30分钟总结Sobolev空间理论的分析工具

田晨霄

摘要

- Sobolev空间是包含不连续函数的一类函数空间，在PDE理论里起基石一般的重要作用。Sobolev空间理论的建立依赖很多繁复的“硬分析”工具，直接阅读每一个细节是非常花时间的。本报告希望用简短的时间带大家了解Sobolev空间理论严格推导的思路，并提取有用的分析工具以备实际学习科研之需。报告分为两条主线，其一是Sobolev空间理论的推理体系简述，其二则穿插理论证明中带有典型意义的分析方法，供大家学习讨论。

关键词

- 理论体系部分
- 第一层：定义和理解
- 第二层：逼近定理
- 第三层：延拓定理
- 第3.5层：迹定理
- 第四层：嵌入定理和Sobolev不等式

关键词

- “硬”分析方法部分
- [1]磨光化子法
- [2]隔断函数与分片磨光
- 化繁为简部分
- [1]光滑函数逼近
- [2]C1边界平坦化映射
- [3]有界区域延拓分析

Sobolev空间理论框架——第一层

定义 1.2.2. 对于正整数k和$1 \le p \le \infty$，设$U \in \mathbb{R}^n$是开集，定义

$$W^{k,p}(U) = \{u \in L^p(U) | \exists D^\alpha u \in L^p(U) \quad \forall |\alpha| \le m\} \tag{1.2.8}$$

及范数

$$||u||_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(U)})^{\frac{1}{p}} & p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} esssup_{x\in U} |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases} \tag{1.2.9}$$

其中范数$|| \cdot ||_{L^p(U)}$指p次可积函数空间$L^p(U)$的范数，这样的线性赋范空间被称为***Sobolev*空间**，参数p被称为***Sobolev*指标**；特别地，如果$p = 2$，$W^{k,p}(U)$简记为$H^k(U)$，是一个内积空间。

- 从通俗语言看，Sobolev空间虽未对函数连续性提任何要求，但是要求函数的小于等于k次导数被Lp范数控制。从直观来看，参数k和p越大，对u的控制便更“严格”。

一个例子：位势方程基本解

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & (n\geq 3) \end{cases}$$

在此之前，我们强调关于基本解的若干性质，首先是基本解导数的量级

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \left|D^2\Phi(x)\right| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (x\neq 0), \tag{3.1.4}$$

其中$C>0$是与x无关，只由n决定的常数。我们可以看出基本解在0附近趋于$+\infty$，而如果对基本解求导，得到的函数在0附近趋于无穷的速度回更快。

- 位势方程的基本解，在求导过程中分母的指数变高，具有更高的奇异性！所以具有更高次数k的Sobolev空间对函数的要求更严格。

Sobolev空间理论框架——第二层

- 研究抽象函数空间的一个重要方法是研究空间的一个稠子集，而无无穷次光滑函数恰巧就是Sobolev空间的一个稠子集。这一结论称为“Sobolev逼近定理”。

定理 5.3.1. 设U是有界开集，参数$1 \leq p < \infty$，设$u \in W^{k,p}(U)$，那么存在一列$u_n \in W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$使得$u_n \to u$在$W^{k,p}(U)$成立，换言之，$W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$是$W^{k,p}(U)$的稠密子集。

定理 5.3.2. 设U是有界开集，并且边界∂U是C^1的，参数$1 \leq p < \infty$，设$u \in W^{k,p}(U)$，那么存在一列$u_n \in C^\infty(\bar{U})$使得$u_n \to u$在$W^{k,p}(U)$成立。换言之，$C^\infty(\bar{U})$是$W^{k,p}(U)$的稠密子集。

局部可积和局部Lp的概念

注解 3.1.5. 称区域U上的一个函数u是**局部$Lebesgue$可积函数**，如果u的任意开集集$V \subset\subset U$上均可积（开集V满足$V \subset\subset U$指$V \subset \bar{V} \subset U$），记为$u \in L^1_{loc}(U)$。类似我们还可以推广函数空间$L^p_{loc}(U)$，它里面的函数在任意开集$V \subset\subset U$均$L^p$可积，而空间$L^p_{loc}(U)$的收敛性指函数在任意开集$V \subset\subset U$均$L^p$收敛。实际上局部$Lebesgue$可积的函数在$U$边界的表现可能非常糟糕，例如函数$f(x) = e^{e^{dist(x,\partial U)^{-1}}}$。

- 上述两个定理的区别，就在于前者用于逼近的光滑函数在U边界表现可能非常糟糕，后者在假定边界C1的情况下，用U闭包的光滑函数逼近，保证了逼近函数U边界附近取值不会很糟糕

磨光化子的概念和性质

- 磨光化子是一个支集在原点附近的函数，它不仅自己光滑，还能使别人光滑。局部可积的函数卷积它，立马变得无限光滑。

定义 3.1.2. 定义

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & if\ |x|<1 \\ 0 & if\ |x|\geq 1 \end{cases} \tag{3.1.17}$$

满足$\eta(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，其中$C$是使得$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx=1$的给定归一化系数。我们称

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{3.1.18}$$

为一个**磨光化子**(*mollifier*)。其中$\eta_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$且$\int_{\mathbb{R}^n}\eta^\varepsilon(x)dx=1$且其支集$spt(\eta^\varepsilon)\in\overline{B(\theta,\varepsilon)}$。

磨光化子的概念和性质

- 得到的磨光函数f^eps(x)的函数值，仅仅包含了x附近的信息，在eps变小的过程中，自然和f比较接近。

磨光化子的主要作用是对通常只有局部Lebesgue可积的函数$f \in L^1_{loc}(U)$做磨光处理，得到在**局部**U^ε**光滑**的卷积函数f^ε：

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)dy, \quad x \in U^\varepsilon, \tag{3.1.19}$$

定理 3.1.4. 设$f \in L^1_{loc}(U)$，那么

1）光滑性：$f^\varepsilon \in C^\infty(U^\varepsilon)$。

2）几乎处处收敛：当$\varepsilon \to 0$时，$f^\varepsilon \to f, \quad a.e.$。

3）L^p收敛：设$1 \le p < \infty$，且$f \in L^p_{loc}(U)$，那么在空间$L^p_{loc}(U)$中，$f^\varepsilon \to f$

磨光化子的应用之一——Lapalce方程解的正则性

- **正则性**是指某方程的解自然拥有比该方程本身期望的光滑程度更高的光滑性的性质，如Laplace方程。在论文里常常提到“**正则化**”这一概念，正则化则一般指通过对方程进行处理，使方程解更光滑的过程。

定理 3.1.5. 设$u \in C(U)$，且对于任意$B(x,r) \subset U$，有

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) \tag{3.1.20}$$

那么u是调和函数，且$u \in C^\infty(U)$。

Proof. 我们对u进行磨光

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\epsilon(y)u(x-y)dy \\
&= \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(0,r)} \eta^\varepsilon(r)u(x-y)dy \right) dr \\
&= \int_0^\varepsilon \eta^\varepsilon(r) \left(\int_{\partial B(0,r)} u(x-y) \right) dr \\
&= \int_0^\varepsilon \eta^\varepsilon(r) \left(n\alpha(n)r^{n-1}u(x) \right) dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(0,r)} \eta^\varepsilon(r)dy \right) dr \\
&= u(x)
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

在公式(3.1.21)中，第二个和第六个等号利用了球坐标变换定理3.1.3；第四个等号则利用了平均值条件(3.1.20)。

磨光化子方法应用于Sobolev空间及其局限性

- 我们知道磨光函数f^eps Lp收敛于f，而简单的推理告诉我们f^eps也可以按照Sobolev空间收敛于f。但是这是否意味着我们可以使用磨光函数逼近f呢？答案是否定的，**因为磨光函数并不是在全体U定义**，f^eps在U附近是没有定义的。

引理 5.3.1. 设$u \in W^{k,p}(U)$，其中$1 \le p < \infty$，μ_ε是磨光化子，在区域U_ε定义$u^\varepsilon = \mu_\varepsilon * u$，那么$u^\varepsilon \in C^\infty(U^\varepsilon)$且$u^\varepsilon$在空间$W^{k,p}_{loc}(U)$收敛于$u$。

定理 5.3.1. 设U是有界开集，参数$1 \le p < \infty$，设$u \in W^{k,p}(U)$，那么存在一列$u_n \in W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$使得$u_n \to u$在$W^{k,p}(U)$成立，换言之，$W^{k,p}(U) \cap C^\infty(U)$是$W^{k,p}(U)$的稠密子集。

隔断函数与分片磨光

- 由于磨光函数在边界附近无法定义，我们决定将U分为可列个层Vi。这些Vi两两相交，并起来则是全体U。我们在这一系列Vi上定义光滑函数。

我们构造一系列函数ξ_i其中$i \in \mathbb{N}^*$，其满足

1）$\xi_i \in C_0^\infty(V_i)$。

2）$\sum_{i=1}^\infty \xi(x) = 1, \forall x \in U$。

3）$\xi_i \in [0,1]$。

隔断函数与分片磨光

- 借助隔断函数，我们将u限制在一个在一个局部磨光。局部磨光的函数再整合起来，**就得到一个在U全体都有定义的光滑函数。**

我们考虑一个$u \in W^{k,p}(U)$，定义$v_i = \xi_i u \in W^{k,p}(V_i)$，且支集$supp(v_i) \subset\subset V_i$。我们在$U$上对$v_i$磨光得到$\eta_i = \mu_{\varepsilon_i} * v_i$，这样的$v_i \in C_0^\infty(V_i)$。那么根据引理5.3.1，对任意$\delta$和$i$，我们可以取一个足够小的$\varepsilon_i$使得

$$\|\eta_i - v_i\|_{W^{k,p}(V_i)} = \|\eta_i - v_i\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^i}.$$

根据v_i的定义和ξ_i的选取规则，我们有

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x), \forall x \in U.$$

因此我们定义$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$，此时

$$\|\eta - v\|_{W^{k,p}(U)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i - v_i\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta.$$

再根据η的定义，对于每一个$x \in U$，至多只有两个$\eta_i(x) \neq 0$，这说明$\eta \in C_0^\infty(U)$。

边界光滑逼近的证明思路

- 利用隔断函数进行分片磨光是分析是Sobolev空间理论的典型方法。
- 在边界光滑的逼近定理里，我们同样需要使用分片然后在局部磨光的方法。

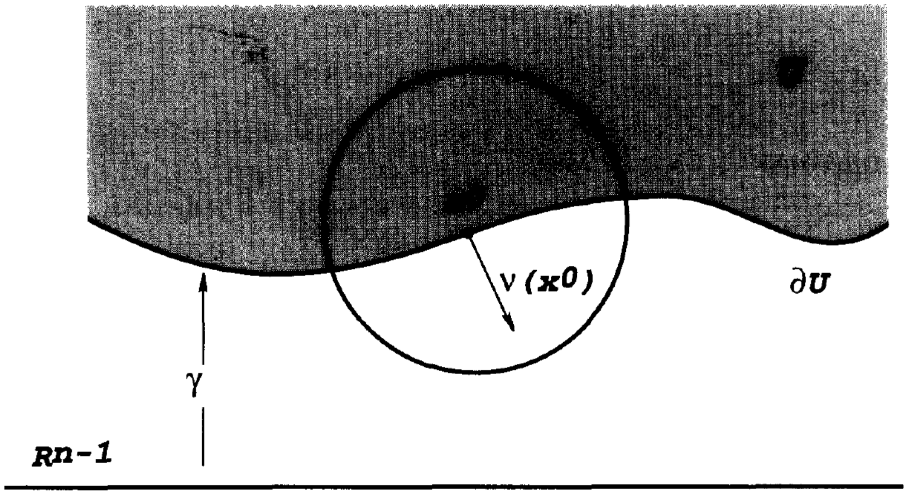
定理 5.3.2. 设U是有界开集，并且边界∂U是C^1的，参数$1 \le p < \infty$，设$u \in W^{k,p}(U)$，那么存在一列$u_n \in C^\infty(\bar{U})$使得$u_n \to u$在$W^{k,p}(U)$成立。换言之，$C^\infty(\bar{U})$是$W^{k,p}(U)$的稠密子集。

C1边界的定义

- 在上述定理里要求了C1边界（实际上Sobolev空间经典理论大都要求C1边界），我们首先要理解什么叫C1边界。

定义 5.3.1. 设$U\subset\mathbb{R}^n$是有界开集，称边界∂U是C^k的，如果对于任意$x_0\in\partial U$，存在$r>0$和C^{k-1}的函数$\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，在坐标换序和重新定向的意义下满足

$$B(x_0,r)\cap U=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\,x_n>\gamma(x_1,\cdots,x_{n-1})\}. \tag{5.3.2}$$

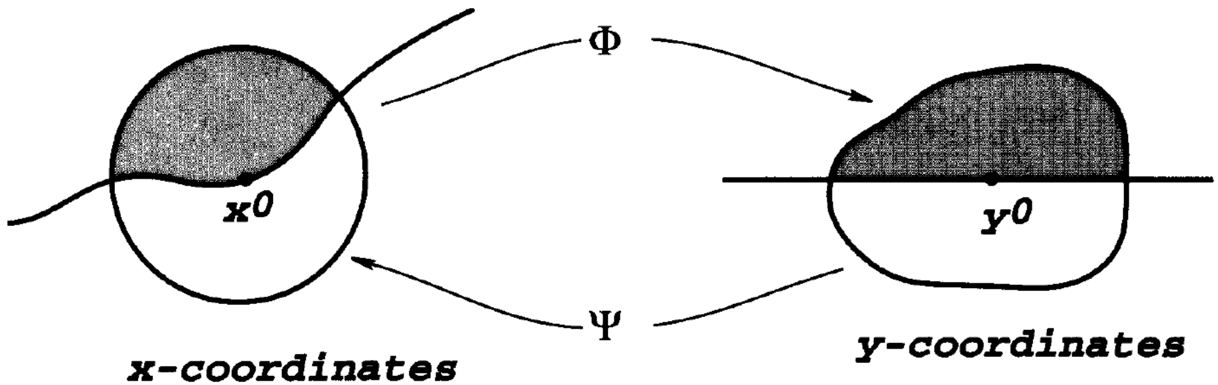


The boundary of U

C1边界的平坦化映射

- **平坦化映射**是处理C1边界最强的武器。直观来看，平坦化映射就是可以在局部将“弯曲”的C1边界映射为“平坦”边界的方法。

$$\begin{cases} y_i = x_i =: \Phi^i(x) \\ y_n = x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x) \end{cases}$$



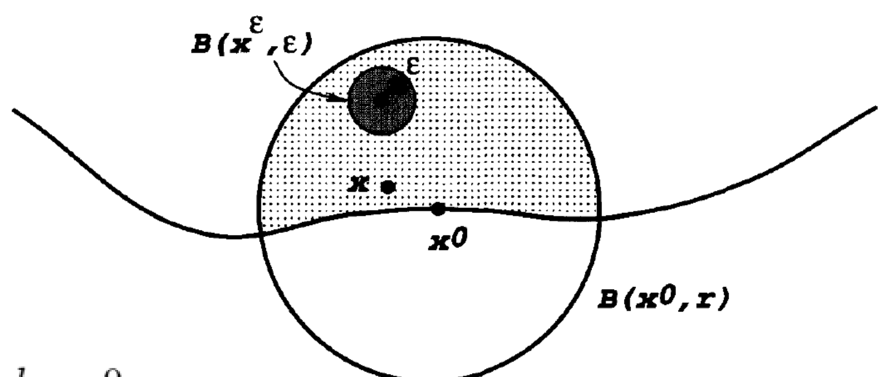
Straightening out the boundary

平坦化映射不仅是C1的，而且Jacobi行列式也是1。因此进行积分换元是，平坦化映射不改变积分值。

边界光滑逼近的证明：分片磨光

- [1]证明的难点在于，我们无法给边界上或离边界很短的点进行磨光。
- [2]我们考虑边界的一个邻域，对边界或附近的点x（如图），我们可以将其略微平移至x^eps点，以x^eps附近函数值磨光代替在x处磨光。

你也许担心这样平移以后，磨光函数是否还收敛于原来的函数，实际上我们有**Lebesgue积分的平均连续性**保证这一点，这是同学们在实变函数容易忽略的结论



$$\lim_{\nu\to 0}\int_{V_0}|D^\alpha v(x+\lambda\nu e_n)-D^\alpha v(x)|^p\,dx=0.$$

边界光滑逼近的证明：分片磨光

- [3]我们按照示意图的方法切割区域U并设置隔断函数（根据有限覆盖定理我们可以得到如图所示的有限覆盖）
- [4]仿照上一问做法，我们将各个局部的磨光函数组合，得到的函数便是逼近函数，它的光滑性在边界上也成立。

Sobolev空间理论框架——第三层

- 利用逼近定理，我们研究Sobolev空间函数通常只要研究光滑函数即可，这大大简化了我们的证明。
- 下面讨论的延拓定理，利用它我们可以摒弃区域U的复杂性，将Sobolev空间的函数都放到R^n全平面研究。
- 证明应分为两部分，延拓和控制范数（算子的有界性）

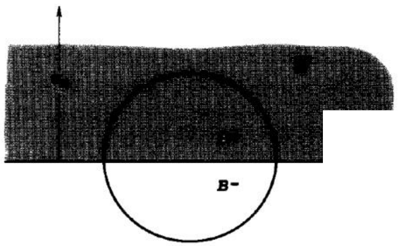
定理 5.3.3. 设U是有界开集，并且边界∂U是C^1的，参数$1 \leq p \leq \infty$。任意取有界开集V满足$U \subset\subset V$，那么存在一个有界线性算子$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，满足

1）$u = Eu$在U几乎处处成立。

2）Eu的支集是V的子集。

我们也称算子E为u的一个**延拓算子**。

化繁为简：平坦边界光滑函数的高阶反射延拓



【1】我们依旧在一个局部边界$B(x_0,r)\cap U$来讨论，更进一步我们假设∂U是平坦的，一般地简记$B=B(x_0,r)$，即

$$\begin{cases} B^+ := B\cap\{x_n\geq 0\}\subset \bar{U}, \\ B^- := B\cap\{x_n\leq 0\}\subset \mathbb{R}^n/U. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

我们假设$u\in C^\infty(\bar{U})$，我们试图将u在B^+上一一阶可导的部分延伸到整个球B上，具体方法是

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{if } x\in B^+ \\ -3u\left(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n\right)+4u\left(x_1,\ldots,x_{n-1},-\frac{x_n}{2}\right) & \text{if } x\in B^- \end{cases} \tag{5.3.6}$$

形如(5.3.6)的延拓方法被称为从B^+到B^-的**高阶反射延拓**。很容易验证$\bar{u}\in C^1(B)$，进一步

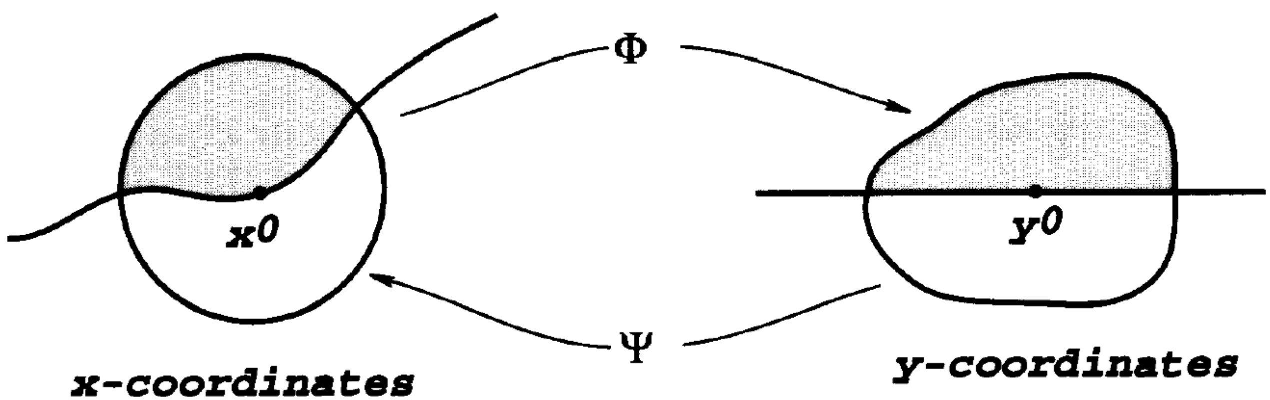
$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \forall u\in C^\infty(\bar{U}), \tag{5.3.7}$$

其中C是与B的选取以及函数u无关，只与参数n,p有关的常数。

至此，我们对**平坦边界的光滑函数局部**完成了延拓，延拓有范数控制(5.3.7)

复简为繁：弯曲边界、分段延拓和光滑逼近

- [1]对于一般边界，我们可以做平坦化处理，自然地得到延拓函数。
- [2]由于平坦化映射保积分，因此对平坦化边界的范数控制是可以直接复制到一般的C1边界的。
- 至此我们对**C1边界光滑函数局部**完成了延拓和范数控制



Straightening out the boundary

复简为繁：弯曲边界、分段延拓和光滑逼近

- [3]我们可以设置隔断函数，将局部的延拓放到整个边界上。于是我们对光滑函数完成了整体延拓

[4]对不光滑的函数，它的延拓可以设定为其光滑逼近的延拓的极限

下一步，我们引入$\{V_i\}_{i=0}^{I}$的隔断函数ξ_i，其满足

1）$\xi_i \in C_0^\infty(V_i)$。

2）$\sum_{i=1}^{\infty} \xi(x) = 1, \forall x \in U$。

3）$\xi_i \in [0,1]$。

4）$supp(\xi_i) \subset V$。

利用隔断函数，我们构造

$$u' = \sum_{i=0}^{I} \xi_i \bar{u}_i',$$

Sobolev空间理论框架——第3.5层

定理 5.3.5. 设U是有界开集，并且边界∂U是C^1的，参数$1 \leq p < \infty$。存在一个有界线性算子$T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$满足$Tu = u$对一切$u \in C(\bar{U}) \cup W^{1,p}(U)$成立。$T$也被称为**迹算子**。

- 迹是Sobolev空间函数的“边界”。对于一般的函数而言，边界没有意义，因为边界在n维测度意义下零测。
- 对于U闭包上光滑函数，边界则是有意义的。
- **用光滑函数逼近一般Sobolev空间函数，其边界的意义便是光滑函数边界的极限。**

迹算子有界性估计

- 完成迹定理的证明，还依赖迹算子有界性，即用Sobolev范数控制迹范数。

$$\|Tu_m\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(U)},$$

这一估计本身的证明平平无奇，但是其中用到了一个有意思的式子，它是Gauss-Green公式的推广。我们知道Gauss-Green公式只能对C^1函数成立，而下面的等式给出了拓展

$$\int_U \mathrm{div}(|u(x)|)dx = \int_{\partial U} |u(x)| \cdot \overrightarrow{n}(x)dS(x).$$

范数控制与函数空间嵌入：一个例子

- 范数的控制和函数空间的嵌入是息息相关的，且看一个例子。

设U是一个有界区域，U的测度有限，考虑参数$1 \leq p_1 < p_2$，利用Holder不等式有

$$\int_U |u(x)|_1^p dx \leq \left(\int_U |u(x)|_2^p \right)^{\frac{p1}{p2}} \cdot \left(\int_U 1dx \right)^{\frac{p2-p1}{p2}} .$$

进一步

$$\|u\|_{L^{p_1}(U)} \leq C\|u\|_{L^{p_2}(U)},$$

其中$C = [m(u)]^{\frac{p2-p1}{p1p2}}$。这也是我们常常说的，高阶的Lp范数可以控制低阶的Lp范数。

从函数空间嵌入的角度看，上述事实说明$L^{p_1}(U) \subset L^{p_2}(U)$。

什么样的范数可以控制其他范数？

- 对于有界区域U，高阶Lp范数可以控制低阶Lp范数。对于无界区域没有上述结论。
- **函数的导数通常可以控制函数本身**。（思考：位势方程基本解导数的奇异性总是更尖锐的）
- 一个实际的导数范数控制函数范数的例子是Poincare不等式：

练习 1.3.1. Ω是有界区域，用$C_0^m(\Omega)$表示在边界$\partial\Omega$为0的m此连续可微函数构成的线性空间，求证存在仅依赖Ω和m的常数C使得

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega |\partial_\alpha u|^2 dx \leq C \sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |\partial_\alpha u|^2 dx, \tag{1.3.3}$$

对于$\forall u \in C_0^m(\Omega)$成立。

关于Sobolev范数的不等式控制

- Sobolev不等式包含导数的Lp范数，是很“强”的范数。我们此时可以“贪心一些”，尝试用低阶的Sobolev范数，控制高阶的Lp范数。
- 下述的GNS不等式对表明，对p<n，Sobolev范数可以控制不大于Sobolev共轭p*的一切Lp范数。

定理 5.4.2. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$1 \le p < n$，那么存在一个只依赖n, p的参数C使得

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \forall u \in W^{1,p}(U), \tag{5.4.11}$$

其中p^*是p的$Sobolev$共轭，即$\frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}$.。

定理 5.4.3. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$1 \le p < n$，我们有嵌入关系$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$，其中$1 \le q \le p^*$，$p^*$是$p$的$Sobolev$共轭。

GNS不等式和p=n情况的Sobolev不等式

- 上一页的GNS不等式讨论的是p<n的情况，这种情况下p是不大的，控制范数的能力不够强，我们自然可以延伸到更大的p，即p=n或p>n的情况。
- p=n的情况是平凡的延伸的，因为这种情况下Sobolev共轭p*=infty，我们期望用Sobolev范数去控制L^infty范数，然而这时不可能的（有反例）。
- 对于p=n我们只有平凡的结论：

定理 5.4.4. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$p = n$，我们有嵌入关系$W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$，其中$1 \leq q < \infty$。

Morrey不等式

- p>n的情况说明Sobolev空间的范数是很强的，这种情况下我们甚至可以证明Sobolev空间几乎是连续（甚至可以是Holder连续）。如下的Morrey不等式叙述了结论

定理 5.4.6. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$p > n$，那么存在一个只依赖n, p的参数C使得，对于每一个$u \in W^{1,p}(\bar{U})$，均存在某个与u在U上几乎处处相等的函数u^*，使得

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}, \forall u \in W^{1,p}(U), \tag{5.4.22}$$

其中参数$\gamma = 1 - \frac{n}{p}$。

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma}\right).$$

定理 5.4.7. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$p > n$，我们有嵌入关系$W^{1,p}(U) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{U})$，其中参数$0 < \gamma \leq 1 - \frac{n}{p}$。

GNS不等式的证明：从全平面光滑函数到Sobolev空间函数

- [1]我们通过反复使用Holder不等式，可以得到全平面的光滑紧支函数的GNS不等式。
- [2]对于W^{1,p}(U)的函数，我们可以通过延拓得到全平面的Sobolev空间紧支函数。
- [3]为了证明一般函数的GNS不等式，我们用全平面光滑紧支函数逼近，将全平面的GNS不等式限制在U上。

定理 5.4.1. （*Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*）设参数$1 \le p < n$，那么存在一个只依赖n, p的参数C使得

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \tag{5.4.4}$$

其中p^*是p的$Sobolev$共轭。

Sobolev空间理论框架——第四层

- 根据上述分析，我们最终可以得到对W^{k,p}(U)的嵌入定理，高次（k比较大）的Sobolev空间可以嵌入低次但是参数p比较大的Sobolev空间或Holder空间。

定理 5.4.8. （*Sobolev*不等式）设$U \subset \mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$1 \leq p < \infty$。假设$u \in W^{k,p}$，那么根据不同的参数k,p可以得出不同的不等式:

1）若$k < \frac{n}{p}$，那么$u \in L^q(U)$，其中$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$。进一步存在只与$n,p,k,U$有关的参数$C$使得$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}$。

2）若$k > \frac{n}{p}$，那么$u \in C^{k-l-1,\gamma}(\bar{U})$，其中$l = \left[\frac{n}{p}\right]$，参数$\gamma$的取值有两种情况

嵌入定理——另外一种形式

- 我第一次学习嵌入定理是在课程偏微分方程数值解上，第一次阅读该定理时极其费解。。。然而课本告诉我们该定理的证明超出了课程范围。。。

定理 5.4.9. （*Sobolev*嵌入定理）设$U\subset\mathbb{R}^n$是有界开集，并且U的边界是C^1的，参数$1\le p<\infty$，设$k\in\mathbb{N}^*$，$m\in\mathbb{N}$。那么有如下的嵌入关系

1）若$k<\frac{n}{p}$，那么$W^{m+k,p}(U)\hookrightarrow W^{m,q}(U)$，其中$1\le q\le q^*$，而$\frac{1}{q^*}=\frac{1}{p}-\frac{k}{n}$。

2）若$k=\frac{n}{p}$，那么$W^{m+k,p}(U)\hookrightarrow W^{m,q}(U)$，其中$1\le q<\infty$。

3）若$k>\frac{n}{p}$，那么$W^{m+k,p}(U)\hookrightarrow C^m(\bar{U})$。

嵌入定理的解释，k和p的意义

- 嵌入定理讨论的是$W^{k,p}(U)$的函数的性质，我们知道k或p的增大意味着函数控制更加严格，这也反应在了定理中。如$k<n/p$，我们只能嵌入更高参数的Lp空间；如$k>n/p$，则能嵌入Holder连续空间。
- 基本的GNS嵌入定理只能讲$W^{k+1,p}$空间嵌入W^{k,p^*}空间，**即k减少一次，p上升一些。**
- 进一步，在一次一次的嵌入里，n/p不断减小。我们会进行判断，如出现了$n/p<1$（对应$k>n/p$ 情况），那么最后一次嵌入要使用Morrey嵌入，嵌入严格连续函数空间。
- 如未出现$n/p<1$便出现了$k=0$（对应$k<n/p$情况），那么我们通过反复GNS嵌入，得到了一个大参数的Lp范数控制。

谢谢老师同学们！