

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 功率放大器非线性特性及预失真建模

摘 要：

信号的功率放大器是电子通信系统的关键器件之一，功放的输出信号相对于输入信号可能产生非线性变形，这将带来无益的干扰信号，研究其机理并采取措施改善，具有重要意义。预失真技术是被研究和应用较多的一项新技术。本文通过分别利用无记忆非线性功放和记忆非线性功放的实测数据用数学方法对其分别进行建模，而后使用前置预失真方器的方法改善功放的非线性特性，并对其中预失真器的建模做了研究，效果和误差也进行观测和估计。

对于问题（1），我们使用了无记忆多项式模型对已给出输入输出数据的功放进行建模，通过计算 1 到 100 的不同阶数的拟合结果与原始输出数据间的归一化均方误差 NMSE 值来进行判定，最终确定最优阶数为 $K=44$ 阶，NMSE 值为 -64.1830dB 。之后我们以功放的逆的形式建立预失真器的多项式模型，为了满足“输出幅度限制”和“功率最大化”约束条件的限制而调整模型，加入增益控制参数 G ，以预失真器最大输出值不超过给定输入信号最大值为限制条件，求出模型最佳增益参数 $G=1.8265$ 。在此增益下计算得到预失真模型，进行预失真补偿后的功放输出与理想线性输出的归一化均方误差 $\text{NMSE}=-45.2490\text{dB}$ 。

对于问题（2），我们首先使用了便于计算的“和记忆多项式模型”对记忆型非线性功率放大器进行建模。通过最小二乘估计法计算出多项式模型中的系数矩阵。在此过程中，我们研究了如何确定最优的阶数 K 和最佳记忆深度 M ，以获得模型输出与原始输出的归一化均方误差（NMSE）最小，遍历搜索各 K/M 组合值，最终在综合考虑计算量

和精度的情况下选择了阶数 $K=5$ ，记忆深度 $M=4$ 。在此参数下对功放进行建模，得到模型输出与实际输出的 $NMSE=-45.6805$ dB。接着，我们使用了间接学习型结构对预失真器进行了建模。同样，为了满足“输出幅度限制”和“功率最大化”约束条件的限制而调整模型，加入增益控制参数 G ，以预失真器最大输出值不超过给定输入信号最大值为限制条件，求出模型最佳增益参数 $G=9.4815$ 。在此增益下计算得到预失真模型，进行预失真补偿后的功放输出与理想线性输出的归一化均方误差 $NMSE=-42.375418120016650$ dB。

最后，我们又进行了拓展部分的研究，给出输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号和采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度图，计算并比较三者的相邻信道功率比（ACPR）。结果表明，我们采用的间接学习型预失真器结构计算的预失真模型对非线性功放的 ACPR 有将近 15dB 的改进，能很好地抑制带外频谱的扩展。

关键词：功率放大器，非线性，预失真，记忆多项式模型，间接学习结构

第一章 问题重述

1、背景介绍

1.1 问题引入

信号的功率放大是电子通信系统的关键功能之一，其实现模块称为功率放大器（PA，Power Amplifier），简称功放。功放的输出信号相对于输入信号可能产生非线性变形，这将带来无益的干扰信号，影响信息传递和接收，此现象称为非线性失真。传统电路设计上，可通过降低输出功率的方式减轻非线性失真效应。

功放非线性属于有源电子器件的固有特性，研究其机理并采取措施改善，具有重要意义。目前已提出了各种技术来克服改善功放的非线性失真，其中预失真技术是被研究和应用较多的一项新技术，其最新的研究成果已经被用于实际的产品（如无线通信系统等），但在新算法、实现复杂度、计算速度、效果精度等方面仍有相当的研究价值。

本题从数学建模的角度进行探索。若记输入信号 $x(t)$ ，输出信号为 $z(t)$ ， t 为时间变量，则功放非线性在数学上可表示为 $z(t) = G(x(t))$ ，其中 G 为非线性函数。预失真的基本原理是：在功放前设置一个预失真处理模块，这两个模块的合成总效果使整体输入-输出特性线性化，输出功率得到充分利用。原理框图如图 1-1 所示。

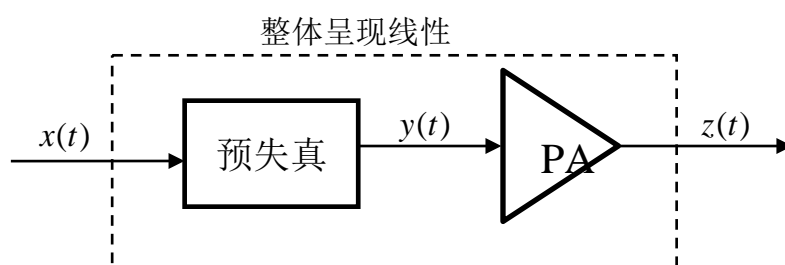


图 1-1: 预失真技术的原理框图示意

其中 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的含义如前所述， $y(t)$ 为预失真器的输出。设功放输入-输出传输特性为 $G()$ ，预失真器特性为 $F()$ ，那么预失真处理原理可表示为

$$z(t) = G(y(t)) = G(F(x(t))) = G \circ F(x(t)) = L(x(t)) \quad (1-1)$$

$G \circ F = L$ 表示为 $G()$ 和 $F()$ 的复合函数等于 $L()$ 。线性化则要求

$$z(t) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1-2)$$

式中常数 g 是功放的理想“幅度放大倍数” ($g > 1$)。因此，若功放特性 $G()$ 已知，则预失真技术的核心是寻找预失真器的特性 $F()$ ，使得它们复合后能满足

$$(G \circ F)(x(t)) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1-3)$$

如果测得功放的输入和输出信号值，就能拟合功放的特性函数 $G()$ ，然后利用 (1-3) 式，可以求得 $F()$ 。

1.2 功放的非线性模型

由于各类功放的固有特性不同，特性函数 $G()$ 差异较大，即使同一功放，由于输入信号类型、环境温度等的改变，其非线性特性也会发生变化。根据函数逼近的 Weierstrass 定理，对解析函数 $G(x)$ 总可以用一个次数充分大的多项式逼近到任意程度，故可采用计算简单的多项式表示非线性函数。

如果某时刻的输出仅与此时刻的输入相关，称为无记忆功放，其特性可用多项式表示为

$$z(t) = \sum_{k=1}^K h_k x^k(t) \quad t \in [0, T] \quad (1-4)$$

式中 K 表示非线性的阶数（即多项式次数），诸 h_k 为各次幂的系数。在函数逼近理论中， $z(t)$ 是用函数组 $\{x^0, x, x^2, x^3, \dots, x^K\}$ 生成的 $K+1$ 维空间里的这组基的线性组合表示，用函数空间的一组正交函数基 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{K=K}$ 的线性组合表示则性能更佳、计算更方便，故 (1-4) 亦可用正交基等其它方式表示。

如果对功放输入 $x(t)$ /输出 $z(t)$ 进行离散采样后值为分别为 $x(n)/z(n)$ （采样过程符合 Nyquist 采样定理要求），则 (1-4) 可用离散多项式表示如下

$$z(n) = \sum_{k=1}^K h_k x^k(n) = h_1 x(n) + h_2 x^2(n) + \dots + h_K x^K(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1-5)$$

如果功放的某一时刻输出不仅与此时刻输入有关，而且与此前某一时段的输入有关，则称为有记忆功放。对 (1-5) 式增加记忆效应，可以写为：

$$\begin{aligned} z(n) = & \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M h_{km} x^k(n-m) = h_{10} x(n) + h_{11} x(n-1) + \dots + h_{1M} x(n-M) \\ & + h_{20} x^2(n) + h_{21} x^2(n-1) + \dots + h_{2M} x^2(n-M) \\ & + \dots \quad \dots + \dots \\ & + h_{K0} x^K(n) + h_{K1} x^K(n-1) + \dots + h_{KM} x^K(n-M) \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1-6)$$

式中 M 表示记忆深度，诸 h_{km} 为系数。具有记忆效应的功放模型也可以用更一般的 Volterra 级数^{[1][2]}表示，由于 Volterra 级数太复杂，简化模型有 Wiener、Hammersteint 等^{[3][4]}。由于常用复值输入-输出信号，(1-6) 也可表示为便于计算的“和记忆多项式”模型

$$z(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M h_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1-7)$$

1.3 预失真处理模型

在功放的特性 $G()$ 已知条件下，求解方程(1-3)是一类特殊的函数方程，求解的理论方法因具体问题而定，而工程上常采取数值计算，用最小化目标误差函数的方法，求得近似的 $F()$ 。目标误差函数的选取和判断准则因建模方法而异，总体原则是使预失真和

功放的联合模型呈线性后误差最小。

本题探索中，预失真处理建模还需考虑以下 2 个约束条件：

预失真处理的“输出幅度限制”。由于功放的输入幅度需保持在一定范围，过大的值会导致饱和溢出，因此，本题的建模中限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值。

预失真处理加载后，尽可能使功放的输出“功率最大化”。为了充分发挥功放的作用，预失真处理模型的建立必需考虑尽可能使功放的信号平均输出功率最大，因此预失真处理后的输出幅度（等效为功放的输入幅度）需尽可能提高。

1.4 计算结果评价

以上模型的数值计算结果业界常用 NMSE、EVM 等参数评价其准确度，具体定义如下。

采用归一化均方误差 (Normalized Mean Square Error, NMSE) 来表征计算精度，其表达式为

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (1-8)$$

如果用 z 表示实际信号值， \hat{z} 表示通过模型计算的信号值，NMSE 就反映了模型与物理实际模块的接近程度。功放前加载预失真处理后，也可用 NMSE 判断整体模型输出值与理想输出值的近似程度。

误差矢量幅度 (Error Vector Magnitude, EVM) 定义为误差矢量信号平均功率的均方根和参照信号平均功率的均方根的比值，以百分数形式表示。如果用 x 表示理想的信号输出值， e 表示理想输出与整体模型输出信号的误差，可用 EVM 衡量整体模型对信号的幅度失真程度。

$$EVM = \sqrt{\frac{E[|e|^2]}{E[|X|^2]}} \times 100\% \quad (1-9)$$

2、本文研究的问题

(1) 无记忆功放

数据文件 1 给出了某功放无记忆效应的复输入-输出测试数据，其输入-输出幅度图为：

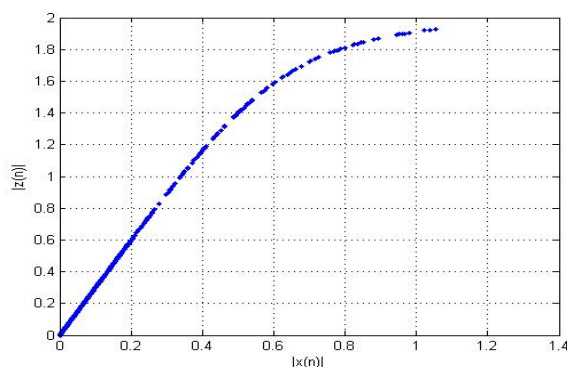


图 2 功放输入/输出幅度散点图

根据提供的数据，完成以下任务。

- A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。
- B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，建立预失真模型。写出目标误差函数，计算线性化后最大可能的幅度放大倍数，运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的结果。

(2) 有记忆功放

数据文件 2 给出了某功放的有记忆效应的复输入-输出数据，完成以下任务。

- A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。
- B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，以框图的方式建立预失真处理的模型实现示意图，然后计算预失真模型相关参数。运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的计算结果。

(3) 拓展研究

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (1-10)$$

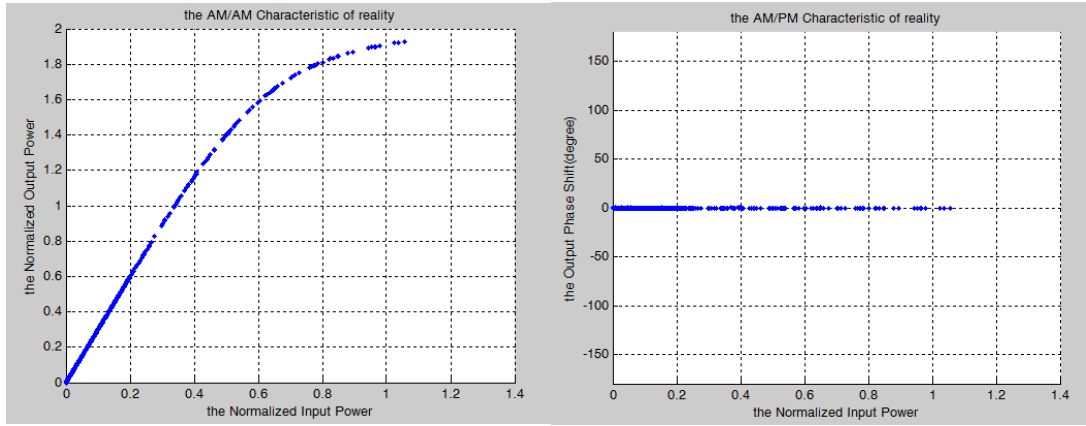
其中 $s(f)$ 为信号的功率谱密度函数， $[f_1, f_2]$ 为传输信道， $[f_2, f_3]$ 为相邻信道。功率谱密度的计算可通过对信号的自相关函数进行 Fourier 变换计算，也可以通过直接法等计算（假定本题涉及的信号为时间平稳信号）。假设题 2 所附的数据采样频率 $F_s = 30.72 \times 12$ MHz，传输信道按照 20MHz 来算，邻信道也是 20MHz。根据给出的数据，计算功放预失真补偿前后的功率谱密度，并用图形的方式表示三类信号的功率谱密度（输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号），最后用 ACPR 对结果进行分析评价。

第二章 功放的非线性建模

2.1 功放非线性失真特性

2.1.1 无记忆非线性失真特性

非线性是射频功放的固有特性，其非线性失真表现为信号幅度和相位的失真。当不存在记忆效应时，一定幅度的信号通过非线性功放后，输出信号幅度的增益随着输入信号幅度而变化，同时相位的改变量也随输入信号幅度而变化。根据这一失真原理，可用幅度/幅度(AM/AM)和幅度/相位(AM/PM)曲线来描述功放的非线性失真特性。图 2-1 是本文数模问题（1）背景下无记忆功率放大器的 AM/AM 和 AM/PM 特性线。



(a)

(b)

图 2-1: (a)无记忆功放 AM/AM 特性曲线

(b)无记忆功放 AM/PM 特性曲线

设输入信号为 $x(n) = re^{j\theta}$ ，功放的 AM/AM 和 AM/PM 特性函数分别为 $A(\bullet)$ 和 $\phi(\bullet)$ ，则信号经过非线性变换后得到：

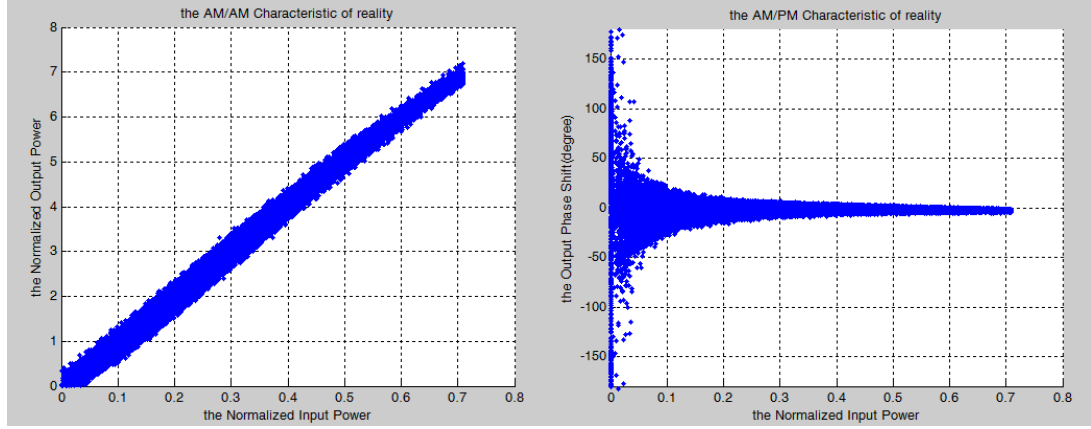
$$y(n) = A(r)e^{j(\theta + \phi(r))} \quad (2-1)$$

2.1.2 功放的记忆效应

在宽带通信系统中功放的记忆效应十分明显，且通常带宽越宽记忆效应越明显，所以，在宽带通信系统中不能忽略功放的记忆效应。记忆效应表现为与频率的相关性，即当前的输出与当前及以前的输入有关（输出信号是关于以前多个时刻输入信号的函数）。设前 $m+1$ 个时刻的输入信号为 $x(n), x(n-1), \dots, x(n-m)$ ，且 $x(n) = r_n e^{j\theta}$ ，功放的 AM/AM 和 AM/PM 特性函数分别为 $A(\bullet)$ 和 $\phi(\bullet)$ ，则当前的输出可表示为：

$$\begin{aligned} y(n) &= F(x(n), x(n-1), \dots, x(n-m)) \\ &= A(r_n, \dots, r_{n-m})e^{j(\theta + \phi(r_n, \dots, r_{n-m}))} \end{aligned} \quad (2-2)$$

从上式可以看出，当前输出信号的幅度和相位的改变量与以前多个时刻输入信号的幅度有关。



(a)

(b)

图 2-2: (a)有记忆功放 AM/AM 特性曲线
(b)有记忆功放的 AM/PM 特性曲线

图 2-2 是本文数模问题 (2) 背景下有记忆功放的 AM/AM 和 AM/PM 特性曲线。从图中可以看出, AM/AM 和 AM/PM 特性曲线都不再是清晰的曲线, 而是发生了扩散的一簇曲线, 记忆效应越强则扩散越明显。

2.2 无记忆非线性行为模型

当射频功放的输入信号带宽较窄时, 可以不考虑功放的记忆效应, 此时可用无记忆模型来描述功放的非线性失真特性。常用的无记忆功放失真模型包括 Saleh 模型和复系数多项式模型。

2.2.1 Saleh 模型

Adel A.M.Saleh 对行波管功放的非线性失真特性进行深入分析和研究后提出了 Saleh 模型, 该模型用两个函数来分别描述幅度和相位的失真特性:

$$A(r) = \frac{\alpha_a r}{1 + \beta_a r^2} \quad (2-3)$$

$$\phi(r) = \frac{\alpha_\phi r^2}{1 + \beta_\phi r^2} \quad (2-4)$$

其中 $A(r)$ 和 $\phi(r)$ 分别为 AM/AM 和 AM/PM 特性曲线, $\alpha_a, \beta_a, \alpha_\phi$ 和 β_ϕ 为模型参数, 选择不同的模型参数可以描述不同非线性强度的功放。该模型常用于对行波管功率放大器进行非线性建模、非线性分析及算法仿真, 但也有学者将该模型作预失真器使用。

2.2.2 复系数多项式模型

复系数多项式模型, 其表达式为:

$$\begin{aligned} y(n) &= h_1 x(n) + h_2 |x(n)| x(n) + h_3 |x(n)|^2 x(n) + h_4 |x(n)|^3 x(n) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^K h_k |x(n)|^{k-1} x(n) \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中 $x(n)$ 为输入的复信号， $|x(n)|$ 表示对信号 $x(n)$ 取模， h_k 和 K 分别为多项式的复系数和阶次。复系数多项式模型虽然不是用两个函数来分别描述功放的幅度和相位非线性失真特性，但该模型实质上包含了 AM/AM 和 AM/PM 变换特性。设 $x(n) = re^{j\theta}$ ， $h_k = a_k + jb_k$ ，则：

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) \sum_{k=1}^K h_k |x(n)|^{k-1} \\
 &= re^{j\theta} \sum_{k=1}^K h_k r^{k-1} \\
 &= \left[\sum_{k=1}^K a_k r^k + j \sum_{k=1}^K b_k r^k \right] e^{j\theta} \\
 &= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^K a_k r^k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^K b_k r^k \right)^2} \cdot e^{j(\theta + \arctan(\sum_{k=1}^K b_k r^k / \sum_{k=1}^K a_k r^k))}
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

也即其 AM/AM 和 AM/PM 变换函数分别为：

$$A(r) = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^K a_k r^k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^K b_k r^k \right)^2} \tag{2-7}$$

$$\phi(r) = \arctan\left(\sum_{k=1}^K b_k r^k / \sum_{k=1}^K a_k r^k\right) \tag{2-8}$$

由以上分析可知，一个复系数多项式可以同时描述 AM/AM 和 AM/PM 特性此外，也可用两个实系数多项式来分别描述功放的 AM/AM 和 AM/PM 特性。

2.3 有记忆非线性行为模型

在宽带通信系统中功放的记忆效应十分明显，需要采用有记忆的非线性行为模型来描述。常用的有记忆非线性行为模型包括 Volterra 级数模型、记忆多项式模型、神经网络模型等，这些模型可用来描述功放非线性系统，也可作为数字预失真器模型使用。考虑到 Volterra 级数模型的复杂性，人们提出了一些相对较简单的多盒模型，如 Wiener 模型、Hammerstein 模型、并行 Wiener 模型、并行 Hammerstein 模型、Wiener-Hammerstein 模型等。这些模型比 Volterra 级数模型要简单许多，在某些应用领域可以替代 Volterra 级数模来描述有记忆非线性系统，在工程中得到了广泛的应用。限于篇幅和竞赛时间的限制，这里我们仅研究分析和比较了 Wiener 模型、Hammerstein 模型和记忆多项式模型。

2.3.1 Wiener 模型

Wiener 模型是描述有记忆非线性系统的一种常用模型，该模型结构简单且有明确的物理意义。Wiener 模型由线性时不变系统（LTI）串联一个无记忆非线性系统构成，其模型系统框图如图 2-3 所示。

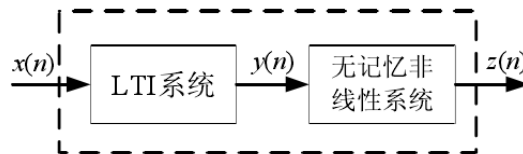


图 2-3: Wiener 模型系统框图

Wiener 模型的 LTI 系统部分可用 FIR 滤波器来表示：

$$y(n) = \sum_{q=0}^{M-1} b_q x(n-q) \quad (2-9)$$

其中 b_q 为 FIR 滤波器的系数， M 为滤波器的阶数。Wiener 模型的无记忆非线性部分可用复系数多项式来表示：

$$z(n) = \sum_{k=1}^K a_k |y(n)|^{k-1} y(n) \quad (2-10)$$

其中 a_k 为多项式的复系数， K 为多项式的最高阶次。将式(2-9) 代入式(2-10) 则可得：

$$z(n) = \sum_{q=0}^{M-1} b_q x(n-q) \sum_{k=1}^K a_k \left| \sum_{q=0}^{M-1} b_q x(n-q) \right|^{k-1} \quad (2-11)$$

Wiener 模型的表达式及模型参数的提取都较为复杂。

2.3.2 Hammerstein 模型

与 Wiener 模型相似，Hammerstein 模型则是由无记忆非线性系统串联一个线性时不变系统构成。Hammerstein 模型具有 Wiener 模型的逆特性，其系统框图如图 2-4 所示。

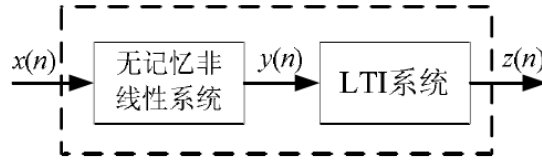


图 2-4：Hammerstein 模型系统框图

Hammerstein 模型的无记忆非线性系统部分可用复系数多项式来表示，LTI 系统可用 FIR 滤波器来表示，其相应的表达式为：

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k |x(n)|^{k-1} x(n) \quad (2-12)$$

$$z(n) = \sum_{q=0}^{M-1} b_q y(n-q) \quad (2-13)$$

其中 a_k 和 K 分别为多项式的复系数和最高阶次， b_q 和 M 分别为 FIR 滤波器的实系数和阶次。则将式(2-12)代入式(2-13)可得：

$$z(n) = \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{k=1}^K a_k b_q |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \quad (2-14)$$

与 Wiener 模型相比 Hammerstein 模型的表达式较为简洁，但 Hammerstein 模型参数的提取同样较为复杂，需要先识别出 a_k 、 b_q ，然后再将参数进行分离。

2.3.3 记忆多项式模型

与 Wiener 模型和 Hammerstein 模型相比，记忆多项式模型更简洁且能更好地描述有记忆非线性系统，是目前被研究和应用得最多的一种非线性失真模型。

记忆多项式模型可以看作是简化的 Volterra 级数模型，与并行 Hammerstein 模型是等效的，也可以看作是一种特殊的并行 Wiener 模型。其表示为：

$$y(n) = \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{k=1}^K c_{kq} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \quad (2-15)$$

其中， K 和 M 分别为记忆多项式的阶次和记忆深度， c_{kq} 为记忆多项式的复系数，

$|x(n-q)|$ 表示输入复信号 $x(n-q)$ 的模。如果将记忆多项式中相同阶次的项进行合并，则记忆多项式模型变成：

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{k=1}^K c_{kq} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \\ &= \sum_{q=1}^{M-1} c_{1q} x(n-q) + \sum_{q=1}^{M-1} c_{2q} |x(n-q)| x(n-q) + \\ &\quad \dots + \sum_{q=1}^{M-1} c_{Kq} |x(n-q)|^{K-1} x(n-q) \end{aligned} \quad (2-16)$$

相同阶次的项可用一个非线性项和一个 FIR 滤波器来构成，所以通过以上的变换可将记忆多项式模型用图 2-5 所示的并行结构来表示。

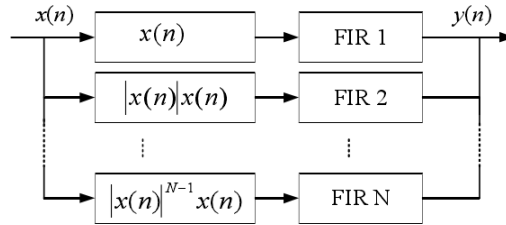


图 2-5: Hammerstein 模型系统框图

从图中可以看出，记忆多项式模型可化为一个特殊的并行 Hammerstein 模型。

2.3.4 功放非线性模型的选择

鉴于以上对功放非线性失真特性及行为模型的分析 and 比较，我们选取了如下的建模方法建立问题 1 和问题 2 中的功放的非线性特性数学模型。

- 针对问题 1 的无记忆功放，选取 Saleh 模型和多项式模型进行建模；
- 针对问题 2 的有记忆功放，选取记忆多项式模型进行建模。

第三章 无记忆功放及预失真器建模仿真

3.1 无记忆功放的 Saleh 模型建模分析

根据数据文件采集到的无记忆功放效应的复输入输出测试数据，我们采用 2.2.1 小节

给出的 Saleh 模型，编写 matlab 程序进行非线性拟合，得到的拟合结果如图 3-1。表 1 列出了计算无记忆功放的 Saleh 模型建模得到的各项参数。

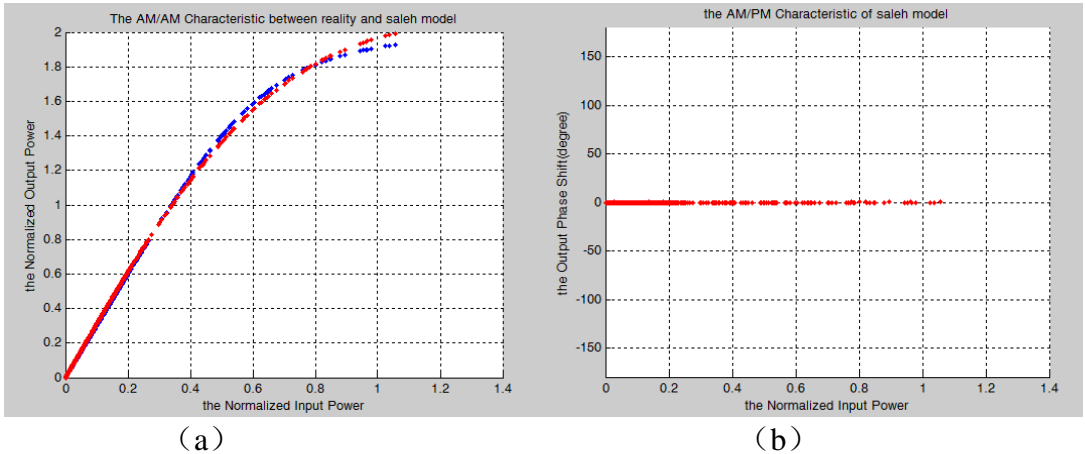


图 3-1: (a)Saleh 功放模型的 AM/AM 特性曲线
(b) Saleh 功放模型的 AM/PM 特性曲线

表 1

Saleh 模型参数	拟合值
α_a	3.1316
β_a	0.5927
α_ϕ	6.6703e-16
β_ϕ	1.2231
NMSE	-33.3057dB

3.2 无记忆功放的多项式模型建模

根据数据文件采集到的无记忆功放效应的复输入输出测试数据，我们采用 2.2.2 小节的公式(2-5)作为功放的多项式模型，根据最小二乘估计的方法来计算模型多项式参数 h_k 。我们比较输入输出测试数据之间的相移图（见图 2-1AM/PM 特性曲线），发现该无记忆非线性功放的相位转移函数接近为 0。所以在本题建模时，我们将参数 h_k 作实数处理，同时取输入信号的幅值代入 $x(n)$ 。这将降低计算量并且得到准确的估计值。

模型中阶数 K 的确定是关键。我们通过做一个循环遍历取值 1~100 的 K 值分别求解 h_k 建模出的模型，对每种 K 值下的归一化均方误差 NMSE 值进行比较，找到使得 NMSE 最小的多项式模型阶数为 44。此时的 NMSE=-64.1830dB。图 3-2 为实际功放测试数据和多项式建模功放模型的 AM/AM 特性曲线图对比。表 2 列出了计算无记忆功放的多项式模型得到的各项参数。

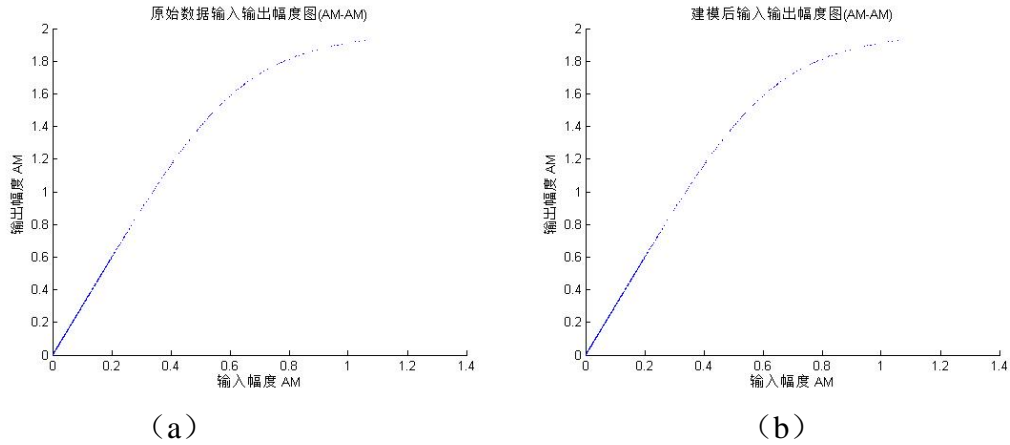


图 3-2: (a)实际功放的 AM/AM 特性曲线
(b)多项式模型的 AM/AM 特性曲线

表 2

多项式模型参数	拟合值
最佳阶数 k	44
多项式系数 hk	见附录
NMSE	-64.1830dB

同时，通过遍历我们发现，阶数 K 并不是越高越好。相反，当阶数 K 超过 44 阶之后继续增长，达到 88 次图形开始出现了抖动，到 100 次时，效果已经很差了。

3.3 无记忆功放的预失真器建模

数字预失真的基本原理是在功放之前设置一个预失真处理模块，这两个模块的合成总效果使整体输入-输出特性线性化，输出功率得到充分利用。经过前面的分析，预失真器也是非线性处理模块，文献[5]里证明了无记忆效应和有记忆效应情况下功放系统与预失真系统可交换性原理，说明预失真器与功放的非线性特性相逆，其原理框图如图 3-3。

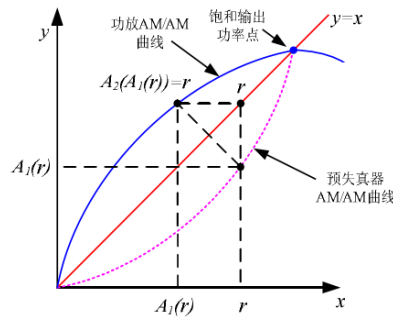


图 3-3: 预失真器和功放 AM/AM 曲线的关系

为得到无记忆非线性功率放大器的预失真模型，我们采用了求其逆模型的方法。阶数仍取 44 阶，建立多项式模型：

$$x(n) = \sum_{k=1}^K h'_k z^k(n) = h'_1 z(n) + h'_2 z^2(n) + \dots + h'_K z^K(n) \quad (3-1)$$

式 (3-1) 为目标误差函数，并可以通过最小二乘法求得多项式复系数 h'_k 。

为了满足“输出幅度限制”和“功率最大化”约束条件，我们将预失真多项式模型

目标误差函数调整为:

$$x(n) = \sum_{k=1}^K h'_k (z(n)/G)^K = h'_1 z(n)/G + h'_2 z^2(n)/G^2 + \dots + h'_K z^K(n)/G^K \quad (3-2)$$

其中, G 为理想线性化功放系统的增益。同时进行一个规划判断:

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=1}^K h'_k (x(n)/G)^K = h'_1 x(n)/G + h'_2 x^2(n)/G^2 + \dots + h'_K x^K(n)/G^K \quad (3-3)$$

$$S.t. \quad \max(\hat{x}(n)) \leq \max(x(n)) \quad (n=1, 2, \dots, 1000)$$

使预失真器输出满足“输出幅度限制”,从而达到功放输出功率最大化。

我们通过先计算 G 从 1~10 的预失真模型,判断预失真器输出的最大值与功放的最大输入进行比较,当 $\max(\hat{x}(n)) > \max(x(n))$ 时跳出循环;当确定一个比较粗略的 G 后,再进行更精细化的搜寻 G 从 1~2,寻找这样的最佳值,最终得到最优的增益 G 为 1.8265。如图 3-4 是功率放大器的输入输出图,预失真器输入输出图,以及经过预失真器和放大器整个系统的输入输出图。表 3 列出了计算预失真模型得到的各项参数。

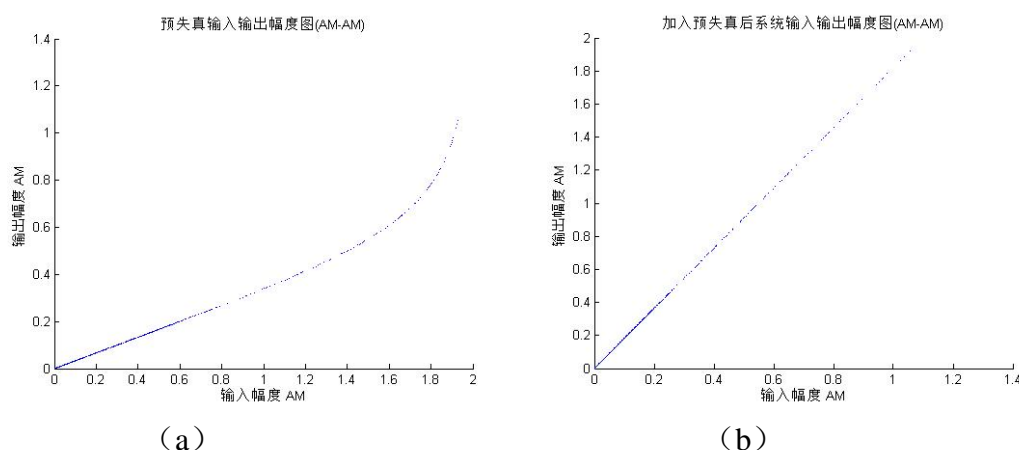


图 3-4: (a)预失真器 AM/AM 特性曲线
(b) 预失真器加功放的 AM/AM 特性曲线

表 3

参数	取值
功放最佳增益 G	1.8265
预失真器多项式模型参数 h_k	见附录
预失真器加功放模型 NMSE	-45.2490dB

第四章 有记忆功放及预失真器建模仿真

针对问题 2 提出的有记忆功放的建模任务,我们采用了“和记忆多项式”模型,也即记忆多项式模型进行建模。记忆多项式模型更简洁且能更好地描述有记忆非线性系统,是目前应用最多的一种非线性失真模型。其表示为

$$z(n) = \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{k=1}^K h_{kq} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \quad (4-1)$$

其中, K 和 M 分别为记忆多项式的阶次和记忆深度, h_{kq} 为记忆多项式的复系数, $|x(n-m)|$ 表示输入复信号 $x(n-m)$ 的幅值。

4.1 有记忆功放的记忆多项式模型建模

文献[6]称式(2.5)为非线性抽头延时多项式模型。可采用最小二乘法来求解式(4-1)的记忆多项式的复系数 h_{kq} 。我们通过建立输入信号矩阵 X , 记忆多项式复系数矩阵 H 和输出参考信号矩阵 Z 来将式(4-1)转变为矩阵形式。

$$\text{令 } Z = [z(0), z(1), \dots, z(N-1)]^T, \quad X = [x_{10}, \dots, x_{K0}, \dots, x_{1M}, \dots, x_{KM}],$$

$$x_{kq} = [x|x(1-q)|^{k-1}, x|x(2-q)|^{k-1}, \dots, x|x(N-q)|^{k-1}]^T,$$

$$H = [h_{10}, h_{20}, \dots, h_{K0}, h_{11}, \dots, h_{KM}]^T$$

由最小二乘法可以解得最佳记忆多项式复系数矩阵为^[7]

$$\hat{H} = (X^T X)^{-1} X^T Z \quad (4-2)$$

这里模型输入信号 $x(n)$ 取值为数据文件 2 的 `pa_in_memory.mat`, 输出参考信号 $z(n)$ 为数据文件 2 的 `pa_out_memory.mat`。

模型建立之后, 最关键的问题是记忆多项式模型的阶数 K 和记忆深度 M 的确定。为此我们通过采用比较最小均方误差 $NMSE$, 进行最佳局部遍历搜索来找到合适的多项式模型阶数和记忆深度。

首先, 从问题 2 的有记忆功放的 AM/AM 特性曲线(参见图 2-2(a))可以看出, AM/AM 特性曲线在整体上的弯曲程度不大, 接近直线。这从直观上反映了问题 2 背景下的有记忆功放的非线性程度不是很大, 从而相关的记忆多项式模型的阶数也不会很大。问题 1 的无记忆功放的 AM/AM 特性曲线弯曲程度明显, 反映在建模结果上就是一个很大阶数的多项式模型(44 阶)。所以我们为了降低模型建模的计算量, 采用预先估计, 并进行最佳局部遍历搜索来确定合适的多项式模型阶数和记忆深度。

具体步骤: 我们通过一个 K 取值 1~20 和 M 取值 1~20 的双循环来进行功率放大器建模, 并分别计算这些 (K, M) 值下建模后的归一化均方误差 $NMSE$ 值。遍历搜索的 $NMSE$ 三维图如图 4-1 所示, 附录中给出了部分 (K, M) 组合值下的计算的 $NMSE$ 值。从图中可见, 当阶数为 5, 记忆深度为 4 的时候 $NMSE$ 最小均方误差降到一个比较理想的值, 而后再增加阶数和记忆深度时, $NMSE$ 的改善变得不再明显, 因此我们此处将记忆多项式模型的阶数取 5, 记忆深度取 4。最后仿真得到的归一化均方误差为 $NMSE = -45.6805 \text{ dB}$ 。

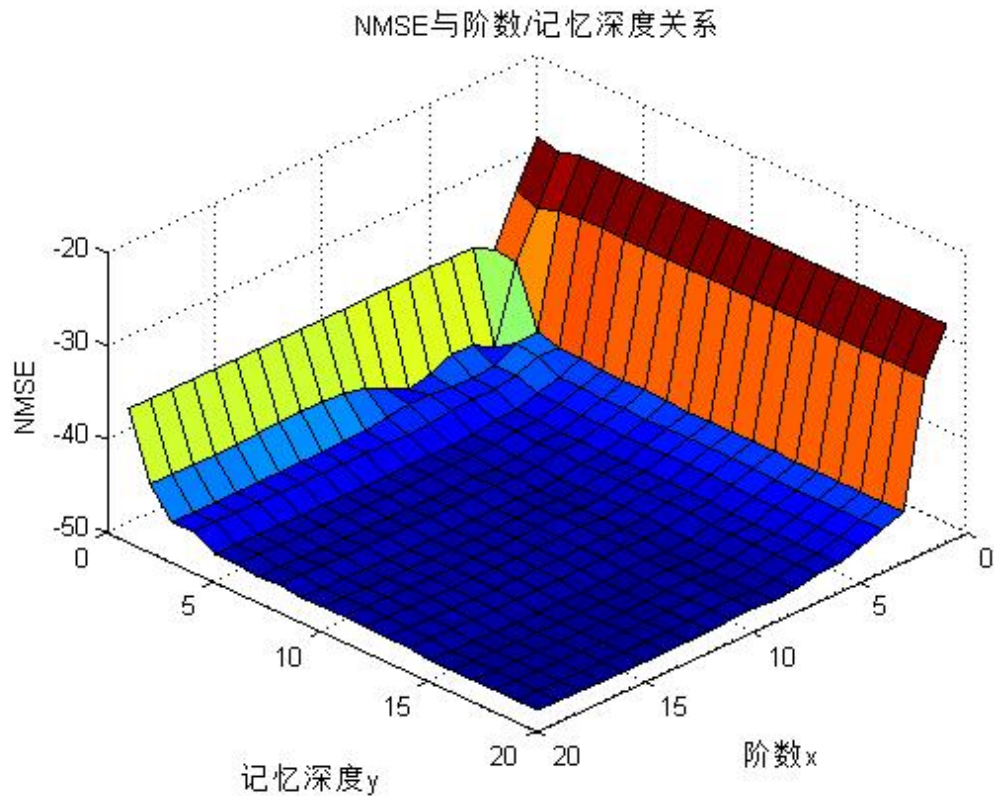
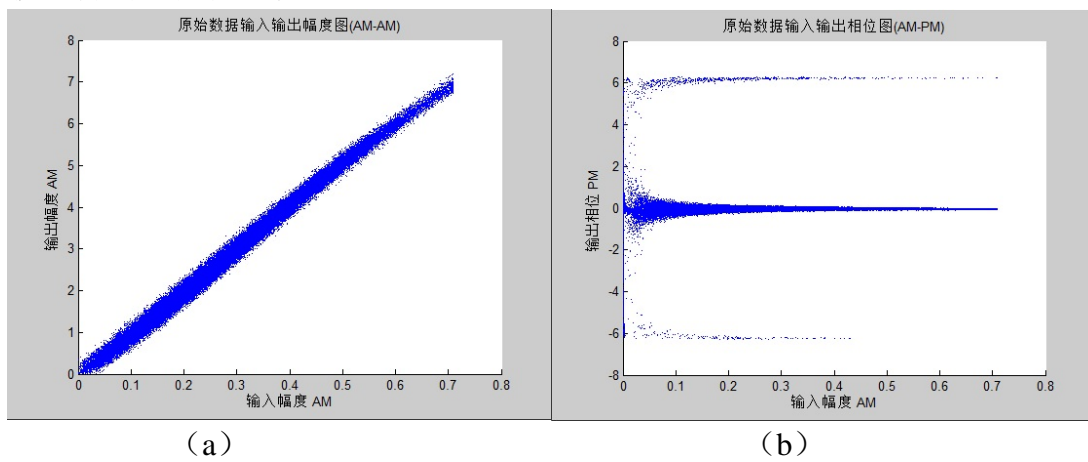


图 4-1: 遍历搜索模型阶数和记忆深度

我们求取参数矩阵 H ，具体值见附录。将数据文件 2 给出的输入信号导入记忆多项式模型，得到有记忆功放的 AM/AM 特性曲线与 AM/PM 特性曲线，同时给出了实际功放的 AM/AM 和 AM/PM 特性曲线做对比，如图 4-2 所示。表 4 列出了计算功放记忆多项式模型得到的各项参数。



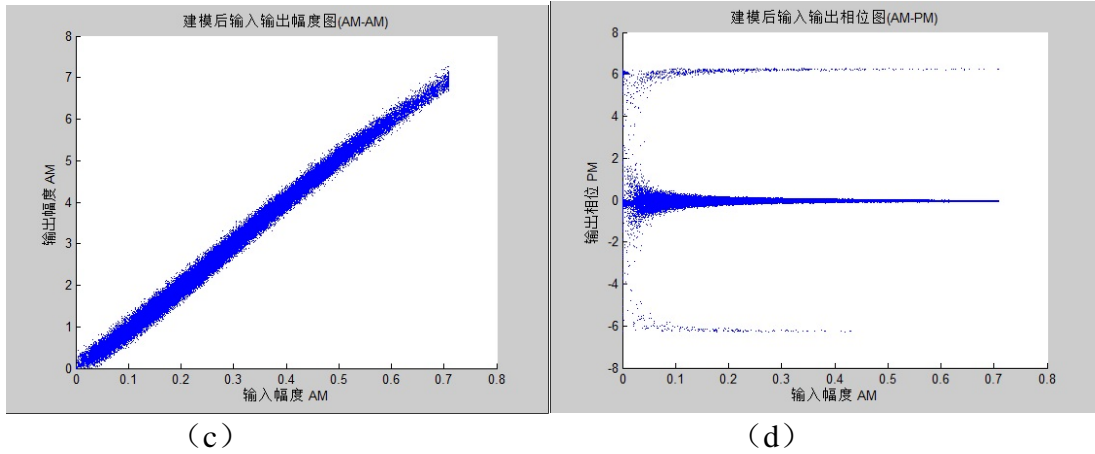


图 4-2: (a)实际功放AM/AM特性曲线 (b)实际功放AM/PM特性曲线
(c)多项式模型AM/AM特性曲线 (d)多项式模型AM/PM特性曲线
表 4

功放记忆多项式模型参数	数值
最佳阶数 K	5
最佳记忆深度 M	4
记忆多项式系数 hkq	见附录
NMSE	-45.6805dB

4.2 有记忆功放的预失真器建模

在对预失真器进行建模时，我们采用了文献[8]中提出的间接预失真学习结构，如图 4-3。该学习结构首先得到功放非线性系统的后置逆模型，然后将该逆模型直接作为预失真器使用。

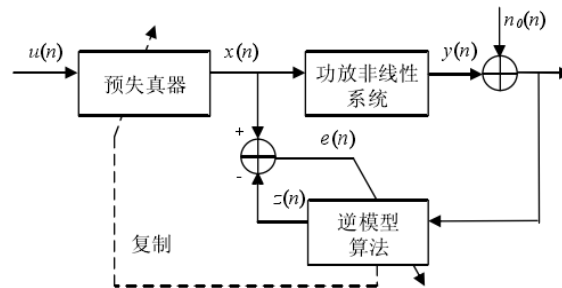


图 4-3: 间接学习结构型预失真器

将预失真器建模为:

$$x(n) = \sum_{K=1}^K \sum_{m=0}^M h'_{km} z(n-m) |z(n-m)|^{k-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4-3)$$

式 (4-3) 为目标误差函数，可以通过最小二乘法求得多项式复系数 h'_k 。与前面 4-1 内容节相反，这里模型输入信号 $z(n)$ 取值为数据文件 2 的 `pa_out_memory.mat`，输出参考信号 $x(n)$ 为数据文件 2 的 `pa_in_memory.mat`。
为了满足“输出幅度限制”和“功率最大化”约束条件，我们将预失真多项式模型目标误差函数调整为:

$$x(n) = \sum_{K=1}^K \sum_{m=0}^M h'_{km} \frac{z(n-m)}{G} \left| \frac{z(n-m)}{G} \right|^{k-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4-4)$$

其中， G 为理想线性化功放系统的增益。同时进行一个规划判断：

$$\hat{x}(n) = \sum_{K=1}^K \sum_{m=0}^M h'_{km} \frac{z(n-m)}{G} \left| \frac{z(n-m)}{G} \right|^{k-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4-5)$$

$$S.t. \quad \max(\hat{x}(n)) \leq \max(x(n)) \quad (n = 1, 2, \dots, 73920)$$

使预失真器输出满足“输出幅度限制”，从而达到功放输出功率最大化。

令 $u_{kq}(n) = \frac{z(n-m)}{G} \left| \frac{z(n-m)}{G} \right|^{k-1}$ ，则计算预失真模型的输入信号矩阵可表示为

$U = [u_{10}, \dots, u_{K0}, \dots, u_{1M}, \dots, u_{KM}]$ ， $u_{kq} = [u_{kq}(0), \dots, u_{kq}(N-1)]^T$ ，输出参考信号矩阵表示为

$X = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ ，预失真模型记忆多项式复系数矩阵表示为

$$H = [h'_{10}, \dots, h'_{K0}, h'_{11}, \dots, h'_{K1}, \dots, h'_{KM}]^T$$

计算预失真模型的步骤：

步骤 1：构建计算预失真器模型的输入信号矩阵 U ，多项式复系数矩阵 H 和输出参考信号矩阵 Z ；

步骤 2：设置循环：for $G = 1:1:50$ ，计算不同功放理想增益 G 下的预失真器模型参数；

步骤 3：将实际输入信号导入给定增益 G 下算出的预失真器模型，计算 $\hat{X} = XH$ ，

判断若 $\max(\hat{X}) > \max(X)$ ，则跳出循环，记录此时的增益 g ，转到步骤 4；

否则转到步骤 2；

步骤 4：缩小范围，设置循环：for $G = (g-1):0.0001:(g+1)$ ，采用更加精细的步长来搜索遍历最佳的理想增益 G ，并计算出最佳预失真模型的多项式复系数。

最终我们得到最优的增益 G 为 9.4815，此时，加了预失真系统与理想输出之间的最小均方误差为 $NMSE = -42.3754\text{dB}$ 。如图 4-4 是未加预失真器的功放的 AM/AM 特性曲线和添加预失真器之后的功放的 AM/AM 特性曲线，表 5 列出了计算预失真器模型得到的各项参数。

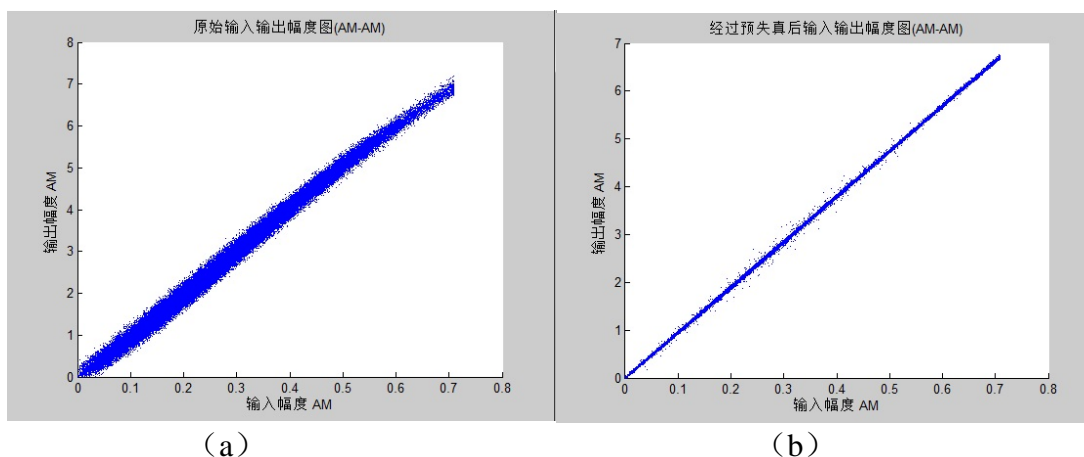


图 4-4: (a)未加预失真器的功放的 AM/AM 特性曲线
(b)添加预失真器后的功放的 AM/AM 特性曲线

表 5

参数	数值
功放最佳增益 G	9.4815
预失真器多项式模型系数 h_{kq}	见附件
预失真器加功放模型 NMSE	-42.3754dB

第五章 拓展研究

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为：

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (5-1)$$

其中 $s(f)$ 为信号的功率谱密度函数， $[f_1, f_2]$ 为传输信道， $[f_2, f_3]$ 为相邻信道。

针对问题 2 中的测试数据，设定数据采样频率 $F_s = 30.72 \times 12 \text{ MHz}$ ，传输信道按照 20MHz 计算，邻信道也设定为 20MHz，根据给出的测试数据，并结合我们在第四章解算的功放模型和预失真模型，计算输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号和采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度图如下：

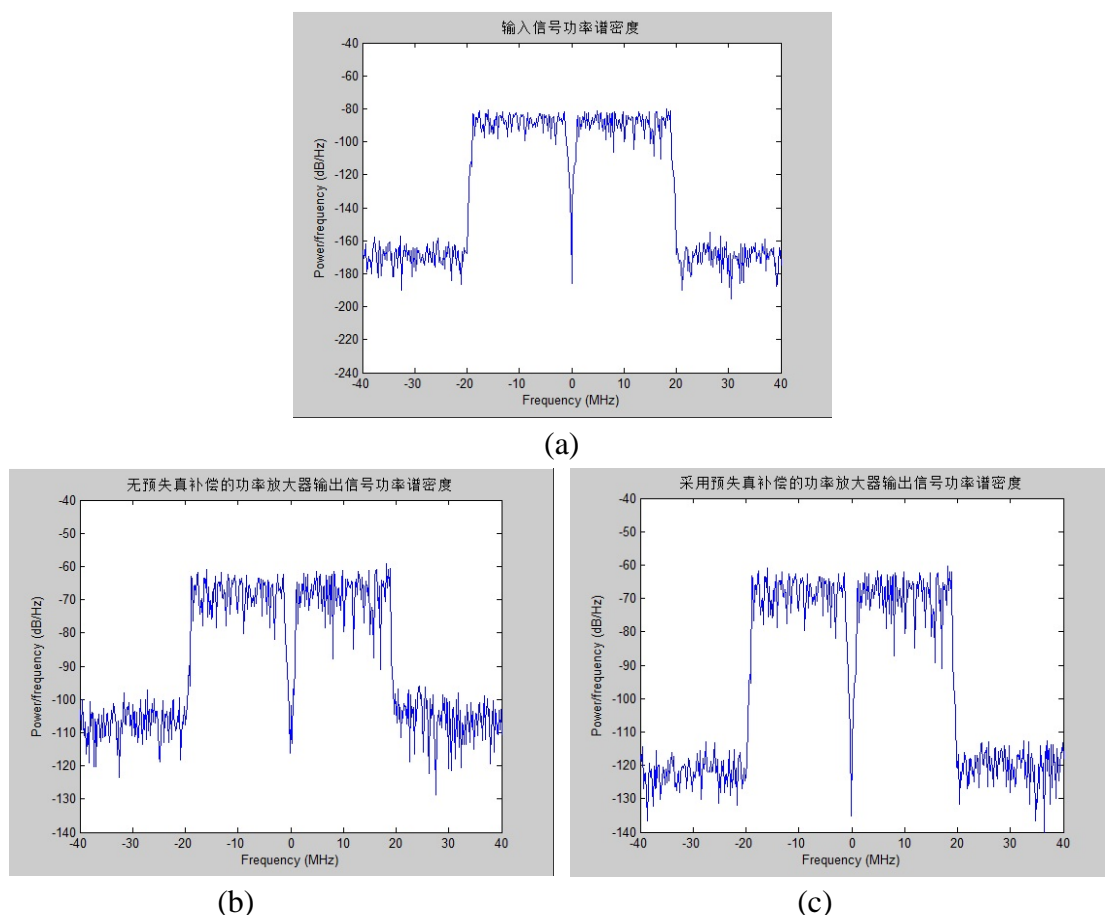


图 5-1: (a) 输入信号功率谱密度 (b)无预失真补偿的功率放大器输出信号功率谱密度 (c)采用预失真补偿的功率放大器输出信号功率谱密度

根据公式 (5-1) 定义的相邻信道功率比 ACPR，计算得到的输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号和采用预失真补偿的功率放大器输出信号的 ACPR 值如表 6。

表 6

信号类型	ACPR 值
输入信号	-79.6096dB
无预失真补偿的功率放大器输出信号	-37.5025dB
采用预失真补偿的功率放大器输出信号	-52.2450dB

从计算得到的三组 ACPR 值可以看出，输入信号的 ACPR 值最低，无预失真补偿的功率放大器输出信号的 ACPR 值最差，相对输入信号有将近 40dB 的增量。说明，在无预失真补偿的情况下，带记忆效应的非线性功放会造成放大信号严重的带外频谱扩展，对应实际环境当中，就会对相邻信道传输信号造成严重的干扰。而采用了我们建立的预失真模型，功放输出信号的 ACPR 值下降了近 15dB，由此说明我们采用的间接学习型预失真器结构能很好地抑制带外频谱的扩展。

参考文献

- [1] John Tsimbinos, Identification and Compensation of Nonlinear Distortion, PhD Dissertation, School of Electronic Engineering, University Of South Australia, Adelaide, February 1995.
- [2] Tianhai Wang, et al. Volterra-Mapping-Based Behavioral Modeling of Nonlinear Circuits and Systems for High Frequencies. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2003,51(5):1433-1440
- [3] Raviv Raich, et al. Orthogonal Polynomials for Power Amplifier Modeling and Predistorter Design. IEEE Trans. Vehicular technology, 2004,53(5):1468-1479
- [4]Dennis R.Morgan et al. A Generalized Memory Polynomial Model for Digital Predistortion of RF Power Amplifiers. IEEE Trans. Signal Processing , 2006,54(10):3852-3860
- [5] 詹鹏. 射频功放数字预失真线性化技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
- [6] Raich R ,Qian H ,Zhou G T. Digital baseband predistortion of nonlinear power amplifiers using orthogonal polynomials[C]2003 IEEE International Conference on coustics , Speech , and Signal Processing. Hong Kong : IEEE ,2003 :VI689 - VI692.
- [7] 张明淳. 工程矩阵理论. 南京: 东南大学出版社, 2012.
- [8] Lei Ding et al. A Robust Digital Baseband Predistorter Constructed Using Memory Polynomials. IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS, VOL. 52, NO. 1, JANUARY 2004, 159-165.

附录（表格和图像）

表 1 拟合功放多项式系数

（从高阶到低阶）

-29564.4801163638	-64103.6596909167	-55897.9214371248
243451.548687848	151510.822483793	28735.9190344040
-816809.177017290	-343005.334471810	-10632.2782238855
1340731.45568250	418915.834650739	2918.56011552407
-828250.742231016	-3694.97294510299	-604.531935633064
-635217.331504239	-516901.419595832	106.788471439521
1462694.00533331	318244.286860050	-11.1732575360990
-1186119.07338661	302030.910547448	0.975374960858710
960739.646245735	-471647.785466406	-0.0614527738561676
-726064.624862809	196416.660030528	-3.79418768624193
-158890.409170982	4877.54949491285	-7.68669811840289e-05
538558.349053305	-18163.8860737047	1.30925754630505e-06
210947.673412074	16680.6197353017	-1.12831630754373e-08
-659922.597495984	-53026.9463679183	3.00000000003503
308599.596196118	72369.9114270232	-8.47855914561476e-15

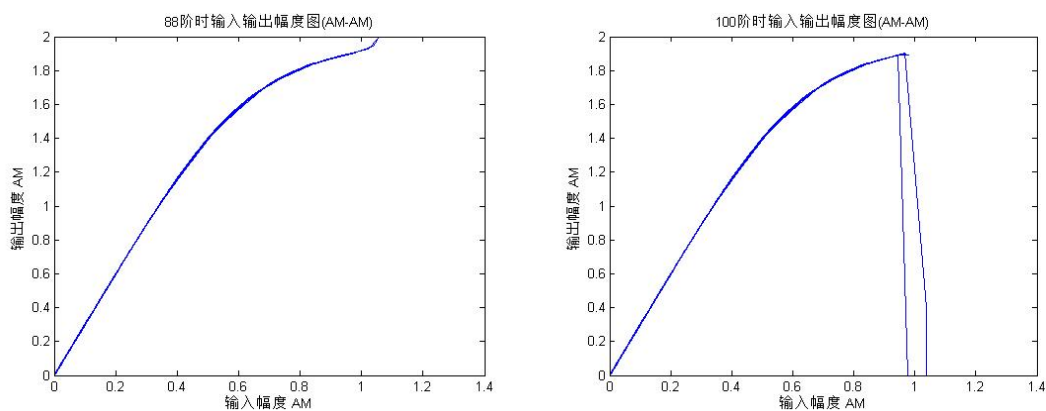


图 1 阶数取过大后的图像

表 2 无记忆非线性预失真器模型参数

7737217	-5.6E+07	1.63E+08	-2.4E+08	1.94E+08	-1.9E+08	3.33E+08
-2.8E+08	-1.2E+08	4.09E+08	-3E+08	71142380	-7112606	1.46E+08
-3.2E+08	2.81E+08	-1.3E+08	1.37E+08	-2.2E+08	1.66E+08	-4.2E+07
-6.1E+07	1.15E+08	-9.5E+07	1.06E+08	-2.5E+08	3.91E+08	-3.1E+08
78237789	1.07E+08	-1.5E+08	99405329	-4.5E+07	14900752	-3664139
676075.5	-93023	9385.67	-675.008	33.23741	-1.03855	0.01872
-0.00016	0.61					

表 3 记忆多项式建模时阶数 K(1 到 10)与深度 M(0 到 6)时的 NMSE

记忆深度 M 0-6

-26.807	-31.5112	-36.7148	-35.4441	-35.4449	-35.4639	-35.5111
-27.39	-32.3204	-36.9749	-45.0229	-43.753	-43.6545	-44.7047
-26.7109	-31.5351	-43.3845	-43.5131	-44.8541	-45.0928	-45.0144
-26.6993	-31.3049	-44.037	-43.9083	-44.8243	-45.2267	-45.2984
-26.7107	-31.2332	-44.0772	-45.0379	-45.6805	-46.3693	-46.4539
-26.6881	-31.3161	-44.3198	-45.074	-45.7836	-46.431	-46.5115
-26.6846	-31.3388	-44.423	-45.2197	-45.9656	-46.6722	-46.7779
-26.6736	-31.3435	-44.2162	-45.1609	-45.8537	-46.5207	-46.6166
-26.6745	-31.3463	-44.3976	-45.3438	-46.0537	-46.7432	-46.8406
-26.6792	-31.3448	-44.5534	-45.2116	-45.9696	-46.6881	-46.7838

阶数
K 1-10

表 4 记忆多项式功放模型参数矩阵

9.91891513547506 - 1.28606724335363i
7.09112410034062 + 6.72541316135316i
-2.49758953555809 - 15.8923250648273i
-27.1567835254685 + 10.2869963402544i
24.9292683372470 + 0.421674211556371i
-3.94999423319711 - 2.31533376780176i
3.45186252707175 + 1.58062136253652i
-23.3173490577481 - 13.3113400268436i
70.5808044458363 + 37.6042715089764i
-54.0334146159787 - 30.1197180880485i
-1.54409543496452 + 5.07237798813040i
0.629883483900662 + 1.24360670520663i
14.9258449455533 + 6.16127145001267i
-68.4771840045167 - 32.3858380506482i
57.2033480388913 + 30.1733887119529i
9.13157537363202 - 5.10911198410396i
0.0796498704993399 - 0.534824569343371i
-10.2451841288600 - 5.45111638432537i
45.7000775349860 + 24.4203835936611i
-38.0660494962711 - 22.1814790050558i
-5.66771378390827 + 2.46932328594669i
-1.27514478858244 + 0.205206683304316i
7.05373215494526 + 2.96288639108872i
-19.1836980340469 - 10.8444659715980i
14.2538999094120 + 9.14177032928946i

表 5 记忆多项式模型时预失真器参数矩阵

1.62542159157461 + 0.220016865363973i
-0.554310546113968 - 0.735430755712119i
0.383028106420883 + 1.76470199210486i
0.785010869800474 - 1.45980845001610i
-0.423824499561166 + 0.519379714596432i
-2.20989793875981 + 0.125737083336136i
-0.454406608843613 - 0.196472403711328i
2.57484235012969 + 1.12795763821822i
-4.51633949606002 - 3.11433966827944i
1.75423991372067 + 1.94638813370971i
3.85047883848734 - 0.653962409301636i
-0.316146495508953 - 0.234516782255029i
-1.28210334242909 + 0.440229390922696i
3.19487791048721 + 1.33666900011517i
-0.712377227828521 - 1.20068771929662i
-3.18925763956765 + 0.833931503153153i
0.0990190395046126 + 0.0860346597945468i
1.43441051729901 - 0.198308764923652i
-2.81184803594858 - 1.10187391595397i
0.541180261948111 + 0.987357996843835i
1.07017536375092 - 0.393800070262746i
0.274630524244036 + 0.0693284401477111i
-1.43673504524944 - 0.324124224185047i
2.11788044869702 + 0.994823844620368i
-0.687131211583482 - 0.704566210346344i