2015-2016 学年第二学期第一层次期中考试试卷 2016.4.23

一、计算下列各题：（5 分×8=40 分）

1. 设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ，求 $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ． 2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 所确定，其中 $F(u,v,w)$ 连续可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3.计算二重积分 $I_1=\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中 D 是 $x=1,y^2=4x$ 所围闭区域 .

4. 计算累次积分 $I_2=\int_0^1 dy\int_{\sqrt[3]{y}}^1\sqrt{1-x^4}dx.$

5. 求三重积分 $I_3=\iiint\limits_\Omega xdxdydz$，其中 Ω 为 $z=0,y+z=1,y=x^2$ 所围的空间区域.

6．求三重积分 $I_4=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2dxdydz$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le z$.

7. 计算曲线积分 $I_5=\oint_C x\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 C 为 $x^2+y^2=2x$.

8. 计算曲线积分 $I_6=\int_C y^2dx+xydy+zxdz$ ，其中 C 为从 $O(0,0,0)$ 出发，经过 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$ 到 $D(1,1,1)$ 的折线段.

二、计算下列各题（8 分×5=40 分）

1. 求函数 $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $P(3,4,5)$ 处沿曲线 $\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=25,\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$ 在该点的切线方向的方向导数.

2. 利用拉格朗日乘数法计算椭圆周 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 上的点与坐标原点之间的最近和最远距离.

3. 设 Ω 是由 $z=x^2+3y^2$ 与 $z=8-x^2-y^2$ 所围立体，求 Ω 的体积 V .

4. 求圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 被曲面 $z^2=2y$ 所截部分的面积.

5. 计算曲线积分 $I_7=\int\limits_C\cos(x+y^2)dx+(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4})dy$ ，其中 C 为 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$ 的一段弧.

三、（10 分）设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别

由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2, e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\frac{du}{dx}$.

四、（10 分）函数 $f(x)$ 连续可微且 $f(0)=1$. 若积分

$$\int_O^A [\tfrac{1}{2}(x-f(x))y^2+\tfrac{1}{3}f(x)y^3+x\ln(1+x^2)]dx+[f(x)y^2-f(x)y+\tfrac{1}{2}x^2y+\frac{\sin y}{1+\cos^2 y}]dy$$

与路径无关，其中 $O(0,0)$ 以及 $A(1,1)$ 为两个固定点. 求 $f(x)$ 以及此积分值.

参考答案： 一、1. 0;　2. 1;　3. 32/21;　4. 1/6;　5. 0;　6. $\frac{1}{15}\pi$；　7. 32/3;　8. 1.

二、1. 0；2. 1，3；3. $8\sqrt{2}\pi$；4.16；5. $\sin(2\pi a)$. 三、$\frac{du}{dx}=f'_x-\frac{y}{x}f'_y+(1-\frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)})f'_z$.

四、$f(x)=e^x$，$\ln 2+\frac{\pi-1}{4}-\frac{e}{6}-\arctan(\cos 1)$.