复变函数大作业:Hilbert 定理的证明、拟共形映射和 Teichmüller 映射*

Zhonglin Xie 1700016908 zlxie@pku.edu.cn

樊普 1800010614 1800010614@pku.edu.cn

田晨霄 1700013239 1700013239@pku.edu.cn

目录

*此报告基于 prof. David Gu 的著作 [1] 整理而成

在展示我们的主要结果前, 我们首先定义一些基本的概念并由此证明几个重要的定理.

1 几何畸变估计

1.1 全纯函数族

Definition 1. *所有定义在单位圆盘上, 同时满足归一化条件的单叶全纯映射构成函数族*

$$\mathcal{S}=\{f\colon \mathbb{D}\to\mathbb{C}\colon f\text{是}\mathbb{D}\text{上单叶函数}, f(0)=0, f'(0)=1\}.$$

每一个 $\mathcal{S}$ 的成员函数都在 0 点附近存在 Taylor 展开

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots,$$

Taylor 级数在单位圆盘 $|z|<1$ 内收敛.

Definition 2 (Koebe 函数)**.** *称全纯函数 $k(z)\in\mathcal{S}$ 且*

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots, \tag{1}$$

为 Koebe 函数. Koebe 函数将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映到复平面上射线的补集 $\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1/4]$.

Lemma 1. *假设全纯函数 $f\in\mathcal{S}$, 其平方根*

$$g(z)=\sqrt{f(z^2)},$$

有一个连续的分支属于 $\mathcal{S}$.

证明. 因为 $f(z)$ 在 $z=0$ 具有唯一的零点, 因此 $f\left(z^2\right)$ 在 $z=0$ 具有 2 阶零点. 因此, 我们得到级数展开:

$$f(z^2)=z^2+a_2z^4+a_3z^6+a_4z^8+\cdots=z^2(1+a_2z^2+a_3z^4+a_4z^6+\cdots),$$

括号内部的表达式记为

$$H(z)=1+a_2z^2+a_3z^4+a_4z^6+\cdots,$$

在 $\mathbb{D}$ 上没有零点 (因为如果存在 $\zeta\in\mathbb{D},\zeta\neq0$, 满足 $H(\zeta)=0$, 那么 $\zeta^2\in\mathbb{D}$, 并且 $f\left(\zeta^2\right)=0,\zeta^2\neq0$, 这和 $f(z)$ 在 $z=0$ 具有唯一的零点相矛盾), 因此 $\sqrt{H(z)}$ 在 D 上有两个连续分支, 一个在原点取值为 $+1$, 另一个在原点取值为 -1. 我们选取第一个分支, 记为 $h(z)$. 由公式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\cdots,$$

得到

$$h(z)=\sqrt{H(z)}=1+\frac{a_2}{2}z^2+\cdots,$$

由此

$$g(z)=\sqrt{f\left(z^2\right)}=z\cdot h(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots, \tag{2}$$

有 $g(0)=0, g'(0)=1\cdot h(z)+z\cdot h'(z)\big|_{z=0}=1$. 我们再证明 $g(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上是单叶的. 假设 z_1 和 z_2 是 $\mathbb{D}$ 上两点, 满足 $g\left(z_1\right)=g\left(z_2\right)$, 那么 $f\left(z_1^2\right)=f\left(z_2^2\right)$ 因为 f 是单叶的, 所以 $z_1^2=z_2^2, z_1=\pm z_2.h(z)$ 是偶函数, $h(z)=h(-z)$; $g(z)$ 是奇函数, $g(-z)=-g(z)$. 因此, $g\left(z_1\right)=-g\left(z_2\right)$, 由此 $g\left(z_1\right)=0$ 并且 $z_1=0$. 因此, $g(z)$ 在单位圆盘 D 上是单叶的. $\square$

同样, 我们定义单位圆的补空间为

$$\Delta := \{w \in \mathbb{C}\colon |w| > 1\}.$$

Definition 3. *所有定义在 Δ 上的满足归一化条件的全纯函数构成函数族,*

$$\Sigma = \{g\colon \Delta \to \mathbb{C} : g\text{是}\Delta\text{上单叶函数}, \lim_{z\to\infty} g(z) = \infty, g'(\infty) = 1\}.$$

Σ 的成员函数 $g \in \Sigma$ 在 ∞ 附近存在级数展开

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots,$$

级数在单位圆外 $|z| > 1$ 收敛.

每个 $g \in \Sigma$ 将 Δ 映到某个紧单连通集的补集. 经过平行移动, Σ 可以变换成 Σ 子族,

$$\Sigma' = \{f : \Delta \to \mathbb{C} : f \in \Sigma, 0 \notin f(\Delta)\}.$$

容易证明函数族 S 和 Σ' 之间存在一一对应. 每一个 $f \in S$, 映射

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)}, \quad |z| > 1,$$

属于函数族 Σ', 同时具有级数展开形式

$$g(z) = z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z} + \cdots,$$

特别地, 函数族 Σ' 在取平方根的变换下不变: 假设 $G(z) \in \Sigma'$, 那么我们有

$$G(z) = \sqrt{g(z^2)} = z(1 + b_0 z^{-2} + b_1 z^{-4} + \cdots)^{1/2}.$$

Definition 4 (Lebesgue 零测集)**.** *一个集合 $E \subset \mathbb{C}$ 称为零 Lebesgue 测度, 如果对于一切 $\varepsilon > 0$, 存在可数无穷多个点 $z_i \in \mathbb{C}$ 和 $\gamma_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots$, 使得*

$$E \subset \bigcup_i B(z_i, \gamma_i), \quad \sum_i \pi\gamma_i^2 < \varepsilon.$$

Definition 5 (全映射)**.** *全纯函数族*

$$\tilde{\Sigma} = \{f : \Delta \to \mathbb{C} : f \in \Sigma, \mathbb{C}\backslash f(\Delta)\text{的 } Lebesgue \text{ 测度为零}\},$$

称为"全映射"族.

1.2 Gronwall 面积估计定理

在复平面 $\mathbb{C}$ 上, 复数 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 平面的 Lebesgue 测度为 μ, 面元为

$$dA = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{2} d(z d\bar{z}) = \frac{1}{2i} d(\bar{z} dz).$$

Lemma 2. *假设 Ω 是一个 Jordan 区域 (Jordan domain), 其边界 $\partial\Omega$ 是一条 Jordan 曲线 (Jordan curve), 解析映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 为单叶映射, 那么*

$$\mu(\Omega) = \frac{i}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\overline{f'(z)} d\bar{z},$$

或者等价地

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2i} \int_{\partial\mathbb{D}} \overline{f(z)} f'(z) dz. \tag{3}$$

证明. Jordan 区域的面积为

$$\mu(\Omega)=\frac{i}{2}\int_{\mathbb{D}}d(wd\bar{w})=\frac{i}{2}\int_{\partial\mathbb{D}}wd\bar{w},$$

代入 $w=f(z)$, 得到 $d\bar{w}=\overline{f'(z)}d\bar{z}$

$$\mu(\Omega)=\frac{i}{2}\int_{\partial\mathbb{D}}f(z)\overline{f'(z)}d\bar{z}.$$

等式 (3) 的证明类似. □

在 1941 年, Gronwall 发现了下列的面积估计定理.

Theorem 1 (Gronwall 面积定理)**.** *如果函数族 Σ 的成员*

$$g(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots,$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2\leqslant 1, \tag{4}$$

等号成立当且仅当 $g\in\tilde{\Sigma}$, 即 g 为全映射.

证明. 对一切 $r>1$, 令 C_r 是圆周 $\{|z|=r\}$ 在映射 g 下的像 $C_r=g(\{|z|=r\})$. 每个 C_r 都是光滑的简单闭曲线. E_r 表示 $\mathbb{C}\backslash C_r$ 的有限连通分支. 令 $w=u+iv$ 是 g 像的复坐标. 对于一切 $r>1$, 计算 E_r 的面积,

$$\begin{aligned}\mu\left(E_r\right)=&\oint_{C_r}udv=\frac{1}{2i}\oint_{C_r}\bar{w}dw=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)dz\\=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(re^{-i\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_nr^{-n}e^{in\theta})\\&\cdot(1-\sum_{m=1}^{\infty}mb_mr^{-m-1}e^{-i(m+1)\theta})re^{i\theta}d\theta\\=&\pi(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}).\end{aligned}$$

等号两边取极限, 令 r 趋于 1,

$$\mu(\mathbb{C}\backslash g(\Delta))=\pi(1-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2),$$

因为左侧非负, 因此右侧非负, 我们得到不等式(4). □

Corollary 1. *如果 $g\in\Sigma$, 那么 $|b_1|\leqslant 1$, 等式成立当且仅当*

$$g(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z},\quad |b_1|=1,$$

这种共形映射 g 将 Δ 映成一个长度为 4 的线段的补集.

证明. 由 Gronwall 面积定理, 我们得到 $|b_1|\leqslant 1$. 当等号成立的时候, 对一切 $n\geqslant 2, b_n=0$. 令 $a_1=\sqrt{b_1}, a_2=1/a_1$, 构造复平面上的线性变换 $h_1(z)=a_1z$ 和 $h_2(z)=a_2\left(z-b_0\right)$, 那么

$$f(z)=h_2\circ g\circ h_1=z+\frac{1}{z},$$

是单叶共形映射, 将 Δ 映成 $\mathbb{C}\backslash[-2,2]$. 因为 $|b_1|=1$, h_1 和 h_2 为旋转平移, 即刚体变换, 线段长度保持不变. □

Theorem 2 (Bieberbach)**.** *如果 $f \in \mathcal{S}$, 那么 $|a_2| \leqslant 2$, 等式成立当且仅当 f 是 Keobe 函数的一个旋转.*

证明. 假设函数
$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots ,$$
应用平方根变换, 由等式 (2) 得到
$$h(z) = \sqrt{f\left(z^2\right)} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \cdots .$$
由引理 1, $h(z)$ 属于函数族 $\mathcal{S}$. 构造函数
$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{h(1/z)} = \frac{1}{f(1/z^2)^{1/2}} = \frac{1}{1/z + \frac{a_2}{2z^3} + \cdots} \\ &= z\Big(\frac{1}{1 + \frac{a_2}{2z^2} + \cdots}\Big) = z - \frac{a_2}{2}\frac{1}{z} + \cdots , \end{aligned}$$
则 $g(z)$ 属于函数族 Σ. 由推论 1 得到 $|a_2| \leqslant 2$. 如果 $|a_2| = 2$, 函数 $g(z)$ 具有形式
$$g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z},$$
这等价于
$$f\left(1/z^2\right) = \frac{z^2}{z^4 - 2e^{i\theta} z^2 + e^{i2\theta}},$$
进行坐标变换, $w = 1/z^2$ 在单位圆盘上, 那么
$$f(w) = \frac{w}{\left(1 - e^{i\theta} w\right)^2} = e^{-i\theta} \frac{e^{i\theta} w}{\left(1 - e^{i\theta} w\right)^2} = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} w),$$
这里 $k(w)$ 是 Koebe 函数 (1). □

全纯映射是开映射 (open mapping), 即全纯映射将任意开集映到开集. 因此对于每一个全纯函数 $f \in \mathcal{S}$, 其像 $f(\mathbb{D})$ 都包含一个以原点为圆心, 半径严格大于 0 的开圆. 1907 年左右, Koebe 发现所有的全纯映射 $f \in \mathcal{S}$ 的像 $f(\mathbb{D})$ 都包含某一个开圆, $B(0, \rho)$. Koebe 映射显示了 ρ 必须不大于 1/4, Koebe 猜测 $\rho = 1/4$. 后来, Bieberbach 证明了 Koebe 的猜想.

Theorem 3 (Koebe 1/4-定理)**.** *对于每一个全纯函数 $f \in \mathcal{S}, f(\mathbb{D})$ 包含开圆盘 $|w| < 1/4$. 如果存在 $|w| = 1/4$ 并且 $w \notin f(\mathbb{D})$, 当且仅当 f 是 Koebe 函数, 或者与 Koebe 函数相差一个旋转.*

证明. 令 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的函数, 单位圆盘在 f 下的像不包含 w 点, $w \in f(\mathbb{D})$. 构造全纯函数
$$h(z) = \frac{w f(z)}{w - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \cdots ,$$
那么 $h(z)$ 在函数族 $\mathcal{S}$ 中. 由定理 2 得到
$$|a_2 + \frac{1}{w}| \leqslant 2,$$
同时 $|a_2| \leqslant 2$, 我们得到 $|1/w| \leqslant 4, |w| \geqslant 1/4$. 等号成立当且仅当 f 是 Koebe 函数, 或者与 Koebe 函数相差一个旋转. 对于 $\mathcal{S}$ 中的其他函数,$g \in \mathcal{S}, g(\mathbb{D})$ 覆盖以原点为圆心的更大开圆盘. □

1.3 Koebe 畸变定理

单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的曲线在映射 $f \in \mathcal{S}$ 下发生畸变, 畸变的速率取决于导数 $f'(z)$. 举例而言, 如果 $|f'(z)|$ 变化迅速, 那么 z 附近具有同样长度的曲线被映射到长度非常不同的曲线; 如果 $\arg f'(z)$ 变化迅速, 那么直线被映射成弯曲剧烈的曲线. 在 0 点处, 函数二阶导数的上界 $|a_2| \leqslant 2$, 使得 $f'(z)$ 的变化一致有界, 这里 z 在单位圆盘内变动. 这里的一致估计和具体的映射 $f \in \mathcal{S}$ 的选取无关. Koebe 畸变定理给出了这些一致的界限.

Theorem 4. 任意一个 $f \in \mathcal{S}$, 都有

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2}, \quad r = |z| < 1. \tag{5}$$

证明. 给定函数 $f \in \mathcal{S}$, 取定点 $z \in \mathbb{D}$, 我们用 Möbius 变换来构造全纯函数

$$F(w) = \frac{f(\frac{w+z}{1+\bar{z}w}) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = w + \frac{1}{2}\big((1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\big)w^2 + \cdots .$$

因为映射 $F \in \mathcal{S}$, 由定理2, w^2 系数的模不大于 2, 因此

$$|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}| \leqslant 4,$$

这蕴含了定理中的不等式 (5). □

Lemma 3. 假设 $f \in \mathcal{S}$, 则在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中存在 $\log f'(z)$ 的一个连续分支, 将 0 映到 0. 对一切 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, 我们都有

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}(\log|f'(z)|) + ir\frac{\partial}{\partial r}(\arg f'(z)).$$

证明. 因为映射 $f(z)$ 是单值映射, 因此在单位圆内导数处处非 $0, \forall z \in \mathbb{D}, f'(z) \neq 0$. 因为 $f'(0) = 1$, 所以在 $\mathbb{D}$ 上存在 $\log f'(z)$ 的连续分支将 0 映到 0. 令 $u(z) = u(re^{i\theta})$ 是定义在某个开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数, 由关系 $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, 我们有

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} = r\frac{\partial u}{\partial z}\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}.$$

将这一公式应用于函数 $\log f'(z)$, 并且用关系 $\log z = \log|z| + i\arg z$, 我们得到

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = z\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\log f'(z)) = r\frac{\partial}{\partial r}(\log|f'(z)|) + ir\frac{\partial}{\partial r}(\arg f'(z)).$$

□

Theorem 5 (畸变定理)**.** 对每一个 $f \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1. \tag{6}$$

在某个 $z \neq 0$ 等号成立, 当且仅当 f 是 *Koebe* 函数的旋转.

证明. 不等式 $|w-c| < R$ 蕴含着 $c - R \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant c + R$. 特别地, 由不等式 (5), 对 $|z| = r$, 我们有

$$\frac{2r^2}{1-r^2} - \frac{4r}{1-r^2} \leqslant \operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{4r}{1-r^2}$$

简化后得到

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leqslant \mathrm{Re}(\frac{zf''(z)}{f'(z)}) \leqslant \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \tag{7}$$

由引理 3, 我们得到存在 $\log f'(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上的连续分支, 将 0 映到 0, 更进一步, 由引理中的不等式, 我们得到

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{2r+4}{1-r^2}, \tag{8}$$

固定 θ 积分 r

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{2r+4}{1-r^2}dr &= \int_0^R \frac{3}{1-r}+\frac{1}{1+r}dr\\ &= -3\log(1-r)+\log(1+r)\big|_{r=0}^{r=R} = \log\frac{1+R}{(1-R)^3},\end{aligned}$$

我们得到

$$\log\frac{1-R}{(1+R)^3} \leqslant \log|f'(re^{i\theta})| \leqslant \log\frac{1+R}{(1-R)^3}, \tag{9}$$

因为指数映射 $x\mapsto e^x$ 单调递增, 因此得到定理的不等式 (6).

如果在某一点 $z=\mathrm{Re}^{i\theta}\in\mathbb{D}, z\neq 0$, 不等式 (6) 成立, 那么不等式(7) 对于 R 成立, 这意味着不等式 (7) 和 (8) 对于任意 $r\in(0,R)$ 都成立, 令 r 趋向于 0, 我们得到等式

$$\mathrm{Re}\big(e^{i\theta}f''(0)\big) = +4 \text{ 或者 } \mathrm{Re}\big(e^{i\theta}f''(0)bigr) = -4.$$

由定理5, $|f''(0)|\leqslant 4$, 因此 $|f''(0)|=4$,f 是 Koebe 函数的一个旋转.

反之, 考虑 Koebe 函数 $k(z)=z/(1-z)^2$, 我们有

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

对于所有 $z=r\in(0,1)$, 不等式 (6) 的右侧成立. 再令 $h(z)=e^{i\phi}k(e^{-i\phi z})$, 我们得到

$$h'(z) = \frac{1-z}{(1+z)^3},$$

对于所有 $z=r\in(0,1)$, 不等式 (6) 的左侧成立. □

Theorem 6 (增长定理)**.** *对每一个全纯函数 $f\in\mathcal{S}$*

$$\frac{r}{|1+r|^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{|1-r|^2}, \quad |z|=r, \tag{10}$$

更多地, 对于任意 $z\in\mathbb{D}, z\neq 0$, 等号成立当且仅当 f 是 Koebe 函数的一个旋转.

证明. 定理 5 给定导数模 $|f'(z)|$ 的上界, 固定一点 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$, 观察到

$$f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta})d\rho,$$

于是

$$|f(z)| \leqslant \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho \leqslant \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}d\rho = \frac{r}{|1-r|^2}.$$

假设 $z\in\mathbb{D}$ 是单位圆盘内部的任意一点, 我们考虑两种可能性:

1. $|f(z)| \geqslant 1/4$,

2. $|f(z)| \leqslant 1/4$.

假设第一种情况发生, 因为对于任意 $r \in (0,1), r/(1+r)^2 \leqslant 1/4$, 我们得到不等式 $r/(1+r)^2 \leqslant |f(z)|$. 假设第二种情况发生, 根据定理 3, 径向直线段 $rf(z), r \in [0,1]$ 在 f 的像里面. 因为 f 为单值映射, 径向直线段的原像在 $\mathbb{D}$ 中是一条简单曲线, 连接 0 和 z, 记为 C. 我们有

$$f(z) = \int_C f'(\zeta)\zeta.$$

根据 C 的定义, 对于 C 上的任意一点 $z \in C, dw = f'(z)dz$ 和 $f(z)$ 具有相同的辐角, 因此我们有

$$\begin{aligned}|f(z)| = |\int_C f'(\zeta)d\zeta| &= \int_C |f'(\zeta)d\zeta| = \int_C |f'(\zeta)||d\zeta| \\ &\geqslant \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}d\rho = \frac{r}{(1+r)^2}.\end{aligned}$$

不等式(10)的两端, 如果有一端等号成立, 则不等式(6)的相应端等式成立, 由畸变定理, 这意味着 f 是 Koebe 函数的一个旋转. 反之, 通过选取 Koebe 函数的一个旋转, 不等式(9)的两端等式都可以达到. □

Theorem 7 (径向畸变定理)**.** *对于任意 $f \in \mathcal{S}$*

$$|\arg f'(z)| \leqslant 2\log\frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r.$$

证明. 考虑畸变定理中的不等式(5), 我们有

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leqslant \mathrm{Im}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

由引理 3 得到

$$-\frac{4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial r}\arg f'(re^{i\theta}) \leqslant \frac{4}{1-r^2},$$

通过积分得到

$$|\arg f'(z)| \leqslant \int_0^r \frac{4}{1-r^2}dr = 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

□

这样, 我们对全纯函数的值和一阶导数的模都有了一致估计.

2 Riemann 映射

Riemann 映射是复变函数几何理论的基础, 我们在本章中简要回顾 Riemann 映射定理及其计算方法.

2.1 Riemann 映射定理

Theorem 8 (Riemann 映射定理)**.** *给定复平面上单联通区域 $\Omega \subset C, \Omega$ 不是整个复平面, 和一点 $z_0 \in \Omega$, 则存在唯一的一个解析函数 $f : \Omega \to \mathbb{D}$, 满足条件:$f(z_0) = 0$ 和 $f'(z_0) > 0$, 使得 $f(z)$ 定义了从 Ω 到单位圆盘 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 的双射.*

Remark 1. *如果不要求条件 $f(z_0)=0$ 和 $f'(z_0)>0$, 则共形映射不唯一. 所有这些映射彼此相差一个圆盘到自身的 Mobius 变换:*

$$\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D},\quad \varphi(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}.$$

简略起见, 我们仅概述其证明思路: 首先定义一个全纯函数的正规族, 然后考察函数的 Taylor 或者 Laurent 级数展开, 构造一个序列使得某一个系数取得极值, 由正规族的紧性得到极值函数的存在性, 再证明这个极值函数就是所要求得的共形映射.

2.2 Riemann 映射的计算方法

2.2.1 Schwarz-Christoffel 映射

当平面单连通区域是多边形时, Riemann 映射具有非常简洁的形式:Schwarz-Christoffel 映射. 这一公式在工程上被广泛应用.

给定平面多边形 $\Omega=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$, 在顶点 z_k 处, 多边形外角为 $\beta_k\pi$, 共形映射将多边形映到上半平面, 记为 $f:\Omega\to\mathbb{H}, w=f(z)$, $\mathbb{H}=\{\mathrm{Im}(z)>0\mid z\in\mathbb{C}\}$. 顶点的原像和像记为 z_k 和 w_k, 那么逆映射具有形式

$$f^{-1}(w)=C_1\int_0^w\prod_{k=1}^{n-1}(w-w_k)^{-\beta_k}\,dw+C_2,$$

这里 C_1,C_2 是两个复值常数, $f(z_n)=\infty$. 在实际应用中, 我们往往需要探测 w_k 的位置, 这增加了算法的复杂度.

3 共形映射的存在性与唯一性

一个新月形状

$$\Omega=\{z:|z|<1\}\backslash\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\}$$

经过共形映射

$$\varphi_1(z)=\pi i\frac{1+z}{1-z}$$

映成水平无限带状区域,$\{z\mid 0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$; 考虑共形映射 $\varphi_2(z)=\exp z$, 将无限带状区域 $\{z\mid 0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$ 映成上半平面 $\{z\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$, 再用 $\varphi_3(z)=(z-i)/(z+i)$ 映成单位圆盘 $\mathbb{D}$. 复合映射 $\varphi_3\circ\varphi_2\circ\varphi_1:\Omega\to\mathbb{D}$ 给出了从新月形状到单位圆盘的 Riemann 映射.

Theorem 9. *每一个复平面上的双连通区域 Ω 都共形等价于一个标准环带.*

证明. 假如 Ω 的一条边界只有一个孤立的点 z_0, 那么 $\Omega\cup\{z_0\}$ 是一个单连通区域. 如果 Ω 的另外一条边界包含多于一个点, 则存在共形映射 $\varphi:\Omega\cup\{z_0\}\to\mathbb{D}$, 将 $\Omega\cup\{z_0\}$ 映成单位圆盘, Ω 和 $\{z\mid 0<|z|<1\}$ 共形等价; 如果 Ω 的另外一条边界只包含一个点, 则存在共形映射 $\varphi:\Omega\cup\{z_0\}\to\mathbb{C}$, 将 $\Omega\cup\{z_0\}$ 映成整个复平面 $\mathbb{C}$,Ω 和 $\{z\mid 0<|z|<\infty\}$ 共形等价.

现在假设 Ω 的两个边界 γ_1 和 γ_2 都包含多于一个点, $\partial\Omega=\gamma_2-\gamma_1$. 假设 γ_1 是有界的. 那么从 Ω 到平面标准环带的共形映射可以如下构造:

1. γ_1 的补集有两个连通分支, 其中包含 Ω 的分支记为 Ω_1. 将 Ω_1 共形映射到单位圆盘 $|z'|<1$,Ω 映射成 Ω',γ_2 映射成曲线 γ_2', 包含在单位圆盘 $\{|z'|<1\}$ 内.

2. γ_2' 的补集有两个连通分支, 其中包含 Ω' 的分支记为 Ω_2'. 将 Ω_2' 共形映射到单位圆盘外部 $|z''|>1$, 同时将 $z'=\infty$ 映成 $z''=\infty$.γ_1' 映成曲线 γ_1'' 包含在单位圆盘外部 $|z''|>1, \Omega'$ 映射成 Ω'', Ω'' 不包含 ∞. Ω'' 的边界为 γ_1'' 和 $\gamma_2''=\{|z''|=1\}$.
3. 应用映射 $t=\log z''$, 将 Ω'' 映到 B_1, B_1 包含在右半平面 $\{t \mid \operatorname{Re} t>0\}$. 这个映射并不是单射, B_1 是一条铅直的无限长的带状单连通区域, 一条边界是虚轴, 另外一条边界是无限长的解析曲线. B_1 具有周期性, 对于任意 $t \in B_1, t+2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ 都在 B_1 之中.
4. 应用 Riemann 映射定理, 存在一个映射 $\omega=f(t)$, 将 B_1 映成铅直带状区域 $B_2=\{\omega \mid 0<\operatorname{Re}\omega<h\}, t=-\infty i, 0, +\infty i$ 映到了 $\omega=-\infty i, 0, +\infty i$. (因为 B_1 和 B_2 都是单连通区域, 边界多于一个点, 由 Riemann 映射定理彼此共形等价.) 这个映射将 $t=2\pi i$ 映到了正虚轴上的某个点 ω_0, 经过相似变换, 不妨设 $\omega_0=2\pi i$.

   我们证明映射具有性质
   $$f(t+2\pi i)=f(t)+2\pi i.$$
   因为两个共形映射 $f(t+2\pi i)$ 和 $f(t)+2\pi i$ 都将 B_1 映到 B_2, 同时将 $-\infty i, 0, +\infty i$ 映到 $-\infty i, 2\pi i, +\infty i$. 由 Riemann 映射的唯一性, 我们得到 $f(t+2\pi i)=f(t)+2\pi i$.
5. 映射 $\xi=\exp(\omega)$ 将 B_2 映到标准环带 $1<|\xi|<e^h$. 这个映射并非单射, 但是复合映射 $\xi=e^{f\left(\log z''\right)}$, 将 Ω'' 映到 $1<|\xi|<e^h$, 是共形单射.

   因此, 将上述映射复合, $z \to \xi$, 我们得到共形映射, 将 Ω 映到环带 $1<|\xi|<e^h$, 这里 h 依赖于初始区域 Ω.

□

4 多连通区域的狭缝映射

我们用较为初等的复变函数方法证明一种共形映射的存在性: 狭缝映射 (slit mapping). 给定亏格为 0 的多连通曲面, 存在共形映射将其映射到平面区域, 每个边界的连通分支都被映成一条狭缝 (slit) 或者同心圆周.

4.1 狭缝映射的存在性 (Hilbert 定理)

首先回忆 Bieberbach 定理: 单叶全纯函数族
$$\mathcal{S}=\{g\colon \{|z|<1\} \to \mathbb{C} \mid g(0)=0, g'(0)=1, g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, |z|<1\},$$
对于一切 $w \notin g(\mathbb{D})$, 我们有
$$|b_2| \leqslant 2, \quad |b_2+\frac{1}{w}| \leqslant 2. \tag{11}$$
考虑 Bieberbach 定理的推论.

Corollary 2. *考虑单叶全纯 (univalent holomorphic) 函数族,*
$$\Sigma=\{f\colon \{|z|>1\} \to \overline{\mathbb{C}} \mid f(\infty)=\infty, \lim_{z\to\infty} f'(z)=1, f(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots, |z|>1\},$$
那么对一切 $f \in \Sigma$
$$\partial f(|z|>1)=f(|z|=1) \subset \{|w-b_0| \leqslant 2\}.$$

证明. 我们先证明如下命题: 如果 $f(z) \in \Sigma$, 那么 $f(z^{-1})^{-1} \in \mathcal{S}$ 考虑 $f(z^{-1})^{-1}$, 因为

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots,$$

所以

$$f(z^{-1}) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

故而

$$\begin{aligned} f(z^{-1})^{-1} &= z(1 + b_0 z + b_1 z^2 + \cdots)^{-1} \\ &= z(1 - (b_0 z + b_1 z^2 + \cdots) + \cdots) \\ &= z - b_0 z^2 - b_1 z^3 + \cdots. \end{aligned}$$

令 $g(z) = f(z^{-1})^{-1}$

$$g(z) = z - b_0 z^2 - b_1 z^3 + \cdots,$$

则 $g(0) = 0, g'(0) = 1, g \in \mathcal{S}$.

给定任意一点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}, |\zeta| = 1, w = g(\zeta) \notin g(\mathbb{D})$, 由 Bieberbach 不等式 (11),

$$|-b_0 + \frac{1}{w}| \leqslant 2,$$

由 $w = g(\zeta) = 1/f(\zeta^{-1})$, 得到 $1/w = f(1/\zeta), \zeta' = 1/\zeta \in \partial\mathbb{D}$, 我们得到

$$|-b_0 + f(\zeta')| \leqslant 2.$$

□

直接计算可得:

Lemma 4. *在 ∞ 点附近, 解析函数*

$$\alpha(z) = z + \frac{k_1}{z} + \cdots, \quad \beta(z) = z + \frac{l_1}{z} + \cdots,$$

那么

$$\beta \circ \alpha(z) = z + \frac{k_1 + l_1}{z} + \cdots.$$

4.1.1 狭缝映射

我们首先定义狭缝区域:

Definition 6 (狭缝区域)**.** *复平面上的区域 (连通开集) $\Omega \subset C$ 称为狭缝区域 (slit domain), 如果其边界 $\partial\Omega$ 的每个连通分支或者是一个点, 或者是水平闭区间.*

我们给出两个正规函数族的判定准则:

Lemma 5. *给定一族全纯函数 F, 如果存在三个相异的点 a, b, c, 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 都有 a, b, c 在 f 的值域之外, 那么 $\mathcal{F}$ 是正规函数族.*

Lemma 6. *如果 $\mathcal{F} = \{f\}$ 是正规函数族, 那么*

$$\mathcal{F}^{-1} = \{f^{-1} \mid f \in \mathcal{F}\}$$

也是正规函数族.

Theorem 10 (Hilbert). 复平面上的一切区域 $\Omega \subset C$, 其边界 $\partial\Omega$ 具有有限个连通分支, 都和平面某个狭缝区域共形等价.

证明. 给定一个平面区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 我们用 Möbius 变换, 可以假设 $\infty \in \Omega$ 并且 $\Omega \subset \{|z| > 1\}$, 令单叶全纯映射族

$$\Sigma = \{f\colon \Omega \to \hat{\mathbb{C}} \mid f(\infty) = \infty, \lim_{z\to\infty} f'(z) = 1, f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots, |z| > 1\}. \tag{12}$$

令 $f(z) = z \in \Sigma$, 所以 Σ 是非空集合, $\Sigma \neq \emptyset$.

考察

$$\Sigma^{-1} = \{f^{-1} \mid f \in \Sigma\}.$$

由推论2, 我们得到

$$\{|z| < 1\} \subset [f^{-1}(|w - b_0| > 2)]^c,$$

因此, $f^{-1}(|w - b_0| > 2)$ 不包含三个点 $\{-1 + \epsilon, 0, 1 - \epsilon\}$, 由引理5, Σ^{-1} 是一个正规函数族. 故而, 由引理6, Σ 也是一个正规函数族. 由正规函数族的紧性, 存在函数序列的极限 $f \in \Sigma$, 使得

$$\mathrm{Re}_f(b_1) = \max_{g\in\Sigma} \mathrm{Re}_g(b_1).$$

我们欲证明 $f(\Omega)$ 是一个狭缝区域. 若反之, 则存在 $\partial f(\Omega)$ 的一个连通分支 Γ, Γ 既不是一个点, 也不是一条水平线段. 此时可以构造一个映射

$$g\colon \hat{\mathbb{C}}\backslash\Gamma \to \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2R, 2R].$$

构造方法如下: 首先构造 Riemann 映射的逆映射 $\alpha\colon \{|z| > R\} \to \hat{\mathbb{C}}\backslash\Gamma$,

$$\alpha(z) = z + \frac{\varepsilon}{z} + \cdots$$

和狭缝映射 $\beta\colon \{|z| > R\} \to \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2R, 2R]$,

$$\beta(z) = z + \frac{R^2}{z},$$

则复合映射 $g\colon \hat{\mathbb{C}}\backslash\Gamma \to \hat{\mathbb{C}}\backslash[-2R, 2R]$,

$$g(w) = \beta \circ \alpha^{-1}(w) = w + \frac{\lambda}{w} + \cdots.$$

由 Gronwall 定理的推论, 比较 α, β, 它们将圆盘的补集映到平面区域, 狭缝映射 b_1 的实部达到最大, 因此

$$R^2 = \mathrm{Re}_\beta\,(b_1) > \mathrm{Re}_\alpha\,(b_1) = \varepsilon.$$

由引理4, $\beta(z) = g \circ \alpha(z)$, 我们得到

$$R^2 = \mathrm{Re}_\beta(b_1) = \mathrm{Re}_{g\circ\alpha}(b_1) = \mathrm{Re}_g(b_1) + \mathrm{Re}_\alpha(b_1) = \lambda + \varepsilon > \varepsilon.$$

由此, 得到 $\mathrm{Re}_g(b_1) = \lambda > 0$. 由引理4, 在 $\{|z| > 1\}$ 上, 复合映射

$$g \circ f(z) = z + \frac{\mathrm{Re}_f(b_1) + \lambda}{z} + \cdots.$$

由 $\lambda > 0$, 我们得到 $\mathrm{Re}_{g\circ f}(b_1) > \mathrm{Re}_f(b_1)$, 这和 f 的取法矛盾, 因此假设错误, 结论成立. □

5 拟共形映射

拟共形映射理论是研究曲面间映射的数学分支，其主要内容包括研究曲面间映射的表示、满足特定限制映射的存在性和唯一性、在映射空间中的优化和变分、最优映射和全纯微分的内在联系等。

拟共形映射最开始被引进用于解决一类非共形映射的极值问题：在把矩形 R 映射至矩形 T 的保持顶点对应的连续可微分映射中，什么样的映射“最接近”共形映射。Grotzsh 给出了度量非共形映射对共形映射偏差的定义，此后，Teichmüller 继承和发展了上述思想，运用拟共形映射去研究经典的 Riemann 模问题，并建立和发展了 Teichmüller 空间。

5.1 拟共形映射和 Beltrami 系数

Definition 7. *给定一个 Riemann 面 X 和 Y 间的 C^1 同胚 $f : X \longrightarrow Y, w = f(z)$，我们说 f 是拟共形的，如果:*

$$K(f) = sup_{z\in X} K_z(f) < \infty$$

其中，

$$K_z(f) = \frac{1 + k(z)}{1 - k(z)}$$

这里

$$k(z) = |\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}|$$

。如果 K=K(f)，我们说 f 是 K—拟共形的。

Definition 8. *令 Ω 是复平面的区域，给定 C^1 映射 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$。我们记 $w = f(z)$，复参数 $z = x+iy, w = u + iv$，导映射表示成*

$$dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$$

，定义

$$\mu(z) := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = \frac{w_{\bar{z}}}{w_z}$$

为映射的 Beltrami 系数。

值得注意的是，虽然 μ 是依赖局部参数的选取的，但是 $|\mu|$ 并不依赖局部参数的选取，因此可以定义 f 的最大伸缩商为

$$K[f] = sup_z|\frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|}|$$

Theorem 11. *K=1 时，f 为共形同胚。*

证明. 设 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是 X 内任意一个四边形，$\bar{Q} \subset X$，记 $\bar{Q} = f(Q), w_j = f(z_j), j = 1, 2, 3, 4$，又设 φ 和 ϕ 分别是 $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 和 $\bar{Q}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ 到矩形 $R(0, a, a + bi, bi)$ 和 $R'(0, a', a' + b'i, b'i)$ 的标准共形映射，则 $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ 是 R 到 R‘的 1-拟共形映射。可以证明 $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ 把每一条水平线段都映射为水平线段，把垂直线段都映射至垂直线段，因此为仿射变换，又易知 $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ 为相似变换，这样 f 为共形映射，由于四边形选取的任意性，从而 f 为共形同胚。 □

Definition 9. *设 f 是一个 C^1 类的拟共形映射，$\mu(z)$ 是一个连续复值函数，满足 $||\mu||_\infty < 1$ 是复特征，那么 $w = f(z)$ 就满足方程*

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu f_z(z)$$

，称之为 Beltrami 方程。

Beltrami 方程是著名的 Cauchy-Riemann 方程的推广。

5.2 Beltrami 方程与黎曼映照定理

Definition 10. 一个定义在集合 X 上的实值函数 f 的支集，是指 X 的一个子集，满足 f 恰好在这个子集上非 0。

Definition 11. 引进积分算子

设 w 在复平面上有定义，具有紧致的支集，并且 p 方可积，$p>2$.

$$T_w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_C \frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta$$

Theorem 12. 设 $\mu(z)$ 是有界可测函数，$||\mu||_\infty < 1$，且有一个有界支集，则 *Beltrami* 方程在平面上有下列形式的解:

$$f(z) = z + T_w(z), w \in L_p, p > 2$$

从这个定理以及 Beltrami 方程与拟共形映射的关系立刻可以推出

Theorem 13. 设 $\mu(z)$ 是一个给定的可测函数，$||\mu||_\infty < 1$，在平面上有有界的支集，则存在全平面的拟共形映射 f 以 μ 为特征值，且满足:

$$lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z} = 1$$

Theorem 14 (表示定理)**.** 在 $\mu(z)$ 有一个有界支集的情况下，*Beltrami* 方程的全平面同胚解有表达式

$$f(z) = z + T_\mu(z) + T_{\mu H_\mu(z)}(z) + \cdots$$

H 是 *Hilbert* 变换

Theorem 15 (可测黎曼映照定理)**.** 假设 $\mu : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是定义在单位圆盘上的光滑复值函数，$||\mu||_\infty < 1$，那么存在单位圆盘的自身同胚 $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{D}$，使得 *Beltrami* 方程

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \mu(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

成立，并且不同的映射彼此相差一个单位圆盘上的 *Mobius* 变换。

证明. 这个定理的证明思路如下：1.$f : (\mathbb{D}, |dz|^2) \to (\mathbb{D}, |dw|^2)$ 是拟共形映射，在其诱导的拉回度量为 $f^*(|dw|^2)$, 同样的映射, 在拉回度量下 $f : (\mathbb{D}, f^*(|dw|^2)) \to (\mathbb{D}, |dw|^2)$ 是等距变换。2. 假设映射的 Beltrami 系数为 μ，则其诱导的拉回度量为

$$f^*(|dw|^2) = dwd\bar{w} = |w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}|^2 = |w_z|^2|dz + \mu d\bar{z}|^2$$

那么辅助度量和拉回度量共性等价，因此，同样的映射在辅助度量下成共形映射，根据经典黎曼映照定理，这个映射存在。 □

5.3 建立在黎曼曲面上的拟共形映射

Definition 12. 假定 M 为一个黎曼面，有共形图像 (U_α, ϕ_α)，M 上的 *Beltrami* 微分 μ 为每个局部参数 z_α 指定一个可测复值函数 μ_α，满足：若 $U_\alpha \bigcap U_\beta = \emptyset$，则

$$\mu_\alpha(z_\alpha)\frac{d\bar{z}_\alpha}{dz_\alpha} = \mu_\beta(z_\beta)\frac{d\bar{z}_\beta}{dz_\beta}$$

Theorem 16 (单值化定理)**.** *任何一个黎曼曲面 M，必同胚于下列曲面之一:*

(i) $\bar{\mathbb{C}}$

(ii) $\mathbb{C}$

(iii) $\mathbb{C}-0$（柱面）

(iv) 环面

(v) $\triangle/\Gamma$.

其中 $\triangle$ 为不含边界的单位圆盘，Γ 是 $Aut\triangle$ 的一个子群。

由单值化定理，除去几种特殊曲面外，大多数曲面具有双曲型万有覆盖曲面。

Theorem 17. *假定双曲黎曼面 M_0 和 M_1 有共同的复叠空间 U，且复叠映射分别为 p_0 和 p_1，记 G_0 和 G_1 为复叠变换群，若 $\tilde{f}$ 为 M_0 和 M_1 间的映射 f 的提升，如果 f 为 K-拟共形映射，则 $\tilde{f}$ 也为 K-拟共形映射。*

接下来讨论 $\tilde{f}$ 的复特征。

设 $f: M_0 \to M_1$ 所诱导的 Beltrami 微分借助 M_0 的整体单值化参数表示为

$$\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}, \forall z \in U$$

对于任意一个元素 $g \in G_0$ 点 z 与 $\zeta = g(z)$ 对应 M_0 上的同一个点，换句话说，z 与 ζ 可以看做 $p_0(z)$ 的两个参数，故 μ 满足

$$\mu(z) = \mu(g(z))g'\bar{(}z)/g'(z), \forall g \in G_0$$

.

5.4 极值拟共形映射问题

Definition 13. *M_0 和 M_1 为亏格大于 1 的两个紧黎曼曲面，h 为定向同胚映射，记 Q 为拟共形映射且同伦于 h 的 f 的集合，若 $f_0 \in Q$ 满足*

$$\forall f \in Q, K[f_0] <= K[f]$$

, 则称 f_0 极值，若取等唯一，则称唯一极值。

Definition 14. *对黎曼面 X，拟共形映射 f 将 X 映射至另一个黎曼空间 Y，则称 (f,Y) 为黎曼面 X 的共形结构的形变。*

Definition 15. *X 的共形结构的形变 $(f_0, X_0), (f_1, X_1)$ 称之为等价的，如果存在共形映射 $c: X_0 \longrightarrow X_1$ 且同伦 g_t 连接 cf_0, f_1 满足:*

1. 对一切 $z \in X, g_0(z) = c(f_0(z)), g_1(z) = f_1(z)$

2. 对一切 $z \in \partial X, t \in [0,1], g_t(z) = cf_0(z) = f_1(z)$

称这样的等价类组成的空间为 X 的 Teichmüller 空间，记为 T(X)。

Theorem 18. *紧的黎曼曲面每个等价类都有一个极值拟共形映射。*

这个定理也可以推广至有限型黎曼空间。

证明. 设 $f_*: S_0 \to S_1$，在 $[f_*]$ 中存在一个序列 f_n 使得

$$lim_{n\to\infty}K[f_n] = inf_{f\in[f_*]}K[f]$$

设两个黎曼曲面有共同的万有复叠空间 U，相应的复叠映射为 p_0, p_1，相应的复叠变换群为 G_0, G_1，设 $\tilde{f}_n$ 是 f_n 的提升，为 K_n-拟共形映射，其中 $K_n = K[f_n]$，记 $K = supK_n$，因此 $\tilde{f}_n$ 是 K-拟共形映射，因此存在一个子序列内闭一致收敛，设其收敛函数为 $\tilde{f}_0$，这个函数是 U 内的 K-拟共形映射。

对于一个任意固定的 $g \in G_0$，$g_n = \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}$ 是 G_1 中的元素，当 n 充分大时，g_n 是一个固定元素，由此，$\tilde{f}_0$ 可以投影为 S_0, S_1 的拟共形映射 f_0。

接下来证明

$$K[f_0] = k[\tilde{f}_0] = lim_{n\to\infty}K[f_n]$$

设右侧式子极限为 K_0，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得 $n > N$ 时，$K[\tilde{f}_n] < K_0 + \varepsilon$，因此，$\tilde{f}_0$ 一定是 $K_0 + \varepsilon$ 拟共形映射，由 ε 的任意性可得 $K[f_0] \le K_0$.

最后只需证明，f_0 在同伦类中。

Lemma 7 (单值性定理)**.** *M 为一个黎曼曲面，$(\tilde{M}, p)$ 为其上的一个正则复叠空间，若 M 上的两条弧线 γ_1, γ_2 具有相同的起点和终点 a, b，且两者同伦，通过 a 的任意一个上方点 $\tilde{a}$，两条弧线 γ_1, γ_2 的提升具有相同起点和终点且同伦。*

事实上，在 n 特别大时，已经说明 $g_n = \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}$ 为一固定元素，记为 η，这样，$\tilde{f}_0$ 诱导的 G_0, G_1 之间的同构:

$$\chi_0 : \gamma \to \tilde{f}_0 \circ \gamma \circ \tilde{f}_0^{-1}$$

与 f_* 提升诱导的同构只差一个内部自同构，故由引理，$f_0 \in [f_*]$. □

6 Teichmüller 映射

6.1 Grötzsch 问题

Grötzsch 问题是一个最简单的极值问题的情形，考虑平面上的两个矩形，

$$R_0 = [0, a] \times [0, 1], R_1 = [0, a_1] \times [0, 1]$$

，考虑寻求一个拟共形映射，使得 $f(R_0) = R_1$，且保持顶点相对应，并且使得 K[f] 最小。

Theorem 19 (Grötzsvh)**.** *这样的拟共形映射存在且唯一，并且是一个仿射拉伸映射:*

$$x \mapsto \frac{a_1}{a}x, y \mapsto y$$

证明. 不妨设 $a_1 \ge a$.

记定理所述的仿射拉伸变换为 f_0，只需证 f_0 为所求。

显然得，有 $K[f_0] = \frac{a_1}{a}$.

设 f 是两个矩形之间任意一个拟共形映射，且保持顶点的一一对应，对于几乎所有的 $y \in [0, 1]$，$f(x+iy)$ 是 x 的绝对连续函数，对这样的 y，我们有

$$a_1 \le \int_0^a |f_x(x + iy)|dx$$

两边对 y 进行积分，得

$$a_1 \le \int_0^1 dy \int_0^a |f_x(x+iy)|dx = \iint_{R_0} |f_x(x+iy)|dxdy$$

从而有

$$\begin{aligned} a_1^2 &\le \iint_{R_0} \frac{|f_x(x+iy)|^2}{J_f} dxdy \iint_{R_0} J_f dxdy \\ &\le a_1 \iint_{R_0} \frac{(|f_z|+|f_{\bar z}|)^2}{|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2} dxdy \\ &\le K(f) a a_1 \end{aligned}$$

从而，我们有

$$K[f] \ge K[f_0]$$

当 $K[f]=K[f_0]$ 时，上述所有不等号全部取等。

故 $f_{\bar z}/f_z$ 恒为一个实数，且 $J_f=|f_z|^2(1-|\mu|^2)$ 也是常数，故 $|f_z|$ 为常数，从而对几乎所有的 y 而言，$x \mapsto f(x+iy)$ 的像是一条水平直线段，且 f_x 为非负实数，由 $f_x=f_z+f_{\bar z}$ 得到 $f_z, f_{\bar z}$ 均为非负实数，因而 f 为仿射变换。 □

我们可以将平面上的矩形进行推广，考虑两个 Jordan 区域 D_0, D_1，在他们的边界上依次选择 4 个点，寻求把 D_0 映射至 D_1 的拟共形极值映射，使得伸缩商最小。

这个问题可以用两个 Jordan 区域到矩形的共形映射，化归为 Grötzsch 问题，推广的 Grötzsch 问题的解为 $\phi^{-1}\circ A\circ\varphi$ 其中 ϕ,φ 为两个共形映射，A 是上述定理中的拉伸变换。

6.2 Teichmüller 映射

设 $f: S_0 \to S_1$ 是两个黎曼曲面间的拟共形映射，我们一般将每个同伦类中，最大伸缩商最小的微分同胚称之为 Teichmüller 映射。

Theorem 20 (Strebel；Teichmüller 映射唯一性定理)**.** *设 $f_0: X \to Y$ 是黎曼面间的拟共形映射，其 Beltrami 微分具有形式 $k_0|\varphi_0|/\varphi_0, 0<k_0<1$，其中 φ_0 是 X 上的全纯二次微分，称为 f_0 的伴随二次微分，其单位模 $||\varphi_0||=1$。则对任意一个 $f_1 \in [f_0]$，记其 Teichmüller 微分为 μ，必成立*

$$||\mu||_\infty \ge k_0$$

等号成立当且仅当 $\mu = k_0|\varphi_0|/\varphi_0$

证明.

Lemma 8 (Reich-Strebel 不等式)**.** *在定理条件下，有以下不等式成立:*

$$K_0 \le \iint_X \frac{|1+\mu\varphi_0/|\varphi_0||^2}{1-|\mu|^2}|\varphi_0|dxdy$$

显然，以下式子成立

$$\frac{|1+\mu\varphi_0/|\varphi_0||^2}{1-|\mu|^2} \le \frac{1+k(f_1)}{1-k(f_1)}$$

从而由引理，可知

$$K_0 \le \iint_X \frac{1+k(f_1)}{1-k(f_1)}|\varphi_0|dxdy \le K(f_1)$$

最后一个是因为最大伸缩商的定义。

等号成立时，有

$$\frac{1+k_0}{1-k_0}=\frac{1+k(f_1)}{1-k(f_1)}$$

且

$$\mu\varphi_0/|\varphi_0|=k_0$$

。 □

在这个定理中，范数等于 1 可以改为范数有穷，如果没有这个条件，Teichmüller 映射不一定是极值映射。

而关于 Teichmüller 映射的存在性，在讨论开黎曼曲面的极值问题时，Strebel 等人举出了例子来表明，这种情况下，极值映射不一定唯一，也不一定存在 Teichmüller 映射，在这种情况下，存在性问题需要引进下面的 Hamilton 序列来讨论。

Definition 16. *设 k 是一个极值映射的复特征，X 上的全纯函数列 φ_n 如果使得*

$$lim_{n\to\infty}\iint_X k\varphi_n dxdy=||k||_\infty$$

则称序列为一个 Hamilton 序列。如果其闭一致收敛于 0，则称之为退化的 Hamilton 序列。

引入边界伸缩商

Definition 17. *h 是单位圆 $\mathbb{D}$ 边界的保向自同胚*

$$H[h]=inf_{f\in[h]}lim_{r\to 1}sup_{z\in\partial\mathbb{D}-\partial\mathbb{D}_r}K_z(f)$$

Theorem 21. *若在 h 处极值映射的复特征 k 有退化的 Hamilton 序列，则 $H[h]=K[h]$。*

Theorem 22. *当 $H[h]<K[h]$ 时，[h] 中一定有 Teichmüller 映射。*

Theorem 23. *若 $f:\partial\mathbb{D}\to\partial\mathbb{D}$ 是给定的关于边界 h 处的极值映射，k 为复特征，并且关于 k 没有退化的 Hamilton 序列，则 f 是唯一的极值映射，并且是 Teichmüller 映射。*

6.3 Teichmüller 映射的计算

首先我们需要一些调和映射的知识。

Definition 18. *给定可度量曲面之间的 C^1 光滑映射，$f:(S,\sigma(z)|dz|^2)\longrightarrow(R,\rho(w)|dw|^2)$，定义调和能量密度为*

$$e(f,\sigma,\rho)=\frac{\rho(w(z)))}{\sigma(z)}(|w_z|^2+|w_{\bar z}|^2)$$

，调和能量为

$$E_\rho(f)=\int_S e(f,\sigma,\rho)dA_\sigma=\int_S\frac{\rho(w(z)))}{\sigma(z)}(|w_z|^2+|w_{\bar z}|^2)\sigma(z)dxdy$$
$$=\int_S\rho(|w_z|^2+|w_{\bar z}|^2)dxdy$$

关于 Teichmüller 映射的计算方法有以下定理给出：

Theorem 24. *Teichmüller* 映射 f 和目标曲面对应的全纯二次微分 ψ 所诱导的奇异度量 $\rho = |\psi|$ 满足

$$sup_{\rho \in CM(R)} inf_{g \sim f} E_\rho(g) = 1/2(K'[f] + \frac{1}{K'[f]})$$

其中 $K'[f]$ 是和 f 同伦的拟共形映射等价类的极值最大伸缩商，

$$CM(R) = \{\rho(w) : R \to \mathbb{R}_{>0} | \int_R \rho(w) dudv = 1\}$$

6.4 Teichmüller 映射的应用

对 Teichmüller 映射有两个重要的应用–等几何分析参数化和平面形状插值。形状插值是计算机动画和电影产业的经典问题。等几何分析无缝融合了计算机辅助工程和计算机辅助设计。这两个不同的领域都和几何映射密切相关。对于任意两个区域之间的映射, 一般要求映射必须是双射, 扭曲尽可能小且尽可能光滑。拟共形映射, 特别是 Teichmüller 映射正好满足上述要求。

等几何分析的出现，主要是为了解决有限元分析的耗时问题，等几何分析跳过了有限元分析原来需要的转化为可分析网格的步骤，使得设计和分析统一了起来。然而等几何分析需要进行参数化这个关键的步骤，需要尽可能正交且均匀分布的参数化曲线，因此 Teichmüller 映射在参数化分析中被引进了过来。

形状插值的目标是给定初始形状和目标形状，然后可以生成一序列中间形状，同时使得从初始形状到目标形状的这种演变是渐进而又自然的，由于形状插值会产生中间时刻的形状序列，因此人们往往把形状插值问题看做是数据驱动的建模。而对于动态变化复杂的拓扑曲面，求解微分同胚一直是挑战性的问题，而 Teichmuller 映射可以作为一个强有力的武器。

参考文献

[1] Xianfeng Gu and Shing-Tung Yau. *Computational Conformal Geometry*, volume 3 of *Advanced Lectures in Mathematics*. International Press and Higher Education Press, 2007.