2014-2015 学年第二学期第一层次期中考试试卷 2015.4.25

一、计算下列各题：（每小题 6 分，共 48 分）

1. 设函数 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程与法平面方程.

3.求函数 $u=x+e^x\sin(y-z)$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数.

4. 求函数 $z=x^2+xy+2y^2-x+3y+3$ 的极值.

5. 计算二重积分 $I_1=\iint\limits_D |y+\sqrt{3}x|\,dxdy$，其中 D： $x^2+y^2\le 1$.

6．求三重积分 $I_2=\iiint\limits_\Omega e^{|y|}dxdydz$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le 1$.

7. 求 $I_3=\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$ ，其中 C 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的部分 .

8． 求 $I_4=\int_C (x^2y+3xe^x)dx+(\dfrac{1}{3}x^3-y\sin y)dy$ ，其中 C 为摆线 $x=t-\sin t,$ $y=1-\cos t$ 从 $A(2\pi,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段弧 .

二、设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}\,), & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) . \end{cases}$ 试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性 .（12 分）

三、求曲面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的一点 $P(x,y,z)$ ，使得由 $P, A(a,0,0), B(0,b,0),$ $C(0,0,c)$ 构成的四面体体积最大 .（10 分）

四、求柱面 $x^2+y^2=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围立体的体积与表面积.（12 分）

五、计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$ ，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$， $x^2+y^2\le Rx$ 所围成的空间区域（其中 $R>0$ ） .（10 分）

六、设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明： $\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy\ge(b-a)^2$.其中积分区域为

$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, a\le y\le b\}$.（8 分）

参考答案:

一、1. $\Delta z=0$. 2. 切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{2}$，法平面为：$x+2z-5=0$.

3. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_A=\dfrac{1+4e}{3}$.　　4. 驻点为：$P_0(1,-1)$，极小值为 1，无极大值. 5. $\dfrac{8}{3}$.

6. 2π.　7. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(a^2+\dfrac{4b^2\pi^2}{3})$.　8. $3e^{2\pi}(1-2\pi)-3$.

二. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续、可偏导、可微 .

三、驻点为 $(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{b}{\sqrt{3}},\pm\dfrac{c}{\sqrt{3}})$. 由几何意义，经验证最大点为 $(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}},-\dfrac{c}{\sqrt{3}})$.

四、$V=\dfrac{2}{3}(\pi-\dfrac{4}{3})$. 曲面面积为：$2\pi$.

五、$\dfrac{2}{15}R^5(\pi-\dfrac{16}{15})$.　　六、 由对称性 $\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy=\iint_D e^{f(y)-f(x)}dxdy$.