

# 数值计算第一周上机(示例)

Fiddie

## § 1 问题

利用区间分半法求解  $f(x) = x^3 - 3.2x^2 - 0.1x + 4 = 0$ , 使误差不大于  $10^{-7}$ :

- (1) 考虑不同的终止原则;
- (2) 分析误差与收敛速度。

## § 2 算法思路

初步分析: 可见  $f(0)f(2) < 0$ , 且  $f'(x)$  在  $[0, 2]$  上不变号. 于是  $f(x)$  在目标区间中单调且有且仅有一个零点, 方便使用区间分半法求解.

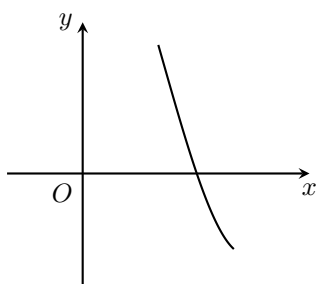


Figure 1: 函数  $f(x) = x^3 - 3.2x^2 - 0.1x + 4$  在  $[1, 2]$  上的图像

对于闭区间  $[a, b]$  内的连续函数  $f(x)$ , 如果有  $f(a)f(b) < 0$ , 由介值定理,  $f(x)$  在  $[a, b]$  内必有一根  $x^*$ . 我们可以考虑对该区间折半, 不断缩小范围, 最后得到方程  $f(x) = 0$  的数值解  $\tilde{x}$ , 并且满足一定的精度, 即  $|x^* - \tilde{x}| < \varepsilon$ . 理论上这由闭区间套定理保证.

---

### 算法 1 区间分半法

---

输入: 区间  $[a, b]$ , 终止误差  $\varepsilon$ , 最大迭代次数  $m$ .

输出: 近似解  $p$  或失败信息.

```

1: function BISECTION( $a, b, \varepsilon$ )
2:    $e \leftarrow b - a$ ,  $u \leftarrow f(a)$ ,  $v \leftarrow f(b)$ 
3:   for  $k = 1, \dots, m$  do
4:      $e \leftarrow e/2$ ,  $p \leftarrow a + e$ ,  $w \leftarrow f(p)$ ;
5:     if 终止准则满足 then
6:       输出  $p$ , 结束程序.
7:     end if
8:     若  $wv < 0$ , 则  $a \leftarrow p$ ,  $u \leftarrow w$ ; 否则  $b \leftarrow p$ ,  $v \leftarrow w$ .
9:   end for
10:  输出失败信息.
11: end function

```

---

其中, 在算法1中, 终止准则可以取为  $|w| < \varepsilon$  或者  $|e| < \varepsilon$ . 相关的代码见附录部分.

## § 3 结果分析

第一种终止原则和第三种终止原则在终止时都迭代了25步, 得到了相同的结果: 1.5085067; 而第二种终止原则迭代了24步, 得到了一个精度稍差的结果: 1.508507.

由于迭代过程相同，每种终止原则所得迭代序列都是一样的，所以以下仅分析迭代25步所得结果。略微修改C++程序，输出每一步迭代得到的 $x_n$ 的值，同时进一步迭代15次以得到近似精确值 $p$ 。用excel进行数据处理，计算出绝对误差并取对数，得到数据表如表1所示(见附录部分)。在此基础上，根据迭代序列作出散点图如图2所示。

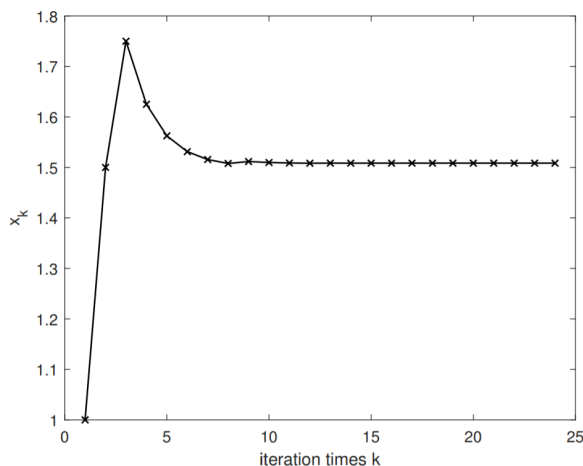


Figure 2: 迭代序列散点图

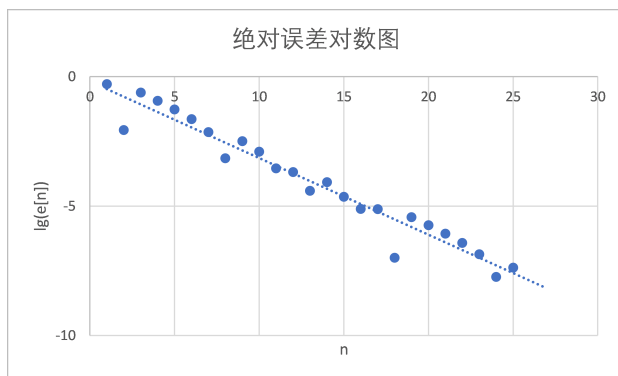


Figure 3: 绝对误差对数图

由图2可知，在坐标轴固定的情况下，初始值经过8次迭代就趋于一个稳定的值了，由此可粗略看出二分法的迭代速度是比较快的。为了进一步分析算法的收敛性，我们作出绝对误差以10为底的对数随 $n$ 变化的散点图如图3所示，图中穿过散点的虚线是经过线性回归分析得到的回归直线 $\lg e_n = -0.296n - 0.181$ 。结果显示 $R^2 = 0.949$ ，与1仅差5%。再结合图象特征，我们有很大的把握得出 $\lg e_n$ 与 $n$ 之间的线性关系。因此二分法是线性收敛的，并且根据回归直线，我们有

$$\lg \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lg e_{n+1} - \lg e_n \simeq -0.296 \Rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} \simeq 10^{-0.296} \simeq 0.506.$$

## § 4 结论

总得来看，该算法结构较为简单，且只用到了函数的连续性，适用范围大。另外算法稳定性高，只要符合 $f(a)f(b) < 0$ 就可以使用，且一定会收敛。在不知道确切信息的情况下，很适合用来求得根的近似值，在此基础上用更高阶的方法来进一步加强根的精度。

但是该算法没有利用函数更多的性质（如导数、二阶导数等），收敛速度呈线性，收敛速度较慢。另外，由于只能通过半分区间来进行迭代，该算法不是每一步都会带来一个函数值稳定的下降（迭代点和最终解之间的距离也不会稳定的下降）。此外，该方法只适用于单值函数，对于向量值函数和多元函数无法推广。

## § 5 附录: 程序代码

```
1 inline double f(double x)
2 {
3     return 4+x*(-0.1+x*(-3.2+x));
4 }
5 int main()
6 {
7     int m=30;
8     double a=0,b=2,Tol=1e-7;
9     double e=b-a,u=f(a),v=f(b),w,p;
10    int k;
11    for(k=1;k<=m;k++){
12        e=e/2;
13        p=a+e;
14        w=f(p);
15        if(fabs(w)<Tol){ // OR: e<Tol
16            cout<<setprecision(10)<<p<<endl;
17            return 0;
18        }
19        if(w*v<0){ a=p; u=w; } else{ b=p; v=w; }
20    }
21    cout<<"Method failed."<<endl;
22    return 0;
23 }
```

## § 6 附录：迭代输出结果

Table 1: 迭代数据表

$n$	$x_n$	$p(n=40)$	$ p - x_n  = e_n$	$\lg e_n$
1	1	1.508506674	0.508506674	-0.293703343
2	1.5		0.008506674	-2.070240213
3	1.75		0.241493326	-0.617094867
4	1.625		0.116493326	-0.933698955
5	1.5625		0.053993326	-1.267659919
6	1.53125		0.022743326	-1.643146022
7	1.515625		0.007118326	-2.147622123
8	1.5078125		0.000694174	-3.158531695
9	1.51171875		0.003212076	-2.493214179
10	1.509765625		0.001258951	-2.899991152
11	1.508789063		0.000282389	-3.5491529
12	1.508300781		0.000205893	-3.686359074
13	1.508544922		3.82479E-05	-4.417392
14	1.508422852		8.38224E-05	-4.076640029
15	1.508483887		2.27872E-05	-4.642308644
16	1.508514404		7.73036E-06	-5.111800419
17	1.508499146		7.52843E-06	-5.123295496
18	1.508506775		1.00963E-07	-6.995837711
19	1.50850296		3.71373E-06	-5.430189176
20	1.508504868		1.80639E-06	-5.743189533
21	1.508505821		8.52711E-07	-6.069197977
22	1.508506298		3.75874E-07	-6.424957541
23	1.508506536		1.37456E-07	-6.861837657
24	1.508506656		1.82463E-08	-7.738825664
25	1.508506715		4.13584E-08	-7.38343669

## § 7 特别说明

(1)实验报告不是越长越好, 而是信息量越大越好.

(2)代码、输出一大堆的数据都放在附录, 而少量数据可以放在正文.

(3)实验报告要包含问题、算法原理与描述、输出结果、对输出结果的分析、结论等基本要素.

(4)算法和代码尽量减少重复冗余, 比如用两个不同的终止准则的时候不需要写两次算法或者代码(因为它们只是在终止准则的部分作了小改动).

(5)请保证你的实验报告的排版整洁, 比如字体尽量用同一种, 字号保持一致, 行距采用不超过1.2倍的行距(如果用1.5倍行距就会显得过于空白了, 并且算法和代码的呈现占了好几页篇幅).

(6)这份报告由多位同学的报告整合而成, 取其精华去其糟粕.