南京大学数学课程试卷(A)评分标准

2010-2011学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 微积分II（第一层次）

考试时间 2011.6.22. 9:00—11:00　考试成绩________

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 42 分）

1）设 f 可微，$z=f\left(xy,x^2-y^2\right)$，求 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+2xf_2',\quad (2分)\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-2yf_2',\quad (2分)$$

$$原式=\left(x^2+y^2\right)f_1'.\quad (2分)$$

2）交换二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的次序。

$$原式=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f\,\mathrm{d}x.\qquad (3分+3分)$$

3）求 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，取上侧。

$$原式=\iint\limits_{D}\left(-2x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad (2分)$$

$$=0+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\rho\,\mathrm{d}\rho\quad (3分)\quad =\frac{2}{3}\pi.\quad (1分)$$

4）判别级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{n}$ 的敛散性(包含绝对收敛，条件收敛与发散）。

解 $a_n=\dfrac{\ln^2 n}{n}\ge\dfrac{1}{n}\ (n\ge 3)$，$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.　(2分)

$a_n\to 0$，$f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}<0\ (n>\mathrm{e}^2)$，

$\therefore a_n=f(n)$ 单调减，(3分)　$\therefore$ 原级数条件收敛　(1分)

5）求函数 $f(x)=\arctan\left(x^2\right)$ 关于 x 的幂级数展开式。

解 $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}=2x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^4\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}$,　(4分)

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$.　$|x|\le 1$.　(2分)

6）在函数 $f(x)=x\left(0\le x\le\pi\right)$ 的余弦级数展开式中，求傅立叶系数 a_3.

解 $a_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos 3x\,\mathrm{d}\,x$ （3分）

$=\frac{2}{3\pi}\left(x\sin 3x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 3x\,\mathrm{d}\,x\right)=\frac{-4}{9\pi}.$ （3分）

7）求微分方程 $y''+2y'+5y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解。

解 方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$. （3分）

方程 $y''+2y'+5y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}.\quad (3分)$$

二、（10分）设 Γ 为 $y=\sin x$ 上自点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段弧，

求 $\int_{\Gamma}\left(\frac{x}{1+x^2}+y\cos(xy)\right)\mathrm{d}\,x+x\left(1+\cos(xy)\right)\mathrm{d}\,y.$

解 原式 $=-\iint_D\left(Q_x'-P_y'\right)\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y+\int_{OA}P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y$ （5分）

$=-\iint_D\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y+\int_0^{\pi}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\ln\left(1+\pi^2\right)-2.$ （5分）

三、（10分）设常数 $a>0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的敛散性。

解 记 $b_n=\frac{a^n}{1+a^{2n}}$，则 $b_n>0$，$\because\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a\left(1+a^{2n}\right)}{1+a^{2n+2}}$. 当 $0<a<1$ 时，$\frac{b_{n+1}}{b_n}\to a<1$，

于是 $0<a<1$ 时原级数绝对收敛。 （4分）

当 $a>1$ 时，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a\left(a^{-2n}+1\right)}{a^{-2n}+a^2}\to\frac{1}{a}<1$，于是 $a>1$ 时原级数绝对收敛。（4分）

$a=1$ 时，$\because(-1)^{n+1}\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\not\to 0$，于是 $a=1$ 时原级数发散. （2分）

四、（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+3)}$ 的和.

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+3)}x^{n+3}$，则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}=x^2\left(\mathrm{e}^x-1\right)$，（4分）

$f(x)=f(0)+\int_0^x x^2\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\left(x^2-2x+2\right)-2-\frac{1}{3}x^3$，　（4分）

于是原式 $=f(1)=\mathrm{e}-\frac{7}{3}$.　　（2分）

五、（14 分）求微分方程 $y''+y=\frac{1}{\sin 2x}$ 的通解。

$\lambda^2+1=0$，$\lambda=\pm\mathrm{i}$，$y=C_1\cos x+C_2\sin x$，　（2分）

令 $\bar{y}=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$，　　（1分）

由 $\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\frac{1}{\sin 2x}, \end{cases}$　（2分）

解得 $C_1'(x)=-\frac{\sin x}{\sin 2x}=-\frac{1}{2\cos x}$，（2分）$C_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin 2x}=\frac{1}{2\sin x}$.（2分）

解得 $C_1(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|$，（2分）

$C_2(x)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|\csc x+\cot x|$.（2分）

$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}\cos x\cdot\ln|\sec x+\tan x|+\frac{1}{2}\sin x\cdot\ln|\csc x+\cot x|$.（1分）

六、（14 分）本题含两个小题，商学院学生解第（1）小题；理科学生解第（2）小题，理科学生若不会解第（2）小题，可解第（1）小题，但折半给分。

（1）（商学院学生解）$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，Σ为立体Ω 的表面的外侧，求 $\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　原式 $=3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　　（5分）

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$　　（5分）

$=3\times 2\pi\times\frac{1}{5}=\frac{6}{5}\pi$.　　（4分）

（2）（理科专业学生解）$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 2z$，$\Sigma$为立体$\Omega$的表面，

求 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4-z^3\right)\mathrm{d}S$.

解 $\vec{n}^0=(x,y,z-1)$，$\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z-1}=\mathrm{d}S$，（3分）

原式 $=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$

$=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （3分）

$=3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ （3分）

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$ （3分）

$=-\pi\dfrac{32}{5}\cos^6 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{32}{5}\pi.$ （2分）