线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间__2016.11.12

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求 A^n .

2. 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^{3\times 3}$, $|A|=2$，矩阵 $B=(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$，计算 $|B|$.

3. 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{pmatrix}$ 满足 $A\alpha=\beta$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -3 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$，求解向量 α.

4. 设 $A\in R^{m\times n}(m>n),\mathrm{r}(A)=n$，证明：存在矩阵 $P\in R^{n\times m}$ 使得 $PA=E_n$.

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$.

二.(10分) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\\ 2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\ 5\\ -2\\ -7\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 10\\ 3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其它向量.

(2) 若有向量 $\beta=(1,0,-1,-1)^T$，则向量组 α_3,α_4,β 是否与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 等价？

三. (10分) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in R^{m\times n},A_2\in R^{k\times n}$.
如果这两个方程组有相同的解集，请问 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组是否一定等价？若等价请给出证明，否则举出反例.

四.(10分) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

五.(15分) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -11\\ 2 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

(1) 解方程组 $Ax=\theta$;

(2) 求 $A^2x=\theta$ 但 $Ax\neq\theta$ 的解集.

六.(15分) (1) 设 $x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n$ 为实数，其中 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同. 求证：存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $f(x)$ 使得$y_i=f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n$;

(2) 设带参数 t 的矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}2t-1 & f(t)\\ -f(t) & 2t-1\end{pmatrix}$，其中 $f(t)$ 为 t 的多项式，满足：$f(0)=f(1)=0,|A(t)|>0$. 求满足条件的一个多项式 $f(t)$.