南京大学《微积分II》第一层次期末考试A卷参考答案

一.简答题（本题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

解： 当 $|\ln x|<1$ 时， 级数收敛。 此时， $\frac{1}{e}<x<e$。

当 $x=\frac{1}{e}$ 或者 $x=e$ 时， 上述级数发散。

故级数的收敛域为 $x\in(\frac{1}{e},e)$。

2. 求积分 $I=\int_C\sqrt{y}ds$，其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

解： $I=\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^2\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=\frac{1}{12}(17^{3/2}-1)$。

3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通积分.

解： 由方程可知 $(yy')'=0$。从而 $yy'=C$，其中 C 为任意常数。

故 $(y^2)'=2C$，即方程的通积分为 $y^2+C_1x=C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明：$\int_0^1\int_0^1 f(x+y)dxdy=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]du.$

解：

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x+y)dxdy&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u}f(u)dvdu+\frac{1}{2}\int_1^2\int_{u-2}^{2-u}f(u)dvdu\\&\quad(u=y+x,v=y-x)\\&=\int_0^1 uf(u)du+\int_1^2(2-u)f(u)du\\&=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]du.\end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展开式.

解： $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\ (|x|<1)$。

又由于 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 的幂级数为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\ (-1<x\le 1)$。

6. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx$ 的敛散性 ($p \in \mathbb{R}$).

解： $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2}dx = I_1 + I_2$,

当 $p > -1$ 时，$0 < I_1 \le \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p}$;

当 $p \le -1$ 时，$I_1 \ge \frac{1}{2}\int_0^1 x^p dx$，此时 I_1 发散。

当 $-1 < p < 1$ 时，$0 < I_2 < \int_1^{+\infty} x^{p-2} dx = \frac{1}{1-p}$;

当 $p \ge 1$ 时，$I_2 > \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} x^{p-2}dx$，此时 I_1 发散。

综上，原广义积分当 $-1 < p < 1$ 时收敛，其他情形发散。

7. 求函数项级数 $I(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ 的和函数.

解： 级数的收敛域为 $x \in [-1, 1]$，且 $I(0) = 0$。

进一步有 $(xI(x))'' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$。

从而 $xI(x) = x + \ln(1-x) - x\ln(1-x)$，即

$$I(x) = 1 - \ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x).$$

8. 求曲面积分 $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ($R > 0$) 外侧在 $z \ge 0$ 部分.

解： 设 $S_1 = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$，指向下侧，且，

$$\iint_{S_1} x^2dydyz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint_{S_1} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1)dS = 0,$$

从而

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+S_1} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy \\ &= 2\iint_{x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0} (x+y+z)dV \\ &= 2\iint_{x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0} zdV \\ &= 2\pi\int_0^1 z(1-z^2)dz \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

二. (本题 10 分) 求级数 $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{2^n n!}$ 的和.

解：设 $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{2^n n!}x^{n+1}$，则 $I=I(1)$。

$I(0)=0,\quad I'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{x}{2})^n=e^{-\frac{x}{2}}-1$。

从而 $I=\int_0^1\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)dx=1-2e^{-1/2}$。

三. (本题 10 分) 计算曲线积分 $\int_\Gamma 2ydx+xdy+e^z dz$，其中 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

解：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma 2ydx+xdy+e^z dz\\
=&\int_\Gamma 2(1-x)dx+(1-y)dy+e^z dz\\
=&\int_\Gamma d\left(-(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+e^z\right)\\
=&0.
\end{aligned}
$$

四. (本题 10 分) 计算积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的有限部分.

解：

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS\\
=&\iint_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}\left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy\\
=&\sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy\\
=&\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}r^3\cos\theta drd\theta\\
=&4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\theta d\theta\\
=&\frac{64\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$

五. (本题 10 分) 设 $f(x)=|x|$,

(1). 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上正弦级数展开式的前两项系数 b_1 和 b_2.

(2). 证明：对于二元函数 $F(a,b)=\int_0^\pi [f(x)-a\sin x-b\sin(2x)]^2\,dx$，$(b_1,b_2)$ 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值.

解：(1).

$$\begin{aligned} b_1 =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x dx \\ =& \frac{2\pi}{\pi}=2, \\ b_2 =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)dx \\ =& \frac{-\pi}{\pi}=-1. \end{aligned}$$

(2). 设 (a_0,b_0) 为 $F(a,b)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点，且：

$$\partial_a F(a,b)=-2\int_0^\pi \sin x(f(x)-a\sin x-b\sin(2x))dx$$
$$\partial_b F(a,b)=-2\int_0^\pi \sin(2x)(f(x)-a\sin x-b\sin(2x))dx$$

则 $\partial_a F(a,b)\big|_{(b_1,b_2)}=\partial_b F(a,b)\big|_{(b_1,b_2)}=0$。

进一步

$$\partial_{aa}F(a,b)=2\int_0^\pi \sin^2 x dx>0,$$
$$\partial_{ab}F(a,b)=2\int_0^\pi \sin x\sin(2x)dx=0,$$
$$\partial_{bb}F(a,b)=2\int_0^\pi \sin^2(2x)dx>0,$$

故 (b_1,b_2) 为 $F(a,b)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值。

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题.

六.（本题 12 分）

(1). 求方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解.

(2). 设 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，证明: $y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 解的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

解：(1). 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，则特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$。

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=ce^x$，代入方程得：$2c=1$，则 $c=\frac{1}{2}$。

从而方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$，其中 c_1,c_2 为任意常数。

(2). 若 $y=f(x)$ 为上述二次方程的解，由 (1)，有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$。

现有 $y=f'(x)$ 为上述二次方程的解，则

$$f(x)=\frac{c_1}{2}e^{2x}+\frac{c_2}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x+c_3,$$

其中 c_3 为任意常数。

从而 $y=c_3$ 为上述二次方程所对应的齐次方程的解，故 $c_3=0$。

从而 $f(x)=\frac{c_1}{2}e^{2x}+\frac{c_2}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{x}$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$。

七. (本题 12 分)

(1). 求方程 $y''-5y'+6y=f(x)$ 的通解，其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2). 若 $f(x)\geq 0$，证明上述方程满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解必非负.

解: (1). 齐次方程所对应的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，则特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$。

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{3x}$，则:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{2x}+c_2'(x)e^{3x}=0, \\ 2c_1'(x)e^{2x}+3c_2'(x)e^{3x}=f(x). \end{cases}$$

从而可取 $c_1(x)=-\int_0^x e^{-2t}f(t)dt,\quad c_2(x)=\int_0^x e^{-3t}f(t)dt$。

故方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\int_0^x\left(e^{3x-3t}-e^{2x-2t}\right)f(t)dt$。

(2). 当 $y(0)=y'(0)=0$ 时，$c_1=c_2=0$，从而:

$$y=\int_0^x\left(e^{3x-3t}-e^{2x-2t}\right)f(t)dt.$$

当 $x>0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}>0$ $(t\in(0,x))$;

当 $x<0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}<0$ $(t\in(x,0))$;

从而当 $f(t)\geq 0$ 时，$y\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$。