线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2018.5.5

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$. 求行列式 $|A|$ ，伴随矩阵 A^* 及逆 A^{-1}.

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\mathrm{r}(A)=1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $\alpha_1+\alpha_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2+\alpha_3=(0,2,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_1+\alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，计算方程组的通解.

3. 设 A 是实方阵，证明：$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$. 举例说明对复方阵该结论不成立.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}$ ，$f(x)=x^3-2x^2-x+2$. 求矩阵多项式 $f(A)$.

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+a_0&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2+a_0&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n+a_0\end{vmatrix}$.

二.(12分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\1&0&1&0\\2&1&0&0\\2&3&4&a\end{pmatrix}$，向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\b\end{pmatrix}$. 问当 a,b 取何值时，线性方程组 $Ax=\beta$
(1) 无解；(2) 有唯一解；(3) 有无穷多解. 有解时，求出其解.

三. (15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-5\\2&-3&-1&-13\\-1&3&2&11\end{pmatrix}$.
(1) 求行简化梯形矩阵 B 及可逆阵 P 使得 $PA=B$.
(2) 求 A 的秩及标准形.
(3) 设 $\alpha_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,-3,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,-1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(-5,-13,11)^{\mathrm{T}}$. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并用此极大无关组线性表示其余向量.

四.(11分) 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&5&8&18\\4&9&25&64&164\\8&27&125&512&1512\\14&78&620&4088&14078\end{vmatrix}$.

五.(10分) 设 $A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},B=\begin{vmatrix}a_{11}+k&a_{12}+k&\cdots&a_{1n}+k\\a_{21}+k&a_{22}+k&\cdots&a_{2n}+k\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}+k&a_{n2}+k&\cdots&a_{nn}+k\end{vmatrix}$，其中 k 为任意常数.
求证：$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=\sum_{i,j=1}^n B_{ij}$，其中 A_{ij} 和 B_{ij} 分别为 A 和 B 的 (i,j) 位元素的代数余子式.

六.(12分) (1) 求证：任意 r 个线性无关的 n 维列向量都是某 n 元齐次线性方程组的基础解系.
(2) 求一个齐次线性方程组使得 $\alpha_1=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_2=(7,5,0,2)^{\mathrm{T}}$ 构成它的一个基础解系.