

计算机学院《算法设计与分析》

(2021 年秋季学期)

第一次作业

作业提交截止时间：2021 年 10 月 8 日 23 : 55

1 请给出 $T(n)$ 尽可能紧凑的渐进上界并予以说明，可以假定 n 是 4 的整数次幂。(每小题 3 分，共 21 分)

1.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n-2) + 3n \quad \text{if } n > 1$$

2.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + n^2 \quad \text{if } n > 1$$

3.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + 2^n \quad \text{if } n > 1$$

4.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 8T(n/4) + 2n \quad \text{if } n > 1$$

5.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + 2n \log n \quad \text{if } n > 1$$

6.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1$$

7.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + n/2 \quad \text{if } n > 1$$

2 k 路归并问题 (19 分)

现有 k 个有序数组（从小到大排序），每个数组中包含 n 个元素。你的任务是将他们合并成 1 个包含 kn 个元素的有序数组。首先来回忆一下课上讲的归并排序算法，它提供了一种合并有序数组的算法 *Merge*。如果我们有俩个有序数组的大小分别为 x 和 y ，*Merge* 算法可以用 $O(x+y)$ 的时间来合并这两个数组。

1. 如果我们应用 *Merge* 算法先合并第一个和第二个数组，然后由合并后的数组与第三个合并，再与第四个合并，直到合并完 k 个数组。请分析这种合并策略的时间复杂度（请用关于 k 和 n 的函数表示）。（9 分）
2. 针对本题的任务，请给出一个更高效的算法，并分析它的时间复杂度。（提示：此题若取得满分，所设计算法的时间复杂度应为 $O(nk \log k)$ ）。（10 分）

3 填数字问题 (20 分)

给定一个长度为 n 的数组 $A[1..n]$ ，初始时数组中所有元素的值均为 0，现对其进行 n 次操作。第 i 次操作可分为两个步骤：

1. 先选出 A 数组长度最长且连续为 0 的区间，如果有多个这样的区间，则选择最左端的区间，记本次选定的闭区间为 $[l, r]$ ；
2. 对于闭区间 $[l, r]$ ，将 $A[\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$ 赋值为 i ，其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示对数 x 做向下取整。

例如 $n = 6$ 的情形，初始时数组为 $A = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ 。

第一次操作为选择区间 $[1, 6]$ ，赋值后为 $A = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$ ；

第二次操作为选择区间 $[4, 6]$ ，赋值后为 $A = [0, 0, 1, 0, 2, 0]$ ；

第三次操作为选择区间 $[1, 2]$ ，赋值后为 $A = [3, 0, 1, 0, 2, 0]$ ；

第四次操作为选择区间 $[2, 2]$ ，赋值后为 $A = [3, 4, 1, 0, 2, 0]$ ；

第五次操作为选择区间 $[4, 4]$ ，赋值后为 $A = [3, 4, 1, 5, 2, 0]$ ；

第六次操作为选择区间 $[6, 6]$ ，赋值后为 $A = [3, 4, 1, 5, 2, 6]$ ，为所求。

请设计一个高效的算法求出 n 次操作后的数组，并分析其时间复杂度。

4 奇数因子和问题 (20 分)

定义 $god(i)$ 为整数 i 的最大奇数因子，例如 $god(3) = 3$ ， $god(14) = 7$ 。

请你设计一个高效算法，计算一个整数区间 $[A, B]$ 内所有数的最大奇数因子和，即 $\sum_{i \in [A, B]} god(i)$ ，并分析该算法的时间复杂度。

例如，区间 $[3, 9]$ 的计算结果为 $3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 + 9 = 29$ 。

5 区间计数问题 (20 分)

给定一个整数数组 $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ ，询问有多少个区间的区间和小于等于常数 X ，即询问有多少对 l, r 满足 $l \leq r$ 且 $\sum_{i=l}^r c_i \leq X$ 。

例如，给定常数 $X = 3$ ，数组 $C = [1, 2, 3]$ ， $l = 1, r = 1$ ， $l = 2, r = 2$ ， $l = 3, r = 3$ ，和 $l = 1, r = 2$ 均满足条件，因此答案为 4。

请设计一个高效的算法来解决此问题，并分析该算法的时间复杂度。