线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2014.04.26

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1.已知$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$均为4维列向量且定义矩阵$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)$和$B=(\vec{\alpha}_3,2\vec{\alpha}_2,3\vec{\alpha}_1,4\vec{\alpha}_4)$。已知行列式$|A|=1$，求行列式$|A-B|$。

解：

$$\begin{aligned}|A-B|&=|(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_3,-\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3-3\vec{\alpha}_1,-3\vec{\alpha}_4)|\\&=-6|(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)|\\&=-6\end{aligned}$$

2. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，求$A^n$。

解：$A^n=\begin{pmatrix}A_1^n&0\\0&A_2^n\end{pmatrix}$，其中$A_1=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}$

$A_1^n=4^{n-1}A_1=4^{n-1}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$，$A_2^n=\begin{pmatrix}2^n&2n2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$

3. 设4阶行列式D中第1行元素为1，2，0，-4，第2行元素的余子式为6，x，19，2，求x。

解：因为$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0$,

故有$1\times6+2\times(-x)+0\times19+(-4)\times(-2)=0$

所以$x=7$

4. 若方阵的所有元素均为非负实数，且各列元素之和均为1，则该方阵称为随机矩阵。例如：$\begin{pmatrix}0.1&0.2\\0.9&0.8\end{pmatrix}$即为2阶随机矩阵。现设$A$和$B$为$n$阶随机矩阵. 证明：$AB$也是随机矩阵。

解：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$AB=(c_{ij})_{n\times n}$.

由A，B为随即矩阵可知，对任意$1\le j\le n$有

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}=1,\ \sum_{i=1}^n b_{ij}=1.$$

因此对任意$1\le j\le n$有

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^n(\sum_{i=1}^n a_{ik})b_{kj}=\sum_{k=1}^n b_{kj}=1,$$

因此AB为随机矩阵。

5. 设A和B都是5阶方阵，且满足对所有非零向量X有$AX\ne BX$，求矩阵$A-B$的秩。

解：因为对所有非零向量X有$AX\ne BX$,

所以说明齐次线性方程组$(A-B)X=0$只有零解，

故$r(A-B)=5$.

二.(10分) 设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

有唯一解，请讨论下列方程组的解的情况。

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n-1,1}x_{n-1}=a_{n1},\\ \qquad\vdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_{n-1}=a_{nn},\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots b_{n-1}x_{n-1}=b_n.\end{cases}$$

解：第一个方程组有唯一解说明$r(A)=n$，即系数矩阵的所有列向量线性无关，

因此第二个方程组的系数矩阵的秩小于其增广矩阵的秩，

故第二个方程组无解。

三.(12分) 求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+xy & 3+xyz \\ 1 & x+1 & x+y+xy & x+y+z+xyz \\ 1 & x^2+1 & x^2+y^2+xy & x^2+y^2+z^2+xyz \\ 1 & x^3+1 & x^3+y^3+xy & x^3+y^3+z^3+xyz \end{vmatrix}$$

解：解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+xy & 3+xyz \\ 1 & x+1 & x+y+xy & x+y+z+xyz \\ 1 & x^2+1 & x^2+y^2+xy & x^2+y^2+z^2+xyz \\ 1 & x^3+1 & x^3+y^3+xy & x^3+y^3+z^3+xyz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x+y & x+y+z \\ 1 & x^2 & x^2+y^2 & x^2+y^2+z^2 \\ 1 & x^3 & x^3+y^3 & x^3+y^3+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(y-1)(z-1)(y-x)(z-x)(z-y)$$

四. (12分) 令$\alpha_1 = [1,4,0,2]^T, \alpha_2 = [2,7,1,3]^T, \alpha_3 = [0,1,-1,a]^T, \beta = [3,10,b,4]^T$，问

（1）a，b取何值时，β不能由α_1，α_2，α_3线性表示？

（2）a，b何值时，β可以由α_1，α_2，α_3线性表示？并写出表示式。

解：（1）$b \neq 2$，a取任意值；

（2）当$b=2$，$a \neq 1$时，β可以由α_1，α_2，α_3唯一表示，$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$；

当$b=2$，$a=1$时，β可以由α_1，α_2，α_3线性表示，$\beta = -(2k+1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3$。

五.(12分) 设A是一个$m \times n$矩阵, 且齐次线性方程组$AX=\theta$只有零解，证明A^TA是可逆的。

解：齐次线性方程组$AX=\theta$只有零解说明$r(A)=n$，

要证A^TA是可逆的，只需要证明$r(A^TA)=r(A)$即可，

进而只要证明线性方程组$AX=0$和$A^TAX=0$同解即可。

显然$AX=0$的解必为$A^TAX=0$的解，

另一方面，由$x^TA^TAx=0 \Rightarrow (Ax)^T(AX)=0 \Rightarrow Ax=0$，

故$A^TAX=0$的解也必为$AX=0$的解。

综上，可证得A^TA是可逆的。

六.(14分) 已知齐次线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$$

和

$$(2)\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求a，b，c的值。

解：方程组（2）的未知数的个数大于方程的个数，故必有无穷多解，因此必有基础解系。

又因为（2）与（1）同解，所以方程组（1）也必有基础解系，（1）的系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

因为$r(A)<3$,从而$a=2$，且$\alpha=[-1,-1,1]^T$为方程组（1）的一个基础解系。

将$x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_3=1$代入方程组（2）可得$b=1$，$c=2$或者$b=0$，$c=1$。

经验证，当$b=0$，$c=1$时，方程组（1）和（2）不同解，故舍去，

当$b=1$，$c=2$时，方程组（2）和（2）同解。

综上，$a=2$，$b=1$，$c=2$。