本科生毕业论文

题目：关于卡勒-爱因斯坦度量存在性与 K-稳定性的研究历程

Journey to the Existence of Kähler-Einstein Metric and K-stability

姓 名：田晨霄

学 号：1700013239

院 系：数学科学学院

专 业：基础数学

导师姓名：周斌教授

二〇二一年 春

版权声明

【论文摘要】

从 1957 年 Matsushima 给出第一 Fano 簇上存在 KE 度量的必要条件即 Fano 流形的约化群必须有限到 2021 年 2 月北京大学的杰出校友和数学家许晨阳、刘雨晨和庄梓铨给出了有奇点情形的 YTD 猜想的证明，凯勒爱因斯坦度量存在性问题作为一个代数几何、微分几何、数学物理、GIT（几何不变式）理论的交叉方向，经过近 60 多年的时间来几代杰出的数学家的共同努力，终于为这个问题的理论层面的解决和 K-稳定性代数几何理论的基础理论的完善给了一个比较满意的答案。

值此机会，在这篇文献整理和毕业论文中，我们针对复凯勒流形上凯勒-爱因斯坦度量存在性这一由来已久的重要问题，将着手从问题研究的历史脉络和背景、相关重要文献的归纳和整理以及问题的研究现状与前景等具体的几个角度给予一个梳理和总结。

其中，我们会相对更加关注于第一陈类$c_1(X)$为正情形的凯勒-爱因斯坦度量存在性这一子问题的发展历史和研究现状。特别的，由于近 20 多年来，凯勒流形（或法诺代数簇）K-稳定性的代数几何概念在这此子情况问题的转化和解决过程中一直发挥着引领性的作用，因此我们亦会去重视梳理有关 K-稳定性代数几何理论研究的历史脉络和重要文献。

【关键词】 **凯勒-爱因斯坦度量，K-稳定性代数几何理论，法诺流形、Yau-Tian-Donaldson 猜想，GIT（几何不变式）理论**

目录

第一章 预备知识与问题引入

1.1、 $\boldsymbol{K\ddot{a}hler}$流形的构造

在黎曼几何的学习中，我们已经为光滑流形 M 每一点处的切空间都装备上了一个光滑的对称的、正定的二阶协变张量场，称之为 M 上的一个黎曼度量 g，记为(M，g)，称为黎曼流形。这里的光滑流形按定义自然指的是局部同胚于欧式空间的实流形，而实流形的黎曼几何则是在此空间结构及其所赋予的黎曼度量的基础上，系统的建立出的一套有关空间的度量性质的理论，包括黎曼几何基本定理、黎曼流形上的黎曼联络、测地线和黎曼曲率张量等等。

而类比于给实平面(即一个平凡的 2 维欧氏空间)装备上复结构即单位虚数i^2=-id(这里对应-1)，我们可以将任意 n 维实向量空间赋予复结构构成一个对应的 n 维复向量空间，所谓一般的线性空间 V 上的复结构，即可以视作是是线性空间 V 上的一个自同构或者线性变换$J\in End(V)$，满足$J^2=-id.$

从而如果将光滑流形的局部同胚于复向量空间C^n的某些开子集，并将这些开子集以全纯变换的方式拼接起来，就构成了一个复流形的几何结构，而其上极大的复解析相关的复坐标覆盖则是这个复流形的复流形结构。而由于一个 n 维复流形自然可以看成一个 2n 维的实流形的结构，所以我们可以仍然给复流形装备上黎曼度量，并视之为一个黎曼流形。

但是复流形如果仅仅将其视为一个实黎曼流形，那就不能充分利用复流形上的复流形结构，于是类似于实流形的理论，我们可以构建出另外一套相对更有针对性的，充分利用了复流形的复流形结构来刻画其几何性质的几何学，这就是复几何学，类比于实流形的黎曼几何的情况，我们可以在此新的几何结构上，定义新的各种度量、联络、测地线和发展新的基本定理，另外复流形特别之处还在于紧复流形的情况，由于**小平嵌入定理**，可以较方便的从代数几何的角度进行研究，因为它可以完美的嵌入到复投影空间 CP^n中，作为它的复子流形，具备代数流形的特征。当然一些未必紧的流形，如 stein 流形，也可以作为性质良好的复子流形嵌入到标准空间C^n中来研究。

总之，在当代数学的研究中，相比于单纯实流形的情况，复流形的几何学由于它与多个现代数学中心领域的联系，如代数几何、偏微分方程、数学物理、几何拓扑学、以至于几何朗兰兹纲领(几何表示论)等等，复流形的几何学已不再仅仅应被单纯视作一个数学分支，更是当代数学研究者需要有一定学习和掌握的重要数学工具，其中$k\ddot{a}$hler流形又是复流形中的一类特殊流形，所谓凯勒流形，是一个具有在典型复结构的作用下不变的黎曼度量的复流形，同时它的典型复结构在相应的黎曼联络下平行，因此也具有更加丰富的几何结构。在正式进入对凯勒流形上凯勒-爱因斯坦度量存在性问题和 K-稳定性的研究的文献阅读报告之前，我们不妨先简要回顾一下$k\ddot{a}$hler流形的构造及其上的度量：

K$\ddot{a}$hler流形的定义，一方面构建于另一个更基本的复几何结构即 **Hermite** 流形，即是一个复流形 M 在它的全纯切丛$T_{(1,0)}$(M)上装备上一个 **Hermite** 度量的几何结构。至于 **Hermite** 流形及其度量的严格定义，这里不再赘述，可以详细参考[CL04]或[Tan01].另一方面它的定义的合理性则依赖于如下重要的复几何基本定理：

Theorem 1.1 (复几何基本定理)

设 M 是复流形，E 是 M 上的全纯向量丛，则对于 E 上任意给定的 **Hermite** 度量 ds^2，在 E 上存在唯一的一个与之相容的复联络 D。

而根据复几何基本定理，现在 **Hermite** 流形上既然已经装备了一个全纯切丛上的 **Hermite** 度量，那么它一定存在唯一的一个与之相容的复联络 D.在实黎曼几何中，我们知道度量所唯一决定的联络可能是无挠联络，也可能不是，复几何的情形也类似，这里 **Hermite** 度量所决定的复联络 D 同样的也可能是无挠联络，也可能不是，所以基于此，我们给出卡勒流形的基本定义：

Definition 1.1（$K\ddot{a}$hler度量与 $K\ddot{a}$hler流形）

给定一个 Hermite 流形 M，如果由它装备的 Hermite 度量所确定的复联络恰好也是无挠联络，那么我们称复流形 M 上的 Hermite 度量是**$K\ddot{a}$hler度量.**如果一个复流形上装备了一个$k\ddot{a}$hler度量，那么我们称此复流形为**$K\ddot{a}$hler流形.**

当然从以上最基本的定义出发，我们可以给出一系列 **Hermite** 度量是**$K\ddot{a}$hler**度量的等价条件，其中我们可以利用无挠的条件，任取复流形的一个局部坐标$(z^1,z^2\ldots,z^m)$和对应的局部标架$(\frac{\partial}{\partial z^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z^m})$，可设**$K\ddot{a}$hler**度量在此局部标架下的度量矩阵为$[g_{i\bar{j}}]$=$[(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j})]$，则无挠的条件可转化为对任意的 1 到 m 中的正整数 i,j,k 总有以下式子成立：

$$\frac{\partial g_{i\bar{l}}}{\partial z^k}=\frac{\partial g_{k\bar{l}}}{\partial z^i} \qquad \textbf{(2.1)}$$

于是再利用这一条件，我们对$k\ddot{a}$hler度量所确定的 (1,1)-形式,即：

$$\omega=\frac{i}{2}g_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j \qquad \textbf{(2.2)}$$

我们对它做外微分运算，利用**（2.1.1）**式计算可以得到 $d\omega$=0，反之若一个 **Hermite** 度量所确定的(1,1)-形式做外微分如果运算结果为 0，我们可以反推出 **2.1** 式成立，所以此时的 **Hermite** 度量是无挠的，正是我们所关注的**$K\ddot{a}$hler**度量.因此基于此我们可以给出凯勒流形和凯勒度量的一个等价判别法，有的教材中也可能直接将这个判别法作为凯勒流形的等价定义：

Theorem 1.2 ($K\ddot{a}$hler流形的等价表述)

给定一个 **Hermite** 流形，它为**$K\ddot{a}$hler**流形当且仅当其上装备的度量所确定的(1,1)-形式是闭形式且严格正的。而对于确为**$K\ddot{a}$hler**流形的情况，此时其上**$K\ddot{a}$hler**度量所对应的(1,1)-形式被称为**$K\ddot{a}$hler**形式**.**

1.2 $k\ddot{a}$hler-Einstein度量

在现代几何学中，一个重要的问题是如何给一个流形装备上一个好的度量，使得它具有良好的曲率性质，例如著名的单值化定理告诉我们，一个紧复曲面上的复结构总可以很好的被一个常曲率刻画.因此即使在凯勒流形这种已经对度量有无挠限制的前提下，我们还在某种程度上要求装备上这种度量后，流形还有好的曲率性质，事实上这种对度量进一步的要求和限制，会导致某些凯勒流形可能根本不存在这样的度量,那么我们自然会去提问，什么样的凯勒流形具有这样的度量，所以这也是等会儿凯勒流形上 KE 度量存在性问题在逻辑层面的一个研究动机和出发点，在此之前，我们先不妨给出给定凯勒流形及其装备的凯勒形式 ω 所对应的 Ricci 曲率的张量形式和微分形式：

Definition 1.2（Kähler形式的 Ricci 曲率张量）

给定凯勒流形，则其上装备的凯勒形式ω所对应的 Ricci 曲率张量$R_{\bar{k}j}$为：

$$R_{\bar{k}j} = -\partial_j \partial_k log\omega^n \qquad \textbf{(2.3)}$$

而其上装备的凯勒形式ω所对应的数量曲率 R 为：

$$R = g^{j\bar{k}} R_{\bar{k}j} \qquad \textbf{(2.4)}$$

其 Ricci 曲率张量所对应的(1,1)的 Ricci 曲率形式$Ric(\omega)$ 则定义为：

$$Ric(\omega) = \frac{i}{2} R_{\bar{k}j} dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

$$= -\frac{i}{2}\, \partial\bar{\partial} log\omega^n \qquad \textbf{(2.5)}$$

那么既然我们现在有了Kähler形式所的 Ricci 曲率和 Ricci 曲率形式，那么我们对Kähler形式或者Kähler度量对应的 Ricci 曲率$Ric(\omega)$加以怎样的合理限制，才能让这个$Ric(\omega)$具有更加良好的曲率性质呢？从数学结构上看，$Ric(\omega)$和ω都是(1,1)的微分形式，它们是可以做直接比较的，比如如果$Ric(\omega)$恰好等于ω，那么似乎是一件很有趣的事情。事实上在实黎曼流形的情况的学习中，像这样的里奇曲率张量（或者里奇曲率形式）等于度量张量（度量形式）的一个实常数倍的流形已经是一个 **Riemann-Einstein** 流形，它的定义弱于一般的常曲率的黎曼流形，但又与常数量黎曼曲率有着密切的联系。而对于复几何的情况，自然的如果既是 Hermite 流形又是 Einstein 流形，则称为 **Hermite-Einstein** 流形；如果既是Kähler流形又是 Einstein 流形，则称为**Kähler-Einstein**流形,此时其上的度量形式则称为**Kähler-Einstein**形式，下面我们严格的给出这两个定义：

Definition 1.3（Kähler-Einstein流形与Kähler-Einstein形式）

给定一个Kähler流形，如果它装备的度量的Ricci形式是Kähler 形式的实常数倍，其中Ricci 形式和Kähler 形式可具体定义在任意一个局部坐标下。则此时称此Kähler流形是一个Kähler-Einstein流形，其上的度量是则是Kähler-Einstein度量，其上的度量形式是Kähler-Einstein形式。

在复几何的情况，Kähler-Einstein流形同样与常数量曲率的流形有着密切的联系，例如我们给出如下的一个定理：

Theorem 1.3 (Kähler-Einstein流形与常数量曲率的一个关系)

设ω是一个凯勒度量所对应的凯勒形式，则 $Ric(\omega)/\pi$ 属于第一 Chern 类，如果额外要求ω也属于第一 Chern 类的同时且为常数量曲率度量(cscK)，那么此度量为凯勒爱因斯坦度量.

定理的证明应用到$\partial\bar{\partial}$-引理和平均数量曲率关于ω和第 1 陈类的关系式，参考文献请见[Tian00]，总之，从这条定理我们可以直接看见具有 KE 度量虽然在一些前提下弱于常数量曲率的条件，但两者间确实存在着一些联系，从侧面也反应了我们给凯勒度量也加上曲率形式等于度量形式的常数倍的条件，引进凯勒爱因斯坦度量，是有一定意义的一个做法，

符合我们对好的度量的期待。另外除了从数学逻辑的角度，由于爱因斯坦流形与理论物理学的重要联系，所以具备复流形结构和无挠 **Hermite** 度量的凯勒-爱因斯坦流形,也可以期待它在数学物理中发挥作用。

1.3 凯勒-爱因斯坦度量存在性问题的引入

总之，通过以上的一些分析，我们侧面的看到凯勒流形上的凯勒爱因斯坦度量是一个性质良好的度量，我们希望它能在凯勒流形上存在，于是这就诱导出了这篇综述所追踪的核心数学问题——凯勒爱因斯坦度量在凯勒流形上何时存在?

首先是不是所有的凯勒流形都可以随意考虑?我们注意到凯勒流形的里奇形式事实上也标志了第一陈类，即:

$$c_1(M) = \frac{Ric(\omega)}{2\pi} \qquad (2.6)$$

所以若凯勒流形若想存在 KE 度量，一个大前提是它的第一陈类必须是负、零或正的同调类，不仅如此，如果第一陈类为正或者负的情况，则我们只能考虑与第一陈类成比例的 KE 度量。

另外，如果按照陈类的正负与 0 分为 3 类讨论，然后对于每一类情况，我们不妨可以适当的重新调整度量ω，总可以使得λ等于±1或 0. 于是，最后会形成如下的标准问题:

Main problem 1.1

记紧凯勒流形上的凯勒形式为ω，问凯勒流形何时存在一个凯勒爱因斯坦形式(度量)?具体的，分为第一陈类为正、为负、为零三种情况讨论，也就是等式:

$$\mathrm{Ric}(\omega)=\lambda\omega \qquad (2.7)$$

在λ等于±1或 0 的时候，是否存在相应的凯勒形式ω满足方程 (2.7)?

额外的，我们注意到这个问题可以站在常数量曲率的角度去考察：即当λ等于 0 时，是卡拉比-丘定理的特殊情况，卡拉比-丘定理最早由 E.Calabi 在[Cal54]和[Cal57]中提出；当λ不等于 0 时，则可以看成第一陈类凯勒类一般常数量曲率问题的特殊情况.

1.4 小平邦彦嵌入定理（Kodaira embedding theorem）

其中我们在这篇文献阅读报告中将会重点考虑的情况是第一陈类为正的情形，这种情况下，根据小平嵌入定理，凯勒流形在这种情况下是一个代数簇，也就是法诺簇（Fano 簇），它提示我们第一陈类为正的情形的解决，可能需要与代数几何的知识相互关联，因此，我们在这里回顾一下小平嵌入定理的主要内容:

小平邦彦嵌入定理（Kodaira embedding theorem）讲的是紧复流形容许到复射影空间CP^n的嵌入定理，其定理内容是:

Theorem1.4

设 M 是一个紧复流形，$\mathrm{dim}M = m > 1$.如果在 M 上存在正线丛 L，则存在自然数 N，

使得对任意的 k>N,线丛 L 的全纯截影空间$H^0(M,\theta(L^k))$的线性基底$\{s_0,s_1, \dots s_n\}$给出了 M 到复投影空间CP^n的嵌入映射F：M→ CP^n，将 P 映射到 F(P)=[$s_0(P),s_1(P) \dots s_n(P)$].

它的证明可以详细见[Tan01, page409],其证明思路类似于紧黎曼曲面的嵌入映射定理，只需要进一步的利用到 blow up 和小平邦彦消没定理，来替换紧黎曼曲面情形讨论用到的除子和相应的消没定理。

于是，根据小平嵌入定理，我们知道紧复流形 M 为代数流形当且仅当 M 上存在正线丛，另一方面，如果复流形 M 上存在正线丛，那么由于线丛的曲率形式确定了 M 上的一个处处正定的实的（1，1）-形式 d，进而得到了流形 M 的一个 Hermite 度量 h，且这个 Hermite 度量对应的（1，1）-形式 d 可以进一步表示为$\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\ln h$，因此 d 是闭形式，因此 M 存在正线丛则必为凯勒流形，特别的，当然凯勒流形 M 不一定都存在正线丛，不够特别的如果 M 为凯勒流形且第一陈类为正时，这种情况下 M 是存在正线丛的，因此我们可以知道此时 M 是一个代数流形.我们称这种第一陈类为正的凯勒流形为 Fano 簇，这种代数簇或者代数流形是我们（2.7）中 λ 等于 1 情形的主要讨论对象。

1.5 文献阅读报告部分规划

而宏观的回顾这个问题的整体发展，从 1957 年 Yozô Matsushima 给出第一陈类为正的凯勒流形上存在 KE 度量的第一个重要的必要条件即自同构群 Aut(X)必须为约化群，到 2021 年推广的 YTD 猜想（见第 2.6.1 节 theorem2.6.4）最终被 C.Xu，Y. Liu，Z. Zhuang 三人解决，凯勒流形的 KE 度量存在性问题在理论构建层面，有了一个相对完善的解答，虽然我们还有很多的问题需要去探求解答，比如我们会继续求问哪些具体的第一陈类为正的凯勒流形（Fano 簇）是 K-稳定的——当然这对代数几何学家来说比原来直接 KE 度量存在问题更具有可计算性了，尽管对于高 index 高维数的情况，即使是单个的超曲面，也有难以判定 K-稳定性的情况.

总之，对于这个问题目前的研究现状，我们可以大致沿着 60 多年来的研究历史的发展过程，写一个阶段性的总结。接下来我们会分为先后 7 个小节，而其中各个小节间文献阅读报告进行的逻辑一方面我们会大致上沿着学科发展的时间顺序，另一方面由于数学研究中不同的研究道路经常会穿插进行，不严格按时间顺序，所以我们也会去注意不同研究道路在小节分划上的相对分离，第二章具体分划为如下七个小节：

2.1、第一陈类非正的情况与几何分析方法
2.2、第一陈类为正存在 KE 度量的必要条件
2.3、第一陈类为正存在 KE 度量的充分条件（或判别法）
2.4、K-稳定性的代数几何定义
2.5、K-稳定性与无奇点光滑 Fano 情形的 YTD 定理
2.6、 K-稳定性的代数几何理论与奇异情形 YTD 猜想
2.7、 K-稳定性代数几何理论的研究前景

本节的最后，我们再给出几本复几何基础知识的参考文献或教材，以备对复几何的基础知识进行查阅或巩固：[CL04]、[Tan01]、[Huy05].

第二章 研究历程的文献阅读报告

2.1 第一陈类非正的情况与几何分析方法

尽管在第四章年表中所列出的最早的参考文献是有关第一陈类为正情形的存在凯勒爱因斯坦度量的一个必要条件，且这个必要条件更多的是用代数几何的方法给出的。然而对于第一陈类非正的两种情况，确是这个领域最早取得突破的两个问题，所应用的方法则不是最早的代数方法，而是非线性偏微分方程的分析方法。另外，从数学方法的角度看，卡拉比猜想和λ等于-1 情形的分别解决，不仅标志着解决了凯勒爱因斯坦度量存在的一个重要情况，更重要的是也开创了几何分析这个领域，将非线性偏微分方程的一系列估计方法和技巧系统的引入到了凯勒几何的研究中，后续也解决了一系列其他凯勒几何的问题。

下面我们针对第一陈类非正的情况和几何分析的方法，从该阶段的引领性问题、解决的思想方法和后续的进展等方面进行综述。

2.1.1 阶段引领的问题

在此阶段，一个引领性的问题是著名的 **Calabi-Yau** 定理，它可以直接推出 **Main problem2.1** 中λ等于 0 的情形，其定理具体叙述为：

Theorem2.1.1（Calabi-Yau 定理）

设 M 是一个紧凯勒流形，则任给定$\pi c_1(M)$中的一个 (1,1)-形式 Ω，再任给定$H^2(M,R)$或$H^2(M,C)$中的一个凯勒类[ω]，总可以找到唯一的凯勒形式 ω属于[ω]，使得 Ric(ω)= Ω.

由 **Theorem2.1.1** 可见，如果第一陈类为 0，那么对任意一个凯勒类，都总能找到唯一一个凯勒形式ω，使得 Ric(ω)= 0，所以λ等于 0 的情形是成立的.而且这种情况的ω不仅存在，有几个凯勒类，就能寻找到几个凯勒形式使得里奇曲率为 0.该定理证明的原始参考文献为丘成桐于 1977 年发表的著名论文[Yau77].
除此以外，近几十年来，针对卡拉比-丘定理这一几何分析的开篇之作，也有很多其他的参考文献可以参考，比如[Tian00],[Blo12],[Siu87]

而在此阶段，另外一个引领的问题自然是 **Main problem1.1 中**λ等于-1 的情形，具体的表述即如下的命题：

Theorem2.1.2（Aubin 和 Yau）

设 M 是一个紧凯勒流形，它的第一陈类$c_1(M) < 0$,则能且只能在$-2\pi c_1(M)$中找到唯一一个凯勒形式ω使得 Ric(ω)=-ω成立

这说明，这种情况总存在唯一一个凯勒形式，使得 Ric(ω)=-ω成立。此定理最早的原始证明是由丘成桐[Yau78]和 Aubin[AT78]分别独立给出.

2.1.2 解决方法

下面我们通过表格的形式，将 **Theorem2.1（Calabi-Yau 定理）**的证明的框架和重要步骤用一个表格的形式进行一个简单的展示和回顾:

<table>
<tr><th>证明框架</th><th>步骤</th><th colspan="2">主要工具</th></tr>
<tr><td>转化部分</td><td>将 Ric(ω)=Ω 在局部坐标下转化为蒙日-安倍方程</td><td colspan="2">$\partial\bar{\partial}$引理和 Stokes 公式</td></tr>
<tr><td>唯一性部分（由 E.Calabi 于 50 年代给出）</td><td>证明 Ric(ω)=Ω 的解若存在必定唯一.</td><td colspan="2">最大值原理</td></tr>
<tr><td rowspan="7">存在性部分(采用连续线方法)</td><td>定义依赖于连续参数 s∈ [0,1]的蒙日-安倍方程族 S，其中要证明 s=1 时的蒙日-安倍方程有解.</td><td colspan="2">连续线方法的基本步骤</td></tr>
<tr><td>S 中存在方程有解.</td><td colspan="2">s=0 时，恒等于 0 的函数为一个解。</td></tr>
<tr><td>S 中若对任意参数 s<1 有解，则存在充分小的$\varepsilon>0$，使得[s,s+ε)的范围内都有解，即证明 S 是开的.</td><td colspan="2">隐函数定理</td></tr>
<tr><td rowspan="4">S 中若对任意固定的参数 s<1，如果[0,s)范围内所有的参数对应的方程都有解那么 s 本身对应的方程也有解，即证明 S 是闭的.也即等价于要证明对任意 S 中的收敛列，只能收敛到 S 中</td><td>逻辑依据</td><td>Arzela-Ascoli 引理，即在$C^{k,\alpha}$空间中一致有界的且定义域 D 有界的实函数列，存在子列在$C^{l,\beta}(l+\beta<k+\alpha)$中收敛。因此只需对 S 中参数对应的解建立合适的先验估计$||\varphi_s||C^{3,\alpha}(M)\le C$.</td></tr>
<tr><td>C^0估计</td><td>Green 函数展开，Sobolev 不等式，Moser 迭代法，Poincaré不等式等</td></tr>
<tr><td>C^2估计</td><td>最大值原理、Cauchy-Schwarz 不等式、Schwarz 引理等等</td></tr>
<tr><td>C^3估计</td><td>类似于C^2估计的方法，这部分内容除了参考原始证明[Yau78]的附录，也可以参考[PSS12]</td></tr>
</table>

（表格 3.1.2）

2.1.3 后续的进展

从卡拉比-丘定理的证明过程，我们可以看出要研究一个凯勒度量的 Ricci 曲率能否等于一个指定的微分形式，等价于求解蒙日-安倍方程.由于蒙日-安倍方程在这类问题中的

基础地位，因此后续这个方程的研究有了很多新的推广和情形：

首先蒙日-安倍方程可以在复流形的局部情形研究，例如参考文献[CKNS20]和参考文献[BT76].

另外一个拓展方向则是将将方程右侧的e^f 推广到一般的 **F，**其中只需要求 F 大于等于 0 且具有要求更低的正则性 ，例如[Kol98] 将 **F** 推广到 **F** 大于等于 0 且 **F** 属于$L^p(M,\omega^n)$ (对某些 p>1)的情形。

除此以外，蒙日-安倍方程的推广还超出了凯勒形式的范围，例如在[EGZ09]中，将凯勒形式考虑为更一般的半正定闭的(1,1)-形式.

如果超出凯勒几何的范围，例如考虑抛物型情形的蒙日-安倍方程，其在一些度量的意义下可与 Ricci flow 方程发生紧密的联系：

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\mathrm{Ric}(\omega) \qquad (3.1.3)$$

此方程由 Hamilton 在[Ham82]引入，并最终被 Perelman 应用推广，在[Per03]中 证明了著名的庞加莱猜想.另外 Ricci Flow 通过一定手术解决在奇异点的阻碍性后，使得它得以具有复几何中的长时行为，这使得它与代数几何中的极小模型纲领也能发生密切的联系 ,比如在 Song-Tian 的论文[TS07]中揭示了复曲面情形的联系.

2.2、第一陈类为正存在 KE 度量的必要条件

解决了第一陈类为负或者零的情况后，下面几个小节，我们将关注一些第一陈类为正情形时问题的解决，以及凯勒流形存在 KE 度量的经典的必要条件及其后续推广，主要包括 Matsushima-Lichnerowicz 定理和 Futaki 不变量的 vanish，及其一些推广形式.这部分涉及的方向既有代数几何的方法也有积分不变量等分析方法的策略

2.2.1`Matsushima-(Lichnerowicz)定理

在第一 Chern 类为正的 Fano 流形的情形下，对于它上面 KE 度量的存在，我们有如下经典的必要条件：

Theorem 2.2.1（Matsushima）

紧凯勒-爱因斯坦 Fano 流形的自同构群是约化群，其中约化群即是说它必须是一个极大紧子群的复化.

这条必要条件最早是在[Mat57]中由法国数学家 Yozô Matsushima 提出的，后续在[Lic58]中被 A.Lichnerowicz 推广了 Matsushima 的结果，即如果第一陈类为正时凯勒流形存在常数量曲率的凯勒度量（cscK），那么凯勒流形的李代数必须约化.对于李代数和常曲率情形的必要条件，思路先是证明了如下的主定理：

Theorem 2.2.2（Lichnerowicz）

设凯勒流形 M 上装备了一个 cscK 度量，记X_0表示 M 有零点的全纯向量丛空间，L 表示 M 全纯向量丛的李代数，即 L_0表示有零点的 Killing 向量丛空间，则有：

$$\boldsymbol{X_0} = \boldsymbol{L_0} \oplus \boldsymbol{\mathcal{J} L_0}$$

所以根据 **Theorem2.2.2**，我们又有 S. B. Myers, N. E. Steenrod 在 1939 年证明的黎曼流形自同构群的结论[MS39]，即 M 的 Isom(M,g)总是一个紧的李群，所以我们可以知道 L0 是约化的..

2.2.2 Futaki 不变量

另一个著名的的必要条件则有关 A .Futaki 在 1983 年的论文中[FA83a]提出了凯勒流形上有关凯勒-爱因斯坦度量存在必要条件的 Futaki 不变量，而在[FA83b]中 Futaki 不变量则进一步推广到了 cscK 度量的情形，即两者的消失都是相应对应度量存在的必要条件，除了参考原始论文，这方面最直接的参考文献之一是 A.Futaki 写的教材[FA88].下面我们对于 cscK 情形的主要结论做一个介绍：

Definition 2.2.1

设紧凯勒流形 M 装备了凯勒度量ω，令 A 为ω的凯勒类$[\omega]$中某些度量的最终的常数量曲率的值，则 A 为一同调不变量且只依赖于流形的第一陈类和凯勒类$[\omega]$，即：

$$[\omega]^n A = \int_M Sc_\omega\, \omega^n = \mathrm{n} \int_M Ric(\omega) \wedge \omega^{n-1} = 2\pi\mathrm{n}\,(\, c_1(\mathrm{M})[\omega]^{n-1})$$

于是对 $X=\partial^{\#}h$,依赖于 X 和ω的 Futaki 不变量 $F(X,\omega)$定义为：

$$F(X,\omega) = \int_M h(Sc_\omega - A)\omega^n \quad (3.2.2)$$

则关于积分不变量 3.2.2 的良定义性和其与 cscK 度量存在性的关系，我们可以在[FA83b]中进一步查阅到，对于属于同一个同调类的元素ω和ω'，$F(X,\omega)$总是等于 $F(X,\omega')$，所以(3.2.2)可以直接定义为：

$$F(X,[\omega]) = \int_M h(Sc_\omega - A)\omega^n \quad (3.2.3)$$

并且有如下定理：

Theorem 2.2.3

对紧凯勒流形的凯勒类$[\omega]$，如果存在ω'属于这个凯勒类，使得ω'是一个 cscK 度量，那么 $F(X,[\omega]) = 0$

总之 Calabi-Futaki 不变量是一个定义在任意具有非平凡全纯向量场的且第一陈类为正的紧凯勒流形上的积分不变量，它可以视作为一个从全纯向量场到复平面 C 的李代数特征，而它的消没(vanishing)则是存在的必要条件。于是 Futaki 不变量给出了一个凯勒流形上存在 KE 或者 cscK 度量的必要条件，即要求它在相应的凯勒类必须是消失的，才有可能在这个凯勒类中存在我们期望的度量.

除了以上两个必要条件外，也有其他的必要条件及其通过它们构造的一些不存在 KE 度量的反例，例如在[Tian97]中通过来自于代数几何概念的稳定性的必要条件，G.Tian 给出了具有平凡全纯向量场的 3 维光滑 Fano 流形却没有 KE 度量的反例.

而对于 Futaki 不变量本身，除了 A.Futaki 在 cscK 情形的推广，后续的很多研究中也发展除了很多新形式的 Futaki 不变量及其推广.比如在[DT92]中通过复结构的跳跃方法，W.Y.

Ding 和 G. Tian 将 Futaki 不变量进一步推广到几乎 Fano 流形上(也可以包括奇异的 Fano 簇)，并给出了 KE 度量存在的一些新的必要条件，更重要的是，这个新的推广后的不变量与[Tian97]中 K-稳定性的解析定义有密切关系。又例如，在[Don02]中，S.Donaldson 定义了 Donaldson-Futaki 不变量在流形光滑且C^*-作用由全纯向量场诱导的情形下退化为原始的 Futaki 不变量，而 DF 不变量在 K-稳定性的代数几何定义中发挥了重要作用.在 K-稳定性[HG94]中 P.Griffiths and J.Harris 给出了 Futaki 不变量的局部形式.更多的有关 Futaki 不变量的内容可以继续参考[FA88].和[Tian00].

2.2.3 利用 K$\ddot{a}$hler-Ricci 流的收敛性

另外一个必要条件可以由凯勒-里奇流的收敛性给出，凯勒-里奇流的抛物型蒙日-安倍方程已在上一章节中给出，我们这里再给出凯勒-里奇流的度量定义：

Definition 2.2.2

凯勒里奇流可视为一个度量流，设μ为同调值，则凯勒里奇流的度量流定义为：

$$\dot{g_{\bar{k}j}}=-(R_{\bar{k}j}-\mu g_{\bar{k}j}),\ g_{\bar{k}j}(0)=g^0_{\bar{k}j}$$

有关凯勒里奇流的收敛性的一个重要结果是由 Perelman 在其论文[Per03]中证明了 Perelman 收敛定理，这个定理的 KE 情形的一部分可用于作为存在 KE 度量的一个必要条件，即：

Theorem2.2.4

如果凯勒流形 M 存在凯勒-爱因斯坦度量：

（1） 若其自同构群$Aut^0_{(M)}=0$,则对任意的初始度量$g^0_{\bar{k}j}$，其凯勒里奇流总收敛到一个凯勒爱因斯坦度量。

（2） 若其自同构群$Aut^0_{(M)}$不等于 0，设 G ⊂ Stab(ωKE) 是一个闭子群且其稳定化子中的中心化子有限，则对任意初始为 G-不变的初始度量$g^0_{\bar{k}j}$，其凯勒里奇流总收敛到一个凯勒爱因斯坦度量。

也就是说，有时如果可能只需验证一个具体的凯勒里奇流的收敛性，就有可能否定凯勒流形存在凯勒爱因斯坦度量。当然凯勒里奇流的收敛性研究不止于佩雷尔曼的收敛定理，后续还有一些有关收敛性，比如[TZ07]在[Kol78]的工作基础上对佩雷尔曼收敛定理做了推广，这项结果若限制在 KE 情形，可以直接推出 **Theorem2.2.4.**

2.3、第一陈类为正存在 KE 度量的充分条件（判别法）

2.3.1 Mabuchi functional 判别法

将 Mabuchi functional 用于判定自同构群有限的 Fano 流形的 KE 度量的存在性，是在 G.Tian 在 1997 年的论文[Tian97] Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature 中，而

这种方法提出的意义不仅在于给出了一种新的判别方法，一方面它被用于证明了存在无全纯向量场的法诺 3 维流形确没有 KE 度量，这个著名的例子来自于 Mukai-Umemura 流形的一个变型，更重要的是这个结果是理解 KE 度量存在性问题和等会儿在 3.4 节将会整理的 K-稳定性之间的关系的重要途径.

Definition 2.3.1

沿用 Futaki 不变量的定义即 Definition2.3.2 中的记号，我们将闭 1-形式$\alpha(g)=(g,Sc_{\omega_\varphi}-A)L^2_{\omega_\varphi}$的 primitive 定义为 Mabuchi functional，它的一些其他的有用的表达形式可在 [Tian00，chapter7]中找到。

于是由它我们可以得到光滑紧 Fano 流形上存在 KE 度量的一个判别法：

Theorem 2.3.1

对紧凯勒 Fano 流形，如果它的 Mabuchi functional 是恰当(proper)的，则此 Fano 流形上存在 KE 度量.

2.3.2 α-不变量判别法

下面我们对于[Tian87]论文中提出的经典的α-不变量判定准则做一个回顾：

Definition2.3.2

设紧凯勒流形 X 上的度量为ω_0，则它的阿尔法不变量定义为：

$$\alpha(X)=\sup\{\kappa>0;\sup_\phi\int_X e^{-\kappa\phi}\omega_0^n<\infty\}.$$

利用α不变量给出的一个经典的判定紧 Fano'流形存在 KE 度量的定理是：

Theorem2.3.2

设一个光滑 n 维 Fano 流形的α不变量严格大于$\frac{n}{n+1}$,则存在 KE 度量。

α-不变量判别法的影响力是深远的，在往后的近 30 年时间里，有很多在继续研究α-不变量的研究，我们以表格的形式对其中一些结果做一个展示：

年代	论文	证明人	结论
1987	[Tian87]	G . Tian	Theorem2.3.2
1988	[Ding88]	W.Y. Ding	在进一步推广了 Moser-Trudinger 不等式的基础上，定义了新的 η 不变量，给出了第一陈类为正的凯勒流形上 Kähler-Einstein 度量存在的新的充分判据
2012	[OS12]	Y. Odaka and Y. Sano	推广到带奇点的情形

2019	[LZ19]	Y. Liu and Z. Zhuang	带奇点的情况，如果 α 不变量取等号，会有只是半稳定的例子
2019	[XZ19]	C. Xu and Z. Zhuang	对双有理超刚性 Fano 簇，只要α-不变量严格大于$\frac{1}{2}$，就存在 KE 度量（K-稳定的）
2019	[Fuj19a]	K. Fujita	加强 α-不变量判定准则到等号的情形

（α-不变量方法发展年表）

2.3.3 Nadel 乘子理想层判别法

与多复变函数论密切相关的 Nadel 乘子理想层判别法是另一个判别凯勒流形存在 KE 度量的重要判别法，它最早于[Nad97]中被 Nadel, A 提出，在 Demailly-Koll$\ddot{a}$r 的论文[DK01]中被简化为如下形式：

首先我们给出乘子理想层的定义：

Definition 2.3.3 （乘子理想层）

设$(X,\ \omega_0)$为第一陈类大于 0 的紧凯勒流形，则对任意上半连续且满足$\omega_0+\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$，则我们定义乘子理想层如下：

$$\mathcal{I}_z(\psi)=\{f;\exists U\ni z,\ f\in\mathcal{O}(U),\ \int_X e^{-\psi}|f|^2\omega_0^n<\infty\}$$

基于紧凯勒流形上乘子理想层的结构，我们给出 Nadel 判别法的叙述：

Theorem 2.3.4

对 n 维紧凯勒 Fano 流形 X，如果存在$(\frac{n}{n+1},\ 1]$中的实数 c，使得函数 cψ（其中ψ为满足 Definition2.3.3 中两个条件的任意一个函数）对应的乘子理想层，总不可能是一个同时满足下列 3 条性质的层：

(1) Proper 的层
(2) Coherent 解析的层
(3) 具有非循环同调的层

则我们可以推出 Fano 流形 X 上存在凯勒-爱因斯坦度量。

由此 **Theorem 2.3.4** 给出了一个基于乘子理想层的判别方法，有趣的是，乘子理想层的结构的定义起源于多复变函数中的$\bar{\partial}$-Neumann 问题的研究，由 Kohn 在[Koh79]中引进，而它在复几何和代数几何中的应用则在[Siu05]和[Siu95]中有系统的开拓和介绍。

2.3.4 凯勒里奇流判别法

在 **Theorem2.3.4** 的基础上，我们可以将乘子理想层的结构凯勒-里奇流的工具，导出一个基于凯勒-里奇流的收敛性判定 KE 度量存在的定理。

Theorem 2.3.5

对紧凯勒 Fano 流形 M，设ω_0为某凯勒类里的一个固定的度量，如果对任意时间序列$\{t_m\}$，再设φ_m为对应复蒙日-安倍方程的解，即下列方程在对应时刻t_m的解：

$$(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\phi)^n = e^{f_0 - t\phi}\omega_0^n, \qquad 0 \le t \le 1$$

则如果方程解序列的积分数列$\{\frac{1}{V}\int_M \varphi_m\omega_0^n\}$总在 m 趋于无穷时收敛，那么 Fano 流形 M 上存在 KE 度量。

Theorem 2.3.5 的证明主体除了涉及 **Theorem2.3.4，**还涉及到几个有关凯勒里奇流收敛性的重要定理，进一步的探究可以参考原始论文[PSS07]和[PSS09].

2.4、K-稳定性的代数几何定义

在 K-稳定性与 KE 度量存在性联系起来的光滑 Fano 情形的 YTD 猜想被提出之前，一个线性情形的将几何稳定性与某种度量的存在性联系起来的猜想是 Hitchin-Kobayashi conjecture，这个猜想成功将 Hermitian-Yang-Mills 度量的存在性与全纯向量丛的几何稳定性联系在了一起，最终由 Donaldson[Do85]和 Uhlenbeck-Yau [UY86]解决，它提示我们在 KE 度量情形，也可能需要考虑某种流形本身的几何稳定性与 KE 度量存在的联系.下面我们将逐步整理 K-稳定性的概念引入的过程和一些必要或相关的主干知识，引入过程中一些理论更侧重于代数几何的语言，并最终在本节给出 K-稳定性在[Tian97]中的原始定义和[Don02]中的一个代数几何的定义。

2.4.1 Moment Map 的定义

我们首先回顾一下 Moment Map 的定义：

下设 M 是一个紧的具有凯勒度量ω的凯勒流形(我们也可以直接在辛流形上推广以下定义，但具有凯勒结构相对简单)，设 G 是一个作用在 M 上的连通 Lie 群，k 为它的李代数，Vec（M）为 M 的全纯向量场空间，则此作用的李导数自然提升了一个李代数映射ρ：k→$Vec(M)$。

则对此作用的 Moment Map T 我们可以定义为：

Definition 2.4.1

G 在 M 上的作用是哈密顿的，如果存在一个 G-等变映射：

$$T: M \to k^*$$

其中k^*为k的二重李代数使得 k 中的任意一个 α 诱导的映射<T,α>是向量从$\rho(\alpha)$的哈密尔顿映射，即：

$$d\langle T,\alpha\rangle = -\omega(\rho(\alpha),*)$$

另外，如果考虑此时 G 在k^*上的作用则是一个余伴随作用，而这里的映射 T 即被称作此作用的 Moment Map.

The Moment Map 的一个重要作用是对一般的辛流形构造 quotients，当然在凯勒结构的情形也可以构建相应的 quotients ,具体可以在文献[MS98]中找到细节构造.

2.4.2 GIT 理论的介绍

GIT 理论中的一些严格定义和系统理论可以参考[Tho06]，在这里，我们先对 GIT 理论的一些基本想法做一定叙述：

设 M 是一个投影代数簇，G 为 GL(n+1,C)中的一个紧李群通过双同态作用在 M 上。更加一般的情况是，我们可以考虑一个装备了 ample 线丛 L 的紧复流形 M 和一个 G 在 M 的作用与它在线丛 L 上的提升。而小平嵌入定理告诉我们，虽然这种情况将线丛 L 由一个 power 代替，但是事实上，这种情况与 M 直接是一个投影代数簇的情况是完全一样的.

那么几何不变量理论（GIT）其上就是试图系统给予一套方法去在给定的 M 和 G 上构建一个 quotient M/G,使得 M/G 也成为一个投影代数簇。其中最基本的想法是，我们要试图构建的这个可视为投影代数簇的 quotient M/G，应该满足 M/G 上包含的映射都是原流形或代数簇 M 上的 G-不变映射。

下面我们看一个经典的例子，在一些 GIT 理论的参考文献和教材中都会提及，因为它展示了 GIT 理论的思想方法：

Example 2.4.1

设C^2被 C-{0}按如下方式作用：

$$\alpha * (x,y) = (\alpha x, \frac{y}{\alpha})$$

则此作用诱导了 3 种轨道：

(i) 对任意 z 不等于 0，$xy = z$，这种情况对应闭 1 维轨道。

(ii) $x = y = 0$的，这种情况对应闭 0 维轨道。

(iii) 两个坐标间有且只有一个不为 0 的，这种对应两条一维轨道，且闭包包括原点。

这些轨道空间并不是一个 Hausdorff 空间，因为(iii)的轨道的闭包完全包含了(ii)中的轨道，但是如果我们不考虑第三种情况的轨道，那么(i)、(ii)两种轨道可以被 C 平面参数化.

另一方面，从映射的角度看，我们考虑C^2上的 C-{0}-不变映射，即：

$$C[x,y]^{C-\{0\}} = C[xy] \cong C[z]$$

所以此商的映射空间即为 C-{0}-不变映射空间正是为 C[z],而二维复向量空间C^2商上 C-{0}也正应被视作 C[z]或者 C。

再往前看一步，我们还可以察觉到这个例子与 Moment Map 之间的联系，也就是如果考虑C^*的极大紧子群 U(1)在C^2上的作用，我们发现这个群作用是哈密尔顿如果我们给C^2装

备上标准辛形式，此时一个合理的 Moment Map T 为：

$$T(x,y)=|x|^2-|y|^2$$

且它的辛商群$T^{-1}(x,y)/U(0)$和复平面 C 是等价的，且$T^{-1}(0)$交C^*上的每一条闭轨道于一条 U(1)-轨道.

从这个例子，我们可以看到 GIT 理论的想法的一些来源以及具体例子对于构建系统数学思想的重要性，可以想象 GIT 的代数理论构建的出发点可能并不是一开始就开始抽象，而是通过一些具体的例子和问题来猜想和诱导，最后逐步完善成严格的 GIT 理论.对于 GIT 理论的一般定义，我们不在这里列出，它需要一些代数几何的基本概念，比如射影代数簇、齐次坐标、复约化李群（它的一个极大紧子群的复化），这些概念也可以在[Sz14]中 page90-page94 中找到。

本节的最后我们给出 GIT 理论中最基本的几个概念的定义：GIT-半稳定、GIT-稳定、GIT 多重稳定：

Definition2.4.2(GIT-半稳定、GIT-稳定、GIT 多重稳定)

设 SL(N+1)中的子群 G 在CP^n中的投影代数簇 M 上作用,我们设 G 是约化的，对 M 中的点 p，设 Lif(p)是一个 p 到C^n的提升，则对于 p 点，它是：

(i) GIT-半稳定当且仅当 0 不属于 G*Lif(p)的闭包

(ii) GIT-稳定当且仅当 G*Lif(p)是闭的且其稳定化子有限

(iii) GIT-重稳定当且仅当 G*Lif(p)是闭的

2.4.3 The Hilbert-Mumford 判别法

我们继续沿用 2.4.2 节中的所有记号，既然给出了三种 GIT-稳定性的定义，那么我们如何去判定一个点 p 具有上述三种可能的稳定性呢？显然 GIT-稳定强于 GIT-重稳定，而后者又强于 GIT-半稳定。

那么本节介绍的 Hilbert-Mumford 判别法大致上有什么样的思想呢？为了检测一个轨道 G*L(p)是否是闭的，其实我们只需要去检测对所有 G 中的单参数子群C^*。特别的，由于单参数群的作用总可以被对角化，所以这种判别法的优势也在于它能使得我们得以去做一些明确的计算去判定 GIT-稳定性。

另外之所以介绍 Hilbert-Mumford 判别法，也是因为它与等会 K-稳定性概念的引入有着直接的联系。

下面我们首先先给出权重映射 μ(x,λ)的一个定义：

Definition2.4.3

设嵌入映射 λ 将 C-{0}嵌入到一个单参数子群 G 中，则对于流形 M 上的任意一个点 p 我们定义如下的权重映射 μ(x,λ)如下：

设 M 中的 q 为 λ(t)*p 在 t 趋于 0 的极限值(可以证明这个极限是存在的，参考[Sz14,page95])，则这个点 q 一定在某个 λ 对应的单参数子群下固定，于是存在正整数 α 使得$\lambda(t)*\mathrm{Lif}(q)=t^{\alpha}\mathrm{Lif}(q)$，对任意的 t 成立。

于是我们可以定义 μ(x,λ)就是负整数-α。

有了权重映射 $\mu(x,\lambda)$，我们可以给出 Hilbert-Mumford 判别法如下：

Theorem2.4.1

设 p 是射影代数簇 X 上的一点，那么：

(i) p 是半稳定的当且仅当对任意单参数子群 λ 有 $\mu(p,\lambda) \geq 0$.

(ii) p 是 GIT-重稳定的当且仅当对满足 $\lim_{t\to 0}\lambda(t) * p$ 不属于 $G * p$ 的所有单参数子群 λ 有 $\mu(p,\lambda) > 0$.

(iii) p 是 GIT-稳定的当且仅当对任意单参数子群 λ 有 $\mu(p,\lambda) > 0$.

它的证明既可以参考原始论文[Mum77]，也可以进一步参考 D. Mumford 等写的几何不变理论的教材 Geometric invariant theory[MFK94].

2.4.4 Kempf-Ness 定理

在 Example3.4.1 种我们初步看到了 GIT 理论和 Moment Map 之间的联系，下面我们给出给出建立了这两者之间联系的重要定理 The Kempf-Ness Theorem,它能够直接参与辛几何和代数几何种的 quotient 的构建.

我们仍考虑 CP^n 中的 M，它是一个装备了 GL(n+1,C)中的复子群 G 的射影子流形，另设 K=G $\cap$ U$(n+1)$。假设 G 中的 K 是一个极大紧子群，映射 P 定义为：

$$P: \quad CP^n \quad \to \quad u(n+1)^*$$

$$[Z_0:\ldots:Z_n] \to \frac{i\, Z_i \bar{Z}_j}{|Z|^2}$$

则以上定义的 P 是一个 U(n+1)作用在 CP^n 上时对应的 Moment Map，将 P 限制在 M 上得到 $P_{|M}$，就可以自然得到一个 K 作用到 M 上时的 Moment Map，且此时装备的微分形式是将 M 上原先的 Fubini-Study 度量诱导的辛形式。

于是我们有如下判定 M 上一点 p，在 G 作用下半（重）稳定的定理：

Theorem 2.4.2

M 上一点 p 对群 G 的作用是半稳定的当且仅当轨道 G*p 包含 $P_{|M}$ 这一 Moment Map 的一个零点.进一步的，如果 p 是重稳定的，那么 G*p$\cap$ ${P_{|M}}^{-1}(0)$是一个单参数轨道。

Theorem2.4.2 的证明可以参考[MFK94]的定理 8.3.在下一节我们可以看到，对于凯勒度量的情况，它的数量曲率总可以看成一个无限维哈密顿作用的 Moment Map，这也是为什么 GIT 理论可以在凯勒的情形继续发挥作用。

总之，在凯勒几何的应用中，当一个紧群 G 被一个凯勒流形上的哈密顿等距变换作用时，存在一个从 M 到其双重李代数的 Moment Map,此时在代数几何的意义下，Kempf-Ness 定理可以用于计算包含了 Moment Map 所有零点的复化群的所有轨道 $G^c * p$。

另一方面，在辛几何的情形中，我们知道 quotients 的一种构建方式时取 Moment Map 的所有零点的 G-quitients,而在代数几何的理解下，quotients 是对对应于参数化的稳定轨道，有了 Kempf-Ness 定理之后，我们可以知道这两种 quotient 的构建方法是完全等价的。

2.4.5 数量曲率提升为 Moment Map

本节的内容主要是为了整理如何将数量曲率提升为了一个无限维哈密顿作用的 Moment Map,原始论文可以进一步参考[Don97]和[Fuj90].

设(M,ω)是一个辛流形，即ω是一个闭的非退化的 2-形式，简单起见，我们假设$H^1(M,R)=0$.一个 M 上的几乎复结构是一个 TM 到 TM 的自同态，使得$J^2=-id$，我们再称一个几乎复结构是与ω相容的当且仅当张量:

$$g_J(X,Y)=\omega(X,JY)$$

是正定且对称的，也即定义了一个黎曼度量。其中，如果 J 是可积的，则(M,J)是一个复流形且它度量g_J是凯勒的。

下面我们首先定义无限维空间 F:

F={和ω相容的 M 上的所有几乎复结构}

则我们可以给它逐步在每一点装备上切空间——诱导 F 上的一个复结构；在切空间上定义内积——诱导 F 上的 Hermite 度量，最后组合这些得到一个 F 上的凯勒形式。

其次我们可以定义 S 为如下的群:

S := (M, ω)上的哈密顿辛同胚群

则可以证明如下的定理 Theorem 2.4.3:

Theorem 2.4.3

S 在 F 上的作用是哈密顿的，且一个 Moment Map 可以如下定义:

$$\mu:\quad F\to\ \mathrm{Lie}(F)^*$$
$$J\ \to\ \ \mathrm{Sca}(J)-\mathrm{Asca}(J)$$

其中 Sca(J)是 g_J 的在 J 可积时的数量曲率(此时对应凯勒的情形)，而 Asca(J)是 Sca(J)的平均值，它与 J 的选取无关.

注意到在这个定理中，我们要求 J 的选取是可积的，否则 Sca(J)是一个 Hermite 数量曲率而不是黎曼数量曲率，但总之，这个定理说明要寻找 cscK 情况的凯勒度量也就是要寻找可积的且在此 Moment Map μ 作用下为 0 的几乎复结构 J。

2.4.6 K-稳定性的 Ding-Tian-Futaki 不变量定义

之前的五个小节中，我们介绍的理论基础相对更侧重于代数几何，在我们于 3.4.7 节用代数几何的语言给出 K-稳定性的定义之前，我们先介绍 G.Tian 在[Tian97]中用 Ding-Tian-Futaki 不变量给出的最初的 K-稳定性的定义。

回顾 3.4.3 节中的 The Hilbert-Mumford 判别法，这种判别法的构建需要两个的关键的要素一个是单参数子群簇λ，另一个则是权重函数μ(x,λ)。

在[Tian97]中定义 K-稳定性，将权重函数选为了 Ding-Tian-Futaki 不变量(见[DT92])，而将单参数子群簇λ选为了 M 的所有特殊退化 W(special degeneration)构成的集合。

下面我们给出这些概念的严格定义:

Definition2.4.4（Ding-Tian-Futaki 不变量）

设 Y 是一个几乎 Fano 簇，即满足不可约(irreducible)且典型的(normal)代数簇，使得存

在 m，多重非规范线丛$K_{Y_{reg}}^{-m}$能够拓展成为一个 Y 上的满(ample)线丛，其中Y_{reg}指的是 Y 的正则部分。记$\eta(Y)$是所有可容许的 Y 上全纯向量场的李代数，h_ω是如下 Y 上的方程的弱解：

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}h_\omega$$

则对任意的可容许向量场$v \in \eta(Y)$，DTF 不变量定义为：

$$f_Y(v) = \int_Y v(h_\omega)\omega^n$$

在[DT1]中，和 Futaki 不变量一样，DTF 不变量与度量ω的选取没有关系，且它是全纯向量场的李代数$\eta(Y)$的一个代数特征。

Definition 2.4.5（Special degeneration）

(Fano)流形 M 的一个退化（degeneration）指的是一个没有纤维束(multiple fibers)的代数纤维化$\pi: W \to \Delta$,使得对复平面单位圆盘Δ上的某个复数 z，有 M 同构于一个纤维W_z=$\pi^{-1}(z)$.

如果它的中心纤维$\pi^{-1}(0)$是一个典型(normal)的代数簇，那么我们称这个退化是一个特殊退化.

最后我们给出 K-稳定性的初始定义：

Definition 2.4.6（K-稳定性，K-半稳定，K-重稳定，Tian 97）

我们定义无非平凡的全纯向量丛的 Fano 流形 M 是:

(i)K-稳定的，且对于 M 的任意特殊退化 W, DTF 不变量$f_{W_0}(v_W)$具有正的实部。

(ii)K-半稳定的，且对于 M 的任意特殊退化 W, DTF 不变量$f_{W_0}(v_W)$具有非负的实部。

(iii)弱 K-稳定的，如果$Re(f_{W_0}(v_W)) \geq 0$,且取等号当且仅当 W 是平凡的情况。

而在[Tian97]中，除了提出 K-稳定性的概念，还证明了 K-稳定性是凯勒流形存在 KE 度量的必要条件，并以此为判定依据对非复曲面情形的 Fano 流形（即第一陈类为正的卡勒流形），举出了存在 3 维的无全纯向量场的自同构群有限的例子，但不存在凯勒-爱因斯坦度量的反例。除此以外，还将弱 K-稳定性推出 KE 度量存在的充分性方向，转化为了偏C^0估计问题。此外还引入了 CM-线丛和 CM-稳定性的概念，在后来 K-稳定性的代数几何理论的发展中发挥着重要作用。

2.4.7 K-稳定性的代数几何定义

而在[Don02]中用代数几何的语言给出了 K-稳定性的一个定义，回到 **Hilbert-Mumford** 判别法，S. K. Donaldson 将单参数子群簇取为了 **Test Configurations** χ，将权重函数 μ(x,λ)取为了 Donaldson-Futaki 不变量 DF(X, χ),下面我们给出它们的定义：

Definition2.4.7（Test-Configurations）

设 M 为CP^n中的一个 n 维射影代数簇，考虑 M 和满(ample)线丛 $L=O(1)|_M$构成的 pair

(M,L),此时(M,L)被称作极化流形。

则(M,L)的一个指数为 r>0 的 Test-Configuration 是一个平坦族（**flat family**）：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & \\ \mathbb{C}^{*}\circlearrowleft \downarrow & & \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

使得$\pi: \chi \to C$满足如下条件:

（1） π是$C^* -$等变的。

（2） L 是相对满的，且满足$L_{|\pi^{-1}(1)} \cong K_{\pi^{-1}(1)}^{-r}$。

另一方面我们再引入权重映射 **Donaldson-Futaki** 不变量 $DF(X,\chi)$的定义，我们考虑一个 **Test-Configurations** π，则我们有群作用C^*于$X_0 =$上，对任意的 k 它诱导了一个C^*在$H^0(X_0; L|_{X_1}^{\otimes k})$上的作用。有黎曼-罗赫定理，我们设 Hilbert 多项式:

$$h_k \coloneqq \dim\left(H^0\left(X_0; L|_{X_1}^{\otimes k}\right)\right) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + O(k^{n-2})$$

类似的，我们也可以写出C^*在$\wedge^{top} H^0(X_0; L|_{X_1}^{\otimes k})$上的作用的权重$\omega_k$:

$$\omega_k := b_0 k^{n+1} + b_1 k^n + O(k^{n-1})$$

于是 Donaldson-Futaki 不变量的定义为:

Definition2.4.8（Donaldson-Futaki 不变量）

依上述的推导的记号，设 X 为一 Fano 流形，χ为任意一个 test-configuration，则 Donaldson-Futaki 不变量$DF(X,\chi)$为:

$$DF(X,\mathcal{X}) := \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_0}$$

另外，尽管 Test-Configuration 的定义是比较抽象的，但我们有如下有用的定理使得这个概念得以更加具体化一些(证明见[RT07]):

Theorem2.4.4

所有的 Configurations 为了实现 X 到CP^n的嵌入都是由 PGL(N+1)中的单参数子群实现的。

其他有关于 Test-Configurations 的定义和 flat family 的背景知识，还可以进一步参考[Sz14,Section6.2]和[SA17,Section5.4]，最后我们给出[Don02]中 K-稳定性的定义:

Definition 2.4.9（K-稳定性，K-半稳定，K-重稳定，Donaldson 02）

对于 Fano 流形 X 的情形，我们定义：
(1)X 是 K-稳定的，如果对任意 Test-Configuration χ有 DF(X, χ)>0。
(2)X 是 K-半稳定的，如果对任意 Test-Configuration χ有 DF(X, χ) ≥0。
(3)X 是 K-重稳定的，如果对任意 Test-Configuration χ有 DF(X, χ) ≥0，并且当且仅当χ= X × C 时取等号。

以上我们就给出了 K-稳定的代数几何定义，可以看到在定义的形式和思想上，它和[Tian97]中的定义非常类似，都是以 **Hilbert-Mumford** 判别法为框架，使用有限维几何不变式去逼近无穷维的几何不变式的思想去定义 Fano 流形的稳定性。

2.5、K-稳定性与无奇点 Fano 情形的 YTD 定理

2.5.1 引领的问题

正如卡拉比定理在当年在第一陈类为 0 或-1 的情形的研究中所发挥的引领性作用那样，光滑 Fano 情形的 YTD 猜想引领了这个阶段对第一陈类为正的 Fano 流形上是否存在 KE 度量的研究。

首先我们给出 YTD 定理在无奇点光滑 Fano 情形的叙述，即 **Theorem2.5.1**，在第三章中我们将会给出 YTD 定理的一个较完整的证明，在这一小节中我们先将一些预备知识和用于解决这个猜想的工具的发展历程做一定阐述：

Theorem 2.5.1
设(M,L)是一个 Fano 的极化(polarized)的流形(被 anticanonical 的线丛${K_M}^{-1}$极化)，且 M 的全纯自同构群有限,则 M 是 K-稳定的当且仅当 M 上存在 KE 度量。

此猜想的必要性部分由[Tian97]解决，而光滑 Fano 情形的 YTD 猜想的充分性部分则在[Tian15]中得到解决，[CDS15] 中给出了另一个证明.

下面我们比较宏观的回顾一下这个猜想充分性部分证明的一些关键思想和技术。

2.5.2 连续线方法

对 Fano 情形，在 K-稳定性的限制条件提出之前，和 Calabi-Yau 定理证明的框架类似，我们依然可以直接去考虑其对应的蒙日-安倍方程，当然根据[Mat57]的必要条件，我们可以举出反例并知道第一陈类为正时，不一定存在 KE 度量，因此此时第一陈类为正的蒙日-安倍方程不一定有解，我们给出此时的蒙日安倍方程如下：

$$\left(\omega+\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n=e^{h-t\varphi}\omega^n$$

其中给定$\omega \in 2\pi c_1(M)$且φ应满足：

$$\omega+\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi>0$$

对于 h 则由下列式子唯一确定

$$\mathrm{Ric}(\omega)-\omega=\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}h,\quad \int_M (e^h-1)\omega^n=0$$

依据连续线方法的框架我们设 S 为使得蒙日-安倍方程有解的参数集合，那么：

（1） 非空由卡拉比-丘定理知成立

（2） T.Aubin 于[Aub84]中证明了 S 是开的

如果我们能像卡拉比-丘定理的证明一样，建立先验的C^0估计证明 S 是闭的，那么就存在这样的 KE 度量，然而我们已经知道这样的 KE 度量不一定总能存在，所以先验的C^0估计也不一定总能成立。

2.5.3 偏零阶估计猜想(定理)

上世纪 90 年代，对于上节中蒙日-安倍方程的研究的一个尝试来自于偏零阶估计猜想，如果能验证这个猜想对于此问题中的蒙日-安倍方程的一系列解成立，再加上 K-稳定性的条件，那么就能导出对这一系列解的合适的先验零阶估计，这个猜想最早在[Tian90]中提出在[Tian12]中也有相应的阐述。

其猜想(定理)内容为：

Theorem2.5.2（偏零阶估计定理）

对任意正常数 A,B，存在正整数 K 和正常数 C 具有如下性质：

设凯勒流形 M 满足 Ric ≥ A，Vol(M)≥ B，$[\omega]=2\pi c_1(M)$,则我们有 M 的 Bergman 映射 b 满足：

$$\inf_{x\epsilon M} b^K(x)>-C$$

猜想的 3 维以下的情况被[Jiang40]用几何流解决，在[CW12a]和[CW12b]中被推广到复 2 维的情况，在[TZ16]中被推广到复 3 维的情况，猜想最终在[CW20] 中解决。

2.5.4 Donaldson-Li-Sun 连续线方法

在 Fano 情形的传统连续线方法遇到困难后，Donaldson 在[Don12]中试图应用 b-稳定性的方法解决光滑情形的 YTD 猜想的过程中提出了通过锥(conic) 凯勒度量改进传统连续线方法的策略，所谓 conic KE 度量也就是沿着一个除子(divisor)具有锥角的度量,例如可以考虑如下的光滑情形的除子：

Definition 2.5.1

设 M 是一个紧凯勒流形，D 是一个光滑除子。则一个 M 上的具有夹角 $2\pi\beta$（$0<\beta\leq 1$）沿着 D 的凯勒度量指的是一个 M\D 上的沿着除子 D 渐近等价于模型锥度量的凯勒度量，其

中模型锥度量在使得 D={$z_1=0$} 的局部全纯坐标$z_1, z_2 \dots z_n$下写出为：

$$\omega_{0,\beta}=\sqrt{-1}\left(\frac{dz_1\wedge d\bar{z}_1}{|z_1|^{2-2\beta}}+\sum_{j=2}^{n}dz_j\wedge d\bar{z}_j\right)$$

而在光滑 Fano 情形的 YTD 猜想的证明中，我们考虑了如下的 conic KE metric 及其诱导的方程：

Definition 2.5.2

设 M 是一个 Fano 流形，D 是一个光滑除子，它代表$\lambda c_1(M)$的庞加莱对偶，我们定义一个沿着除子 D 具有锥角 $2\pi\beta$（$0<\beta\le 1$）的 conic KE 度量ω，如果$\omega \epsilon 2\pi \boldsymbol{c_1}(\boldsymbol{M})$**且满足** currents 意义下的方程**：**

$$\mathrm{Ric}(\omega)=\mu\omega+2\pi(1-\beta)[D]$$

有了这两个关于 conic KE 度量的定义后，我们可以大致概括 **Donaldson 改进的**连续线方法的原始想法如下：

(I) 假设λ等于 1，此时 D 是一个光滑非典范的除子，由[TY90]的结果我们存在一个 M\D 上的完全 Calabi-Yau 度量。

(II) 有相关猜想，即（I）中的度量是锥角 $2\pi\beta$趋于 0 时的 KE 度量的极限。

(III) 在（II）成立的前提下，**Definition2.5.2** 中的方程族的解集对应的参数集合 S 不是空集。

(IV) 在[Don12]中已经证明了 S 是开集。

(V) 再证明 S 是闭的

所以我们只需（II）中猜想证明成立的前提下，再证明 S 是闭的，就可以根据传统的连续线方法的逻辑，证明上述方程在（$0<\beta\le 1$）总存在解了，从而证明 Fano 情形的 YTD 猜想。

但是（I）中还存在一个问题，一个 Fano 流形 M 未必存在光滑的非典范除子，而且 Fano 流形何时存在光滑的非典范除子本身就是一个很不平凡的问题。针对这个问题，Li, C.; Sun.S 在[LS14]中受到了来自[RJ11]中提出的存在性定理的启发，并应用了一个[Ber14]中使用的 log-α不变量的估计，推出了如下定理：

Theorem 2.5.3

具有锥角$2\pi\beta$的 conic 凯勒-爱因斯坦度量存在的一个充分条件是只需要$\mu=1-\lambda(1-\beta)$充分小。

于是只要将方程族的解集对应的参数集 S 重新定义为考虑参数$\beta\epsilon(1-\frac{1}{\lambda}$，1]范围内的参数集，并重新记为参数集 E，则由上述定理，总存在 conic 凯勒度量满足方程，因此就得到 E 非空，剩下的就是需要证明 E 是闭的。

2.5.5 Cheeger-Colding-Tian 理论与 Conic 情形的偏零阶估计

虽然我们把问题已经转化为了 conic KE 度量情形，但对 conic 情形的 KE 度量存在性我们仍然还是需要尝试建立有效的偏零阶估计，再结合 K-稳定性，推出它们的有效的C^0估计，最终证明 E 是闭的。

而为了对 conic KE 度量建立有效的偏零阶估计([Tian15,Theorem1.2])，起到关键作用之一的则是应用（推广的）Cheeger-Colding-Tian 理论，一般来说，这种理论是用于研究具有里奇下界的黎曼流形 M 上的度量空间X_{∞}序列的Gromov-Hausdorff 极限，详细可以参考原始文献[CCT11] 和[Che01].

下面我们再给出 Cheeger-Colding-Tian 理论的其中一条主要定理如下：

Theorem 2.5.4（Cheeger-Colding-Tian）

设黎曼流形列$(\mathrm{M_i}, \mathrm{g_i})$的 GH 极限为$\mathrm{X}_\infty$，其中它们的里奇曲率都有下界，且直径都有界，体积均不可压缩。对任意的 P∈ X_∞，我们设 P 处的切圆锥$\mathrm{C_p}(\mathrm{X}_\infty)$定义为$\lambda_\mathrm{i} \to \infty$时的如下极限，即：

$$\lim_{pGH}(X_\infty, p, \lambda_i d_\infty)$$

正则集合定义为：

$$\mathcal{R} := \{p \in X_\infty \mid \exists C_p(X_\infty) \cong_{\text{isom}} \mathbb{R}^n\}$$

对任意自然数 k，奇异层定义为：

$$\mathcal{S} := X_\infty \setminus \mathcal{R} \supseteq \mathcal{S}_k := \{p \in X_\infty \mid \text{no tangent cones at } p \text{ splits } \mathbb{R}^{k+1}\}$$

如设奇异层列$\mathcal{S}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_{n-2} = \mathcal{S} \subseteq \mathrm{X}_\infty$，其中$\mathcal{S}_\mathrm{k}$的 Hausdorff 维数不大于 k。如果此时 Ricci 曲率两边有界，则$\mathcal{R}$集合是开集.且如果度量$\mathrm{g_i}$是 KE 的则$\mathrm{S} = \mathrm{S_{n-4}}$。

而对于 Cheeger-Colding-Tian 理论推广的定理，可以参考[Tian15,Theorem1.3].这条定理在建立 conic KE 度量情形的偏零阶估计中发挥了重要作用。

建立了对 conic KE 度量情形的偏零阶估计后，再结合 K-稳定性的条件，我们可以推出 conic KE 度量的零阶估计，从而最终我们完成了 DLS 连续线方法的全部过程，从而证明 Fano 光滑情形的 YTD 猜想。

除了 DLS 连续线的证明方法外，后来人们还发现了一些其他的证明方法，比如：

根据原先 T.Aubin 的方法[DS16],应用里奇流证明[CSW15],使用变分法[BBJ15],[Dem17]等新的证明方法。

2.6、K-稳定性的代数几何理论与奇异情形 YTD 猜想简述

其实在[Don02]K-稳定性的新定义的过程中，代数几何的理论已经得到了广泛的应用，而在后续的研究中，K-稳定性的代数理论继续蓬勃发展，关于它的理论综述，C. Xu 的文献阅读报告《法诺簇的代数 K-稳定性理论》[Xu19*]是这个方向很好的文献阅读报告,笔者谨再简单做一些叙述：

2.6.1 引领的问题

首先在这个研究阶段中，在光滑情形的 YTD 猜想被解决的基础之上，又开始进一步的研究一些奇异情形的 YTD 猜想，关于奇异情形，我们可以按照 Aut(X)是否有限，和稳定性条件要求的是 K-稳定性还是一致 K 稳定性，列出有 4 个版本的 YTD 定理（猜想）:

Theorem 2.6.1（可带奇点，Aut(X)有限的，一致 K-多重稳定情形的 YTD 猜想）

设 X 为 Aut(X)为有限群的 (可带有奇点的) Fano 簇时，其上有 KE 度量当且仅当 X 是一致 K-稳定的。

Theorem 2.6.2（可带奇点，Aut(X)有限，K-多重稳定情形的 YTD 猜想，即奇异情形的 YTD 猜想）

设 X 为 Aut(X)为有限群的 (可带有奇点的) Fano 簇时，其上有 KE 度量当且仅当 X 是 K-稳定的。

Theorem2.6.3（可带奇点，Aut(X)不有限，约化一致 K-多重稳定情形的 YTD 猜想）

Fano 簇 X 上有 KE 度量,当且仅当 X 是约化一致 K-稳定。

Theorem2.6.4 （可带奇点，Aut(X)不有限， K-多重稳定情形的 YTD 猜想，即 log Fano 情形的 YTD 猜想）

Fano 簇 X K-重稳定当且仅当 Fano 簇存在 KE 度量。

而在这些定理的实际证明过程中，都是先证明的（约化）一致 K-稳定性与存在 KE 度量存在性等价，再证明 K-（重）稳定性与（约化）一致 K-稳定性等价。

其中第 1 个定理 **Theorem2.6.1，**即一致 K-多重稳定情形的奇异 YTD 猜想在[LTW19]中被证明.

而第 3 个定理 **Theorem2.6.3**，在[Li19]中被最终证明

而至于第 2 和第 4 个定理，即 **Theorem2.6.4 和 Theorem2.6.2，**都关键在于证明 K-多重稳定性与一致 K-多重稳定性等价。后者于 2021 年被 C．Xu，Y. Liu，Z. Zhuang 在[XLZ21]中通过解决有限秩生成猜想得以共同解决，这标志着 K-稳定性的代数理论被基本建立完善。

2.6.2 K-稳定性代数理论的发展

其次，我们用表格的形式，给出 K-稳定性代数理论发展过程的重要的参考文献和对应参考文献的主要结果，更加细节的有关 K-稳定性代数理论发展过程的整理，可以参考[Xu19*]或者第一章凯勒-爱因斯坦度量存在性与 K-稳定性问题发展年表。

年份	论文	论文意义
2002	[Don02] S. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric	用代数几何语言给出了 K-稳定性的定义

	varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), no. 2, 289–349.	
2007	[RT07] J. Ross, R. Thomas, A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties, J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 2, 201– 255.	尝试利用有限维几何不变式的理论，即 GIT 的框架去理解 K-稳定性，特别的给出了代数曲线情形的稳定的几何证明。
2013	[Oda13] Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via discrepancy, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 2, 645-661.	首次注意到 K-稳定性与极小模型纲领（MMP）的联系
2014	[LX14] C. Li and C. Xu, Special test configuration and K-stability of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 1, 197–232.	极小模型纲领被系统引入用来研究法诺簇的退化及其和 K-稳定性 的关系
2017 和 2019	[Li17] C. Li, K-semistability is equivariant volume minimization, Duke Math. J. 166 (2017), no. 16, 3147–3218 [Fuj19b] , A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties, J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 309–338. [BX19] H. Blum and C. Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 609–656.	引入了β不变量，给出了 K-稳定性的新的定义，即 K-稳定性的赋值准则
2017 和 2018	[FO18] K. Fujita and Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, Tohoku Math. J. 70 (2018), no. 4, 511-521 [BJ17] H. Blum and M. Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, arXiv:1706.04548 (2017)	引入了δ不变量，并证明了δ不变量总可以被一些除子赋值取到。而这些除子赋值的几何性质与建立一套 K-稳定性理论有关系。
2018	[BBJ18] R. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson, A variational approach to the Yau-Tian-Donaldsonconjecture, arXiv:1509.04561v2 (2018).	将变分法引进了 YTD 猜想的研究
2018 和 2019	[AHLH18] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, Existence of moduli spaces for algebraic stacks, arXiv:1812.01128 (2018). [ABHLX19] J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu, Reductivity of the automorphism	[ABHLX19] 在[AHLH18]的提出的理论基础上完成了可分好模空间存在性证明

	group of K-polystable Fano varieties, arXiv:1906.03122 (2019).	
2019	[BX19] H. Blum and C. Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 609–656.	1.对 Q-法诺簇的 K-稳定性，也给出了一个更简洁的等价刻画，即只需任意除子赋值在 β-不变量作用下为正。 2.证明了 K-半稳定的法诺簇的退化在 S-等价类的意义下唯一。
2019	[LTW19] C. Li, G. Tian, and F. Wang, The uniform version of Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties, arXiv:1903.01215 (2019).	成功证明了奇异情形的 Aut(X)版本的 YTD 猜想
2019	[Li19] , On equivariantly uniform stability and Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties, arXiv:1907.09399 (2019).	证明了奇异情形的群作用版本 YTD 猜想，Aut(X)不要求有限，但要求约化一致 K-稳定
2019	[Xu19] C. Xu, A minimizing Valuation is Quasi-monomial, to appear in Annals of Math., arXiv:1907.01114 (2019)	与[BLX19]中的工作一起证明了对于一族 Q-法诺簇，其纤维是 K-半稳定的部分构成一个开集。
2019	[BLX19] H. Blum, Y. Liu, and C. Xu, Openness of K-semistability for Fano varieties, arXiv:1907.02408 (2019)	1. 如果 Q-法诺簇的稳定阈值 δ(X) ⩽ 1, 那么 δ(X) 总是被一个拟单项式赋值取到 2. 结合[Xu19] 最终证明了对于一族 Q-法诺簇，其纤维是 K-半稳定的部分构成一个开集
2021	[XLZ21] C . Xu, Y. Liu, Z. Zhuang, Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability, arXiv.org/abs/2102.09405	解决了更高秩的有限生成猜想，证明了 K-重稳定性与约化一致 K-稳定性（Aut(X)不一定要求有限）是等价的，从而最终证明了 K-重稳定的 Fano 簇存在 KE 度量，解决了一般情形的 log Fano 的 YTD 猜想。

K-稳定性代数理论年表

2.6.3 K-稳定性的β不变量与双有理几何定义

代数几何在 K-稳定性中的进一步应用不局限于[Don02]中的基于平坦族定义的 Test-Configurations 和基于黎曼-罗赫定理展开希尔伯特多项式系数定义的 Donaldson-Futaki 不变量两个概览重新用代数几何语言叙述的 K-稳定性的新定义，事实上，还可以进一步的利用双有理几何的模型改写 K-稳定性的定义，使得它更加具有可计算性。下面我们给出β不变量的定义：

Definition 2.6.1

记 X 为一个 n 维 Fano 流形(也可推广为更一般的 klt-Fano 簇，即 Q-Fano 簇的情况，称为 Q-Fano 簇，首次在[KM98]中引入，E 为 X 上的一个除子赋值，$A_X(E)$为其对数差异值，双有理正则模型$\mu: Y \to X$包含 E 作为其上的除子，则依赖于 Fano 流形 X 和其上的除子赋值的 β 不变量定义为：

$$\beta_X(E) = (-K_X)^n A_X(E) - \int_0^{\infty} \mathrm{vol}(\mu^*(-K_X) - tE)\, dt$$

β不变量的好处在于，它可以简洁的给出如下 K-稳定性的等价定义，即 K-稳定性的赋值准则：

Definition 2.6.2

设 X 为一个 Q-Fano 簇，则 X：

（1）X 是 K-半稳定的，当且仅当对任意除子赋值 E，有$\beta_X(E) \geq 0$。

(2)）X 是 K-稳定的，当且仅当对任意除子赋值 E，有$\beta_X(E) > 0$。

而从双有理几何的角度，我们可以比较直观的比较出以上定义与 Tian 和 Donaldson 原始定义的区别，以及它更简洁的原因：

在原始定义中，我们考虑的是 X 的所有嵌入 $|-rK_X|$:X→ P（对任意充分可除的 r），在 Aut(P)的任意单参数子群 G 作用下的退化$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$,再计算其上的广义 Futaki-不变量的正负号。这等价于是考虑$X \times A^1$上的 G-等变双有理几何。

但在 **Definition2.6.2** 中，我们实际上只用考虑 X 上的所有赋值，是 X 本身的双有理几何。所以从双有理几何的角度看待这个问题，可以直观的看出后者的概念更加简洁一些。

这种定义的等价性的证明经历如下几个阶段：

（1） 在[LX14]中，为验证 Fano 簇上的 K-稳定性概念，转化为只考虑一类特殊的等变退化上的 Futaki 不变量的的正负号，即考虑特殊退化。

（2） 在[BHL17]中，考虑了特殊退化在 0 处的纤维X_0，从而给出了函数域$\mathrm{k}(\mathrm{X} \times \mathrm{A}^1)$上的赋值，再将赋值限制在$\mathrm{k}(\mathrm{X}) \subset \mathrm{k}(\mathrm{X} \times \mathrm{A}^1)$上，得到了子函数域$\mathrm{k}(\mathrm{X})$上的赋值$\mathrm{c} \cdot \mathrm{ord}_{\mathrm{E}}$。此时这个$\mathrm{c} \cdot \mathrm{ord}_{\mathrm{E}}$与原先定义中的广义 Futaki 不变量，只差了一个正常数的倍数。

（3） 在[Fuj19b,Li17]中，最后完成了对一般$\beta_X(E)$的符号的验证，其实只需验证由特殊退化诱导产生的所有 E 即可，其间借助了 Ding-不变量[Ding88]和 Ding-稳定性。

（4） 最后在[LX16]中，基于[Li17],[Li18]锥奇点的正规化体积极小化问题和它的基对应的法诺簇的 K-稳定性之间的关系，给出了一个新的证明。

2.6.4 δ-不变量与奇异情形 YTD 猜想

受到 β-不变量的启发，我们还可以进一步的构造 X 上的 δ-不变量，它与奇异情形的 YTD 猜想（于[LTW19]中证明）有着密切的联系。

我们先给出 δ-不变量的定义：

Definition2.6.3

对于 Q-Fano 簇 X，和其上的除子赋值 E，我们定义$\delta_X(E)$等于：

$$\delta_X(E) =_{\text{defn}} \frac{(-K_X)^n \cdot A_X(E)}{\int_0^\infty \text{vol}(-K_X - tE)dt}$$

则所谓 δ 不变量定义为 X 上的稳定域值：

$$\delta(X) \coloneqq {}^{inf}{}_{E}\delta_X(E)$$

另外$\delta_X(E)$的分子分母的范围还可以进一步的延拓，延拓到整个赋值空间$Val(X)$上，事实上对任意的$Val(X)$上的 v，我们可以定义：

$$\delta_X(v) =_{\text{defn}} \frac{(-K_X)^n \cdot A_X(v)}{\int_0^\infty \text{vol}(\mathcal{F}_v^t)dt}$$

其中对数差异 $A_X(v)$在[MN15]中定义，$\mathcal{F}_v$是$H^0(-mK_X)$对 m 求直和后得到的 **R** 中的截影在 v 上的赋值生成的滤链，$\text{vol}(F_v^t)$是F_v对应的 **Duistermaat–Heckman** 测度的体积.

关于δ-不变量，我们可以给出它的更加具有几何意义的一些等价形式：

Theorem2.6.5(δ-不变量更具几何意义的表达形式)

(i) 当 X 光滑时，此时的δ-不变量等于极大 Ricci 曲率的下界。（在[CRZ19]中证明，极大 Ricci 曲率的下界在[Szé11]中定义）

(ii) $\delta(X)$等于${}^{inf}{}_{v}\delta_X(v)$，且总能被一个赋值取到（在[BJ17]中证明）。

此外，δ-不变量还可以用于等价的定义一致 K-稳定性的概念：

Theorem2.6.6（一致 K-稳定性的δ-不变量定义，在[Fuj19b,BJ17]中提出）

X 为一致 K-稳定性，当且仅当$\delta(X) > 1$.

那么δ-不变量与奇异情形的 YTD 有着什么样的联系呢？

首先于δ-不变量δ(X)，已经证明了它能被一个赋值取到，它的取到的赋值的几何性质就是建立 K-稳定性完整理论的关键，在[BLX19]中证明了，如果$\delta(X) \le 1$，则δ(X)总能被一个拟单项式赋值取得，如果进一步证明如下命题：

当$\delta(X) \le 1$时，它能被一个除子赋值取得。

那么由这个结论可以直接推出 **Theorem 2.6.2**，即 Aut(X)有限时奇异情形的 YTD 猜想。这是因为：

[LTW19] 中在于[BBJ18]提出的变分法思想的基础上，数学家证明了 **Theorem2.6.1**，

即一个 Aut(X) 为有限群的 (可带有奇点的) 法诺簇 X，其上有 KE 度量，当且仅当 X 是一致 K-多重稳定的。

而对一个 只是 K-多重稳定的法诺簇 X，有定理表明它满足对任意除子E，有 $\delta_X(E) > 1$ 成立，于是根据$\delta(X) \le 1$时，δ-不变量能被一个除子赋值取得，由此可以反证推出 $\delta(X) > 1$（否则与任意除子E，有 $\delta_X(E) > 1$ 矛盾），再根据 **Theorem2.6.6**，我们即能得到 X 是一致 K-稳定的。

至于 Aut(X)不有限情形，在[His16]中类似一致 K-多重稳定定义了约化一致 K-（多重）稳定的概念，而在[Li19]中证明了 **Theorem2.6.3**，在[XZ19]中引入了约化的δ-不变量，并猜测一致 K-多重稳定当且仅当约化一致 K-（多重）稳定，这个猜想最终在[XLZ21]中得到了解决，由此我们完成了 **Theorem2.6.4** 和 **Theorem2.6.2** 的证明，即一般奇异情形（含 Aut(X)不有限）的 YTD 猜想的证明。

2.7 K-稳定性代数几何理论的研究前景

而随着第 2 和第 4 个定理，即 Theorem2.6.2 和 Theorem2.6.4 在[XLZ21]中通过证明有限秩生成猜想，得到(约化)K-多重稳定与（约化）一致 K-多重稳定等价而最终解决。这个领域中基本的有关 Fano 情形的 K-稳定性代数理论构建已经基本完成了，那么这个领域还有什么重要的研究问题呢？事实上还有一些重要的问题需要解决：

2.7.1 Fano 簇的模空间理论及其紧性猜想

当第一陈类为负的时候，即K_X为正的时候，KSB 理论成功的构造出了紧模空间，且使得模空间上的点对应K_X充沛，且只有半对数典范奇点的射影簇。

而至于$-K_X > 0$的情形，与K_X的情形有区别。因为$-nK_X(n > 0)$的截影一般不是双有理不变量。所以如果直接考虑所有 Fano 簇，或者仅考虑 Fano 流形的函子都不是可分的，此时如果想构造出好的模空间则需要选取一些特殊的 Fano 簇来构造，但如何选取在 K-稳定性的概念和双有理几何发生联系之前，是一个困难的问题。

而最近，K-稳定性的概念为建立 Fano 簇的模空间理论提供了有力的选取方向。为了引出后续有关 K-模空间还需要解决的猜想，我们看一个下述有关 K-模空间构造的定理：

Theorem 2.7.1[1]

固定有理数 V 和正常数 n.

(1) 所有维数为 n, 体积 $(-K_X)^n = V$ 的 K-半稳定法诺簇被一个有限型 Artin 叠 (stack)$\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$ 参数化;

(2) $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V}$ 有一个可分好模空间 (good moduli space) $\mathcal{M}^{\mathrm{kss}}_{n,V} \to M^{\mathrm{kps}}_{n,V}$ 使得 $M^{\mathrm{kps}}_{n,V}$ 上的点一一对应 K-重稳定法诺簇。

这个深刻定理的证明过程用如下表格展示:

论文索引	重要框架步骤	得到的结论
[Bir19],[Jia17]: **C. Jiang, Boundedness of Q-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., arXiv:1705.02740 (2017). C. Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 345–463.**	**有界性的证明:** [Jia17]在[Bir19]的基础上证明了所有体积(-K_X)^n=V 的 K-半稳定的 Fano 簇是有界的	$\boldsymbol{M^{kss}_{n,V}}$**是有限型 Artin 叠.**
[Kol08] : **J. Kollár, Hulls and Husks, arXiv:0805.0576 (2008)**	**有限 Hilbert 空间的构造:** 参数化有相同首项 Hilbert 多项式的代数簇的有限 Hilbert 空间。 **Q-法诺簇的构造:** 利用 KSB 模空间理论中的 Kollár 条件，推出此有限 Hilbert 空间有一个典范子空间，它表示其中所有纤维是 Q-法诺簇的族(family)。	
[BLX19],[Xu19]: **H. Blum, Y. Liu, and C. Xu, Openness of K-semistability for Fano varieties, arXiv:1907.02408 (2019). C.Xu, A minimizing Valuation is Quasi-monomial, to appear in Annals of Math., arXiv:1907.01114 (2019).**	**Q-法诺簇纤维的开性:** 证明了一族 Q-法诺簇的纤维是 K-半稳定的部分构成的开集。 **Artin 叠的构造:** 最终上一步构造的 Hilbert 空 间的有限型子空间在群 PGL 作用下的叠商就最终构成了此 Artin 叠。	
[Alp13]: **J. Alper, Good moduli spaces for Artin stacks, Ann. Inst. Fourier**	**Artin 叠的好模空间:** 以 GIT 映射为原型的 基础，Alper 提出了一个 Artin 叠的好模空间的概念。且有这	$\mathbf{M^{kss}_{n,V}}$**存在好模空间，且使得其上的点一一对应 K-重稳定的 Fano 簇.**

[1] 引自[Xu19*] Theorem2.1

(Grenoble) 63 (2013), no. 6, 2349–2402	个好模空间上的点对应于原 Artin 叠上的 S-等价类的良好性质。	
[LWX18]： C. Li, X. Wang, and C. Xu, Algebraicity of the metric tangent cones and equivariant K-stability, arXiv:1805.03393 (2018).	**S-等 价类存在唯一极小元素：** 在 Fano 簇的 K-稳定性的问题中,[LWX18]证明了每个 S-等 价类存在唯一极小元素。	
[BX19]： H. Blum and C. Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 609–656.	**K-半稳定法诺簇 退化于 S-等价类下的唯一性：** 在[BX19] 利用了一类分次环的有限生成性证明了 K-半稳定法诺簇 退化在 S-等价类下的唯一性。	
[ABHLX19] J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu, Reductivity of the automorphism group of K-polystable Fano varieties, arXiv:1906.03122 (2019). [AHLH18] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, Existence of moduli spaces for algebraic stacks, arXiv:1812.01128 (2018).	**可分好模空间存在:** 在 [ABHLX19] 在 [AHLH18]的理论基础上完成了可分好模空间存在性的证明	

（表格 3.7.1 法诺簇的模空间的构造过程）

有了如上关于法诺簇的模空间理论，我们就可以进一步的关于 **Theorem 2.6.4** 中建立的模空间的结构的紧性，提出如下需要进一步解决的重要猜想：

Conjecture 2.7.1

$\mathcal{M}_{n,V}^{kss}$是一个紧的模空间。

2.7.2 具体例子的 K-稳定性的判定

而另一方面，数学家虽然已经完全证明了各种情形的 YTD 猜想，将 KE 度量存在性问题转化为了 Fano 簇的 K-稳定性问题，但究竟什么样的 Fano 簇是 K-稳定的呢？这就涉及到了具体的 Fano 簇 K-稳定性的判定问题，这个问题目前有常见的两种研究思路，大致上一种研究思路是延续使用[Tian87]中 α-不变量判定准则及由其推广的一些其他判定不变量（见 3.3.2 节的表格），另一种则是利用 Fano 簇的紧模空间理论进行判定。

而在这个领域中，目前也有一些重要的猜想还未解决，例如：

Conjecture 2.7.2[2]
$\mathbb{P}^{n+1}$中所有光滑法诺超曲面都是 K-稳定的。

Conjecture 2.7.3
对任意 $n \geq 4$, $\mathbb{P}^{n+1}$中三次超曲面是 K-(半, 重) 稳定, 当且仅当它是 GIT-(半, 重) 稳定。

还有如下关于具体曲线的 Fano 模空间的 K-稳定性的问题：

Question 2.7.1

考虑一个亏格不小于 2 的曲线 C, 并令 $L \in \mathrm{Pic}^d(C)$。则参数化 C 上 所有秩 r, 第一陈类为 L 的重稳定向量丛的法诺模空间是 K-稳定的。

2.7.3 非 Fano 簇情形的理论问题

这一章节种的理论，都是在第一陈类为正的 Fano 簇上建立的，它的理论经过 60 多年时间的构建，现在已经基本完成，但是在非 Fano 情形，也还有一些没有解决的理论层面问题。比如一开始提及的比 KE 度量相对更强的 cscK 度量现在知道的信息不太多，再比如虽然整体情形解决了，但对于奇点的情形，局部的理论还了解的不多。

总之，虽然 K-稳定性的代数理论构建基本已经完成了，但这个领域仍然存在着很多亟待探索的问题，即使在领域之外，我们也好奇能否将如今已经构建完善的 K-稳定性的代数理论应用到其他的数学分支或问题上，发挥出它的“力量”？正如 Z. Zhuang,在北京国际数学中心的采访[采访 21]中引用的丘吉尔的名言一样：

It's not the end, It's not even the beginning of the end. It is the end of the beginning.

[2] 引自[Xu19*]第四节《显式例子》

第三章、YTD 猜想的代数几何稳定性（CM-稳定性）证明

在[Tian15]中，G. Tian 写出了光滑情形 YTD 猜想的证明，我们对于其中的第一种利用代数几何中 CM-稳定性的概念和相应的代数几何不变式（GIT）理论证明，给出一个 YTD 猜想证明的相对完整的一个复述。

Theorem 3.1

设 M 是一个 Fano 流形，它典范的被非典范线丛K_m^{-1}极化，则如果 M 是 K-稳定的，那么 M 上存在一个 KE 度量。

Proof:

第一步：转化为对锥连续线方法中的方程族的部分参数对应的解族建立C^0估计

首先回忆，根据 2.5.4 节中的锥连续线方法，证明光滑 YTD 猜想的关键就是要对如下复蒙日安倍方程族对连续参数$\beta \in (1-\lambda^{-1},1]$的子族的解利用 K-稳定性的条件导出一个$C^0$估计，其中$\omega_\beta \epsilon 2\pi c_1(M)$表示一个合适的锥凯勒度量：

$$(\omega_\beta + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\,\varphi)^n = e^{h_\beta - \mu\varphi}\omega_\beta^n \tag{3.1}$$

以上方程族，对应参数 β 的度量ω_β的沿着光滑除子 D 的锥角$2\pi\beta$和方程参数h_β由如下式子决定：

$$\mathrm{Ric}(\omega_\beta) = \mu\omega + 2\pi(1-\beta)[D] + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}h_\beta$$

$$\int_M (e^{h_\beta} - 1)\omega_\beta^n = 0 \tag{3.2}$$

那么，如何证明对方程族参数范围内的解建立C^0估计，即可导出$\beta \in (1-\lambda^{-1},1]$范围内都有解，进而导出我们期望的$\beta = 1$时有解呢？我们有如下引理及其反证法：

Lemma 3.1

设方程族（3.1）在$\beta \in (1-\lambda^{-1},1]$范围内的存在解的参数范围集为 E，再记 E 中固定参数 β 对应方程的一个解为φ_β，则若$||\varphi_\beta||_{C^0}$对所有参数集 E 中的 β 的C^0估计成立，则 E=$(1-\lambda^{-1},1]$，即得出 YTD 猜想充分性成立。

证明：

（1）首先根据 E 的定义和 2.5.4 节，总可以取 λ 充分大，使得$\beta \in (1-\lambda^{-1},1]$范围内有解，即 E 非空集。

（2）其次在[Don12]中给出了 E 是开集的证明。

（3）于是只需再证明 E 是闭集：

反证：如果 E 不是$(1-\lambda^{-1},1]$中的闭集，则 E 必然为$(1-\lambda^{-1},c)$的形式，其中常数 c 满足小于等于 1。

另一方面，当 E 为$(1-\lambda^{-1},c)$的形式时，即 c 不属于 E，则我们再在这个假设条件的基础上用反证法证明，当 β 趋向于常数 c 的时候$||\varphi_\beta||_{C^0}$发散到无穷。事实上，反证若

$||\varphi_\beta||_{C^0}$对参数集 E 中的 β 一致有界时，则我们可以用[JMR11]中的结论对φ_β建立一个一致的$C^{2,r}$ – 估计（r 为某正常数）(见 **Remark3.1**)。在这个结论的基础上，我们可取出一个子列，使得φ_β收敛到φ_c，其中φ_c满足（3.1）中 β=c 的方程。则由正则性定理，我们知对锥复蒙日-安倍方程(3.1)知φ_c也是方程（3.1）的一个解，于是 c 此时属于 E，矛盾。故如果反设 E 为$(1-\lambda^{-1},c)$的形式，就能推出 β 趋向于常数 c 的时候$||\varphi_\beta||_{C^0}$发散到无穷，这与 Lemma3.1 中的已经建立了对参数 β 的一致估计矛盾。

所以我们要证明光滑 YTD 猜想的充分性部分，只需要证明 $||\varphi_\beta||_{C^0}$对参数集 E 中的 β C^0估计成立。

Remark3.1

关于结论"若$||\varphi_\beta||_{C^0}$对参数集 E 中的 β 一致有界时，则对φ_β可以建立一个一致的$C^{2,r}$ – 估计（r 为某正常数）"，[JMR11]中的证明思路如下：

首先使用 Chern-Lu 不等式和极大值原理去将$\Delta'\varphi_\beta$估计一个一致的界，这里Δ'表示限制在锥凯勒爱因斯坦度量$\omega_\beta+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_\beta$下的拉普拉斯算子，这表示$\omega_\beta+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_\beta$一致等价于$\omega_\beta$且方程 3.1 为一致椭圆型方程。然后有成熟的关于锥情形的复蒙日-安倍方程的技术最终导出了一个关于φ_β的$C^{2,r}$ – 估计。

第二步：证明一个 Fano 流形上由 CM-稳定性推出 M 存在 KE 度量的定理

那么如何导出我们所期待的$||\varphi_\beta||_{C^0}$对所有参数集 E 中的 β的 C^0估计呢？显然这需要 K-稳定性条件去驱动这个估计，在利用 K-稳定性条件之前，我们先来架构一个关于由法诺流形 M 上的 CM-稳定性推出 M 存在凯勒-爱因斯坦度量的定理如下，在第二步中，我们不妨假设 M 无非零全纯向量场，对于一般情形可以将如下的讨论简单做一个推广：

在此之前，首先我们先简要回顾[Tian97]中给出的 CM-稳定性的定义：

Definition3.1

设 Mabuchi's K-energy 为：

$$\mathbf{M}_{\omega_0}(\varphi) = -\frac{1}{V}\int_0^1\int_M \varphi(\mathrm{Ric}(\omega_{t\varphi}) - \mu\omega_{t\varphi}) \wedge \omega_{t\varphi}^{n-1} \wedge dt$$

再给定到CP^N的一个通过$K_M^{-\ell}$的嵌入，则我们有一个 G=SL(n+1,C)上的诱导映射作用在CP^N上，即：

$$\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{M}_{\omega_0}(\psi_\sigma)$$

其中这里的ψ_σ定义为，注意到这里的$F(\sigma)$是良定义的，因为ψ_σ在一个常数的意义下是唯一的，即：

$$\frac{1}{\ell}\sigma^*\omega_{\mathrm{FS}} = \omega_0 + \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\psi_\sigma$$

类似的我们也可以定义 G 上的 J 为：

$$\mathbf{J}(\sigma) = \mathbf{J}_{\omega_0}(\psi_\sigma)$$

则我们称：

（1） M 是 CM-稳定限制于$K_M^{-\ell}$上如果 F 是恰当的，即对 G 中的任意序列σ_i，有当$J_{\omega_0}(\psi_{\sigma_i})$趋于无穷时，$F(\sigma_i)$趋于无穷。

（2） M 是 CM-半稳定限制于$K_M^{-\ell}$上如果 F 是有下界的。

（3） M 是 CM-稳定的如果 M 是对任意充分大的ℓ都是 CM-稳定的限制于$K^{-\ell}$上。

（4） M 是 CM-半稳定的如果 M 是对任意充分大的ℓ都是 CM-半稳定的限制于$K^{-\ell}$上。

下面，我们给出并证明 Lemma3.2:

Theorem 3.2

如果 M 是一个 Fano 流形且它是 CM-稳定的，则 M 上存在 KE 度量。

证明：

如果 M 不存在 KE 度量，则存在序列β_i，具有极限$\lim \beta_i = c \leq 1$，使得$\varphi_i = \varphi_{\beta_i}$在 C0 范数意义下发散到无穷，根据[Tian15] section 5 建立的偏零阶估计，我们知道存在某个$l > 0$，使得我们能给出一个通过$H^0(M, K_M^{-\ell})$中的基底诱导的嵌入映射 M 到CP^N，以及存在 G 中的σ_i使得如下一致估计成立：

$$\psi_i = \psi_{\sigma_i}, \quad \|\psi_i - \varphi_i\|_{C^0} \leq C.$$

下面我们只需对ψ_i尝试建立一致估计，则由上面的结果，对φ_i也能建立一致估计，则导出了矛盾.而想对ψ_i建立一致估计，我们只需对$F(\sigma_i)$建立一致估计即可，为此我们分为两个小段，但都是利用$M_{\omega_0}(\varphi_i)$或其对应的 twisted K-energy 进行不等式放缩：

断言 1： 我们对 $F(\sigma_i)$可用$M_{\omega_0}(\varphi_i)$进行控制：

$$\mathbf{M}_{\omega_0}(\varphi_i) \geq \mathbf{F}(\sigma_i) - C$$

断言 1 的证明首先在[Tian00]中对于$M_{\omega_0}(\varphi)$有如下等式成立：

$$\mathbf{M}_{\omega_0}(\varphi) = \frac{1}{V}\int_M \log\left(\frac{\omega_\varphi^n}{\omega_0^n}\right)\omega_\varphi^n + (\mathbf{I}_{\omega_0}(\varphi) - \mathbf{J}_{\omega_0}(\varphi)) + \frac{1}{V}\int_M h_0(\omega_0^n - \omega_\varphi^n)$$

其中 h_0由如下式子确定：

$$\mathrm{Ric}(\omega_0)-\omega_0=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\,h_0,\qquad \int_M (e^{h_0}-1)\omega_0^n=0.$$

$I_{\omega_0}(\varphi)$则由如下式子定义：

$$\mathbf{I}_{\omega_0}(\varphi)=\frac{1}{V}\int_M \varphi(\omega_0^n-\omega_\varphi^n)$$

则$\mathrm{M}_{\omega_0}(\varphi_i)$由以上三组式子可以给出如下的下界估计：

$$\mathbf{M}_{\omega_0}(\psi_i)+\frac{1}{V}\int_M \log\left(\frac{\omega_{\psi_i}^n}{\omega_0^n}\right)(\omega_{\varphi_i}^n-\omega_{\psi_i}^n)-C\geq$$
$$\mathbf{F}(\sigma_i)+\frac{1}{V}\int_M(\varphi_i-\psi_i)(\mathrm{Ric}(\omega_0)-\mathrm{Ric}(\omega_{\psi_i}))\wedge\sum_{a=1}^{n-1}\omega_{\varphi_i}^a\wedge\omega_{\psi_i}^{n-a}-C$$

再结合$Ric(\omega_{\psi_i})$有界的事实我们即证明了断言 1.

对于不等式另一端放缩，我们不直接考虑$\mathrm{M}_{\omega_0}(\varphi_i)$，而是考虑如下的扭曲 K-energy：

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\omega_0,\mu}(\varphi)&=\mathbf{M}_{\omega_0}(\varphi)+(1-\mu)(\mathbf{I}_{\omega_0}(\varphi)-\mathbf{J}_{\omega_0}(\varphi))\\&+\frac{1-\beta}{V}\int_M \log\|S\|_0^2(\omega_\varphi^n-\omega_0^n).\end{aligned}$$

则我们只需再对$\mathrm{M}_{\omega_0}(\varphi_i)$对应的$\mathrm{M}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)$进行一致有上界的估计即可完成整个证明，导出矛盾。

断言 2： $\mathrm{M}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)$一致有界，即

$$\mathbf{M}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)\leq C$$

断言 2 的证明首先要用到一个$\mathrm{M}_{\omega_{0,\mu}}$和$\mathrm{F}_{\omega_{0,\mu}}$的推广了的 G.Tian 和 W.Ding 于[DT92]中提出的关系式子，即[LS14]中的 prop.2.10(2):

$$\mathbf{M}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)=\mu_i\mathbf{F}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)+\frac{1}{V}\int_M(h_0-(1-\beta_i)\log\|S\|_0^2+a_{\beta_i})\omega_0^n$$

其中$\mu_i=1-(1-\beta_i)\lambda$，$a_{\beta_i}$在[Tian15] section 2 中 2.1 式定义。而ω_{φ_i}是一族具有锥角$2\pi\beta_i$的锥凯勒-爱因斯坦度量，再根据[Tian15]中 section 2 的 **lemma2.4**，取$t=\mu_i$ 并令$\delta\to 0$，我们最终得到：

$$\mathbf{M}_{\omega_0,\mu_i}(\varphi_i)\leq C$$

于是根据断言 1 和断言 2 的估计，我们对ψ_i也建立了一致估计，再由偏零阶估计的结果，我们对相应的φ_i也能建立一致估计，于是导出了矛盾，从而证明了 CM-稳定的 Fano 流形存在 KE 度量。

第三步：K-稳定的和 CM-稳定关系的渐进展开分析

首先，本节所指的 K-稳定性的概念采用[Tian97]中最先用 Ding-Tian-Futaki 不变量定义的 K-稳定性，在我们开始推导前，我们先引入两个由 C.Li 提出的有关 Ding-Tian-Futaki 不变量在 K-energy 渐进展开项中的新的定义以及两个有关代数子群的 K-energy 的新形式：
在[Li12]中，C.Li 观察到：

对任意$G = SL(N+1,\mathbb{C})$的代数子群$G_0 = \{\sigma(t)\}_{t\epsilon C^*}$ 其 K-energy 有在 t 趋于 0 意义下的展开：

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = -(f_{M_0}(X) - a(\mathbf{G_0})) \log |t|^2 + O(1)$$

（渐进展开式 1）

同时类似的讨论可以被用于确认具有G_0 − 等变半稳定约化 q：$\tilde{\chi} \longmapsto \chi$的 Futaki 不变量

$f_{\widetilde{M_0}}(\tilde{\chi})$的$f_{M_0}(X) - a(G_0)$,这里的$\chi = \{(x,t)|x\epsilon\sigma(t)(M)$或者$M_0\}$,$\widetilde{M_0} = q^{-1}(M_0)$,且$\tilde{X}$为生成$G_0$在$\tilde{\chi}$上作用的域。则还可以改写为如下形式，其中是在 t 趋于 0 的意义下成立：

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = -\operatorname{Re}(f_{\widetilde{M}_0}(\tilde{X})) \log |t|^2 + O(1)$$

（渐进展开式 2）

另外注意到在[Tian97]中，K-稳定性的利用 Ding-Tian-Futaki 不变量的定义，见文献阅读报告部分 2.4.6 节。我们可以利用 C.Li 的两个展开式和[Tian97]中对 K-稳定性的定义做一些分析：
从渐进展开式 2 的角度分析，K-稳定意味着 F 沿着任意 G 的单参数代数子群都是 proper 的，再有 Lemma3.2，我们知道整个问题事实上就等价为：

去证明可以从 F 沿 G 的任意单参数子群的恰当性推出 F 在 G 上的恰当性（注意后者正是对应 CM-稳定性的定义）。

再把 CM-稳定性定义代进去，正是在问 CM-稳定性是否与 K-稳定性等价？

第四步 证明 K-稳定性蕴含 CM-稳定性

既然这是一个代数问题，根据经典的 GIT 理论，我们分两步走，将 Fano 流形的 K-稳定性转化为 CM-稳定性。
第一步由如下 **Lemma3.3** 导出，它由[Tian15] Lemma6.5 给出，而其原始的更加偏向代数的版本则在[Pau12]和[Pau13]中给出。

Lemma 3.3
设 T 是 G 的任意一个极大代数 torus，如果 F 限制在 T 上是恰当的，则 M 是 CM-稳定的.

证明：

反证法，假设我们存在 G 中的一个序列$\sigma_i \in G$，使得 F(σ_i)保持有界而J(σ_i)发散到无穷。

设 G 的 Cartan 分解为 G=K * T * K，K = U(N+1).设 $\sigma_I = k_i\, t_i\, k_i'$，其中$k_i$, $k_i' \in$ K，$t_i \in$ T，则我们有 F($t_i k_i$) = F(σ_i)保持有界，而 J($t_i k_i$)=J(σ_i)发散到无穷。

但另一方面，由于每个k_i可以用一个单位矩阵表示，所以我们可以证明：

$$|\psi_{t_i} - \psi_{t_i k_i}| \le \log(N+1)$$

再利用事实 Ric($\omega_{\psi_{t_i}}$)和 Ric($\omega_{\psi_{t_i k_i}}$)有界，类似 Theorem 3.2 的讨论，我们还可以证明：

$$|\mathbf{F}(t_i) - \mathbf{F}(t_i k_i)| \le C$$

于是这说明 F(t_i)保持有界当 J(t_i)发散到无穷时，矛盾。

最后我们再证明 Theorem3.3，即可完成整个 Theorem3.1 的证明：

Theorem3.3

如果 Fano 流形 M 是 K-稳定的，则它是 CM-稳定的。

证明：

我们固定 M 到CP^N的度数为 d 利用$H^0(M, K_M^{-\ell})$的一个嵌入,由 **Lemma3.3**，我们等价于只需去证明 **F** 在一个极大代数 tortus T 包含于 G=SL(N+1,ℂ)上是恰当的。

下面我们先引入 **Chow 坐标**和 **M 的超判别式**的概念：

(1) Chow 坐标

设 G(N-n-1,N)为CP^N中所有 N-n-1 维子空间构成的格拉斯曼代数，设Z_M为 G(N-n-1,N)中的与 M 交非空的 P 构成的集合，则Z_M为 G 的一个不可约除子且决定了非零同质多项式$R_M \epsilon$C[$M_{(n+1)*(N+1)}$]，且在比例意义下唯一，次数为(n+1)d,则R_M为 M 的 Chow 坐标。

(2) M 的超判别式

先考虑 Segre 嵌入，其中$M^\vee_{n\times(N+1)}$表示$M_{n\times(N+1)}$的 dual 空间：

$$M \times \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^N \times \mathbb{C}P^{n-1} \mapsto \mathbb{P}(M^\vee_{n\times(N+1)})$$

我们再定义：

$$Y_M = \{H \subset \mathbb{P}(M^\vee_{n\times(N+1)}) \mid T_p(M \times \mathbb{C}P^{n-1}) \subset H \text{ for some } p\}$$

则Y_M是$\mathbb{P}(M^\vee_{n\times(N+1)})$的具有次数$n^2 d$ 的除子且决定了$\mathbb{C}[\mathrm{M}_{n\times(N+1)}]$中的一个同质多项式$\Delta_M$，也在比例意义下唯一，次数相同，则我们称$\Delta_M$为 M 的超判别式，记$\bar{d}$=$n^2 d$。

于是我们在这两个概念的基础上，下设：

$$r = (n+1)d\bar{d}, \quad \mathbf{V} = C_r[M_{(n+1)\times(N+1)}], \quad \mathbf{W} = C_r[M_{n\times(N+1)}],$$

同时我们再将 M 与$V\times W$中的对（R(M), $\triangle(M)$)关联，这里 R(M)=$R_M^{\bar{d}}$ 且 $\Delta_M=\Delta_M^{(n+1)d}$。另外再固定 V 和 W 上的范数，简单记为$||*||$，我们记：

$$p_{v,w}=\log\|w\|-\log\|v\|$$

则依据上述代数几何结构，S.Paul 依次给出了如下两个引理：

Lemma3.4

设 G 的自然左乘表示为：

$$(\sigma,B)\mapsto\sigma(B):\mathbf{G}\times\mathbf{gl}\mapsto\mathbf{gl}$$

这里 **gl** 表示所有$(N+1)\times(N+1)$矩阵，则我们有：

$$|\mathbf{J}(\sigma)-p_{R(M),I^r}(\sigma)|\le C.$$

其中 I 为 **gl** 中的单位矩阵且$I^r\in U=gl^{\otimes r}$.

Lemma3.5

设 V，W，和 U 如上记号，如果 F 在 T 上不恰当（resp.，G_0）,则[R(M), $\triangle(M)]\times[\text{R(M)},I^r]$在 T（resp.，$G_0$)的轨道存在极限点于（这里$G_0$表示的是单参数代数子群）：

$$(P(\mathbf{V})\times\mathbf{W})\times(\{0\}\times P(\mathbf{U}))$$

它正是如下代数簇的一个开子簇：

$$P(\mathbf{V}\oplus\mathbf{W})\times P(\mathbf{V}\oplus\mathbf{U}).$$

证明：

见[Pau12]或([Tian15],page1126~1127)

下面我们用 **Lemma3.5** 来证明 **Theorem3.3**：

反证，如果 M 不是 CM-稳定的，则存在$v\in$ V，w ∈ W，u ∈ U 使得 u，v 非 0，且$\bar{y}=[v,w]\times[0,u]$位于$x=[\text{R(M)},\triangle(M)]\times[\text{R(M)},I^r]$的 T-轨道的 closure 内。

下选取 T-不变的超平面$V_0\subset V$和$U_0\subset U$，它们可以自然的由使得$x\in E=V_0\times W\times V\times U_0$且$y\in E_0=V_0\times W\times\{0\}\times U_0$的P(V)\P($V_0$)和 P(U)\P($U_0$)确定。则显然有轨道 T$\cdot y$落在 E 中的闭子空间$E_0$中。我们可以不仿设 T$\cdot y$闭于$E_0$中（否则我们可以选取 T$\cdot y$中 closure 中的一条轨道），则由[Pau12]和[Tian13]中提及的一条 **Richardson** 的著名结果，存在一个单参数代数子群G_0，使得$G_0\cdot x$中的 closure 包含了一个E_0中的点，它正是如下集合的一个子集：

$$(P(\mathbf{V})\times\mathbf{W})\times(\{0\}\times P(\mathbf{U})).$$

最后由 **Lemma3.5**，这与 M 的 K-稳定性的条件（这里用的是 K-稳定性等价于 F 沿任意

单参数子群G_0恰当）矛盾。故 **Theorem3.3** 也成立。

于是联合 **Theorem3.2** 和 **Theorem3.3,**我们证明了光滑情形的 **Yau-Tian-Donaldson** 猜想。

第四章、凯勒-爱因斯坦度量存在性与 K-稳定性重要文献年表

最后，我们再给出一张 KE-度量存在性与 K-稳定性代数几何理论的部分重要文献的阅读文献年表，作为对这个领域一个简单的总结：

发表年份[3]	作者	论文索引	论文意义
1954 和 1957	E.Calabi	[Cal54] E. Calabi, The space of Kähler metrics, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam 2 (1954), pp. 206–207. [Cal57] E. Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class, in Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 78–89, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.	提出卡拉比猜想。
1957	Yozô Matsushima	[Mat57] Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J. 11 (1957), 145–150.	给出第一陈类为正时凯勒流形上存在 KE 度量的一个必要条件,即 Aut(X)必须为约化群。
1957	A.Lichnerowicz	[Lic58] A.Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformation, Travaux et Recherches Mathématiques3, Dunod (1958)	推广了 Matsushima 的结果，即如果第一陈类为正时凯勒流形存在常数量曲率的凯勒度量（cscK），那么李代数必须约化
1977	D. Mumford	[Mum77] D. Mumford, Stability of projective varieties, Enseignement Math. (2) 23 (1977), no. 1-2, 39–110	发展了 GIT 理论，提出了 Hilbert-Mumford 判别法。
1977	S.-T. Yau	[Yau77] Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. ：Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. ，1977： no. 5, 1798–1799	令 M 为紧致的凯勒（Kähler）流形，那么对其第一陈类中的任何一个（1，1）形式ω，都存在唯一的一个卡勒度量，其 Ricci 形式恰好是ω。特别的，由此推出第一陈类为 0 的情况的紧凯勒流形存在 KE 度量
1978	T. Aubin S.-T. Yau	[Yau78] On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampere equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31(1978),339-411. [AT78] *Equations du type Monge_Ampère* sur *les varietés kählerıennes compacts,* Bull.Sci.Math(2) **102** (1978),no. 1,63-95	证明了第一陈类为负时的紧凯勒流形存在凯勒爱因斯坦度量
1982	E.Calabi	[CE82] E.Calabi, Extremal Kähler metrics Seminar on Differential Geometry (S.T.Yau,ed.), Princeton, 1982.	引入了 extremal 度量的概念，将先前卡拉比猜想和第一陈类为负的情形考虑的紧凯勒流形上的某些有限制的 Kähler class 中的"最佳代表"度量(如卡

[3] 成果的实际推导出的年份可能数年的早于实际发表时间

			拉比猜想中存在的唯一的 Ricci 平坦度量)，推广到了考虑任意凯勒 class 中的“最佳代表”度量.
1983	Akito.Futaki	[FA83a] A.Futaki: An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math., 73(983), 437-443	定义了 Calabi-Futaki 积分不变量，给出第一陈类为正时凯勒流形上存在 KE 度量的另一个必要条件，即此积分不变量可视为一个李代数特征，它的消没(vanishing)则是存在的必要条件。
1983	Akito.Futaki	[FA83b]A.Futaki On compact Kähler manifolds of constant scalar curvatures Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59(8): 401-402 (1983). DOI: 10.3792/pjaa.59.401	进一步推广了[FA83a]中的结果，给出了任意一个 $b_1(M)=0$ 的紧复流形上的任意固定凯勒类中存在 cscK 的必要条件.
1984	Aubin, T	[Aub84] Aubin, T. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité. J. Funct. Anal. 57 (1984), no. 2, 143–153. doi:10.1016/0022-1236(84)90093-4	对第一陈类为正的情形的复蒙日安倍方程的连续线方法，证明了是开的。
1985 和 1986	Uhlenbeck, K. and Yau, S.T S.Donaldson,	[UY86] Uhlenbeck, K. and Yau, S.T.: On the Existence of Hermitian-Yang-Mills Connections on Stable Vector Bundles. Comm. Pure Appl. Math., 1986 [Do85] Donaldson, S.Anti-self-dual Yang-Mills Connections Over Complex Algebraic Surfaces and Stable Vector Bundles. Proc. London Math. Soc., 50, 1±26 (1985)	解决了 Hitchin-Kobayashi 猜想并将 Hermitian-Yang-Mills 度量的存在性与全纯向量丛的稳定性联系在了一起
1987	Gang Tian	[Tian87] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with C1(M) > 0, Invent. Math. 89 (1987), no. 2, 225–246.	定义了第一陈类为正的凯勒流形的α不变量，给出了著名的 α 不变量判定准则，即如果一个 n 维法诺流形 X 满足 α(X) >n/n+1，则其存在 KE 度量.
1988	W. Y. Ding	[Ding88] Remarks on the existence problem of positive Kähler-Einstein metrics, Math. Ann. 282 (1988), no. 3, 463-471	在推广了 Moser-Trudinger 不等式的基础上，定义了新的η不变量，给出了第一陈类为正的凯勒流形上 Kähler-Einstein 度量存在的新的充分判据

1990 和 1991	G. Tian, S.-T. Yau	[TY90] G. Tian, S.-T. Yau, Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 3, 579–609. [TY91] G. Tian, S.-T. Yau, Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II, Invent. Math. 106 (1991), no. 1, 27–60.	提出了 KE cone 度量序列收敛于一个完全 Calabi-Yau 度量于 X\D 上，D 为 Fano 流形上的光滑非典范除子
1990	G. Tian	[Tian90] G. Tian, Kähler–Einstein metrics on algebraic manifolds, Proc. of Int. Congress of Math., Kyoto, 1990, Vol. I, 587–598(1991). MR1159246, Zbl 0747.53038.	提出了偏零阶估计猜想，并逐步开始提出以偏零阶估计方法解决第一陈类为正情形的 KE 度量存在性问题的纲领，并指出了这种情形存在 KE 度量与几何稳定性有关系。
1990	Gang Tian	[Tian90]On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class,Invent.Math.101(1990),no.1,101-172	1.完全解决了复曲面情形的第一 Chern 类为正时的凯勒流形存在 KE 度量的问题，即自同构群必须为约化群。 2.引入了偏零阶估计技术，证明了偏零阶估计对一簇具有 KE 度量的复曲面成立。除此以外，还提出了偏零阶估计猜想，并指出了获得一族度量的 Bergman 核的一致控制是与光滑 Fano 流形上存在凯勒-爱因斯坦度量问题发生联系的关键，
1990	A. Fujiki	[Fuj90]Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics, Sugaku Expositions 5 (1992), no. 2,173-191	和[Don97]的工作发现凯勒度量的数量曲率能提升为一个无限维数的哈密顿作用的 moment map，也是后面 K-稳定性概提出的一个驱动力。
1990	Nadel, A	[Nad97] Nadel, A., "Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature", Ann. of Math. 132 (1990) 549-596	给出了 KE 度量的乘子理想层判定法。
1992	G.Tian and W.Ding	[DT92] Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant,Ding, Weiyue; Tian, Gang, Inventiones mathematicae, 12/1992, No 110.1	运用复结构的跳跃的方法，推广了 Futaki 不变量并给出了新的 KE 度量存在的必要条件
1997	S. Donaldson	[Don97] Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology, Fields Medallists' Lectures(Atiyah and Iagolnitzer, eds.), World Scientific, 1997,pp. 384-403	和[Fuj90]的工作发现凯勒度量的数量曲率能提升为一个无限维数的哈密顿作用的 moment map，作为后面 K-稳定性发展的一个动机。
1997	Gang Tian	[Tian97] Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 1–37.	1. 对非复曲面情形的 Fano 簇（即第一陈类为正的卡勒流形），存在 3 维的无全纯向量场的自同构群有限的例子，不存在凯勒-爱因斯坦度量。 2. 引入了 CM-线丛和 CM-稳定性的概念。 3. 首次引进了 K-稳定性的概念，并证明了光滑 Fano 流形上存在

			Kähler-Einstein 度量必须是 K-稳定的，提出了若干 K-稳定性与 KE 度量存在性的猜想。
1998	J. Kollár 和 S. Mori,	[KM98] J. Kollár and S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original.	引入了 klt 法诺簇，即 Q-法诺簇的概念
2001	I. Cheltsov	[Che01] I. Cheltsov, Log canonical thresholds on hypersurfaces, Mat. Sb. 192 (2001), no. 8, 155–172 (Russian, with Russian summary); English transl., Sb. Math. 192 (2001), no. 7-8,1241–1257.	给出了光滑超曲面全局对数典范 thresholds 的最佳下界，促进了法诺簇的 α-不变量的具体计算.
2002	Cheeger,J.;Colding, T. H.; G.Tian	[CCT02] Cheeger, J.; Colding, T. H.; Tian, G. On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature. Geom. Funct. Anal. 12 (2002), no. 5, 873–914. doi:10.1007/PL0001264	提出了 Cheeger-Colding- Tian 理论
2002	S. Donaldson	[Don02] S. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62 (2002), no. 2, 289–349.	给出了 Donaldson-Futaki 不变量，从而给出了一个 K-稳定性的代数几何定义，将 K-稳定性作为一个代数的概念推广到了相对更一般的极化射影簇上。
2003	G. Perelman	[Per03] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, math.DG/0211159	对哈密尔顿的凯勒-里奇做了改造，在奇点处通过手术的方式使得改造后的凯勒-里奇流能够长时克服奇点。并最终证明了庞加莱猜想。
2007	J. Ross and R. Thomas	[RT07] J. Ross and R. Thomas, A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties, J. Algebraic Geom 16 (2007), 201-255.	尝试利用有限维几何不变式的理论，即 GIT 的框架去理解 K-稳定性，特别的给出了代数曲线情形的稳定的几何证明。
2007	G.Tian. and X.H. Zhu	[TZ07] G.Tian. and X.H. Zhu, “Convergence of Kähler-Ricci flow”, J. Amer. Math. Soc. 20 (2007),no. 3, 675-699	给出了佩雷尔曼宣布的一个定理的证明。
2008	J. Kollár, Hulls and Husks	[Kol08] J. Kollár, Hulls and Husks, arXiv:0805.0576 (2008).	基于 KSB 模空间的局部理论，做出了 Kollár 条件的工作
2012	Donaldson, S.	[Don12]Donaldson,S. Stability, birational transformations and the Kähler-Einstein problem. Surveys in Differential Geometry, 17. International Press, Boston, 2012. doi:10.4310/SDG.2012.v17.n1.a5	给出了用锥 KE 度量的,但需预先假设没有光滑除子对偶于$2\pi c_1(M)$的一种连续线方法的框架
2012	Song Jian; Gang Tian	[TS12] Song, Jian; Tian Gang, CANONICAL MEASURES AND KÄHLER-RICCI FLOW, ,J. Amer. Math. Soc. 25 (04/2012),no. 2	提出了在一个具有正 Kodaira 维数的投影代数簇上寻找典范测度的纲领。且这个典范测度可以被视为一个双有理不变量并且诱导了典范模型上的一个典范奇异度量，推广了凯勒-爱因斯坦度量的概念。
2012	Y. Odaka and Y. Sano	[OS12] Y. Odaka and Y. Sano, Alpha invariant and K-stability of Q-Fano varieties, Adv. Math. 229 (2012), no. 5, 2818–2834.	证明了对有奇点的 Fano 流形，α不变量判定准则仍然适用.
2012	G.Tian	[Tian12] Tian, G. Existence of Einstein metrics on Fano manifolds. Metric and differential geometry, 119–159. Progress in Mathematics, 297. Birkhäuser/Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3- 0348-0257-4_5	给出了用于证明光滑 Fano 情形 YTD 猜想 Tian‘s program 的一个系统的总结，包括由 G.Tian 发展出的全纯不变量、K-稳定性、凯勒-爱因斯坦流形的紧性

			定理，偏零阶估计及它的变形.
2012	G.Tian and Wang.B	[WT12]G. Tian, G.; Wang, B. On the structure of almost Einstein manifolds. Preprint, 2012. arXiv:1202.2912 [math.DG]	研究了几乎爱因斯坦流形极限空间的结构，可以用于研究凯勒流形的结构。
2013	J. Alper	[Alp13] J. Alper, Good moduli spaces for Artin stacks, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63 (2013), no. 6, 2349–2402	以 GIT 映射为原型的基础，提出了 Artin 叠的好模空间的概念，如一个 Artin 叠的好模空间存在，则我们能更丰富的了解 Artin 叠上的几何信息。
2012 和 2013	Paul, S. T.	[Pau12] Paul, S. T. Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy asymptotics. Ann.of Math. (2) 175 (2012), no. 1, 255–296. doi:10.4007/annals.2012.175.1.7 [Pau12] Paul, S. T. A numerical criterion for K-energy maps of algebraic manifolds. Preprint, 2012.arXiv:1210.0924 [math.DG] [Pau13] Paul, S. T. Stable pairs and coercive estimates for the Mabuchi functional. Preprint, 2013.arXiv:1308.4377 [math.AG]	给出了可用于证明 K-稳定性推出 CM-稳定性的方法和结果
2013	G.Tian	[Tian13] Tian, G. Partial C0 -estimates for Kähler-Einstein metrics. Comm. Math. Stat. 1 (2013), no. 2, 105–113. doi:10.1007/s40304-013-0011-9	证明了对凯勒-爱因斯坦度量情形的偏零阶估计，证明方法利用了 Cheeger-Colding-Tian 理论的紧性定理和对$\bar{\partial}$算子的L^2估计。
2013	G . Tian and Z. Zhang	[TZ13]G. Tian and Z. Zhang, Regularity of Kähler-Ricci flows on Fano mainfolds,arXiv:1310.5897	证明了凯勒-里奇流上的部分C^0估计，给出了 3 维及其以下的 Fano 流形 YTD 猜想的新证明
2013	Y. Odaka 和 Yuji	[Oda13] Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via discrepancy, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 2, 645-661.	发现 K-稳定性与极小模型纲领（MMP）之间的联系，证明了极化射影代数簇的 GIT 半稳定性蕴含半对数典范（SLC）
2013	W. Jiang	[JW13] W. Jiang Bergman Kernel Along The Kähler Ricci Flow and Tian's Conjecture，arXiv:1311.0428	利用了[TZ13]的 Ricci 技术，证明了 3 维以下的偏零阶估计猜想
2014	Li, C.; Sun, S	[LS14] Li, C.; Sun, S. Conical Kähler-Einstein metrics revisited. Comm. Math. Phys. 331 (2014), no. 3, 927–973. doi:10.1007/s00220-014-2123-9	给出了具有锥角$2\pi\beta$的 conic 凯勒-爱因斯坦度量存在的一个充分条件是只需要$\mu = 1 - \lambda(1-\beta)$充分小，改进了唐纳森的连续线方法。
2014	C. Li and C. Xu	[LX14] Special test configuration and K-stability of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 1, 197–232.	正式引入了极小模型纲领 (MMP) 来研究法诺簇的退化及其和 K-稳定性的关系，同时也标志着高维双有理几何理论开始逐渐被引入发展 Fano 簇的 K-稳定性代数理论和代数几何理论。
2015	Gang Tian	[Tian15] K-stability and Kähler-Einstein metrics, Comm. Pure Appl. Math. 68 (2015), no. 7, 1085–1156.	给出了光滑情形 YTD 猜想的一个证明
2015	X.Chen, S.Donaldson, and S. Sun	[CDS15] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun, Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities, II: Limits with cone angle less than 2π, III: Limits as cone angle approaches 2π and	给出了光滑情形 YTD 猜想的一个证明

		completion of the main proof., J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), no. 1, 183–197, 199–234, 235–278.	
2015	X.X. Chen, S. Sun, B. Wang	[CSW15] X.x. Chen, S. Sun, B. Wang, Kähler-Ricci flow, Kähler-Einstein metric, and K-stability, arXiv:1508.04397	使用凯勒里奇流的方法给出了光滑 YTD 定理的一个证明
2016	T. Hisamoto	[His16] T. Hisamoto, Stability and coercivity for toric polarizations, 1610.07998 (2016)	对自同构群非有限的法诺簇，引入了合理的约化一致 K-稳定性。
2016	Y. Odaka, C. Spotti, and S. Sun	[OSS16] Y. Odaka, C. Spotti, and S. Sun, Compact moduli spaces of del Pezzo surfaces and Kähler-Einstein metrics, J. Differential Geom. 102 (2016), no. 1, 127–172.	对于一类 KE 的 Del Pezzo 曲面证明了 Gromov–Hausdorff 可紧化性
2017	C. Jiang	[Jia17] C. Jiang, Boundedness of Q-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., arXiv:1705.02740 (2017).	证明了所有体积 (−KX) ^ n = V 的 n 维 K-半稳定法诺簇是有界的
2017	S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson	[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson, Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 67 (2017), no. 2, 743– 841.	给出了 Q-法诺簇一致 K-稳定性的定义.
2017、2019	K. Fujita 和 C. Li,	[Fuj19b] , A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties, J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 309–338. [Li17] C. Li, K-semistability is equivariant volume minimization, Duke Math. J. 166 (2017), no. 16, 3147–3218.	1. 定义了 β-不变量，给出了 Q-法诺簇 K-半稳定性的一个等价刻画，即当且仅当任除子赋值在 β-不变量作用下非负。 2. 对 Q-法诺簇的 K-稳定性，也给出了一个等价刻画，只需其中一类特殊的除子赋值在 β-不变量作用下为正
2017、2018	K. Fujita and Y. Odaka 和 H. Blum and M. Jonsson 分别引入	[FO18] K. Fujita and Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, Tohoku Math. J. 70 (2018), no. 4, 511-521. [BJ17] H. Blum and M. Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, arXiv:1706.04548 (2017).	1. 引入了 Q-法诺簇稳定域值 δ 不变量的概念 2. [BJ17]中还给出了 Q-法诺簇稳定域值 δ-不变量的另一种等价描述，并证明了它总被一个赋值取到。 3. 证明了 δ-不变量可以看作对于 | −Kx|Q 中基型除子的对数典范阈值的下界。
2018	C.Li	[Li18] C.Li, Minimizing normalized volumes of valuations, Math. Zeit. 289 (2018), no. 1-2, 491–513.	引入了 K-重稳定退化 X0 上奇点体积的概念.
2018	Y. Liu 加强了 K. Fujita 的命题。 。	[Fuj18] K. Fujita, Optimal bounds for the volumes of Kähler-Einstein Fano manifolds, Amer. J. Math. 140 (2018), no. 2, 391-414. [Liu18] Y. Liu, The volume of singular Kähler–Einstein Fano varieties, Compos. Math. 154 (2018), no. 6, 1131–1158.	证明了 K-重稳定法诺簇的退化 X0 上任意一点的体积满足约束
2018	I. Cheltsov and C. Shramov	[CS18] I. Cheltsov and C. Shramov, Kähler-Einstein Fano threefolds of degree 22, arXiv:1803.02774 (2018).	证明了一类特殊的 Fano threefolds 存在 KE 度量，其中证明方法上运用了有关法诺簇α-不变量的计算。
2018	C. Li, X. Wang, and C. Xu	[LWX18] C. Li, X. Wang, and C. Xu, Algebraicity of the metric tangent cones and equivariant K-stability, arXiv:1805.03393 (2018).	证明了每个 Artin 叠上的 S-等价类存在唯一极小元素
2018	R. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson	[BBJ18] R. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson, A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture, arXiv:1509.04561v2 (2018)	引入变分法的方法，动态证明了一类特殊情形的非光滑的（for twisted Kähler-Einstein currents）YTD 猜想

2018	J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth	[AHLH18] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, Existence of moduli spaces for algebraic stacks, arXiv:1812.01128 (2018)	给出了代数叠可以构造好模空间的一个充分必要条件。
2018	G. Codogni and Z. Patakfalvi	[CP18] G. Codogni and Z. Patakfalvi, Positivity of the CM line bundle for families of K-stable klt Fanos, arXiv:1806.07180 (2018).	对于 K-半稳定法诺簇对应的参数化的有限型 Artin 叠的任一个紧子空间 M，如果 M 上任意点对应的 K-重稳定的法诺簇是一致 K-稳定的，则该 Artin 叠的 Q-线丛也是充沛的。
2019	Y. Liu and Z. Zhuang	[LZ19] Y. Liu and Z. Zhuang, On the sharpness of Tian's criterion for K-stability, arXiv:1903.04719 (2019).	对有奇点的 Fano 流形，α不变量在等于$\frac{n}{n+1}$时，存在仅是半 K-稳定的例子。
2019	Y. Liu and C. Xu	[LX19] Y. Liu and C. Xu, K-stability of cubic threefolds, Duke Math. J. 168 (2019), no. 11, 2029–2073.	证明了P^4中三次超曲面是 K-(半, 重) 稳定，当且仅当它是 GIT-(半, 重) 稳定
2019	K. Ascher, K. DeVleming, and Y. Liu	[ADL19] K. Ascher, K. DeVleming, and Y. Liu, Wall crossing for K-moduli spaces of plane curves, arXiv:1909.04576 (2019).	系统的计算了平面曲线 (P^2, tC)，$(0 < t < \frac{3}{\deg(C)})$所有可能的模空间.
2019	C. Stibitz and Z. Zhuang	[SZ19] C. Stibitz and Z. Zhuang, K-stability of birationally superrigid Fano varieties, Compos. Math. 155 (2019), no. 9, 1845–1852.	对于双有理刚性的法诺簇，如果α不变量严格大于$\frac{1}{2}$则是 K-稳定的.
2019	K. Fujita	[Fuj19a] K-stability of Fano manifolds with not small alpha invariants, J. Inst. Math. Jussieu 18 (2019), no. 3, 519–530.	加强了[Tian87]中的α不变量判定准则到等号的情形
2019	K. Fujita	[Fuj19b] , A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties, J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 309–338.	给出了 Q-Fano 簇上一致-K 稳定性的 δ 不变量判定准则
2019	I. Cheltsov, Y. Rubinstein, and K. Zhang	[CRZ19] I. Cheltsov, Y. Rubinstein, and K. Zhang, Basis log canonical thresholds, local intersection estimates, and asymptotically log del Pezzo surfaces, Selecta Math. (N.S.) 25 (2019), no. 2, Art. 34, 36.	证明了 Q-法诺簇的稳定域值事实上等于一个微分几何量，Ricci 曲率下界。
2019	H. Blum and C. Xu	[BX19] H. Blum and C. Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 609–656.	1. 对 Q-法诺簇的 K-稳定性，也给出了一个更简洁的等价刻画，即只需任意除子赋值在 β-不变量作用下为正。 2. 证明了 K-半稳定的法诺簇的退化在 S-等价类的意义下唯一。
2019	H. Blum, Y. Liu, and C. Xu,	[BLX19] H. Blum, Y. Liu, and C. Xu, Openness of K-semistability for Fano varieties, arXiv:1907.02408 (2019)	1. 如果 Q-法诺簇的稳定阈值 $\delta(X) \le 1$，那么 $\delta(X)$ 总是被一个拟单项式赋值取到 2. 结合[Xu19] 最终证明了对于一族 Q-法诺簇，其纤维是 K-半稳定的部分构成一个开集
2019	C. Li, G. Tian, and F. Wang	[LTW19] C. Li, G. Tian, and F. Wang, The uniform version of Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties, arXiv:1903.01215 (2019).	证明了当考虑 Aut(X)为有限群的 (可带有奇点的) 法诺簇时，其上有 KE 度量，当且仅当 X 是一致 K-稳定的
2019	J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu	[ABHLX19] J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu, Reductivity of the automorphism group of K-polystable Fano varieties, arXiv:1906.03122 (2019).	证明了代数叠的可分好模空间的存在性.

2019	C. Li, X. Wang, and C. Xu	[LWX19] C. Li, X. Wang, and C. Xu, On the proper moduli spaces of smoothable Kähler-Einstein Fano varieties, Duke Math. J. 168 (2019), no. 8, 1387–1459	构造了 Q-Gorenstein 光滑的 K-半稳定的 Q-Fano 簇的 S-等价类的参数化，并证明了是一个好的模空间.
2019	C. Xu and Z. Zhuang	[XZ19] C. Xu and Z. Zhuang, On positivity of the CM line bundle on K-moduli spaces, arXiv:1912.12961 (2019).	1. 将[CP18]中一致稳定的条件要求推广到约化一致稳定的条件要求。 2. 证明了参数化所有可光滑化的 K-重稳定法诺簇的紧模空间是射影的
2019	C. Li	[Li19] C. Li, On equivariantly uniform stability and Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties, arXiv:1907.09399 (2019).	证明了一般法诺簇 X 上有 KE 度量,当且仅当 X 是约化一致 K-稳定（Aut(X)不一定要求有限），从而给出了一致 K-多重稳定的 Fano 簇存在 KE 度量。
2019	C. Xu	[Xu19] C. Xu, A minimizing Valuation is Quasi-monomial, to appear in Annals of Math., arXiv:1907.01114 (2019)	与[BLX19]中的工作一起证明了对于一族 Q-法诺簇，其纤维是 K-半稳定的部分构成一个开集。
2019	C. Birkar	[Bir19] C. Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 345–463.	证明了 Shokurov 有关 complements 有界性的猜测，并证明了特定一些类的 Fano 代数簇可以形成有界簇。
2020	X.X. Chen and B. Wang	[CW20] X.X. Chen, B. Wang SPACE OF RICCI FLOWS (II)—PART B: WEAK , J. differential geometry, 116 (2020) 1-123	证明了凯勒-Ricci 流在某种合适拓扑下的收敛性，并完全解决了偏零阶估计猜想.
2021	C.Xu, Y. Liu, Z. Zhuang	[XLZ21] C . Xu, Y. Liu, Z. Zhuang, Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability, arXiv.org/abs/2102.09405	解决了更高秩的有限生成猜想，证明了 K-多重稳定性与约化一致 K-稳定性（Aut(X)不一定要求有限）是等价的，从而最终证明了 K-重稳定的 Fano 簇存在 KE 度量，解决了一般情形的 log Fano 的 YTD 猜想。

（表格 1.1 KE 度量存在性问题与 K 稳定性重要文献与发展年表）

参考文献[4]

[Cal54] E. Calabi, The space of Kähler metrics, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam 2 (1954), pp. 206 - 207.

[Cal57] E. Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class, in Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 78 - 89, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[Tian00] Tian, G Canonical metrics in Kähler geometry, Lectures in mathematics ETH Zürich, 2000

[CL04] 陈维桓和李兴校 《黎曼几何引论(下册)》，陈维桓和李兴校编著，北京大学出版社，2004.1

[Tan10] 谭小江 《多复分析与复流形引论》，谭小江编著，北京大学出版社，2010.9

[Huy05] Daniel Huybrechts Complex Geometry, An Introduction, Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,2005

[Yau77] Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. ：Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. , 1977：no. 5, 1798 - 1799

[Yau78] On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampere equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31(1978),339-411.

[AT78] Equations du type Monge_Ampère sur les varietés kähleriennes compacts, Bull.Sci.Math(2) 102 (1978),no. 1,63-95

[Blo12] Z.Blocki, The Calabi-Yau theorem, Complex Monge-Ampère equations and geodesics in the space of Kähler metrics, Lecture Notes in Math., vol 2038,Springer, Heidelberg, 2012, pp.201-227

[Siu87] Y.T. Siu, Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics, DMV Seminar 8, Birkhäuser Verlag, Basel 1987

[PSS12] D.H.Phong, N.Sesum, J.Sturm, Complex Monge-Ampère equations, Surveys in differential geometry, vol. 17, Int. Press, Boston, MA, 2012, pp. 327-410

[CKNS85] Caffarelli, L; Kohn, J. J; Nirenberg, L ; Spruck, J The dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-ampère, and uniformaly elliptic, equations, Communications on pure and applied mathematics, 03/1985, 38-2,pp.209-252

[BT76] Bedford, Eric; Taylor, B.A, The dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation,Inventiones mathematicae, 02/1976, 37-1,pp.1-44

[Kol98]The Complex Monge-Ampère equation, Acta Math.180 (1998), no. 1, 69-117

[EGZ09] P.Eyssidieux,V. Guedj, and A.Zeriahi, Singular Kähler-Einstein metrics, J. Amer.Math.Soc. 22 (2009), no.3, 607-639

[Ham82] Three-manifolds with positive Ricci curvature, J.Differential Geom.17(1982),no.2,255-306

[Per03] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric

[4] 按一、二章中实际引用提到的文献出现的先后顺序排列，不完全包括第四章中的表格的所有文献.

applications, math.DG/0211159
[TS07] J.Song and G.Tian The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension, Invent. Math. 170(2007),no.3,609-653
[Mat57] Sur la structure du groupe d' homéomorphismes analytiques d' une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J. 11 (1957), 145 - 150.
[Lic58] A. Lichnerowicz,Géométrie des groupes de transformation, Travaux et Recherches Mathématiques3, Dunod (1958)
[MS39] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold,Ann. of Math. (2)40(1939), no. 2, 400 - 416.
[FA83a] A.Futaki: An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math., 73(983), 437-443
[FA83b] A.Futaki On compact Kähler manifolds of constant scalar curvatures
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59(8): 401-402 (1983). DOI: 10.3792/pjaa.59.401
[FA88] A.Futaki 1988,Book,Kähler-Einstein Metrics And Integral Invariants
[Tian97] Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 1 - 37.
[DT92] Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant,Ding, Weiyue; Tian, Gang, Inventiones mathematicae, 12/1992, No 110.1
[HG94] Principles of algebraic geometry, Wiley Classics Library,New York,1994
[Kol78] Kolodziej, S., "The complex Monge-Ampère equation", Acta Math. 180 (1998) 69-117
[TZ07] G.Tian. and X.H. Zhu, "Convergence of Kähler-Ricci flow", J. Amer. Math. Soc. 20 (2007),no. 3, 675-699
[Tian97] Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. 130 (1997), no. 1, 1 - 37.
[Tian87] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with C1(M) > 0,
Invent. Math. 89 (1987), no. 2, 225 - 246.
[LZ19] Y. Liu and Z. Zhuang, On the sharpness of Tian' s criterion for K-stability,
arXiv:1903.04719 (2019).
[Ding88] Remarks on the existence problem of positive Kähler-Einstein metrics, Math. Ann. 282 (1988), no. 3, 463-471
[OS12] Y. Odaka and Y. Sano, Alpha invariant and K-stability of Q-Fano varieties, Adv. Math.
229 (2012), no. 5, 2818 - 2834.
[Fuj19a] K-stability of Fano manifolds with not small alpha invariants, J. Inst. Math. Jussieu 18 (2019), no. 3, 519 - 530.
[XZ19] C. Xu and Z. Zhuang, On positivity of the CM line bundle on K-moduli spaces,
arXiv:1912.12961 (2019).
[Nad97] Nadel, A., "Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature", Ann. of Math. 132 (1990) 549-596

[DK01] Demailly, J.P. and J. Kollär, “Semi-continuity of complex singularity exponents and K¨ahlerEinstein metrics on Fano orbifolds”, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 34 (2001) 525-556
[Koh79] Kohn, J.J., “Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on weakly pseudo-convex domains: sufficient conditions”, Acta Math. 142 (1979) 79-122
[Siu95] Siu, Y.T., “The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi”, in Geometric Complex Analysis, Hayama (1995) 577-592, World Scientific
[Siu05] Siu, Y.T., “Multiplier ideal sheaves in complex and algebraic geometry”, arXiv: math.
AG/0504259.
[PSS07] Phong, D.H., N. Sesum, and J. Sturm, “Multiplier ideal sheaves and the K¨ahler-Ricci flow”, arXiv: math.DG/0611794, to appear in Commun. Anal. Geom. (2007)
[PSS09] Phong, D.H., J. Song, J. Sturm, and B. Weinkove, “The Kähler-Ricci flow and the $\bar{\partial}$operator on vector fields”, arXiv: math 07054048 [math.DG]
[Do85] Donaldson, S.Anti-self-dual Yang-Mills Connections Over Complex Algebraic Surfaces and Stable Vector Bundles. Proc. London Math. Soc., 50, 1±26 (1985)
[UY86] Uhlenbeck, K. and Yau, S.T.: On the Existence of Hermitian-Yang-Mills Connections on Stable Vector Bundles. Comm. Pure Appl. Math., 1986
[MS98] D.McDuff 和 D. Salamon, Introduction to symplectic topology, OUP, 1998
[Tho06] R. P. Thomas, Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties, Surveys in dierential geometry. Vol. X, 221 - 273, Surv. Dier. Geom., 10, Int. Press, Somerville, MA, 2006.
[Mum77] D. Mumford, Stability of projective varieties, Enseignement Math. (2) 23 (1977), no. 1-2, 39 - 110
[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, Third edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[Don97] S. K. Donaldson, Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology, in Fields Medallists’ lectures, 384 - 403, World Sci. Ser. 20th Century Math., 5, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
[Fuj90] A. Fujiki, Moduli space of polarized algebraic manifolds and Kähler metrics [translation of Sûgaku 42 (1990), no. 3, 231 - 243], Sugaku Expositions 5 (1992), no. 2, 173 - 191
[RT07] J. Ross, R. Thomas, A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties, J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 2, 201 - 255.
[Sz14] G. Székelyhidi, An introduction to extremal Kähler metrics, Graduate Studies in Mathematics, 152, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
[SA17] Daniele Angella and Cristiano Spotti ,Kähler-Einstein metrics: Old and New, Complex Manifolds, 2017; 4: 200 - 244
[TS12] Song, Jian; Tian Gang, CANONICAL MEASURES AND KÄHLER-RICCI FLOW, ,J. Amer. Math. Soc. 25 (04/2012),no. 2

[Tian12] Tian, G. Existence of Einstein metrics on Fano manifolds. Metric and differential geometry, 119–159. Progress in Mathematics, 297. Birkhäuser/Springer, Basel, 2012. doi:10.1007/978-3- 0348-0257-4_5
[WT12]G. Tian, G.; Wang, B. On the structure of almost Einstein manifolds. Preprint, 2012. arXiv:1202.2912 [math.DG]
[Tian15] K-stability and Kähler-Einstein metrics, Comm. Pure Appl. Math. 68 (2015), no. 7, 1085–1156.
[CDS15] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun, Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities, II: Limits with cone angle less than 2π, III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof., J. Amer. Math. Soc. 28 (2015), no. 1, 183–197, 199–234, 235–278.
[Aub84] Aubin, T. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité. J. Funct. Anal. 57 (1984), no. 2, 143–153. doi:10.1016/0022-1236(84)90093-4
[CW20] X.X. Chen, B. Wang SPACE OF RICCI FLOWS (II)—PART B: WEAK , J. differential geometry, 116 (2020) 1-123
[Don12] Donaldson, S. Stability, birational transformations and the Kähler-Einstein problem. Surveys in Differential Geometry, 17. International Press, Boston, 2012. doi:10.4310/SDG.2012.v17.n1.a5
[Tian90] G. Tian, Kähler–Einstein metrics on algebraic manifolds, Proc. of Int. Congress of Math., Kyoto, 1990, Vol. I, 587–598(1991). MR1159246, Zbl 0747.53038.
[Tian12] G. Tian, Existence of Einstein metrics on Fano manifolds, Metric and differential geometry: The Jeff Cheeger Anniversary volume, X. Dai and X. Rong, edt., Prog. Math., 297:119–159, 2012. MR3220441, Zbl 1250.53044.
[Jiang40] W.S. Jiang, Bergman Kernel along the K¨ahler Ricci flow and Tian's conjecture, J. Reine Angew. Math., 717:195–226, 2016. MR3530538, Zbl 1345.53069.
[CW12a] X.X. Chen, B. Wang, Space of Ricci flows (I), Comm. Pure Appl. Math., 65(10):1399–1457, 2012. MR2957704, Zbl 1252.53076.
[CW12b] X.X. Chen, B. Wang, Kähler Ricci flow on Fano manifolds(I), J. Eur. Math. Soc., 14(6):2001–2038, 2012. MR2984594, Zbl 1257.53094
[TZ16] G. Tian, Z.L. Zhang, Regularity of Kähler Ricci flows on Fano manifolds, Acta Math., 216(1):127–176, 2016. MR3508220, Zbl 1356.53067.
[Don12] Donaldson, S. Stability, birational transformations and the Kähler-Einstein problem. Surveys in Differential Geometry, 17. International Press, Boston, 2012. doi:10.4310/SDG.2012.v17.n1.a5
[TY90] Tian, G.; Yau, S.-T. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I. J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 3, 579–609. doi:10.2307/1990928
[LS14] Li, C.; Sun, S. Conical Kähler-Einstein metrics revisited. Comm. Math. Phys. 331 (2014), no. 3, 927–973. doi:10.1007/s00220-014-2123-9
[RJ11] Jeffres, T. D.; Mazzeo, R.; Rubinstein, Y. Kähler-Einstein metrics with edge singularities. Preprint, 2011. arXiv:1105.5216 [math.DG]
[Ber13] Berman, R. J. A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations,

MoserTrudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics. Adv. Math. 248 (2013), 1254 - 1297. doi:10.1016/j.aim.2013.08.024
[CCT02] Cheeger, J.; Colding, T. H.; Tian, G. On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature. Geom. Funct. Anal. 12 (2002), no. 5, 873 - 914. doi:10.1007/PL0001264
[Che01] J. Cheeger, Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds, Lezioni Fermiane, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2001.
[Pau12] Paul, S. T. Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy asymptotics. Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 1, 255 - 296. doi:10.4007/annals.2012.175.1.7
[DS16] V. Datar, G. Székelyhidi, Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method, Geom. Funct. Anal. 26 (2016), no. 4, 975 - 1010.
[CSW15] X.x. Chen, S. Sun, B. Wang, Kähler-Ricci flow, Kähler-Einstein metric, and K-stability, arXiv:1508.04397
[Dem17] J.-P. Demailly, Variational approach for complex Monge-Ampère equations and geometric applications, Séminaire Bourbaki, Exposé 1112, Astérisque 390 (2017), 245 - 275
[BBJ15] R. Berman, S. Boucksom, M. Jonsson, A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture, arXiv:1509.04561
[Xu19*] 法诺簇的代数 K-稳定性理论
[Oda13] Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via discrepancy, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 2, 645-661.
[LX14] C. Li and C. Xu, Special test configuration and K-stability of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 180 (2014), no. 1, 197 - 232.
[Li17] C. Li, K-semistability is equivariant volume minimization, Duke Math. J. 166 (2017), no. 16, 3147 - 3218
[Fuj19b] , A valuative criterion for uniform K-stability of Q-Fano varieties, J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 309 - 338.
[FO18] K. Fujita and Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, Tohoku Math. J. 70 (2018), no. 4, 511-521
[KM98] J. Kollár and S. Mori, Birational geometry of algebraic varieties, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original
[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson, Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 67 (2017), no. 2, 743 - 841.
[Ding88] Remarks on the existence problem of positive Kähler-Einstein metrics, Math. Ann. 282 (1988), no. 3, 463-471
[Li17] C. Li, K-semistability is equivariant volume minimization, Duke Math. J. 166 (2017), no. 16, 3147 - 3218.
[Li18] C. Li,, Minimizing normalized volumes of valuations, Math. Zeit. 289 (2018), no. 1-2, 491 - 513.
[LTW19] C. Li, G. Tian, and F. Wang, The uniform version of Yau-Tian-Donaldson

conjecture for singular Fano varieties, arXiv:1903.01215 (2019).

[MN15] Mircea Mustaţă and Johannes Nicaise, Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton, Algebr. Geom. 2 (2015), no. 3, 365–404.

[CRZ19] I. Cheltsov, Y. Rubinstein, and K. Zhang, Basis log canonical thresholds, local intersection estimates, and asymptotically log del Pezzo surfaces, Selecta Math. (N.S.) 25 (2019), no. 2, Art. 34, 36.

[Szé11] G. Székelyhidi, Greatest lower bounds on the Ricci curvature of Fano manifolds, Compos. Math. 147 (2011), no. 1, 319–331.

[His16] T. Hisamoto, Stability and coercivity for toric polarizations, 1610.07998 (2016)

[XZ19] C. Xu and Z. Zhuang, On positivity of the CM line bundle on K-moduli spaces, arXiv:1912.12961 (2019).

[BJ17] H. Blum and M. Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, arXiv:1706.04548 (2017)

[AHLH18] J. Alper, D. Halpern-Leistner, and J. Heinloth, Existence of moduli spaces for algebraic stacks, arXiv:1812.01128 (2018).

[ABHLX19] J. Alper, H. Blum, D. Halpern-Leistner, and C. Xu, Reductivity of the automorphism group of K-polystable Fano varieties, arXiv:1906.03122 (2019).

[BX19] H. Blum and C. Xu, Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 609–656.

[XLZ21] C. Xu, Y. Liu, Z. Zhuang, Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability, arXiv.org/abs/2102.09405

[Jia17] C. Jiang, Boundedness of Q-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., arXiv:1705.02740 (2017)

[Bir19] C. Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, Ann. of Math. (2) 190 (2019), no. 2, 345–463.

[Kol08] J. Kollár, Hulls and Husks, arXiv:0805.0576 (2008)

[访谈 21]北京国际数学研究中心 BICMR 公众号文章《许晨阳等三位校友解决了 Fano 簇上 K-稳定性的重大问题》

[JMR11] Jeffres, T. D.; Mazzeo, R.; Rubinstein, Y. Kähler-Einstein metrics with edge singularities. Preprint, 2011. arXiv:1105.5216 [math.DG]

[Pau12] Paul, S. T.
Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy asymptotics.
Ann.of Math. (2) 175 (2012), no. 1, 255–296. doi:10.4007/annals.2012.175.1.7

[Pau12] Paul, S. T. A numerical criterion for K-energy maps of algebraic manifolds. Preprint, 2012.arXiv:1210.0924 [math.DG]

[Pau13] Paul, S. T. Stable pairs and coercive estimates for the Mabuchi functional. Preprint, 2013.arXiv:1308.4377 [math.AG]

[Li12] Li, C. Kähler-Einstein metrics and K-stability. Thesis, Princeton University, 2012

[Tian13] Tian, G. Stability of pairs. Preprint, 2013. arXiv:1310.5544 [math.DG]