南京大学数学系2012/2013(下)微积分II(第一层次, A)试卷参考解答

一. 计算下列各题($10 \times 5 = 50$分)

1. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ ($0<h<a$) 截出的顶部.

解:S 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \qquad (x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2-h^2\},$$

又

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= a\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2).\end{aligned}$$

2.求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

解:$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$, $\quad 2S_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$S_n=2S_n-S_n=1+(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{5}{2^2}-\dfrac{3}{2^2})+\cdots+(\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}-\dfrac{2n-3}{2^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{2^n}=$
$1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=1+\dfrac{1-1/2^{n-1}}{1-1/2}-\dfrac{2n-1}{2^n}.$
$S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=3.$

3.求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

的收敛半径, 收敛区间与收敛域.

解:令 $t=(x+1)$, 则级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot 3\frac{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}{1+(-\frac{2}{3})^n}=3.$$

收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$. 收敛区间为 $|x+1|<\frac{1}{3}$, 即 $(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$. 当 $x=-\frac{4}{3}$ 时, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 均收敛. 所以, 此时级数收敛. 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时, 级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n},$$

由于 $\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n}>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n+(-2)^n}{3^n n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

由比较判别法的极限形式知, 此时级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解:原方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+5=0,$$

它有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$. 因此所求通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

5. 解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

解:原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1},$$

因此这是一个齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则

$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u+1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-u}{u+1},$$

分离变量, 得

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分, 得

$$u+\ln|u|+C=-\ln|x|,$$

所以原方程的通积分为:

$$\frac{y}{x}+\ln|y|+C=0.\ \ y=0\text{为奇解}.$$

6.判别$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$的敛散性,若收敛，计算其值。
解:收敛，$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\bigg|_2^A=\frac{2}{3}\ln 2.$

7. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0$, $y\geq 0$ 的部分.
解:将 S 分为两部分，其中 S_1 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 其法线向上. S_2 的方程为 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 其法线向下. 两个曲面在 xOy 平面上的投影区域均为

$$D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,x\geq 0,y\geq 0\}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

8.计算曲线积分$\int_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中$l$ 为椭圆周$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，积分按逆时针方向进行.

解:因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内成立,

所以$\int_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{x^2+y^2=1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=2\pi.$

9.求曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程.

解:所求切平面方程为$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0, i.e. 2x+2y-z=3.$

10. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是区域$x^2+y^2+z^2\le 4z$, $\sqrt{x^2+y^2}\le z$.

解:用球坐标变换, 将Ω变为Ω',

$$\Omega':\ \ 0\le r\le 4\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \ 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint\limits_{\Omega'} r^2\sin\varphi\cdot r\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi} r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r \\
&= \frac{56}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

二. (本题满分8分）设区域$\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le t, x^2+y^2\le t^2\}(t>0)$ 函数$f(u)$可导并且$f(0)=0, f'(0)=2$, $F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 求$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

解:

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}\rho\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}z=2\pi t\int_0^t\rho f(\rho^2)\mathrm{d}\rho.$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t\rho f(\rho^2)\mathrm{d}\rho}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\pi.$$

三. (本题满分10分) 设函数$f(x)$二阶连续可微，满足

$$\int_0^x(x+1-t)f'(t)\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x),$$

求函数$f(x)$.

解：令$x=0$, 得$f(0)=1$,

对原方程两边求导得

$$f(x)-1+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x),$$

$$f'(x)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}e^x+x+\frac{1}{2}, f(0)=1.$$

解上面的一阶线性非齐次微分方程得

$$f(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^x+2x-3.$$

由$f(0)=1$ 得$C=\dfrac{11}{3}$.

$$f(x)=\frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^x+2x-3.$$

四. (本题满分12分) 计算曲线积分$\int_l(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$, 其中积分曲线$l$ 是从$A(a,0,0)$ 到$B(a,0,h)$ 的螺线

$$x=a\cos\phi, y=a\sin\phi, z=\frac{h}{2\pi}\phi.$$

解:设$\Gamma=l+\overline{BA}$，S为张在Γ上的光滑曲面，则由斯托克斯公式有

$$\oint_\Gamma(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\iint_S 0\mathrm{d}S=0$$

又AB的方程为$x=a,y=0,0\le z\le h$

故$\int_l(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_{AB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}.$

五. (本题满分12分) 1.设函数$f(x)$是周期为2的周期函数，并且$f(x)=2+|x|,(-1\le x\le 1)$，求$f(x)$ 在$[-1,1]$上的傅里叶展开式.

2.求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和. 3.求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解：(1),因为$f(x)$为偶函数，所以$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

$a_0=2\int_0^1(x+2)\mathrm{d}x=5,\quad a_n=2\int_0^1(x+2)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1].$

因为$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上连续，并且$f(-1)=f(1)$,

$f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x,(-1\le x\le 1).$

(2),在上式中令$x=0$, 得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

(3), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$

六. (本题满分8分) 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的连续可微函数使得广义积分$\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$收敛，证明：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$收敛，则广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

证明：因为$\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$收敛，从而$\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$收敛，即$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t+f(1)=\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$存在. 如果$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ne 0$,则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$发散，矛盾！所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 又$\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)\le\int_{[A]}^A f(x)\mathrm{d}x\le\max\limits_{x\in[[A],A]}f(x)$. 从而，$\lim\limits_{A\to+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$.

$|\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-f(n)|=|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\mathrm{d}x|=\left|\int_n^{n+1}(\int_n^x f'(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x\right|\le\int_n^{n+1}\int_n^{n+1}|f'(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\mathrm{d}t.$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-f(n)\right|\le\int_1^{+\infty}|f'(t)|\mathrm{d}t$收敛，因此$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$收敛，

$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}[\sum\limits_{k=1}^{[A]-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{[A]}^A f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.$