线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间<u> 2015.4.25</u>

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一.(10**分**) 设 A 是3阶非零方阵，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，求 $|A|$.

解：$\because A_{ij}=-a_{ij} \quad \therefore A^*=-A^T$，
$|A|E=AA^*=A(-A^T)=-AA^T$，
两边取行列式得 $|A|^3=|-A|\cdot|A^T|=-|A|^2$.
又 $A\neq O$，设 $a_{kl}\neq 0$，则 $|A|=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{kj}A_{kj}=-\sum\limits_{j=1}^{3}a_{kj}^2\leq -a_{kl}^2<0$，
$\therefore\ |A|=-1$.

二.(10**分**) 设 A 是3阶方阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，求 $|BA^*|$.

解：由条件得 $B=E(1,2)A$，
故 $BA^*=E(1,2)AA^*=E(1,2)(|A|E)=|A|E(1,2)=3E(1,2)$，
$\therefore\ |BA^*|=|3E(1,2)|=3^3\times(-1)=-27$.

三.(10**分**) 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，$1\leq i,j\leq n$。证明：如果 D 的某行的元素全为1，则 $D=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.

证：设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，设 k 行全为 1，即 $a_{kj}=1, j=1,2,\cdots,n$，

则 $D=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum\limits_{j=1}^{n}A_{kj}$， $i\neq k$ 时，又有 $0=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}A_{kj}+\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=D+\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}0=D$.

四.(10**分**) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.

解：

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-3/2&-3&5/2\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right),$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E_3$ 为3阶单位矩阵，

(1) 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

(2) 求满足 $AB=E_3$ 的所有矩阵 B.

解：(1)　设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in R^{4\times3}$，则有 $A\beta_i=e_i, i=1,2,3.$ 求解 β_1,β_2,β_3，

$(A,E_3)\to\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$，首先得 $AX=\theta$ 的一个基础解系：$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

(2)　由(1)的简化行梯形矩阵，得$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_1\alpha, \beta_2=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+k_2\alpha, \beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\alpha.$

故 $B=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3),\quad k_1,k_2,k_3\in R.$

六. (15分) 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$　，　$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

(1) 求满足 $A\beta_2=\beta_1$，$A^2\beta_3=\beta_1$ 的所有向量 β_2,β_3；

(2) 对(1)中任意向量 β_1,β_2,β_3，证明 β_1,β_2,β_3 线性无关。

解：(1)　$(A,\beta_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac12&-\frac12\\0&1&\frac12&\frac12\\0&0&0&0\end{array}\right)$, $\therefore\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\1\end{pmatrix}$,

$(A^2,\beta_1)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac12\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$, $\therefore\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac12\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2)　易知 $A\beta_1=\theta$，设 $t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=\theta$，则

$$\begin{cases}t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=\theta,\\A(t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3)=\theta,\\A^2(t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3)=\theta,\end{cases}\quad\text{由}\begin{cases}A\beta_1=\theta,\\A\beta_2=\beta_1,\\A^2\beta_3=\beta_1,\end{cases}\quad\text{可得}\begin{cases}t_1\beta_1+t_2\beta_2+t_3\beta_3=\theta,\\t_2\beta_1+t_3A\beta_3=\theta,\\t_3\beta_1=\theta.\end{cases}$$

解得 $t_1=t_2=t_3=0$，故 β_1,β_2,β_3 线性无关.

七.(10分) 设 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&1&2\\6&2&4\end{pmatrix}$。试求矩阵 A，使得 $AB=B$。

解：由 $AB=B$ 得 $(A-E)B=O$，故 $B^T(A-E)^T=O$.

令 $(A-E)^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $B^T\alpha_i=\theta$，$i=1,2,3.$

$\because\ (B^T)=\begin{pmatrix}1&3&6\\1&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, 故 $\alpha_i=k_i\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $k_i\in R, i=1,2,3.$

于是 $A-E=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}(0,-2,1).\quad\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&-2k_1&k_1\\0&1-2k_2&k_2\\0&-2k_3&1+k_3\end{pmatrix}.$

八.(20分) 设 A,D 是n阶方阵且 $AD=D$。如果 $r(D)=s$，

证明：(1) $r(A)\geq s$。

(2) $r(A-E)\leq n-s$，其中 E 为n阶单位矩阵。

(3) 存在n阶可逆矩阵 P 使得 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}E_s&B\\0&C\end{pmatrix}$，其中 E_s 为s阶单位矩阵，B 为 $s\times(n-s)$阶矩阵，C 为$n-s$阶矩阵。

证：(1)　$r(D)=r(AD)\leq r(A),\qquad\therefore\ r(A)\geq r(D)=s.$

(2)　$AD=D,\quad\therefore\ (A-E)D=O$，则 D 的列是 $(A-E)x=\theta$ 的解，

故 $r(D)\leq n-r(A-E)$，即 $r(A-E)\leq n-r(D)=n-s.$

(3)　$\because\ r(D)=s$，设 D 的 s 个无关列向量为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，则有 $A\beta_i=\beta_i, i=1,2,\cdots,s.$

将 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 扩展为 n 个无关列向量 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_n.$

令 $Q=(\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_n)$，则 Q 可逆。

由 $Qe_i=\beta_i, i=1,2,\cdots,s$，可得 $e_i=Q^{-1}\beta_i, i=1,2,\cdots,s.$

故

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=Q^{-1}A(\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_{s+1},\cdots,\gamma_n)\\&=Q^{-1}(\beta_1,\cdots,\beta_s,A\gamma_{s+1},\cdots,A\gamma_n)\\&=(e_1,\cdots,e_s,Q^{-1}A\gamma_{s+1},\cdots,Q^{-1}A\gamma_n)=\begin{pmatrix}E_s&B\\O&C\end{pmatrix},\end{aligned}$$

令 $P=Q^{-1}$，即有 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}E_s&B\\O&C\end{pmatrix}$.