达布中值定理的一个推广

田晨霄

Chenxiao Tian

2022 年 10 月 29 日

摘要

通过“导数”关于C^1切向量场的延伸定义——李导数，结合单参数变换群的性质，将原始的Darboux中值定理推广到定义在n维光滑流形上的一类性质不佳的函数上，并在此推广的基础上，结合曲面动力系统的一些性质，得到光滑闭曲面上的一类连续函数的性质。

1 Darboux中值定理

在最开始，先陈述原始的Darboux中值定理：

定理：实数$a<b$，实函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，并且f在区间端点处单侧导数存在，分别为$f'(a)$与$f'(b)$，若$f'(a)\neq f'(b)$，那么对于任意严格介于$f'(a)$与$f'(b)$之间的实数C，存在$c\in(a,b)$，使得$f'(c)=C$.

最初在书上见到此定理的时候，它的证明方法让我感到不是特别自然与简单，后面是发现Rudin的书上证法十分巧妙与易懂，而这个思想大概也是我的整个推广的出发点。他的证明如下：

不妨设$f'(a)<C<f'(b)$，那么存在正数$\delta<b-a$，使得$\dfrac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}<C<\dfrac{f(b)-f(b-\delta)}{\delta}$，然后定义函数$F(x)=\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$，则$F(x)$在$[a,b-\delta]$上连续，$F(a)<C<F(b-\delta)$，那么存在$c'\in(a,b-\delta)$，使得$F(c')=C$，那么由拉格朗日中值定理，存在$c\in(c',c'+\delta)$，有$C=f'(c)$.

2 n维光滑流形上的李导数版本Darboux中值定理

由常微分方程的理论，n维光滑流形M上C^1切向量场X会在每个点的某个领域生成局部的流，也即局部单参数变换群，那么在每个点(比如p点)都可以定义关于X的李导数：

由X生成并经过点p的流为$\varphi_t(p),|t|<\varepsilon,\varphi_0(p)=p$，则对于$M$上的实函数$f$，如果极限

$$lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(p))-f(p)}{t} \tag{2.1}$$

存在，则称该极限为f在p处关于X的李导数，并将其记为$\mathscr{L}_X f(p)$.

这里有个小插曲，首先上面这个定义是建立在如下事实上的：

设X生成的两个局部单参数变换群φ_t,ϕ_t分别作用在开子集U和V上，且$p\in U\cap V$，那么存在$\varepsilon>0$，使得

$$\varphi_t(p)=\phi_t(p),\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon) \tag{2.2}$$

而这个事实有不同的办法去验证，我当时是知道了$Whitney$嵌入定理之后，将M用光滑映射F嵌入欧式空间E^{2n+1}中成为嵌入子流形$\widetilde{M}$，然后X也变为欧式空间中“看得见，摸得着”的$\widetilde{M}$的切向量场$\widetilde{X}$，然后$\varphi_t(p)$，$\phi_t(p)$分别变为$\widetilde{\varphi}_t(F(p))$，$\widetilde{\phi}_t(F(p))$.因为$\widetilde{M}$为嵌入子流形，那么存在一个$F(p)$在$E^{2n+1}$中的开邻域$\widetilde{W}$，使得存在一个光滑同胚$G$将$\widetilde{W}$变为$E^{2n+1}$中的开集$\hat{W}$，并且$W=\widetilde{M}\cap\widetilde{W}$被$G$变为

$$W_1=\{q=(x_1,...,x_{2n+1})\in\hat{W}|x_v=0,n+1\leq v\leq 2n+1\} \tag{2.3}$$

则$\widetilde{X}|_W$在G的作用下变成了W_1上的切向量场$\hat{X}$，由W_1的性质可以知道

$$\hat{X}(q)=(\hat{X}_1(q),...,\hat{X}_n(q),0,...,0)\in E^{2n+1},\forall q\in W_1 \tag{2.4}$$

我们现在将$\hat{X}$扩充成$\hat{W}$上的C^1切向量场$\hat{X}_1$：$\forall Q=(y_1,...,y_n,...,y_{2n+1})\in\hat{W},q=(y_1,...,y_n,0,...,0)$

$$\hat{X}_1(Q)=\hat{X}(q)\in E^{2n+1} \tag{2.5}$$

那么可以发现$\hat{X}_1$即是$\hat{X}$的增厚。利用G^{-1}，$\hat{X}_1$被变为$\widetilde{W}$上的C^1切向量场$\widetilde{X}_1$，并且$\widetilde{X}_1|_W=\widetilde{X}|_W$.而在$s$足够小，比如$|s|<\varepsilon$时

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_t(F(p))|_{t=s}=\widetilde{X}(\widetilde{\varphi}_s(F(p)))=\widetilde{X}_1(\widetilde{\varphi}_s(F(p))) \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_t(F(p))|_{t=s}=\widetilde{X}(\widetilde{\phi}_s(F(p)))=\widetilde{X}_1(\widetilde{\phi}_s(F(p))) \tag{2.7}$$

那么此时$\widetilde{\varphi}_t(F(p))$与$\widetilde{\phi}_t(F(p))$均为$\widetilde{X}_1$生成的经过$F(p)$的流，则由常微分方程初值问题解的存在唯一性，有

$$\widetilde{\varphi}_s(F(p))=\widetilde{\phi}_s(F(p)),\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon) \tag{2.8}$$

那么再借由F^{-1}，得到

$$\varphi_s(p)=\phi_s(p),\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon) \tag{2.9}$$

至此，该事实验证完毕。

现在先证明一个较简单的定理，这个定理可由$Darboux$中值定理直接得到：

定理1：n维光滑流形M上有一个C^1切向量场X，在$p\in M$的开邻域U生成的局部单参数变换群为$\varphi:(-\delta,\delta)\times U\to M$，经过$p$的流为$\varphi_t(p)$，$\varphi_0(p)=p$，并且$|t|<\varepsilon$时，$\varphi_t(p)\in U$，其中$\varepsilon<\delta$.另一方面$f:M\to\Re$为$M$上实函数，并且$\forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$f$在$\varphi_t(p)$处的李导数$\mathscr{L}_Xf(\varphi_t(p))$都存在，那么任意给定$r,s\in(-\varepsilon,\varepsilon),r<s$，若$\mathscr{L}_Xf(\varphi_r(p))=A\neq B=\mathscr{L}_Xf(\varphi_s(p))$，则$\forall C\in\Re$严格介于$A$与$B$之间，都存在$c\in(r,s)$，使得$\mathscr{L}_Xf(\varphi_c(p))=C$.

证明：令$g(t)=f(\varphi_t(p)),t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}g'(t)&=\lim_{\sigma\to 0}\frac{g(t+\sigma)-g(t)}{\sigma}\\&=\lim_{\sigma\to 0}\frac{f(\varphi_{t+\sigma}(p))-f(\varphi_t(p))}{\sigma}\\&=\lim_{\sigma\to 0}\frac{f(\varphi_\sigma(\varphi_t(p)))-f(\varphi_t(p))}{\sigma}\\&=\mathscr{L}_Xf(\varphi_t(p))\end{aligned} \tag{2.10}$$

则$g(t)$在$(-\varepsilon,\varepsilon)$可导（从而也是连续的），那么在$r,s$处的单侧导数自然是存在且等于$\mathscr{L}_Xf(\varphi_r(p))$以及$\mathscr{L}_Xf(\varphi_s(p))$，由$Darboux$中值定理，对于严格介于$A,B$之间的$C$，存在$c\in(r,s)$，使得$C=g'(c)=\mathscr{L}_Xf(\varphi_c(p))$.

定理1实际与原本的$Darboux$中值定理并无太大差别，并且**定理1**实际并未要求f的连续性，也不清楚f的任何整体性质。而我的重点之一便是如下的**定理2：**

定理2：X是n维光滑流形M上的一个C^1切向量场，$f: M \to \Re$为M上的连续实函数，并且满足$\forall p \in M, \mathscr{L}_X f(p)$都存在.现在取定$M$上两个点$a, b$，它们满足

$$\mathscr{L}_X f(a) = A < B = \mathscr{L}_X f(b) \tag{2.11}$$

另一方面$\phi: Y \to M$为一个列紧且连通的拓扑空间Y到M的连续映射，并且$a, b \in \phi(Y)$，任取$C \in (A, B)$，记集合$\{p \in M | \mathscr{L}_X f(p) = C\}$为$\mathscr{L}_C$，则有以下结论：

$$\begin{aligned} &(1)\mathscr{L}_C \neq \emptyset \\ &(2)\phi(Y) \cap \bar{\mathscr{L}}_C \neq \emptyset \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中$\bar{\mathscr{L}}_C$是$\mathscr{L}_C$的闭包.

证明：首先，对于每个$s \in Y, \phi(s)$都存在一个邻域U_s以及一个局部单参数变换群

$$\varphi^{(s)}: (-\varepsilon_s, \varepsilon_s) \times U_s \to M \tag{2.13}$$

利用$\varphi^{(s)}$的连续性，可以得到$\phi(s)$存在一个开邻域$V_s \subset U_s$以及一个正数$\delta_s \leq \varepsilon_s$，使得$\varphi^{(s)}((-\delta_s, \delta_s) \times V_s) \subset U_s$也即以$V_s$中的点作为起点，“前后”走$\delta_s$时间都不会离开$U_s$.

因为ϕ的连续性，我们注意到$\phi(Y)$为M中的自列紧集，而M是度量空间（可由$Whitney$嵌入定理看出），那么$\phi(Y)$实际上是M中的紧集，并且$\bigcup\limits_{s \in Y} V_s$构成它的一个开覆盖，则存在有限子覆盖$\phi(Y) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} V_{s_k}$($m$为一正整数)，并记$\delta_0 = min\{\delta_{s_1}, ..., \delta_{s_m}\}$.

$\forall s \in Y$，存在$i \in \{1, ..., m\}$，使得$\phi(s) \in V_{s_i} \subset U_{s_i}$，那么$\varphi_t^{(s_i)}(\phi(s)) \in U_{s_i}, \forall t \in (-\delta_0, \delta_0)$.而由之前的事实可知，如果有另一个$j \in \{1, ..., m\}$，使得$\phi(s) \in V_{s_j} \subset U_{s_j}$，那么$\varphi_t^{(s_i)}(\phi(s)) = \varphi_t^{(s_j)}(\phi(s)), \forall t \in (-\delta_0, \delta_0)$.

$\forall s \in Y$，先找到一个$i \in \{1, ..., m\}$，使得$\phi(s) \in V_{s_i} \subset U_{s_i}$，因为$\varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(s)), \delta \in (-\delta_0, \delta_0)$与$i$的选取无关，于是我们可以良好定义一个映射$\varphi: (-\delta_0, \delta_0) \times Y \to M$，满足$\varphi(\delta, s) = \varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(s))$.

我们现在证明φ是连续映射：任意选定$\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$以及$s \in Y$，$\phi(s) \in V_{s_i} \subset U_{s_i}$，因$\varphi^{(s_i)}: (-\varepsilon_{s_i}, \varepsilon_{s_i}) \times U_{s_i} \to M$为连续映射，对于点$\varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(s))$的任意开邻域$U$有${\varphi^{(s_i)}}^{-1}(U)$为$(-\varepsilon_{s_i}, \varepsilon_{s_i}) \times U_{s_i}$中点$(\delta, \phi(s))$的开邻域，那么存在$\sigma_0 > 0, (\delta - \sigma_0, \delta + \sigma_0) \subset (-\delta_0, \delta_0) \subset (-\varepsilon_{s_i}, \varepsilon_{s_i})$，以及$\phi(s)$在$V_{s_i}$内的开邻域$V \subset V_{s_i} \subset U_{s_i}$，使得

$$(\delta - \sigma_0, \delta + \sigma_0) \times V \subset {\varphi^{(s_i)}}^{-1}(U) \tag{2.14}$$

也即有$\varphi^{(s_i)}_{(\delta-\sigma_0, \delta+\sigma_0)}(V) \subset U$.

又因为V为$\phi(s)$开邻域，则存在s在Y中的开邻域$\widetilde{V}$，使得$\forall t \in \widetilde{V}$，都有$\phi(t) \in V$.那么对于点$(\delta, s)$在$(-\delta_0, \delta_0) \times Y$中的开邻域$W = (\delta - \sigma_0, \delta + \sigma_0) \times \widetilde{V}$，$\forall (\widetilde{\delta}, \widetilde{s}) \in W$，都有$\varphi(\widetilde{\delta}, \widetilde{s}) = \varphi_{\widetilde{\delta}}^{(s_i)}(\phi(\widetilde{s})) \in U$，则$W \subset \varphi^{-1}(U)$，则$\varphi$在$(\delta, s)$处连续，这也意味着$\varphi$在$(-\delta_0, \delta_0) \times Y$上连续.

现在我们可以定义一类连续函数$g^{(\delta)}: Y \to \Re, \delta \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$：

$$g^{(\delta)}(s) = \frac{f(\varphi(\delta, s)) - f(\phi(s))}{\delta} = \frac{f(\varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(s))) - f(\phi(s))}{\delta} \tag{2.15}$$

因为$a, b \in \phi(Y)$，那么存在$\alpha, \beta \in Y$，使得$a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$.由定义可知有如下成立：

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \to 0} g^{(\delta)}(\alpha) = \mathscr{L}_X f(a) = A < C \\ &\lim_{\delta \to 0} g^{(\delta)}(\beta) = \mathscr{L}_X f(b) = B > C \end{aligned} \tag{2.16}$$

那么存在$\delta_1 \in (0,\delta_0)$，使得$g^{(\delta)}(\alpha) < C, g^{(\delta)}(\beta) > C, \forall \delta \in (0,\delta_1)$.

由于$g^{(\delta)}, (\delta \in (-\delta_0,\delta_0) \setminus \{0\})$是连续映射，那么$g^{(\delta)}(Y)$是连通集，那么在$\delta \in (0,\delta_1)$时，存在$r_\delta \in Y$，使得$g^{(\delta)}(r_\delta) = C$，即

$$\frac{f(\varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(r_\delta))) - f(\phi(r_\delta))}{\delta} = C \tag{2.17}$$

其中$\phi(r_\delta) \in V_{s_i} \subset U_{s_i}$.

定义函数$h^{(\delta)}(t) = f(\varphi_t^{(s_i)}(\phi(r_\delta)))(-\delta_0 < t < \delta_0)$，进行与**定理1**中相同讨论可知其可导，且$h^{(\delta)\prime}(t) = \mathscr{L}_X f(\varphi_t^{(s_i)}(\phi(r_\delta)))$，那么由拉格朗日中值定理，存在$t_\delta \in (0,\delta)$使得

$$C = \frac{f(\varphi_\delta^{(s_i)}(\phi(r_\delta))) - f(\phi(r_\delta))}{\delta} = \frac{h^{(\delta)}(\delta) - h^{(\delta)}(0)}{\delta} = h^{(\delta)\prime}(t_\delta) = \mathscr{L}_X f(\varphi_{t_\delta}^{(s_i)}(\phi(r_\delta))) \tag{2.18}$$

这便意味着$\varphi_{t_\delta}^{(s_i)}(\phi(r_\delta)) \in \mathscr{L}_C$，即有$\mathscr{L}_C \neq \emptyset$，结论(1)成立.

对于结论(2)，我们已经知道$(t_\delta, r_\delta) \in [0,\delta] \times Y$，而且由于$Y$为列紧的拓扑空间，$[0,\delta] \times Y$也为列紧的拓扑空间，也是$[0,\delta_1] \times Y$中的自列紧集.现在取一列单调递减的正数序列$\{\delta^n\}_{n=1}^{+\infty}$，满足$\delta^n \in [0,\delta_1](\forall n \geq 1), \delta^n \to 0(n \to +\infty)$.那么一方面$\{(t_{\delta^n}, r_{\delta^n})\}_{n=1}^{+\infty}$在$[0,\delta_1] \times Y$中有聚点$(\widetilde{t}, \widetilde{r})$，而另一方面由$(t_{\delta^n}, r_{\delta^n})$的取法可知，当$m \geq n$时，都有$(t_{\delta^m}, r_{\delta^m}) \in [0,\delta^n] \times Y$.由于每一个$[0,\delta^n] \times Y$都是$[0,\delta_1] \times Y$中的闭集，则有$(\widetilde{t}, \widetilde{r}) \in [0,\delta^n] \times Y(\forall n \geq 1)$，也即$(\widetilde{t}, \widetilde{r}) \in \bigcap\limits_{n \geq 1} ([0,\delta^n] \times Y) = \{0\} \times Y$，于是有$\widetilde{t} = 0$.而在连续映射$\varphi$下，$\varphi(0,\widetilde{r})$也为$\{\varphi(t_{\delta^n}, r_{\delta^n})\}_{n=1}^{+\infty}$的聚点.终于在最后，因为

$$\begin{aligned} &\varphi(t_{\delta^n}, r_{\delta^n}) = \varphi_{t_{\delta^n}}^{(s_i)}(\phi(r_{\delta^n})) \in \mathscr{L}_C \quad (\phi(r_{\delta^n}) \in V_{s_i} \subset U_{s_i}) \\ &\varphi(\widetilde{t}, \widetilde{r}) = \varphi(0,\widetilde{r}) \in \phi(Y) \end{aligned} \tag{2.19}$$

那么$\varphi(0,\widetilde{r}) \in \phi(Y) \cap \bar{\mathscr{L}}_C$，则结论(2)成立.

（**注1**：**定理2**中Y可以取成单位闭区间，那么$\phi(Y)$便成了M上连接a,b的一条道路.这个简单一些的结论会在后面的定理证明用到.）

（**注2**：结论(2)中的$\bar{\mathscr{L}}_C$不能减弱为$\mathscr{L}_C$，否则会有反例，典型的如下：

在$\Re^2$上，连续函数f在极坐标下为$f(r,\theta) = r \cdot sin2\theta$，在直角坐标系下为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2.20}$$

$\Re^2$上切向量场X处处都是$(0,1)$，那么$\mathscr{L}_X f$实际上就是$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.考虑点$a = (-\dfrac{1}{2}, 0), b = (\dfrac{1}{2}, 0)$还有道路$\phi(t) = (t - \dfrac{1}{2}, 0), t \in [0,1]$，首先在$(x,0)$处，

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x,0)} = \begin{cases} 2 & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -2 & ,x < 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

那么虽然有$\dfrac{\partial f}{\partial y}|_b = 2 > 1 > -2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}|_a$，但是考虑集合$\mathscr{L}_1$，便有$\mathscr{L}_1 \cap \phi([0,1]) = \emptyset$.）

3 光滑闭曲面上一些连续函数的李导数

之前的都是在一般的光滑流形上进行讨论，现在我想把对象锁定在光滑闭曲面上（光滑的紧致无边且连通的二维流形），至于原因，可能主要在于：

(1)紧致的流形上，C^1切向量场生成的是单参数变换群而不仅仅是局部单参数变换群，这样可以讨论一些长时间行为；

(2)微分动力系统在三维以及以上的空间很容易出现混沌现象，我实际上对混沌不是很了解，不过我也看到有证明三维版本的$Poincare-Bendixson$定理，但是似乎需要了解叶状结构，也超出了我目前的知识范围.

我最先考虑的是球面S^2，因为$Poincare-Hopf$定理，球面上的切向量场一定有奇点，然后围绕奇点，我发现可以得到如下结论：

定理3：X是S^2上的C^1切向量场，并且只有唯一奇点Q，$f:S^2\to\Re$是S^2上非常数函数的连续实函数，并且$\forall P\in S^2$，f在P处关于X的李导数$\mathscr{L}_X f(P)$都存在，那么函数$\mathscr{L}_X f$的值域是以0为内点的区间.

证明：我们先将S^2上点P的ω,α极限集的定义陈述一遍：

$$\begin{aligned}\omega P&=\{q\in S^2|\exists t_n\to+\infty,\varphi_{t_n}(P)\to q\}\\ \alpha P&=\{q\in S^2|\exists t_n\to-\infty,\varphi_{t_n}(P)\to q\}\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中$\varphi_t(P),t\in(-\infty,\infty)$是$X$在$S^2$上生成的以$P$为起点的流，也即单参数变换群.

首先，我们证明，$\forall P\in S^2$，都有$Q\in\omega P,Q\in\alpha P$：

对于奇点Q，上述结论自然成立，那么对于非奇点的P，我们考虑ω极限集. 若$Q\notin\omega P$，那么存在以Q为圆心的S^2上的闭圆盘D使得$\varphi_t(P)\notin D,\forall t\geq 0$，那么$\omega P\subset \bar{S^2}\setminus D$并且$\subset \bar{S^2}\setminus D$没有奇点，于是由$Poincare-Bendixson$定理，$\omega P$是周期轨道，而周期轨道在$\subset S^2\setminus D$内必有一个奇点，这与$Q$是唯一奇点矛盾，于是有$Q\in\omega P$，同理也有$Q\in\alpha P$.(以上过程也可以通过以$Q$为极点的球极投影，将$S^2\setminus D$和$X$变到平面上，利用平面上的$Poincare-Bendixson$定理进行证明)

其次，我们证明$\mathscr{L}_X f$取值有正有负：

假设$\mathscr{L}_X f$的值域恒非负，这意味着$\forall P\in S^2,f(\varphi_t(P))$是单调非减的，这是因为流，或是说单参数变换群的性质，使得$f(\varphi_t(P))$对t求导正是$\mathscr{L}_X f(\varphi_t(P))$. 那么考虑之前所证的结论，我们可以找到$\{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$，$n\to\pm\infty,t_n\to\pm\infty,\varphi_{t_n}(P)\to Q$，于是$n$为足够大的正整数时

$$f(Q)\geq f(\varphi_{t_n}(P))\geq f(\varphi_0(P))=f(P)\geq f(\varphi_{t_{-n}}(P))\geq f(Q)\tag{3.23}$$

则有$f(P)=f(Q)$，即f是常数函数，矛盾. 那么存在$P_1\in S^2$，使得$\mathscr{L}_X f(P_1)=A<0$. 同理，$\mathscr{L}_X f$的值域也不能恒非正，则存在$P_2\in S^2$，使得$\mathscr{L}_X f(P_2)=B>0$，而S^2上存在从P_1到P_2的道路$\phi:[0,1]\to S^2$（实际上S^2上任意两点都有S^2上一条道路将它们连接），那么由**定理2**可知，函数$\mathscr{L}_X f$的值域是区间，并且包含$[A,B]$，自然是以0为内点.

（**注**：根据$Anatole\ Katok\ \&\ Boris\ Hasselblatt$所著的"$Introduction\ to\ the\ Modern\ Theory\ of\ Dynamical\ Systems$"中所述，$C^1$切向量场的$Poincare-Bendixson$定理还可以在射影平面的开集内成立，但是类似**定理3**证明过程中，周期轨道内包含一个奇点的方法应该就行不通，因为射影平面可沿一条闭曲线剪开得到一个圆盘与一条$Mobius$带，圆盘内有一奇点，但$Mobius$带上切向量场可以全部沿带子的方向走，从而不会有任何奇点.）

对于其他更复杂的闭曲面，$Poincare-Bendixson$可能就失效了，C^1切向量场生成的流，其性质可能会变得十分复杂，比如出现类似$Cantor$集那样的极限集. 不过我注意到一个证明方法类似$Denjoy$定理的，$Poincare-Bendixson$定理在C^2切向量场的推广，即$Schwarz$定理.

Schwarz定理：M是一个紧致且连通的C^2二维微分流形. φ_t是一个C^2的流，A是φ_t的一个非空紧致极小集. 那么A要么是不动点，要么是一条周期轨道，要么是整个M.

在这个定理的基础上，可以有如下结论：

定理4：M是一个光滑闭曲面，X是M上一个至多有一个奇点的C^2切向量场，并且X不会生成周期轨道. $f: M \to \Re$是M上非常数函数的连续实函数，并且$\forall P \in M$，f在P处关于X的李导数$\mathscr{L}_X f(P)$都存在，那么函数$\mathscr{L}_X f$的值域是以0为内点的区间.

证明：设X生成的C^2流为φ_t. 以下分两种情形证明：

（1）X没有奇点. 取定$P_0 \in M$，$\forall P \in M$，与**定理3**一样，如果$\mathscr{L}_X f$都是非负的，那么函数$f(\varphi_t(P))$单调非减，而因为M紧致，那么$\omega P, \alpha P$都非空，而这两个极限集中又都包含非空且紧致的极小集，但是此时既不存在奇点也不存在周期轨道，那么极小集一定是整个M，这也意味着$P_0 \in \omega P, P_0 \in \alpha P$，与**定理3**的（3.23）同理，$f(P) = f(P_0)$，那么$f$是常数，矛盾. 于是存在$P_1 \in M$，使得$\mathscr{L}_X f(P_1) < 0$. 同理，$\mathscr{L}_X f$的值域也不能恒非正，则存在$P_2 \in M$，使得$\mathscr{L}_X f(P_2) > 0$，而$M$上任意两点存在连接它们的道路$\phi: [0,1] \to M$，那么由**定理2**可知，函数$\mathscr{L}_X f$的值域是区间，并且以0为内点.

（2）X有唯一奇点Q. $\forall P \in M$，同理，$\omega P, \alpha P$都包含一个φ_t的极小集，而此时极小集不是周期轨道，并且也不能是整个M，否则极小集真包含了一个极小集$\{Q\}$，与极小集定义矛盾. 于是$\omega P, \alpha P$包含的极小集只能是奇点，即$\{Q\}$. 类似地，我们可以证明$\mathscr{L}_X f$取值有正有负，从而有函数$\mathscr{L}_X f$的值域是区间，并且以0为内点.

（**注**：实际上，在$Schwarz$的论文里，还得到了一个推论，也即在**Schwarz定理**的条件下，如果M还是可定向的，并且M不是极小集，那么对于一个M上的点P，它的极限集，比如ωP，如果不包含任何奇点，那么这个极限集就是一个周期轨道（$Schwarz$其实还对$\varphi_t(P)$如何趋于极限集做了描述，不过在这里暂时不需要这个部分）. 于是，在本身不是极小集的可定向的光滑闭曲面M上，如果找到一个点P，它关于C^2流φ_t的极限集A不包含奇点，那么f只要在A上不为常数，就可以推出函数$\mathscr{L}_X f$的值域是以0为内点的区间.）

4 参考文献

【1】陈维桓：“微分流形初步”，高等教育出版社，2002.

【2】 Anatole Katok, Boris Hasselblatt;”Introduction of the Modern Theory of Dynamical Systems”, Cambrige University Press, 1995.

【3】 Walter Rudin; ”Principles of Mathematical Analysis”.

【4】 Schwarz, Arthur J.;”A generalization of a Poincare-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds”, American Journal of Mathematics, **85**(1963),453-458.