计算机学院《算法设计与分析》
(2021 年秋季学期)

第二次作业

作业提交截止时间：2021 年 11 月 4 日 23 : 55

1 数组填充问题 (20 分)

李华有一个长度为 n 的整数数组 a，这个数组有以下性质：

1. 这个数组的所有元素之和为 3 的倍数。
2. 这个数组的每个元素 a_i 都满足 $a_i \in [l, r]$

李华忘记了这个数组的元素，请你设计一个高效的算法，帮助他找出有多少个满足条件的数组，并分析该算法的时间复杂度。

例如，长度为 $n = 2$，满足区间 $l = 1, r = 3$ 的数组，包括 $[1, 2], [2, 1], [3, 3]$，则答案为 3。

2 最长递增子序列问题 (20 分)

递增子序列是指：从原序列中按顺序挑选出某些元素组成一个新序列，并且该新序列中的任意一个元素均大于该元素之前的所有元素。例如，对于序列 $< 5, 24, 8, 17, 12, 45 >$，该序列的两个递增子序列为 $< 5, 8, 12, 45 >$ 和 $< 5, 8, 17, 45 >$，并且可以验证它们也是原序列最长的递增子序列。请设计算法来求出一个包含 n 个元素的序列 $A =< a_1, a_2, \cdots, a_n >$ 中的最长递增子序列，并分析该算法的时间复杂度。

3 硬币问题 (20 分)

给定 n 枚硬币 (n 为奇数)，编号为 $1, 2, \cdots, n$。投掷第 i 枚硬币时有 p_i 的概率正面朝上，有 $1 - p_i$ 的概率反面朝上。

设计算法求解投掷这 n 枚硬币，其中正面朝上的硬币数量多于反面朝上的概率，并分析该算法的时间复杂度。

例如给定 $n = 3$ 枚硬币，其正面朝上的概率分别为 $p_1 = 0.3, p_2 = 0.6, p_3 = 0.8$。有下述四种情况正面朝上的硬币数量多于反面朝上：

1. 三枚硬币同时朝上，概率为 $0.3 \times 0.6 \times 0.8 = 0.144$。
2. 第一枚硬币朝下，第二枚硬币朝上，第三枚硬币朝上，概率为 $0.7 \times 0.6 \times 0.8 = 0.336$。
3. 第一枚硬币朝上，第二枚硬币朝下，第三枚硬币朝上，概率为 $0.3 \times 0.4 \times 0.8 = 0.096$。
4. 第一枚硬币朝上，第二枚硬币朝上，第三枚硬币朝下，概率为 $0.3 \times 0.6 \times 0.2 = 0.036$。

故总概率为 $0.144 + 0.336 + 0.096 + 0.036 = 0.612$。

4 鲜花组合问题 (20 分)

花店共有 n 种不同颜色的花，其中第 i 种库存有 a_i 枝，现要从中选出 m 枝花组成一束鲜花。请设计算法计算有多少种组合一束花的方案，并分析该算法时间复杂度。（每种花数量均相同的方案算一种方案）

5 最大分值问题 (20 分)

给定一个包含 n 个整数的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，对其中任意一段连续区间 $a_i..a_j$，其分值为

$$(\sum_{t=i}^{j} a_t)\%p$$

符号 % 表示取余运算符，可以认为 p 远小于 n。

现请你设计算法计算将其分为 k 段 (每段至少包含 1 个元素) 后分值和的最大值，并分析该算法的时间复杂度。

例如，将 $3, 4, 7, 2$ 分为 3 段，模数为 $p = 10$，则可将其分为 $(3, 4), (7), (2)$ 这三段，其分值和为 $(3 + 4)\%10 + 7\%10 + 2\%10 = 16$。