线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2012.11.24

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 简答与计算题(本题共4小题,每小题10分,共40分)

1 设x_1，x_2，x_3是方程$x^3+px+q=0$的3个根，求行列式$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_2 & 3x_3 & 3x_1 \end{vmatrix}$的值？

解. 由题意知$x_1+x_2+x_3=0$. 所以

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_2 & 3x_3 & 3x_1 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0.$$

2. 设$a_i\neq 0,\ 1\le i\le n$. 令$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明$A$ 可逆并求A^{-1}.

证明：$|A|=(-1)^{n+1}a_1a_2\cdot a_n\neq 0$, 从而$A$可逆。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 设A是一个n级矩阵$(n\ge 2)$, 已知$A^2+3A+2E=0$ 并且$r(A+E)=1$, 这里E 为n阶单位矩阵.
(1) 证明：A可对角化；(2)求$|A^3+A^2+E|$.（每小题5分）

(1) 证明：由$A^2+3A+2E=0$得$(A+E)(A+2E)=0$, 从而$r(A+E)+r(A+2E)\le n$. 又

$$r(A+E)+r(A+2E)=r(A+2E)+r(-A-E)\ge r(A+2E-A-E)=r(E)=n.$$

因此$r(A+E)+r(A+2E)=n$. 从而A可对角化。

(2) 由(1)及$r(A+E)=1$知-1 是A的$n-1$重根，-2是A的单根，从而存在可逆矩阵P使得$A=P^{-1}\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1,-2)P$. 所以$|A^3+A^2+E|=|P^{-1}\mathrm{diag}((-1)^3+(-1)^2+1,\cdots,(-1)^3+(-1)^2+1,(-2)^3+(-2)^2+1)P|=-3$.

4. 已知向量组$I:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组$II:\ \beta_1,\cdots,\beta_n$分别线性无关而且满足：向量组$I$中的每个向量都不能由向量组$II$线性表示，向量组$II$中的每个向量也不能由向量组$I$线性表示，问向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n$线性无关吗？若无关给出证明，若相关，举出例子.

答案是可以线性相关，例子不唯一。

二.(15分) 问a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3 &=4 \\ x_1+bx_2+x_3 &=3 \\ x_1+2bx_2+x_3 &=4 \end{cases}$$

有唯一解、无穷多组解或无解？在有解的情况，求出其解.

答案：当$a\neq 1,\ b\neq 0$时，原方程组有唯一的解：$x_1=\frac{1-2b}{(1-a)b}$, $x_2=\frac{1}{b}$, $x_3=4-\frac{1}{b}-\frac{a(1-2b)}{(1-a)b}$.
当$a=1,\ b=\frac{1}{2}$ 时，原方程组有无穷多解，解得表达式不唯一；
其他情况无解。

三.(15分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-8 & 6 & 1\\ -9 & 7 & 1\\ -36 & 24 & 5\end{pmatrix}$。

(i) 求A的特征多项式和所有特征值.

(ii) 判断A是否可以对角化.

（第一问8分，第二问7分）

解： A 的特征多项式为$\begin{vmatrix}\lambda+8 & -6 & -1\\ 9 & \lambda-7 & -1\\ 36 & -24 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 所以其特征值为 $\lambda_1=1$ (2重) 和 $\lambda_2=2$.

因为$E-A=\begin{pmatrix}9 & -6 & -1\\ 9 & -6 & -1\\ 36 & -24 & -4\end{pmatrix}$, $r(E-A)=1$, 所以A有两个属于1的线性无关的特征向量。再加上属于2的特征向量，A就有三个线性无关的特征向量，所以A可以对角化。

四. (12分) 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示。

答案不唯一

解：α_1, α_2 是一个极大线性无关组（6分）

而且$\alpha_3=\alpha_2-2\alpha_1$, $\alpha_4=2\alpha_2-8\alpha_1$.（每个表示3分）

五.(10分)

设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. (1) 证明：当$n\geq 3$时，$A^n=A^{n-2}+A^2-E$; (2) 求$A^{100}$. 这里$E$是3阶单位矩阵.

（每问5分）

(1)归纳证明

(2)$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 令$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 则$B^2=0$,

从而$A^{100}=(A^2)^{50}=(E+B)^{50}=E+50B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 50 & 1 & 0\\ 50 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

六.(8分) 设A是n阶方阵且$|A|=-1$, $a_{nn}=1$. A^* 为A的伴随矩阵，令D_{nn}为A^*中元素A_{nn}的代数余子式，其中A_{nn}为A中元素a_{nn}的代数余子式。求D_{nn} 的值.

答案：

$$D_{nn}=(-1)^{n-1}.$$