# 线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间<u>  2017.4.22</u>

**一. 解答下列各题(8分×5=40分)**

1. 设 $A$ 为3阶方阵，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵. 已知 $|A|=\dfrac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

2. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵且满足 $A^2=-A$. 证明：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

3. 设 $A$ 和 $B$ 分别是 $m$ 阶和 $n$ 阶的可逆方阵，$C$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$O$ 是零矩阵. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ，$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3}-A$.

5. 设 $n$ 阶方阵 $A$ 的秩为 $r<n$，证明存在秩为 $n-r$ 的 $n$ 阶方阵 $B$ 使得 $AB=O$，这里 $O$ 表示零矩阵.

**二.**(12分) 若方阵 $X$ 满足 $X^2=X$，则称 $X$ 是幂等的. 设 $A$ 和 $B$ 是同阶的幂等方阵，证明 $(A+B)$ 是幂等的当且仅当 $AB=BA=O$，这里 $O$ 表示零矩阵.

**三.** (12分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 & =a_1 \\ x_2-x_3 & =a_2 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ x_{n-1}-x_n & =a_{n-1} \\ x_n-x_1 & =a_n \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 在有解的情况下，求方程组的解集.

**四.**(12分) 解带参数方程组 $\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3 & =\lambda, \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3 & =0, \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3 & =2. \end{cases}$

**五.**(12分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}$.

**六.**(12分) 设 $A$ 和 $X$ 为 $n$ 阶方阵，且满足 $AX=A+2X$.

1. 证明：$AX=XA$;
2. 若 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$X$ 是三阶未知方阵，求解矩阵方程 $AX=A+2X$.