南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2011.6

一、计算下列各题（本题满分 6 分,共 42 分）

1. 设 f 可微， $z=f(xy,x^2-y^2)$，求 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 交换二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy$ 的次序 .

3. 求 $\iint_\Sigma dydz+\sqrt{z}dxdy$ 其中 $\Sigma: z=x^2+y^2\,(0\le z\le 1)$，取上侧 .

4. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n}$ 的敛散性（ 包含绝对收敛,条件收敛与发散 ）.

5. 求函数 $f(x)=arc\tan(x^2)$ 关于 x 的幂级数展开式 .

6. 在函数 $f(x)=x\,(0\le x\le\pi)$ 的余弦级数展开式中,求傅里叶系数 a_3 .

7. 求微分方程 $y''+2y'+5y=e^{-x}$ 的通解 .

二、（10 分）设 Γ 为 $y=\sin x$ 上自点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段弧,

求 $\int_\Gamma\left(\dfrac{x}{1+x^2}+y\cos(xy)\right)dx+x(1+\cos(xy))dy$.

三、（10 分）设常数 $a>0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的敛散性.

四、（10 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+3)}$ 的和 .

五、（14 分）求微分方程 $y''+y=\dfrac{1}{\sin 2x}$ 的通解 .

六、（14 分）本题含两个小题,商学院学生解第(1)小题,理科专业学生解第(2)小题 . 理科专业学生若不会解第(2)小题,可解第(1)小题,但折半给分.

(1)（商学院学生解） $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$， Σ 为立体 Ω 的表面的外侧，求

$$\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy\ .$$

(2)（理科专业学生解） $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$， Σ 为立体 Ω 的表面，求

$$\iint_\Sigma (x^4+y^4+z^4-z^3)dS\ .$$

南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2012.6

一、计算下列各题（10×6=60 分）

1. 计算曲面积分 $\iint_S zdS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算曲面积分 $\iint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

4. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径与收敛域.

5. 求方程 $y''+y=x^2$ 的通解.

6. 求微分方程 $(x-y)dx+(x+y)dy=0$ 的通解.

7. 求函数 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}dx\,(p>0)$ 的敛散性.

9. 计算曲线积分 $\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\,(a>0)$.

10. 计算三重积分 $\iiint_\Omega y^2dxdydz$，其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

二、（10 分）讨论当实数 p 为何值时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛，实数 p 为何值时，级数发散.

三、（10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$，使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}((x^2-f(x))y+\tfrac{1}{2}g(x)y^2)dx+(f(x)y-g(x))dy+dz$$

与路径无关，求出 $f(x),g(x)$，并求该曲线积分的值.

四、（10 分）1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$，求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和. 3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

五、（本题为非商学院的学生必做题，商学院的学生可以选做此题，10 分）已知曲线积分 $\int_L \frac{xdy-ydx}{f(x)+8y^2}$ 恒等于常数 A，其中函数 $f(x)$ 连续可导，L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

（1） G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\int_C \frac{xdy-ydx}{f(x)+8y^2}$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线. （2） 求函数 $f(x)$ 与常数 A.

六、（本题商学院的学生必做，非商学院的学生做了不给分，10 分）利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz.$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ ($a>0$, $h>0$)，若从 Ox 轴的正向看去，此椭圆是依逆时针方向进行的（图略）.

南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2013.6.26

一、计算下列各题（10×5=50 分）

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S zdS$ ，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ ($0<h<a$) 截出的顶部.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径，收敛区间与收敛域.

4. 求微分方程 y''-$2y'$+$5y=0$ 的通解.

5. 解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}dx$ 的敛散性，若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyzdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 C 为椭圆周 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=x^2/2+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$是区域 $x^2+y^2+z^2\le 4z, \sqrt{x^2+y^2}\le z$.

二、（8 分）设区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le t, x^2+y^2\le t^2\}(t>0)$，函数$f(u)$可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2)dxdydz$. 求$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

三、（10 分）设函数$f(x)$二阶连续可微，满足$\int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2+e^x-f(x)$，求函数$f(x)$.

四、（12 分）计算曲线积分$\int_l (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中积分曲线$l$是从 $A(a,0,0)$到$B(a,0,h)$的螺线：$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=h\varphi/(2\pi)$.

五、（12分）1. 设函数$f(x)$是周期为2的周期函数，并且$f(x)=2+x$，$(-1\le x\le 1)$，求$f(x)$在$[-1,1]$上的傅里叶展开式. 2. 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$的和. 3. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

六、（8 分）设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的连续可微函数使得广义积分$\int_1^{+\infty}|f'(x)|dx$收敛，证明：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛，则广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛.

参考答案:

10 级: 一、1. $(x^2+y^2)f_1'$; 2. $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

3. $2\pi/3$; 4. 条件收敛; 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{4n+2}(|x|\le 1)$; 6. $-4/(9\pi)$;

7. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\dfrac{1}{4}e^{-x}$. 二. $\frac{1}{2}\ln(1+\pi^2)-2$. 三. $0<a<1$绝对收敛, a>1 绝对收敛, a=1 发散. 四. e-(7/3).

五. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}\cos x\ln|\sec x+\tan x|+\frac{1}{2}\sin x\ln|\csc x-\cot x|$.

六. (1) $12\pi/5$, (2) $32\pi/5$.

11 级: 一、1. $\pi a(a^2-h^2)$; 2. $-\dfrac{9\pi}{2}$； 3. $1/8$; 4. $R=1$ ，收敛域为$(-1,1]$；

5. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2-2$； 6. $x^2+y^2=Ce^{2\arctan\frac{x}{y}}, C>0$..

7. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}, (-1<x<1)$；8. $0<p\le 1$时发散，$p>1$时收敛 ； 9. $2a^2$ ；10. $\pi/10$.

二. $p>1/3$时级数收敛， $p\le 1/3$ 时级数发散.

三. $f(x)=-e^{-x}-e^{x}+x^2+2,\ g(x)=e^{-x}-e^{x}+2x,\ 1.$

四. $f(x)=\dfrac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\cos nx,(-\pi\le x\le\pi).\pi^2/12,\pi^2/6.$

五. (2) $f(x)=x^2,\sqrt{2}\pi/2.$ 六. $-2\pi a(h+a)$.

12 级: 一、1、$\pi a(a^2-h^2)$. 2、3. 3、$R=1/3$，收敛区间$(-4/3,-2/3)$，收敛域 $[-4/3,-2/3)$.

4、$y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，5、$y/x+\ln|y|+C=0, y=0$为奇解. 6、收敛，$\frac{2}{3}\ln 2$.

7、$2/15$. 8、2π. 9、$2x+2y-z=3$. 10、$\frac{56}{3}\pi$. 二、π.

三、$f'(x)+0.5f(x)=0.5e^{x}+x+0.5, f(0)=1, \therefore f(x)=11e^{-0.5x}/3+e^{x}/3+2x-3.$

四、$h^3/3$. 五、$f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x,(|x|\le 1).\dfrac{\pi^2}{8},\dfrac{\pi^2}{6}.$ 六、（略）