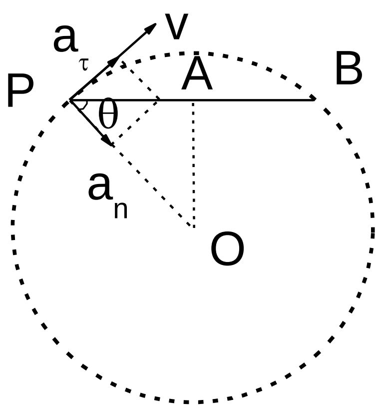
南京大学 电子科学与工程学院 全日制统招本科生

《大学物理 I》期中考试

试卷 参考答案

一.（10 分）如图所示，设质点在平面曲线上某点 P 的加速度方向与曲率圆上弦 **PB** 重合。已知 $PB = l$,质点在 P 点的速度为 v，试求质点在 P 点的加速度大小。



解： $\tan\theta = \dfrac{a_\tau}{a_n}$， $a_\tau = a_n \tan\theta$

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$， $R = \dfrac{l}{2\cos\theta}$

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = a_n\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{a_n}{\cos\theta} = \frac{v^2}{R\cos\theta} = \frac{2v^2}{l}$$

二、（10 分）角动量为 L，质量为 m 的人造卫星，在半径为 r 的圆轨迹上运行，试求它的动能、势能和总能量。

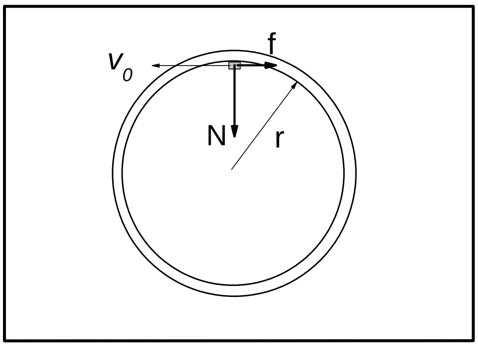
解： $L = pr$

动能 $E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{L^2}{2mr^2}$ ； $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{L^2}{mr^3} = G\dfrac{mM}{r^2}$

势能 $E_p = -G\dfrac{mM}{r} = -\dfrac{L^2}{mr^2}$

总能量 $E = E_k + E_p = -\dfrac{L^2}{2mr^2}$

三、（15 分）质量为m的物体在无摩擦的桌面上滑动，其运动被约束于固定在桌面上的半径为r的圆环内，在$t=0$时，物体沿着环的内壁（即在切线方向）以速度v_0运动，物体与圆环间的摩擦系数为μ，求物体在运动过程中t时刻的速度大小。



解：物体受力情况如图所示

支持力$N=m\dfrac{v^2}{r}$，摩擦力$f=m\mu\dfrac{v^2}{r}$

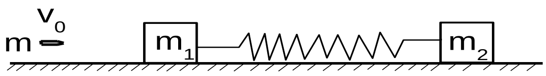
切向：$ma_\tau=m\dfrac{dv}{dt}=-m\mu\dfrac{v^2}{r}$

$$\frac{dv}{dt}=-\mu\frac{v^2}{r}$$

$$\int_{v_0}^{v}-\frac{dv}{v^2}=\int_0^t\frac{\mu}{r}dt$$

$$v=\frac{v_0r}{r+\mu v_0t}$$

四、（10 分）m_1、m_2静止在光滑的水平面上，以劲度系数为k的弹簧相连，弹簧处于自然伸展状态，一质量为m、水平速率为v_0的子弹入射到m_1内，弹簧最多压缩了多少？



解：子弹射入m_1瞬间，设子弹与m_1的速度为v_1，由动量守恒：

$$mv_0=(m+m_1)v_1,\quad v_1=\frac{m}{m+m_1}v_0$$

弹簧压缩最多时，子弹和m_1及m_2具有相同的速度v，由动量守恒：

$$mv_0=(m+m_1)v_1=(m+m_1+m_2)v$$

$$v=\frac{mv_0}{m+m_1+m_2}$$

设弹簧的最大压缩量为x，由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(m+m_1){v_1}^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v^2$$

将v_1和v代入上式

$$kx^2=\frac{m^2{v_0}^2}{m+m_1}-\frac{m^2{v_0}^2}{m+m_1+m_2}$$

$$x=\sqrt{\frac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}mv_0$$

五、（10 分）一匀质球绕通过其中心的轴以一定角速度转动，如果该球的半径减至原来的 $\frac{1}{n}$，那么该球的动能增大至多少倍？

解：匀质球绕通过其中心的轴的转动惯量 $J=\frac{2}{5}mR^2$

由角动量守恒：$J_1\omega_1=J_2\omega_2$，由于 $J_2=\frac{1}{n^2}J_1$，则 $\omega_2=n^2\omega_1$

球的转动动能 $E_{k2}=\frac{1}{2}J_2{\omega_2}^2=\frac{J_1}{2n^2}\cdot n^4{\omega_1}^2=n^2\cdot\frac{1}{2}J_1{\omega_1}^2=n^2E_{k1}$

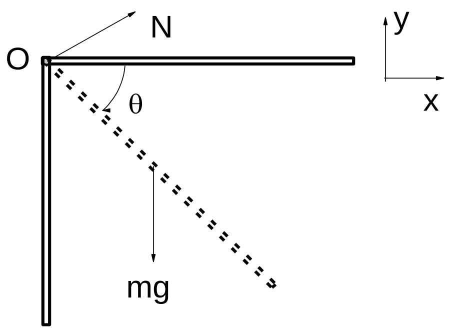
该球的动能增大至 n^2 倍

六、（15 分）设一匀质细杆的质量为 m，长为 L，一端支以枢轴而能自由旋转，设此杆自水平静止释放。求：

1 ）当杆与水平方向成 θ 角时的角加速度；

2 ）当杆过竖直位置时的角速度；

3) 当杆过竖直位置时，利用质心运动定理，求轴作用于杆上的力。



解：杆受到两个力的作用：重力 mg 和轴对杆的作用力 N

作用力 N 对轴的力矩为零。

重力对轴的力矩：$M=mg\cdot\frac{L}{2}\cos\theta$

以 θ 增大的方向为正，则由定轴转动定律：

$$mg\cdot\frac{L}{2}\cos\theta=J\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{3}mL^2\frac{d\omega}{dt}$$

1）角加速度 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g}{2L}\cos\theta$

2）以轴位置作为重力势能的零点，因为作用力 N 不作功，杆与地球系统的机械能守恒

$$0=\frac{1}{2}J\omega^2-mg\frac{L}{2}$$

将 $J=\frac{1}{3}mL^2$ 代入上式，得：当杆过竖直位置时的角速度 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}$

3）当杆过竖直位置时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，角加速度为 0，杆质心的切向（x 方向）加速度为 0

N 的 x 方向分力 $N_x=0$

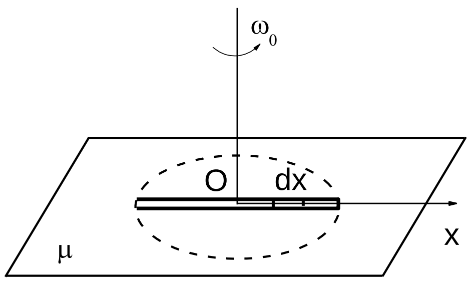
在 y 方向，由质心运动定理：

$$-mg+N_y=m\cdot\frac{L}{2}\cdot\omega^2=\frac{3}{2}mg$$

$$N_y=\frac{5}{2}mg$$

杆过竖直位置时，轴对杆的作用力竖直向上，大小为 $\frac{5}{2}mg$

七、（15 分）一匀质细杆长为 l，质量为 m，平放在摩擦系数为 μ 的水平桌面上，设开始时杆以角速度 ω_0 绕过中心 O 且垂直于桌面的轴转动，试求：（1）作用于杆的摩擦力矩；（2）经过多长时间杆停止转动。



解：建立如图所示的坐标系，细杆的线密度 $\lambda=\frac{m}{l}$，

（1）在 x 处取一线元 dx，其质量 $dm=\lambda dx=\frac{m}{l}dx$

dm 所受摩擦力 $df=\frac{m}{l}g\mu dx$

dm 受的力矩 $dM=\frac{m}{l}g\mu x dx$

杆受的力矩 $M=2\int_0^{l/2}\frac{m}{l}g\mu x dx=\frac{1}{4}\mu mgl$

（2）由定轴转动定理 $M=\frac{dL}{dt}=J\frac{d\omega}{dt}$

$$-\int_0^t Mdt=\int_{\omega_0}^0 Jd\omega$$

$$-\frac{1}{4}\mu mglt=-\frac{1}{12}ml^2\omega_0$$

$$t=\frac{\omega_0 l}{3\mu g}$$

八、(15 分) π^+ 介子衰变为 μ^+ 子和中微子 ν ：$\pi^+\to\mu^+ +\nu$

用守恒定律及狭义相对论能量和动量关系，求质心系中 μ^+ 子和中微子 ν 的能量，已知三粒子的静止质量分别为 m_π 、m_μ 和 0。(提示：质心系中 π^+ 介子速度为零)

解：由能量动量关系 $E^2=E_0{}^2+(pc)^2$，对于中微子 ν ：

$$p=\frac{E_\nu}{c}$$

由动量守恒，可知 μ^+ 子的动量大小也为 $p=\frac{E_\nu}{c}$，所以对 μ^+ 子，有：

$$E_\mu{}^2=m_\mu{}^2c^4+p^2c^2=m_\mu{}^2c^4+E_\nu{}^2;$$

由能量守恒：$m_\pi c^2=E_\mu+E_\nu$

由以上两式解得：$E_\mu=\frac{(m_\pi{}^2+m_\mu{}^2)c^2}{2m_\pi}$，$E_\nu=\frac{(m_\pi{}^2-m_\mu{}^2)c^2}{2m_\pi}$