

数学分析题习课讲义

参考答案

Chapter 2

数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 思考题 pp.13.

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall m \in \mathbf{N}_+, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;¹
- (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

试证明以上定义与数列收敛等价.

证明. (1) \Rightarrow 取 $N = N_0 + 1$. \Leftarrow 显然.

(2) \Rightarrow 取 $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}_+$. \Leftarrow 由于 $\lim_{m \rightarrow \infty} 1/m = 0$, 故存在 $M \in \mathbf{N}_+$, 当 $m > M$ 时, $1/m < \varepsilon$. 选定 m , 使用定义, 存在 $N_0 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 有 $|a_n - a| < 1/m < \varepsilon$.

(3) \Rightarrow 取 $K = 1$. \Leftarrow 取 $\varepsilon' = \varepsilon/K$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\varepsilon' = \varepsilon$. \square

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

答. 否. 对于任意的 ε , 存在一个 $N_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N_0$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而 $\forall N > N_0$ 都可以是符合定义的 N , 即每一个 ε 都可以对应无穷多个 N , 故不是. \square

3. 判断: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

答. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 从而 $|a_{n+1} - a| < \varepsilon/2$, 于是对于 $n > N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$. 举一反例 $\{(-1)^n 1/n\}$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n 1/n = 0$, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} 1/(n+1)}{(-1)^n 1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 \cdot \frac{n}{n+1} = -1. \quad \square$$

¹有些像级数的 Weierstrass-M 判别法, 事实上也可以用 Cauchy 收敛准则给出一个和 Weierstrass-M 判别法类似的证明. 本条是所有二分法/三分法证明的基础.

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答. 从某一项开始后每一项均相同. 取 $\varepsilon = 1/2$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使对 $n > N$ 有 $|a_{n+1} - a_n| < 1/2$, 注意到 $a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$, 知 $a_{n+1} = a_n, \forall n > N$. \square

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答. 均不一定. 如分别取 $\{a + (-1)^n 1/m\}$ (收敛但不单调) 和 $\{(-1)^n 1/n\}$ (无穷小量但不单调). \square

6. ²问: 正无穷大量数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定为无穷大量?

答. 均不一定. 如分别取 $\{n + 2 \sin n\}$ (正无穷大量但不单调) 和 $\{n \cdot \sin n\}$ (无界但非无穷大). \square

7. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

答. 不一定. 如取 $\{a_n\}$ 为形如

$$1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/4, 1/8, 1/12, \dots, 1/n, 1/2n, \dots, 1/n(n-1), 1/(n+1), \dots$$

的数列, 由于 $1/n$ 和 $1/(n+1)$ 之间的所有项都严格小于 $1/(n+1)$, 于是 $\{a_n\}$ 的上控数列³ $\{\overline{a_n}\}$ 为 $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/4, \dots$, 其中 $1/n$ 连续出现了 $n-3$ 次 ($n \geq 3$), 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = 0$. 而全为正项的数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{1/n\}$ 收敛于 0, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 0.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但显然 $\{|a_n|\}$ 并不单调. \square

8. 判断: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是整数.

答. 非负数列的极限是非负数. 反证法. 假设非负数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $A < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < -A/2$, 即当 $n > N$ 时有 $3A/2 < a_n < A/2 < 0$, 与 $\{a_n\}$ 非负矛盾.

正数列的极限不一定为正数, 如取 $\{1/n\}$, 其极限为 0. \square

2.1.2 练习题 pp.17.

1. 按极限定义证明:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} &= 3; & (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} &= 0; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} &= 1; & (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0. \end{aligned}$$

证明. 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$(1) \text{ 取 } N = [\sqrt{12/\varepsilon + 4}] + 1, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } \left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| = \frac{12}{n^2 - 4} < \varepsilon;$$

$$(2) \text{ 取 } N = [1/\varepsilon], \text{ 当 } n > N \text{ 时, } \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon;$$

²原本的6题中, 一个很小很小的量显然不是一个无穷小量, 注意无穷小量是一个趋于零的极限过程即可.

³请结合数列的上下极限部分.

(3) 由于 $(1+n)^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 故令 $y_n = (1+n)^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, 有 $n+1 = (1+y_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$, 即

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leq \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n(n-1)}$, 故存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时有 $\frac{2(n+1)}{n(n-1)} < \varepsilon < 1$, 故当 $n > N$ 时有

$$\sqrt[n]{n+1} - 1 = y_n \leq \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} < \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon;$$

(4) 若 $0 < a \leq 1$, 显然取 $N = [\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时

$$\frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

若 $a > 1$, 则存在 $k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $k < a < k+1$, 于是

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}{n \cdot (n-1) \cdots (k+1)k(k-1) \cdots 2 \cdot 1} \leq \frac{a \cdot a \cdots a}{n \cdot a \cdots a} \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k-1} \cdots \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1}.$$

注意上式中最后一项是一常数, 可记为 K , 取 $N = [aK/\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时有 $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$. \square

2. 设 $a_n \geq 0, n \in \mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$.

证明. $|\sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt[n]{a_n} + \sqrt[n]{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[n]{a}}$. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| \leq \sqrt[n]{a} \varepsilon$. 故当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{a}| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[n]{a}} < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a}$. \square

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. 反之如何?

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 故当 $n > N$ 时, $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. \square

4. ⁴ 设 $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$. (可以利用已知的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

证明.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a 1 = 0.$$

其中第二个等号用到了 $\log_a x$ 的连续性. \square

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 思考题 pp.18.

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n + b_n\}$ 发散. 反证法. 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N_1$ 时, $|(a_n + b_n) - A| < \varepsilon/2$; 当 $n > N_2$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon/2$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|b_n - (A - a)| = |(a_n + b_n) - A| - (a_n - a) \leq |(a_n + b_n) - A| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - a$, 与 $\{b_n\}$ 发散矛盾.

⁴关于原先的 5 题, 完全可以使用相应函数极限的定义加上 Heine 定理证明, 并且本质没有任何不同.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = 1/n, b_n = n \sin n$, 则 $a_nb_n = \sin n$, $\{a_nb_n\}$ 发散; 取 $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n/n$, $\{a_nb_n\}$ 收敛. \square

2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n + b_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $a_n + b_n = 0$, $\{a_n + b_n\}$ 收敛; 取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_n + b_n = (-1)^n \cdot 2$, $\{a_n + b_n\}$ 发散.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = 1$, $\{a_nb_n\}$ 收敛; 取 $a_n = (-1)^n, b_n = n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n \cdot n$, $\{a_nb_n\}$ 发散. \square

3. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n, n \in \mathbf{N}_+$, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?

证明. $\{b_n\}$ 不一定收敛. 取一反例, $a_n = n, b_n = n+1/2n, c_n = n+1/n, n \in \mathbf{H}_+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, 但显然 $\{b_n\}$ 发散. \square

4. 找出下列运算中的错误:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

证明. 问题在于第二个等号, 极限的四则运算法则之对于有限次的加减乘除(除法要求分母的数列不为零)成立, 对于可列次的四则运算没有意义. \square

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 又对每个 n 有 $b < a_n < c$, 问: 是否成立 $b < a < c$?

证明. 不一定成立. 如取 $b = 0, c = 1, a_n = 1/n, n \in \mathbf{N}_+$, 则有 $b < a_n < c, \forall n \in \mathbf{H}_+$, 但 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故 $a = c$. \square

6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 又有 $b \leq a \leq c$, 问: 是否存在 N , 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leq a_n \leq c$?

证明. 两次应用数列极限的保序性, 所得的正整数分别记为 N_1 和 N_2 , 则取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有 $b_n \leq a_n \leq c_n$. \square

7. 设已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 问是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

证明.⁵ 对于 $\varepsilon_0 = 1$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 知存在 $N \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n| < 1$, 记 $K = |a_1 a_2 \cdots a_N|$. 对于 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists N' \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N'$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/K$. 因此对于 $n > \max\{N, N'\}$, $|a_1 a_2 \cdots a_n| = K |a_{N+1} \cdots a_n| \leq K |a_n| < K \cdot \varepsilon/K = \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$. \square

⁵结合无穷级数的相关知识可以给出另一证明. 记 $u_n = a_1 \cdots a_n$, 由无穷级数的 d'Alembert 比值判别法, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$, 有无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

2.2.2 练习题 pp.25.

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.

证明. 必要性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 当 $k > N$ 时, $2k > 2k-1 > N$, 故当 $k > N$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a$.

充分性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_1 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_1$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$; $\exists K_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_2$ 时, $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{K_1, K_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. \square

2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

(1) 给定 p 个正数 a_1, a_2, \dots, a_p , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}$;

(2) 设 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(3) 设 $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证明. (1) $\max_{1 \leq k \leq p} a_k \leq \sqrt[p]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n} \leq \sqrt[p]{n \max_{1 \leq k \leq p} a_k^n} = \sqrt[p]{n} \max_{1 \leq k \leq p} a_k \rightarrow \max_{1 \leq k \leq p} a_k (n \rightarrow \infty)$,
故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n} = \max_{1 \leq k \leq p} a_k$;

(2) $\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq x_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$;

(3) $\sqrt[n]{n \cdot 1/n} \leq a_n \leq \left[\frac{1}{n}\right]n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$;

(4) 取 $\varepsilon = a/2 > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < a/2$, 即当 $n > N$ 时 $a/2 < a_n < 3a/2$. 同时开 n 次根号, 有 $\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3a/2}, \forall n > N$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. \square

3. 求以下极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})$, 其中 $|x| < 1$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+n}\right)$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+\nu)}$, 其中 $\nu \in \mathbf{N}_+, \nu > 1$.

(最后两个题是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的推广.)

证明. (1) $(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n}) = \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})}{1-x}$
 $= \frac{(1-x^2)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n})}{1-x}$
 $= \dots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} (n \rightarrow \infty)$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) &= \frac{2}{1+2} \cdot \frac{2+3}{1+2+3} \cdots \frac{2+\cdots+n}{1+2+\cdots+n} \\
 &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{2!(n-1)!(n+2)!}{3!n!(n+1)!} \\
 &= \frac{n+2}{3n} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+\nu)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{k(k+1) \cdots (k+\nu-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+\nu)} \right) \quad \square \\
 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots \nu} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+\nu)} \right) \rightarrow \frac{1}{\nu \cdot \nu!} \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

4. 设 $s_n = a + 3a^2 + \cdots + (2n-1)a^n$, $|a| < 1$, 求 $\{a_n\}$ 的极限.

(试计算 $s_n - as_n$.)

证明.

$$\begin{aligned}
 S_n &= a + 3a^2 + \cdots + (2n-1)a^n; \\
 aS_n &= a^2 + \cdots + (2n-3)a^n + (2n-1)a^{n+1}.
 \end{aligned}$$

上面两式相减, 有

$$(1-a)S_n = a + 2(a^2 + a^3 + \cdots + a^n) - (2n-1)a^{n+1} = \frac{a(1+a)}{1-a} - (2n-1)a^{n+1} - \frac{2a^{n+1}}{1-a}.$$

故

$$S_n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} \left((2n-1)a^{n+1} + \frac{2a^{n+1}}{1-a} \right) \rightarrow \frac{a(1+a)}{(1-a)^2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0, 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$, 则对 $\varepsilon = A/2 > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - A| < A/2$, 即当 $n > N$ 时, $x_n > A/2$, 记 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, A/2\}$, 则 $x_n \geq M, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 即 M 是 $\{x_n\}$ 的一个正的下界.

举一个无最小数的例子: $x_n = 1 + 1/n, n \in \mathbf{N}_+$. □

6. 证明: 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

证明. 任取 $k \in \mathbf{N}_+$, 对于 a_k , $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时有 $a_n > a_k$. 取 $a = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_N, a_k\}$, 则 $a \leq a_n, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 同时 a 是 $\{a_n\}$ 中的某一项, 故 a 是 $\{a_n\}$ 中的最小数. □

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 不妨设其无上界, 即对任意 $M > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_n > M$.

对于 $M_1 = 1$, $\exists n_1 \in \mathbf{N}_+$, 使得 $x_{n_1} > 1$;

对于 $M_2 = 2$, $\exists n_2 \in \mathbf{N}_+$, $n_2 > n_1$, 使得 $x_{n_2} > 2$, 断言这样的 n_2 是可以找到的, 否则 $\forall n > n_1$, $x_n \leq M_2$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾;

假设已经找出了 x_{n_k} , 使得 $x_{n_k} > x_{n_{k-1}}$, $x_{n_k} > M_k = k$, 则对于 $M_{k+1} = k+1$, $\exists n_{k+1} \in \mathbf{N}_+$, $n_{k+1} > n_k$, 使得 $x_{n_{k+1}} > k+1$, 断言这样的 n_{k+1} 是可以找到的, 否则 $\forall n > n_k$, $x_n \leq M_{k+1}$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾. 由数学归纳法可知找出了数列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, $x_{n_k} > k, k \in \mathbf{N}_+$. 这说明 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 并且 $\{x_{n_k}\}$ 是正的无穷大量. 同理若 $\{x_n\}$ 无下界时可找到一个子列是负的无穷大量. \square

8. 证明: 数列 $\{\tan n\}$ 发散.

证明.

$$\begin{aligned} |\tan(n+1) - \tan n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{\cos(n+1)} - \frac{\sin n}{\cos n} \right| \\ &= \left| \frac{\sin(n+1)\cos n - \cos(n+1)\sin n}{\cos(n+1)\cos n} \right| \\ &= \left| \frac{\sin 1}{\cos(n+1)\cos n} \right| \\ &\geq \sin 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+. \end{aligned}$$

这说明 $\exists \varepsilon_0 = \sin 1$, $\forall N \in \mathbf{N}_+$, $\exists n > N$ 使得 $|\tan(n+1) - \tan n| \geq \sin 1 > 0$. 由 Cauchy 收敛准则知, $\{\tan n\}$ 发散. \square

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+.$$

证明: $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: (1) $p \leq 0$; (2) $0 < p < 1$.

证明. 当 $p \leq 0$ 时, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p = 0; \\ n^{-p}, & p < 0. \end{cases}$ 由 Cauchy 收敛准则知 $\{S_n\}$ 发散.

当 $0 < p < 1$ 时, 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $2^k < n < 2^{k+1}$, 故

$$\begin{aligned} S_n &\geq S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{2^{kp}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2^p} + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \right) \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^p} \cdots + \frac{1}{2^{kp}} \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{2}{4^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{kp}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} (2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + \cdots + 2^{k(1-p)}) \\ &= 1 + \frac{2^{1-p}}{2} \frac{2^{k(1-p)} - 1}{2^{1-p} - 1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

故 $\{S_n\}$ 发散. \square

2.3 单调数列

2.3.1 练习题 pp.30.

1. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

证明. 不妨设 $\{x_n\}$ 单增.

若 $x_n \leq 0, n = 1, 2, \dots$, 则 $\{|x_n|\}$ 是单调递减数列;

若 $\exists n_0$ 使得 $x_{n_0} > 0$, 则在集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$ 中必可找出 n_1 使得 $x_{n_1} < 0 < x_{n_1+1}$, 于是 $x_n > 0, \forall n > n_1$, 又由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 知 $\{|x_n|\}$ 从 n_1 项后单调递增.

反之不成立. 举一反例, $x_n = (-1)^n n, n \in \mathbf{N}_+$, 则易知 $\{|x_n|\}$ 单调递增, 但 $\{x_n\}$ 在任意项之后都不单调. \square

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等.

证明. $\{a_n - b_n\}$ 收敛从而有界, 即 $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}_+, |a_n - b_n| \leq M$. 特别有 $a_n \leq b_n + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$. 由于 $\{b_n\}$ 单调减少, $a_n \leq b_1 + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 即 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 $b_1 + M$, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 同理可知 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 $a_1 - M$, 故 $\{b_n\}$ 也收敛. 由极限的四则运算法则, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. \square

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列极限的任何一项.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 若 $\exists n_0 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0} > a$, 则由 $\{x_n\}$ 单调增加知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, n > n_0, x_n \geq x_{n_0} > a$. 对于 $\varepsilon_0 = \frac{x_{n_0} - a}{2} > 0$, $x_n - a \geq x_{n_0} - a > \varepsilon_0$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 矛盾.

设 $\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 则 $\{-y_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} -y_n = -b$. 由前可知, $\forall n \in \mathbf{N}_+, -y_n \leq -b$, 即 $\forall n \in \mathbf{N}_+, y_n \geq b$. \square

4. 设 $x_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{n+1}{2n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, x_n > 0$, 且 $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+1}{2n+1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$. $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a , 在递推式 $x_n = \frac{n+1}{2n+1} x_{n-1}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1 . 由 3 题可知, a 不大于 $\{x_n\}$ 的任意一项, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. \square

5. 设 $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, a_n > 0$, 且 $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+9}{2n-1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+, n > 10$. $\{x_n\}$ 从第 11 项起单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a , 在递推式 $x_n = \frac{n+9}{2n-1} x_{n-1}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1 . 同上题推理有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

6. 在例题 2.2.6 的基础上证明: 当 $p > 1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+.$$

证明. 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $2^{k-1} < n < 2^k$, 故

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2^k-1} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1})^p} \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^p}\right) \\ &= 1 + 2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + \cdots + 2^{(k-1)(1-p)} \\ &= \frac{1 - 2^{k(1-p)}}{1 - 2^{1-p}} \leq \frac{1}{1 - 2^{1-p}} \end{aligned}$$

这表明 $\{S_n\}$ 有界, 又显然 $\{S_n\}$ 单调递增, 故由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛. \square

7. 设 $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_n = \sin x_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明. $\sin x < x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 故由数学归纳法易知 $x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减; 又由 $x_0 > 0$ 易知 $x_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 0 是 $\{x_n\}$ 的下界. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 在 $x_n = \sin x_{n-1}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 注意 $\sin x$ 是其定义域上的连续函数, 由 Heine 定理及极限的保序性, $\xi = \sin \xi$, $\xi \in [0, \pi/2]$, 故 $\xi = 0$. \square

8. 设 $a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.

$$(\text{观察 } a_n = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right) \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right) \cdots \left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right) \left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right).)$$

证明.

$$0 \leq a_n = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right) \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right) \cdots \left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right) \left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right).$$

由平均值不等式可知 $(2n-3)(2n-1) \leq \left(\frac{(2n-3) + (2n-1)}{2}\right)^2 = (2n-2)^2$, 即 $\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \leq 1$, 于是 $0 \leq a_n \leq \frac{2n-1}{4n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 故由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

9. 设 $a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

(方法与上一题类似. 在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\frac{\pi}{2}$. 这就是 Wallis 公式.)

证明.

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \left(\frac{2}{1^2}\right) \left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right) \left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right) \cdots \left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right) \cdot \frac{2n}{2n+1} \leq 2. \end{aligned}$$

其中用到了基本不等式 $(2n-2)(2n) \leq \left(\frac{(2n-2) + (2n)}{2}\right)^2 = (2n-1)^2$, 即 $\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2} \leq 1$, 于是 $\{a_n\}$ 有上界; 又由

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{4n^2}{4n^2-1} \geq 1.$$

故 $\{a_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. \square

10. 下列数列中, 哪些是单调的?

$$(1) \left\{ \frac{1}{1+n^2} \right\}; \quad (2) \{\sin n\}; \quad (3) \{\sqrt[n]{n!}\}.$$

证明. (1) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+(n-1)^2}{1+n^2} \leq 1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减少;

(2) 由于 $\{\sin n\}$ 有界, 若其单调, 则 $\{\sin n\}$ 收敛, 而已知其发散, 故不单调;

(3) 由于 $n! < (n+1)^n$, 故 $(n!)^{n+1} < (n!)^n(n+1)^n$, 不等式两边开 $n(n+1)$ 次根号, 就有

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{n! \cdot (n+1)} = \sqrt[n+1]{(n+1)!},$$

故 $\{\sqrt[n]{n!}\}$ 单调增加. □

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

证明. 必要性. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 均收敛.

充分性. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增加, 则其任意子列也单调增加. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. 则由 3 可知, $\forall k \in \mathbf{N}_+$, $a_{n_k} \leq a$. 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在 $n_0 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0} > a$, 从而对于充分大的 $k \in \mathbf{N}_+$, 有 $a_{n_k} \geq a_{n_0} > a$. 这与 $a_{n_k} \leq a, \forall k \in \mathbf{N}_+$ 矛盾. 故 $\{a_n\}$ 有上界. 从而由单调有界原理, $\{a_n\}$ 收敛. □

12. 对每个自然数 n , 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 中的根.⁶ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明. 令 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$, 则 $f'_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0, \forall x > 0$. 注意 $f_n(0) = 0, f_n(1) = n \geq 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 故由 $f_n(x)$ 的单调性及连续函数的介值定理知, $f_n(x)$ 的零点在 $[0, 1]$ 上存在唯一.

$$f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) + x_{n+1}^{n+1} \geq f_n(x_{n+1}), \forall n \in \mathbf{N}_+,$$

由 $f_n(x)$ 的单调性易知 $x_n \geq x_{n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 在 $1 = f_n(x_n) = x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}$ 的两侧取极限, 有 $1 = 2\xi - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n+1}$. 注意到 $0 \leq x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 $\xi = 1/2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/2$. □

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.4.1 思考题 pp.35.

若在这三个命题的条件中将极限值 l 改为不带符号的无穷大量 ∞ , 则结论不成立. 请读者举出反例.

2.4.2 练习题 pp.37.

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

证明. 对于 $\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 知存在 $N_1 \in \mathbf{N}_+$ 使当 $n > N_1$ 时有 $x_n > 3M$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \cdots + x_n}{n} \\ &> \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot 3M \end{aligned}$$

由于 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} \rightarrow 0, \frac{n - N_1}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ 故存在 $N_2 \in \mathbf{N}_+$ 使当 $n > N_2$ 时, $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} > -M/2$ 且 $\frac{n - N_1}{n} > 1/2$. 于是当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > 3M/2 - M/2 = M.$$

⁶事实上, 这里需要使用函数的单调性及连续性证明方程的根在闭区间 $[0, 1]$ 中存在唯一.

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$. □

2. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a .

证明. 断言 $\forall n \in \mathbf{N}_+, x_n \leq a$. 否则存在 $n_0 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0} > a$, 不妨设 $x_{n_0-1} \leq a < x_{n_0}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a &= \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n} \\ &\geq \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_{n_0-1} - a)}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)(x_{n_0} - a)}{n} \\ &= x_{n_0} - a + \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_{n_0-1} - a) - (n_0 - 1)(x_{n_0} - a)}{n} \\ &\rightarrow x_{n_0} - a > 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$ 矛盾. 故 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq x_n \leq a, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. □

3. 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a , $\{a_{2k}\}$ 收敛于 b , 其 $a \neq b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

(注意: 虽然数列 $\{a_n\}$ 发散, 但前 n 项的算术平均值所组成的数列仍可以有极限.⁷ 一个典型例子就是 $\{(-1)^n\}$.)

证明. 记 $y_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 则由 Cauchy 命题, 有

$$\begin{aligned} y_{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} + \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} \right) \rightarrow \frac{a+b}{2}, \\ y_{2n+1} &= \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} \right) \rightarrow \frac{a+b}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = \frac{a+b}{2}$, 由 pp.25. 1. 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a+b}{2}$. □

4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$.

(本题可以说是 Cauchy 命题的另一种形式, 也很有用.)

证明. 定义⁸ $a_0 = 0$, 记 $y_n = a_n - a_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 则由 Cauchy 命题可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = d$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A , 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = A$.

(本题与 Cauchy 命题的关系是明显的.)

证明. 由基本不等式知,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

若 $A = 0$, 则 $0 \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 由 Cauchy 命题知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} =$

0. 故由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0$.

若 $A > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$, 由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{A}} = A,$$

⁷ 这里可以和级数的 Cesàro 求和结合起来看.

⁸ 这里定义的合理性在于任意改变数列的有限项, 数列的敛散性不变, 并且若其收敛, 其极限值不变.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

故由夹逼定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = A$. □

6. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

(本题对类型为 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的极限问题很有用, 可以说是例题 2.1.2 的一个发展. 这个结果在无穷级数的研究中也很重要.⁹⁾)

证明. 定义 $a_0 = 0$, 则 $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0}}, \forall n \in \mathbf{N}_+$. $\{a_n\}$ 是正数列, 故 $\left\{\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$ 也是正数列. 由 5 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l. \quad \square$$

7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

证明. 定义 $x_{-1} = x_0 = 0$, 并记 $a_n = x_n - x_{n-2}, n = 1, 2, \cdots$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 0$. 由 Cauchy 命题知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \frac{x_{2n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} = 0.$$

同理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \frac{x_{2n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} = 0.$$

故由 pp.25. 1. 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$. □

8. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明. 定义 $x_{-1} = x_0 = 0$, 并记 $a_n = x_n - x_{n-2}, n = 1, 2, \cdots$. 由 Cauchy 命题知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 由 7 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{n} - \frac{2(n-1)}{n} \frac{x_{n-1}}{n-1} = 0. \quad \square$$

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0 < a_1 < 1$ 和 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.

证明. 由于 $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 故

$$0 < a_2 = a_1(1 - a_1) \leq \left(\frac{a_1 + (1 - a_1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1,$$

归纳地可以得到 $\forall n \in \mathbf{N}_+, 0 < a_n < 1$. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n < 1$, 知 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故其收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 在递推式 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ 两侧令 $n \rightarrow \infty$, 就有 $a = a(1 - a)$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

又由 $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, 同时取倒数就有

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(1 - a_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1 - a_n},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - a_n} = 1$. 由 Cauchy 命题可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = 1$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{na_n} - \frac{1}{na_1}\right) = 1. \text{ 于是就有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n} = 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1. \quad \square$$

⁹⁾参见正项级数的比值判别法(d'Alembert)和根值判别法(Cauchy), 我们有: 前者有效时后者一定有效, 但反之不成立, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$.

10. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = \alpha\beta$.

证明.¹⁰ 当 $\beta = 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 故存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| \leq M, n = 1, 2, \cdots$; 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N_1$ 时, $|b_n| \leq \varepsilon/2M$, 于是

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \right| \leq M \cdot \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|}{n} + M \cdot \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2M}.$$

对于常数 $M' = M \cdot (|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|)$, 存在 $N_2 \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N_2$ 时, $\frac{M'}{n} < \varepsilon/2$. 故当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \right| \leq M \cdot \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{N_1}|}{n} + M \cdot \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0$.

当 $\beta \neq 0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \beta) = 0$. 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(b_n - \beta) + a_2(b_{n-1} - \beta) + \cdots + a_n(b_1 - \beta)}{n} = 0.$$

即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + 1_n b_1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(b_n - \beta) + a_2(b_{n-1} - \beta) + \cdots + a_n(b_1 - \beta)}{n} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &= 0 + \beta\alpha = \alpha\beta. \end{aligned}$$

□

2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

2.5.1 练习题 pp.45.

1. 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \\ (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \end{aligned}$$

(在计算中可以应用 2.1.5 小节的题 5 中有关连续性的结果. 但是要请读者注意, 在现阶段如下的做法是缺乏依据的 (以题 (3) 为例):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \right]^2 = e^2.)$$

证明.

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}; \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}; \end{aligned}$$

¹⁰ 本题的证明方法可以用于一切类似的极限证明, 事实上 Teoplitz 定理也能类似给出证明.

¹¹ 原题为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, 显然也可以用本题的方法计算, 但结果为一个无穷大量.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^2;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1) \frac{n^2}{n-1}} = 0;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = e^0 = 1;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}} = e. \quad \square$$

2. 设 $x \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\frac{k}{n+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$.

证明. 由 pp.38 命题 2.5.1 中的不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 两边取对数, 可以得到不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

注意到

$$\ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \ln \left(\frac{n+k}{n}\right) \\ = \ln \left(\frac{n+k}{n+k-1} \cdot \frac{n+k-1}{n+k-2} \cdots \frac{n+1}{n}\right) \\ = \ln \left(1 + \frac{1}{n+k-1}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n+k-2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

就有

$$\frac{k}{n+k} < \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n+k-1} + \frac{1}{n+k-2} + \cdots + \frac{1}{n} < \frac{k}{n}. \quad \square$$

3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

证明. 记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$, $y_n = \ln x_n$, $n \in \mathbf{N}_+$. 则由上题有

$$y_n < \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$y_n > \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{2}.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{e}$. \square

4. ¹² 设 $\{p_n\}$ 是正数列, 且 $p_n \rightarrow +\infty$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$.

证明. 对于任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 有 $[p_n] \leq p_n < [p_n] + 1$, $\frac{1}{[p_n] + 1} \leq \frac{1}{p_n}$, 因此

$$\left(1 + \frac{1}{[p_n] + 1}\right)^{[p_n]} < \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1 + \frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n] + 1}$$

¹² 本题的结果与 Heine 定理结合就给出了一个 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的证明.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, 即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N$ 时有

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon \text{ 且 } \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $n > N$ 时有

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > e - \varepsilon \text{ 且 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$, 对于 $N > 0$, 存在 $M \in \mathbf{N}_+$ 使得 $n > M$ 时, $[p_n] > N$, 于是当 $n > M$ 时, 就有

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[p_n] + 1}\right)^{[p_n]} < \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1 + \frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n] + 1} < e + \varepsilon.$$

即当 $n > M$ 时 $\left| \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} - e \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$. □

5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!2^n}{n^n}$.¹³

证明. □

6. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$.

证明. 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 1 - \ln n}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

□

7. 证明: $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.
(¹⁴由此又可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.)

证明. 数学归纳法.

(1) $n = 1$ 时, 由于 $2 < e < 4$, 故有 $\frac{2}{e} < 1 < \frac{4}{e} = e \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^2$, 即 $n = 1$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned} (n+1)! &< (n+1) \cdot e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = e^2 \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} < e \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2}, \\ &> (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^n = e \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

这里用到了

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.$$

¹³事实上, 对于通项带有 a^n 项的数列, 可以尽情利用 Cauchy 根值判别法或者 d'Alembert 比值判别法. 如果记 $a_n = \frac{n!2^n}{n^n}$, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{2}{e} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

¹⁴只需应用本题及夹逼准则即可.

由数学归纳法可知

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

对于 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立. □

8. 设 $S_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n, n \in \mathbf{N}_+$. 证明: 对 $n \geq 2$ 成立不等式

$$n^n \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right) \leq S_n \leq n^n \left(1 + \frac{2}{e(n-1)}\right).$$

证明. 数学归纳法.

(1) $n = 2$ 时, $2^2 \left(1 + \frac{1}{4(2-1)}\right) = 5 = S_2 < 2^2 \left(1 + \frac{2}{e(2-1)}\right)$, 即 $n = 2$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$n^n \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right) \leq S_n \leq n^n \left(1 + \frac{2}{e(n-1)}\right).$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^{n+1} < n^n \left(1 + \frac{2}{e(n-1)}\right) + (n+1)^{n+1} \\ &= (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \left(1 + \frac{2}{e(n-1)}\right)\right) \\ &< (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{2}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right) \\ &< (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{2}{en}\right), \\ S_{n+1} &= S_n + (n+1)^{n+1} > n^n \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right) + (n+1)^{n+1} \\ &= (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right)\right) \\ &\geq (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right) \\ &\geq (n+1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{4n}\right). \end{aligned}$$

这里用到了

$$e < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq 4.$$

由数学归纳法可知

$$n^n \left(1 + \frac{1}{4(n-1)}\right) \leq S_n \leq n^n \left(1 + \frac{2}{e(n-1)}\right)$$

对于 $n \geq 2$ 恒成立. □

9. 设有 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$, 又设 $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right), n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 对于 $n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}
 x_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \frac{a_1+1}{a_1} \cdot \frac{a_2+1}{a_2} \cdots \frac{a_n+1}{a_n} \\
 &= \frac{a_2}{2a_1} \cdot \frac{a_3}{3a_2} \cdots \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} \\
 &= \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)(a_n+1)}{(n+1)!} \\
 &= \frac{1}{n!} + \frac{a_n}{n!} \\
 &\cdots \\
 &= \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{2!} + \frac{a_2}{2!} \\
 &= \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{2!} + \frac{2(a_1+1)}{2!} \\
 &= \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{2!} + 1 + 1.
 \end{aligned}$$

即 $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, n \in \mathbf{N}_+$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$. □

2.6 由迭代生成的数列

2.6.1 练习题 pp.52

在以下各题中均可使用几何方法, 或做出几何解释.

- (1) 设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
 (2) 设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{ax_n}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
 (这两题外形相似, 都可用本节方法解决. 但题 (2) 有更简单的直接解法.)
- 设 $A > 0, 0 < b_0 < A^{-1}, b_{n+1} = b_n(2 - Ab_n), n \in \mathbf{N}_+$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A^{-1}$.

2.7 对于教学的建议

2.7.1 第一组参考题

- 设 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 取子数列 $\{a_{3k}\}$ 奇数项和偶数项所排成的子列 $\{a_{6k-3}\}$ 和 $\{a_{6k}\}$, 它们均为同一收敛数列的子列, 故均收敛且极限相等. 注意到, $\{a_{6k-3}\}$ 也是收敛数列 $\{a_{2k-1}\}$ 的一个子列, $\{a_{6k}\}$ 也是收敛数列 $\{a_{2k}\}$ 的一个子列, 从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}.$$

即 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}$ 收敛到相同的极限, 故由 pp.25 1 知 $\{a_n\}$ 收敛. □

- 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n \leq a_{n+2}, a_n \leq a_{n+3}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 由题意, 有

$$a_1 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{2k-1} \leq \cdots;$$

$$a_2 \leq a_4 \leq \cdots \leq a_{2k} \leq \cdots;$$

$$a_3 \leq a_6 \leq \cdots \leq a_{3k} \leq \cdots.$$

即数列 $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$ 均单调, 注意到 $\{a_n\}$ 有界, 故均收敛. 由 1. 知 $\{a_n\}$ 收敛. □

3. 设 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n + a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+2}) = B$. 则由极限的四则运算有,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} - a_{n+1}) = B - A, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{B - A + A}{2} = \frac{B}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

4. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 有存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$. 证明: $a \leq 1$.

5. $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right), n \in \mathbf{N}_+$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2.7.2 第二组参考题