

# 浙江大学攻读硕士学位 研究生入学考试业务课试题

## [819] 数学qq分析

浙江大学二〇〇八年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一三年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析  
浙江大学二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [819] 数学分析

# 浙江大学攻读硕士学位 研究生入学考试业务课试题

## [601] 高等代数

浙江大学二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数  
浙江大学二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数  
浙江大学二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数  
浙江大学二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数  
浙江大学二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数  
浙江大学二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [601] 高等代数

# 浙 江 大 学

二〇〇八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (20分)

(a) 证明：当  $t \neq 0$  时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2^2} \cdots \cos \frac{t}{2^n} = \frac{\sin t}{t}.$$

(b) 利用上式证明等式：

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdots.$$

2. (15分) 设  $f(x)$  为实轴上的连续函数，在原点处可导，且  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 5$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^1 f(xt) dt$ .

3. (15分) 讨论下面级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{\sin nx}{n}.$$

4. (15分) 证明函数  $f(x)$  在区间  $I$  上一致连续的充分必要条件是：对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在正数  $M$ , 使得当  $x, y \in I, x \neq y$  且  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > M$  时，成立  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

5. (20分) 证明： $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  在区间  $(1, +\infty)$  内连续，但不一致连续。

6. (15分) 计算第二类曲面积分  $\iint_S x^3 dy dz$ . 其中  $S$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0)$ .

7. (15分) 设  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases}$  其中  $\mathbb{Q}$  是有理数域,  $\alpha > 0$ . 试问：

(a)  $f(x, y)$  在原点处是否连续？是否可微？并请证明你的结论。

(b) 讨论  $f(x, y)$  在其他点处的连续可微情况, 并说明理由.

8. (15分) 设  $f$  是连续函数, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(ax+by+cz) dz dy dx = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2) f(ku) du,$$

其中  $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

9. (15分) 设  $f(x), g(x)$  均为数轴上的连续函数, 且满足  $g(x+1) = g(x)$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) g(nx) dx = \left( \int_0^1 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(x) dx \right).$$

# 浙 江 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算题(每小题10分，共40分)

(a)  $\int \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx (ab \neq 0),$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \cos t dt - x}{(e^x - 1)^2 (1 - \cos^2 x) \arctan x},$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$

(d)  $\iint_D (x+y) \operatorname{sgn}(x-y) dx dy,$  其中  $D = [0, 1] \times [0, 1].$

2. (15分) 如果  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{1}{2}$ . 证明:  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极小值.

3. (15分) 设  $f(x, y, z)$  表示从原点  $O(0, 0, 0)$  到椭球面  $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$  上点  $p(x, y, z)$  处的切平面的距离. 求第一类曲面积分  $\iint_{\Sigma} \frac{ds}{f(x, y, z)}.$

4. (20分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = 1$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b \frac{dx}{(f(x))^n} \right) \frac{1}{n} = 1.$

5. (20分) 设对任意  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, a]$  上黎曼可积, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$ . 证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx = C.$$

6. (20分) 证明  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$  在  $(0, 1)$  上与  $(-1, 0)$  上均一致连续, 但在  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  中不一致连续. (注: 称  $y = f(x)$  在集合  $D (D \subset \mathbb{R})$  上一致连续是指: 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对  $\forall x', x'' \in D$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时, 有  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .)

7. (20分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 导函数  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上单调下降, 且  $f'(b) > 0$ . 证明:
- $$\left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \frac{2}{f'(b)}.$$

# 浙 江 大 学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列极限和积分(60分，每小题10分)

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}};$

(b)  $\iint_{[0,\pi] \times [0,1]} y \sin(xy) dx dy;$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1-x)}{\sin^3 x};$

(d) 计算  $\iint_{\Sigma} z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是三角形  $\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ , 其法方向与  $(1, 1, 1)$  相同.

(e)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx.$

(f)  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$

2. (15分) 设  $a_n = \sin a_{n-1}, n \geq 2$ , 且  $a_1 > 0$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} a_n.$

3. (15分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,  $n$  为奇数. 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 1$ , 则方程  $f(x) + x^n = 0$  有实根.

4. (20分) 证明:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y} dy$  在  $[\delta, +\infty)$  上一致收敛(其中  $\delta > 0$ ).

5. (20分) 设  $f(x)$  连续, 证明 Poisson 公式:

$$\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t) dt.$$

6. (20分) 设  $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$  为实数数列, 满足 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$ ; (2)  $\left\{ \frac{1}{|b_n|} \sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| \right\}_{n \geq 1}$  有界. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  也存在.



# 浙 江 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算题(60分，每小题10分)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}.$

(b)  $\iint_{[0,2] \times [0,2]} [x+y] dx dy$ , 其中  $[\alpha]$  表示  $\alpha$  的整数部分.

(c)  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin xy}{y} dy, x > 0$ , 求  $F'(x)$ .

(d) 计算  $\iint_{\Omega} y(x-z) dy dz + x^2 dz dx + (y^2 + xz) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是  $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$  这六个平面所围立方体表面, 正法方向为立方体表面外侧.

(e)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx.$

(f)  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$

2. (15分) 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 试证:  $f(x, y)$  在平面  $\mathbb{R}^2$  上连续, 偏导数  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  有界,  $f(x, y)$  在原点  $(0, 0)$  处不可微.

3. (15分) 设  $f(x)$  是  $[a, a+1]$  ( $a$  为常数) 上的连续正值函数, 记  $M = \max_{x \in [a, a+1]} f(x)$ . 证明:

$A_n = \sqrt[n]{\int_a^{a+1} [f(x)]^n dx}$  关于  $n$  单调递增, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^{a+1} [f(x)]^n dx} = M$ .

4. (15分) 设  $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = 1$ , 其中  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . 计算  $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ .

5. (15分) 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的收敛性和一致收敛性.

6. (15分) 设  $a_1, b_1$  为任意选定的实数,  $a_n$  和  $b_n$  定义为:

$$\begin{cases} a_n = \int_0^1 \max\{b_{n-1}, x\} dx, & n = 2, 3, \dots \\ b_n = \int_0^1 \min\{a_{n-1}, x\} dx, & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

试证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 - \sqrt{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{2} - 1$ .

7. (15分) 证明: 设  $a_1 \in (0, 1)$ , 且  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ ,  $n \geq 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 1$ .

# 浙 江 大 学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (15分) 设  $n$  为正整数,  $f_n(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos x t dt, x \in \mathbb{R}$ . 证明:  $x^2 f_n(x) = 2n(2n-1)f_{n-1}(x) - 4n(n-1)f_{n-2}(x), n \geq 2$ .

2. (15分) 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 且对任意

$$x, y \in [0, 1], f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

求证:  $\int_0^1 f(x) dx \geq f(1/2)$ .

3. (20分) 设实数  $\lambda, |\lambda| < 1$ , 求  $f(\lambda) = \int_0^\pi \ln(1 + \lambda \cos x) dx$ .

4. (20分) 设函数  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a_i (i \geq 0)$  为实数, 且对充分大的  $x$  有  $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots$ .  
证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  收敛的充要条件是  $a_0 = a_1 = 0$ .

5. (20分) 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n, m > N$  时, 有  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为 Cauchy 数列. 证明: 函数  $f$  在有界区间  $A$  上一致收敛的充要条件是对  $A$  中任意 Cauchy 数列  $\{x_n\}$ , 数列  $\{f(x_n)\}$  为 Cauchy 数列.

6. (30分) 设  $f(x)$  在  $x=0$  的领域内有连续的一阶导数, 且

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1.$$

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$ .

7. (30分) 设实数  $\lambda > -4$ , 数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \frac{\lambda}{2}, x_{n+1} = x_1 + \frac{x_n^2}{2}, n \geq 1$ . 试讨论数列  $\{x_n\}$  的收敛性.



# 浙 江 大 学

二〇一三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分, 每小题10分)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \arcsin x}.$

(b)  $\int_0^\pi \frac{\cos 4\theta}{1 + \cos^2 \theta} d\theta.$

(c) 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $[1 + x^2 + y^2]$  表示不超过  $1 + x^2 + y^2$  的最大整数, 计算二重积分  $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy.$

(d) 设  $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$  求  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$

2. (10分) 论证是否存在定义在  $\mathbb{R}$  上的连续函数使得  $f(f(x)) = e^{-x}.$

3. (15分) 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^x}$  的收敛性与一致收敛性.

4. 证明:

(a) (5分)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$

(b) (10分)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n dx = 0.$

5. (a) (5分) 构造一个在闭区间  $[-1, 1]$  上处处可微的函数, 使得他的导函数在  $[-1, 1]$  上无界.

(b) (15分) 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 证明存在  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  使得  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

6. (15分) 设二元函数  $f(x, y)$  的两个混合偏导数  $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$  在  $(0, 0)$  附近存在, 且  $f_{xy}(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续. 证明:  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0).$

7. (20分) 已知对于实数  $n \geq 2$ , 有公式  $\sum_{p \leq n} \frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1)$ , 其中求和是对于所有不超过  $n$  的素数  $p$  求和. 求证:

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = C + \ln \ln n + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

其中求和也是对于所有不超过  $n$  的素数  $p$  求和,  $C$  是某个与  $n$  无关的常数.

# 浙 江 大 学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分, 每小题10分)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{x}}{\ln^2(2x-1)}.$

(b)  $\int \frac{t^2}{(1-t)^{2013}} dt.$

(c)  $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)} dx dy.$

(d)  $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , 其中  $S$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上半球面下侧.

2. (■■分)

(a) 用闭区间套定理证明有限覆盖定理;

(b) 用有限覆盖定理证明: 对  $[a, b]$  上连续函数  $f(x)$ ,  $f(x) > 0$ , 则存在常数  $c$ , 使得  $f(x) \geq c$ .

3. (■■分)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 求满足条件的  $\alpha$ , 使得  $f$  在原点满足:

(a) 连续;

(b) 可微;

(c) 方向导数存在.

4. (■■分) 和函数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$ ,  $x \in [0, 1]$ . 证明其对  $x$  一致收敛, 并分析其连续性, 可积性和可微性.

5. (■■分)  $f(x)$  可微, 则  $f'(x)$  可积的充要条件是: 存在可积函数  $g(x)$ , 使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) d(t).$$

6. (■■分) 空间体积为  $V$  的  $\Omega$ ,  $X_0 \in \Omega$ ,  $0 < a < 3$ , 证明:

$$\int_{\Omega} |X - X_0|^{a-3} dX \leqslant CV^{\frac{a}{3}},$$

其中,  $C$  与  $a$  有关.

7. (■■分)  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单增, 证明:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0^+).$$

8. (■■分)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续, 且对任意  $\xi > 0$ , 序列  $\{f(n\xi)\}$  极限存在, 求证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.



# 浙 江 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (40分, 每小题10分)

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(n^2+2) \cdots (n^2+n)}{(n-1)(n^2-2) \cdots (n^2-n)}.$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}.$

(c)  $I(r) = \oint_L \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$ , 其中曲线方程为  $x^2 + y^2 + xy = r^2$ , 取正向, 求  $\lim_{r \rightarrow \infty} I(r).$

(d)  $\int_{e^{-2n\pi}}^0 \sin \ln \frac{1}{x} dx.$

2. (■■分) 考察黎曼函数的连续性, 可微性, 黎曼可积性.

3. (■■分) 在  $\mathbb{R}^n$  中,  $f$  定义为在某个区域上的一个函数, 有一阶连续偏导, 且偏导数有界. 证明:

(a) 若  $D$  为凸区域, 证明  $f$  一致连续;

(b) 考查  $D$  不是凸区域的情况.

4. (■■分)  $\{f_n\}$  为一个连续函数列, 且对任意给定的  $x$ ,  $\{f_n(x)\}$  有界, 证明存在一个小区间, 在此区间内,  $\{f_n\}$  一致有界.

5. (■■分)

(a) 证明  $\Gamma(s)$  在  $(0, +\infty)$  内无穷次可微;

(b) 证明  $\Gamma(s), \ln(\Gamma)$  都是严格凸函数.

6. (■■分)  $f$  二阶可微, 且  $f, f', f''$  都大于等于零, 且存在一个正数  $c$ ,  $f''(x) \leq cf(x)$ . 证明:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$

(b) 存在一个正数  $a$ , 有  $f < af'$ , 并求出  $a$ .

7. (■■分) 证明 Fejer 定理.

8. (■■分) 设  $f$  在  $[A, B]$  上 Riemann 可积,  $0 < f < 1$ , 对任意  $\varepsilon > 0$  构造一个函数  $g$  使得

(a)  $g$  是一个阶梯函数, 且取值只能为 0 或 1;

(b)  $|\int_a^b f \, dx - \int_a^b g \, dx| < \varepsilon$ ,  $[a, b] \subset [A, B]$ , 不等号关于  $[a, b]$  是一致的.

# 浙 江 大 学

二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列各题(40分，每小题10分)

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}}{n}.$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{(\cos x - 1) \ln(1-2x)}.$

(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$

(d)  $\iint_D x(1 + ye^{x^2+y^2}) dx dy$ , 其中  $D$  为由曲线  $y = x^3, x = -1, y = 1$  围成的区域.

2. (20分，每小题10分)

(a) 设  $A, B$  为非空数集, 记  $E = A \cup B$ . 证明:  $\sup E = \max\{\sup A, \sup B\}$ .

(b) 若  $x_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛.

3. (15分) 利用有限覆盖定理证明: 有界数列必有收敛子列.

4. (15分) 设  $f(x)$  定义在  $(a, b)$  上, 证明: 若对  $(a, b)$  内任一收敛点列  $\{x_n\}$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续.

5. (15分) 设  $f(x, y)$  为  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续非负函数,  $I(x) := \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上连续. 证明:  $I(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

6. (15分) 求周期为  $2\pi$  的周期函数  $f(x)$  的 Fourier 级数, 其中当  $x \in (-\pi, \pi)$  时,  $f(x) = x^3$ , 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$  的和.

7. (15分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有一阶连续导数, 记  $A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , 试证明:

$$\int_a^b [f(x) - A]^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

8. (15分) 设  $\varphi(x)$  在  $[A, B]$  上连续,  $K(x, t)$  在  $[a, b] \times [a, b]$  上连续. 构造函数列如下:  $f_0(x) = \varphi(x)$ ,  $f_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f_{n-1}(t) dt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 试证明: 当  $|\lambda|$  足够小时, 函数列  $\{f_n(x)\}$  收敛于一连续函数.

# 浙 江 大 学

二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 819

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. 计算下列各题(40分，每小题10分)

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$

(b)  $\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx.$

(c)  $\int_{x^2+4y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx dy.$

(d)  $f(x) = \frac{\pi}{4} - x, x \in [0, \pi],$  将  $f(x)$  展开成余弦级数.

2. (10分) 利用  $\varepsilon$ - $N$  语言证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^n + \frac{1}{n} \right)$  不存在.

3. (10分) 求  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$  在区域  $|x| + |y| \leq 1$  上的最大值与最小值.

4. (15分)

(a) 叙述有限覆盖定理;

(b) 利用有限覆盖定理证明上确界存在定理.

5. (15分)  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调,  $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$  收敛. 证明  $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$  且  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) (x \rightarrow +\infty)$ .

6. (15分) 对一切  $n$  与一切实数  $x$ , 有  $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} |x|^k \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{n+1}$ , 求  $f(x)$  的解析表达式, 证明在  $\mathbb{R}$  上  $f(x)$  一致连续.

7. (15分) 讨论含参变量积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin \frac{1}{x} dx$  的一致收敛区间.
8. (15分)  $f(x)$  在  $x \in \mathbb{R}$  上连续,  $f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq |f(x)|$ . 证明  $x(x) \equiv 0(x \in \mathbb{R})$ .
9. (15分) 对数列  $\{x_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A < B$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = B$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 证明  $\{x_n\}$  的聚点全体恰好构成了  $[A, B]$ .

# 浙 江 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分；用  $E$  表示单位矩阵，矩阵  $A$  的转置矩阵表示为  $A^T$ 。

1. 如果  $(x^2 + x + 1) | (f_1(x^3) + xf_2(x^3))$ ，且  $n$  阶方阵  $A$  有一个特征值等于 1，证明  $f_1(A), f_2(A)$  都不是可逆矩阵。

2. 解下列方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 10, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 18, \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 34. \end{cases}$$

3. 设  $n$  阶方阵  $A$  的伴随矩阵为  $A^*$ ，当  $n > 2$  时，证明  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 。

4. 设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^T A = E$ ， $|A| = -1$ ，证明  $A + E$  不是可逆矩阵。

5. 设  $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T, i = 1, 2, \dots, n$  是欧式空间  $\mathbf{R}^n$  的常用基，一个矩阵  $P$  被称为置换矩阵如果存在  $1, 2, \dots, n$  的一个全排列  $i_1, i_2, \dots, i_n$  使得矩阵  $P = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ ，例

如  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

就是一个四阶置换矩阵。假如  $n$  方阵  $A$  的秩等于  $r$ ，证明存在置换矩阵  $P$  使得  $PAP = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ ，其中  $A_1$  的秩等于  $r$ 。

6. 设  $V = \{a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$  是实数域上三维线性空间，定义  $\mathbf{T}(f(x)) = 2f(x) + xf'(x)$ ，证明  $\mathbf{T}$  是  $V$  上的线性变换，并求其特征值和特征向量。

7. 设  $B$  是实数域上  $n \times n$  矩阵， $A = B^T B$ ，对任意一个大于零的常数  $a$ ，证明  $(\alpha, \beta) = \alpha^T (A + aE) \beta$  定义了  $\mathbb{R}^n$  一个内积使得  $\mathbb{R}^n$  成为欧式空间。其中  $\alpha^T$  表示列向量  $\alpha$  的转置， $E$  表示  $n \times n$  单位矩阵。

8. 试证明满足  $A^n = E_n$  的  $n$  阶方阵  $A$  都相似于一个对角矩阵.

9. 假设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是半正定矩阵, 证明满足  $X^T A X = 0$  的所有  $X$  组成  $\mathbb{R}^n$  的  $n - r(A)$  维子空间.

10. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为若当(Jordan)标准型.



# 浙 江 大 学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分。

1. 设  $E$  是  $n$  阶单位矩阵,  $M = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $A$  满足  $A^T M A = M$ , 证明  $A$  的行列式等于 1.
2. 设  $A$  是  $n$  阶幂等矩阵满足 (1)  $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$ , (2)  $r(A) = r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_s)$ , 证明所有的  $A_i$  都相似于一个对角矩阵,  $A_i$  特征值之和等于矩阵  $A_i$  的秩.
3. 设  $\phi$  是  $n$  维欧氏空间的正交变换, 证明  $\phi$  最多可以表示为  $n+1$  个镜面反射的复合.
4. 设  $A$  是  $n$  阶复矩阵, 证明存在常数项等于零的多项式  $g(\lambda), h(\lambda)$  使得  $g(A)$  是可以对角化的矩阵,  $h(A)$  是幂零矩阵, 且  $A = g(A) + h(A)$ .

5. 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ k & -1 & -k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

- (i) 当  $k$  为何值时, 存在矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵? 并求出这样的矩阵  $P$  和对角矩阵.
- (ii) 求  $k=2$  时矩阵  $A$  的 Jordan 标准型.

6. 令二次型  $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2$ .

- (i) 求此二次型的方阵.
- (ii) 当  $a_{ij}$  均为实数, 给出此二次型为正定的条件.

7. 令  $V$  和  $W$  是域  $K$  上的线性空间,  $\text{Hom}_K(V, W)$  表示  $V$  到  $W$  所有线性映射组成的线性空间. 证明: 对  $f, g \in \text{Hom}_K(U, V)$ , 若  $\text{Im} f \cap \text{Im} g = 0$ , 则  $f$  和  $g$  在  $\text{Hom}_K(V, W)$  中是线性无关的.

8. 令线性空间  $V = \text{Im} f \oplus W$ , 其中  $W$  是  $V$  的线性变换  $f$  的不变子空间.

- (i) 证明  $W \in \ker f$ ;

- (ii) 证明若  $V$  是有限维线性空间, 则  $W = \ker f$ ;
- (iii) 举例说明, 当  $V$  是无限维的, 可能有  $W \subseteq \ker f$ , 且  $W \neq \ker f$ .

9. 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ .

- (i) 求  $5 \times 5$  阶秩为 2 的矩阵  $M$  使得  $AM = O$  (零矩阵);
- (ii) 假如  $B$  是满足  $AB = O$  的  $5 \times 5$  矩阵, 证明: 秩  $\text{rank}(B) \leq 2$ .
10. 令  $\mathbf{T}$  是有限维线性空间  $V$  上的线性变换, 设  $W$  是  $V$  的  $\mathbf{T}$ -不变子空间. 那么,  $\mathbf{T}|_W$  的最小多项式整除  $\mathbf{T}$  的最小多项式.

# 浙 江 大 学

二〇一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分。

1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ ,  $L = \{B \in M_{2n}(R) | AB = BA\}$ . 证明  $L$  为  $M_{2n}(R)$  的子空间并计算其维数.
2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ , 请问  $A$  是否可对角化并给出理由. 若  $A$  可对角化为  $C$ , 给出可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = C$ .
3. 方阵  $A$  的特征多项式为  $f(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^3$ , 请给出  $A$  所有可能的 Jordan 标准型.
4.  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为  $AX = 0$  的基础解系,  $A$  为  $3 \times 5$  实矩阵. 求证: 存在  $\mathbb{R}^5$  的一组基, 其包含  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3$ .
5.  $X, Y$  分别为  $m \times n$  和  $n \times m$  矩阵,  $YX = E_n$ ,  $A = E_m + XY$ , 证明:  $A$  相似于对角矩阵.
6.  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶线性空间  $V$  的线性变换,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  为  $\mathbf{A}$  的不同的特征值,  $V_{\lambda_i}$  为其特征子空间. 证明: 对任意  $V$  的子空间  $W$ , 有  $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_m})$ .
7. 矩阵  $A, B$  均为  $m \times n$  矩阵,  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解, 求证  $A, B$  等价. 若  $A, B$  等价, 是否有  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解? 证明或举反例否定.
8. 证明:  $A$  正定的充分必要条件是存在方阵  $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $B_i$  中至少有一个非退化, 使得  $A = \sum_{i=1}^n B_i B_i^T$ .
9. 定义  $\psi$  为  $[0, 1]$  到  $n$  阶方阵全体组成的欧式空间的连续映射, 使得  $\psi(0)$  为第一类正交矩阵,  $\psi(1)$  为第二类正交矩阵. 证明: 存在  $T_0 \in (0, 1)$ , 使得  $\psi(T_0)$  退化.

10. 设  $g, h$  为复数域  $\mathbb{C}$  上  $n$  维线性空间的线性变换,  $gh = hg$ . 求证  $g, h$  有公共的特征向量. 若不是在复数域  $\mathbb{C}$  上而是在实数域  $\mathbb{R}$  上, 则结论是否成立? 若成立, 给出理由; 不成立举出反例.

# 浙 江 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分。

1.  $A(t)$  矩阵各元素连续可微, 行列式恒为 1,  $A(0) = E$ , 求证:  $A'(0)$  的迹恒为 0 (求导是对于各元素独立求的).
2. 线性空间上  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$  与  $(b_1, b_2, \dots, b_s)$  是两个线性无关的向量组,  $(a_1, a_2, \dots, a_s) = (b_1, b_2, \dots, b_s)A$ , 证明:  $n - t - r(A) \leq s \leq \min(r(A), t)$ .
3.  $V, W$  为数域  $\mathbb{P}$  上的线性空间,  $f: V \rightarrow W$  为线性满映射. 证明:
  - (a)  $\forall \alpha \in W, f^{-1}(\alpha) = \beta + \ker(f)$  ( $\beta$  为  $V$  上任一向量, 满足  $f(\beta) = \alpha$ );
  - (b)  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ ;
  - (c) 定义使当同构映射, 证明  $V \setminus \ker f$  与  $\text{Im} f$  同构.
4. 证明: 对线性空间  $V$  上的线性变换  $f$ , 可以找到子空间  $U, W$ , 使得  $f$  在  $U$  上为可逆线性变换, 在  $W$  上为零线性变换, 且  $V = U \oplus W$ .
5.  $\exists b \neq 0, Ab = 0$ . 证明:  $A^*x = b$  有解的充要条件为  $r(A) = n - 1$ .
6. 所有正交变换构成  $G$ .
  - (a)  $G$  关于线性变换的合成和逆变换封闭;
  - (b)  $G$  是有限集还是无限集?
  - (c)  $G$  是什么代数结构?
7.  $A$  为对称阵, 且满足

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0. \quad (\text{I})$$

求  $\max_A \max_{\|x\|=1} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$  (第一个极大值是对所有满足条件 I 的矩阵  $A$  取极大).

8.  $f(x)$  为一多项式,  $g(x)$  是  $A$  的最小多项式, 证明:  $f(A)$  可逆的充要条件是  $(f(x), g(x)) = 1$ .

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0 \Leftrightarrow A$  的所有特征值  $|\lambda| < 1$ .

10. 双线性函数  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  定义在  $V$  上, 满足  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  且  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $\langle x, x \rangle = 0$  当且仅当  $x = 0$ .  
证明:  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $V$  上的内积.

(a) 全迷向子空间关于以上定义的运算构成空间;

(b) 全迷向子空间含于其正交补.

# 浙 江 大 学

二〇一六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分。

1. 已知矩阵  $A$  是  $n$  阶不可逆方阵,  $E$  是单位矩阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 证明之多存在两个非零复数  $k$  使得  $kE + A^*$  为不可逆矩阵.
2. 设  $\mathbb{P}[x]$  是数域  $\mathbb{P}$  上一元多项式的全体,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  和  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$  是  $\mathbb{P}[x]$  中的两组多项式, 且它们生成的子空间相同. 证明:
  - (a)  $\mathbb{P}[x]$  不是该数域  $\mathbb{P}$  上的有限维线性空间;
  - (b)  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  的最大公因子等于  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$  的最大公因子.
3. 设  $\mathbb{R}[x]_{n+1}$  是次数小于等于  $n$  的实系数多项式全体,  $f(x)$  是  $n$  次多项式, 证明: 对  $\mathbb{R}[x]_{n+1}$  中的任意多项式  $g(x)$ , 总存在常数  $c_0, \dots, c_n$  使得  $g(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \dots + c_k f^{(k)}(x) + \dots + c_n f^{(n)}(x)$ , 其中  $f^{(k)}(x)$  是  $f(x)$  的  $k$  次导数.
4. 设  $k$  是整数,  $\alpha$  是方程  $x^4 + 4kx + 1 = 0$  的一个根, 问  $\mathbb{Q}[\alpha] := \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 | a_i \in \mathbb{Q}\}$  是否是数域? 如果是, 请给予证明, 假如不是, 请说明理由, 其中  $\mathbb{Q}$  是有理数域.
5. 设  $V_1, V_2$  是  $n$  维线性空间  $V$  的两个子空间, 且它们的维数之和等于  $n$ , 证明: 存在  $V$  上的线性变换  $\mathbf{T}$ , 使得  $\mathbf{T}$  的核和像分别等于  $V_1$  和  $V_2$ .

6. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$  的逆矩阵是  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a-2b & b-3 & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$ .

求矩阵  $X$  满足

$$X + (B(A^T B^2)^{-1} A^T)^{-1} = X(A^2(B^T A)^{-1} B^T)^{-1}(A + B).$$

7. 令  $\mathbf{T}$  是欧氏空间  $V$  上的线性变换, 而  $\mathbf{T}^*$  是  $\mathbf{T}$  的伴随线性变换, 即对任意  $v, w \in V$  有,

$$\langle \mathbf{T}(v), w \rangle = \langle v, \mathbf{T}^*(w) \rangle.$$

- (a) 当  $V$  为有限维欧式空间,  $\mathbf{T}$  在一组单位正交基 (或称为标准正交基) 下的矩阵为  $A$  时, 求  $\mathbf{T}^*$  在该组基下的矩阵.
- (b) 证明:  $(\text{Im}(\mathbf{T}^*))^\perp = \ker(\mathbf{T})$ .
8. 试证明: 正定矩阵  $A$  中绝对值最大的元素可以在主对角线上取到.
9. 设  $\mathbf{T}$  是复数域上  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换, 满足  $\mathbf{T}^k = id_V$  ( $V$  上的恒等线性变换), 其中  $1 \leq k \leq n$ , 证明  $\mathbf{T}$  必然可以对角化.
10. 设有限维线性空间  $V$  有两个非平凡的子空间  $V_1, V_2$  使得  $V = V_1 \oplus V_2$ ,  $W$  为  $V$  的任意子空间. 证明:
- (a)  $(W \cap V_1) + (W \cap V_2)$  是  $W$  的子空间,  $W$  是  $(W + V_1) \cap (W + V_2)$  的子空间;
- (b) 商空间  $W/(W \cap V_1 + W \cap V_2)$  的维数等于商空间  $((W + V_1) \cap (W + V_2))/W$  的维数;
- (c) 利用上述结论证明  $W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$  的充分必要条件是  $W = (W + V_1) \cap (W + V_2)$ .



# 浙 江 大 学

二〇一七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 601

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

本试卷共十道试题，每题满分15分。

1.  $f(x)$  是整系数多项式，且  $f(0)$  和  $f(1)$  均为奇数，证明  $f(x)$  没有整数根。

2. 求  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  的特征值及特征向量，求正交矩阵  $U$ ，使  $U^{-1}AU$  为对角型，该矩阵对应的二次型是否正定？

3.  $V$  是复线性空间， $\mathbf{T} \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ u+vi & x+yi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-bi & c-di \\ u-vi & x-yi \end{pmatrix}$ 。证明： $\mathbf{T}$  是实复线性空间上的线性变换， $\mathbf{T}$  不是复线性空间上的线性变换，求  $V$  的一组基，在该基下  $\mathbf{T}$  的矩阵为对角矩阵。

4.  $A, B$  为  $m \times n$  阶矩阵， $R(A), R(B)$  分别为  $A, B$  的行空间， $A, B$  行向量组的秩分别为  $r, s$ ，齐次线性方程组  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的公共解空间为  $W$ 。

(a) 若  $r + s < n$ ，证  $W$  有非零元；

(b) 若  $\dim W = n - r - s$ ，证明  $R(A) \cap R(B) = \{0\}$ 。

5.  $f_1(x) = x - 1, f_2(x) = x^2 - 1, f_3(x) = x^3 - 1, g_1(x) = x^2 - x, g_2(x) = x^3 - x^2$ 。  $f_1, f_2, f_3$  张成的空间为  $V_1$ ， $g_1, g_2$  张成的空间为  $V_2$ ，求  $V_1 + V_2$  以及  $V_1 \cap V_2$  的基与维数。

6.  $A$  为  $2n + 1$  阶反对称矩阵， $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵，且  $A$  的迹为 2016，求  $|I + A^*|$  及  $A$  的秩。

7.  $A$  正定，证明  $A + A^{-1} - 2I$  半正定，给出  $A + A^{-1} - 2I$  正定的充要条件。

8.  $A = (a_{ij})$  的秩为  $r$ ，证明在  $\mathbb{F}^{2n-r}$  中存在  $n$  个线性无关的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，在  $\mathbb{F}^{2n-r}$  的对偶空间中存在  $n$  个线性无关的向量  $f_1, f_2, \dots, f_n$  使得  $f_j(\alpha_i) = a_{ij}$ 。

9. 负矩阵  $M$  是可逆矩阵, 证明存在矩阵  $A$  使得  $A^2 = M$ .

10. .