2016-2017 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2017.7.4

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

2.讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ 的敛散性 .

3. 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+2}{n+1}\,(p\in R)$ 的收敛性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\frac{dy}{dx}=1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

二、（本题 10 分）计算 $I_1=\oint_C\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：（1）圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$；（2）闭曲线 $|x|+|y|=1$.

三.（本题 10 分）计算 $I_2=\oint_C\frac{y^2}{2}dx-xzdy+\frac{y^2}{2}dz$，其中 C 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y=R.\end{cases}$ 若从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

四、（本题 10 分）计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}xdydz+(z+1)^2dxdy$，其中有向曲面 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取下侧.

五、（本题 10 分）（1） 证明 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$；（2）讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的收敛性，指明其是绝对收敛还是条件收敛并说明理由 .

六、（本题 10 分） 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和.

七、（本题 10 分）将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、（本题 10 分）（1）（非商学院的学生选做）设 $f(x)$ 二阶连续可微，$g(x)$ 一阶连续可导，且满足：$f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0, g(0)=2$，计算

$I_4=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx$.

（2）（商学院的学生选做）设 $f(x)=x^3+1-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$ **，求** $f(x)$ **满足的微分方程并求** $f(x)$**.**

参考答案

一、**1.** 驻点为：$P_1(2k\pi,0),P_2((2k-1)\pi,-2)$，$k\in Z$. P_1是极大值点，极大值为$f(P_1)=2$. P_2不是极值点. **2. 解：**收敛. 3. $p>0$时原级数收敛，$p\le 0$时原级数发散.

4. 通积分为：$x(e^{-\frac{y^2}{2}}C-y^2+2)=1$. **5.** 通解为：$y=-\ln|\cos(x+C_1|+C_2$.

二、**（1）0，（2）** -2π.. 三. $-\sqrt{2}\pi R^3/4$. **四、** $\frac{\pi}{2}$. 五、条件收敛. 六、$3e^2$.

七、$f(x)$的傅里叶级数为： $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x\ (-\pi<x<\pi)$.

八、**（1）** $I_4=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$. **（2）** $f(x)=\cos x-6\sin x+6x$.