直到最近，关于债务和违约的现有文献——无论是消费者债务还是主权债务部分——都只考虑了单期债务。实际上，消费者和国家都能并且确实会借入超过一个周期的债务。在本文中，我们提出了一种新的方法，将长期债务纳入Eaton和Gersovitz（1981）风格的无担保债务和违约的均衡模型中。

我们做出了四项贡献。首先，我们展示了一个无担保长期债务的均衡价格函数，该函数具有信贷供应曲线随利率上升的特性。因此，Eaton-Gersovitz框架的一个关键含义被证明适用于长期债务的情况。[1]

其次，我们通过提供对事实更完整的解释，为新兴市场商业周期的定量理论文献做出了贡献。具体来说，我们展示了我们的模型能够轻松解释新兴市场观察到的高债务产出比、平均利差以及利差的波动性，而不会损害模型对新兴市场商业周期事实的解释能力。[2] 我们表明，长期债务在这种解释中起着关键作用，即一个单期债务模型无法在不产生消费和贸易平衡的过度周期性波动以及这些数量与产出的低相关性的情况下，匹配三个关键的一阶和二阶矩。[3]

第三，我们研究了最优到期期限。尽管长期债务是对抗产出低实现的更好对冲，但主权不能承诺限制其未来借款的事实使得长期债务更加昂贵——即所谓的“债务稀释问题”。在我们的校准模型中，债务稀释问题带来的成本结果成为主导效应，福利随到期期限的增加而减少。然而，我们展示了当我们修改模型以允许小概率的自我实现的滚动危机时，这一结果被逆转。发行长期债务的主权比发行短期债务的主权对滚动危机的脆弱性要小。[4] 的确，我们展示了这种额外的冲击源不会影响基线长期债务模型的特性，但会显著影响单期债务模型的特性。具体来说，如果债务是短期的，主权会限制其借款以减少滚动危机的可能性。在我们的校准模型中，这种债务的缩减使得单期债务不如长期债务。

最后，我们提出了一种新颖的方法来准确计算无担保长期债务和违约的模型。我们的方法依赖于来自连续累积分布函数（CDF）的低方差独立同分布（i.i.d.）产出冲击的存在。正如我们稍后在论文中解释的，CDF的连续性是避免收敛不足的关键，而冲击的i.i.d.特性是开发一个能够针对非常严格的收敛标准求解均衡的算法的关键。

本文的组织如下。第一部分提供了简要的文献综述。第二部分介绍了主权债务环境。第三部分给出了主要的理论结果，并解释了解决这类模型所涉及的计算挑战以及如何满足这一挑战。第四部分呈现了当模型校准到阿根廷90年代的经验时的所有定量结果。两个在线附录包含了更技术性的结果，包括主要命题的证明。

II. 环境

A. 偏好和禀赋

时间是离散的，表示为$t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$。主权每个时期都收到一个严格正的禀赋$x_t$。$x_t$的随机演变由以下过程控制：

$$x_t = y_t + m_t.$$

这里，$m_t \in M = [-\overline{m}, \overline{m}]$是每个时期独立抽取的瞬时收入冲击，来自一个均值为零的概率分布，并且具有连续累积分布函数 (CDF)$G(m)$，而y_t是一个持久性收入冲击，它遵循一个有限状态的马尔可夫链，状态空间为$Y \subset \mathbb{R}_+$，转移法则为$\Pr\{y_{t+1} = y' | y_t = y\} = F(y, y') > 0, y$和$y' \in Y$。正如在引言中提到的，为了使模型的计算更加稳健，包括了 i.i.d. 冲击m。在随后的定量分析中，假设m的方差非常小，对禀赋过程 (1) 进行了估计。

主权国在消费序列上最大化预期效用，其中任何给定序列c_t的效用由下式给出：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad 0 < \beta < 1.$$

瞬时效用函数$u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$是连续的、严格递增的、严格凹的，并且其上界是量$U$。

B. Option to Default and the Market Arrangement

主权国家可以在国际信贷市场上借款，并有选择违约的选项。违约在几个方面都是有成本的。首先，一旦违约，主权国家就失去了进入国际信贷市场的机会——在违约期间不能借款或储蓄——并且在一些随机数量的时期内保持金融自主。具体来说，违约期之后，主权国家以概率$0 < \xi < 1$重新进入国际信贷市场。第二，在金融自主期间，主权国家失去了一部分持久性产出成分y的数量$\phi(y) > 0$。第三，主权国家的瞬时收入成分在违约期间降至$-\overline{m}$。[7] 我们假设$y - \phi(y) - \overline{m} > 0$（这确保了对于所有$(y, m) \in Y \times M$，$y - \phi(y) + m > 0$），**并且$y - \phi(y)$是关于$y$的增函数**。[8]

We analyze long-term debt contracts that **mature probabilistically。具体来说，每单位未偿还债务下一期到期的概率为λ。如果该单位没有到期，这种情况发生的概率为$1 - \lambda$，它将支付票息z。请注意，从现在开始，$k \geq 1$期前发行的类型为(z, λ)的单位债券与$k' > k$期前发行的另一个(z, λ)单位债券具有完全相同的支付结构。这意味着我们只需要跟踪(z, λ)债券的总数。这减少了状态变量的数量。** [9] 接下来我们假设单位债券是无限小的——这意味着如果下一期开始时有b单位的类型为(z, λ)的债券未偿还，发行人的下一期票息义务coupon obligations将以确定性为$z \cdot (1 - \lambda)b$，发行人的本金偿还义务payment-of-principal obligations将为λb。

我们假设这种经济中有一种类型的债券 $(\bar{z}, \lambda)$可用。我们假设债权人是**风险中性**的，并且主权债务市场是竞争性的。大小为b的债券的单位价格由$q(y, b)$给出。单位债券的价格不依赖于瞬时冲击m，因为知道当前时期的m不能帮助预测未来的m或y，因此，不能告知未来违约的可能性。我们假设主权国家可以从有限集合$B = \{b_I, b_{I-1}, \ldots b_2, b_1, 0\}$中选择其债务的大小，其中$b_I < b_{I-1} < \cdots < b_2 < b_1 < 0$。按照这个文献的惯例，我们将债务视为负资产。[10]

> 瞬时冲击m是一个iid的冲击，对于债券价格无影响

C. Decision Problem

考虑有$b \in B$单位的类型(z, λ)债券未偿还和禀赋(y, m)的主权国家的决策问题。记主权国家假设偿还债务下的终身效用函数为$V(y, m, b): Y \times M \times B \to \mathbb{R}$，假设被排除在国际信贷市场之外的终身效用函数为$X(y, m): Y \times M \to \mathbb{R}$，以及**无条件的（最优的）**终身效用函数为$W(y, m, b): Y \times M \times B \to \mathbb{R}$。

则，

$$X(y, m) = u(c) + \beta\{[1 - \xi]E_{(y'm')|y}X(y', m') + \xi E_{(y'm')|y}W(y', m', 0)\}$$

s.t.

$$c = y - \phi(y) + m.$$

> 实质上是一个简单的bellman equation，主要体现了下一期以ξ的概率再次进入借贷市场的效用

以及，

$$V(y, m, b) = \max_{b' \in B}\{u(c) + \beta E_{(y'm')|y}W(y', m', b')\}$$

s.t.

$$c = y + m + [\lambda + (1 - \lambda)z]b - q(y, b')[b' - (1 - \lambda)b].$$

上述假设偿还下的预算集非空，意味着至少存在一个b'的选择导致非负的消费。

- **但有可能(y, b, m)是这样一种情况，即所有b'的选择都导致负消费。在这种情况下，偿还根本无从谈起，主权国家必须违约。**

最后，

$$W(y, m, b) = \max\{V(y, m, b), X(y, -\overline{m})\}.$$

由于W决定了X和V（分别通过方程 (3) 和 (4)），方程 (11) 定义了W的一个贝尔曼方程。

我们假设如果主权国家在偿还和违约之间无差异，它会选择偿还。因此，主权国家违约当且仅当$X(y, -\overline{m}) > V(y, m, b)$。
这个决策问题意味着一个违约决策规则$d(y, m, b)$（其中$d = 1$是违约，$d = 0$是偿还），以及在偿还可行的区域，一个债务决策规则$a(y, m, b)$。

我们假设如果主权国家在两个不同的b之间无差异，它会选择较大的一个（即，选择较低的债务水平而不是较高的一个）。

D. 均衡

世界一期无风险利率r_f被视为外生的。在主权债务的市场竞争中，大小为b的债券的单位价格$q(y,b')$必须与零利润一致，同时调整违约概率。即

$$q(y,b') = E_{(y'm')|y}\left[[1-d(y',m',b')]\frac{\lambda+[1-\lambda][z+q(y',a(y',m',b'))]}{1+r_f}\right].$$

1. 在违约的情况下，债权人什么也得不到。
2. 在偿还的情况下，债权人得到λ，这是下一期到期的单位债券的一部分，而在剩余的部分$(1-\lambda)$上，债权人得到票息支付z。
3. 此外，剩余未偿还的部分具有一定的价值，这取决于主权国家下一期的持久性收入组成部分以及主权国家的下一期债务。由于方程右侧直接和间接地（通过决策规则d和a）依赖于函数$q(y,b')$，(6)可以被视为函数方程：$q(y,b')=(Hq)(y,b')$，其中H是由方程 (6) 右侧定义的算子。

关于 operator$H$: 在上述经济学模型中，算子Hq是定义在债券价格函数$q(y,b')$上的一个操作符，它通过考虑债券的**预期回报率和违约概率**来计算债券的单位价格。具体来说，Hq算子可以分解为以下几个步骤：

1. **预期回报率的计算**：在没有违约的情况下，债券的回报包括两部分：一部分是债券到期的本金比例λ，另一部分是剩余未到期债券的票息z加上这部分债券的未来价格$q(y',a(y',m',b'))$（这里$a(y',m',b')$表示下一期的债务决策）。
2. **风险调整**：因为存在违约的可能性，所以实际的回报需要根据违约决策函数$d(y',m',b')$进行调整。如果违约发生（$d(y',m',b')$为 1），债权人得不到回报；如果没有违约（$d(y',m',b')$为 0），债权人可以得到上述的回报。
3. **折现**：**由于回报发生在未来，需要使用一期无风险利率r_f将未来的回报折现到当前。**
4. **期望值计算**：考虑到未来状态的不确定性，需要对所有可能的未来状态(y',m')进行期望值计算，这通常通过概率分布$E_{(y'm')|y}$来实现。

将这些步骤结合起来，Hq算子可以定义为：

$$(Hq)(y,b') = E_{(y'm')|y}\left\{[1-d(y',m',b')]\left(\frac{\lambda+[1-\lambda][z+q(y',a(y',m',b'))]}{1+r_f}\right)\right\}$$

这个算子实际上是一个映射，它将当前的债券价格函数$q(y,b')$映射到一个新的价格函数上，这个过程考虑了违约概率、未来回报的不确定性和折现率。在均衡状态下，债券的市场价格$q(y,b')$应该满足

$q(y,b')=(Hq)(y,b')$，即市场价格反映了所有这些因素的综合影响。

III. Theory and Computational Algorithm

A. Theory

这一节陈述了有关违约和借款决策如何随着b的变化而变化的结果。
这些结果随后被用来确立本文的主要理论结果，即存在一个均衡定价函数，其特性是价格随着b'的增加而增加（所有断言的证明都可以在在线附录中找到）。

命题 1：$d(y,m,b)$是随着b减少的。
对于单期债务，命题 1 意味着均衡定价函数随着b'的增加而增加，**或者等价地说，更高的利率提供更多的信贷**。
在单期情况下$z=0$且$\lambda=1$，均衡定价方程 (6) 简化为

$$q(y,b')=E_{(y'm')|y}[1-d(y',m',b')]/[1+r_f]$$

由于这个等式的右侧根据命题 1 随着b'的增加而增加，**$q(y,b')$随着b'的增加而增加。**

但如果$\lambda<1$（平均到期时间超过一个周期），价格函数也依赖于$a(y,m,b)$。现在$q(y,b')$相对于b'的行为取决于$a(y,m,b)$如何随着 b 变化。但$a(y,m,b)$相对于 b 的行为又反过来取决于$q(y,b')$如何随着b'变化。

命题 2 说明如果价格函数随着b'的增加而增加，则债务决策规则随着 b 增加。
命题 3 随后确立了总存在一个解定价方程 (6) 的均衡价格函数，它是随着b'增加的。

命题 2： 如果$q(y,b')$随着b'的增加而增加，则$a(y,m,b)$随着 b 增加。

命题 3： 存在一个均衡价格函数$q'(y,b')$，它是随着 b' 增加的。

均衡价格函数的存在需要随机变量m的存在，且具有连续的累积分布函数 (CDF)。有了这个补充，算子H是$q(y,b')$的连续函数。为什么需要m来使H连续的原因在下一节中给出。

B. Computation of the Equilibrium Price Function

在这一节中，我们解释了为什么计算均衡价格函数可能是具有挑战性的，以及我们的论文如何应对这一挑战。解决方案是迭代 (6) 直到收敛。更准确地说，让k表示迭代次数，让$Z^k(y,b')=E_{(y',m'|y)}W^k(y',m',b')$表示在$y$和$b'$的条件下的预期终身效用。让$d(y,m,b;q^k,Z^k)$和$a(y,m,b;q^k,Z^k)$分别是在价格函数为$q^k(y,b')$和预期终身效用为$Z^k(y,b')$时的违约和债务决策规

则。让$H[q^k, Z^k]$表示在给定$d(y,m,b;q^k,Z^k)$和$a(y,m,b;q^k,Z^k)$时方程 (6) 右侧的期望，让ζ是一个“放松参数”relaxation parameter：那么，

$$
\begin{aligned}
q^{k+1}(y,b') &= (1-\zeta)H[q^k, Z^k](y,b') + \zeta q^k(y,b'), \\
Z^{k+1}(y,b') &= E_{(m',y')|y} \max\left\{X(y',-\overline{m};Z^k), V(y',m',b';q^k,Z^k)\right\},
\end{aligned}
$$

迭代继续进行，直到$\max_{y,b'}|H(q^k,Z^k)(y,b')-q^k(y,b')|$和$\max_{y,b'}|Z^{k+1}(y,b')-Z^k(y,b')|$都足够接近零。

为了使迭代收敛，$q(y,b') = E_{(y'm')|y}\left[[1-d(y',m',b')]\frac{\lambda+[1-\lambda][z+q(y',a(y',m',b'))]}{1+r_f}\right]$.必须有一个解。
但如果y和b都是离散的，而m恒等于零，就没有保证 (6) 会有解，**因为算子H在函数$q(y,b')$中不一定是连续的。**
例如，如果对于某个$q(y,b')$函数和某个$(y,b,0)$，主权国家在违约和偿还之间无差异，函数$q(y,b')$的微小变化将导致行为的转变，因此，在 (6) 方程右侧的期望中会产生离散变化。同样，即使主权国家严格倾向于偿还，它可能在两种不同的债务选择之间无差异。再一次，$q(y,b')$函数的微小变化可能导致行为的离散变化和期望项的离散变化。[11] **请注意，由于$a(y,m,0)$出现在定价方程中，因此对于长期债务而言，由于无差异而产生跳跃的范围比短期债务要大得多。**

- 这种长期债务的额外复杂性不能通过细化B网格来减轻，**因为无差异的点在网格上可能相距甚远。这是因为偿还下的预算集通常不是凸的。**

图 1 展示了在本文后面介绍的数量模型中，当$b=0$且$m=0$时，$q(y,b')[b'-(1-\lambda)b]$函数的一部分。注意函数上升部分的拐点和随后的凹陷。图 2 显示了在$b=0$和$m=0$的情况下，不同选择的b'对总终身效用的变化。!Pasted image 20240719205048.png
观察这个函数中的许多非凹段。这些非凹性意味着，给定(y,b)和q，主权国家可能对两个相隔很远的b'值无差异，这将使 (6) 方程右侧的算子H在$q(y,b')$中不连续。

在线附录中我们记录了如果不使用m冲击求解模型会导致均衡定价函数的收敛结果不佳。图 2 中标记为A（全局最大值）和B（局部最大值）的点说明了出了什么问题。当m的方差设为 0 时，通常会出现像A这样的点是某些迭代k的最优选择，但是当这个选择被纳入定价函数时，像B这样的点成为某些迭代$k'>k$的最优选择；当这个选择被纳入定价函数时，点A重新作为某些迭代$k''>k'$的新最优选择。因此，资产决策规则来回徘徊，(7) 未能收敛。我们怀疑这种缺乏收敛性是因为实际上没有 (6) 方程的解。[12]

我们从一般均衡理论知道，**由非凸性导致的不存在性可以通过允许代理人在决策中随机化来避免。** 引入m就像引入随机化：**现在有一个概率，即在给定(y,b)和$q(y,b')$的情况下选择动作d或b'，这个概率随着函数$q(y,b')$连续变化。**

预算集的非凸性和价值函数的非凹性继续意味着决策规则$a(y,m,b;q)$是$q(y,b')$的不连续函数。但只要不连续点的数量是有限的，q的微小变化不会引起期望项（现在是一个关于y'和连续变量m'的积分）的跳跃，因为每个跳跃点的概率为零。通过这种方式，m的连续累积分布函数（CDF）确保了函数方程 (6) 右侧相对于$q(y,b')$的连续性以及均衡的存在。[13] 然而，引入m带来了它自己的计算问题。由于m是一个连续变量，非凸性使得$a(y,m,b;q^k,Z^k)$在m中可能“不连续”，因此不清楚如何计算这个决策规则。[14] 这里假设m是独立同分布（i.i.d.）发挥了重要作用——它允许我们确定$d(y,m,b)$和$a(y,m,b)$相对于m是单调的。我们有：

命题 4：$a(y,m,b)$在 m 上是递增的，而$d(y,m,b)$在 m 上是递减的。

因此，计算相对于m的决策规则归结为

1. 定位$d(y,m,b;q^k,Z^k)$从 1 变为 0 的m值，以及
2.$a(y,m,b;q^k,Z^k)$从一个债务水平变为一个较低债务水平的m值。[15]
请注意，事先不知道主权国家随着 m 的增加而转向哪个较低的债务值；特别是，它不一定是网格上的下一个较低债务水平。然而，存在一个算法，在线附录中描述，可以几乎精确地恢复$a(y,m,b;q^k,Z^k)$。[16] 一旦知道了相对于 m 的行为，$\max\{X^k(y,-\overline{m}),V^k(y,m,b;q^k,Z^k)\}=W^k(y,m,b;q^k,Z^k)$就可以使用在线附录中描述的积分方法准确地关于 m 进行积分。通过这种方式，可以针对非常严格的收敛标准计算价值函数和价格函数。
另一个问题是，如果m的方差太小，迭代 (7) 可能无法收敛。随着 q 的变化，m 的阈值也会变化。**如果m的方差非常小，任何给定的阈值变化都将导致选择概率的大变化**。将ζ设置得非常接近 1 可以抵消这种敏感性（通过使$q^{k+1}(y,b')$和$q^k(y,b')$之间的变化本身非常小），但代价是使达到收敛所需的迭代次数远大于我们的上限 3,000。因此，为了实现收敛σ_m不能太小。[17] 更一般地说，σ_m和ζ之间在实现收敛方面存在权衡：**σ_m越低，为了实现收敛，ζ必须越高**（这种权衡的一个例子在线附录中给出）。

最终的计算问题在于，假设 y 和b是离散的而不是连续的，解决长期债务模型是否有优势。我们认为有两个优势。首先，如果 y 或b（或两者）是连续变量，$q(y,b')$就是无限维的，很难确立$q(y,b')=(Hq)(y,b')$的解的存在性。如果解不保证存在，计算算法未能收敛，就无法判断这种失败是由于缺乏解还是由于算法有缺陷。其次，对于连续的 y 和/或b'，任何计算方案都必须涉及插值价值函数和价格函数。为了使插值合理，函数必须要么可微（参见 Judd 1998 年的定理 6.7.3 和 6.9.1），要么具有已知的 Lipschitz 界限的 Lipschitz 连续性。但对于这类模型，价值函数和价格函数并不是到处可微，发现$q(y,b')$的 Lipschitz 界限似乎是一个具有挑战性的任务。[18]

IV. Maturity, Indebtedness, and Spreads: The Argentine Case

A. Calibration

我们将前几节中发展起来的框架应用于阿根廷。主要的贡献是展示长期债券，除了更贴近现实外，还可以帮助解释阿根廷的平均利差水平、利差的波动性以及债务的平均水平，而不会对阿根廷的商业周期事实产生反事实的含义。因此，将长期债券引入Eaton-Gersovitz模型显著提高了其定量表现。我们关注的是1993年第一季度到2001年第四季度这八年期间，在此期间阿根廷对美元实行固定汇率，并通过可交易债券在国际信贷市场借款。

对于定量工作，我们做出以下具体的函数形式或分布假设：

- 禀赋过程：

$$\ln y_t = \rho \ln y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{where} \quad 0 < \rho < 1 \quad \text{and} \quad \epsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$$

$$m_t \sim \text{trunc}N\left(0, \sigma_m^2\right) \quad \text{with points of truncation} \quad -\overline{m} \quad \text{and} \quad \overline{m}$$

\

在统计学和概率论中，trunc $N\left(0, \sigma_m^2\right)$表示一个截断的正态分布（truncated normal distribution）。具体来说，它指的是一个均值为0，方差为σ_m^2的正态分布，但只包括分布的某一部分，通常是分布的正态范围或指定区间内的部分。

在上文的经济学模型中，trunc $N\left(0, \sigma_m^2\right)$表示瞬时收入冲击$m_t$来自一个均值为0，方差为$\sigma_m^2$的正态分布，但这个分布被截断在某个区间内，例如，可能只包括从$-\overline{m}$到$\overline{m}$之间的值，这里的$-\overline{m}$和$\overline{m}$是分布的截断点。

截断正态分布的特点是它依然保持了正态分布的对称性，但由于截断，分布的某些尾部概率被转移到了区间内部，导致分布的密度函数在区间内某点达到峰值，而不是在均值处。这种分布通常用于那些不能取负值的随机变量建模，例如收入冲击或某些经济指标。
计算截断正态分布的累积分布函数（CDF）相对复杂，但可以通过以下步骤实现：

1. **定义截断正态分布**：
   假设有一个正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，其中μ是均值，σ^2是方差。如果这个分布被截断在区间$[a, b]$内，那么截断正态分布的累积分布函数$F(x)$可以定义为：

$$F(x) = \frac{1}{S}\left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

其中，Φ是标准正态分布的累积分布函数，S是截断区间的标准化概率，确保$F(b) = 1$：

$$S = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

2. **计算标准正态分布的CDF**：
   使用标准正态分布的累积分布函数$\Phi(x)$计算截断点a和b对应的累积概率。
3. **标准化**：
   将计算出的累积概率除以S进行标准化，确保分布的总概率为1。
4. **计算任意点的CDF**：
   对于任意点x，使用上述公式计算其在截断正态分布下的累积概率。

示例计算
假设有一个均值为0，方差为1的正态分布$N(0,1)$，被截断在区间$[a,b]$内。要计算x的累积分布函数，可以按照以下步骤：

1. **计算截断点的CDF值**：

$$\Phi_a = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right), \quad \Phi_b = \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)$$

2. **计算标准化因子S**：

$$S = \Phi_b - \Phi_a$$

3. **计算任意点x的CDF**：

$$F(x) = \frac{1}{S}\left[\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi_a\right]$$

注意事项

- 截断点a和b必须在正态分布的支撑范围内，通常为负无穷到正无穷。
- 计算标准正态分布的CDF$\Phi(x)$通常需要使用数学软件或标准正态分布表。

这种方法可以用于任何正态分布，只要指定了截断区间和分布的参数。

- 效用函数：$u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$。
- **违约或被排除时产出的持久性部分的损失：**

$$\phi(y) = \max\{0, d_0 y + d_1 y^2\}, d_1 \geq 0.$$

$\phi(y)$的规范允许各种成本函数。如果$d_0 > 0$且$d_1 = 0$，成本与产出成比例；如果$d_0 = 0$且$d_1 > 0$，成本随着产出的增加而增加；如果$d_0 < 0$且$d_1 > 0$，成本在$0 \leq y \leq -d_0/d_1$时为0，而在$y > -d_0/d_1$时随着产出的增加而增加。最后一种情况类似于Arellano(2008)中的成本函数。选择这种灵活形式的原因在发现部分讨论。[21] 有了这些假设，模型的数值规范需要给11个参数赋值。这些是

1. 三个禀赋过程参数，σ_m, ρ和σ_ϵ^2;
2. 两个偏好参数，β和γ;
3. 两个描述债券的参数，到期参数λ和票息支付z;
4. 两个违约产出损失参数，d_0和d_1;
5. 违约后重新进入的概率ξ;
6. 无风险利率r_f.

禀赋过程的参数是根据1980年第一季度到2001年第四季度期间线性去趋势的季度实际GDP数据估算的。[22] 如前所述，(7) 的收敛要求i.i.d.冲击m的标准差不要太低。实验表明$\sigma_m = 0.003$是我们目的的良好下限——这意味着在广泛的参数值范围内，3000次迭代内实现了收敛。因此，假设$\sigma_m = 0.003$来估算禀赋过程。ρ和σ_ϵ的估计值分别为0.948503和0.027092。[23] 在计算中，我们用200状态的马尔可夫链近似 y 过程，并设置$\overline{m} = 2\sigma_m = 0.006$.[24] 在偏好参数中，$\gamma$的值设为2，这是这类文献中使用的标准值。

描述债券的参数被确定为匹配Broner, Lorenzoni, 和 Schmukler (2007) 报告的阿根廷的到期和票息信息。

阿根廷债券的中位到期时间是20个季度，因此$\lambda = 1/20 = 0.05$.

我们设置$z = 0.03$，对应于12%的年票息率annual coupon rate。在数据中，价值加权平均票息率约为11% value-weighted average coupon rate[25]

[25]我们选择12%是因为，如果年无风险利率为4%，平均利差大约为8%，那么票息为12%的债券将大致以平价交易。所以，无论债务是按面值记录（这是会计惯例）还是按市场价格记录（这在经济上更有意义），都不会影响模型的校准。

在金融领域，年票息率（annual coupon rate）通常表示为名义利率，而在这里设置的$z = 0.03$表示的是每季度的票息支付比例。要将季度票息率转换为年票息率，我们需要考虑一年中支付票息的次数。

由于大多数投资和贷款的年利率是按复利计算的，我们需要将季度利率转换为等效的年利率。如果每季度支付票息，一年就有4个季度，因此需要将季度利率复利化以得到年利率。

复利公式为：

$$(1+z)^n = (1+0.03)^4$$

其中n是每年的复利频率，在这种情况下是4（一年四次）。

将$z = 0.03$代入公式计算年票息率：

$$(1+0.03)^4 = (1.03)^4 \approx 1.1254896$$

这意味着年票息率大约是 12.55%。然而，如果我们要近似为一个简单的百分比，通常会将季度票息率乘以4来得到一个粗略的年票息率估计，即：

$$4 \times 0.03 = 0.12$$

这给出了一个12%的年票息率的近似值。这个近似值忽略了由于复利效应产生的额外收益，但在很多情况下，这种近似已经足够用于快速估算或当复利效应相对较小时。在实际的金融分析中，为了更精确地计算，应该使用复利公式。

我们设置$\xi = 0.0385$，这给出了一个平均排除期为26个季度，或6.5年。衡量排除期的一个指标是达到违约债务结算所需的时间。Beim和Calomiris（2000, 表A）报告说，对于1982年阿根廷的违约，直到1993年才达成结算。对于2001年的违约，阿根廷在2005年与其大多数债权人达成了结算。Benjamin和Wright（2009, 图15）也报告说，阿根廷在1982年到1993年和2001年到2005年之间处于违约状态。根据这些衡量标准，阿根廷的平均排除期为7.5年。Gelos, Sahay, 和 Sandleris（2011）将排除期定义为从违约到下一次公共和公共担保债券或银团贷款发行的年份之间的年数。按这一衡量标准，1982年违约后的排除期仅为四年（表A7）。他们没有报告2001年违约的排除期。在我们的校准中，我们对排除期的结算日期衡量给予了稍多的权重，并设定平均排除期为6.5年。

无风险利率r_f，被设定为0.01，这大致相当于一个3个月（一个季度）美国国库券的实际回报率。

剩余的三个参数β, d_0和d_1被选定以匹配：

1. 平均外债与产出比率的0.7，这是1993年第一季度至2001年第四季度期间阿根廷平均外债与产出比率的70%
2. 同一时期的平均违约利差为0.0815；以及
3. 利差的0.0443的标准差。[26]

- 债务是指每年年底，根据世界银行全球发展金融数据库（GDF）报告的，私人和官方债权人持有的未偿还的**长期公共及公共担保外债总额**（GDF数据库系列DT.DOD.DPPG.CD）。
- **平均债务与产出比率是以季度利率衡量的债务与国民生产总值（GNP）比率的平均值。**
- 利差是Neumeyer和Perri（2005）报告的利率数据（与EMBI数据相同）与**3个月期国库券利率**之间的差额。
- 所使用的国库券利率系列是可在 http://research.stlouisfed.org/fred2/categories/116 上找到的TB3MS系列。
- 利率数据和国库券利率都是以年化形式报告的。

我们只寻求匹配部分债务，因为我们没有模拟偿还。在现实中，进入违约的主权债务最终会偿还一些。在阿根廷的案例中，2001年违约债务的偿还大约是30美分对1美元。因此，我们只将每1美元债务中的70美分视为债务的真正无担保部分。但是，作为我们敏感性分析的一部分，我们也研究了完全匹配平均外债与产出比率的情况。

最后，我们需要指定外债与产出比率和利差的model analogs。**在GDF数据库中，一个国家的外部承诺是以现金会计基础（cash-accounting basis）报告的，这意味着承诺以其面值记录**，即，它们被记录为未来承诺支付的本金的未贴现总和。[27] 约定的票息支付在这种会计中不直接计算，因为它们在逾期之前不被视为义务。鉴于这一估值原则，数据中报告的债务的模型类比仅仅是b，外债与产出比率仅仅是b/y。[28] 模型中的违约利差如数据中计算的那样。我们计算内部收益率$r(y,b')$，使得单位债券上承诺的未来支付序列的现值等于单位价格，即，$q(y,b') = [\lambda + (1-\lambda)z]/[\lambda + r(y,b')]$。$(1+r(y,b'))^4 - 1$与$(1+r_f)^4 - 1$之间的差额是模型中的**年化违约利差**。[29]

29 如果不存在违约的可能性，单位价格将是一个恒定的$\overline{q}$，使得$\overline{q} = [\lambda + (1-\lambda) \times (z+\bar{q})]/[1+r_f]$，这暗示着$\overline{q} = [\lambda + (1-\bar{\lambda})z]/[\lambda + r_f]$。由于$q(y,b) \leq \overline{q}$，可以得出$r(y,b') \geq r_f$。此外，违约的可能性越大，$q(y,b')$就越低，而$r(y,b')$就越高。

参数选择总结在以下两个表中。表1列出了直接选定的参数值，而没有解决模型的均衡。表2列出了通过解决模型的均衡并选择参数以使模型矩尽可能接近上述三个数据矩来选定的参数值。

TABLE 1—PARAMETERS SELECTED DIRECTLY

Parameter	Description	Value
γ	risk aversion	2
$\bar{m}$	bound on m	0.006
σ_m	standard deviation of m	0.003
σ_ϵ	standard deviation of ϵ	0.027092
ρ	autocorrelation	0.948503
ξ	probability of reentry	0.0385
r_f	risk-free return	0.01
λ	reciprocal of average maturity	0.05
z	coupon payments	0.03

TABLE 2—PARAMETERS SELECTED BY MATCHING MOMENTS

Parameter	Description	Value
β	discount factor	0.95402
d_0	default cost parameter	−0.18819
d_1	default cost parameter	0.24558

TABLE 3—RESULTS AND COMPARISON

Statistics	Data	Baseline	Arellano Table 4, p.706
Average spread	0.0815	0.0815	0.0358
SD of spread	0.0443	0.0443	0.0636
Debt-to-Y ratio	1.00	0.70	0.06

B.Findings

表3报告了矩匹配练习的结果。数字的第一列显示了阿根廷的数据。第二列报告了模型中的矩。所有模型矩都是（样本）平均值，通过在许多周期内模拟经济计算得出，但在每次违约后重新进入的前20个周期总是被丢弃。

[30]我们这样做是因为模型经济在没有任何债务的情况下重新进入资本市场，而阿根廷在每次违约/重组事件后都带着债务出现。通过忽略重新进入后的前五年，我们忽略了模型中债务异常低的年份。

显然，匹配练习是完全成功的。 图3显示了如果初始债务水平被选择为完全匹配1993年第一季度的利差，1993-2001年模型模拟的利差路径。模型隐含的利差与数据之间的密切对应关系是惊人的。

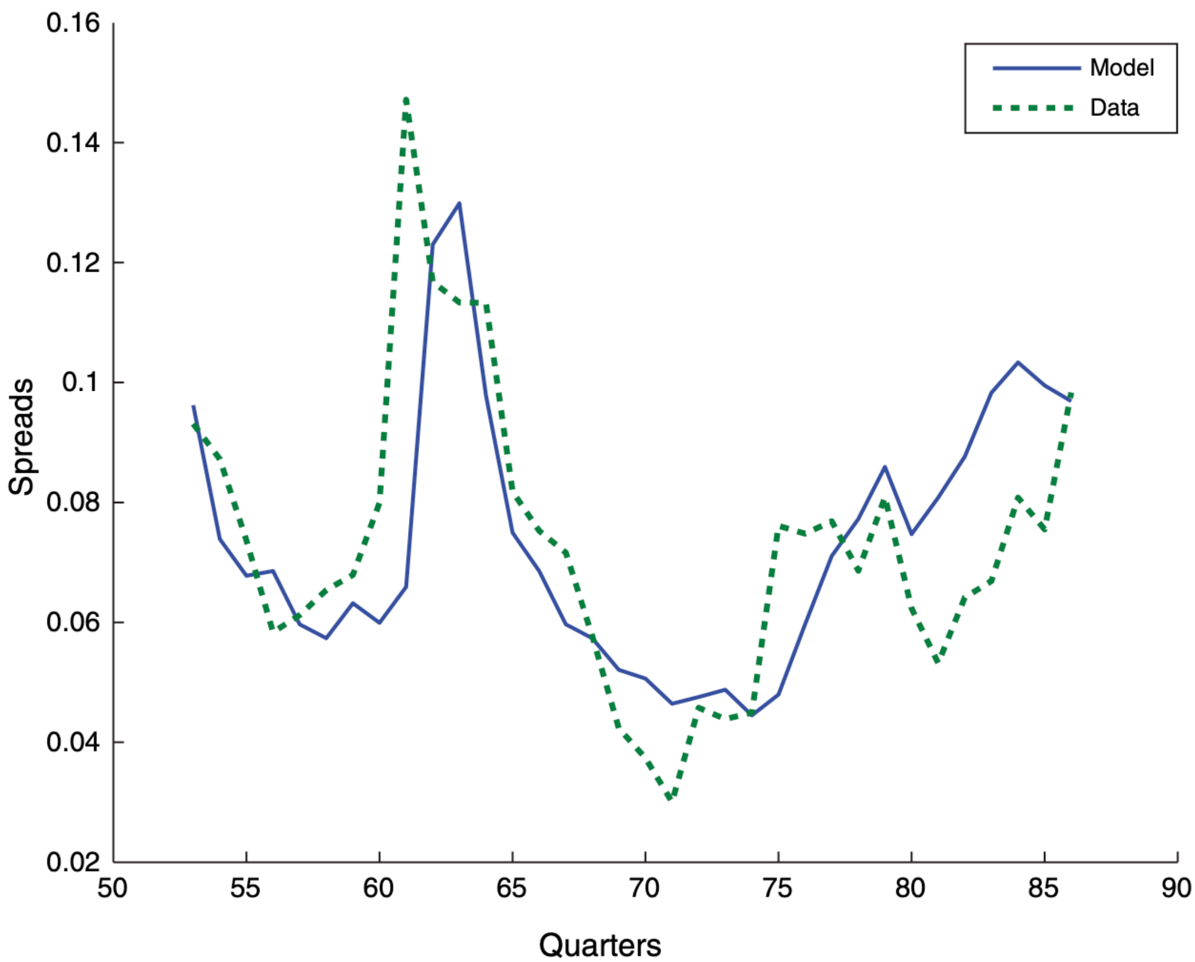

FIGURE 3. SIMULATED SPREADS FOR MODEL AND DATA (1993:I–2001:III)

为了比较，最后一列报告了Arellano (2008)一季度债务模型的相应模型统计数据。尽管Arellano没有针对这些统计数据，但事实仍然是，她的模型与数据之间存在显著偏差：债务-产出比率非常低，平均利差大约低50%，利差的波动性大约高44%。

表4报告了阿根廷数据的一些关键周期性属性和相应的模型矩。 **Since we did not target these moments, the results are informative about the performance of our model.**

TABLE 4—CYCLICAL PROPERTIES, DATA, AND MODELS

Variable	Data 1993:I–2001:IV	Baseline	1-period debt	Arellano Table 4, p.706
$\sigma(c)/\sigma(y)$[a]	1.09	1.11	1.59	1.10
$\sigma(NX/y)/\sigma(y)$	0.17	0.20	1.06	0.26
$\text{corr}(c, y)$[a]	0.98	0.99	0.73	0.97
$\text{corr}(NX/y, y)$	−0.88	−0.44	−0.16	−0.25
$\text{corr}(r - r_f, y)$	−0.79	−0.65	−0.55	−0.29
Average debt service[c]	0.053	0.055	0.699	0.056
Default freqency[b]	0.125	0.068	0.073	0.030

Notes: [a]Sample period is 1980:I–2001:IV; [b]Sample period is 1975–2001; [c]Principal and interest payments as a fraction of output.

数字的第一列是阿根廷的数据。数据的几个特点很突出。

- 首先，消费的相对波动性与产出大致相同——与小型、开放、发达经济体形成鲜明对比。
- 其次，贸易平衡是逆周期的，这也与小型、开放、发达经济体不同。
- 第三，主权债务的利差是逆周期的，阿根廷在1975-2001年期间显示出很高的违约倾向。
  接下来的列报告了模型的相同统计数据。模型正确地得到了数据的定性模式：**模型消费和贸易平衡与产出的波动性水平大致正确，贸易平衡和利差是逆周期的，而消费是高度顺周期的**。模型中导致这些模式的力量是在Aguiar和Gopinath（2006）和Arellano(2008)中强调的那些。模型中违约的平均概率低于观察到的违约频率；但违约是一个罕见事件，从相对较短的数据系列中准确估计其频率是困难的。

第三列数据报告了如果假设债务是一期的，并且选择了(β, d_0, d_1)来匹配基线模型中相同的三个统计数据，结果会如何。实现这种匹配的参数向量是$(0.67, -0.46, 0.57)$。除了β值如此之低的不可信之外，这种匹配还对商业周期统计数据产生了严重的异常。现在消费和贸易平衡的相对波动性远高于数据，消费、贸易平衡和利差与产出的相关性远低于数据。纳入长期债务使表4中的几乎每一个模型矩都更接近数据，这是长期债务模型更优越性能的明确指标。

为什么一期债务模型意味着如此高的消费波动性？ 原因很简单：如果有b美元的未偿还债务，债务偿还义务就是b美元，主权国家必须以新价格$q(y, b)$再融资全部的b美元以维持其债务水平。因此，$q(y, b)$的变化往往会意味着消费和贸易平衡的大变化，因为b相对于产出来说是大的。相比之下，有长期债务时，债务偿还义务只是$[\lambda + (1 - \lambda)z]b$美元，主权国家可以通过以新价格$q(y, b)$再融资数量小得多的$\lambda b$美元来维持其债务水平。因此，对于给定的利差波动性，长期债务模型可以在不造成消费和贸易平衡的反事实高波动性的情况下，匹配债务的平均水平。

最后一列报告了Arellano (2008, 表4) 中基准模型的结果。即使忽略违约的频率，长期债务模型在解释周期性矩方面也大大接近。在Arellano的模型中，**净出口与产出之间**以及**利差与产出之间**的（负）相关性平均大约是数据中的33%。相比之下，在长期债务模型中，这些相关性分别大约是数据中的50%和82%。

C. Model Mechanics

违约成本函数的作用

由于校准值d_0和d_1分别为负和正，我们的规范具有Arellano（2008年）在其违约成本规范中引入的特征，**即违约成本占产出的比例随着产出的增加而下降，并在足够低的产出水平下变为零。**

现在人们普遍理解，这种违约惩罚结构对于产生更高的违约率至关重要，**无论违约成本函数是内生的还是外生的**（例如，参见Mendoza和Yue 2012年的讨论）。

关键在于违约成本的不对称性：当收入高时，国家因违约受到的惩罚比收入低时严重得多。

- 在高收入时期对违约的严厉惩罚意味着，当产出高时（考虑到产出的持续性），投资者不期望主权国家在近期内违约。这导致利差较低，而（不耐烦的）主权国家则积极借款。
- 但当产出下降时，违约的惩罚也随之下降。这增加了违约的可能性，利差上升。高利差使债务服务更加繁重，最终，如果收入保持在低位，主权国家就会违约。没有不对称性，就不可能在不使主权国家非常不耐烦的情况下产生显著的正违约频率。[35]

文献中似乎没有充分认识到违约成本结构对于利差波动性的重要性。对于Arellano的规范，违约成本占产出的比例是$1-\overline{y}\cdot y^{-1}$（其中$\overline{y}$是产出水平，低于此水平成本为零），这非常敏感于$y$的变化。因此，违约的可能性相应地对$y$的波动非常敏感，利差也是如此（回想一下Arellano的模型预测了比数据更高的利差波动性）。使用我们的规范，我们可以匹配利差的水平和波动性。d_1越大，利差可能就越不稳定。这种直觉在表5中得到了验证，表5显示了在调整d_0和β以匹配平均债务产出比和平均利差的目标时，d_1的变化结果。注意，利差的波动性随着d_1的增加而上升。

TABLE 5—ROLE OF DEFAULT COST PARAMETERS

d_1	d_0	β	$\sigma(r-r_f)$	avg. $(r-r_f)$	avg. b/y
0.15	−0.098	0.93696	0.0264	0.0815	0.70
0.25 (baseline)	−0.188	0.95402	0.0443	0.0815	0.70
0.35	−0.288	0.96195	0.0577	0.0815	0.70

β和d_0的伴随变化对模型的经济性具有启示性，值得评论。
+d_1**越高，利差对产出变化的敏感性就越高，模型实现更高违约频率就越容易**。由于更高的违约频率和高利差更容易用更高的d_1实现，主权国家需要更有耐心，以便它愿意持有意味着观察到的违约概率的债务水平。这解释了为什么β的值随着d_1的增加而上升。

- 我们还看到，随着d_1的增加，d_0下降。这是因为d_1的增加使违约成本函数上移，扩大了主权国家在不违约的情况下可以承担的最大债务量。只要β足够小于$1/(1+r_f)$，主权国家就会趋向这个最大值，这将增加平均债务水平。为了保持平均债务水平不变，整体违约惩罚应该保持大致不变。因此，d_0下降以平衡d_1的增加。

长期债务的作用

在本节中，我们解释了长期债务在我们模型中的作用。理解其作用的一种方式是计算短期债务的基线模型的均衡，即所有参数值都保持在其基线值，**但主权国家只能发行单期债务。** 这项练习的结果在表6的最后一列中显示。均衡有显著差异。平均利差、利差的波动性和违约频率与长期债券案例相比微不足道。

TABLE 6—ROLE OF LONG-TERM DEBT

Moment	Data	Baseline	Baseline with $\lambda = 1$
Average $(r - r_f)$	0.0815	0.0815	0.0026
$\sigma(r - r_f)$	0.0443	0.0443	0.0037
Average b/y	1	0.70	0.81
$\sigma(c)/\sigma(y)$	1.09	1.11	1.14
$\sigma(NX/y)/\sigma(y)$	0.17	0.20	0.34
$corr(c, y)$	0.98	0.99	0.95
$corr(NX/y, y)$	−0.88	−0.44	−0.24
$corr(r - r_f, y)$	−0.79	−0.65	−0.42
Debt service	0.053	0.055	0.812
Default frequency	0.075	0.068	0.002

这引发了一个问题，即为什么增加到期期限超过一个周期会使主权国家愿意将其借款扩展到违约概率显著为正的区域。答案在于两种情况下发行额外债务的**激励不同**。将b'视为连续变量，借款的边际收益由下式给出：

$$\left(-q(y,b') - \frac{\partial q\,(y,b')}{\partial b'}[b' - (1-\lambda)b]\right) u'(c).$$

当主权国家发行额外单位的债务时，**它从该额外单位获得收入，但面对债券价格的下降，这降低了当前发行的所有债券的收入**。在短期债务的情况下，价格下降适用于全部债务存量b'，而长期债务则适用于$[b' - (1-\lambda)b]$。因此，在短期案例中，当违约概率变为正时，主权国家面临的借款抑制更大。

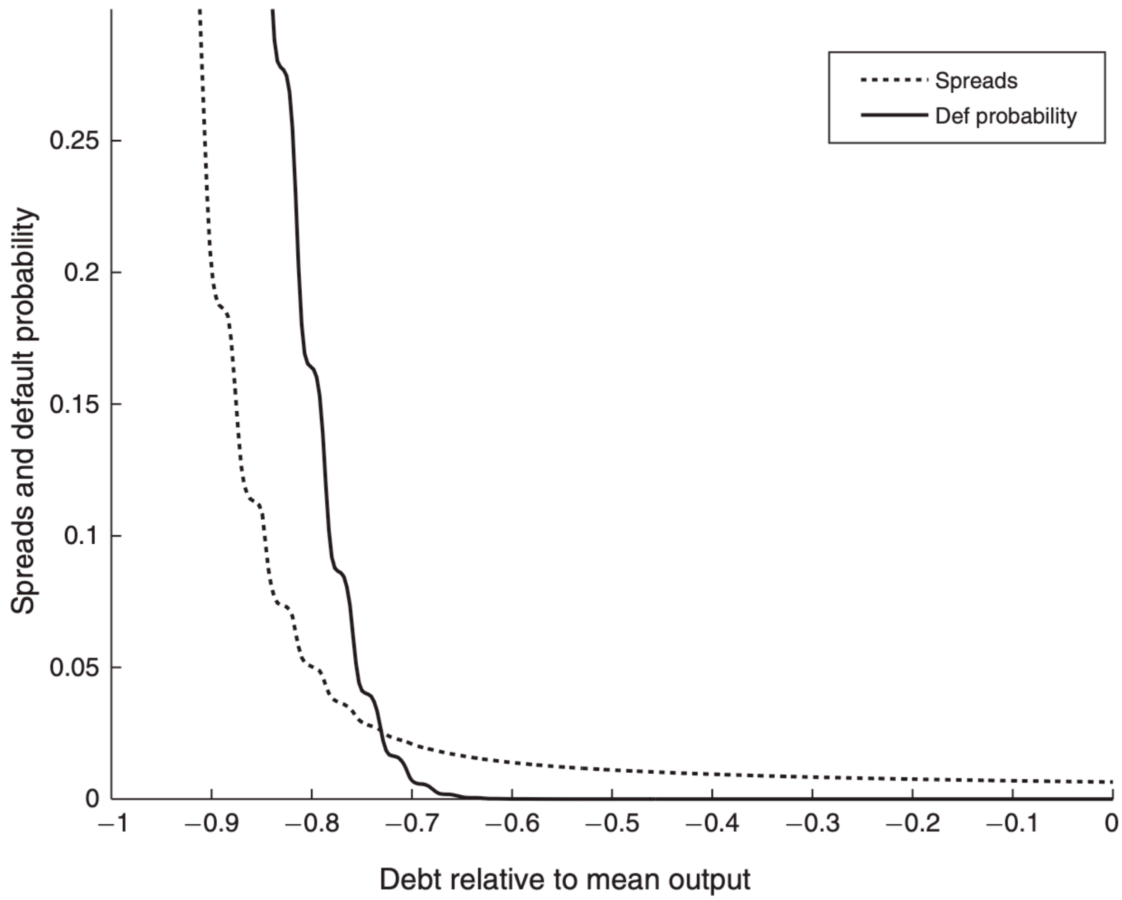

FIGURE 4. CURRENT SPREADS AND NEXT PERIOD DEFAULT PROBABILITY FOR LONG-TERM BONDS WHEN y = MEAN(y)

!Screenshot 2024-07-20 at 10.20.43.png此外，如图4和图5所示，在违约概率为正的区域，短期债务的$\left|\frac{\partial q(y,b')}{\partial b'}\right|$更大，这些图展示了两种情况下利差和违约概率如何随债务变化。**利差随着短期债务更快上升的原因是，偿还单期债务比偿还长期债务更快变得繁重**。尽管两种情况下的债务水平不是完全可比的（它们涉及不同的未来义务），但利差对于短期债券更快上升是主权国家在**债务是短期的情况下**更不愿意将借款扩展到违约概率为正的区域的另一个原因。

36. **值得注意的是，长期债务的利差从一开始就是正的，并且即使下一期违约的概率可能是零，利差也会上升**。即使主权国家在当前时期借入的金额非常小（因此下一期的违约概率为0），贷款人也明白，主权国家下一期的最优决策是承担相当大的债务。并且，由于$q(y,b')$随b'递减，贷款人理性地预期会在未到期债务部分遭受资本损失。这压低了债务的当前价格，并导致从一开始就有正的利差。而且，最初，利差随债务上升仅仅是因为$a(y',m',b')$随b'增加（命题3），预期的资本损失也在增加。这表明，不必要地引入贷款人的风险规避来解释利差和违约概率之间的差距。有了长期债务，由于债务积累的动态，差距可以出现（并变化）。如果违约债务有偿还，也会出现差距，这一点我们已经排除了。

D. The Welfare Cost of Debt Dilution

在本节中，我们考察了从单期债务（$\lambda = 1$）转向长期债务（$\lambda = 0.05$）在基线模型中的福利效应。我们假设b和m都为零，并计算$\Sigma_y V_\lambda(y,0,0)\Pi(y)$，其中$\Pi(y)$是$y$的马尔可夫链的不变分布。我们不是报告效用，而是报告使$c^{1-\sigma}/[(1-\beta)(1-\sigma)]$等于$\Sigma_y V_\lambda(y,0,0)\Pi(y)$（即流量确定等价消费）的$c$的值。结果在表7中给出。

TABLE 7—WELFARE COMPARISON ACROSS MATURITY LENGTH

(Quarters, λ)	Cert. eqv. cons	Avg. spread	Avg. b/y	Def. freq.
(1,1)	1.0175	0.0026	0.81	0.0024
(2,0.5)	1.0174	0.0049	0.81	0.0047
(4,0.25)	1.0169	0.0102	0.79	0.0096
(6,0.167)	1.0161	0.0166	0.76	0.0156
(8,0.125)	1.0150	0.0241	0.74	0.0224
(10,0.1)	1.0139	0.0327	0.73	0.0298
(12,0.083)	1.0129	0.0420	0.71	0.0375
(14,0.071)	1.0118	0.0519	0.70	0.0455
(16,0.063)	1.0108	0.0619	0.70	0.0534
(18,0.056)	1.0099	0.0719	0.70	0.0608
(20,0.05)	1.0092	0.0815	0.70	0.0675

福利在短期债务时最高，随着λ向0.05下降而单调递减。因此，主权国家发行短期（一个季度）债务最为有利。**从20个季度的到期债务转为一个季度到期债务的消费等价差异为0.81%，按照福利比较的标准来看这是显著的。**

为什么短期债务比长期债务更好？**如果主权国家能够承诺不违约，短期和长期债务的（隐含）利率将是无风险利率，到期期限对福利或消费没有影响。** 显然，违约风险是有区别的。但造成差异的原因是微妙的。事实证明，如果贷款人坚持要求主权国家对未偿还债务市值的下降进行补偿，反之，主权国家坚持要求贷款人对未偿还债务市值的提升进行补偿，即使存在违约风险，长期债务也等同于短期债务。这种等价结果可以这样理解：在这种安排下，偿还的价值（忽略对这一演示不重要的m冲击）是：

$$V(y_-, y, b) = \max_{b'} \{ u(y + [\lambda + (1-\lambda)(z + q(y_-, b))] b - q(y, b')b') + \beta E_{y'|y}\left[\max\{V(y, y', b'), X(y')\}\right] \Big\}.$$

其中$y_$是上一期收入的实现。观察到，当前期不到期的债券部分支付了票息z及其上一期市值而非当前市值。这等同于主权国家每期向贷款人转移$[(q(y_, b) - q(y, b'))](1-\lambda)b$（如果这个量是负数，主权国家支付；如果是正数，则收到）。违约的价值是：$X(y) = u(y - \phi(y)) + \beta E_{y'|y}\{(1 -$

$\xi)X(y') + \xi\tilde{W}(y, y', 0)\}$，以及$W(y_-, y, b) = \max\{V(y_-, y, b), X(y)\}$。记决策规则为$d(y_-, y, b)$和$a(y_-, y, b)$。然后，单位债券的均衡价格由下式给出：

$$q(y, b') = \left[\lambda + (1-\lambda)(z + q(y, b'))\right] \left(\frac{E_{y'|y}(1 - d(y, y', b'))}{1+r}\right).$$

我们现在基于一个假设进行变量变换，即违约决策仅取决于y以及每个周期开始时主权国家的总债务，即$[\lambda + (1-\lambda)(z + q(y_{-1}, b))]b = A$。设$d(y, A)$为违约决策规则，注意将等式(10)两边乘以$b'$得到$q(y, b')b' = [\lambda + (1-\lambda)(z + q(y, b'))]b'(E_{y'|y}(1 - d(y, y', b'))/(1+r))$。观察到$q(y, b')b'$可以写成$(E_{y'|y}(1 - d(A', y'))/(1+r))A' = \tilde{q}(y, A')A'$。因此，我们可以将还款价值重写为$V(y, A) = \max_{A'}\{u(y + A - \tilde{q}(y, A')A') + \beta E_{y'|y} \max\{V(y', A'), X(y')\}$，这等同于单期债务问题。**因此，将未来未偿还债务的价值固定在其当前市场价值，使得长期债务和短期债务等价。**

如果未偿还债务的未来价值固定在其发行时的价值，主权国家就不能通过未来发行更多债务来稀释未偿还债务的未来价值。

这种安排因此解决了债务稀释问题，并降低了债务的利率。**另一方面，未偿还债务的未来市场价值也可能因y的变化而变化，这些未偿还债务市场价值的外生波动导致风险规避的主权国家可支配收入相应波动。** 对于我们的校准，**更波动的可支配收入的福利减少效应被更低的借贷成本的福利增强效应所主导**，使得短期债务比长期债务更好。

E. Rollover Crises and the Superiority of Long Term Debt

前一节的结果得出了一个尴尬的结论，尽管长期债务提高了模型表现，但在模型本身中，主权国家更愿意发行单期债务。在本节中，我们扩展了基线模型，**允许出现小概率的展期危机（自我实现的违约）**，并表明这种小的额外冲击源使长期债务比短期债务更好，而不会影响长期债务模型的优越表现，这一点在前面已经强调过。

这种扩展是基于以下两个观察结果。

1. 首先，如果主权国家在我们的模型中发行短期债务，它会发行大量的短期债务——平均占平均产出的81%。因此，主权国家每期都需要展期当前消费的很大一部分，平均来说。
2. 其次，许多观察者指出，大量的短期债务使借款人面临“挤兑均衡”的可能性，即贷款人拒绝展期到期债务可以迫使借款人违约，从而证明贷款人拒绝贷款的合理性。

Cole和Kehoe（2000年）在主权借贷的背景下为这一观点提供了理论基础。**对我们的目的来说重要的是，他们还表明，如果主权国家发行长期债务，“挤兑均衡”的可能性较小**。即使有大量的长期债务，到期债务的部分可能很小，因此贷款人拒绝展期对借款人来说影响不大。知道这一点，贷款人不会挤兑，挤兑也未能成为均衡结果。

为了继续进行，考虑以下由**主权国家和单一新贷款人**在任何一期开始时玩的静态协调博弈，主权国家有一些未偿还的债务，并且希望在满足其当前义务的条件下发行新贷款。列给出主权国家的策略，行给出贷款人的策略。如果贷款人提供新贷款（L）并且主权国家偿还其现有债务（R），主权国家将从偿还贷款和借款中获得收益，表示为$V^+(y,m,b)$，贷款人获得净回报O（即，贷款人获得无风险回报——预期中——这也是其资金的机会成本）。如果贷款人贷款而主权国家违约（D），我们假设新贷款被退还给贷款人而没有获得任何利息——因此是利息收益的（贴现）损失$(r_f/(1+r_f))\Delta$，其中Δ是新贷款的金额。 如果贷款人不贷款（N）而主权国家偿还但不能借款，主权国家将获得$V^-(y,m,b) \leq V^+(y,m,b)$，贷款人获得o。最后，如果贷款人不贷款而主权国家违约，贷款人和主权国家的收益分别为 o 和 $X(y,-\overline{m})$

	R	D
L	$0, V^+(y,m,b)$	$-(r_f/1\ +\ r_f)\Delta, X(y,-\bar{m})$
N	$0, V^-(y,m,b)$	$0, X(y,-\bar{m})$

在以下 tie-breaking 规则下：

- 如果主权国家在偿还和违约之间无差异，它总是偿还；
- 如果贷款人在贷款和不贷款之间无差异，它总是贷款，
  这个博弈有以下纳什均衡集，取决于$X(y,-\overline{m})$的值。
- 当$X(y,-\overline{m}) \leq V^-(y,m,b) \leq V^+(\bar{y},m,b)$时，唯一的均衡是$(L,R)$；
- 如果$V^-(y,m,b) \leq V^+(y,m,b) < X(y,-\overline{m})$，唯一的均衡是$(N,D)$；
- 如果$V^-(y,m,b) < X(y,-m) \leq V^+(y,m,b)$，$(L,R)$和$(N,D)$都是博弈的均衡。
- 在这种情况下，我们假设选定的均衡取决于一个sunspot variable ω的实现，如果$\bar{\omega}=0$，则选择(L,R)均衡，如果$\omega=1$，则选择(N,D)均衡。后一种情况对应于自我实现的“展期危机”：贷款人拒绝贷款是因为它认为主权国家将违约，而主权国家违约是因为它认为贷款人将拒绝贷款。

接下来，我们将根据这个游戏修改前面几节中提出的模型。首先，我们需要明确$V^+(y,m,b)$和$V^-(y,m,b)$以及$X(y,-\overline{m})$的值。设$W(y,m,b,\omega)$表示主权国家的终身效用，它现在除了其他状态变量外，还取决于太阳黑子变量ω。然后，

$$V^+(y,m,b)\ =\ \max_{b'\in B} u(c)\ +\ \beta E_{(y'm')|y[}(1\ -\ \pi)W(y',m',b',0)\ +\ \pi W(y',m',b',1)]$$

受制于

$$c = y + m + [\lambda + (1-\lambda)z]b - q(y,b')[b' - (1-\lambda)b],$$

我们假设ω是独立同分布的，并且以概率π取值为1。如果没有b'使得消费非负，则我们将$V^+(y,m,b)$设为$-\infty$。而

$$V^-(y,m,b)\ =\ \max_{b'\in B} u(c)\ +\ \beta E_{(y'm')|y[}(1\ -\ \pi)W(y',m',b',0)\ +\ \pi W(y',m',b',1)]$$

受制于

$$c = y + m + [\lambda + (1-\lambda)z]b - q(y, b')[b' - (1-\lambda)b]$$

并且$b' \geq (1-\lambda)b$。

同样，如果没有b'使得消费非负，我们将$V^-(y,m,b)$设为$-\infty$。显然，$V^-(y,m,b) \leq V^+(y,m,b)$。如果主权国家希望发行新的loans（条件是满足其当前义务），则$V^-(y,m,b) < V^+(y,m,b)$。排除的价值具有本文其余部分相同的结构，具体来说，$X(y,m)$解决 $X(y,m) = u(y - \phi(y) + m) + \beta\{[1-\xi]E_{(y'm'\omega')|y}X(y',m') + \xi E_{(y'm'\omega')|y}W(y',m',0,\omega')\}$这随后确定了违约的价值$X(y,-\overline{m})$。

确定$W(y,m,b,\omega)$的函数方程由下式给出：

$$\begin{aligned} &W(y,m,b,\omega) \\ &= \begin{cases} V^+(y,m,b) & \text{if } X(y,-\overline{m}) \leq V^-(y,m,b) & \text{and} & \omega \in \{0,1\} \\ X(y,-\overline{m}) & \text{if } V^+(y,m,b) < X(y,-\overline{m}) & \text{and} & \omega \in \{0,1\} \\ \\ V^+(y,m,b) & \text{if } V^-(y,m,b) < X(y,-\overline{m}) \leq V^+(y,m,b) & \text{and} & \omega = 0 \\ \\ X(y,-\overline{m}) & \text{if } V^-(y,m,b) < X(y,-\overline{m}) \leq V^+(y,m,b) & \text{and} & \omega = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

为了理解为什么(11)式成立，观察当$X(y,-\overline{m}) \leq V^-(y,m,b)$时，博弈的唯一均衡是$(L,R)$。因此，无论$\omega$的值如何，主权国家的**均衡终身效用是**$V^+(y,m,b)$。同样地，当$V^+(y,m,b) < X(y,-\overline{m})$时，博弈的唯一均衡是$(N,D)$，并且主权国家的终身效用是$X(y,-\overline{m})$，无论$\omega$的值如何。当$V^-(y,m,b) < X(y,-\overline{m}) \leq V^+(y,m,b)$时，博弈的均衡取决于$\omega$的值。如果$\omega = 0$，均衡是$(L,R)$，终身效用是$V^+(y,m,b)$，但如果$\omega = 1$，均衡是$(N,D)$，终身效用是$X(y,-\overline{m})$。相应地，违约决策规则，记作$d(y,m,b,\omega)$，在终身效用是$X(y,-\overline{m})$的情况下取值为1，否则为0；在偿还条件下的资产决策规则，记作$a(y,m,b,\omega)$，是解决(11)式的。最后，定价方程现在解决函数方程

$$q(y,b') = E_{(y'm'\omega')|y}\left[[1 - d(y',m',b',\omega')]\frac{\lambda + [1-\lambda][z + q(y', a(y',m',b',\omega'))]}{1 + r_f}\right].$$

在我们转向定量结果之前，我们注意到本文其余部分分析的模型对应于$\omega = 0$的概率为$1.$[41]。表8报告了长期和短期债务在太阳黑子概率从0到10%范围内的结果。对于长期债务（A面板），太阳黑子概率的上升使得平均利差、平均$b/$y和违约频率基本不变，尽管它确实略微降低了福利（下降的顺序是10^{-5}%）。太阳黑子概率几乎没有额外影响的原因是，$V^+(y,m,b)$和$V^-(y,m,b)$之间的差距只有在主权国家希望将其债务增加到超过$0.95b$时才为正。一般来说，如果借贷成本低，差距将是正的，这发生在产

出高的时候。在这种时候，违约成本很高，$X(y, -\overline{m})$很低。因此，由太阳黑子驱动的违约条件（需要满足$V^{-}(y, m, b) < X(y, -\overline{m}) \leq V^{+}(y, m, b)$）很少出现，由$\omega$引入的随机性影响不大。

TABLE 8—MATURITY LENGTH AND THE EFFECTS OF SUNSPOT PROBABILITY

$\Pr[\omega = 1]$	Cert. eqv. cons	Avg. spread	Avg. b/y	Def. prob.
Panel A. Maturity length 5 years ($\lambda = 0.05$)				
0.00	1.0092	0.0815	0.70	0.0676
0.005	1.0092	0.0815	0.70	0.0675
0.01	1.0092	0.0815	0.70	0.0674
0.02	1.0092	0.0815	0.70	0.0675
0.05	1.0092	0.0815	0.70	0.0677
0.1	1.0091	0.0816	0.70	0.0676
Panel B. Maturity length 1 quarter ($\lambda = 1$)				
0.00	1.0175	0.0026	0.81	0.0024
0.005	1.0108	0.0240	0.71	0.0223
0.01	1.0079	0.0066	0.43	0.0062
0.02	1.0074	0.0029	0.40	0.0027
0.05	1.0071	0.0024	0.39	0.0021
0.1	1.0069	0.0022	0.38	0.0021

相比之下，如果主权国家持有大量的单期债务，$V^{+}(y, m, b)$和$V^{-}(y, m, b)$之间的差距将会非常大，因为完全偿还大量债务可能代价高昂。因此，满足由太阳黑子驱动的违约条件的可能性要大得多。因此，额外的不确定性对短期债务更重要。这种影响可以在表8的B面板中看到。当太阳黑子的概率为0.5%时，主权国家将其平均短期债务水平降低到产出的大约70%。当太阳黑子概率提高到1%时，主权国家通过将债务削减到平均产出的43%来做出反应。强烈反应的原因有两个。最重要的是，有大量短期债务未偿还时，主权国家在$\omega = 1$时容易受到展期危机的影响。此外，由$\omega = 1$触发的违约往往比由基本面恶化触发的违约成本更高，因为太阳黑子冲击与基本面无关，可能发生在产出高的时候（回想一下，在我们的模型中，违约成本占产出的比例随着产出的增加而增加）。总之，尽管$\omega = 1$的概率很低，但其发生对主权国家来说是足够痛苦的，以至于它希望避免可能随之而来的任何危机。它通过限制借款来这样做，从而消除了不良的“挤兑”均衡。重要的是，缩减债务降低了福利，对于1%或更高的太阳黑子概率，主权国家发行长期债务比短期债务更好。

这些结果为新兴市场经济体选择发行长期债务提供了一种解释，**尽管债务稀释问题使得长期债务成本较高。长期债务的好处在于，它允许主权国家在贷款突然停止时可信地承诺偿还债务，即使未偿还债务的水平相对于产出较大。这种承诺反过来又降低了此类危机的可能性。**
如果主权国家缺乏耐心，它可能更倾向于发行长期债务并借入大额资金，而不是发行成本较低的短期债务，但限制其借款以限制展期危机的可能性。值得注意的是，即使危机发生的概率为10%，通过发行长期债务获得的福利增长仅为消费的0.002%。这个数值很小，但与波动的福利成本往往很小的常见发现一致（Lucas 1987）。