

计算机学院《算法设计与分析》

(2021 年秋季学期)

第四次作业

作业提交截止时间: 2021 年 12 月 30 日 23 : 55

1 对下面的每个描述, 请判断其是正确或错误, 或无法判断正误。对于你判为错误的描述, 请说明它为什么是错的。(每小题 5 分, 共 20 分)

1. 存在一个 NP 完全问题可以在多项式时间内求解。
2. 如果存在某一 NP 问题不是多项式时间内可求解的, 则所有 NP 完全问题都不是多项式时间可求解的。
3. 判定无向图中是否存在环这一问题属于 P 问题。
4. 如果一个问题为 NP-hard, 则一定存在一个算法可以在多项式时间内验证该问题的解。

2 文件传送问题 (20 分)

给定一个包含 n 个节点的图, 图中包含 m 条单向边, 起点和终点分别用 s_i 和 t_i 表示。现在需要选取一些节点为发送源, 发送源会向外发送数据包, 已知数据包只能沿图中单向边进行单向传播, 且收到数据包的节点会将数据包通过以该节点为起点的单向边进行转发。

请设计一个高效算法计算最少需要几个发送源才能使所有节点收到数据包, 写出该算法伪代码并分析时间复杂度。

3 最小环问题 (20 分)

给定一个包含 n 个点的无向图, 边权使用矩阵 $w_{i,j}$ ($w_{i,j} > 0$) 表示。

请设计一个高效的算法, 计算图中最小环 (最少包含三个节点) 的最小边权和, 写出该算法伪代码并分析时间复杂度。

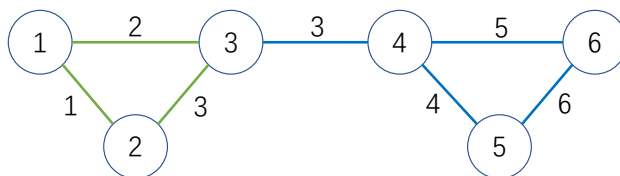


图 1: 无向图最小环

如图1所示, 节点 1-2-3 组成的环权重为 6, 是该图中的最小环, 节点 4-5-6 组成的环权重为 15, 不能被称为该图中的最小环, 节点 3-4 不满足最少包含三个节点的条件, 不能被称为该图中的最小环。

4 哈密顿路径问题 (20 分)

哈密顿路径 (Hamiltonian path) 是指图中每个节点都仅经过一次且必须经过一次的路径。对于一般的图结构来说, 求解哈密顿路径的问题是 NP 难问题。然而, 在有向无环图上寻找哈密顿路径的问题是存在多项式时间的解法的。

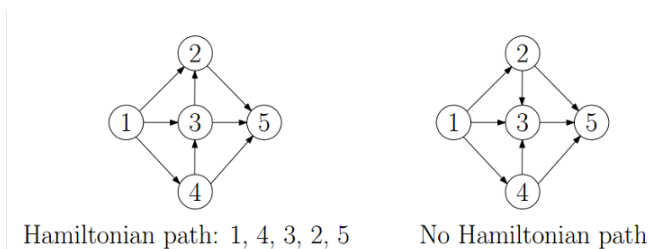


图 2: 哈密顿路径

如图2所示, 左侧图包含一条哈密顿路径 1-4-3-2-5, 右侧图则不包含哈密顿路径。

给定一个有向无环图 $G = (V, E)$, 请设计一个高效算法来寻找图 G 的一条哈密顿路径, 如不存在哈密顿路径则返回 -1 , 写出该算法伪代码并分析时间复杂度。

5 二分图判定问题 (20 分)

二分图是指一个无向图 $G = (V, E)$, 它的所有顶点可被分成两个子集, 且同一个子集中任何两顶点间都没有边相连。(换言之, G 为二分图, 当且仅当存在两个集合 V_1, V_2 满足 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$, E 中每条边都连接了 V_1 中某个点与 V_2 中某个点。)

1. 请证明: 二分图中不存在长度为奇数的环。(5 分)
2. 请设计一个基于广度优先搜索 (BFS) 的算法来判断无向图 G 是否为二分图, 写出该算法伪代码并分析该算法时间复杂度。(15 分)