# 集合的基数
# (Cardinal Number)

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

# 集合的基数

- 引言：有限与无限
- 集合的等势关系
- 集合的基数
- 可数集(Countable set)
- Cantor定理
- 优势关系
- Bernstein定理

# 我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数。
- “数不清”的咋办？
  - “常识”不一定经得起追问。

# 有限与无限：“宇宙旅馆”


啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 $k$ 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第1号房间吧！

# 有限与无限：怎样的差别

- 传统观点：“整体大于部分”
- $\{1, 2, 3, \quad\}$与$\{1^2, 2^2, 3^2, \quad\}$一一对应

# 集合的等势关系

- 等势关系的定义
  - 如果存在从集合A到B的双射，则称集合A与B等势。
  - 集合A与B等势记为：A≈B, 否则A≉B。
  - A≈B意味着：A，B中的元素可以“一一对应”。
  - 要证明A≈B，找出一个从A到B的双射。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

# 等势关系是等价关系

- 自反性
  - $I_A$:A→A
- 对称性
  - 如果$f$:A→B是双射，则$f$的反函数$f^{-1}$: B→A，也是双射。
- 传递性
  - 若$f$:A→B，$g$ :B→C均是双射，则 $g \circ f$ 是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

# 自然数定义为集合（回顾）

- 设$a$为集合, 称$a\cup\{a\}$为$a$的后继, 记为或s($a$), 或$a^+$。
- 集合N递归定义如下：
  - $\varnothing \in$ N
  - $\forall a(a \in \mathrm{N} \to \mathrm{s}(a) \in \mathrm{N})$
- N的每一个元素称为一个自然数（自然数集合）
  - Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}, …
  - Ø记为0，$0^+$记为1，$1^+$记为2，$2^+$记为3，余此类推

# 有限集与无限集

- S是有限集合 *iff* 存在自然数$n$，使得S与$n$等势
- S不是有限集合(无限集、无穷集)， *iff* 存在S的真子集S'，使得S与S'等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$

令S'=S-$\{a_0\}$，可以定义$f$:S→S'如下：

对于任意$a_i \in$M, $f(a_i)= a_{i+1}$； 对于任意$x \in$S-M, $f(x)= x$.

显然这是双射，即$S$与其真子集$S'$等势。

$\Leftarrow$ 假设$S$是有限集，令$|S|=n$, 则对$S$的任意真子集$S'$, 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从$S'$到$S$的任一单射不可能是满射。

# 集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则$\mathrm{card}\ A = n$
- 若A与自然数集合N等势，则$\mathrm{card}\ A = \aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则$\mathrm{card}\ A = \aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[ $\mathrm{card}\ A \leq \aleph_0$ ]

# 无限可数集（无穷可列集）

- 与自然数集等势的集合称为无限可数集
  - 直观上说：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出：它“前”、“后”元素是什么。
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & -4, & \ldots\ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

$$
g(n)=\begin{cases} 2n & n>=0 \\ -2n-1 & n<0 \end{cases}
$$

# 自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势

<0,0> <1,0> <2,0> <3,0> <4,0> •••

<0,1> <1,1> <2,1> <3,1> •••

<0,2> <1,2> <2,2> •••

<0,3> <1,3> •••

<0,4>

类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ......

$$l(m,n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

# 证明无限集等势的例子

- (0,1)与整个实数集等势
  - 双射：$f:(0,1)\rightarrow R: f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), [0,1]与[a,b]等势
  - 双射：$f:[0,1]\rightarrow[a,b]: f(x)=(b-a)x+a$

(这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

# 实数集不是可列集

- (0,1)不是可列集 //注意：(0,1)与实数集合等势
  - “对角线证明法”

    假设(0,1)中的元素可以线性排列：

    $0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\cdots$

    $0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\cdots$

    $0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\cdots$

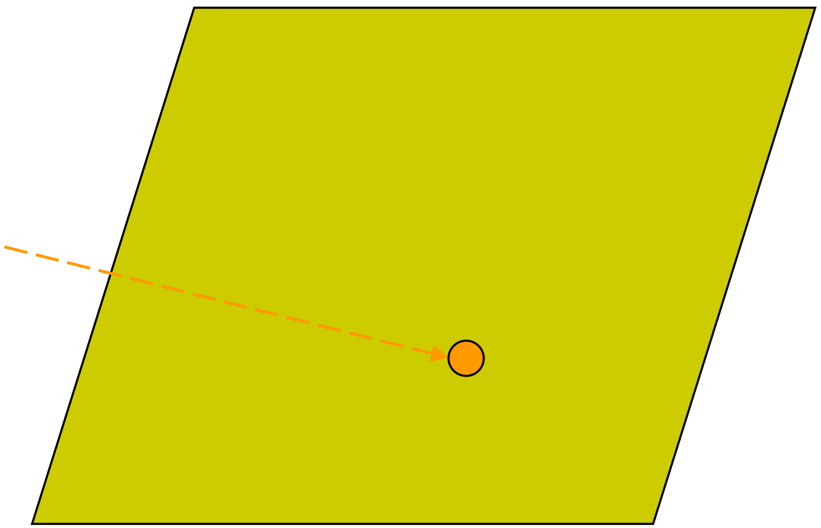
    $0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\cdots$

    $\vdots$

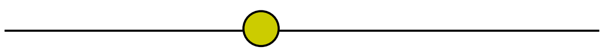
    则$0.\ b_1b_2b_3b_4\cdots$（$b_i \neq b_{ii}$）不含在上述序列中

# 直线上的点集与平面上的点集等势

$$\left\{\begin{array}{l}0.a_1a_2a_3\ldots\ldots\\0.b_1b_2b_3\ldots\ldots\end{array}\right.$$



$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ldots$$



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

# Cantor（康托尔）定理

- 任何集合与其幂集不等势，即：$A \not\approx \rho(A)$
  - 证明要点：

设$g$是从A到$\rho(A)$的函数，构造集合B如下：

$$B=\{x \in A \mid x \notin g(x)\}$$

则$B \in \rho(A)$，但不可能存在$x \in A$，能满足$g(x)=B$，因为，如果有这样的$x_0$, 则$x_0 \in B \leftrightarrow x_0 \notin B$。

因此，$g$不可能是满射。

# 集合的优势关系

- 如果存在从集合A到集合B的单射，则称“集合B优势于集合A”，记为 A≼•B

  [card A ≤ card B]

- 如果集合B优势于集合A，且B与A不等势，则称“集合B真优势于集合A”，记为A≺•B

  [card A < card B]

- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集真优势于集合A

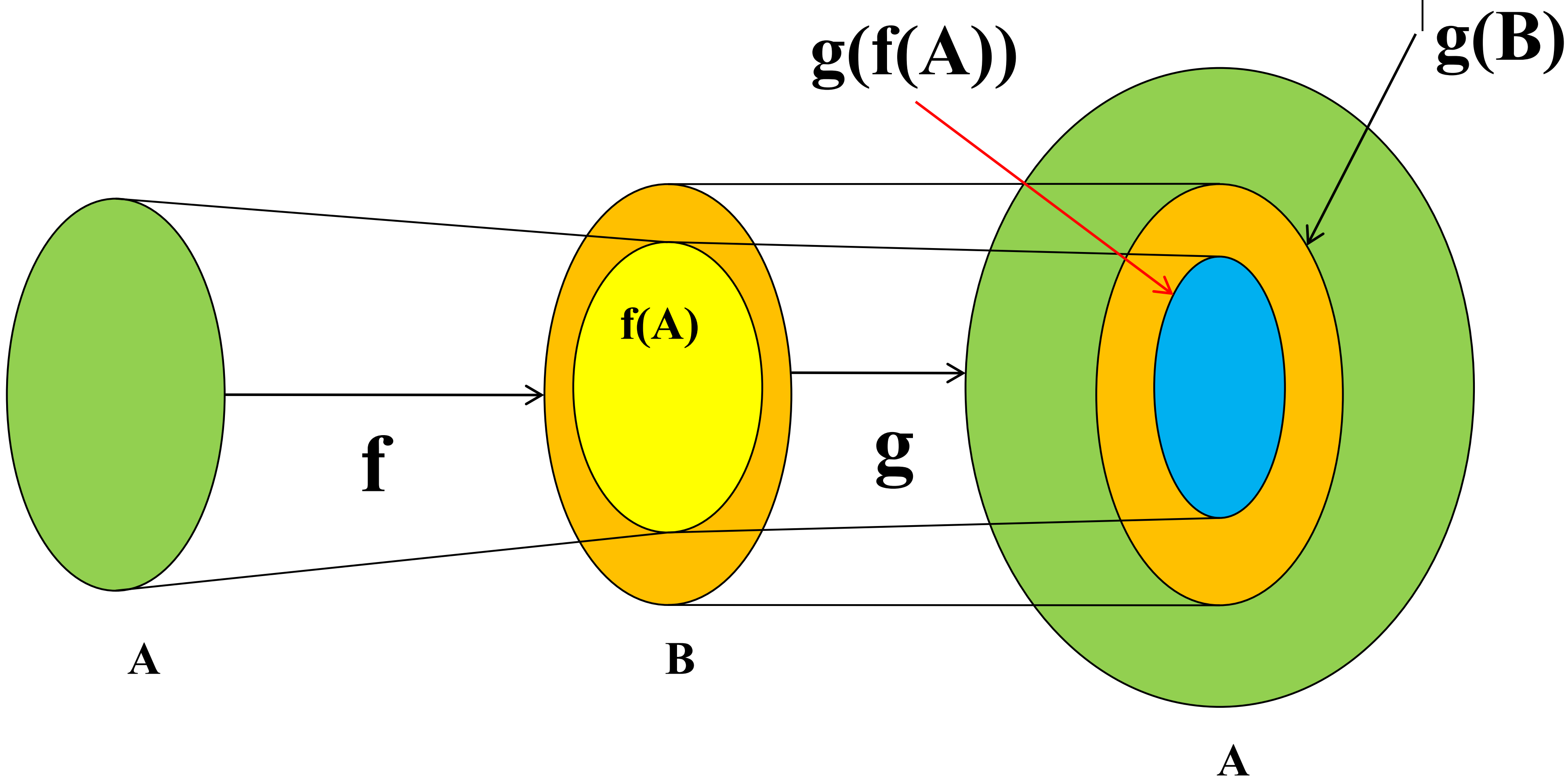
# 集合优势关系的性质

- 自反性：恒等函数
- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B (比较:反对称性)

  (Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

# Bernstein定理的证明

- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B。
- 由A≼•B可知,存在从A到B的一对一函数$f$，同样，由B≼•A可知，存在从B到A的一对一函数$g$，于是：$g \circ f$是从A到A的一对一函数。
- 显然，$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$, 且$f$, $g$的一对一性质保证了：$g(f(A)) \approx A$, $g(B) \approx B$。
- “三明治”引理可推出：$A \approx g(B)$, 从而A≈B。

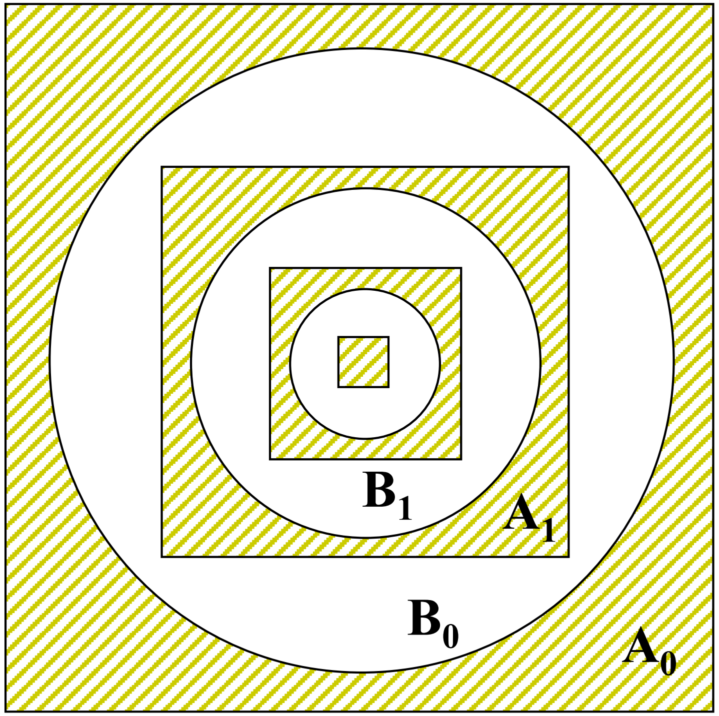



$$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$$

$$g(f(A)) \approx A,\ g(B) \approx B$$

# “三明治”引理的证明

- 若$A_1 \subseteq B \subseteq A$, 且$A_1 \approx A$, 则：$B \approx A$




1\. 令$A_0=A$, $B_0=B$.

2\. 设$f$是从$A_0$到$A_1$的一一对应函数（$A_0 \approx A_1$）

令$A_{n+1}=f(A_n)$, $B_{n+1}=f(B_n)$, 递归地得到序列：

$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ 以及 $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$

3\. 由$A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, 得$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$

4\. 令$C_n=A_n-B_n$, $\cup C_n=C$（C即左图阴影部分）, $D=A-C$（图中白色部分）

可以定义从$A_0$到$B_0$的一一对应函数$g$如下：

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 若x \in C \quad 阴影部分 \\ x & 若x \in D \quad 白色部分 \end{cases}$$

# 优势关系的反对称性用于证明等势

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。
  - 直接找双射不太容易

关键是如何安排在[0,1]中但不在(0,1)中的0和1。

想象那个“宇宙旅馆”。我们可以取(0,1)的一个与自然数集合等势的子集(一定有)$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, “腾出”前两个位置安排0和1

一种证法： $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0\\ \frac{1}{2^2} & x=1\\ \frac{1}{2^{n+2}} & x=\frac{1}{2^n}, n=1,2,3\ldots\\ x & x\text{为其它值}\end{cases}$$

# 优势关系的反对称性用于证明等势 (续)

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。
  - 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

$$f:(0,1)\to[0,1]: f(x)=x$$

$$g:[0,1]\to(0,1): g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \quad \text{注意：} g([0,1])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$$

# 实数集与ρ(N)等势

- $[0, 1) \approx \{0, 1\}^{N}$ 从而 $R \approx \rho(N)$
  - [0,1)中的数唯一地表示为$0.b_1b_2b_3b_4\ldots$
    不容许连续无数个1，比如1/2=0. 1000… (NOT 0.0111…)
  - $f: [0, 1) \to \{0, 1\}^{N}$
    $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \to b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$
    $f$是单射
  - $g: \{0, 1\}^{N} \to [0, 1)$
    $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \to 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数
    $g$是单射
  - 根据Bernstein定理，得证

# 连续统假设

**不存在集合S：**

$$\aleph_0 < \mathrm{card}\ S < \aleph$$