数学分析习题课讲义

参考答案

Chapter 2

数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 思考题

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;

   (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Longleftrightarrow \forall m \in \mathbf{N}_+, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;[1]

   (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

   试证明以上定义与数列收敛等价.

   证明. (1) $\Rightarrow$ 取 $N = N_0 + 1$. $\Leftarrow$ 显然.

   (2) $\Rightarrow$ 取 $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}_+$. $\Leftarrow$ 由于 $\lim\limits_{m\to\infty} 1/m = 0$, 故存在 $M \in \mathbf{N}_+$, 当 $m > M$ 时, $1/m < \varepsilon$. 选定 m, 使用定义, 存在$N_0 \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, 有 $|a_n - a| < 1/m < \varepsilon$.

   (3) $\Rightarrow$ 取 $K = 1$. $\Leftarrow$ 取 $\varepsilon' = \varepsilon/K$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\varepsilon' = \varepsilon$. □

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

   答. 否. 对于任意的 ε, 存在一个 $N_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N_0$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而 $\forall N > N_0$ 都可以是符合定义的 N, 即每一个 ε 都可以对应无穷多个 N, 故不是. □

3. 判断: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

   答. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 从而 $|a_{n+1} - a| < \varepsilon/2$, 于是对于 $n > N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. 举一反例 $\{(-1)^n 1/n\}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 1/n = 0$, 但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1/(n+1)}{(-1)^n 1/n} = \lim_{n\to\infty} -1 \cdot \frac{n}{n+1} = -1.$$

□

[1] 有些像级数的 Weierstrass-M 判别法, 事实上也可以用 Cauchy 收敛准则给出一个和 Weierstrass-M 判别法类似的证明. 本条是所有二分法/三分法证明的基础.

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答. 从某一项开始后每一项均相同. 取 $\varepsilon = 1/2$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使对 $n > N$ 有 $|a_{n+1} - a_n| < 1/2$, 注意到 $a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$, 知 $a_{n+1} = a_n, \forall n > N$. □

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答. 均不一定. 如分别取 $\{a + (-1)^n 1/m\}$(收敛但不单调) 和 $\{(-1)^n 1/n\}$(无穷小量但不单调). □

6. [2]问: 正无穷大量数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定为无穷大量?

答. 均不一定. 如分别取 $\{n + 2\sin n\}$(正无穷大量但不单调) 和 $\{n \cdot \sin n\}$(无界但非无穷大). □

7. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

答. 不一定. 如取 $\{a_n\}$ 为形如

$$1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/4, 1/8, 1/12, \cdots, 1/n, 1/2n, \cdots, 1/n(n-1), 1/(n+1), \cdots$$

的数列, 由于 $1/n$ 和 $1/(n+1)$ 之间的所有项都严格小于 $1/(n+1)$, 于是 $\{a_n\}$ 的上控数列[3] $\{\overline{a_n}\}$ 为 $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/4, \cdots$, 其中 $1/n$ 连续出现了 $n-3$ 次($n \geqslant 3$), 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n} = 0$. 而全为正项的数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{1/n\}$ 收敛于 0, 故

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = 0$, 但显然 $\{|a_n|\}$ 并不单调. □

8. 判断: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是整数.

答. 非负数列的极限是非负数. 反证法. 假设非负数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $A < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < -A/2$, 即当 $n > N$ 时有 $3A/2 < a_n < A/2 < 0$, 与 $\{a_n\}$ 非负矛盾.

正数列的极限不一定为正数, 如取 $\{1/n\}$, 其极限为 0. □

2.1.2 练习题

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{n^2-4} = 3$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证明. 对于任何 $\varepsilon > 0$,

(1) 取 $N = [\sqrt{12/\varepsilon + 4}] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{3n^2}{n^2-4} - 3| = \dfrac{12}{n^2-4} < \varepsilon$;

(2) 取 $N = [1/\varepsilon]$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$;

---

[2]原本的6题中, 一个很小很小的量显然不是一个无穷小量, 注意无穷小量是一个趋于零的极限过程即可.

[3]请结合数列的上下极限部分.

(3) 由于 $(1+n)^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 故令 $y_n = (1+n)^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, 有$n+1 = (1+y_n)^n \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2} y_n^2$, 即

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}$, 故存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时有 $\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)} < \varepsilon < 1$, 故当 $n > N$ 时有

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} < \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon;$$

(4) 若 $0 < a \leqslant 1$, 显然取 $N = [\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

若 $a > 1$, 则存在 $k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $k < a < k+1$, 于是

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}{n \cdot (n-1) \cdots (k+1) k (k-1) \cdots 2 \cdot 1} \leqslant \frac{a}{n} \frac{a \cdots a}{a \cdots a} \cdot \frac{a}{k} \frac{a}{k-1} \cdots \frac{a}{2} \frac{a}{1}.$$

注意上式中最后一项是一常数, 可记为 K, 取 $N = [aK/\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时有 $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$.

□