一.（10 分） 1mol 刚性双原子气体分子氢气，其温度为 27℃，求其对应的平动动能、转动动能和内能各是多少?（求内能时可不考虑原子间势能）。

解：理想气体分子的能量为 $E=n\frac{i}{2}RT$ ，所以氢气对应的平动动能为（$t=3$）

$\overline{\varepsilon_t}=1\times\frac{3}{2}\times 8.31\times 300=3739.5$ J

转动动能为（$r=2$）$\overline{\varepsilon_r}=1\times\frac{2}{2}\times 8.31\times 300=2493$ J

内能 $i=5$　　$\varepsilon_i=1\times\frac{5}{2}\times 8.31\times 300=6232.5$ J

二.（10 分)某理想气体在平衡温度 T_2 时的最可几速率与它在平衡温度 T_1 时的均方根速率相等，

（1） 求 $\frac{T_2}{T_1}$；（2）如果已知这种气体的压强 p 和密度 ρ，请给出其均方根速率表达式。

解:（1）理想气体在一定温度 T 时的最可几速率和均方根速率分别为:

$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}};$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

据题意：

$$\sqrt{\frac{2RT_2}{M}}=\sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$$

得到:$\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}=\frac{3}{2}$

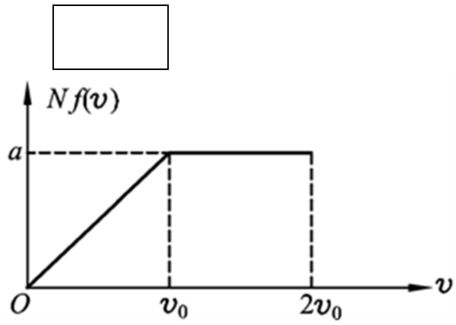
（2）由理想气体状态方程

$$\mathrm{pV}=\frac{m}{M}RT$$

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow\frac{RT}{M}=\frac{p}{\rho}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

三.（15 分）设有 N 个粒子的系统，其速率分布如图所示，求：(1)分布函数 f(v)的表达式；(2)速度在 1.5 v_0 到 2.0 v_0 之间的粒子数；(3) N 个粒子的平均速率；(4) $0.5v_0$ 到 $1v_0$ 区间内粒子的平均速率？



解：(1)从上图所给条件得：

$$\begin{cases} Nf(v) = av/v_0 & (0 \le v \le v_0) \\ Nf(v) = a & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ Nf(v) = 0 & (v \ge 2v_0) \end{cases}$$

由此可得分布函数表达式为：

$$f(v) = \begin{cases} av/Nv_0 & (0 \le v \le v_0) \\ a/N & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ 0 & (v \ge 2v_0) \end{cases}$$

类似于概率密度的归一化条件，故 $f(v)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\mathrm{d}v = 1$,即

$\int_0^{v_0} \frac{av}{v_0}\mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} a\mathrm{d}v = 1,$ 计算得 $a = \frac{2N}{3v_0}$，带入上式得分布函数 $f(v)$ 为：

$$f(v) = \begin{cases} 2v/3{v_0}^2 & (0 \le v \le v_0) \\ \dfrac{2}{3v_0} & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ 0 & (v \ge 2v_0) \end{cases}$$

(2)该区间对应的 $f(v)$ 为常数 $\frac{2N}{3v_0}$，所以可通过计算矩形面积得该区间粒子数为：

$$\Delta N = \frac{2N}{3v_0}(2v_0 - 1.5v_0) = \frac{1}{3}N$$

(3) N 个粒子平均速率

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} vf(v)\mathrm{d}v = \int_0^{\infty} vf(v)\mathrm{d}v = \int_0^{v_0} \frac{2v^2}{3{v_0}^2}\mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{2v}{3v_0}\mathrm{d}v = \frac{11}{9}v_0$$

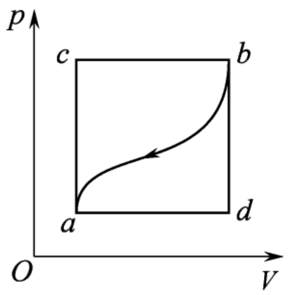
(4) $0.5v_0$ 到 $1v_0$ 区间内粒子平均速率

$$\bar{v}=\frac{\int_{0.5v_0}^{v_0} vf(v)\mathrm{d}v}{\int_{0.5v_0}^{v_0} f(v)dv}=\frac{\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{2v^2}{3{v_0}^2}\mathrm{d}v}{\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{2v}{3{v_0}^2}dv}=\frac{7}{9}v_0$$

四.（15 分）如图所示，一系统由状态 a 沿 acb 到达状态 b 的过程中，有 350 J 热量传入系统，而系统做功 126 J。

(1)若沿 adb 时，系统做功 42 J，问有多少热量传入系统？

(2)若系统由状态 b 沿曲线 ba 返回状态 a 时，外界对系统做功为 84 J，试问系统是吸热还是放热？热量传递是多少？



解：由 abc 过程可求出 b 态和 a 态的内能之差

$$Q=\Delta E+A$$

$$\Delta E=Q-A=350-126=224\ \mathrm{J}$$

abd 过程，系统作功 $A=42$ J

$$Q=\Delta E+A=224+42=266\ \mathrm{J}\ 系统吸收热量$$

ba 过程，系统对对外作功 $A=-84$ J

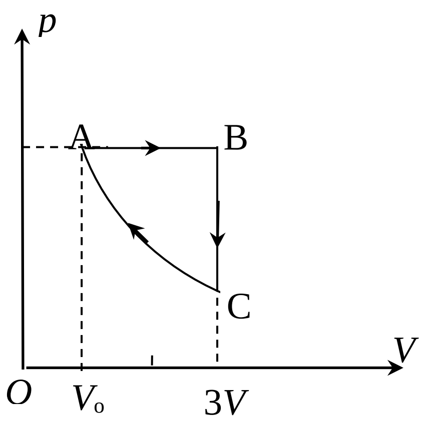
$Q=\Delta E+A=-224-84=-308$ J 系统放热

五、（15 分）1 mol 单原子分子理想气体（分子视为刚性分子）进行的循环过程如图所示，其中 AB 为等压过程、BC 为等容过程、CA 为等温过程。已知气体在状态 A 的温度为 T_0 、体积为 V_0，状态 B 的体积为 $3V_0$，设普适气体常数（摩尔气体常数）为 R 。

求：（1）AB、BC、CA 三个过程中系统与外界交换的热量；

（2） 整个过程的循环效率 η ；

（3） 计算 AB 过程中，系统熵的增量 **ΔS=S**$\Delta S=S_B-S_A=?$（$\ln 3\approx 1.1$ ）



解:

$$\nu=1mol,\quad C_V=\frac{3}{2}R,\quad C_P=\frac{5}{2}R,\quad T_B=\frac{3V_0}{V_0}T_A=3T_0,$$

(1) AB 过程：$Q_{AB}=\nu C_P(T_B-T_A)=5RT_0>0$，吸热

BC 过程：$Q_{BC}=\nu C_V(T_C-T_B)=-3RT_0<0$，放热

CA 过程：$$Q_{CA}=W_{CA}=\int_{3V_O}^{V_O}PdV=\int_{3V_O}^{V_O}\frac{\nu RT_A}{V}dV=-RT_0\ln 3<0$$，放热

(2)

$Q_1=Q_{AB}$， $Q_2=Q_{BC}+Q_{CA}$ ， $\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=18\%$

(3)

$$\Delta S_{AB}=S_B-S_A=\int_A^B\frac{dQ}{T}=\nu C_P\int_{T_0}^{3T_0}\frac{dT}{T}=\frac{5}{2}R\ln 3$$

六、（**10** 分）由 μ_1 摩尔氦气和 μ_2 摩尔氮气组成混合理想气体，当混合气体经历一准静态绝热过程时，试求：（**1**）混合气体的定容摩尔热容量和定压摩尔热容量；（**2**）在该过程中混合气体的温度和体积的函数关系（过程方程）。

解：（**1**）混合气体在等体过程中，温度升高 ΔT 时，系统吸收的热量为 $Q=\mu C_V\Delta T=\mu_1 C_{V1}\Delta T+\mu_2 C_{V2}\Delta T$

所以 $C_V=\dfrac{\mu_1 C_{V1}+\mu_2 C_{V2}}{\mu_1+\mu_2}$

对于等压过程，$C_p=\dfrac{\mu_1 C_{p1}+\mu_2 C_{p2}}{\mu_1+\mu_2}$

（**2**）由混合气体的定体和定压摩尔热容，$\gamma=\dfrac{C_p}{C_V}=1+\dfrac{(\mu_1+\mu_2)R}{\mu_1 C_{V1}+\mu_2 C_{V2}}$

混合气体绝热过程的温度与体积的关系为 $TV^{\gamma-1}=TV^{\frac{(\mu_1+\mu)R_2}{\mu_1 C_{V1}+\mu_2 C_{V2}}}$=常数

七、（10 分） 设氮分子的有效直径为 $10^{-10}m$。（1）求氮气在标准状态下的平均碰撞频率及平均自由程；（2）如果温度不变，气压降到 $1.33\times10^{-4}Pa$，则平均碰撞频率及平均自由程又为多少？

解：分子平均速率 $\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$，$M$ 为氮气的摩尔质量，$M=2.8\times10^{-2}kg/mol$

标准状态下，$\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8\times8.31\times273.15}{3.14\times2.8\times10^{-2}}}$=454.5 m/s

（1）标准状态下的平均碰撞频率

$$\bar{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}p/kT=\frac{\sqrt{2}\times 3.14\times 10^{-20}\times 454.5\times 1.013\times 10^5}{1.38\times 10^{-23}\times 273.15}=5.42\times 10^8$$

（次/秒）

平均自由程 $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi \mathrm{d}^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=8.38\times 10^{-7}m$

（2）气压降到$1.33\times 10^{-4}Pa$时，平均碰撞频率

$$\bar{Z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}p/kT=\frac{\sqrt{2}\times 3.14\times 10^{-20}\times 454.5\times 1.33\times 10^{-4}}{1.38\times 10^{-23}\times 273.15}$$

=0.71 次/秒

平均自由程 $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi \mathrm{d}^2 n}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}=638.2m$

八、（15 分）绝热壁包围的气缸被一<u>绝热</u>活塞分隔成 A、B 两室，活塞在气缸内可无摩擦地自由滑动，A、B 内各有 1mol 双原子

分子理想气体，初始时气体处于平衡态，它们的压强、体积、温度分别为 p_0、V_0、T_0，A 室中有一电加热器使之徐徐加热，直到 A 室内压强为 $2p_0$，试问：（1）最后 A、B 两室内气体温度分别是多少？（2）在加热过程中，A 室气体对 B 室作了多少功？（3）加热器传给 A 室气体多少热量？（4）A、B 两室的总熵变是多少？

解：对于双原子理想气体，其绝热指数 $\gamma=\frac{7}{5}$

初态： A、B **两室均为：** p_0、V_0，T_0

A **室经过吸热对外作做后，设其末态为：** $p_A=2p_0$，V_A、T_A；

B **室经绝热压缩后，高其末态为：** $p_B=2p_0$，V_B、T_B

对 B **室，由绝热过程方程有：** $p_0V_0^{\gamma}=p_BV_B^{\gamma}=2p_0V_B^{\gamma}$

由此解得： $V_B=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma}V_0=0.609V_0$

所以 $V_A=2V_0-V_B=1.391V_0$

（1） 由理想气体状态方程，对 A 室： $p_A V_A = RT_A = 2p_0 \cdot 1.391V_0 = 2.78p_0V_0 = 2.78RT_0$

所以 $T_A = 2.78T_0$

对 B 室应用理想气体状态方程，可得 $T_B = 1.22T_0$

（2） B 室经历的是可逆绝热压缩过程，外界对其所作的功全部转化为内能，所以 A 室对 B 室所作的功 $A = C_{V,m}(T_B - T_0) = \frac{5}{2}R(T_B - T_0) = 0.55RT_0$

（3） 加热器传给 A 室气体的热量，用于其对外作功和增加内能，由热力学第一定律，

$Q = \frac{5}{2}R(T_A - T_0) + A = 5RT_0$

（4） B 室经历的是可逆绝热过程，其熵不变，对 A 室，利用热力学第一定律

$dQ = TdS = dE + pdV = C_{V,m}dT + \frac{RT}{V}dV$

$dS = C_{V,m}\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}$

所以熵变为 $\Delta S = \frac{5}{2}R\ln\frac{T_A}{T_0} + R\ln\frac{V_A}{V_0} = \frac{5}{2}R\ln 2.78 + R\ln 1.39 = 2.89R$