一 、（10 分）在质点运动中，已知 $x = ae^{kt}$， $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$， $y|_{t=0} = b$，求质点的加速度和它的轨迹方程。

解：$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = ak^2e^{kt}$

$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = bk^2e^{-kt}$

质点加速度 $\vec{a} = ak^2e^{kt}\vec{i} + bk^2e^{-kt}\vec{j}$

由 $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ 及 $y|_{t=0} = b$，

$$y - b = \int_0^t -bke^{-kt}dt = be^{-kt} - b$$

得 $y = be^{-kt}$

轨道方程为 $xy = ab$

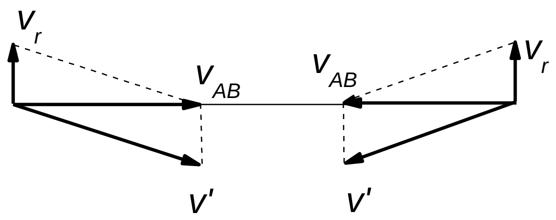
二、（10 分）设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回 A 处，飞机相对于空气的速度为 v'，而空气相对于地面的速率为 v_r， A、B 之间的距离为 l，飞机相对空气的速率 v' 保持不变，试计算来回飞行时间；（1）假定空气是静止的（即 $v_r = 0$）；（2）假定空气的速度向东；（3）假定空气的速度向北。

解：由速度变换关系，飞机相对于地面的速度 $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_r$

（1）若空气静止，$v_r = 0$，飞机从 A 到 B，从 B 返回 A 的速度大小均为 v'，方向沿 AB 连线。所以 $t = t_{AB} + t_{BA} = \frac{2l}{v'}$

（2）若空气速度向东，则飞机从 A 到 B 时，$v_{AB} = v' + v_r$，从 B 到 A 时 $v_{BA} = v' - v_r$

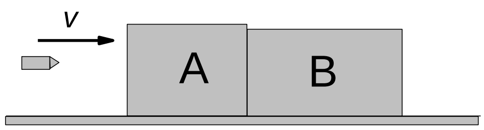
所以此时来回飞行时间 $t = \frac{l}{v'+v_r} + \frac{l}{v'-v_r} = \frac{2l}{v'} \cdot \frac{1}{1-(\frac{v_r}{v'})^2}$



（3）若空气速度向北，如图所示，则 $v_{AB}=v_{BA}=\sqrt{v'^2-v_r^{\ 2}}$

来回飞行时间 $t=\dfrac{2l}{v'}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v_r}{v'}\right)^2}}$

三、（10 分）如图所示两块并排的木块 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2，木块对子弹的阻力恒为 F，试求子弹穿出后，木块 A 和 B 的速度。



解：在 Δt_1 时间内，木块 A 和 B 一起作加速运动，根据动量定理有

$F\Delta t_1=(m_1+m_2)v_A$

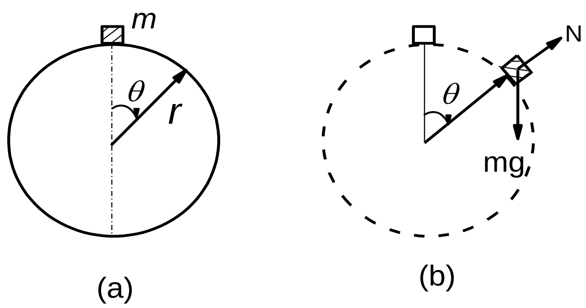
得木块 A 的速率 $v_A=\dfrac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$

在 Δt_2 时间内，木块 B 受力为 F，根据动量定理

$F\Delta t_2=m_2v_B-m_2v_A$

木块 B 的速率 $v_B=\dfrac{F\Delta t_2}{m_2}+v_A=F(\dfrac{\Delta t_2}{m_2}+\dfrac{\Delta t_1}{m_1+m_2})$

四、（10 分）如图所示，质量为 m 的质点在半径为 r 的固定光滑球面上从静止开始滑下。角度由竖直直径开始量度，重力势能零点选在顶点处。试求：（1）以角度为变量的势能函数；（2）以角度为变量的动能函数；（3）以角度为变量的法向和切向加速度；（4）质点离开球面时的角度。



解：（1）$-mgr(1-\cos\theta)$

（2）$\dfrac{1}{2}mv^2=mgr(1-\cos\theta)$

（3）$a_t=g\sin\theta$；$a_n=m\dfrac{v^2}{r}=2mg(1-\cos\theta)$

（4）当支持力 $N=0$ 时，质点离开球面，$mg\cos\theta=2mg(1-\cos\theta)$

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，即当 $\theta=\arccos\dfrac{2}{3}$ 时，质点离开球面

五、（15 分）角动量为 L，质量为 m 的人造卫星，在半径为 r 的圆轨迹上运行，试求它的动能、势能和总能量。

解：角动量 $L = pr$

动能 $E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{L^2}{2mr^2}$ ； $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{L^2}{mr^3} = G\dfrac{mM}{r^2}$

势能 $E_p = -G\dfrac{mM}{r} = -\dfrac{L^2}{mr^2}$

总能量 $E = E_k + E_p = -\dfrac{L^2}{2mr^2}$

六、(15 分)用手抓住长为 $2L$ 的均匀细棒 AB 的两端，使它在水平方向静止不动。先放开 B 端的手，让棒绕 A 端转动。忽略棒与手之间的摩擦，当棒转到竖直位置（ AB' ）时，再放开 A 端的手，让它自由运动下落，求：

(1) 棒绕 A 端转动至竖直位置(AB')时，质心的线速度；(2) 在放开 A 端后的下落过程中质心的运动轨迹如何，质心的加速度如何？(3) 当棒从竖直位置(AB')下落 h 高度时，它绕质心转了几圈？

解：（1）由机械能守恒

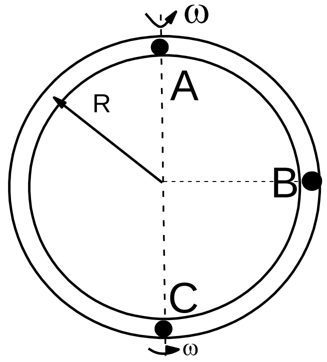
$mgL = \dfrac{1}{2}J\omega^2$， $J = \dfrac{4}{3}mL^2$

解得： $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2L}}$ ，竖直时质心线速度 $v = \sqrt{\dfrac{3gL}{2}}$

（2）在放在 A 端后，棒只受到重力作用，且作用于质心上，对质心坐标系，棒的角动量守恒，棒绕质心的角速度不变，所以棒的加速度即为重力加速度 $a = g$，质心作平抛运动。

（3）棒质心下落 h 高度时，所需时间 $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，其绕质心转的圈数为 $\dfrac{\omega t}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3h}{L}}$

七、（15 分）空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动，转动惯量为 J ，环的半径为 R，环的初始角速度为 ω_0，质量为 m 的小球静止于环内 A 点。由于微小干扰，小球向下滑动。问小球滑到 B 点与 C 点时，环的角速度与质点相对于环的速度各为多大？环的内壁是光滑的



解:B 点,设小球相对于空心圆环的速度为 v

由角动量守恒： $J\omega_0 = (J + mR^2)\omega$

机械能守恒（以 C 点为势能零点）： $\frac{1}{2}J{\omega_0}^2 + 2mgR = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

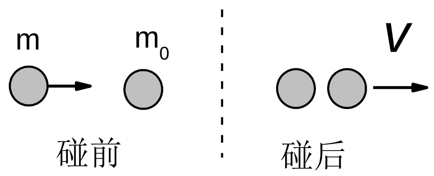
解之得： $v = \sqrt{2gR + \frac{JR^2{\omega_0}^2}{J + mR^2}}$

在 C 点，由机械能守恒， $\frac{1}{2}m{v_c}^2 = 2Rmg$，得到 $v_c = 2\sqrt{gR}$

因角动量守恒，所以 $\omega_c = \omega_0$

八、（15 分）如图所示，一个静止质量为 m_0，动能为 $5m_0C^2$ 的粒子，与另一个静止质量也为 m_0 的静止粒子发生完全非弹性碰撞，碰撞后复合粒子的静止质量为 m_0'，并以速度 v 运动。（1）碰撞前系统的总动量是多少？（2）碰撞前系统的总

能量是多少？（3）复合粒子的速度 v 是多少？（4）给出 m_0' 与 m_0 之间的关系。



解：运动粒子的总能量 $E = E_k + E_0 = 5m_0C^2 + m_0C^2 = 6m_0C^2$

由能量和动量公式 $E^2 = p^2C^2 + {m_0}^2C^4$

可得动粒子的动量 $p = \sqrt{35}m_0C$，所以碰撞前总动量为 $\sqrt{35}m_0C$

（2）碰撞前总能量为 $7m_0C^2$

由动量守恒 $\sqrt{35}m_0C = \dfrac{m_0'}{\sqrt{1-v^2/C^2}}v$

由能量守恒 $7m_0C^2 = \dfrac{m_0'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{C^2}}}C^2$

由此解得 $v = 0.85C$

$m_0' = \sqrt{14}m_0$