1 联邦学习凸优化内容

2 有凸假设的情况下的收敛性分析

建立在光滑凸函数上的收敛性分析往往基于三个假设:

- 光滑性:$L-smooth, ||\nabla F_i(x) - \nabla F_i(y)|| \leq L||x-y||$
- 无偏梯度:$E_\xi[g_i(x|\xi)] = \nabla F_i(x)$
- 有界方差:$E_\xi[||g_i(x|\xi) - \nabla F_x(x)||^2] \leq \sigma^2$

什么叫对某一个函数进行收敛性分析呢？即证明下面这个式子：

$$f(w^t) - f(w^*) \leq O(g(t)) \tag{1}$$

其中 w^t 是指随着迭代次数 t 不断变化的目标函数值，$f(w^*)$ 代表最优参数 w^* 时的目标函数值，也即为极小值点，$O(\cdot)$ 至一个无穷小量，$g(t)$ 代表一个与迭代次数 t 有关的函数，一般来说若当 $g(t)$ 里面出现了形如：$\frac{1}{t}, e^{-t}$ 随着 t 增大，函数值收敛至 0 这样的形式，即可说明此算法是收敛的。

即我们要对 (1)的右项进行放缩，将其放缩到一个存在 $g(t)$ 的式子的情况下，一般即可说明其存在收敛性质。接下来将以一个有凸假设的具体情况讲述以下内容。这里要特殊说明的是，收敛性分析不同论文之中使用的符号较为混乱，没有进行统一。

3 Adaptive FL in Resource Constrained Edge Computing Systems 的收敛性分析

3.1 迭代轮数为 1 时，本地模型与全局模型是否存在关系

首先给出模型更新式的定义 [7]，为保证收敛的难易程度，我们先以本地轮数为 1 的情况下进行讨论，即每一个本地模型仅在本地进行一次模型参数更新。

定理 3.1 若本地模型更新数，即 $\tau = 1$ 时，其模型参数服从以下公式：

$$x(t) = x(t-1) - \eta \nabla F(x(t-1)) \tag{2}$$

证明. $\tau = 1$ 时，我们使用以下符号进行写作 $\widetilde{x}_i = x(t)$，这是由于上传一次参数后直接训练即可得到下一次参数，不存在本地之间的训练次数大于 1 导致的考虑训练次数中的参数误差。因此有：

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i x_i(t)}{D} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i(\widetilde{x}_i(t-1) - \eta \nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1)))}{D} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i x(t-1)}{D} - \eta \frac{\sum_{i=1}^{N} \nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1)))}{D} \\
&= x(t-1) - \eta \nabla F(x(t-1))
\end{aligned} \tag{3}$$

3.2 多次本地迭代与全局迭代之间的关系

我们定义一个指标函数作为我们全局迭代的式子，即引入不同轮集中式迭代带来的误差，即 $v(t,k)$，它的含义是每一轮全局迭代都是随着不同的 k 值去固定。它存在一个对齐的过程。每一轮都会随着 k 去对齐，在这里 t 和 $k\tau$ 的作用近乎是重叠的，只是一种更加精细的表达方式。因凸的证明比较简单，我们首先从本地模型和全局模型的关系作为出发点开始证明。事实上这并不符合正常人的证明思路，正常来说应该从 (1)出发，一步步逼近我们想要的式子，但这样证明很容易找不到一个应用的出发点，即我们作应用，可以找到更加接近应用人的思路，而非纯数人的思路，直接以纯数人的思路出发，很容易漏掉一些隐藏在我们证明目标本身的一些性质。因分布式架构的关系，我们的出发点首先从 $x(t), v(t,k)$ 的关系。

定理 3.2 集中式迭代与聚合前的分布式迭代的误差存在一个上界，即：当 $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$ 时，存在：

$$\begin{aligned}
||\widetilde{x}_i(t) - v(t,k)|| &\leq g_i(t-(k-1)\tau) \\
g_i(x) &\triangleq \frac{\delta_i}{\beta}((\eta\beta+1)^x - 1)
\end{aligned} \tag{4}$$

其中首次出现的符号分别解释它们的含义 δ 代表 ∇F_i 与 ∇F 之间的误差上界,β 是 F_i 函数的 $\beta - smooth$ 光滑系数。

证明. 使用数学归纳法证明，当 $t = (k-1)\tau$ 时，有下式：

$$\widetilde{x}_i(t) = v(t,k). \tag{5}$$

当 $t \neq (k-1)\tau$ 时:

$$\widetilde{x}_i(t) = \widetilde{x}_i(t-1) - \eta\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1)). \tag{6}$$

将其带入证明所需表达式：

$$\begin{aligned}
&||\widetilde{x}_i(t) - v(t,k)|| \\
&= ||(\widetilde{x}_i(t-1) - \eta\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))) - (v(t,k) - \eta\nabla F_i(v(t,k-1)))|| \\
&= ||(\widetilde{x}_i(t-1) - \eta\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))) - (v(t-1,k) - \eta\nabla F_i(\widetilde{v}(t-1,k))) \\
&\quad - \nabla F_i(v(t,k)) + \nabla F_i(v(t,k)) - \nabla F_i(v(t-1,k))|| \\
&\leq ||\widetilde{x}_i(t-1) - v(t,k-1)|| + \eta||\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1)) - \nabla F_i(v(t,k-1))|| \\
&\quad + \eta||\nabla F_i(v(t,k)) - \nabla F_i(v(t-1,k))|| \\
&\leq (\eta\beta+1)||\widetilde{x}_i(t-1) - v(t-1,k)|| + \eta\delta_i \\
&\leq (\eta\beta+1)g_i(t-1-(k-1)\tau) + \eta\delta_i \\
&= (\eta\beta+1)\left(\frac{\delta_i}{\beta}(\eta\beta+1)^{k-1}\tau - \frac{\delta_i}{\beta}\right) + \eta\delta_i \\
&= \frac{\delta_i}{\beta}(\eta\beta+1)^{k-1}\tau - \frac{\delta_i}{\beta} + \eta\delta_i \\
&= g_i(t-(k-1)\tau).
\end{aligned} \tag{7}$$

在这里，我们使用了数学归纳法去证明了这个式子的正确性，它表达的核心思想是，分布式迭代和集中式迭代的误差上界是由一个 t 的指数函数所控制。而其中的 $t-(k-1)\tau$ 在一定程度上说明了，若不进行模型聚合，这个误差会变得越来越大，但聚合后的模型是否存在合适的界呢，会不会因为模型聚合而导致误差界变大呢？这是我们在下一个定理之中要讨论的内容。

定理 3.3 将模型聚合后得到的模型参数 $x(t)$ 和集中式训练的 $v(t,k)$ 仍然存在一个指数级的上界，其具体表达式为:

$$
\begin{aligned}
||\widetilde{x}(t)-v(t,k)|| &\leq h(t-(k-1)\tau) \\
h(x) &\triangleq \frac{\delta}{\beta}((\eta\beta+1)^x-1)-\eta\delta x
\end{aligned}
\tag{8}
$$

证明. 这一部分证明的思路和之前大同小异，但是分布式的各参数聚合前的误差 bound 需要使用前一部分的定理 3.2，这也进一步提醒我们，为什么要引入前部分工作的证明。

$$
\begin{aligned}
&||x(t)-v(t,k)|| \\
&=||x(t-1)-\eta\frac{\sum_i D_i\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))}{D}-v(t-1,k)+\eta\nabla F(v(t-1,k))|| \\
&=||x(t-1)-v(t-1,k)-\eta\left(\frac{\sum_i D_i\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))}{D}-\nabla F(v(t-1,k))\right)|| \\
&=||x(t-1)-v(t-1,k)||+\eta\left|\left|\frac{\sum_i D_i(\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))-\nabla F_i(v(t-1,k)))}{D}\right|\right| \\
&\leq||x(t-1)-v(t-1,k)||+\eta\frac{\sum_i D_i||\nabla F_i(\widetilde{x}_i(t-1))-\nabla F_i(v(t-1,k))||}{D} \\
&\leq||x(t-1)-v(t-1,k)||+\eta\beta\frac{\sum_i D_i||\widetilde{x}_i(t-1)-v(t-1,k)||}{D} \\
&\leq||x(t-1)-v(t-1,k)||+\eta\beta\frac{\sum_i D_i g_i(t-1-(k-1)\tau)}{D} \\
&\leq(\eta\beta+1)||x(t-1)-v(t-1,k)||+\eta\delta\left((\eta\beta+1)^{t-1-(k-1)\tau}-1\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

但事实上这里面仍然混杂了 $||x(t-1)-v(t-1,k)||$ 这一递推过程之中，无法直接求解的复杂项，事实上我们要考虑利用递推的手段，将 $||x(t-1)-v(t-1,k)||$ 这个误差项去除。

$$
\begin{aligned}
&||x(t)-v(t,k)|| \\
&=\sum_{y=(k-1)\tau+1}^{t}||x(y)-v(t,k)||-||x(y-1)-v(t,k)|| \\
&\leq \eta\delta\sum_{y=(k-1)\tau+1}^{t}\left((\eta\beta+1)^{y-1-(k-1)\tau}-1\right) \\
&=\eta\delta\sum_{z=1}^{t-(k-1)\tau}\left((\eta\beta+1)^{z-1}-1\right) \\
&=\eta\delta\left(\sum_{z=1}^{t-(k-1)\tau}(\eta\beta+1)^{z-1}-\sum_{z=1}^{t-(k-1)\tau}1\right) \\
&=\eta\delta\left(\frac{1-(\eta\beta+1)^{t-(k-1)\tau}}{1-\eta\beta+1}-\eta\delta(t-(k-1)\tau)\right) \\
&=\frac{\eta\delta}{\beta}\left((\eta\beta+1)^{t-(k-1)\tau}-1\right)-\eta\delta(t-(k-1)\tau) \\
&=\frac{\delta}{\beta}\left((\eta\beta+1)^{t-(k-1)\tau}-1\right)-\eta\delta(t-(k-1)\tau)=h(t-(k-1)\tau).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

在这里要反复提及的是，它不仅给出了一个误差的 bound，并且给出了一个 $h(\cdot)$，不难直接对比得到直觉上 $h(x)\leq g(x)$，事实上这间接反馈了联邦权重聚合的意义，他能缩减误差的范围。事实上收敛性的分析工作到这里已经完成了，在有限和下，这个 bound 已经能保证它的收敛，但为了讨论问题的完整性，我们补足全部的收敛性分析工作。

3.3 集中式有效性

想讨论分布式学习的有效性，思路仍然是使用传统的集中式与分布式建立起联系，再分析它的泛化误差。事实上联系这部分的工作我们已经结束了，只需要将已有的 bound 带入即可。那么先探究集中式学习的有效性吧！只有集中式学习是有效的，那么我们的分布式学习才能有效啊！

定理 3.4 当学习率 $\eta \leq \frac{1}{\beta}$ 时，集中式机器学习是有效的。即：

$$||v(t+1,k)-w^*||^2 \leq ||v(t,k)-w^*||^2 \tag{11}$$

证明. 先给出一个可供计算的 bound。

$$\begin{aligned}&||v(t+1,k)-w^*||^2\\&=||v(t,k)-\eta\nabla F(v(t,k))-w^*||^2\\&=||v(t,k)-w^*||^2-2\eta\nabla F(v(t,k))^\top(v(t,k)-w^*)+\eta^2||\nabla F(v(t,k))||^2\end{aligned} \tag{12}$$

若想证明定理 3.4，事实上问题可以直接简单的转化为讨论下式的正负：

$$-2\eta\nabla F(v(t,k))^\top(v(t,k)-w^*)+\eta^2||\nabla F(v(t,k))||^2 \tag{13}$$

在这里，我们引入的方法是光滑凸函数的一些经典定理，以下只给出部分细节和证明，更具体的内容见参考文献。我们要使用的引理分别是：定理 9.1，与定理 9.2。借此，可以轻易得到

$$-2\eta\nabla F(v(t,k))^\top(v(t,k)-w^*)+\eta^2||\nabla F(v(t,k))||^2 \leq 0 \tag{14}$$

故证明完毕。

进一步给出集中式学习的步长与收敛性质，即集中式两次间隔之中的梯度差存在一个 bound

定理 3.5 $\eta \leq \frac{1}{\beta}$ 时，有不等式：

$$F\left(v(t+1,k)\right)-F\left(v(t,k)\right) \leq -\eta\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)||\nabla F(v(t,k))||^2 \tag{15}$$

这个不等式提供了两次集中式更新梯度差的上界。

证明. 要额外提及的是，这里也使用了凸函数的性质。

$$\begin{aligned}
&F(v(t+1,k)) - F(v(t,k)) \\
&\leq \nabla F(v(t,k))^\top (v(t+1,k) - v(t,k)) + \frac{\beta}{2}||v(t+1,k) - v(t,k)||^2 \\
&\leq -\eta \nabla F(v(t,k))^\top \nabla F(v(t,k)) + \frac{\beta\eta^2}{2}||\nabla F(v(t,k))||^2 \\
&\leq -\eta \left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)||\nabla F(v(t,k))||^2
\end{aligned} \tag{16}$$

进一步，我们还要给出一些全新的 bound，但目前的公式已经过长了，再这样写下去就显得内容过于繁琐，我们也参考原论文的写作手法，采取了一个简单的辅助函数来协助我们开展后续的论文写作。

定义 3.1

$$\theta(t,k) = F(v(t,k)) - F(w^*) \tag{17}$$

定理 3.6 当 $\eta \leq \frac{1}{\eta}$ 时，有：

$$\frac{1}{\theta(t+1,k)} - \frac{1}{\theta(t,k)} \leq \omega\eta \left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right) \tag{18}$$

其中 $\omega = \min_k \frac{1}{||v((k-1)\tau,k) - \omega^*||^2}$

证明. 事实上如果想凑出刚才的形式，我们需要先从梯度的递推式出发，这就是机器学习的优化过程，我们需要注意到的并不是所谓的某个分析，而是按照机器学习的分析思路一步步来，计算每一步累加的 bound，事实上这在非凸的机器学习收敛性分析之中更能体现。毕竟凸优化之中经常需要使用一些有趣的定理，而非凸分析中这些工具往往并不存在。

首先：

$$\theta(t+1,k) - \theta(t,k) \leq -\eta \left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)||\nabla F(v(t,k))||^2 \tag{19}$$

进一步地：

$$\theta(t+1,k) \leq \theta(t,k) - \eta \left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)||\nabla F(v(t,k))||^2 \tag{20}$$

又用了凸优化的定理：

$$\begin{aligned}
&\theta(t,k) = F(v(t,k)) - F(w^*) \\
&\le \nabla F(v(t,k))^\top (v(t,k) - w^*) \le ||\nabla F(v(t,k))||\,||v(t,k) - w^*||
\end{aligned} \tag{21}$$

我们十分显然地得到：

$$\frac{\theta(t,k)}{||v(t,k) - w^*||} \le ||\nabla F(v(t,k))|| \tag{22}$$

后续有：

$$\begin{aligned}
\theta(t+1,k) &\le \theta(t,k) - \frac{\eta\left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)\theta(t,k)^2}{||v(t,k) - w^*||^2} \\
&\le \theta(t,k) - \omega\eta\left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)\theta(t,k)^2
\end{aligned} \tag{23}$$

最终得到:

$$\frac{1}{\theta(t+1,k)} - \frac{1}{\theta(t,k)} \ge \frac{\omega\eta\left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)\theta(t,k)}{\theta(t+1,k)} \ge \omega\eta\left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right) \tag{24}$$

证明完毕。

自此，我们所有的工具已经准备完毕，让我们回忆一下我们证明的思路——从分布式与集中式的差异出发，探讨它们的 bound，再分析集中式是一个可行的方案，那么如果能将这几个 bound 连接起来，我们最终可以得到一个收敛的算法证明，接下来让我们完成这最后一步吧！

3.4 算法收敛性分析

再一次将每一步的误差累加起来，可以得到：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta(k\tau,k)} - \frac{1}{\theta((k-1)\tau,k)} &= \sum_{z=(k-1)\tau}^{k\tau-1}\left(\frac{1}{\theta(t+1,k)} - \frac{1}{\theta(t,k)}\right) \\
&\ge \tau\omega\eta\left(1 - \frac{\beta\eta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

等式两边对 K 求和可以得到:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{\theta(k\tau,k)}-\frac{1}{\theta((k-1)\tau,k)}\right) &\geq \sum_{k=1}^{K}\tau\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)\\ &= K\tau\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

此时让 $T=K\tau$，可以得到:

$$\frac{1}{\theta(T,K)}-\frac{1}{\theta(0,1)}-\sum_{k=1}^{K-1}\left(\frac{1}{\theta(k\tau,k+1)}-\frac{1}{\theta(k\tau,k)}\right)\geq T\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right) \tag{27}$$

接下来就是简单的带入，通分，合并同类项的过程:

$$\frac{1}{\theta(T,K)}-\frac{1}{\theta(0,1)}\geq T\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)+\sum_{k=1}^{K-1}\left(\frac{1}{\theta(k\tau,k+1)}-\frac{1}{\theta(k\tau,k)}\right) \tag{28}$$

继续代入:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta(k+1,k\tau)}-\frac{1}{\theta(k,k\tau)}=\frac{\theta(k\tau,k)-\theta(k\tau,k+1)}{\theta(k\tau,k)\theta(k\tau,k+1)}\\ &=\frac{F(v(k\tau,k))-F(v(k\tau,k+1))}{\theta(k\tau,k)\theta(k\tau,k+1)}\geq\frac{-\rho h(\tau)}{\theta(k\tau,k)\theta(k\tau,k+1)}\end{aligned} \tag{29}$$

因定理 3.5的 bound 存在我们可以描述它们之间存在一个更新误差，所以有如下式子:

$$\begin{aligned}\theta(k\tau)\theta(k\tau+1)&\geq\epsilon^2\\ -\frac{1}{\theta(k\tau)\theta(k\tau+1)}&\geq-\frac{1}{\epsilon^2}\end{aligned} \tag{30}$$

借助误差的描述，即可直接得到:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K-1}\left(\frac{1}{\theta(k\tau+1)}-\frac{1}{\theta(k\tau)}\right) &\geq -\sum_{k=1}^{K-1}\frac{\rho h(\tau)}{\epsilon^2}\\ &= -(K-1)\frac{\rho h(\tau)}{\epsilon^2}\end{aligned} \tag{31}$$

最终得到一个 Bound 为:

$$\frac{1}{\theta(T,K)}-\frac{1}{\theta(0,1)}\geq T\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-(K-1)\frac{\rho h(\tau)}{\epsilon^2} \tag{32}$$

还是因为定理 3.5的 bound 存在:

$$-\frac{1}{F(x(T))-F(w^*)}\theta(T,K)\geq-\frac{1}{\epsilon^2} \tag{33}$$

接下来会得到一个巨抽象的式子

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F(x(T))-F(w^*)}-\frac{1}{\theta(T,K)}\\&=\frac{\theta(T,K)-(F(x(T))-F(w^*))}{(F(x(T))-F(w^*))\theta(T,K)}\\&=\frac{F(x(T))-F(w^*)}{(F(x(T))-F(w^*))\theta(T,K)}\\&\geq\frac{-\rho h(\tau)}{(F(x(T))-F(w^*))\theta(T,K)}\\&\geq\frac{-\rho h(\tau)}{\epsilon^2}\end{aligned} \tag{34}$$

聪明的你可能发现了，我们的左式分母已经得到我们需要的那个式子，最后只需化简即可完成所有工作:

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(x(T))-F(w^*)}-\frac{1}{\theta(0,1)}&\geq T\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-K\frac{\rho h(\tau)}{\epsilon^2}\\&=T\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-T\frac{\rho h(\tau)}{\tau\epsilon^2}\\&=T\left(\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-\frac{\rho h(\tau)}{\tau\epsilon^2}\right)\end{aligned} \tag{35}$$

最后有:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F(x(T))-F(w^*)}\geq\frac{1}{F(x(T))-F(w^*)}-\frac{1}{\theta(0,1)}\\&\geq T\left(\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-\frac{\rho h(\tau)}{\tau\epsilon^2}\right)>0\end{aligned} \tag{36}$$

最终整理为:

$$F(x(T))-F(w^*)\leq\frac{1}{T\left(\omega\eta\left(1-\frac{\beta\eta}{2}\right)-\frac{\rho h(\tau)}{\tau\epsilon^2}\right)}=\frac{1}{T\left(\eta\varphi-\frac{\rho h(\tau)}{\tau\epsilon^2}\right)} \tag{37}$$

4 非凸工作的准备知识

事实上，直接分析非凸函数是一个困难的行为，为了更好的让大家理解，我们这一节课的内容事实上是分为了两部分，凸分析与非凸分析。所以我们没有像传统教材一样直接展开凸问题和非凸问题的定义和内容。事实上，如果你完全跟完了上一部分的内容，你应该对凸函数的一些简单内容有着充足的了解和运用，但是你仍然不了解为什么要把凸问题和非凸问题分开。在进行非凸分析前，让我们先开展完整优化函数的收敛性描述。

一个函数的 $f(x)$ 的上界由光滑性所确定，即 $L-smooth$ 条件是控制一个函数的上界，而接下来讨论的强凸，凸，非凸函数定义则是它的下界。这样描述不是很客观，用公式表明即：

定理 4.1 若函数 $f(x)$ 具有 $L-smooth$，则有不等式：

$$\frac{l}{2}||y-x||^2 \leq f(y)-f(x)-\langle\nabla f(x), y-x\rangle \leq \frac{L}{2}||y-x||^2 \tag{38}$$

- 若 $l=0, f(x)$ 是凸函数。
- 若 $l=\sigma>0, f(x)$ 是 $\sigma-$ 强凸函数。
- 若 $l=-L, f(x)$ 是一般的非凸函数。

事实上一个显然易见的问题就是，在非凸情况下的时候，$l<0$ 即可还是必须 $l=-L$ 呢？事实上这是一个难以讨论的问题，因为若 $l<0$，它的态势将更难以分析，并不适合作新手工作，我们还是基于这些内容去讨论。

接下来我们要讨论的内容是基于非凸的收敛性工作，但是我们仅仅知道了非凸的定义这也不够啊，是的，我们又要讨论非凸函数收敛的这个目标，或者说问题是什么了！接下来我们将反复利用定理 9.1，去协助我们完成这一部分的证明与分析。

定理 4.2 强凸函数的收敛速度：提到的 $\sigma-SC$ 和 $L-smooth$ 的函数 $f(x)$ 满足：

$$\frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq f(x_k)-f(x^*) \leq \frac{1}{2\sigma}\|\nabla f(x_k)\|^2 \tag{39}$$

可以容易推导:

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - f(x^*) &\leq f(x_k) - f(x^*) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2 \\
&\leq f(x_k) - f(x^*) - \frac{\sigma}{L}(f(x_k) - f(x^*)) \\
&= \left(1 - \frac{\sigma}{L}\right)(f(x_k) - f(x^*))
\end{aligned} \tag{40}
$$

经过 T 次迭代后:

$$
f(x_T) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{\sigma}{L}\right)^T (f(x_0) - f(x^*)) \tag{41}
$$

在这个式子里面我们就得到了目标函数小于一个 T 为指数衰减的式子，即可说它是收敛的，进一步我们可以深入的讨论它的收敛速度是多少。

达到 ϵ 误差需要满足:

$$
\begin{aligned}
&C_1^T C_2 \leq \epsilon \\
&\frac{1}{C_1^T C_2} \geq \frac{1}{\epsilon} \implies T \geq \frac{\log \frac{C_2}{\epsilon}}{\log \frac{1}{C_1}}
\end{aligned} \tag{42}
$$

因此，强凸是线性收敛 $T = O\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right)$。

比强凸更弱的就是凸函数，那么我们再一次讨论凸函数的收敛，事实上聪明的你认真观察可以发现，它和我们前一部分的讨论几乎是大同小异的:

定理 4.3 在这里依然是考察 $f(x_{k+1}) - f(x^*)$

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - f(x^*) &\leq f(x_k) - f(x^*) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2 \\
f(x_{k+1}) - f(x^*) &\leq \nabla f(x_k)(x_k - x^*) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2
\end{aligned} \tag{43}
$$

下面计算不等式右边部分:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - \eta\nabla f(x_k) - x^*\|^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\eta\nabla f(x_k)(x_k - x^*) + \eta^2\|\nabla f(x_k)\|^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\eta(\nabla f(x_k)(x_k - x^*) - \frac{\eta}{2}\|\nabla f(x_k)\|^2
\end{aligned} \tag{44}
$$

所以进而得到：

$$\frac{1}{2\eta}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2) = \nabla f(x_k)(x_k - x^*) - \frac{\eta}{2}\|\nabla f(x_k)\|^2 \quad (45)$$

注意这里 $\eta = \frac{1}{L}$(事实上在前一部分的讨论之中我们更常用小于去放缩而非等于):

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\eta}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2) \quad (46)$$

对所有迭代轮数求和可以得到：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} f(x_{k+1}) - f(x^*) &\leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2}{2\eta} \\ &\leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\eta}\end{aligned} \quad (47)$$

这说明目标函数是一直减小的，可以进一步讨论目标函数的收敛速度为：

$$\begin{aligned}f(x_T) - f(x^*) \leq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{K}(f(x_i) - f(x^*)) \\ \frac{||x_0 - x^*||^2}{2\eta T} \leq \epsilon\end{aligned} \quad (48)$$

事实上这里的内容都是非常简单的，而且我也为你感到高兴，你已经熟练的掌握简单机器学习里面用到的部分优化知识，但是如果我们想深入的那一刻，你就是踏入了一个永远看不到底的深渊，这就是美妙而恐怖的数学内容！你准备好了么！如果你准备好了，那么请准备打开讲义的下一页吧！

5 重新定义优化问题

事实上我们一开始给出的凸优化的目标函数式 (1)并不严谨，一般情况下，我们将证明一阶优化问题的收敛性分析总结为如下三种表达式：

- 迭代的自变量的完全拟合：

$$||x_T - x^*|| \leq \epsilon \tag{49}$$

- 迭代的因变量的完全拟合：

$$||f(x_T) - f(x^*)|| \leq \epsilon \tag{50}$$

- 使一阶导为 0，保证这一点为极值点。若保证单调性的过程，则一定是极小值（非最小值！）

$$||f'(x_T)|| \leq \epsilon \tag{51}$$

一般来说第一种第二种是较好的情况，第三种是没有办法的情况，但是并不是说这几个条件是谁强谁弱的，可能你能证出来第一条，但是证明不出来第二条，可能你能证明出来第二条证明不出来第三条。但是一般来说，第三条是最差的情况。那么，我们可以接受我们证明的内容是完全不同的了，和以前的任务并不是同一个任务了。

定理 5.1 非凸函数的收敛速度：在这里我们的任务修正为为：

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon \tag{52}$$

有了这个条件我们下面来证明，依旧根据最开始推导的公式：

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2 \quad L - smooth \tag{53}$$

经过 T 次迭代有：

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_0) - \frac{1}{2L}\sum_{k=0}^{T-1}\|\nabla f(x_k)\|^2 \tag{54}$$

简单调整位置，我们的目的是让带有 $||\nabla f(x_k)||$ 的式子出现在小于号的左侧：

$$\frac{1}{2L}\sum_{k=0}^{T-1}\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq f(x_0)-f(x_{k+1}) \leq f(x_0)-f(x^*) \tag{55}$$

我们考虑用数学期望去衡量整体 $||\nabla f(x)||$ 的大小，这样也可以得到最小的一项一定小于均值。

$$\min_{k=0,1,\ldots,T-1}\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1}\|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \frac{2L(f(x_0)-f(x^*))}{T} \tag{56}$$

最后，我们得到其中最小的一项为：

$$\|\nabla f(x_{\min})\|^2 \leq O\left(\frac{1}{T}\right) \leq \epsilon^2 \tag{57}$$

这个定理描述了非凸的随机梯度下降是如何到局部最优点的，但如果想进入全局最优点，则需要考虑 SGD 的问题，在此不做讨论。

而接下来建立在光滑非凸函数上的收敛性分析往往基于四个假设:

- 光滑性:$L-smooth, ||\nabla F_i(x)-\nabla F_i(y)|| \leq L||x-y||$
- 无偏梯度:$E_\xi[g_i(x|\xi)] = \nabla F_i(x)$
- 有界方差:$E_\xi[||g_i(x|\xi)-\nabla F_x(x)||^2] \leq \sigma^2$
- 有界非相似性: 对于不同局部梯度的权重，$\exists \beta^2 \geq 1, \kappa^2 \geq 0$，则一定存在:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i||\nabla F_i(x)||^2 \leq \beta^2||\sum_{i=1}^{m} w_i \nabla F_i(x)||^2 + \kappa^2 \tag{58}$$

6 Tackling the Objective Inconsistency Problem in Heterogeneous Federated Optimization 的收敛性分析

6.1 两次迭代梯度差的表达式

非凸的收敛性工作之中定义了一个辅助函数 $\widetilde{F(x_i)}$。事实上是它找到了一个等价定义去描述普通 $Fedavg$ 的收敛性分析，为了保证公式的统一，在这里我们用在这里使用 $F(x)$ 代替 $F(\widetilde{x}_i)$，**强调，为了保证讲义公式的一致性，这里的符号与原论文相反！** [6]。其数学定义为：

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} w_i F_i(x) \tag{59}$$

我们考虑 mini-batch，即采样的随机性，给出梯度与梯度的无偏估计的表达式：

$$\begin{aligned} \textbf{归一化梯度：} h_i^{(t)} &= \frac{1}{a_i} \sum_{k=0}^{\tau_i - 1} a_{i,k} \nabla F_i(x_i(t,k)) \\ \textbf{归一化随机梯度：} d_i^{(t)} &= \frac{1}{a_i} \sum_{k=0}^{\tau_i - 1} a_{i,k} g_i(x_i(t,k)) \end{aligned} \tag{60}$$

因为其具有无偏估计性，所以我们可知：

$$E\left[d_i^{(t)} - h_i^{(t)}\right] = 0 \tag{61}$$

又因其互相独立，所以彼此之间线性无关，协方差为 0，即不同分量的内积的期望为 0，即:

$$E\langle d_i^{(t)} - h_i^{(t)}, d_j^{(t)} - h_j^{(t)} \rangle = 0 \tag{62}$$

全局更新的规则表达式 $x(t,k)$ 为：

$$x(t+1,0) = x(t,0) - \tau\eta \sum_{i=0}^{m} w_i d_i^{(t)} \tag{63}$$

在这部分 t 是通讯轮数，k 是本地迭代数，最大为 τ 这是一个比前文表达更加清晰的式子。

我们使用定理 9.2描述 $F(t+1,k)$ 与前一轮迭代之间的关系。为什么要讨论这个式子，这是优于我们非凸优化证明证明中参考了前面的式子，可以用两轮迭代来描述梯度的平方。

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right]-F(x(t,0))\\&\leq -\eta\tau_{\text{eff}}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\langle \nabla F(x(t,0)),\sum_{i=1}^{m}w_i d_i^{(t)}\right\rangle\right]}_{T_1}+\frac{\tau_{\text{eff}}^2\eta^2 L}{2}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m}w_i d_i^{(t)}\right\|^2\right]}_{T_2}\end{aligned}\tag{64}$$

为了讨论式 (64)的 bound，我们分别对 T_1 项和 T_2 项讨论它们的 bound。

6.2 T_1 的 bound

我们讨论一阶泰勒项的界：

$$\begin{aligned}T_1&=\mathbb{E}\left[\left\langle \nabla F(x(t,0)),\sum_{i=1}^{m}w_i d_i^{(t)}\right\rangle\right]\\&=\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\langle \nabla F(x(t,0)),\sum_{i=1}^{m}w_i\left(d_i^{(t)}-h_i^{(t)}\right)\right\rangle\right]}_{\text{随机性带来的误差，期望为 0}}+\mathbb{E}\left[\left\langle \nabla F(x(t,0)),\sum_{i=1}^{m}w_i h_i^{(t)}\right\rangle\right]\\&=\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\langle \nabla F(x(t,0)),\sum_{i=1}^{m}w_i h_i^{(t)}\right\rangle\right]}_{2\langle a,b\rangle=\|a\|^2+\|b\|^2-\|a-b\|^2}\\&=\frac{1}{2}\underbrace{\|\nabla F(x(t,0))\|^2}_{\text{我们需要的内容}}+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m}w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F(x(t,0))-\sum_{i=1}^{m}w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]\end{aligned}\tag{65}$$

6.3 T_2 的 bound

我们讨论二阶线性项的界:

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i d_i^{(t)}\right\|^2\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i\left(d_i^{(t)}-h_i^{(t)}\right)+\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]}_{||a+b||^2\leq 2||a||^2+2||b||^2} \\
&\leq \underbrace{2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i\left(d_i^{(t)}-h_i^{(t)}\right)\right\|^2\right]}_{\text{考虑式(62)}} + 2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right] \\
&= \underbrace{2\sum_{i=1}^{m} w_i^2\mathbb{E}\left[\left\|d_i^{(t)}-h_i^{(t)}\right\|^2\right]}_{T_{21}} + 2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{66}
$$

在这个式子里面又一次出现了 d_i, h_i。我们回顾一下它们的定义是:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{归一化梯度:}\ h_i^{(t)} = \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\nabla F_i(x_i(t,k)) \\
&\textbf{归一化随机梯度:}\ d_i^{(t)} = \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k} g_i(x_i(t,k))
\end{aligned}
\tag{67}
$$

将这结果带入到上式之中。为了写的更好理解，我们让 T_{21}, T_{22} 分别讨论。

6.3.1 T_{21} 的 bound

事实上如果对统计理论有足够的了解，可以知道 T_{21} 来源于统计的二阶抽样 [3] 的误差，但这仅仅是抛出一个概念，并不详细分析其特性，感兴趣的同学可以自己翻阅参考文献。现在让我们回归本文的证明过程。

T_{21} 的表达式为:

$$\begin{aligned}
T_{21} &= 2\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \mathbb{E}\left[\left\|d_i^{(t)} - h_i^{(t)}\right\|^2\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k} g_i(x_i(t,k)) - \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\nabla F_i(x_i(t,k))\right\|^2\right] \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i^2}{a_i^2}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} [a_{i,k}]^2 \,\mathbb{E}\left[\|g_i(x_i(t,k)) - \nabla F_i(x_i(t,k))\|^2\right] \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i^2}{a_i^2}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} [a_{i,k}]^2 \,\sigma^2 \\
&\leq 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i^2 \|a_i\|^2}{\|a_i\|_1^2}
\end{aligned} \tag{68}$$

借此可以整理得到 T_2 目前的 bound 为:

$$T_2 \leq 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} + 2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right] \tag{69}$$

6.4 带回 T_1, T_2 的结果

将前两部分计算的 T_1, T_2 的 bound 带入可以得到:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right] - F(x(t,0)) \\
\leq& -\tau_{\text{eff}}\eta T_1 + \frac{\tau_{\text{eff}}^2\eta^2 L}{2} T_2 \\
\leq& -\frac{\tau_{\text{eff}}\eta}{2}\left\{\|\nabla F(x(t))\|^2 + \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right] - \mathbb{E}\left[\left\|\nabla F(x(t,0)) - \sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]\right\} \\
&+ \frac{\tau_{\text{eff}}^2\eta^2 L}{2}\left\{2\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} + 2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]\right\}
\end{aligned} \tag{70}$$

在这个基础上我们进行繁琐到我不想在 Latex 环境之中的描述的合并同类项即可得到:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right]-F(x(t,0)) \\
&\leq -\frac{\tau_{\text{eff}}\eta}{2}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2-\frac{\tau_{\text{eff}}\eta}{2}\underbrace{\left(1-2\tau_{\text{eff}}\eta L\right)}_{\text{使用假设，让此项恒负}}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right] \\
&+\tau_{\text{eff}}^2\eta^2 L\sigma^2\sum_{i=1}^{m} w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2}+\frac{\tau_{\text{eff}}\eta}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F(x(t,0))-\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{71}
$$

其中的假设为:$\tau_{\text{eff}}\eta L\leq\frac{1}{2}$。

因为里面的有一项恒负，我们不妨丢掉这一项，这使得有不等式右边的项变得更大，不等号依然成立。所以接下来有:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right]-F(x(t,0))}{\eta\tau_{\text{eff}}} \\
&\leq -\frac{1}{2}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2+\tau_{\text{eff}}\eta L\sigma^2\sum_{i=1}^{m} w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F(x(t,0))-\sum_{i=1}^{m} w_i h_i^{(t)}\right\|^2\right]}_{\|\sum_{i=1}^m w_i z_i\|^2\leq\sum_{i=1}^m w_i\|z_i\|^2} \\
&\leq -\frac{1}{2}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2+\tau_{\text{eff}}\eta L\sigma^2\sum_{i=1}^{m} w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0))-h_i^{(t)}\right\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{72}
$$

这个公式之中我们唯一不知道 bound 的式子即为 $\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0))-h_i^{(t)}\right\|^2\right]$ 接下来讨论此项。

6.5 自然而然的分析新得到的一项未知数

我们先不讨论原因，因为我们目前的分析是非常自然而然的落入这一部分的分析，我们现在仅仅考虑完成刚才的未知项的 bound 分析：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0)) - h_i^{(t)}\right\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0)) - \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\nabla F_i(x(t,k))\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\left(\nabla F_i(x(t,0)) - \nabla F_i(x(t,k))\right)\right\|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0)) - \nabla F_i(x(t,k))\right\|^2\right] \\
&\leq \frac{L^2}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|x(t,0) - x(t,k)\right\|^2\right]}_{T_3}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

分析我们从来没有分析过的 T_3，有下式：

$$
\begin{aligned}
T_3 = \mathbb{E}\left[\left\|x(t,0) - x(t,k)\right\|^2\right] &= \eta^2\cdot\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s} g_i(x(t,s))\right\|^2\right] \\
&\leq 2\eta^2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\left(g_i(x(t,s)) - \nabla F_i(x(t,s))\right)\right\|^2\right] + 2\eta^2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right] \\
&= 2\eta^2\sum_{s=0}^{k-1}[a_{i,s}]^2\mathbb{E}\left[\left\|g_i(x(t,s)) - \nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right] + 2\eta^2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right] \\
&\leq 2\eta^2\sigma^2\sum_{s=0}^{k-1}[a_{i,s}]^2 + 2\eta^2\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right] \\
&\leq 2\eta^2\sigma^2\sum_{s=0}^{k-1}[a_{i,s}]^2 + 2\eta^2\left[\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\right]\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right] \\
&\leq 2\eta^2\sigma^2\sum_{s=0}^{k-1}[a_{i,s}]^2 + 2\eta^2\left[\sum_{s=0}^{k-1} a_{i,s}\right]\sum_{s=0}^{\tau-1} a_{i,s}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,s))\right\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{74}
$$

在这及部分放缩之中，我们察觉：反复出现的求和号让公式变得复杂难以推导，为了解决这个问题，我们可以构造一个有界 bound 来放缩掉前面的求和项，则有定理：

定理 6.1 求和的 **Bound**: 在这个环节之中我们要应用两个公式，第一个 bound 为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|a_i\|_1}\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,k}\left[\sum_{s=0}^{k-1}[a_{i,s}]^2\right] &\le \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,k}\left[\sum_{s=0}^{\tau_i-2}[a_{i,s}]^2\right] \\ &= \sum_{s=0}^{\tau_i-2}[a_{i,s}]^2 = \|a_i\|_2^2 - [a_{i,-1}]^2,\end{aligned} \tag{75}$$

第二个 bound 为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|a_i\|_1}\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,k}\left[\sum_{s=0}^{k-1}a_{i,s}\right] &\le \frac{1}{a_i}\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,k}\left[\sum_{s=0}^{\tau_i-2}a_{i,s}\right] \\ &= \sum_{s=0}^{\tau_i-2}a_{i,s} = \|a_i\|_1 - a_{i,-1}.\end{aligned} \tag{76}$$

在这一结论之后，我们可以理解为对 (74)作二次数学期望可以得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|a_i\|_1}\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,k}\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right] \\ &\le 2\eta^2\sigma^2\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+2\eta^2\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)\sum_{k=0}^{\tau_i-1}a_{i,s}\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x_i(t,k))\|^2\right]\end{aligned} \tag{77}$$

这里面的未知项是：$\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x_i(t,k))\|^2\right]$，我们继续对这一部分求它的 bound:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x_i(t,k))\|^2\right] \\ &\le 2\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x_i(t,k))-\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right] \\ &\le 2L^2\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right]\end{aligned} \tag{78}$$

将求得的 bound 带入其中:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|a_i\|_1}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right] \\
&\leq 2\eta^2\sigma^2\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\
&\quad + 4\eta^2L^2\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right] \\
&\quad + 4\eta^2\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x_i(t,0))\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{79}
$$

对刚才的式子反复整理，合并同类项之后可以得到:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|a_i\|_1}\sum_{k=0}^{\tau_i-1} a_{i,k}\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right] \\
&\leq \frac{2\eta^2\sigma^2}{1-4\eta^2L^2\|a_i\|_1\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)}\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\
&\quad + \frac{4\eta^2\|a_i\|_1\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)}{1-4\eta^2L^2\|a_i\|_1\left(\|a_i\|_1-a_{i,-1}\right)}\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{80}
$$

为了让式子更加整洁定义 $D=4\eta^2L^2\max_i\{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1-a_{i,-1})\}<1$，整理可以得到:

$$
\begin{aligned}
&L^2\sum_{k=0}^{\tau_i-1}\frac{a_{i,k}}{a_i}\mathbb{E}\left[\|x(t,0)-x_i(t,k)\|^2\right] \\
&\leq \frac{2\eta^2L^2\sigma^2}{1-D}\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+\frac{D}{1-D}\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right]
\end{aligned}
\tag{81}
$$

我们回头使用 $L-smooth$ 条件与有界非相似性假设，可以得到:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F_i(x(t,0))-h_i^{(t)}\right\|^2\right] \\
&\leq \frac{\eta^2L^2\sigma^2}{1-D}\sum_{i=1}^{m} w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+\frac{D}{2(1-D)}\sum_{i=1}^{m} w_i\mathbb{E}\left[\|\nabla F_i(x(t,0))\|^2\right] \\
&\leq \frac{\eta^2L^2\sigma^2}{1-D}\sum_{i=1}^{m} w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+\frac{D\beta^2}{2(1-D)}\mathbb{E}\left[\|\nabla F(x(t,0))\|^2\right]+\frac{D\kappa^2}{2(1-D)}
\end{aligned}
\tag{82}
$$

自此，我们可以得到非常良好的性质，可能你一脸懵逼的时候，我们已经得到了结果，请好好地准备，不要急着去讨论这一内容。

6.6 最终结果

我们回到刚才的上一章节的最开始，我们已经得到了我们需要求的那个 bound 结果，最终结果为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right]-F(x(t,0))}{\eta\tau_{\text{eff}}} \\
&\leq -\frac{1}{2}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2+\tau_{\text{eff}}L\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} \\
&\quad+\frac{\eta^2L^2\sigma^2}{1-D}\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+\frac{D\kappa^2}{2(1-D)}+\frac{D\beta^2}{2(1-D)}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2\right] \\
&\leq -\frac{1}{2}\frac{(1-D(1+\beta^2))}{1-D}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2 \\
&\quad+\tau_{\text{eff}}L\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2}+\frac{\eta^2L^2\sigma^2}{1-D}\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right)+\frac{D\kappa^2}{2(1-D)}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

我们不妨设 $D\leq\frac{1}{2\beta^2+1}$，可以得到 $\frac{1}{1-D}\leq 1+\frac{1}{2\beta^2}$ 并且能得到 $\frac{D\beta^2}{1-D}\leq\frac{1}{2}$。可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}\left[F(x(t+1,0))\right]-F(x(t,0))}{\eta\tau_{\text{eff}}} \\
&\leq -\frac{1}{4}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2+\tau_{\text{eff}}\eta L\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} \\
&\quad+\eta^2L^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{2\beta^2}\right)\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\
&\quad+2\eta^2L^2\max_i\{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1-a_{i,-1})\}\kappa^2\left(1+\frac{1}{2\beta^2}\right) \\
&\leq -\frac{1}{4}\left\|\nabla F(x(t,0))\right\|^2+\tau_{\text{eff}}\eta L\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} \\
&\quad+\frac{3}{2}\eta^2L^2\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\
&\quad+3\eta^2L^2\kappa^2\max_i\{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1-a_{i,-1})\}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

取计算之中的平均误差可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\mathbb{E}\left[\|\nabla F(x(t,0))\|^2\right] \leq \frac{4\left[F(x(0,0))-F_{\text{inf}}\right]}{\eta\tau_{\text{eff}}T} &+ 4\tau_{\text{eff}}\eta L\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} \\ &+ 6\eta^2L^2\sigma^2\sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\ &+ 12\eta^2L^2\kappa^2\max_i\{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1-a_{i,-1})\}\end{aligned} \tag{85}$$

这个式子的表达过于复杂，我们将其简化为：

$$\begin{aligned}A &= m\tau_{\text{eff}}\sum_{i=1}^{m}w_i^2\frac{\|a_i\|_2^2}{\|a_i\|_1^2} \\ B &= \sum_{i=1}^{m}w_i\left(\|a_i\|_2^2-[a_{i,-1}]^2\right) \\ C &= \max_i\{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1-a_{i,-1})\}.\end{aligned} \tag{86}$$

则有简化的表达式为：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\mathbb{E}\left[\left\|\nabla\tilde{F}(x^{(t,0)})\right\|^2\right] \\ &\leq \frac{4\left[\tilde{F}(x^{(0,0)})-\tilde{F}_{\text{inf}}\right]}{\eta_{\text{eff}}T}+\frac{4\eta L\sigma^2A}{m}+6\eta^2L^2\sigma^2B+12\eta^2L^2\kappa^2C\end{aligned} \tag{87}$$

进一步考虑梯度的最小值为：

$$\begin{aligned}&\min_t\mathbb{E}\left[\left\|\nabla\tilde{F}(x^{(t,0)})\right\|^2\right] \\ &\leq \frac{4\left[\tilde{F}(x^{(0,0)})-\tilde{F}_{\text{inf}}\right]}{\eta_{\text{eff}}T}+\frac{4\eta L\sigma^2A}{m}+6\eta^2L^2\sigma^2B+12\eta^2L^2\kappa^2C\end{aligned} \tag{88}$$

借此，我们证明完毕算法的收敛性，接下来我们讨论在这之中出现的学习率的约束条件。

6.7 学习率的约束条件

我们在刚才的内容中讨论了许多约束条件，现在将其整理如下:

$$\begin{aligned} \eta L &\leq \frac{1}{2\tau_{\text{eff}}} \\ 4\eta^2 L^2 \max_i \{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1 - a_{i,-1})\} &\leq \frac{1}{2\beta^2+1}. \end{aligned} \tag{89}$$

考虑对有界约束性，我们可以对其约束得到:

$$\begin{aligned} &4\eta^2 L^2 \max_i \{\|a_i\|_1(\|a_i\|_1 - a_{i,-1})\} \\ &\leq 4\eta^2 L^2 \max_i \|a_i\|_1^2 \leq \frac{1}{2\beta^2+1}, \end{aligned} \tag{90}$$

最终可以得到 ηL 的约束条件为:

$$\eta L \leq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{\max_i \|a_i\|_1\sqrt{2\beta^2+1}}, \frac{1}{\tau_{\text{eff}}}\right\}. \tag{91}$$

为了简化描写，我们引入 $\eta = \sqrt{\frac{m}{\overline{\tau}T}}$,$\overline{\tau} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \tau_i$ 所以我们得到:

$$\begin{aligned} &\min_{t\in[T]} \mathbb{E}\left[\|\nabla F(x(t,0))\|^2\right] \\ &\leq \mathcal{O}\left(\frac{\overline{\tau}}{\tau_{\text{eff}}\sqrt{m\overline{\tau}T}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{A\sigma^2}{\sqrt{m\overline{\tau}T}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{mB\sigma^2}{\overline{\tau}T}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{mC\kappa^2}{\overline{\tau}T}\right) \end{aligned} \tag{92}$$

事实上我们省略一些内容，已经完成了所有的证明。除此之外的内容我们暂且省略，会在后续的内容补充。但讲义的全部内容已经是一个完整的收敛性分析的内容。在接下来我们会像凸优化的内容一样，回顾非凸优化的思路与逻辑。

7 非凸优化的路径

一个不幸的消息是 FedNova 这篇论文的非凸分析是非凸分析里面最简单且最好的。比这篇论文描述好的论文没有这篇论文简单，比这篇论文简单的分析没有这篇好。所以说我们可以发现，我们的思维路径一直都是把未知的数求它的 bound，但是这是由于作者高超的水平而得以有

如此精妙的描述。事实上为了不失一般性，我们还是希望给出整个证明的逻辑思路。

这篇论文考虑了 mini-batch，就是随机梯度下降，比起梯度下降的情况，随机梯度下降就是梯度下降的一个抽样情况。或者说随机梯度下降和梯度下降的关系不能相等，而是随机梯度下降的期望等于梯度下降

进一步，我们考虑使用两次模型聚合得到的式子，去得到我们想要的式子，即**梯度的二阶矩平方**，事实上在这里我们通过式子 (65) 就已经得到了整个部分。这是我们对梯度迭代式进行泰勒展开得到的结果，即式 (65) 中的 T_1。而 T_2 的内容之中，我们不可避免地讨论 mini-batch，minibatch 的期望是 0，那么它的二阶矩呢？也就是所谓的方差信息是什么呢？难道我们抽样不损失信息吗？所以我们 T_1, T_2 中分别讨论了分布式梯度迭代的误差与随机抽样 minibatch 的误差。minibatch 的误差讨论完后，我们要考虑分布式梯度迭代的误差，这是什么意思呢？就是我们本地需要迭代 τ 次才聚合，所以说我们的分析流程一定会考虑迭代过程出现的误差。这就是 T_1 中的最后一项。

我们在梯度迭代的过程中紫红，又一次出现了我们想要的式子，但他是**分布式结构梯度的二阶矩平方**，那么这部分导致我们需要用一个误差 bound 去约束它的内容，这就是我们假设三的内容。最终通过这样的方式统一。

这里看不懂无所谓，会出视频讲解。

8 致谢

特别感谢支持我撰写这个文档的人，事实上从 2024 年 7 月 1 日开始，这个文档便陆陆续续的撰写之中，但是它一直没有一个正确且我希望的框架。在 2024 年 10 月 1 日，B 站丸一口老师与提供了一些证明的辅助工作 [5]。同时且，我首次与 Dun Zeng 博士对理论内容进行深入的探讨。这些大部分工作的框架是 Dun Zeng 博士建议与提供，我仅仅是在此整理，撰写，翻译完这些文档。在我看来 Dun Zeng 博士的一些理论工作是具有开创性意义，并值得反复去阅读整理的 [10–12]。还有部分知乎答主补充

好了教材没有讲述清楚的工作，特别是知乎答主 Tintin [4] 与 Zeap [9]。最后再一次感谢白小鱼博士 [1] 提供的联邦学习平台与对我本人的长久鼓励与支持！此类工作还会继续延续下去，以求为大家提供更好的数学科普内容与分析内容！

9 附录

定理 9.1 光滑凸函数的上界：对于具有 $\beta - smooth$ 性质的凸函数 $f(x)$，有以下不等式成立 [2]：

$$0 \leq f(x) - f(y) - \nabla f(y)'(x-y) \leq \frac{\beta}{2}||x-y||^2 \tag{93}$$

事实上，这个定理还有一个更进一步的改良下界更加常用：

$$f\left(x - \frac{1}{\beta}\nabla f(x)\right) - f(x) \leq -\frac{1}{2\beta}||\nabla f(x)||^2 \tag{94}$$

定理 9.2 泰勒展开的部分 **bound**：对于具有 $\beta - smooth$ 性质的凸函数 $f(x)$，有以下不等式成立 [2]：

$$f(x) - f(y) \leq \nabla f(x)'(x-y) - \frac{1}{2\beta}||\nabla f(x) - \nabla f(y)||^2 \tag{95}$$

证明. 不妨设 $z = y - \frac{1}{\beta}(\nabla f(y) - \nabla f(x))$ 所以有：

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(y)\\
&= f(x) - f(z) + f(z) - f(y)\\
&\leq \nabla f(x)^\top (x-z) + \nabla f(y)^\top (z-y) + \frac{\beta}{2}\|z-y\|^2\\
&= \nabla f(x)^\top (x-y) + (\nabla f(x) - \nabla f(y))^\top (y-z) + \frac{1}{2\beta}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2\\
&= \nabla f(x)^\top (x-y) - \frac{1}{2\beta}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2.
\end{aligned} \tag{96}$$

参考文献

[1] baixiaoyv. *Zhihu platform account*. 2024. URL: https://www.zhihu.com/people/youngfish42.

[2] Sébastien Bubeck. *Convex Optimization: Algorithms and Complexity*. 2015. arXiv: 1405.4980 [math.OC]. URL: https://arxiv.org/abs/1405.4980.

[3] Shanze Sun. *Sample Survey*. Peking University Press, 2014.

[4] Tintin. *Proof of the convergence rate of gradient descent under strong convex/convex/non-convex*. 2020. URL: https://zhuanlan.zhihu.com/p/66229525.

[5] Wan. *Popular science in federated learning*. 2024. URL: https://space.bilibili.com/3461572290677609?spm_id_from=333.1369.opus.module_author_avatar.click.

[6] Jianyu Wang et al. *Tackling the Objective Inconsistency Problem in Heterogeneous Federated Optimization*. 2020. arXiv: 2007.07481 [cs.LG]. URL: https://arxiv.org/abs/2007.07481.

[7] Shiqiang Wang et al. "Adaptive Federated Learning in Resource Constrained Edge Computing Systems". In: *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 37.6 (2019), pp. 1205–1221. DOI: 10.1109/JSAC.2019.2904348.

[8] Hao Yu, Sen Yang, and Shenghuo Zhu. *Parallel Restarted SGD with Faster Convergence and Less Communication: Demystifying Why Model Averaging Works for Deep Learning*. 2018. arXiv: 1807.06629 [math.OC]. URL: https://arxiv.org/abs/1807.06629.

[9] Zeap. *What are we talking about when we talk about convergence speed?* 2021. URL: https://zhuanlan.zhihu.com/p/27644403.

[10] Dun Zeng et al. *Enhanced Federated Optimization: Adaptive Unbiased Client Sampling with Reduced Variance*. 2024. arXiv: 2310.02698 [cs.LG]. URL: https://arxiv.org/abs/2310.02698.

[11] Dun Zeng et al. *FedAWARE: Maximizing Gradient Diversity for Heterogeneous Federated Server-side Optimization*. 2024. arXiv: 2310.02702 [cs.LG]. URL: https://arxiv.org/abs/2310.02702.

[12] Dun Zeng et al. *FedLab: A Flexible Federated Learning Framework*. 2022. arXiv: 2107.11621 [cs.LG]. URL: https://arxiv.org/abs/2107.11621.