数学分析题习课讲义

参考答案

Chapter 2

数列极限

2.1 数列极限的基本概念

2.1.1 思考题 pp.13.

1. 数列收敛有很多等价定义. 例如:

   (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geqslant N$, 成立 $|a_n - a| < \varepsilon$;

   (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall m \in \mathbf{N}_+, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < 1/m$;[1]

   (3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\varepsilon$. 其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数.

   试证明以上定义与数列收敛等价.

   证明. (1) $\Rightarrow$ 取 $N = N_0 + 1$. $\Leftarrow$ 显然.

   (2) $\Rightarrow$ 取 $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}_+$. $\Leftarrow$ 由于 $\lim\limits_{m\to\infty} 1/m = 0$, 故存在 $M \in \mathbf{N}_+$, 当 $m > M$ 时, $1/m < \varepsilon$. 选定 m, 使用定义, 存在$N_0 \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, 有 $|a_n - a| < 1/m < \varepsilon$.

   (3) $\Rightarrow$ 取 $K = 1$. $\Leftarrow$ 取 $\varepsilon' = \varepsilon/K$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\varepsilon' = \varepsilon$. □

2. 问: 在数列收敛的定义中, N 是否是 ε 的函数?

   答. 否. 对于任意的 ε, 存在一个 $N_0 \in \mathbf{N}_+$, 使得当 $n > N_0$ 时都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 而 $\forall N > N_0$ 都可以是符合定义的 N, 即每一个 ε 都可以对应无穷多个 N, 故不是. □

3. 判断: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

   答. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2$, 从而 $|a_{n+1} - a| < \varepsilon/2$, 于是对于 $n > N$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. 举一反例 $\{(-1)^n 1/n\}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 1/n = 0$, 但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}1/(n+1)}{(-1)^n 1/n} = \lim_{n\to\infty} -1 \cdot \frac{n}{n+1} = -1.$$ □

[1]有些像级数的 Weierstrass-M 判别法, 事实上也可以用 Cauchy 收敛准则给出一个和 Weierstrass-M 判别法类似的证明. 本条是所有二分法/三分法证明的基础.

4. 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答. 从某一项开始后每一项均相同. 取 $\varepsilon = 1/2$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 使对 $n > N$ 有 $|a_{n+1} - a_n| < 1/2$, 注意到 $a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}_+$, 知 $a_{n+1} = a_n, \forall n > N$. □

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答. 均不一定. 如分别取 $\{a + (-1)^n 1/m\}$(收敛但不单调) 和 $\{(-1)^n 1/n\}$(无穷小量但不单调). □

6. [2]问: 正无穷大量数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定为无穷大量?

答. 均不一定. 如分别取 $\{n + 2\sin n\}$(正无穷大量但不单调) 和 $\{n \cdot \sin n\}$(无界但非无穷大). □

7. 问: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 那么绝对值 $|a_n - a|$ 是否随着 n 的增加而单调减少趋于 0?

答. 不一定. 如取 $\{a_n\}$ 为形如

$$1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/4, 1/8, 1/12, \cdots, 1/n, 1/2n, \cdots, 1/n(n-1), 1/(n+1), \cdots$$

的数列, 由于 $1/n$ 和 $1/(n+1)$ 之间的所有项都严格小于 $1/(n+1)$, 于是 $\{a_n\}$ 的上控数列[3] $\{\overline{a_n}\}$ 为 $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/4, \cdots$, 其中 $1/n$ 连续出现了 $n-3$ 次($n \geqslant 3$), 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n} = 0$. 而全为正项的数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{1/n\}$ 收敛于 0, 故

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\inf} a_n = 0$, 但显然 $\{|a_n|\}$ 并不单调. □

8. 判断: 非负数列的极限是非负数, 正数列的极限是整数.

答. 非负数列的极限是非负数. 反证法. 假设非负数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $A < 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < -A/2$, 即当 $n > N$ 时有 $3A/2 < a_n < A/2 < 0$, 与 $\{a_n\}$ 非负矛盾.

正数列的极限不一定为正数, 如取 $\{1/n\}$, 其极限为 0. □

2.1.2 练习题 pp.17.

1. 按极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{n^2-4} = 3$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证明. 对于任何 $\varepsilon > 0$,

(1) 取 $N = [\sqrt{12/\varepsilon + 4}] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{3n^2}{n^2-4} - 3| = \dfrac{12}{n^2-4} < \varepsilon$;

(2) 取 $N = [1/\varepsilon]$, 当 $n > N$ 时, $|\dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$;

[2]原本的6题中, 一个很小很小的量显然不是一个无穷小量, 注意无穷小量是一个趋于零的极限过程即可.

[3]请结合数列的上下极限部分.

(3) 由于 $(1+n)^{\frac{1}{n}}>1, \forall n\in\mathbf{N}_+$, 故令 $y_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}-1>0$, 有$n+1=(1+y_n)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)}{2}y_n^2$, 即

$$\sqrt[n]{n+1}-1=y_n\leqslant\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}.$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}$, 故存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 使当 $n>N$ 时有 $\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}<\varepsilon<1$, 故当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{n+1}-1=y_n\leqslant\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}<\sqrt{\varepsilon}<\varepsilon;$$

(4) 若 $0<a\leqslant 1$, 显然取 $N=[\varepsilon]+1$, 当 $n>N$ 时

$$\frac{a^n}{n!}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

若 $a>1$, 则存在 $k\in\mathbf{N}_+$ 使得 $k<a<k+1$, 于是

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdots a\cdot a\cdot a\cdots a\cdot a}{n\cdot(n-1)\cdots(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1}\leqslant\frac{a}{n}\frac{a\cdots a}{a\cdots a}\cdot\frac{a}{k}\frac{a}{k-1}\cdots\frac{a}{2}\frac{a}{1}.$$

注意上式中最后一项是一常数, 可记为 K, 取 $N=[aK/\varepsilon]+1$, 当 $n>N$ 时有 $\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$. □

2. 设 $a_n\geqslant 0, n\in\mathbf{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证明. $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leqslant\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|\leqslant\sqrt{a}\varepsilon$. 故当 $n>N$ 时, $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\leqslant\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. □

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之如何?

证明. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 故当 $n>N$ 时, $||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. □

4. [4] 设 $a>1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$. (可以利用已知的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.)

证明.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\log_a n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\log_a 1=0.$$

其中第二个等号用到了 $\log_a x$ 的连续性. □

2.2 收敛数列的基本性质

2.2.1 思考题 pp.18.

1. 设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散, 问: $\{a_n+b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n+b_n\}$ 发散. 反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A$, 则对于 $\forall\varepsilon>0, \exists N_1,N_2\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N_1$ 时, $|(a_n+b_n)-A|<\varepsilon/2$; 当 $n>N_2$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon/2$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时有

$$|b_n-(A-a)|=|[(a_n+b_n)-A]-(a_n-a)|\leqslant|(a_n+b_n)-A|+|a_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A-a$, 与 $\{b_n\}$ 发散矛盾.

---

[4] 关于原先的 5 题, 完全可以使用相应函数极限的定义加上 Heine 定理证明, 并且本质没有任何不同.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = 1/n, b_n = n\sin n$, 则 $a_nb_n = \sin n$, $\{a_nb_n\}$ 发散; 取 $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n 1/n$, $\{a_nb_n\}$ 收敛. □

2. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散, 问: $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何?

证明. $\{a_n + b_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $a_n + b_n = 0$, $\{a_n + b_n\}$ 收敛; 取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_n + b_n = (-1)^n \cdot 2$, $\{a_n + b_n\}$ 发散.

$\{a_nb_n\}$ 可能发散也可能收敛. 如取 $a_n = b_n = (-1)^n$, 则 $a_nb_n = 1$, $\{a_nb_n\}$ 收敛; 取 $a_n = (-1)^n, b_n = n$, 则 $a_nb_n = (-1)^n \cdot n$, $\{a_nb_n\}$ 发散. □

3. 设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, n \in \mathbf{N}_+$, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$, 问: 数列 $\{b_n\}$ 是否收敛?

证明. $\{b_n\}$ 不一定收敛. 取一反例, $a_n = n, b_n = n+1/2n, c_n = n+1/n, n \in \mathbf{H}_+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, 但显然 $\{b_n\}$ 发散. □

4. 找出下列运算中的错误:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

证明. 问题在于第二个等号, 极限的四则运算法则之对于有限次的加减乘除(除法要求分母的数列不为零)成立, 对于可列次的四则运算没有意义. □

5. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又对每个 n 有 $b < a_n < c$, 问: 是否成立 $b < a < c$?

证明. 不一定成立. 如取 $b = 0, c = 1, a_n = 1/n, n \in \mathbf{N}_+$, 则有 $b < a_n < c, \forall n \in \mathbf{H}_+$, 但 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 故 $a = c$. □

6. 设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 又有 $b \leqslant a \leqslant c$, 问: 是否存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leqslant a \leqslant c$?

证明. 两次应用数列极限的保序性, 所得的正整数分别记为 N_1 和 N_2, 则取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$. □

7. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 问是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$? 又问: 反之如何?

证明. [5] 对于 $\varepsilon_0 = 1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知存在 $N \in \mathbf{N}_+$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n| < 1$, 记 $K = |a_1a_2\cdots a_N|$. 对于 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists N' \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N'$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/K$. 因此对于 $n > \max\{N, N'\}$, $|a_1a_2\cdots a_n| = K|a_{N+1}\cdots a_n| \leqslant K|a_n| < K \cdot \varepsilon/K = \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n) = 0$. □

[5] 结合无穷级数的相关知识可以给出另一证明. 记 $u_n = a_1\cdots a_n$, 由无穷级数的 d'Alembert 比值判别法, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, 有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.2.2 练习题 pp.25.

1. 证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限.

   证明. 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 当 $k > N$ 时, $2k > 2k-1 > N$, 故当 $k > N$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$.

   充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = a$, 则对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K_1 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_1$ 时, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$; $\exists K_2 \in \mathbf{N}_+$, 当 $k > K_2$ 时, $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{K_1, K_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. □

2. 以下是可以应用夹逼定理的几个题.

   (1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$;

   (2) 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

   (3) 设 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{N}_+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

   (4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

   证明. (1) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} \leqslant \sqrt[n]{n \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k^n} = \sqrt[n]{n} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k \to \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k (n\to\infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} a_k$;

   (2) $\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

   (3) $\sqrt[n]{n \cdot 1/n} \leqslant a_n \leqslant \frac{[}{n}]n \to 1 (n\to\infty)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;

   (4) 取 $\varepsilon = a/2 > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < a/2$, 即当 $n > N$ 时 $a/2 < a_n < 3a/2$. 同时开 n 次根号, 有 $\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{3a/2}, \forall n > N$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

3. 求以下极限:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x| < 1$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{1+2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$, 其中 $\nu \in \mathbf{N}_+, \nu > 1$.

   (最后两个题是 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ 的推广.)

   证明. (1)
$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) &= \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \cdots = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

(2) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$$

(3) $\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\dfrac{2}{1+2}\cdot\dfrac{2+3}{1+2+3}\cdots\dfrac{2+\cdots+n}{1+2+\cdots n}$

$$=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2!(n-1)!(n+2)!}{3!n!(n+1)!}$$

$$=\frac{n+2}{3n}\to\frac{1}{3}\ (n\to\infty)$$

(4) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\to\frac{1}{4}\ (n\to\infty)$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+\nu)}\right)$ □

$$=\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\nu}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}\right)\to\frac{1}{\nu\cdot\nu!}\ (n\to\infty)$$

4. 设 $s_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n$, $|a|<1$, 求 $\{a_m\}$ 的极限.
(试计算 s_n-as_n.)

证明.

$$S_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n;$$
$$aS_n=\qquad a^2+\cdots+(2n-3)a^n+(2n-1)a^{n+1}.$$

上面两式相减, 有

$$(1-a)S_n=a+2(a^2+a^3+\cdots+a^n)-(2n-1)a^{n+1}=\frac{a(1+a)}{1-a}-(2n-1)a^{n+1}-\frac{2a^{n+1}}{1-a}.$$

故

$$S_n=\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}-\frac{1}{1-a}\left((2n-1)a^{n+1}+\frac{2a^{n+1}}{1-a}\right)\to\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}\ (n\to\infty).$$ □

5. 设正数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限大于 0, 证明: 这个数列有正下界, 但在数列中不一定有最小数.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$, 则对 $\varepsilon=A/2>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, $|x_n-A|<A/2$, 即当 $n>N$ 时, $x_n>A/2$, 记 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,A/2\}$, 则 $x_n\geqslant M,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 即 M 是 $\{x_n\}$ 的一个正的下界.

举一个无最小数的例子: $x_n=1+1/n,n\in\mathbf{N}_+$. □

6. 证明: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中一定有最小数.

证明. 任取 $k\in\mathbf{N}_+$, 对于 a_k, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时有 $a_n>a_k$. 取 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N,a_k\}$, 则 $a\leqslant a_n,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 同时 a 是 $\{a_n\}$ 中的某一项, 故 a 是 $\{a_n\}$ 中的最小数. □

7. 证明: 无界数列至少有一个子列是确定符号的无穷大量.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列, 不妨设其无上界, 即对任意 $M>0$, $\exists n\in\mathbf{N}_+$ 使得 $x_n>M$.

对于 $M_1=1$, $\exists n_1\in\mathbf{N}_+$, 使得 $x_{n_1}>1$;

对于 $M_2=2$, $\exists n_2\in\mathbf{N}_+, n_2>n_1$, 使得 $x_{n_2}>2$, 断言这样的 n_2 是可以找到的, 否则 $\forall n>n_1$, $x_n\leqslant M_2$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾;

假设已经找出了 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k}>x_{n_{k-1}}, x_{n_k}>M_k=k$, 则对于 $M_{k+1}=k+1, \exists n_{k+1}\in\mathbf{N}_+, n_{k+1}>n_k$, 使得 $x_{n_{k+1}}>k+1$, 断言这样的 n_{k+1} 是可以找到的, 否则 $\forall n>n_k$, $x_n\leqslant M_{k+1}$, 与 $\{x_n\}$ 无界矛盾. 由数学归纳法可知找出了数列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$, $x_{n_k}>k, k\in\mathbf{N}_+$. 这说明 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列, 并且 $\{x_{n_k}\}$ 是正的无穷大量. 同理若 $\{x_n\}$ 无下界时可找到一个子列是负的无穷大量. □

8. 证明: 数列 $\{\tan n\}$ 发散.

证明.

$$\begin{aligned}|\tan(n+1)-\tan n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{\cos(n+1)}-\frac{\sin n}{\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(n+1)\cos n-\cos(n+1)\sin n}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &= \left|\frac{\sin 1}{\cos(n+1)\cos n}\right| \\ &\geqslant \sin 1,\ \forall n\in\mathbf{N}_+.\end{aligned}$$

这说明 $\exists\varepsilon_0=\sin 1$, $\forall N\in\mathbf{N}_+$, $\exists n>N$ 使得 $|\tan(n+1)-\tan n|\geqslant\sin 1>0$. 由 Cauchy 收敛准则知, $\{\tan n\}$ 发散. □

9. 设数列 $\{S_n\}$ 的定义为

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}, n\in\mathbf{N}_+.$$

证明: $\{S_n\}$ 在以下两种情况均发散: $(1)p\leqslant 0$; $(2)0<p<1$.

证明. 当 $p\leqslant 0$ 时, $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{n^p}=\begin{cases}1, & p=0;\\ n^{-p}, & p<0.\end{cases}$ 由 Cauchy 收敛准则知 $\{S_n\}$ 发散.

当 $0<p<1$ 时, 对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $\exists k\in\mathbf{N}_+$ 使得 $2^k<n<2^{k+1}$, 故

$$\begin{aligned}S_n \geqslant& S_{2^k}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{2^{kp}} \\ \geqslant& 1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+2)^p}\cdots+\frac{1}{2^{kp}}\right) \\ \geqslant& 1+\frac{1}{2^p}+\frac{2}{4^p}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^{kp}} \\ =& 1+\frac{1}{2}(2^{1-p}+2^{2(1-p)}+\cdots+2^{k(1-p)}) \\ =& 1+\frac{2^{1-p}}{2}\frac{2^{k(1-p)}-1}{2^{1-p}-1}\to+\infty\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

故 $\{S_n\}$ 发散. □

2.3 单调数列

2.3.1 练习题 pp.30.

1. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调. 又问: 反之如何?

证明. 不妨设 $\{x_n\}$ 单增.

若 $x_n \leqslant 0, n=1,2,\cdots$, 则 $\{|x_n|\}$ 是单调递减数列;

若 $\exists n_0$ 使得 $x_{n_0} > 0$, 则在集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ 中必可找出 n_1 使得 $x_{n_1} < 0 < x_{n_1+1}$, 于是 $x_n > 0, \forall n > n_1$, 又由于 $\{x_n\}$ 单调递增, 知 $\{|x_n|\}$ 从 n_1 项后单调递增.

反之不成立. 举一反例, $x_n = (-1)^n n, n \in \mathbf{N}_+$, 则易知 $\{|x_n\}$ 单调递增, 但 $\{x_n\}$ 在任意项之后都不单调. □

2. 设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等.

证明. $\{a_n - b_n\}$ 收敛从而有界, 即 $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}_+, |a_n - b_n| \leqslant M$. 特别有 $a_n \leqslant b_n + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$. 由于 $\{b_n\}$ 单调减少, $a_n \leqslant b_1 + M, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 即 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 $b_1 + M$, 故 $\{a_n`\}$ 收敛. 同理可知 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 $a_1 - M$, 故 $\{b_n\}$ 也收敛. 由极限的四则运算法则, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. □

3. 按照极限的定义证明: 单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项, 单调减少有下界的数列的极限不大于数列极限的任何一项.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 若 $\exists n_0 \in \mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0} > a$, 则由 $\{x_n\}$ 单调增加知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, n > n_0, x_n \geqslant x_{n_0} > a$. 对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{x_{n_0} - a}{2} > 0$, $x_n - a \geqslant x_{n_0} - a > \varepsilon$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 矛盾.

设 $\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列, 则 $\{-y_n\}$ 是单调增加有上界的数列, 由单调有界原理, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} -y_n = -b$. 由前可知, $\forall n \in \mathbf{N}_+, -y_n \leqslant -b$, 即 $\forall n \in \mathbf{N}_+, y_n \geqslant b$. □

4. 设 $x_n = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} \cdots \dfrac{n+1}{2n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, x_n > 0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{n+1}{2n+1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+$. $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1} x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1. 由 3 题可知, a 不大于 $\{x_n\}$ 的任意一项, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

5. 设 $a_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdots \dfrac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

证明. 易知 $\forall n \in \mathbf{N}_+, a_n > 0$, 且 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{n+9}{2n-1} < 1, \forall n \in \mathbf{N}_+, n > 10$. $\{x_n\}$ 从第 11 项起单调递减有下界, 故极限存在, 设为 a, 在递推式 $x_n = \dfrac{n+9}{2n-1} x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 有 $a = a/2$, 故 $a = 0$ 或 1. 同上题推理有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

6. 在例题 2.2.6 的基础上证明: 当 $p > 1$ 时数列 $\{S_n\}$ 收敛, 其中

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbf{N}_+.$$

证明. 对于 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\exists k \in \mathbf{N}_+$ 使得 $2^{k-1} < n < 2^k$, 故

$$\begin{aligned}S_n \leqslant & S_{2^k-1} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\ \leqslant & 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1})^p} \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^p}\right) \\ = & 1 + 2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + \cdots + 2^{(k-1)(1-p)} \\ = & \frac{1-2^{k(1-p)}}{1-2^{1-p}} \leqslant \frac{1}{1-2^{1-p}}\end{aligned}$$

这表明 $\{S_n\}$ 有界, 又显然 $\{S_n\}$ 单调递增, 故由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛. □

7. 设 $0 < x_0 < \dfrac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明. $\sin x < x, \forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2}$, 故由数学归纳法易知 $x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{x_n\}$ 单调递减; 又由 $x_0 > 0$ 易知 $x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 即 0 是 $\{x_n\}$ 的下界. 由单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, 在 $x_n = \sin x_{n-1}$ 两边令 $n \to \infty$, 注意 $\sin x$ 是其定义域上的连续函数, 由 Heine 定理及极限的保序性, $\xi = \sin \xi, \xi \in [0, \pi/2]$, 故 $\xi = 0$. □

8. 设 $a_n = \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0.
(观察 $a_n = \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\dfrac{2n-1}{(2n)^2}\right)$.)

证明.

$$0 \leqslant a_n = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)}\right)\left(\frac{2n-1}{(2n)^2}\right).$$

由平均值不等式可知 $(2n-3)(2n-1) \leqslant \left(\dfrac{(2n-3)+(2n-1)}{2}\right)^2 = (2n-2)^2$, 即 $\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \leqslant 1$, 于是 $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{2n-1}{4n^2} \to 0\ (n \to \infty)$. 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

9. 设 $a_n = \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{2n+1}, n \in \mathbf{N}_+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.
(方法与上一题类似. 在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\dfrac{\pi}{2}$. 这就是 Wallis 公式.)

证明.

$$\begin{aligned}a_n &= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \left(\frac{2}{1^2}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\right)\cdot\frac{2n}{2n+1} \leqslant 2.\end{aligned}$$

其中用到了基本不等式 $(2n-2)(2n) \leqslant \left(\dfrac{(2n-2)+(2n)}{2}\right)^2 = (2n-1)^2$, 即 $\dfrac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2} \leqslant 1$, 于是 $\{a_n\}$ 有上界; 又由

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{4n^2}{4n^2-1} \geqslant 1.$$

故 $\{a_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. □

10. 下列数列中, 哪些是单调的?

(1) $\left\{\dfrac{1}{1+n^2}\right\}$; (2) $\{\sin n\}$; (3) $\{\sqrt[n]{n!}\}$.

证明. (1) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1+(n-1)^2}{1+n^2}\leqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减少;

(2) 由于 $\{\sin n\}$ 有界, 若其单调, 则 $\{\sin n\}$ 收敛, 而已知其发散, 故不单调;

(3) 由于 $n!<(n+1)^n$, 故 $(n!)^{n+1}<(n!)^n(n+1)^n$, 不等式两边开 $n(n+1)$ 次根号, 就有

$$\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n+1]{n!\cdot(n+1)}=\sqrt[n+1]{(n+1)!},$$

故 $\{\sqrt[n]{n!}\}$ 单调增加. □

11. 证明: 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列.

证明. 必要性. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 均收敛.

充分性. 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增加, 则其任意子列也单调增加. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=a$. 则由 3 可知, $\forall k\in\mathbf{N}_+, a_{n_k}\leqslant a$. 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在 $n_0\in\mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0}>a$, 从而对于充分大的 $k\in\mathbf{N}_+$, 有 $a_{n_k}\geqslant a_{n_0}>a$. 这与 $a_{n_k}\leqslant a,\forall k\in\mathbf{N}_+$ 矛盾. 故 $\{a_n\}$ 有上界. 从而由单调有界原理, $\{a_n\}$ 收敛. □

12. 对每个自然数 n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 中的根.[6] 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 令 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$, 则 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,\forall x>0$. 注意 $f_n(0)=0, f_n(1)=n\geqslant 1,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 故由 $f_n(x)$ 的单调性及连续函数的介值定理知, $f_n(x)$ 的零点在 $[0,1]$ 上存在唯一.

$$f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=f_n(x_{n+1})+x_{n+1}^{n+1}\geqslant f_n(x_{n+1}),\forall n\in\mathbf{N}_+,$$

由 $f_n(x)$ 的单调性易知 $x_n\geqslant x_{n+1}, n\in\mathbf{N}_+$, 故 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 在 $1=f_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}$ 的两侧取极限, 有 $1=2\xi-\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n+1}$. 注意到 $0\leqslant x_n^{n+1}\leqslant x_2^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$, 故 $\xi=1/2$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1/2$. □

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.4.1 思考题 pp.35.

若在这三个命题的条件中将极限值 l 改为不带符号的无穷大量 ∞, 则结论不成立. 请读者举出反例.

2.4.2 练习题 pp.37.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

证明. 对于 $\forall M>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 知存在 $N_1\in\mathbf{N}_+$ 使当 $n>N_1$ 时有 $x_n>3M$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}&=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+\cdots+x_n}{n}\\&>\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot 3M\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}\to 0, \dfrac{n-N_1}{n}\to 1\ (n\to\infty)$ 故存在 $N_2\mathbf{N}_+$ 使当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}>-M/2$ 且 $\dfrac{n-N_1}{n}>1/2$. 于是当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>3M/2-M/2=M.$$

[6] 事实上, 这里需要使用函数的单调性及连续性证明方程的根在闭区间 $[0,1]$ 中存在唯一.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$. □

2. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明. 断言 $\forall n\in\mathbf{N}_+, x_n\leqslant a$. 否则存在 $n_0\mathbf{N}_+$ 使得 $x_{n_0}>a$, 不妨设 $x_{n_0-1}\leqslant a<x_{n_0}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a=&\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+(x_n-a)}{n}\\ \geqslant&\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{n_0-1}-a)}{n}+\frac{(n-n_0+1)(x_{n_0}-a)}{n}\\ =&x_{n_0}-a+\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{n_0-1}-a)-(n_0-1)(x_{n_0}-a)}{n}\\ \to&x_{n_0}-a>0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$ 矛盾. 故 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant x_n\leqslant a,\forall n\in\mathbf{N}_+$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. □

3. 设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a, $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 b, 其 $a\neq b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
(注意: 虽然数列 $\{a_n\}$ 发散, 但前 n 项的算术平均值所组成的数列仍可以有极限.[7] 一个典型例子就是 $\{(-1)^n\}$.)

证明. 记 $y_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则由 Cauchy 命题, 有

$$\begin{aligned}y_{2n}=&\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}+\frac{a_2+a_4+\cdots+a_2n}{n}\right)\to\frac{a+b}{2},\\ y_{2n+1}=&\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}}{n+1}+\frac{n}{n+1}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}\right)\to\frac{a+b}{2},\ n\to\infty.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n+1}=\dfrac{a+b}{2}$, 由 pp.25. 1. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1+a_2+\cdots+a_nn=\dfrac{a+b}{2}$. □

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.
(本题可以说是 Cauchy 命题的另一种形式, 也很有用.)

证明. 定义[8] $a_0=0$, 记 $y_n=a_n-a_{n-1},n=1,2,\cdots$, 则由 Cauchy 命题可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=d$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且收敛于 A, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$.
(本题与 Cauchy 命题的关系是明显的.)

证明. 由基本不等式知,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\forall n\in\mathbf{N}_+.$$

若 $A=0$, 则 $0\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 由 Cauchy 命题知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$. 故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$.

若 $A>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{A}$, 由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{A}}=A,$$

[7]这里可以和级数的 Cesàro 求和结合起来看.

[8]这里定义的合理性在于任意改变数列的有限项, 数列的敛散性不变, 并且若其收敛, 其极限值不变.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A.$$

故由夹逼定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=A$. $\square$

6. 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.
(本题对类型为 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的极限问题很有用, 可以说是例题 2.1.2 的一个发展. 这个结果在无穷级数的研究中也很重要.[9])

证明. 定义 $a_0=0$, 则 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0}},\forall n\in\mathbf{N}_+$. $\{a_n\}$ 是正数列, 故 $\left\{\frac{a_n}{a_{n-a}}\right\}$ 也是正数列. 由 5 可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=l.$$ $\square$

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

证明. 定义 $x_{-1}=x_0=0$, 并记 $a_n=x_n-x_{n-2},n=1,2,\cdots$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=0$. 由 Cauchy 命题知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}\frac{x_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{n}=0.$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\frac{x_{2n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{n}=0.$$

故由 pp.25. 1. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$. $\square$

8. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证明. 定义 $x_{-1}=x_0=0$, 并记 $a_n=x_n-x_{n-2},n=1,2,\cdots$. 由 Cauchy 命题知, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由 7 知, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n+1}}{n}-\frac{2(n-1)}{n}\frac{x_{n-1}}{n-1}=0.$$ $\square$

9. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

证明. 由于 $0<a_1<1,a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, 故

$$0<a_2=a_1(1-a_1)\leqslant\left(\frac{a_1+(1-a_1)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<1,$$

归纳地可以得到 $\forall n\in\mathbf{N}_+,0<a_n<1$. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-a_n<1$, 知 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故其收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 在递推式 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$ 两侧令 $n\to\infty$, 就有 $a=a(1-a)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 又由 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, 同时取倒数就有

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-a_n}=1$. 由 Cauchy 命题可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na_n}-\frac{1}{na_1}\right)=1$. 于是就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$. $\square$

[9]参见正项级数的比值判别法(d'Alembert)和根值判别法(Cauchy), 我们有: 前者有效时后者一定有效, 但反之不成立, 如 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$.

10. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\alpha\beta$.

证明. [10] 当 $\beta=0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, 故存在 $M>0$ 使得 $|a_n|\leqslant M, n=1,2,\cdots$; 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}_+$ 使得当 $n>N_1$ 时, $|b_n|\leqslant\varepsilon/2M$, 于是

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant M\cdot\frac{|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{N_1}|}{n}+M\cdot\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2M}.$$

对于常数 $M'=M\cdot(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{N_1}|)$, 存在 $N_2\in\mathbf{N}_+$ 使得当 $n>N_2$ 时, $\dfrac{M'}{n}<\varepsilon/2$. 故当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时,

$$\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|| \leqslant M\cdot\frac{|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{N_1}|}{n}+M\cdot\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2M}<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=0$.

当 $\beta\neq0$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-\beta)=0$. 故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(b_n-\beta)+a_2(b_{n-1}-\beta)+\cdots+a_n(b_1-\beta)}{n}=0.$$

即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+1_nb_1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(b_n-\beta)+a_2(b_{n-1}-\beta)+\cdots+a_n(b_1-\beta)}{n}\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\beta\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\&=0+\beta\alpha=\alpha\beta.\end{aligned}$$

□

2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ

2.5.1 练习题 pp.45.

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$; (4) [11] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(在计算中可以应用 2.1.5 小节的题 5 中有关连续性的结果. 但是要请读者注意, 在现阶段如下的做法是缺乏依据的 (以题 (3) 为例):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.)$$

证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\mathrm{e}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{\mathrm{e}}$;

[10] 本题的证明方法可以用于一切类似 Teoplitz 定理的极限证明, 事实上 Teoplitz 定理也能类似给出证明.

[11] 原题为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, 显然也可以用本题的方法计算, 但结果为一个无穷大量.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^2;$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)\frac{n^2}{n-1}}=0;$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^0=1;$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}.$ □

2. 设 $x\in\mathbf{N}_+$, 证明: $\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}$.

证明. 由 pp.38 **命题 2.5.1** 中的不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 两边取对数, 可以得到不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\\&=\ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\cdot\frac{n+k-1}{n+k-1}\cdots\frac{n+1}{n}\right)\\&=\ln\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+k-2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

就有

$$\frac{k}{n+k}<\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{1}{n+k-1}+\frac{1}{n+k-2}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{k}{n}.$$ □

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

证明. 记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right), y_n=\ln x_n, n\in\mathbf{N}_+$. 则由上题有

$$\begin{aligned}y_n&<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty),\\y_n&>\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}>\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\mathrm{e}}$. □

4. [12] 设 $\{p_n\}$ 是正数列, 且 $p_n\to+\infty$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$.

证明. 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$, 有 $[p_n]\leqslant p_n<[p_n]+1$, $\frac{1}{[p_n]+1}\leqslant\frac{1}{[p_n]}$, 因此

$$\left(1+\frac{1}{[p_n]+1}\right)^{[p_n]}<\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}<\left(1+\frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n]+1}$$

[12]本题的结果与 Heine 定理结合就给出了一个 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 的证明.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$, 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-\mathrm{e}\right|<\varepsilon \text{ 且 } \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\mathrm{e}\right|<\varepsilon.$$

特别地, 当 $n>N$ 时有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n>\mathrm{e}-\varepsilon \text{ 且 } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\mathrm{e}+\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$, 对于 $N>0$, 存在 $M\in\mathbf{N}_+$ 使得 $n>M$ 时, $[p_n]>N$, 于是当 $n>M$ 时, 就有

$$\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[p_n]+1}\right)^{[p_n]}<\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}<\left(1+\frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n]+1}<\mathrm{e}+\varepsilon.$$

即当 $n>M$ 时 $\left|\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}-e\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$. □

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}$.[13]

证明. □

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

证明. 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+1-\ln n}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

□

7. 证明: $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.
([14]由此又可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.)

证明. 数学归纳法.

(1) $n=1$ 时, 由于 $2<\mathrm{e}<4$, 故有 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1<\dfrac{4}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}\cdot\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^2$, 即 $n=1$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}(n+1)!&<(n+1)\cdot\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^2\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}<\mathrm{e}\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+2},\\ &>(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n}=\mathrm{e}\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

这里用到了

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}<\mathrm{e}<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.$$

---

[13]事实上, 对于通项带有 a^n 项的数列, 可以尽情利用 Cauchy 根值判别法或者 d'Alembert 比值判别法. 如果记 $a_n=\dfrac{n!2^n}{n^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

[14]只需应用本题及夹逼准则即可.

由数学归纳法可知

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n} < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}.$$

对于 $n \in \mathbf{N}_{+}$ 恒成立. □

8. 设 $S_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n, n \in \mathbf{N}_+$. 证明: 对 $n \geqslant 2$ 成立不等式

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right) \leqslant S_n \leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

证明. 数学归纳法.

(1) $n=2$ 时, $2^2\left(1+\frac{1}{4(2-1)}\right)=5=S_2<2^2\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(2-1)}\right)$, 即 $n=2$ 时成立.

(2) 假设对于 n 时成立, 即

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right) \leqslant S_n \leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right).$$

则对于 $n+1$ 时,

$$\begin{aligned}
S_{n+1}=S_n+(n+1)^{n+1} <& n^n\left(1+\frac{2}{e(n-1)}\right)+(n+1)^{n+1}\\
=&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right)\right)\\
<&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{2}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)\\
<&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}n}\right),\\
S_{n+1}=S_n+(n+1)^{n+1} >& n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)+(n+1)^{n+1}\\
=&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right)\right)\\
\geqslant&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right)\\
\geqslant&(n+1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{4n}\right).
\end{aligned}$$

这里用到了

$$\mathrm{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant 4.$$

由数学归纳法可知

$$n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right) \leqslant S_n \leqslant n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right)$$

对于 $n \geqslant 2$ 恒成立. □

9. 设有 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1), n=2,3,\cdots$, 又设 $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right), n \in \mathbf{N}_+$, 求数列 $\{x_n\}$ 的极限.