南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2013.6.26

一、计算下列各题（10×5=50 分）

1. 计算曲面积分 $\iint_S z dS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$（$0<h<a$）截出的顶部.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径，收敛区间与收敛域.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.　5. 解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}dx$ 的敛散性，若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint_S xyz dxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 C 为椭圆周 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=x^2/2+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

10. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z dxdydz$，其中 Ω 是区域 $x^2+y^2+z^2\leq 4z, \sqrt{x^2+y^2}\leq z$.

二、（8 分）设区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leq z\leq t, x^2+y^2\leq t^2\}(t>0)$，函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2)dxdydz$. 求 $\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{t^5}$.

三、（10 分）设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)dt=x^2+e^x-f(x)$，求函数 $f(x)$.

四、（12 分）计算曲线积分 $\int_l(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中积分曲线 l 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线：$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=h\varphi/(2\pi)$.

五、（12 分）1. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，并且 $f(x)=2+x$，（$-1\leq x\leq 1$），求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅里叶展开式. 2. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和. 3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

六、（8 分）设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|dx$ 收敛，证明：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

参考答案:

一、1、$\pi a(a^2-h^2)$. 2、3. 3、$R=1/3$，收敛区间 $(-4/3,-2/3)$，收敛域 $[-4/3,-2/3)$.

4、$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，5、$y/x+\ln|y|+C=0, y=0$ 为奇解. 6、收敛，$\frac{2}{3}\ln 2$.

7、$2/15$. 8、2π. 9、$2x+2y-z=3$. 10、$\frac{56}{3}\pi$. 二、π.

三、$f'(x)+0.5f(x)=0.5e^x+x+0.5, f(0)=1, \therefore f(x)=11e^{-0.5x}/3+e^x/3+2x-3$.

四、$h^3/3$. 五、$f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x, (|x|\le 1). \dfrac{\pi^2}{8}, \dfrac{\pi^2}{6}$. 六、（略）

南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2014.6.26

一、简答题（本题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

2. 求积分 $I=\int_C\sqrt{y}ds$，其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通积分.

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明：$\int_0^1\int_0^1 f(x+y)dxdy=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]du$.

5. 求函数 $f(x)=ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展开式.

6. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p}{1+x^2}dx$ 的敛散性（$p\in R$）.

7. 求函数项级数 $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数.

8. 求曲面积分 $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$ 外侧在 $z\ge 0$ 的部分.

二、（本题 10 分）求级数 $I=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、（本题 10 分）计算曲线积分 $\int_\Gamma 2ydx + xdy + e^z dz$，其中 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、（本题 10 分）计算积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的有限部分.

五、（本题 10 分）设 $f(x)=|x|$，

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上正弦级数展开式的前两项系数 b_1 和 b_2；

（2）证明：对于二元函数 $F(a,b)=\int_0^\pi [f(x)-a\sin x - b\sin(2x)]^2 dx$, (b_1,b_2) 为其在 R^2 上的最小值.

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题

六、（本题 12 分）

（1）求方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解；

（2）设 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，证明：$y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 解的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

七、（本题 12 分）

（1）求方程 $y''-5y'+6y=f(x)$ 的通解；其中 $f(x)$ 为 R 上的连续函数；

（2）若 $f(x)\ge 0$，证明上述方程满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解必非负.

参考答案:

一、1、$(1/e,e)$. 2、$\frac{3}{16}(\sqrt{5}-1)$． 3、$y^2+C_1x=C_2$，5、$f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}(|x|<1)$．

6、$-1<p<1$ 时收敛，其他均发散，7、$I(x)=1-\ln(1-x)+\ln(1-x)/x$． 8、$1/2$.

二、$1-2/\sqrt{e}$；三、0；四、$64/15$；五、（1），2，-1；（2）（略）.

六、（1）$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^x/2$；（2）（略）.

七、（1）$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\int_0^x (\mathrm{e}^{3x-3t}-\mathrm{e}^{2x-2t})f(t)dt$；（2）（略）.

南京大学《微积分 II》(第一层次)第二学期期末考试试卷 2015.6.26

一、计算下列各题(本题共 11 小题,每小题 5 分,共 55 分)

1. 计算曲面积分 $\iint_S zds$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算二重积分 $\iint_D |y-x^2|dxdy$,其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ 的敛散性,若收敛,计算其值.

5. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_{\widehat{OmAnO}}\arctan\frac{y}{x}dy-dx$,其中 $\widehat{OmA}$ 为抛物线段 $y=x^2$, $\widehat{AnO}$ 为直线段 $y=x$..

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n}\right]$ 是否收敛,如果收敛,求其和.

8. 计算曲线积分 $\int_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑简单闭曲线,积分按逆时针方向进行.

9. 求解微分方程 $(e^x\sin y-2y\sin x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$.

10. 讨论幂级数 $x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$ 的收敛域,并求其和函数.

11. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 的值(提示:可利用上题的结果).

二、(本题满分 12 分)计算曲面积分 $\iint_S \frac{axdydz-2y(z+a)dzdx+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中曲面 S 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,$a>0$ 是一个常数.

三、(本题满分 12 分)设函数 $Q(x,y)$ 连续可微,曲线积分 $\int_\Gamma 3x^2ydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,且对一切实数都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2ydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2ydx+Q(x,y)dy$,求 $Q(x,y)$.

四、(本题满分 13 分)1. 求函数 $f(x)=x^2\ (-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开式;

2. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$的和；3. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和.

五、（本题满分 8 分）

1. （本题非商学院的考生选做）设$a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, (n=1,2,\cdots)$ 证明：(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛；（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

2. （本题商学院的考生选做）讨论当实数p为何值时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(e-(1+\frac{1}{n})^n)^p$收敛，实数$p$为何值时，级数发散.

参考答案:

一、1、$\pi a(a^2-h^2)$. 2、$\frac{46}{15}$. 3、切平面：$x+y+2z=4$，法线：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$. 4、收敛，$\pi/\sqrt{2}$. 5、$\frac{y}{x}+\ln|y|+C=0$. $y=0$是奇解. 6、$\pi/4-1$. 7、$-5/18$. 8、2π. 9、$e^x\sin y+2y\cos x=C$. 10、收敛域$[-1,1]$，和函数为$\arctan x$. 11、$\pi/4$.

二、$\frac{5\pi}{3}a^3$. 三、x^3+3y^2-1. 四、（1）$f(x)=\frac{1}{3}\pi^3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx, (-\pi\le x\le\pi)$.

（2）$\frac{\pi^2}{12}$；（3）$\frac{\pi^2}{8}$. 五、（略）.

南京大学《微积分 II》（第一层次）第二学期期末考试试卷 2016.6.20

一、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共计 30 分）

1. 求二重极限：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

2. 设$u=u(x,y), v=v(x,y)$由方程组$\begin{cases}u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$所确定，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

3. 求证数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$收敛，并求其和.

4. 求微分方程$y'-y=xy^3$的通解 .

5. 求微分方程$yy''=(y')^2$满足初始条件$y(0)=y'(0)=1$的特解 .

二、（本题 10 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0, \qquad\qquad (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性．

三、（本题 10 分）求第一类曲面积分：$I_1=\iint\limits_S x^2y^2dS$，其中 S 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},x^2+y^2\le R^2$.

四、（本题 10 分）计算第二类曲面积分：

$$I_2=\iint\limits_S (x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$ ，其中 S 为上半球面：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧（$a>0$，提示：利用 Gauss 公式）.

五、（本题 10 分）讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的收敛性. 如果收敛，指出其是条件收敛还是绝对收敛?

六、（本题 10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式.

七、（本题 10 分）将函数 $f(x)=x\,(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

八、（本题 10 分）(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；(2) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$，建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

参考答案：一、1．0； 2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$. 3. **收敛，1；**

4. $y^{-2}=Ce^{-2x}-x+\frac{1}{2}$；5. $y=e^x$. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续，可偏导，但不可微.

5. 三、$\frac{2}{15}\pi R^6$. 四、$\frac{29}{20}\pi a^5$. 五、条件收敛. 六、$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\,(|x|<1)$.

七、$f(x)=x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\,(-\pi\le x\le\pi)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 八、收敛域为 R；$S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x,S(0)=1,S'(0)=0$;