2012 − 2013 (第二学期)大学数学《线性代数》期中考试参考答案

一.填空与选择题(本题共8小题, 每小题5分, 共40分)

1. $\underline{21}$　2. $\underline{3}$　3. $\underline{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}}$　4. $\underline{\text{(B)}}$　5. $\underline{\text{(C)}}$　6. $\underline{-1}$　7. $\underline{\text{(A)}}$　8. $\underline{\text{(C)}}$

二(10分). (1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=28$　(2) $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=-72$.

三(10分). (1) $\boldsymbol{BA}=\mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\mathbf{0}$. 由于 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$, 故方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解,

于是得 $a=1$, 非零解为 $\boldsymbol{\alpha}=(\,-1,1,1\,)^T$, 由此得 $\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{\alpha},k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha})$, $k_1,k_2\in R$.

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -k_1 & k_1 & k_1 \\ -k_2 & k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

(2) 由题意, 取 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}, k_1=2, k_2=-3$ 得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_1^T$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}^n=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\beta})^{n-1}\boldsymbol{B}=(2)^{n-1}\boldsymbol{B}=2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

四(10分). 解:

$$(\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}\,)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & a_3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & a_4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & a_1-a_2-2a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & a_2+2a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1+a_2-a_3+a_4 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $-a_1+a_2-a_3+a_4=0$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成一个极大无关组, $\boldsymbol{\alpha}_4=-6\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3) $\boldsymbol{\beta}=(a_1-a_2-2a_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(a_2+2a_3)\boldsymbol{\alpha}_2-a_3\boldsymbol{\alpha}_3$.

五(10分). 解:

由题意, 齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 同解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -a^2 & a \\ 0 & 0 & a^2 & a^2-a \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -a^2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{pmatrix}$$

(1) 当 $2a^2-a\neq 0$ 时, 齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 不同解.

(i) 当 $a=0$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1, \mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$, $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 也不同解,

(ii) 当 $a=1/2$ 时, $\boldsymbol{A}\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{故 } a=1/2.$$

(2) 由 (ii) 得 (I) 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(\,-1/2,-1/2,1,1\,)^T,\ k\in\mathbb{R}$

(3) (Ⅱ) 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(\,-1,1,0,0\,)^T+k_2(\,-1,0,1,0\,)^T+k_3(\,0,0,0,1\,)^T,\ k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

六(10分). 解: (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^T \\ \boldsymbol{\eta}_2^T\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\in\mathbb{R}^4$, 由题设, $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$,

$\Rightarrow \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{C}=(\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\,)$.

$\because \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{0}, \therefore \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

$$\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

于是有 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\1\end{pmatrix},\Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&1&0\\-5&1&0&1\end{pmatrix}$;

(2) 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2 \ \Rightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$,

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\3&2&1&-3\\0&-1&2&1\\2&3&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&a\end{pmatrix}$ 故 $a=0$, 解为 $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

又 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,1,1)^T$, 所以公共解为 $k(1,4,1,1)^T, k\in\mathbb{R}$.

七(10**分**). 证明略.