点列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

5. (15分)设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续非负函数, $I(x):=\displaystyle\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明: $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

6. (15分) 求周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 其中当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时, $f(x)=x^3$, 并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和.

7. (15分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数, 记 $A=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 试证明:

$$\int_a^b [f(x)-A]^2\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

8. (15分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续, $K(x,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续. 构造函数列如下: $f_0(x)=\varphi(x), f_n(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$. 试证明: 当 $|\lambda|$ 足够小时, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于一连续函数.

浙 江 大 学

二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列各题(40分，每小题10分)

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

   (b) $\int\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

   (c) $\int\limits_{x^2+4y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (d) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-x, x\in[0,\pi]$, 将 $f(x)$ 展开成余弦级数.

2. (10分) 利用 ε-N 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n+\dfrac{1}{n}\right)$ 不存在.

3. (10分) 求 $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ 在区域 $|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

4. (15分)

   (a) 叙述有限覆盖定理;

   (b) 利用有限覆盖定理证明上确界存在定理.

5. (15分) $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调, $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$ 且 $f(x)=o(\dfrac{1}{x})(x\to+\infty)$.

6. (15分) 对一切 n 与一切实数 x, 有 $\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}|x|^k\right|\leqslant\dfrac{1}{(2n+2)!}|x|^{n+1}$, 求 $f(x)$ 的解析表达式, 证明在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)$ 一致连续.

7. (15分) 讨论含参变量积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 的一致收敛区间.

8. (15分) $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上连续, $f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$. 证明 $x(x) \equiv 0 (x \in \mathbb{R})$.

9. (15分) 对数列 $\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = A < B \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 证明 $\{x_n\}$ 的聚点全体恰好构成了 $[A, B]$.

浙 江 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分；用 E 表示单位矩阵，矩阵 A 的转置矩阵表示为 A^T.

1. 如果 $(x^2+x+1)|(f_1(x^3)+xf_2(x^3))$, 且 n 阶方阵 A 有一个特征值等于 1, 证明 $f_1(A), f_2(A)$ 都不是可逆矩阵.

2. 解下列方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=6, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=10, \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=18, \\ x_1^4+x_2^4+x_4^4+x_4^4=34. \end{cases}$

3. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 当 $n>2$ 时, 证明 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^TA=E$, $|A|=-1$, 证明 $A+E$ 不是可逆矩阵.

5. 设 $e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^T, i=1,2,\cdots,n$是欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 的常用基, 一个矩阵 P 被称为置换矩阵如果存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列阶 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 使得矩阵 $P=(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$, 例如 $\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$ 就是一个四阶置换矩阵. 假如 n 方阵 A 的秩等于 r, 证明存在置换矩阵 P 使得 $PAP=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 的秩等于 r.

6. 设 $V=\{a+bx+cx^2|a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 是实数域上三维线性空间, 定义 $\mathbf{T}(f(x))=2f(x)+xf'(x)$, 证明 $\mathbf{T}$ 是 V 上的线性变换, 并求其特征值和特征向量.

7. 设 B 是实数域上 $n\times n$ 矩阵, $A=B^TB$, 对任意一个大于零的常数 a, 证明 $(\alpha,\beta)=\alpha^T(A+aE)\beta$ 定义了 $mathbbR^n$ 一个内积使得 $\mathbb{R}^n$ 成为欧式空间. 其中 α^T 表示列向量 α 的转置, E 表示 $n\times n$ 单位矩阵.

8. 试证明满足 $A^m = E_n$ 的 n 阶方阵 A 都相似于一个对角矩阵.

9. 假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是半正定矩阵, 证明满足 $X^TAX = 0$ 的所有 X 组成 $\mathbb{R}^n$ 的 $n - r(A)$ 维子空间.

10. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, 求矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为若当(Jordan)标准型.

浙 江 大 学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分.

1. 设 E 是 n 阶单位矩阵, $M=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足 $A^TMA=M$, 证明 A 的行列式等于 1.

2. 设 A 是 n 阶幂等矩阵满足 $(1)A=A_1+A_2+\cdots+A_s$, $(2)r(A)=r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$, 证明所有的 A_i 都相似于一个对角矩阵, A_i 特征值之和等于矩阵 A_i 的秩.

3. 设 ϕ 是 n 维欧式空间的正交变换, 证明 ϕ 最多可以表示为 $n+1$ 个镜面反射的复合.

4. 设 A 是 n 阶复矩阵, 证明存在常数项等于零的多项式 $g(\lambda)$,$h(\lambda)$ 使得 $g(A)$ 是可以对角化的矩阵, $h(A)$是幂零矩阵, 且 $A=g(A)+h(A)$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ k & -1 & -k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

   (i) 当 k 为何值时, 存在矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出这样的矩阵 P 和对角矩阵.

   (ii) 求 $k=2$ 时矩阵 A 的 Jordan 标准型.

6. 令二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$.

   (i) 求此二次型的方阵.

   (ii) 当 a_{ij} 均为实数, 给出此二次型为正定的条件.

7. 令 V 和 W 是域 K 上的线性空间, $Hom_K(V,W)$ 表示 V 到 W 所有线性映射组成的线性空间. 证明: 对 $f,g\in Hom_K(U,V)$, 若 $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Im}g=0$, 则 f 和 g 在 $Hom_K(V,W)$ 中是线性无关的.

8. 令线性空间 $V=\mathrm{Im}f\oplus W$, 其中 W 是 V 的线性变换 f 的不变子空间.

   (i) 证明 $W\in\ker f$;

(ii) 证明若 V 是有限维线性空间, 则 $W = \ker f$;

(iii) 举例说明, 当 V 是无限维的, 可能有 $W \subseteq \ker f$, 且 $W \neq \ker f$.

9. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

(i) 求 5×5 阶秩为 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$(零矩阵);

(ii) 假如 B 是满足 $AB = O$ 的 5×5 矩阵, 证明: 秩 $\operatorname{rank}(B) \leqslant 2$.

10. 令 $\mathbf{T}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 设 W 是 V 的 $\mathbf{T}$-不变子空间. 那么, $\mathbf{T}|_W$ 的最小多项式整除 $\mathbf{T}$ 的最小多项式.

浙 江 大 学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$, $L = \{B \in M_{2n}(R) | AB = BA\}$. 证明 L 为 $M_{2n}(R)$ 的子空间并计算其维数.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$, 请问 A 是否可对角化并给出理由. 若 A 可对角化为 C, 给出可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = C$.

3. 方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^3$, 请给出 A 所有可能的 Jordan 标准型.

4. η_1, η_2, η_3 为 $AX = 0$ 的基础解系, A 为 3×5 实矩阵. 求证: 存在 $\mathbb{R}^5$ 的一组基, 其包含 $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3$.

5. X, Y 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, $YX = E_n$, $A = E_m + XY$, 证明: A 相似于对角矩阵.

6. $\mathbf{A}$ 为 n 阶线性空间 V 的线性变换, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为 $\mathbf{A}$ 的不同的特征值, V_{λ_i} 为其特征子空间. 证明: 对任意 V 的子空间 W, 有 $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_m})$.

7. 矩阵 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 求证 A, B 等价. 若 A, B 等价, 是否有 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解? 证明或举反例否定.

8. 证明: A 正定的充分必要条件是存在方阵 $B_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, B_i 中至少有一个非退化, 使得 $A = \sum_{i=1}^n B_i B_i^T$.

9. 定义 ψ 为 $[0, 1]$ 到 n 阶方阵全体组成的欧式空间的连续映射, 使得 $\psi(0)$ 为第一类正交矩阵, $\psi(1)$ 为第二类正交矩阵. 证明: 存在 $T_0 \in (0, 1)$, 使得 $\psi(T_0)$ 退化.

10. 设 g, h 为复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间的线性变换, $gh = hg$. 求证 g, h 有公共的特征向量. 若不是在复数域 $\mathbb{C}$ 上而是在实数域 $\mathbb{R}$ 上, 则结论是否成立? 若成立, 给出理由; 不成立举出反例.

浙 江 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目　高等代数　编号　601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分.

1. $A(t)$ 矩阵各元素连续可微, 行列式恒为 1, $A(0)=E$, 求证: $A'(0)$ 的迹恒为 0(求导是对于各元素独立求的).

2. 线性空间上 $(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 是两个线性无关的向量组, $(a_1,a_2,\cdots,a_s)=(b_1,b_2,\cdots,b_s)A$, 证明: $n-t-r(A)\leqslant s\leqslant \min(r(A),t)$.

3. V,W 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $f:V\to W$ 为线性满映射. 证明:

   (a) $\forall\alpha\in W, f^{-1}(\alpha)=\beta+\ker(f)$($\beta$ 为 V s上任一向量, 满足 $f(\beta)=\alpha$);

   (b) [redacted];

   (c) 定义使当同构映射, 证明 $V\setminus\ker f$ 与 $\mathrm{Im}f$ 同构.

4. 证明: 对线性空间 V 上的线性变换 f, 可以找到子空间 U,W, 使得 f 在 U 上为可逆线性变换, 在 W 上为幂零线性变换, 且 $V=U\oplus W$.

5. $\exists b\neq 0, Ab=0$. 证明: $A^*x=b$ 有解的充要条件为 $r(A)=n-1$.

6. 所有正交变换构成 G.

   (a) G 关于线性变换的合成和逆变换封闭;

   (b) G 是有限集还是无限集?

   (c) G 是什么代数结构?

7. A 为对称阵, 且满足

$$A^3-6A^2+11^A-6E=0.\qquad \text{(I)}$$

   求 $\max\limits_{A}\max\limits_{||x||=1}\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2$(第一个极大值是对所有满足条件 I 的矩阵 A 取极大).

8. $f(x)$ 为一多项式, $g(x)$ 是 A 的最小多项式, 证明: $f(A)$ 可逆的充要条件是 $(f(x), g(x)) = 1$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow A$ 的所有特征值 $|\lambda| < 1$.

10. 双线性函数[redacted].

    (a) 全迷向子空间关于以上定义的运算构成空间;

    (b) 全迷向子空间含于其正交补.

浙 江 大 学

二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分.

1. 已知矩阵 A 是 n 阶不可逆方阵, E 是单位矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明之多存在两个非零复数 k 使得 $kE+A^*$ 为不可逆矩阵.

2. 设 $\mathbb{P}[x]$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上一元多项式的全体, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 和 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 中的两组多项式, 且它们生成的子空间相同. 证明:

   (a) $\mathbb{P}[x]$ 不是该数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间;

   (b) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的最大公因子等于 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ 的最大公因子.

3. 设 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 是次数小于等于 n 的实系数多项式全体, $f(x)$ 是 n 次多项式, 证明: 对 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 中的任意多项式 $g(x)$, 总存在常数 $c_0, \cdots, c_n$ 使得 $g(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \cdots + c_k f^{(k)}(x) + \cdots + c_n f^{(n)}(x)$, 其中 $f^{(k)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 次导数.

4. 设 k 是整数, α 是方程 $x^4 + 4kx + 1 = 0$ 的一个根, 问 $\mathbb{Q}[\alpha] := \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 | a_i \in \mathbb{Q}\}$ 是否是数域? 如果是, 请给予证明, 假如不是, 请说明理由, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域.

5. 设 V_1, V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间, 且它们的维数之和等于 n, 证明: 存在 V 上的线性变换 $\mathbf{T}$, 使得 $\mathbf{T}$ 的核和像分别等于 V_1 和 V_2.

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足

$$X + (B(A^T B^2)^{-1} A^T)^{-1} = X(A^2 (B^T A)^{-1} B^T)^{-1}(A+B).$$

7. 令 $\mathbf{T}$ 是欧式空间 V 上的线性变换, 而 $\mathbf{T}^*$ 是 $\mathbf{T}$ 的伴随线性变换, 即对任意 $v, w \in V$ 有,

$$< \mathbf{T}(v), w >=< v, \mathbf{T}^*(w) > .$$

(a) 当 V 为有限维欧式空间, $\mathbf{T}$ 在一组单位正交基 (或称为标准正交基) 下的矩阵为 A 时, 求 $\mathbf{T}^*$ 在该组基下的矩阵.

(b) 证明: $(\mathrm{Im}(\mathbf{T}^*))^{\perp} = \ker(\mathbf{T})$.

8. 试证明: 正定矩阵 A 中绝对值最大的元素可以在主对角线上取到.

9. 设 $\mathbf{T}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $\mathbf{T}^k = id_V$(V 上的恒等线性变换), 其中 $1 \leqslant k \leqslant n$, 证明 $\mathbf{T}$ 必然可以对角化.

10. 设有限维线性空间 V 有两个非平凡的子空间 V_1, V_2 使得 $V = V_1 \oplus V_2$, W 为 V 的任意子空间. 证明:

    (a) $(W \cap V_1) + (W \cap V_2)$ 是 W 的子空间, W 是 $(W + V_1) \cap (W + V_2)$ 的子空间;

    (b) 商空间 $W/(W \cap V_1 + W \cap V_2)$ 的维数等于商空间 $((W + V_1) \cap (W + V_2))/W$ 的维数;

    (c) 利用上述结论证明 $W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$ 的充分必要条件是 $W = (W + V_1) \cap (W + V_2)$.

浙 江 大 学

二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分.

1. $f(x)$ 是整系数多项式，且 $f(0)$ 和 $f(1)$ 均为奇数，证明 $f(x)$ 没有整数根.

2. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量，求正交矩阵 U，使 $U^{-1}AU$ 为对角型，该矩阵对应的二次型是否正定?

3. V 是复线性空间，$\mathbf{T}\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ u+vi & x+yi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-bi & c-di \\ u-vi & x-yi \end{pmatrix}$. 证明: $\mathbf{T}$ 是实复线性空间上的线性变换，$\mathbf{T}$ 不是复线性空间上的线性变换，求 V 的一组基，在该基下 $\mathbf{T}$ 的矩阵为对角矩阵.

4. A, B 为 $m \times n$ 阶矩阵，$R(A), R(B)$ 分别为 A, B 的行空间，A, B 行向量组的秩分别为 r, s，齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解空间为 W.

   (a) 若 $r + s < n$，证 W 有非零元;

   (b) 若 $\dim W = n - r - s$，证明 $R(A) \cap R(B) = \{0\}$.

5. $f_1(x) = x - 1, f_2(x) = x^2 - 1, f_3(x) = x^3 - 1, g_1(x) = x^2 - x, g_2(x) = x^3 - x^2$. f_1, f_2, f_3 张成的空间为 V_1，g_1, g_2 张成的空间为 V_2，求 $V_1 + V_2$ 以及 $V_1 \cap V_2$ 的基与维数.

6. A 为 $2n+1$ 阶反对称矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 A 的迹为 2016，求 $|I + A^*|$ 及 A 的秩.

7. A 正定，证明 $A + A^{-1} - 2I$ 半正定，给出 $A + A^{-1} - 2I$ 正定的充要条件.

8. $A = (a_{ij})$ 的秩为 r，证明在 $\mathbb{F}^{2n-r}$ 中存在 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，在 $\mathbb{F}^{2n-r}$ 的对偶空间中存在 n 个线性无关的向量 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 使得 $f_j(\alpha_i) = a_{ij}$.

9. 负矩阵 M 是可逆矩阵, 证明存在矩阵 A 使得 $A^2 = M$.

10. [redacted].