一 、（10 分）质点作半径为 R 的圆周运动，其加速度与速度的夹角 φ 保持不变，求质点速度随时间而变化的规律。已知质点初速为 v_0 。

解：作曲线运动质点的速度方向沿着切线方向。

$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_t}$，而 $a_n = \frac{v^2}{R}$， $a_t = \frac{dv}{dt}$

所以 $\frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R\tan\varphi}$

考虑到初始条件，两边积分：$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{dt}{R\tan\varphi}$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{1}{R\tan\varphi}$$

$$(v = \frac{v_0 R\tan\varphi}{R\tan\varphi - v_0 t})$$

二、（15 分）如图所示，一轻绳两端各系一小物体，其质量分别为 m_1 和 m_2，置于匀速转动的水平转盘上，二物体到盘心的距离分别为 r_1 和 r_2 。设 $m_2 > m_1$，$r_2 > r_1$，物体与转盘间的摩擦系数均为 μ 。试讨论在不同角速度时，物体所受的静摩擦力和绳子张力。求保持物体在圆盘上静止所允许的最大角速度。

解：

物体m_1 和m_2水平方向的受力情况如图所示，T为绳中张力，F_1和F_2分别为物体 1 和 2 所受的摩擦力。

（1）当摩擦力足以提供物体 2 的向心力时，$F_1 = m_1 r_1 \omega^2$，$F_2 = m_2 r_2 \omega^2$，$T = 0$

（2）角速度继续增大，由于$r_2 > r_1$，F_2先达到最大静摩擦力，此时：

$$F_2 = m_2 g\mu = m_2 r_2 \omega^2,\quad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r_2}}$$

$$F_1 = m_1 r_1 \omega^2 = \frac{m_1 r_1 \mu g}{r_2}$$

$$T = 0$$

（3）不角速度继续增大，绳中开始产生张力，才能提供足够的向心力，在F_1没有达到最大静摩擦力之前：

$$T + m_2 g\mu = m_2 r_2 \omega^2$$

$$T + F_1 = m_1 r_1 \omega^2$$

解得$T = m_2 r_2 \omega^2 - m_2 g\mu$；

$$F_1 = m_1 r_1 \omega^2 - m_2 r_2 \omega^2 + m_2 g\mu;$$

$$F_2 = m_2 g\mu$$

（4）F_1达到最大静摩擦力时，继续增大角速度，此时只有增大绳中张力才可以提供足够的向心力，张力增大至一定程度时，F_1方向改变，其大小增至最大静摩擦力时，此时的角速

度就是保持物体在圆盘上静止所允许的最大角速度

此时 $F_1 = m_1 g\mu$，方向与绳施于 m_1 的张力 T 相反，和 F_2 相同，$F_2 = m_2 g\mu$

$T + m_2 g\mu = m_2 r_2 \omega^2$

$T - m_1 g\mu = m_1 r_1 \omega^2$

解得 $T = m_2 r_2 \omega^2 - m_2 g\mu = m_1 r_1 \omega^2 + m_1 g\mu$

允许的最大角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)g\mu}{m_2 r_2 - m_1 r_1}}$

三、（15 分）地面上竖直安放着一个劲度系数为 k 的弹簧，其顶端连接一静止的质量为 m' 的物体，有个质量为 m 的物体，从距离顶端为 h 处自由落下，与质量为 m' 的物体作完全非弹性碰撞，求弹簧对地面的最大压力。

解：弹簧最初的压缩量为 $m'g/k$。

碰撞前 m 的速度为 $\sqrt{2gh}$，

由动量守恒，碰撞后 m 和 m' 的共同速度为 $v = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{m+m'}$

当物体速度为零时，弹簧为最大压缩，此时地面受到的压力最大，设弹簧又被压缩了 x

取未碰撞前 m' 的平衡位置为重力热能零点，弹簧原长为弹性热能零点。
由机械能守恒，得：

$$\frac{1}{2}(m'+m)v^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{m'g}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x+\frac{m'g}{k}\right)^2 - (m'+m)gx$$

解得 $x = \dfrac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2kh}{m'+m}}\right)$

$$f_{\max} = k\left(x+\frac{m'g}{k}\right) = (m'+m)g + mg\sqrt{1+\frac{2kh}{m'+m}}$$

四、（10 分）角动量为 L，质量为 m 的人造卫星，在半径为 r 的圆轨迹上运行，试求它的动能、势能和总能量。

解：$L = pr$

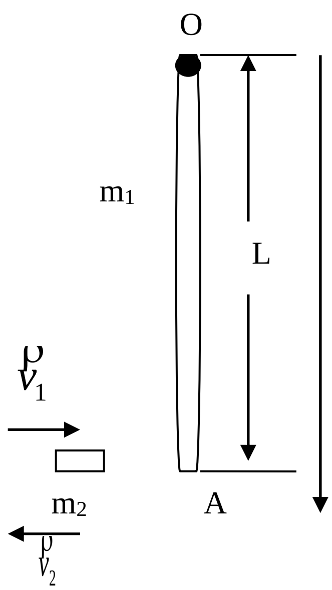
动能 $E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{L^2}{2mr^2}$ ；$m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{L^2}{mr^3} = G\dfrac{mM}{r^2}$

势能 $E_p = -G\dfrac{mM}{r} = -\dfrac{L^2}{mr^2}$

总能量 $E = E_k + E_p = -\dfrac{L^2}{2mr^2}$

五、（15 分）质量为 m_1,长度为 L 的均匀细棒，静止平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上，它可绕端点 O 转动。另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块，它与棒的 A 端相碰撞，碰撞前后的速度分别为 $\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ 。求：

棒从碰撞开始到停止转动所用的时间。



解：在碰撞瞬间，可忽略外力作用，m_1 和 m_2 组成的系统对于端点 O 的外力矩为零，系统对端点 O 的角动量守恒

以逆时针方向为正，有：

$m_2 v_1 L = J\omega - m_2 v_2 L$

所以棒获得的角动量 $L = J\omega = m_2(v_1 + v_2)L$

以端点 O 为原点，向下方向为 x 轴正方向，建立坐标系

在 x 处取棒上一质元 $dm = \lambda dx$，线密度 $\lambda = \dfrac{m_1}{L}$

质元受到的摩擦力为 $-\mu g dm = -\dfrac{\mu g m_1}{L}dx$，

对 O 的摩擦力矩为 $dM = -\dfrac{\mu g m_1 x}{L} dx$

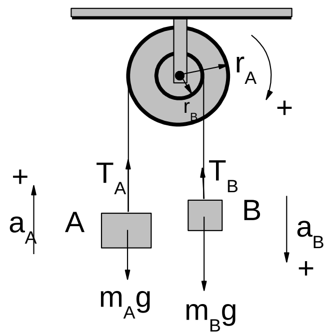
整个棒对 O 的摩擦力矩 $M = -\int_0^L \dfrac{\mu g m_1 x}{L} dx = -\dfrac{1}{2} m_1 g \mu L$

由定轴转动定律 $M = \dfrac{dL}{dt}$，$dL = Mdt$，由于 M 为一常量

从碰撞开始到停止转动所用时间 $t = -\dfrac{L}{M} = \dfrac{2m_2(v_1 + v_2)}{m_1 g \mu}$

六、（10 分）半径分别为 r_A 和 r_B 的圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对轴的转动惯量为 J，两圆盘边缘都绕有轻绳，绳子下端分别挂有质量为 m_A 和 m_B 的物体 A 和物体 B，如图所示。若物体 A 以加速度 a_A 上升，物体 B 的质量 m_B

解：



以物体 A 和 B 为研究对象，其受力情况如图所示，并建立图中的正方向。

由质心运动定理，有：
$$T_A - m_A g = m_A a_A$$
$$m_B g - T_B = m_B a_B$$

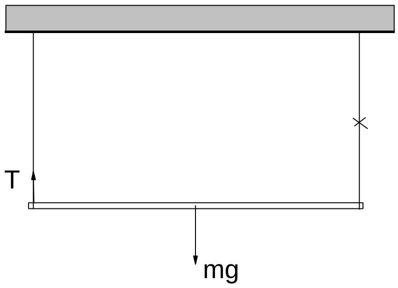
由定轴转动定律，有：$T_B r_B - T_A r_A = J\alpha$，$\alpha$ 为角加速度

由线量和角量关系，有：
$$a_A = r_A \alpha$$
$$a_B = r_B \alpha$$

联立以上五式，解得：

$$m_B = \frac{J a_A + m_A r_A{}^2 (g + a_A)}{r_A r_B g - r_B{}^2 a_A}$$

七、（10 分）匀质细杆长 $2l$，质量为 m，在两端用细线吊起来，使杆水平。有一根线突然断裂。试求在这一瞬刻另一根线中的张力



解：以匀质细杆为研究对象，线突然断裂瞬间，杆受到重力作用、另一根线中张力作用，如图中所示。

由质心运动定理，有：$mg - T = ma$

由定轴转动定律，有：$mgl = J\alpha$，$J = \frac{4}{3}ml^2$

由线量和角量关系：$a = \alpha l$

由此，解得 $T = \frac{1}{4}mg$

八、（15 分）一静止质量为 m_0 的粒子，裂变成两个粒子，速度分别为 0.6c 和 0.8c，求裂变过程的静质量亏损和释放的动能。

解：设裂变后两粒子的静止质量分别为 m_{10} 和 m_{20}，其速度分别为 $v_1 = 0.6c$ 和 $v_2 = 0.8c$，裂变前系统动量为零，由动量守恒，可知 v_1 和 v_2 方向相反。

根据动量守恒，有：$0 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}v_1 - \frac{m_{20}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}v_2 = \frac{3}{4}m_{10}c - \frac{4}{3}m_{20}c$

所以：$\frac{3}{4}m_{10} - \frac{4}{3}m_{20} = 0$

由总质量（或总能量）守恒，有：$m_0 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_{20}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4}m_{10} + \frac{5}{3}m_{20}$

$$m_0 = \frac{5}{4} m_{10} + \frac{5}{3} m_{20}$$

解得：$m_{10} = \frac{16}{35} m_0$，$m_{20} = \frac{9}{35} m_0$

则静质量亏损为$\Delta m_0 = m_0 - m_{10} - m_{20} = \frac{2}{7} m_0$

其释放的动能为$\Delta m_0 c^2 = \frac{2}{7} m_0 c^2$