数学分析习题课讲义

参考答案

Chapter 2

数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 思考题

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;

   (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall m \in \mathbf{N}_+, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;[1]

   (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

   试证明以上定义与数列收敛等价.

   证明. (1) $\Rightarrow$ 取 $N = N_0 + 1$. $\Leftarrow$ 显然.

   (2) $\Rightarrow$ 取 $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}_+$. $\Leftarrow$ 由于 $\lim\limits_{m\to\infty} 1/m = 0$, 故存在 $M \in \mathbf{N}_+$, 当 $m > M$ 时, $1/m < \varepsilon$. 选定 m, 使用定义, 存在$N_0 \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, 有 $|a_n - a| < 1/m < \varepsilon$.

   (3) $\Rightarrow$ 取 $K = 1$. $\Leftarrow$ 取 $\varepsilon' = \varepsilon/K$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\varepsilon' = \varepsilon$. □

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

   答. 否. 对于任意的 ε, 存在一个 $N_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N_0$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而 $\forall N > N_0$ 都可以是符合定义的 N, 即每一个 ε 都可以对应无穷多个 N, 故不是. □

3. 判断: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

   答. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 从而 $|a_{n+1} - a| < \varepsilon/2$, 于是对于 $n > N$,

   $$|a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. 举一反例 $\{(-1)^n 1/n\}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 1/n = 0$, 但

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1/(n+1)}{(-1)^n 1/n} = \lim_{n\to\infty} -1 \cdot \frac{n}{n+1} = -1.$$

   □

[1] 有些像级数的 Weierstrass-M 判别法, 事实上也可以用 Cauchy 收敛准则给出一个和 Weierstrass-M 判别法类似的证明. 本条是所有二分法/三分法证明的基础.

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答. 从某一项开始后每一项均相同. 取 $\varepsilon = 1/2$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使对 $n > N$ 有 $|a_{n+1} - a_n| < 1/2$, 注意到 $a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$, 知 $a_{n+1} = a_n, \forall n > N$. □

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答. 均不一定. 如分别取 $\{a + (-1)^n 1/m\}$(收敛但不单调) 和 $\{(-1)^n 1/n\}$(无穷小量但不单调). □

6. [2]问: 正无穷大量数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定为无穷大量?

答. 均不一定. 如分别取 $\{n + 2\sin n\}$(正无穷大量但不单调) 和 $\{n \cdot \sin n\}$(无界但非无穷大). □

7. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

答. 不一定. 如取 $\{a_n\}$ 为形如

$$1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/4, 1/8, 1/12, \cdots, 1/n, 1/2n, \cdots, 1/n(n-1), 1/(n+1), \cdots$$

的数列, 由于 $1/n$ 和 $1/(n+1)$ 之间的所有项都严格小于 $1/(n+1)$, 于是 $\{a_n\}$ 的上控数列[3] $\{\overline{a_n}\}$ 为 $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/4, \cdots$, 其中 $1/n$ 连续出现了 $n-3$ 次$(n \geqslant 3)$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n} = 0$. 而全为正项的数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{1/n\}$ 收敛于 0, 故

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = 0$, 但显然 $\{|a_n|\}$ 并不单调. □

8. 判断: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是整数.

答. 非负数列的极限是非负数. 反证法. 假设非负数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $A < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < -A/2$, 即当 $n > N$ 时有 $3A/2 < a_n < A/2 < 0$, 与 $\{a_n\}$ 非负矛盾.

正数列的极限不一定为正数, 如取 $\{1/n\}$, 其极限为 0. □

2.1.2 练习题

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{n^2-4} = 3$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证明. 对于任何 $\varepsilon > 0$,

(1) 取 $N = [\sqrt{12/\varepsilon + 4}] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{3n^2}{n^2-4} - 3| = \dfrac{12}{n^2-4} < \varepsilon$;

(2) 取 $N = [1/\varepsilon]$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$;

[2]原本的6题中, 一个很小很小的量显然不是一个无穷小量, 注意无穷小量是一个趋于零的极限过程即可.

[3]请结合数列的上下极限部分.

(3) 由于 $(1+n)^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 故令 $y_n = (1+n)^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, 有$n+1 = (1+y_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$, 即

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n(n-1)}$, 故存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时有 $\frac{2(n+1)}{n(n-1)} < \varepsilon < 1$, 故当 $n > N$ 时有

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} < \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon;$$

(4) 若 $0 < a \leqslant 1$, 显然取 $N = [\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

若 $a > 1$, 则存在 $k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $k < a < k+1$, 于是

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}{n \cdot (n-1) \cdots (k+1) k (k-1) \cdots 2 \cdot 1} \leqslant \frac{a}{n} \frac{a \cdots a}{a \cdots a} \cdot \frac{a}{k} \frac{a}{k-1} \cdots \frac{a}{2} \frac{a}{1}.$$

注意上式中最后一项是一常数, 可记为 K, 取 $N = [aK/\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时有 $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$. □

2. 设 $a_n \geqslant 0, n \in \mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证明. $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| \leqslant \sqrt{a}\varepsilon$. 故当 $n > N$ 时, $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. □

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. 反之如何?

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 故当 $n > N$ 时, $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. □

4. [4] 设 $a > 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$. (可以利用已知的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

证明.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n\to\infty} \log_a n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log_a 1 = 0.$$

其中第二个等号用到了 $\log_a x$ 的连续性. □

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 思考题

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n + b_n\}$ 发散. 反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N_1$ 时, $|(a_n + b_n) - A| < \varepsilon/2$; 当 $n > N_2$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|b_n - (A - a)| = |[(a_n + b_n) - A] - (a_n - a)| \leqslant |(a_n + b_n) - A| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - a$, 与 $\{b_n\}$ 发散矛盾.

[4] 关于原先的 5 题, 完全可以使用相应函数极限的定义加上 Heine 定理证明, 并且本质没有任何不同.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = 1/n, b_n = n\sin n$, 则 $a_nb_n = \sin n$, $\{a_nb_n\}$ 发散; 取 $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n 1/n$, $\{a_nb_n\}$ 收敛. □

2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n + b_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $a_n + b_n = 0$, $\{a_n + b_n\}$ 收敛; 取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_n + b_n = (-1)^n \cdot 2$, $\{a_n + b_n\}$ 发散.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = 1$, $\{a_nb_n\}$ 收敛; 取 $a_n = (-1)^n, b_n = n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n \cdot n$, $\{a_nb_n\}$ 发散. □

3. 设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, n \in \mathbf{N}_+$, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?

证明. $\{b_n\}$ 不一定收敛. 取一反例, $a_n = n, b_n = n+1/2n, c_n = n+1/n, n \in \mathbf{H}_+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, 但显然 $\{b_n\}$ 发散. □

4. 找出下列运算中的错误:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

证明. 问题在于第二个等号, 极限的四则运算法则之对于有限次的加减乘除(除法要求分母的数列不为零)成立, 对于可列次的四则运算没有意义. □

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又对每个 n 有 $b < a_n < c$, 问: 是否成立 $b < a < c$?

证明. 不一定成立. 如取 $b = 0, c = 1, a_n = 1/n, n \in \mathbf{N}_+$, 则有 $b < a_n < c, \forall n \in \mathbf{H}_+$, 但 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 故 $a = c$. □

6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又有 $b \leqslant a \leqslant c$, 问: 是否存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leqslant a \leqslant c$?

证明. 两次应用数列极限的保序性, 所得的正整数分别记为 N_1 和 N_2, 则取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$. □

7. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 问是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

证明. [5] 对于 $\varepsilon_0 = 1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知存在 $N \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n| < 1$, 记 $K = |a_1a_2\cdots a_N|$. 对于 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists N' \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N'$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/K$. 因此对于 $n > \max\{N, N'\}$, $|a_1a_2\cdots a_n| = K|a_{N+1}\cdots a_n| \leqslant K|a_n| < K\cdot\varepsilon/K = \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$. □

[5]结合无穷级数的相关知识可以给出另一证明. 记 $u_n = a_1\cdots a_n$, 由无穷级数的 d'Alembert 比值判别法, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, 有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.2.2 练习题

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.

证明. 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 当 $k > N$ 时, $2k > 2k-1 > N$, 故当 $k > N$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$.

充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$, 则对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K_1 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_1$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$; $\exists K_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_2$ 时, $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{K_1, K_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. □

2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

(1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$;

(2) 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(3) 设 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明. (1) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} \leqslant \sqrt[n]{n \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k^n} = \sqrt[n]{n} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \to \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k (n \to \infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k$;

(2) $\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

(3) $\sqrt[n]{n \cdot 1/n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{[}{n}]n \to 1(n \to \infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;

(4) 取 $\varepsilon = a/2 > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < a/2$, 即当 $n > N$ 时 $a/2 < a_n < 3a/2$. 同时开 n 次根号, 有 $\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{3a/2}, \forall n > N$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

3. 求以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x| < 1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{1+2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$, 其中 $\nu \in \mathbf{N}_+, \nu > 1$.

(最后两个题是 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ 的推广.)

证明. (1)
$$
\begin{aligned}
(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) &= \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\
&= \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\
&= \cdots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}\ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

(2) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

(3) $\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\frac{2}{1+2}\cdot\frac{2+3}{1+2+3}\cdots\frac{2+\cdots+n}{1+2+\cdots n}$

$$=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2!(n-1)!(n+2)!}{3!n!(n+1)!}$$

$$=\frac{n+2}{3n}\to\frac{1}{3}\ (n\to\infty)$$

(4) $\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\to\frac{1}{4}\ (n\to\infty)$$

(5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)}\right)$

$$=\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\nu}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}\right)\to\frac{1}{\nu\cdot\nu!}\ (n\to\infty)\quad\square$$

4. 设 $s_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n$, $|a|<1$, 求 $\{a_m\}$ 的极限.
(试计算 s_n-as_n.)

证明.

$$S_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n;$$

$$aS_n=\qquad a^2+\cdots+(2n-3)a^n+(2n-1)a^{n+1}.$$

上面两式相减, 有

$$(1-a)S_n=a+2(a^2+a^3+\cdots+a^n)-(2n-1)a^{n+1}=\frac{a(1+a)}{1-a}-(2n-1)a^{n+1}-\frac{2a^{n+1}}{1-a}.$$

故

$$S_n=\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}-\frac{1}{1-a}\left((2n-1)a^{n+1}+\frac{2a^{n+1}}{1-a}\right)\to\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}\ (n\to\infty).$$

$\square$

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0, 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$, 则对 $\varepsilon=A/2>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $|x_n-A|<A/2$, 即当 $n>N$ 时, $x_n>A/2$, 记 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,A/2\}$, 则 $x_n\geqslant M,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 即 M 是 $\{x_n\}$ 的一个正的下界.

举一个无最小数的例子: $x_n=1+1/n,n\in\mathbf{N}_+$. $\square$

6. 证明: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

证明. 任取 $k\in\mathbf{N}_+$, 对于 a_k, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时有 $a_n>a_k$. 取 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N,a_k\}$, 则 $a\leqslant a_n,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 同时 a 是 $\{a_n\}$ 中的某一项, 故 a 是 $\{a_n\}$ 中的最小数. $\square$

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 不妨设其无上界, 即对任意 $M > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_n > M$.

对于 $M_1 = 1$, $\exists n_1 \in \mathbf{N}_+$, 使得 $x_{n_1} > 1$;

对于 $M_2 = 2$, $\exists n_2 \in \mathbf{N}_+, n_2 > n_1$, 使得 $x_{n_2} > 2$, 断言这样的 n_2 是可以找到的, 否则 $\forall n > n_1$, $x_n \leqslant M_2$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾;

假设已经找出了 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k} > x_{n_{k-1}}$, $x_{n_k} > M_k = k$, 则对于 $M_{k+1} = k+1$, $\exists n_{k+1} \in \mathbf{N}_+, n_{k+1} > n_k$, 使得 $x_{n_{k+1}} > k+1$, 断言这样的 n_{k+1} 是可以找到的, 否则 $\forall n > n_k$, $x_n \leqslant M_{k+1}$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾. 由数学归纳法可知找出了数列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, $x_{n_k} > k, k \in \mathbf{N}_+$. 这说明 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 并且 $\{x_{n_k}\}$ 是正的无穷大量. 同理若 $\{x_n\}$ 无下界时可找到一个子列是负的无穷大量. □

8. 证明: 数列 $\{\tan n\}$ 发散.

证明.

$$\begin{aligned}|\tan(n+1) - \tan n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{\cos(n+1)} - \frac{\sin n}{\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(n+1)\cos n - \cos(n+1)\sin n}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin 1}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &\geqslant \sin 1,\ \forall n \in \mathbf{N}_+.\end{aligned}$$

这说明 $\exists \varepsilon_0 = \sin 1$, $\forall N \in \mathbf{N}_+$, $\exists n > N$ 使得 $|\tan(n+1) - \tan n| \geqslant \sin 1 > 0$. 由 Cauchy 收敛准则知, $\{\tan n\}$ 发散. □

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+.$$

证明: $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: (1)$p \leqslant 0$; (2)$0 < p < 1$.

证明. 当 $p \leqslant 0$ 时, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p = 0; \\ n^{-p}, & p < 0. \end{cases}$ 由 Cauchy 收敛准则知 $\{S_n\}$ 发散.

当 $0 < p < 1$ 时, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $2^k < n < 2^{k+1}$, 故

$$\begin{aligned}S_n \geqslant & S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{2^{kp}} \\ \geqslant & 1 + \frac{1}{2^p} + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^p} \cdots + \frac{1}{2^{kp}}\right) \\ \geqslant & 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{2}{4^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{kp}} \\ = & 1 + \frac{1}{2}(2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + \cdots + 2^{k(1-p)}) \\ = & 1 + \frac{2^{1-p}}{2}\frac{2^{k(1-p)} - 1}{2^{1-p} - 1} \to +\infty\ (n \to \infty)\end{aligned}$$

故 $\{S_n\}$ 发散. □

2.3 单调数列

1. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

证明. 不妨设 $\{x_n\}$ 单增.

若 $x_n \leqslant 0, n=1,2,\cdots$, 则 $\{|x_n|\}$ 是单调递减数列;

若 $\exists n_0$ 使得 $x_{n_0} > 0$, 则在集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ 中必可找出 n_1 使得 $x_{n_1} < 0 < x_{n_1+1}$, 于是 $x_n > 0, \forall n > n_1$, 又由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 知 $\{|x_n|\}$ 从 n_1 项后单调递增.

反之不成立. 举一反例, $x_n = (-1)^n n, n \in \mathbf{N}_+$, 则易知 $\{|x_n\}$ 单调递增, 但 $\{x_n\}$ 在任意项之后都不单调. □

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等.

证明. $\{a_n - b_n\}$ 收敛从而有界, 即 $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}_+, |a_n - b_n| \leqslant M$. 特别有 $a_n \leqslant b_n + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$. 由于 $\{b_n\}$ 单调减少, $a_n \leqslant b_1 + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 即 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 $b_1 + M$, 故 $\{a_n`\}$ 收敛. 同理可知 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 $a_1 - M$, 故 $\{b_n\}$ 也收敛. 由极限的四则运算法则, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. □

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列极限的任何一项.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 若 $\exists n_0 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0} > a$, 则由 $\{x_n\}$ 单调增加知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, n > n_0$, $x_n \geqslant x_{n_0} > a$. 对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{x_{n_0} - a}{2} > 0$, $x_n - a \geqslant x_{n_0} - a > \varepsilon$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 矛盾.

设 $\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 则 $\{-y_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} -y_n = -b$. 由前可知, $\forall n \in \mathbf{N}_+, -y_n \leqslant -b$, 即 $\forall n \in \mathbf{N}_+, y_n \geqslant b$. □

4. 设 $x_n = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} \cdots \dfrac{n+1}{2n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, x_n > 0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{n+1}{2n+1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$. $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1} x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1. 由 3 题可知, a 不大于 $\{x_n\}$ 的任意一项, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

5. 设 $a_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdots \dfrac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, a_n > 0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{n+9}{2n-1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+, n > 10$. $\{x_n\}$ 从第 11 项起单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n = \dfrac{n+9}{2n-1} x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1. 同上题推理有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

6. 在例题 2.2.6 的基础上证明: 当 $p > 1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+.$$

证明. 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $2^{k-1} < n < 2^k$, 故

$$\begin{aligned} S_n \leqslant & S_{2^k-1} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\ \leqslant & 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1})^p} \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^p}\right) \\ = & 1 + 2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + \cdots + 2^{(k-1)(1-p)} \\ = & \frac{1-2^{k(1-p)}}{1-2^{1-p}} \leqslant \frac{1}{1-2^{1-p}} \end{aligned}$$

这表明 $\{S_n\}$ 有界, 又显然 $\{S_n\}$ 单调递增, 故由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛. □

7. 设 $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明. $\sin x < x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}$, 故由数学归纳法易知 $x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减; 又由 $x_0 > 0$ 易知 $x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 即 0 是 $\{x_n\}$ 的下界. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, 在 $x_n = \sin x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 注意 $\sin x$ 是其定义域上的连续函数, 由 Heine 定理及极限的保序性, $\xi = \sin\xi, \xi \in [0, \pi/2]$, 故 $\xi = 0$. □

8. 设 $a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.
(观察 $a_n = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right)$.)

证明.

$$0 \leqslant a_n = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right).$$

由平均值不等式可知 $(2n-3)(2n-1) \leqslant \left(\frac{(2n-3)+(2n-1)}{2}\right)^2 = (2n-2)^2$, 即 $\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \leqslant 1$, 于是 $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2n-1}{4n^2} \to 0\ (n \to \infty)$. 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

9. 设 $a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
(方法与上一题类似. 在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\frac{\pi}{2}$. 这就是 Wallis 公式.)

证明.

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \left(\frac{2}{1^2}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right)\cdot\frac{2n}{2n+1} \leqslant 2. \end{aligned}$$

其中用到了基本不等式 $(2n-2)(2n) \leqslant \left(\frac{(2n-2)+(2n)}{2}\right)^2 = (2n-1)^2$, 即 $\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2} \leqslant 1$, 于是 $\{a_n\}$ 有上界; 又由

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{4n^2}{4n^2-1} \geqslant 1.$$

故 $\{a_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. □

10. 下列数列中, 哪些是单调的?

(1) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}$; (2) $\{\sin n\}$; (3) $\{\sqrt[n]{n!}\}$.

证明. (1) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{1+(n-1)^2}{1+n^2} \leqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减少;

(2) 由于 $\{\sin n\}$ 有界, 若其单调, 则 $\{\sin n\}$ 收敛, 而已知其发散, 故不单调;

(3) 由于 $n! < (n+1)^n$, 故 $(n!)^{n+1} < (n!)^n(n+1)^n$, 不等式两边开 $n(n+1)$ 次根号, 就有 $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{n!} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} = \sqrt[n+1]{(n+1)!}$, 故 $\{\sqrt[n]{n!}\}$ 单调增加. □

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

12. 对每个自然数 n, 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0,1]$ 中的根. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.