

计算机学院《算法设计与分析》

(2021 年秋季学期)

第三次作业

作业提交截止时间: 2021 年 12 月 2 日 23 : 55

1 吃糖果问题 (20 分)

给定 n 个糖果盒子, 每个盒子糖果数量为 a_i , 需要从一些盒子中挑选一些糖果吃掉, 使任意两个编号相邻盒子中糖的数量之和小于 x 。请设计一个高效算法计算最少需要吃掉几颗糖, 并分析该算法时间复杂度。

2 排队接水问题 (20 分)

给定 n 个人排队接水, 已知每个人接水时间为 t_i , 仅有一个水龙头, 因此他们依次排成一队接水, 每个人接水等待时间记为 w_i (从第一个人接水开始, 到自己接完为止), 总等待时间为 $\sum_i w_i$ 。

请设计一个高效算法, 安排这 n 个人的接水顺序, 使得总等待时间最少, 并分析该算法时间复杂度。

3 数组分段问题 (20 分)

给定 n 个数的数组 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 现需将其分为 k 段, 并要求每段中的元素连续, 且每段至少包含一个元素。每段取最小值记为 m_i , 该分段方法的分值记为 $\max_{1 \leq i \leq k} m_i$ 。

请设计一个高效算法, 计算分段方法的最大分值, 并分析该算法时间复杂度。

4 纪念品分组问题 (20 分)

给定 n 件纪念品, 每件价值 v_i , 需要把纪念品分组, 但每组最多只能包括两件纪念品, 并且每组纪念品的价格之和不能超过一个给定的整数 m 。

请设计一个高效的算法, 计算所有分组方案中, 最少的分组数量, 并分析该算法时间复杂度。

5 迷宫逃离问题 (20 分)

给定一个 $m \times n$ 的迷宫, 其入口和出口分别为 $(1, 1)$ 和 (m, n) 。每个格子有两种状态:

1. $c_{i,j} = 0$, 表示这个格子是空格子, 可以通过;
2. $c_{i,j} = 1$, 表示这个格子是障碍物, 不可通过。

入口 $(1, 1)$ 和出口 (m, n) 均为空格子。在迷宫中可从某个格子 (i, j) 移动到与其相邻的空格子 $((i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j), (i + 1, j))$ 其中之一, 消耗体力为 1。

现可将至多 1 个障碍物移除, 使其对应的格子的变为空格子。请在此基础上设计一个尽可能高效的算法, 求出从入口 $(1, 1)$ 到出口 (m, n) 需消耗的最小体力, 并分析其时间复杂度。