常见PDE变换解法总结与Calderón-Zygmund奇异积分算子

——线性偏微分方程及其应用期末报告

报告人：田晨霄

时 间：2020.12

关于标题人名的一个注释

- Calderón与Zygmund

- (1) 中文一般译作即卡尔德隆-济格蒙德算子，其中前者Calderón是西班牙语人名词汇，后者Zygmund则来源于波兰语人名词汇。

- (2) Zygmund

- 生平经历：济格蒙德是波兰裔美国籍数学家,他是卡尔德隆的老师。生于波兰华沙，二战期间纳粹德国占领波兰后于1940年赴美国，在1947年加入的美国国籍，并担任芝加哥大学教授。

- 学术贡献：在函数论方面，特别是在经典傅里叶分析和正交级数理论方面，以他的名字命名了一类函数。

- 主要著作：很有声誉的Trigonometrical series，被译为许多国家文字。

关于标题人名的一个注释

- (3) **Calderón**
- (i) 生平简介：卡尔德隆则是阿根廷裔美籍数学家(阿根廷最早是西班牙建立的殖民地，与西班牙关系密切)
- 值得一提的是，卡尔德隆本科阶段获得的是土木工程学位，直到1948年他的老师济格蒙德来阿根廷访问，才影响了卡尔德隆，使他的兴趣转向研究数学并去芝加哥大学攻读博士，并只用2年时间于1950年攻下了博士学位。
- (ii)学术贡献：他的许多工作是同他的老师济格蒙德合作的结果：
- 特别是发展了奇异积分理论(这里指的是第一代奇异积分算子)，后来奇异积分算子成为拟微分算子的特例(即第二代奇异积分算子)，它不仅深刻影响偏微分方程理论而且也用于了指标定理。
- 另外，卡尔德隆还在1958年证明柯西问题的唯一性，1980年证明李普希茨曲线上的柯西积分的L2有界性，这蕴涵着复分析的当儒瓦猜想。
- 他还在此过程中发展了一套有力度的硬分析的工具，特别是插值不等式与卡尔德隆恒等式，它对数值分析及信号处理十分重要。
- (iii)学术荣誉：卡尔德隆于1989年获得获沃尔夫数学奖。

目 录

- 一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：
- (I) 非奇异积分变换法：
- 1、Fourier Transform Method
- 2、Laplace Transform Method
- (II) 奇异积分变换法：
- 3、Hilbert Transform Method
- 4. Riesz   Transform Method
- 二、Hilbert变换与Calderón-Zygmund奇异卷积算子：
- 1.Riesz算子的推广与Calderón-Zygmund奇异卷积算子的定义
- 2. Calderón-Zygmund奇异卷积算子的结构刻画
- 3. Calderón-Zygmund奇异卷积算子的有界估计
- 三、调和分析背景下“更新换代”的奇异积分算子简介：
- 1、 第一代奇异积分算子(Calderón-Zygmund奇异卷积算子)
- 2、 第二代奇异积分算子(经典拟微分卷积算子)
- 3、 第三代奇异积分算子(非卷积算子)

分享思路主线，三个问题：

(I)关于解lpde的方法：

回忆几种常见的积分变换解lpde的方法。

(II)关于积分算子的发展历史

在介绍(I)的过程中，也逐渐从最初的非奇异积分算子(即Fourier和Laplace变换)引入到低维的奇异积分算子(即Hilbert变换),再到高维的奇异积分算子(即Riesz变换),然后根据Riesz变换的性质归纳出第一代奇异积分算子的定义，最后介绍性的给出第二代和第三代奇异积分算子的定义。

(III)关于现代pde理论研究

简述这一整套算子理论在现代lpde研究中的作用。

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- 一.傅里叶变换法 （Four ier Transform Method）

1、 基本步骤回顾：

经典的傅里叶变换法解PDE一般来说可分为以下几个步骤：

- step1：选取偏微分方程中某个适当的自变量作为Fourier变换中的积分变量，另外一个变量自然作为积分的参变量，然后对方程作Fourier Transform，化原方程为易解的一个ODE方程或者代数方程。
- step2：同时我们也对PDE的定解条件也做Fourier变换，导出ODE的初始条件。
- step3：解决第一二步中的ODE定解问题或者代数方程问题，得到原来偏微分方程解的经过Fourier变换后得到的结果。
- step4：最后对第三步的解进行逆Fourier变换，最后得到原问题的解

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- 2、 理论回顾：

- Definition 1.1
- 经典的Fourier变换可视为一个从$L^1(R^n)$到自身的积分变换泛函，其积分变换核函数 $K(x,y)=e^{-ix\cdot y}$。这个积分变换显然在原像空间上收敛，而且显然这是一个非奇异的积分变换：
- 设 $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义Fourier变换为

$$\hat{u}(y):=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot y}u(x)dx, y\in\mathbb{R}^n.$$

它的逆变换是

$$\check{u}(y):=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot y}u(x)dx, y\in\mathbb{R}^n.$$

由于 $|e^{\pm ix\cdot y}|=1, u\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则两个积分都是收敛的.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- **Theorems 1.1**
- (1) Fourier变换具有良好的微分性质，卷积性质和反演公式：

定理1 [微分性质] 设 $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$，对任意多重指标 α 都有 $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，则 $(D^\alpha u)^\wedge = (iy)^\alpha \hat{u}$.

定理2 [卷积性质]若 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$，且 $(u * v)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{u}\hat{v}$.

定理3 [反演公式]设 $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$，则 $u = (\hat{u})^\vee$.

(2)特别的对一维R^1上平方可积函数的Fourier变换，具有多种良好的线性性质：

线性性: $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.

乘多项式性质: $(x^k f)^\wedge = i^k \dfrac{d^k}{dy^k} \hat{f}(y)$.

平移性质: $(f(x-a))^\wedge = e^{-iay} \hat{f}(y)$.

逆平移性质: $(e^{iax} f(x-a))^\wedge = \hat{f}(y-a)$.

伸缩性质: $(f(ax))^\wedge = \dfrac{1}{|a|} \hat{f}\left(\dfrac{y}{a}\right)$ $(a \neq 0)$.

一、几种常见PDE变换解法总结回顾：

- 3、例子
- Example 1.1 Bessel位势方程

  $$-\Delta u+u=f, x\in\mathbb{R}^n.$$

  其中 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$.
- step1：对方程两边同时傅里叶变换，并利用微分性质得：

  $$(1+|y|^2)\hat{u}(y)=\hat{f}(y), y\in\mathbb{R}.$$
- step2：利用反演公式得到形式解为：

  $$u=\left(\frac{\hat{f}}{1+|y|^2}\right)^{\vee}.$$
- step3：设 $\frac{1}{1+|y|^2}$ 的傅里叶变换的原像为B，即 $\hat{B}=\dfrac{1}{1+|y|^2}$，于是由卷积性质：

  $$\boxed{u=\frac{f*B}{(2\pi)^{n/2}}}.$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- Step4：求出B，即求一个傅里叶变换的逆变换再代入第三步，最后再做一个f和B的卷积，即可得到解的表达式：

$$\frac{1}{1+|y|^2}=\int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)}dt,$$ 我们有:

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^\vee \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+|y|^2}\cdot e^{iy\cdot x}dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y-t|y|^2}dy\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dt \text{【式(1.1)】} \\
&= \frac{1}{2^{n/2}}\int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}}dt.
\end{aligned}$$

把B称作**Bessel位势**. 于是得到如下公式:

$$u=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{n/2}}f(y)dydt.$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- 二.拉普拉斯变换法 （Laplace Transform Method）

- 1. Laplace变换产生的动机

- 在傅里叶变换方法中，对f(x)进行傅里叶变换，f(x)必须满足很强的条件：f(x)在R^n上有定义，在任一有限区间满足狄立克莱条件且要求$\int_{R^n}|f(x)|dx$存在。一些常用的、很简单的函数（如 sinx, cosx 等）不满足这些条件，这就限制了傅里叶变换应用的范围。所以我们要寻求新的变换处理这些函数。

- 所以我们要针对这类无法进行Fourier变换的函数引入新的合理的变换。

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾：

- 2. Laplace变换及其逆变换的推导回顾：
- Step1：引入函数：对定义于正半轴含原点的无法做Fourier变换的 f(t) 函数作适当的“快速衰减”处理：

$$f_1(t)=\begin{cases} e^{-\sigma t}f(t) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

- Step2：代入经典Fourier变换：因为如果参数σ足够大，函数f(t)的傅里叶变换就可能是存在的，此时代入经典Fourier变换的表达式有：
- $$\mathcal{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Step3: 得出逆变换:同时顺便可以得出上述Fourier变换的逆变换，即：

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)e^{i\omega t}d\omega$$

其中我们记：

$$s=\sigma+i\omega$$

- Step4: 换元整理：最后换元式求出它的微分，并代入原Fourier变换和其逆变换作换元整理：

$$ds=id\omega$$

于是我们得出，函数f(t)的这对积分变换和其逆变换分别为：

$$L(s)=\int_0^{\infty}f(\xi)e^{-s\xi}d\xi$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(s)e^{st}ds$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

$$L(s)=\int_0^{\infty} f(\xi)e^{-s\xi}d\xi$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s)e^{st}ds$$

- **Definition 2.1：**

我们最后给予上面推导的关于f(t)一对积分变换记号：

$$\mathcal{L}[f(t)]=L(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}[L(s)]=f(t)$$

并称这对积分变换分别为为函数f(t)的Laplace变换及其Laplace逆变换.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 3. Laplace变换解PDE的一般步骤回顾：

一般步骤基本上同于Fourier变换解PDE方程，分为以下几个基本步骤：

(i) 对原方程做Laplace变换，如有定解条件也需要一并做Laplace变换，并利用Laplace变换的性质整理新得到的方程。

(ii) 解出像函数，此时往往得出的新方程易于解出像函数，可能是代数函数方程，或者较简单的常微分方程。

(iii)利用Laplace变换的逆变换反解出原方程的解。

4. Laplace变换的基本性质

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- **Theorems 2.1**
- (I) Laplace变换与Fourier变换一样是线性算子：

$$[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- (II) Laplace变换也自然具有某种微分性质和积分性质，可用于辅助Laplace变换整理ODE和PDE的过程：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots$$

$$- sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\ \mathscr{L}[\psi(t)]$$

(III) Laplace变换还具有相似、位移、延迟三条某种意义下的类线性的性质，也可用于辅助Laplace变换整理ODE和PDE的过程：

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

相似性质：

$$\mathscr{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right]$$

位移性质：

$$\mathscr{L}[e^{-\lambda t}f(t)]=F(s+\lambda)$$

延迟性质：

$$\mathscr{L}\ [f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$$

(IV) Laplace变换也有卷积定理，即如果：

$$\mathscr{L}\ [f_1(t)]=F_1(s),\quad \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),$$

$$f_1(t)*f_2(t)\equiv\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s)$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- (V)在用Laplace变换整理PDE或是ODE过程中常用到的微分定理和积分定理，分别为：

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad \int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

微分定理　　　　　　　　积分定理

- (VI) 对函数族的Laplace变换，具有良好的累次极限性质，即可以各种的交换极限：

$$L[\lim_{\alpha\to a} f(t,\alpha)] = \lim_{\alpha\to a} F(s,\alpha)$$

$$L[\frac{\partial}{\partial\alpha} f(t,\alpha)] = \frac{\partial}{\alpha} F(s,\alpha)$$

$$L[\int_0^a f(t,\alpha)d\alpha] = \int_0^a F(s,\alpha)d\alpha$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- (VII)初值和终值定理,有时可用于确定变换后方程的定解条件：

设$L[f(t)]=F(s)$,且$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，则

$$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

设$L[f(t)]=F(s)$,且$\lim\limits_{t\to 0}f(t)$存在，或

$sF(s)$的奇点位于$\mathrm{Re}\,s<0$的平面上，则

$$F(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

- (初值定理)　　(终值定理)
- 5、Laplace变换解PDE的例子：
- Example 2.1
- 考察如下半无界弦振动的混合问题的线性偏微分方程：
- $$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t) \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, \quad 0\le x<\infty, t\ge 0 \\ u(0,t)=0, \lim\limits_{x\to\infty}u_x(x,t)=0 \end{cases}$$
- 其中f(t)光滑，且只依赖于时间参数t。

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t) \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, \quad 0\le x<\infty, t\ge 0 \\ u(0,t)=0, \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,t)=0 \end{cases}$$

- Step1：我们对原方程及其定解条件两边同时做关于变量t的Laplace变换(也就是把X看成固定的参数)，我们设：

$$U(x.s)=\mathcal{L}[u(x,t)]\,,F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$

- 则由Laplace变换求导的微分性质和交换参数求极限次序的性质分别得：

$$\mathcal{L}[u_{tt}(x,t)]=s^2U(x,s)\,,\mathcal{L}[u_{xx}(x,t)]=U_{xx}(x,s)$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 并还需代入原方程的定解条件：

$$\begin{cases} a^2U_{xx}(x,s) - s^2U(x,s) = -F(s) \\ U(0,s) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} U_x(x,s) = 0 \end{cases}$$

- Step2：我们解二阶线性ODE，得出像函数为：

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}(1 - e^{-\frac{s}{a}x})F(s)\right]$$

- Step3：最后由卷积定理，我们写出其原解的形式为：

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[1 - e^{-\frac{s}{a}x}\right]$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Step4 求出相应的Laplace 变换的逆变换，代入Step3中，即可得到原方程的解是：
- $$u(x,t) = -f(t) * u_2$$
- 其中u_2用δ函数表示为广义积分的形式为：
- $$u_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\frac{x}{a} - \xi)(t - \xi)d\xi$$
- 算出广义积分的具体值为：

$$u_2 = t - \frac{x}{a}$$

- 最后得到原方程的解是：

$$u(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(t - \frac{x}{a} - \xi)d\xi$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 6. Fourier变换和Laplace变换常用性质的总结对比(一元情况为例示):

傅里叶变换 Fourier Transformation	拉氏变换 Laplace Transformation
$f(x)$ (原函数) $\leftrightarrow$ $\tilde{f}(k)$ (像函数)	$f(t)$ (原函数) $\leftrightarrow$ $\bar{f}(p)$ (像函数)
变换 $F[f(x)]=\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$	变换 $L[f(t)]=\bar{f}(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
逆变换 $F^{-1}[\tilde{f}(k)]=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk$	逆变换 $L^{-1}[\bar{f}(p)]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{f}(p)e^{pt}dp$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- （续表）

	傅里叶变换 Fourier Transformation	拉氏变换 Laplace Transformation
1. 线性定理	$F[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)]$ $=\alpha_1 F[f_1(x)]+\alpha_2 F[f_2(x)]$ $F^{-1}[\alpha_1 \tilde{f}_1(k)+\alpha_2 \tilde{f}_2(k)]$ $=\alpha_1 F^{-1}[\tilde{f}_1(k)]+\alpha_2 F^{-1}[\tilde{f}_2(k)]$	$L[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]$ $=\alpha_1 L[f_1(t)]+\alpha_2 L[f_2(t)]$ $L^{-1}[\alpha_1 \bar{f}_1(p)+\alpha_2 \bar{f}_2(p)]$ $=\alpha_1 L^{-1}[\bar{f}_1(p)]+\alpha_2 L^{-1}[\bar{f}_2(p)]$
2. 延迟定理	$F[f(x-x_0)]=e^{-ikx_0}F[f(x)]$	$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}L[f(t)]$
3. 位移定理	$F[e^{ik_0x}f(x)]=\tilde{f}(k-k_0)$	$L[e^{\alpha t}f(t)]=\bar{f}(p-\alpha)$ $[\mathrm{Re}(p-\alpha)>\sigma_0]$
4. 相似定理：	$F[f(ax)]=\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\tilde{f}(\dfrac{k}{a})$ （a：压缩因子）	$L[f(ct)]=\dfrac{1}{c}\bar{f}(\dfrac{p}{c})$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

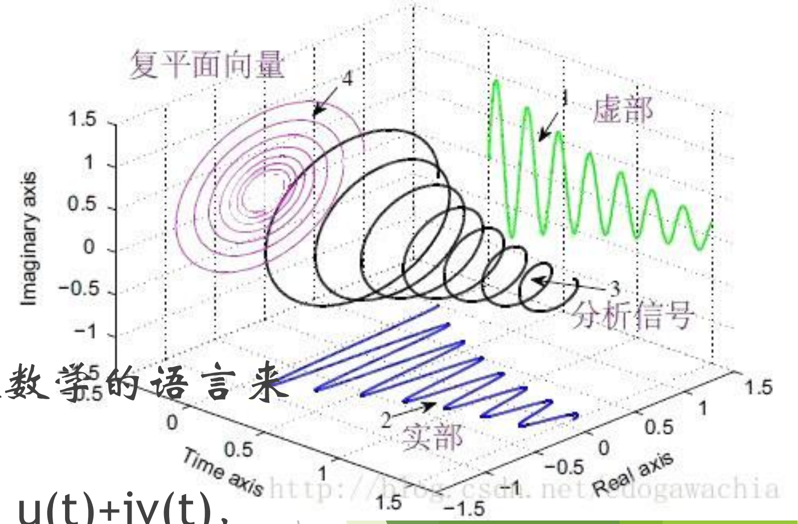
- （续表）

5. 微分定理	$F[f^{(n)}(x)]=(ik)^{(n)}F[f(x)]$ $F[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}]=(ik)^n F[f(x,y)]$ $F[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}]=\frac{d}{dy}\tilde{f}(k,y)$	$L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(0)$ $L[f''(t)]=p^2L[f(t)]-pf(0)-f'(0)$ .... $L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(0)$ $-p^{n-2}f'(0)-\cdots\cdots-f^{(n-1)}(0)$
6. 积分定理	$F[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi]=\frac{1}{ik}F[f(x)]$	$L[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{p}L[f(t)]$
7. 卷积定理	$F[f_1(x)*f_2(x)]=F[f_1(x)]F[f_2(x)]$	$L[f_1(t)*f_2(t)]=L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)]$ $L^{-1}[\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p)]=f_1(t)*f_2(t)$
8.像函数的卷积定理	$F[f_1(x)f_2(x)]=\frac{1}{2\pi}\tilde{f}_1(k)*\tilde{f}_2(k)$	8. 像函数的微分定理 $\frac{d^n}{dp^n}\bar{f}(p)=L[(-t)^n f(t)]$
9. 乘积定理	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)dx$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2^*(k)dk$	9. 像函数的积分定理 $\int_p^{\infty}\bar{f}(p')dp'=L[\frac{f(t)}{t}]$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 三、Hilbert变换与Riesz变换
- **1.从非奇异积分算子到奇异积分算子：**
- 之前所涉及到Fourier变换和Laplace变换都是非奇异积分算子，也就是说这两种变换过程中的积分虽然即使都是广义积分，但都没有瑕点，也就是积分变量趋于某个固定点附近时，积分函数在此点的值或者值的模长会趋于无穷。
- 那么有没有需要用到奇异积分变换(或者说奇异积分算子)来求解PDE的例子呢？
- **2.引入：一个从实际到理论的问题：**
- 我们来考察信号处理问题中的解析信号的还原问题。还有数学理论复变函数中的求解柯西-黎曼方程，乃至求解更一般的调和函数组的问题。

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾



- 因为需要把问题尽量描述的清楚且简洁一点，所以我们首先用比较数学的语言来描述信号处理中的还原解析信号的问题：
- 首先我们定义一下什么是解析信号呢？事实上，对于一个二维信号 u(t)+iv(t)，其中i为虚数单位，t为时间轴。如果它可以看成某个以t时间轴为实轴，以方位轴x为虚轴的复平面上的解析函数f(t+ix)=u(t,x)+iv(t,x)在x=0(实轴)处的限制，那么称二维信号u(t,0)+iv(t,0)为一个解析的信号。

- 于是，还原低维解析信号的问题在理论层面就可以自然而然的完整的提出来：
- 根据复变函数的知识我们知道以上的分量函数u(t,x),v(t,x)是满足经典的二元柯西-黎曼方程，也就是互为一组调和函数，也是一个LPDE的方程组。
- 而且在实际采集信号时我们又能得到定解条件，也就是实轴上的取值部分的实部u(t,0) (有时也有实部虚部的一些其他频率关系)，所以理论上我们可以解出整个解析函数u(t,x)+iv(t,x)，从而得到我们想要的信号在实轴上取值的虚部v(t,0)，即整个二维信号u(t)+iv(t)

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 既然还原解析信号归结于求解二元的柯西黎曼方程，或者说求解二元的调和函数组，那么我们也自然可以进一步的提出问题，如何求解多元的推广后的柯西黎曼方程，以及多元的调和函数组。
- 事实上，这就可以应用到二元情况的Hilbert奇异积分变换和高维情况的推广Riesz奇异积分变换，它们都是一种奇异积分算子。
- 下面我们先看低维情况的Hilbert变换,再推广到高维:
- **3.Hilbert变换**
-
- (I)分析基础：Cauchy主值可积与Hilbert变换的定义

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Definition3.1 柯西主值积分：
- $f(x)$可测函数定义在R^n上,则它于x_0处依柯西主值可积定义为：

定义 1.1 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，$f(x)$ 在集合 $\{x: |x-x_0|>\varepsilon>0, x_0\in\mathbb{R}^n\}$ 上可积．若

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-x_0|>\varepsilon} f(x)dx$$

存在 (有限), 则称函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上依 Cauchy 主值可积，并记其极限值为

$$\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Example3.1 例子：

那对于$L^p(R^1)$上的函数$g(x)$，$f(x)=g(x)/(x-x_0)$什么时候于x_0处柯西积分主值存在呢？事实上只需要$g(x)$于x_0处有一定的光滑性条件，比如满足Lipshitz条件：

$$|g(x)-g(x_0)|\le C|x-x_0|$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Definition3.2
- Hilbert变换：
- 设 g(x)满足x0处的Lipshitz条件，当然也可设定g(x)在x0处依柯西主值可积，那么对任意固定的x0，我们就可有意义的给出g(x)的经历了Hilbert变换后的像函数$H(g(x))$在x0处的取值如下，也就是Example3.1中的在相应点处的柯西主值积分：

定义 1.2 设 $g(x) \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 \le p < \infty$. 若

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |x - x_0|} \frac{g(x)}{x - x_0} dx$$

存在，称上面主值积分为函数 $g(x)$ 的 Hilbert 变换在 x_0 点的值，记

$$\mathcal{H}g(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |x - x_0|} \frac{g(x)}{x - x_0} dx.$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- (II)Hilbert变换的共轭泊松积分形式与共调和意义(也就是换个形式写写,发现就是C-R方程的解)：
- **Hilbert变换的调和意义：**
- 我们考察构造如下的一个解析函数，也就是一个复的含参变量的广义积分，并将分解出它的虚部和实部：

对于实值函数 $g(t) \in L^p(-\infty,\infty)$, $1 \le p < \infty$, 考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-z}dt, \quad z = x + iy,\ y > 0. \tag{1.4}$$

- 并令：

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-z}dt,$$

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 如何分解呢，我们只需将上列F(z)中的$\frac{1}{i(t-z)}$分解为实部和虚部，并做如下分解：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}g(t)dt+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}g(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}(P_y*g)(x)+\frac{i}{2}(Q_y*g)(x), \tag{1.5}$$

- Definition3.3 其中P_y(x)和Q_y(x)分别称作Poisson核和共轭Poisson核，这两个实部和虚部对应的卷积分别称做g(t)的Poisson积分和共轭Poisson积分：

这里 $P_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$ 分别是 $\mathbb{R}_+^2$ 上的 Poisson 核以及共轭 Poisson 核.

- Theorem3.1 **给出这些定义后**事实上,可以证明Hilbert变换的调和意义，恰好正是：把“采集的实信号”g(x)变为了它的共轭Poisson积分，也就是解析函数F(z)的虚部v(x,y)的2倍。而g(x)的Poisson积分则解析函数F(z)的实部u(x,y)的2倍。所以之前的实际解析信号还原问题，我们一般就是采集到信号g(x),要去还原整个解析信号，特别是解析信号的虚部u(x,y),所以只需直接对g(x)做Hilbert变换即共轭Poisson积分即可。

一、几种常见PDE变换解法总结回顾

- Definition3.3
- 上述分解后得到的P_y(x)和Q_y(x)分别称作**Poisson核和共轭Poisson核**，这两个实部和虚部对应的卷积分别称做“实信号”g(t)的Poisson积分和共轭Poisson积分：

  这里 $P_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$ 分别是 $\mathbb{R}^2_+$ 上的 Poisson 核以及共轭 Poisson 核.
-
- Theorem3.1 **(即Hilbert变换的调和意义，主要对应苗老师书上的218页定理1.4)**
- 给出这些定义后事实上,可以证明Hilbert变换的调和意义，恰好正是：把“采集的实信号”g(x)变为了它的共轭Poisson积分，也就是之前写出的那个解析函数F(z)的虚部v(x,y)的2倍，而根据解析函数的刚性，这个F(z)也在定解条件下被唯一确定。而g(x)的Poisson积分则是解析函数F(z)的实部u(x,y)的2倍。
- 所以之前的实际解析信号还原问题，我们一般也就是采集到信号g(x)后,要去还原整个解析信号F(z)，特别是解析信号的虚部u(x,y),那么**只需直接对g(x)做Hilbert变换即共轭Poisson积分即可**。

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- 证明此处略过，可以参考苗长兴老师的《调和分析及其在偏微分方程中的应用》

的第218页，定理1.4的证明过程，特别的还需要关注定理的内容中，还证明了L^p空间中函数的Hilbert变换的a.e.存在性，也就是几乎处处意义下，这些函数都是总可以做希尔伯特变换的。

定理 1.4 设 $g(x) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, 则 $\mathcal{H}g(x)$ 几乎处处存在且有限，其值恰好是 $g(x)$ 的共轭 Poisson 积分，即对任意的 $x \in L_g$, 有

$$\lim_{y\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}g(t)dt-\int_{|x-t|>y}\frac{g(t)}{x-t}dt\right)=0. \tag{1.10}$$

证明 记

$$\Phi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t^2+1}-\dfrac{1}{t}, & |t|>1;\\ \dfrac{t}{t^2+1}, & |t|\le 1.\end{cases} \tag{1.11}$$

易见，(1.10) 中的积分可改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_y(t)g(x-t)dt, \tag{1.12}$$

这里 $\Phi_y(t)=y^{-1}\Phi(\frac{t}{y})$. 注意到

$$\Psi(x)=\sup_{|t|\ge|x|}\Phi(t)=\begin{cases}\frac{1}{|x|(1+|x|^2)}, & |x|>1,\\ \frac{1}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$$

在 $(-\infty,\infty)$ 可积. 由点态收敛定理 (第一章定理 1.6) 可得

$$\lim_{y\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_y(t)g(x-t)dt=g(x)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)dt=0,\quad \forall x\in L_g. \tag{1.13}$$

这里用到 $\Phi(x)$ 是奇函数的特征. 故 (1.10) 成立.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- (iii)Hilbert变换与C-R方程组
- Inference3.1
- 比较显然的是，在理论层面上，Hilbert变换也自然给出了已经知道解析函数在实轴上取值的实部g(x)=u(x,0)的定解条件下，如何求解它的柯西黎曼方程的一种方法，这可以视作Hilbert变换在LPDE中的应用。
- 另外一件比较重要的事情是，这种Hilbert变换可以方便的向高维情况推广，从而得到多元的柯西黎曼方程组或者多元调和函数组求解的方法，也就是Riesz变换，它也是一个奇异积分变换。
- 那么如何往下推广呢?
- 4.Riesz变换
- (i)Riesz变换的推广方法与定义

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Definition4.1 参考希尔伯特变换的变换的共轭Poisson积分形式，由与是核积分变换，所以我们本质上只需合理的试图推广Poisson核$\frac{1}{x}$为Riesz核即可：

下面来讨论 n 维的情形，这就对应着 Riesz 变换. 由于 $\frac{1}{x}$ 可写成 $\frac{x}{|x|^{n+1}} = \frac{x}{|x|^2}$ $(n=1)$. 对应着 $n>1$ 维的情形，类似地构造

$$K_j(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.22}$$

这样，就自然地引入了 Riesz 变换的概念.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Definition4.2 于是自然引入Hilbert变换的高维情况的概念，但注意额前面额外的加了常系数Cn，不过这不是很影响这种类比的关系，这也是等会儿为了在形式上更加方便的统一表示高维的C-R方程组的解，即得到Riesz变换：

定义 1.4 记 $C_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$, 称

$$R_j f(x) = C_n \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\frac{t_j}{|t|^{n+1}}dt, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.23}$$

是 f 的 Riesz 变换，相应地 $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ 称为 Riesz 核函数.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- (ii)Riesz变换与广义Cauchy-Riemann方程组：
- Definition4.3 Riesz变换是为了解决广义Cauchy-Riemann方程，或者说求解共轭函数系，同样类比给出广义C-R方程的定义如下：

定义 1.6 设 $u_j(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 且满足广义的 Cauchy-Riemann 方程

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_k}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_k},\quad j\neq k.\quad j,k=1,2,\cdots n. \tag{1.34}$$

则称 $\{u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)\}$ 是共轭函数系.

一、 几种常见PDE变换解法总结回顾

- Theorem4.1 那么从如下定理1.7，我们就相当于给出了某种定解条件下广义C-R方程的解法，定理的证明参考见苗长兴老师《调和分析及其在偏微分方程中的应用》的222页定理1.7

定理 1.7 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 其相应的 Poisson 积分分别是 $u_0(x,y) = P_y * f(x)$, $u_j(x,y) = P_y * f_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$. 则 $\{u_0(x,y), u_1(x,y), \cdots, u_n(x,y)\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的共轭函数系的充要条件是

$$f_j(x) = R_j f(x), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.35}$$

- 这相当于是说，在广义C-R方程中，如果给出定解条件，即$u_0(x,0)$，我们记作定理记号中的$f(x)$,也就是类比于我们之前2维C-R方程中的实轴上取值的实部，那么：
- (1)对于u_0(x,y)函数，它依然和低维情况一样，必定等于$f(x)$的Poisson积分变换
- (2)对于其他n个函数u_i(x,y)，它们则等于n个f_j(x)函数组分别的各自的Poisson积分(一次作用)，这n个被变换的函数正是恰好对应的是之前定义的n个R_j变换分别对$f(x)$的积分变换作用(2次作用),一共2次复合对原始f(x)的作用，得到其他调和函数组中的函数。

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- 1.calderón-zygmund奇异卷积算子的定义
- 那么从Hilbert变换到Riesz变换，我们本质上推广了积分变换的核函数，那么我们能否进一步推广Riesz变换，得到更广泛的奇异卷积算子呢？这是可行的：
- Step1：于是我们再次观察Riesz变换的核函数

$$K_j(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.22}$$

- Step2：我们总结它有什么性质呢？
- 首先还是在1维的Hibert变换的情况看，此时n=0，其核K退化为$\frac{1}{x}$，并可以做如下的函数恒等变形：事实上，在 $\mathbb{R}^1$ 上，有

$$\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|} = \frac{\Omega(x)}{|x|},$$

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- Step3：我们注意到其变形后的分子部分，具有如下两条性质(即线性加n维球调和性)：

这里 $\Omega(x)$ 满足：

(i) $\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \lambda > 0$;

(ii) $\int_{\Sigma_0} \Omega(x) d\sigma(x) = \Omega(-1) + \Omega(1) = 0$, 这里 $\Sigma_0 = \{-1, 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上单位球面. 因此, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义核函数

- Step4：将这两条性质，我们易于推广至高维的情况：

面. 因此, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义核函数

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \quad n > 1 \tag{1.25}$$

使得 $\Omega(x)$ 满足

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \quad \lambda > 0, \tag{1.26}$$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(x) d\sigma(x) = 0. \tag{1.27}$$

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- Definition5.1 推广了核后，我们就可以顺便给出推广后的Calderón-Zygmund算子的定义如下：

定义 1.5 设 $\Omega(x)$ 满足 (1.26) 和 (1.27)，称

$$Kf = \mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt \tag{1.28}$$

是 Calderón-Zygmund 奇异积分算子．特别，当 $\Omega_j(x) = C_n\frac{x_j}{|x|}$ 时，算子 K 恰是 Riesz 算子 R_j.

- 当然，同样是为了保证奇异积分存在，对于核函数的分子我们要加一些光滑性条件，比如Lip连续或C^1连续：

为保证 (1.28) 中主值积分的存在性且具有其类同于 Hilbert 变换的性质，需要给 $\Omega(x)$ 附加一些光滑性条件．例如：设 Ω 是 Lip 连续或 C^1 连续，以确保形如

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho < \infty, \quad \omega(\rho) = \sup_{\substack{|x-y|\le\rho \\ |x|=|y|=1}} |\Omega(x)-\Omega(y)| \tag{1.29}$$

的 Dini 型条件成立．我们将在第三节证明 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- 2.Calderón-Zygmund算子结构的刻画：
- Theorem 5.1
- 对于作为特例情况希尔伯特变换，有如下几乎是等价刻画的交换性定理：

定理 1.8 设 T 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子，若它满足

(1) T 与平移算子可交换，

(2) T 与伸缩变换 (正值) 可交换，

(3) T 关于反射变换是反可交换的，

则 T 与 Hilbert 变换相差一个常数倍.

- 事实上，这对于一般的C-Z算子也同样有类似的性质，也就是说如果一个奇异积分算子T具有与平移变换、伸缩变换可交换的特点，那么算子T恰好就是我们之前定义的C-Z算子。

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- 3. Calderón-Zygmund算子的有界估计

Theorem5.2

- 对于C-Z奇异积分算子T，它最关键的好处之一是有界可估计性，具体而言如果其核函数的分子满足一定的光滑性条件，如C^1条件，Lip条件，Dini条件那么其逼近算子T_ε和T都是(p,p)型算子，且它们(对任意ε和T本身),存在统一的常数Ap，作为范数的估计(对应苗老师书上p234页的定理3.1结论(1),(2))：

- 并且我们还能给出C-Z奇异积分算子T作用到f上的傅里叶变换的显示表达式(对应定理3.1结论(3))：

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

定理 3.1(Calderón-Zygmund 定理)　设 $\Omega(x)$ 是零齐次函数，满足消失性质 (3.2) 及 Dini 型条件 (3.3). 则对 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 算子

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y|\ge\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy, \quad 1<p<\infty \tag{3.4}$$

满足

(1) 存在有界数 A_p(不依赖于 ε 与 f) 使得

$$\|T_\varepsilon f\|_p \le A_p\|f\|_p, \quad 1<p<\infty; \tag{3.5}$$

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to0} T_\varepsilon f \overset{L^p}{=\!=} Tf$, T 是 (p,p) 算子且满足

$$\|Tf\|_p \le A_p\|f\|_p, \quad 1<p<\infty; \tag{3.6}$$

(3) 如果 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\widehat{Tf} = m(x)\hat{f}(x)$, 这里 $m(x)$ 是零齐次函数且具有如下显式表示

$$m(x) = \int_{\Sigma_{n-1}} [\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}(x\cdot y) + \log(|x\cdot y|^{-1})]\Omega(y)d\sigma(y), \quad |x|=1. \tag{3.7}$$

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- 4. Calderón-Zygmund算子的点态收敛逼近
- Theorem5.3
- 在一定光滑性条件下，C-Z算子T可由T_ε算子在几乎处处意义下逼近，且由此可以得到它的共轭算子T^*的一个刻画，并得出共轭算子T^*的一个有界估计(再次体现C-Z良好的有界性)

定理 4.1 设 $\Omega(y)$ 满足 Dini 型条件及双零条件 (零齐次条件、消失条件). 对 $f(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 则积分

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)dy,\quad \varepsilon>0 \tag{4.3}$$

满足

(1) $\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon f(x)$ 几乎处处收敛;

(2) 记 $T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|$, 则 T^* 是弱 (1, 1) 型算子;

(3) 对 $1<p<\infty$, T^* 是 (p,p) 型算子且满足估计

$$\|T^*f(x)\|_p\le A_p\|f(x)\|_p,\quad f(x)\in L^p(\mathbb{R}^n),\quad 1<p<\infty. \tag{4.4}$$

二、Calderón-Zygmund奇异卷积算子简介

- 以上两个关于C-Z算子及其共轭算子有界性估计的证明，都要用到调和分析中的Calderón–Zygmund分解，这也是近代调和分析的核心方法之一，在此简略。
- 那么C-Z算子在更广泛的pde理论中大致上可以发挥什么样的作用呢？
- 5.第一代(经典)Calderón-Zygmund算子在偏微分方程研究中发挥的作用简介
- 首先经典的C-Z奇异积分算子理论（第一代算子），包括Hilbert变换和Riesz变换，在许多数学物理的研究中发挥着重要的应用：
- 就偏微分方程而言，它的很多有界估计（如刚才提及的两个算子有界性能估计的定理）使得它在：正对称双曲型方程、位势积分估计（包括单层位势和双层位势）及椭圆边值问题研究中起着重要作用。
- 另一方面，利用Bessel位势(在第一节的Fourier变换解方程的例子中提及过），Riesz位势可以将整数阶的Sobolve空间推广到相应的分数阶函数空间。

三、调和分析背景下“更新换代”的奇异积分算子

- 1.三代奇异积分算子概览
- (1)事实上我们之前所定义的C-Z算子所对应的积分变换的核都为$K(x,y)=K(x-y)$的形式，对于这一类算子，我们又称为第一代奇异积分算子。
-
- (2)而对奇异积分算子的核$K(x,y)$的形式为$K(x,x-y)$的即是经典的拟微分算子，我们称为第二代奇异积分算子。
-
- (3)或者对更一般的非卷积核$K(x,y)$，称为第三代奇异积分算子。

三、调和分析背景下“更新换代”的奇异积分算子

- 2.第二代奇异积分算子的理论作用简介
- 三个应用：
- (i)第二代 Caldern—Zygmund奇异积分算子是拟微分算子的特例，它是处理变系数线性偏 微分方程的有效方法、
- (ii)同时，拟微分算子的理论可视为经典位势理论的推广，可以讲它是研 究一般椭圆边值问题的基本方法之一。
- (iii)第二代积分算子作为拟微分算子也进一步发展出了 Fourier积分算子， 本质上Fourier积分算子也可以视为第二型的振荡积分、
- 关于第三代奇异积分算子，还不是非常了解它发挥的理论作用，欢迎大家交流讨论。

四、参考教材和致谢

- 《Partial Differential Equations》 Lawernce C.Evans著
- 《调和分析》林钦诚著
- 《偏微分方程的调和分析方法》 苗长兴 张波著
- 《调和分析及其在偏微分方程中的应用》苗长兴著

四、参考教材和致谢

- Thank you!