Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG Troisième Bimestre 1999/00

Séance 4 : 10 mars 2000

Analyse de Fourier des Signaux

Formule du Jour

$$\boxed{e^{j\omega t} = \mathrm{Cos}(\omega t) + j\,\mathrm{Sin}(\omega\, t)}$$

$$e = \lim_{n \to 0} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = 2.7182818284...$$

$$e^x = \lim_{n \to 0} \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\} = (2.7182818284...)^x$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$e^{jx} = \lim_{n \to 0} \left\{\left(1 + \frac{jx}{n}\right)^n\right\} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + ...$$

$$= 1 + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^6}{6!} + ... + jx + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^5}{5!} + ...$$

$$= \mathrm{Cos}(x) + j\,\mathrm{Sin}\,(x)$$

On note que :

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = \mathrm{Cos}(\omega t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega t) + \mathrm{Cos}(\omega t) - j\,\mathrm{Sin}\,(\omega t) = 2\,\mathrm{Cos}(\omega t)$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = \mathrm{Cos}(\omega t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega t) - \mathrm{Cos}(\omega t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega t) = 2j\,\mathrm{Sin}(\omega t)$$

La Fonction de Transfert d'un Système Continu

Un système linéaire est modélisé par sa réponse impulsionnelle :

$$h(t) = H[\delta(t)] \qquad \delta(t) \longrightarrow \boxed{* \, h(t)} \longrightarrow h(t)$$

La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

<u>Intérêt</u> : Convolution en temps est équivalent d'un produit en domaine Fourier.

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$$

Les signaux $e^{j\omega t}$ sont les fonctions caractéristiques pour le convolution.
Ils sont également une base orthogonale pour x(t).

La fonction de transfert d'un système h(t) est une fonction complexe H(ω) qui donne le changement d'amplitude et phase unique à chaque $e^{j\omega t}$.

Donc, pour un entré $e^{j\omega t}$:

$$h(t) * e^{j\omega t} = H(\omega)\, e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{j\omega t}\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau)$$

$$H(\omega)\, e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Le convolution d'un signal x(t) avec h(t) peut être décrit par un produit de la fonction de transfert H(ω) avec une décomposition spectrale X(ω) de x(t).
La décomposition spectrale est fournie par une transformée de Fourier.

La Transformée de Fourier

L'analyse harmonique d'un signal déterministe est l'instrument de base de la théorie et du traitement du signal. Cette analyse harmonique, obtenue par la transformation de Fourier, est une représentation spectrale des signaux. Elle exprime la répartition en fréquence de l'amplitude et de la phase de l'énergie ou de la puissance d'un signal. Il existe plusieurs formulations de cette transformation :

Sortes de Transformées de Fourier

Transformée	temps	fréquence
TF Transformée de Fourier classique	continu infini	continue infinie
TFD Transformée de Fourier Discrète	discret périodique	discrète périodique
TFTD Transformée de Fourier en Temps Discrète	discret fini	continue, périodique

La Transformée de Fourier classique s'applique aux expressions analytiques.

Elle s'agit d'un outil d'analyse "symbolique".
Elle est presque toujours calculée "à la main".

La Transformée de Fourier Discrète s'applique aux séquences numériques.
Elle est numérique et presque toujours calculer "par logiciel".
Elle transforme une séquence x(n) de N échantillons,
à une séquence X(k) de N échantillons

La Transformée de Fourier en Temps Discrète s'applique aux séquences numériques.
Elle permet d'exprimer la "fonction de transfert" d'une convolution.
Elle décrit un filtre comme une suite des exponentiels.
Elle peut être fait à la main pour les petites séquences, et par logiciel pour les grandes séquences

La Transformée de Fourier d'un signal continu

Soit x(t) un signal complexe déterministe.
La transformée de Fourier est une fonction complexe de la variable réelle $\omega = 2\pi f$ définie par :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

La transformée inverse est donnée par :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{ X(\omega) \} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

La symétrie de ces formulations montre l'existence d'une dualité temps-fréquence

Condition d'existence :

Pour qu'une fonction x(t) possède une transformée de Fourier
il faut et il suffit que:
- la fonction x(t) soit bornée.
- l'intégrale de x(t) entre $-\infty$ et ∞ ait une valeur bornée.
- les discontinuités de x(t) soient en nombre fini.

Transformée de Fourier en 2-D :

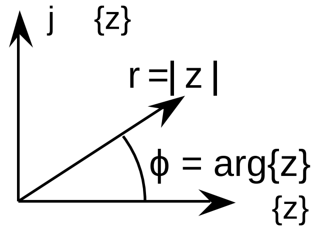
$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(u, v) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} g(x, y)\, e^{-j(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{ G(u, v) \} = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} G(u, v)\, e^{j(ux+vy)}\, du\, dv$$

Propriétés de la Transformation de Fourier d'un signal réel :

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ est une fonction COMPLEXE.

Rappel : pour un complexe $z = \ \{z\} + j \ \{z\} = z_r + j\, z_i = r\, e^{j\phi} = |z|\, e^{j\phi}$



$r = \sqrt{z_r^2 + z_i^2}$ $\phi = \text{Arg}\,\{z\} = \text{Tan}^{-1}\{\frac{z_i}{z_r}\}$

Pour $X(\omega)$:

$$X(\omega) = \ \{X(\omega)\} + j \ \{X(\omega)\} = |X(\omega)|\, e^{j\phi(\omega)}$$

Le module $|X(\omega)| = \sqrt{\ \{X(\omega)\}^2 + j \ \{X(\omega)\}^2}$ est le “spectre d’amplitude”.

L’argument $\phi(\omega) = \arg\,(X(\omega) = \text{Arc Tan}\left(\frac{\ \{X(\omega)\}}{\ \{X(\omega)\}}\right)$ est le “spectre de phase”.

Transformée de Fourier d'un signal réel :

Pour x(t) réel :

$X(\omega)$: Le spectre d'amplitude est une fonction paire

$\vartheta(\omega)$: Le spectre de phase est une fonction impaire.

Démonstration :

Soit $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ respectivement partie paire et partie impaire
dont les TF sont respectivement $X_p(\omega)$ et $X_i(\omega)$ on a :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\cos(\omega t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\sin(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\sin(\omega t)dt$$

mais $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\cos(\omega t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} |x_i(t)|\cos(\omega t)\,dt + \int_{0}^{\infty} |x_i(t)|\cos(\omega t)\,dt = 0$

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\sin(\omega t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} x_p(t)\,|\sin(\omega t)|\,dt + \int_{0}^{\infty} x_p(t)\,|\sin(\omega t)|\,dt = 0$

donc $\displaystyle X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\cos(\omega t)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)\sin(\omega t)\,dt$

$= X_p(\omega) + j\,X_i(\omega)$

La partie Réel du $X(\omega)$ est la transformée de la partie paire $x_p(t)$.

$$\{X(\omega)\} = \mathcal{F}\{x_p(t)\} = X_p(\omega)$$

La partie Imaginaire est la transformé de la partie impaire $x_i(t)$.

$$\{X(\omega)\} = \mathcal{F}\{x_i(t)\} = X_i(\omega)$$

Propriétés Principaux de la transformée de Fourier

L'importance de la transformation de Fourier en théorie du signal est largement due à certaines de ses propriétés remarquables.

Propriétés de symétrie : (Parité)

si $x(t)$ est réel :

Temps	Fréquence
pair	réel
impaire	imaginaire

si $X(\omega)$ est réel :

Temps	Fréquence
réel	pair
imaginaire	impaire

Linéarité $a\,x(t) + b\,y(t) \Leftrightarrow a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$

Conjuguée complexe :

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$$

Dualité avec convolution :

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(\omega)\,Y(\omega)$$
$$x(t)\,y(t) \Leftrightarrow X(\omega) * Y(\omega)$$

Dualité avec inter-corrélation :

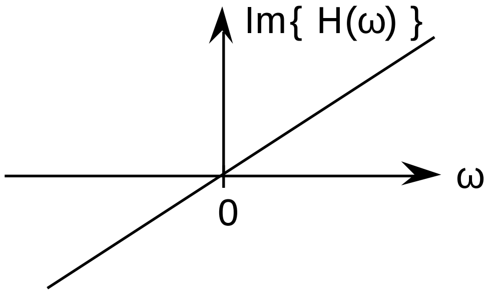
$$x(t) \quad y(t) \Leftrightarrow X^*(\omega)\,Y(\omega)$$
$$x^*(t)\,y(t) \Leftrightarrow X(\omega) \quad Y(\omega)$$

Translation (théorème du retarde) :

$$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)\, e^{+j\omega t_0}$$
$$x(t)\, e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega+\omega_0)$$

<u>Échelle</u>

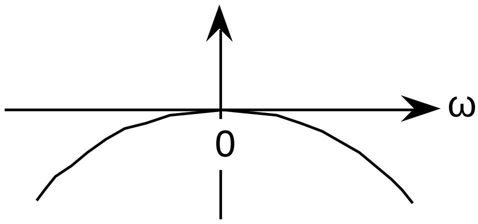
$$x(at) = |\,a\,|^{-1}\, X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



<u>Première dérivée</u> :

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\partial(f(t))}{\partial t} \right\} = j\,\omega\, \mathcal{F}\{f(t)\}$$

Deuxième dérivée :



$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\partial^2(f(t))}{\partial t^2} \right\} = -\,\omega^2\, F(\omega)$$

<u>En général</u> :

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right\} = (j\omega)^n\, F(j\omega)$$

<u>Énergie d'un signal</u> : (Théorème de Parseval)

Énergie d'un signal = Énergie de sa Transformée

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\, |^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\, F(\omega)\, |^2\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\; g^*(t)\, |\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\; G^*(\omega)\, d\omega$$