线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间__2013.11.16__

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 简答题(本题共4小题,每小题10分,共40分)

1. 将矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$用行初等变换化为行简化阶梯形矩阵。

答案：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 设A, B分别为$m\times n$和$n\times m$矩阵，E_n为n阶单位阵, 若$m>n$, 判断矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}$是否可逆，并说明理由。

答 案： 不 可 逆。 由$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$知

秩$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}$=秩$\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$=$n$+秩$AB\le n$+秩$A\le n+n<n+m$.

所以矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}$不可逆。

3. 设$n\ge 2$, A 是n阶实方阵。如果$AX=\theta$ 的基础解系为向量$\alpha=(1,1,\cdots,1)'$, 求 $A^*X=\theta$ 的基础解系.

答案：因为 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$,且 $Ax=\theta$的基础解系为 α，故 $r(A)=n-1$ 。
故 $r(A^*)\ge 1$，且$AA^*=A^*A=|A|E=O$。从而 $r(A^*)=1$且 A的$n-1$个线性无关的列就是 A^*的基础解系。

4. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 及$\beta=(b_1,b_2,b_3)'\neq\theta$. 令$B=\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$. 如果$r(A)=r(B)$, 试判断非齐次线性方程组$AX=\beta$ 是否有解，并给出理由。

答案：有解。由$r(A)=r(B)\ge r(A,\beta)\ge r(A)$ 知$r(A)=r(A,\beta)$ 从而非齐次线性方程组$AX=\beta$有解。

二.(20分) 计算下列行列式

(i)$D_n=\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ (ii) $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

解: (i). 从第二列开始，依次将前一列乘以x加到后一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} n & nx+(n-1) & nx^2+(n-1)x+(n-2) & \cdots & \Sigma_{i=0}^{n-3}(n-i)x^{n-3-i} & \Sigma_{i=0}^{n-2}(n-i)x^{n-2-i} & \Sigma_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

沿最后一列展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}\Sigma_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i}\cdot(-1)^{n-1}=\Sigma_{i=0}^{n-1}(n-i)x^{n-1-i}.$$

(ii)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & x_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_{n-1} & x_n-a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$=a_nb_n\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & x_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \cdots & x_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 1 \end{vmatrix}+(x_n-a_nb_n)D_{n-1}$$

$$=a_nb_n(x_1-a_1b_1)\cdots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1})+(x_n-a_nb_n)D_{n-1}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big[\prod_{k\neq i}(x_k-a_kb_k)\Big].$$

三.(10分) 求下列带参数的齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+7x_4 &=0 \\ 4x_1+3x_2+\lambda x_3+6x_4 &=0 \\ x_1+x_2 \qquad\qquad +2x_4 &=0 \end{cases}.$$

解：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & \lambda & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda=1$ 时，$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$x_3$取1可得基础解系为：$(-1,1,1,0)^T$，

当 $\lambda\neq1$ 时，基础解系为：$(\frac{\lambda}{\lambda-1},-\frac{3\lambda-2}{\lambda-1},-\frac{1}{\lambda-1},1)^T$.

四. (10分) 求一个非齐次线性方程组，使得其通解为

$$X=(1,-1,3)'+k_1(-1,3,2)'+k_2(2,1,1)',$$

其中k_1,k_2为任意常数。

解：令$B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 解方程组$BX=\theta$得基础解系$\alpha=(1,5,-7)'$.

令$A=\alpha'=(1,5,-7)$ 及$b=A(1,-1,3)'=-25$. 则非齐次线性方程组$AX=b$的通解为

$$X=(1,-1,3)'+k_1(-1,3,2)'+k_2(2,1,1)',$$

其中k_1,k_2为任意常数。

五.(10分)

设有4个三维向量$\alpha_1=(-2,-3,-4)^T$, $\alpha_2=(4,6,8)^T$, $\beta_1=(2,4,4)^T$, $\beta_2=(7,4,15)^T$. 考虑以下两个向量集合

$S_1=\{v\in R^3|v=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\ k_1,k_2\in R\}$和$S_2=\{v\in R^3|v=l_1\beta_1+l_2\beta_2,\ l_1,l_2\in R\}$. 求向量集合$S_1\bigcap S_2$。

解：由$\alpha_2=-2\alpha_1$ 知$S_1=\{v\in R^3|v=k\alpha_1,\ k\in R\}$.

设$\alpha\in S_1\bigcap S_2$, 则$\alpha=x_1\alpha_1=x_2\beta_1+x_3\beta_2$,

所以

$$x_1(-\alpha_1)+x_2\beta_1+x_3\beta_2=\theta. \tag{1}$$

又$|-\alpha_1,\beta_1,\beta_2|=2\neq0$,

所以方程组(1)只有零解，

从而$\alpha=\theta$,

因此$S_1\bigcap S_2=\{\theta\}$.

六.(10分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & a & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$可以对角化,(1) 求$a,b$满足的条件(2) 求对角矩阵$D$及相似变换矩阵$P$使得$P^{-1}AP=D$.

解：(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$,因此$A$的特征值是$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=2$.

所以A可对角化的充分必要条件是$3-r(2E-A)=2$, 即$r(2E-A)=1$. 这等价于参数a,b 满足$a+2b=0$.

(2) 对于特征值$\lambda=-2$, 解方程组$(-2E-A)X=\theta$得基础解系$\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

对于特征值$\lambda=2$, 解方程组$(2E-A)X=\theta$得基础解系$\vec{p_2}=\begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\vec{p_3}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix} -2 & -b & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则$P$可逆且有$P^{-1}AP=D=\mathrm{diag}\{-2,2,2\}$.