南京大学数学系2011/2012(II)高等数学(一, A)试卷参考解答

一. 计算下列各题($10\times 6=60$分)

1. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部.

S 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\qquad (x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2-h^2\},$$

又

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint_S z\,\mathrm{d}S &= \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= a\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2).\end{aligned}$$

2.计算曲面积分

$$\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

$P=(y-z)x$, $Q=0$, $R=x-y$, 由高斯公式得

$$\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V (y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}.$$

3.求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}(1-\frac{1}{(2n+1)^2})=\frac{1}{8}.$$

4. 求幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛半径与收敛域.

因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

所以收敛半径 $R=\frac{1}{l}=1$.

当 $x=1$ 时, 级数成为交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

此级数收敛.

当 $x=-1$ 时, 级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

此级数发散. 因此收敛域为 $(-1,1]$.

5. 求方程$y''+y=x^2$ 的通解.

$y=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2-2$.

6.求微分方程$(x-y)dx+(x+y)dy=0$的通解.

$(x-y)dx+(x+2y)dy=xdx+ydy-(ydx-xdy)=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)-(x^2+y^2)d(\arctan\frac{x}{y})$,

通解为$x^2+y^2=Ce^{2\arctan\frac{x}{y}}$, $C>0$.

7.求函数 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad (-1<x\le 1),$$

以 $(-x)$ 代替上式中的 x 得

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right),\quad (-1\le x<1),$$

因此

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &= 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right),\quad (-1<x<1).\end{aligned}$$

8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\quad(p>0)$ 的敛散性.

由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\frac{\arctan x}{1+x^p}=\frac{\pi}{2}.$$

所以, 当 $0<p\le 1$ 时, 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散;

当 $p>1$ 时, 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

9.计算曲线积分 $\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\,(a>0)$.

C 的参数方程为

$$x=a\sin\theta\cos\theta,\quad y=a\sin^2\theta,\qquad(0\le\theta\le\pi),$$

$$\begin{aligned}\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^\pi\sqrt{a^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^\pi a\sin\theta\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &= 2a^2.\end{aligned}$$

10.计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{4x^2+4y^2}\le z\le 2,(x,y)\in D\},\qquad D:x^2+y^2\le 1,$

$$\begin{aligned}原式 &= \iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4x^2+4y^2}}^2 y^2\mathrm{d}z\\ &= \iint\limits_D y^2(2-\sqrt{4x^2+4y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin^2\theta(2-2\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

二. (本题满分12分) (本题满分12分) 讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

当$p \le 0$时，通项不趋于零，所以原级数发散.

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}>0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

当$p>\frac{1}{3}$时，级数收敛.

当$p\le\frac{1}{3}$时，级数发散.

三. (本题满分12分) 设函数$f(x),g(x)$连续可微,$f(0)=g(0)=0$,使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+(f(x)y-g(x))\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出$f(x),g(x)$, 并求该曲线积分的值.

解：

$$P=(x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2, Q=f(x)y-g(x), R=z,$$

曲线积分与路径无关 的充分必要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{1}$$

$$f'(x)y-g'(x)=x^2-f(x)+g(x)y,$$

$$(f'(x)-g(x))y=g'(x)-f(x)+x^2,$$

$$f'(x)-g(x)=0, g'(x)-f(x)+x^2=0.$$

$$f''(x)-f(x)=-x^2,$$

$$f(x)=-e^{-x}-e^{x}+x^2+2,$$

$$g(x)=f'(x)=e^{-x}-e^{x}+2x,$$

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+(f(x)y-g(x))\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\frac{1}{2}$$

四. (本题满分12分) 1,设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为$f(x)=\pi^2-x^2, (-\pi\le x\le\pi)$ 求函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式

2,求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$的和.

3,求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解：(1),因为$f(x)$为偶函数，所以$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$.
$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)dx=\frac{2}{3}\pi^2$,
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2},(n=1,2,\cdots)$.
因为$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 上连续，并且$f(-\pi)=f(\pi)$,
$f(x)=\frac{1}{3}\quad 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx,(-\pi\le x\le\pi)$.
(2),在上式中令$x=0$, 得
$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.
(3),令$x=\pi$, 得

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

五. (本题非商学院的考生做,满分10分）已知曲线积分 $\int_L\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$ 恒等于常数A, 其中函数$f(x)$ 连续可导, L为任意包围原点$O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向,

6' (1), G为不包含原点的单连通区域证明:G 内的曲线积分

$$\int_C\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$$

与路径无关, 其中C 为完全位于G内的曲线.

4' (2), 求函数$f(x)$ 与常数A.

证明: 设L_1,L_2 是G 内连接a,b两点的不同曲线, 取L_3 连接b,a 曲线，使得L_1+L_3 为包含原点的简单闭曲线, 则L_2+L_3 也为包含原点的简单闭曲线,

$$\int_{L_1+L_3}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\int_{L_2+L_3}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=A.$$

$$\int_{L_1}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\int_{L_2}\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x).$$

(2)

$$P=\frac{-y}{f(x)+8y^2},Q=\frac{x}{f(x)+8y^2},$$

由$Q'_x=P'_y$ 可得$\boxed{xf'(x)=2f(x)}$ 从而$f(x)=x^2$.
$l:x^2+8y^2=r^2$, $\int_l\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{8}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

六. (本题商学院的考生做,满分10分）利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z.$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\,(a>0,\,h>0)$ 若从 Ox 轴的正向看去, 此椭圆是依逆时针方向进行

解：将平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ 上 C 所围的区域记为 S, 则 S 的法向量为 $(h,0,a)$, 故

3'
$$\underline{\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.}$$

由斯托克斯公式有

$$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

6'
$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -2\iint_S (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= -2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\iint_S \mathrm{d}S$$

$$= -2\frac{h+a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot a\sqrt{a^2+h^2}\pi = \underline{-2\pi a(h+a).}$$

$= -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy$

$= -2\iint_S dydz + \cancel{0\cdot dzdx} + dxdy$

$= \cancel{-2\iint_S dydz + dzdx\ dxdy.}$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = h(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad \theta: 0 \to 2\pi$$