全国第八届研究生数学建模竞赛

题 目　　房地产行业态势、发展及调控的模型研究

摘　　要：

在充分分析问题的基础上，本文整理了大量关于房地产方面的数据，从定量的角度出发把握影响房地产市场各指标之间的数量关系，建立数学模型以量化研究该行业当前的态势、未来的趋势，建立了我国房地产行业的住房需求、住房供给、当前态势、可持续发展以及调控模型，并仿真模拟了其调控成效。

首先，本文对目前我国房地产行业的有关情况和特点进行分析，通过对相关文献的总结和对比确定了影响房地产行业的主要因素，在此基础上运用非均衡经济分析理论结合所给的数据，利用线性回归方法构建住房需求与住房供给之间的关系方程，然后对房地产市场的供给曲线和需求曲线进行分析，以构建房地产市场的非均衡计量经济模型，进而得到住房供给模型和住房需求模型，并对模型的有效性进行了论证说明。

其次，考虑房地产行业的未来发展趋势以及能否持续稳定发展，本文确定了影响房地产行业发展的因子，量化研究该行业当前的态势、未来的发展趋势。利用非线性动力学模型得出近年房地产发展处于稳定状态；利用基于模糊物元的可持续发展模型对房地产行业的发展趋势进行了预测，并以 2009 年为例，得出我们房地产可持续状况处于“协调”状态，并且按当前的态势发展，房地产行业的发展状况可观。

最后，考虑政府宏观经济调控房地产行业发展，建立了房价、住房需求与住房供给之间的三维耦合微分方程动力学模型，为正向调控提供依据。根据住房需求、供给模型找出具体的调控策略，利用可持续发展模型检验调控政策的合理性和成效模拟。根据“在确定的调控结果前提下找出调控具体的策略”的思想，本文还建立了倒向常微分方程模型，为政府提供倒向调控依据，仍然根据住房需求、供给模型和可持续发展模型，找出具体的调控策略，并检验当前调控的合理性与成效模拟。

【关键词】 房地产；非均衡计量经济模型；住房供给模型；住房需求模型；非线性动力学模型；基于模糊物元的可持续发展模型；三维耦合微分方程动力学模型；倒向常微分方程模型

1、问题重述

房地产行业既是国民经济的支柱产业之一，又是与人民生活密切相关的行业之一，同时自身也是一个庞大的系统，该系统的状态和发展对国民经济的整个态势和全国人民的生活水平影响很大。近年来，我国房地产业发展迅速，不仅为整个国民经济的发展做出了贡献，而且为改善我国百姓居住条件发挥了决定性作用。但同时房地产业也面临较为严峻的问题和挑战，引起诸多争议，各方都坚持自己的观点，然而多是从政策层面、心理层面和资金层面等因素来考虑，定性分析多于定量分析。显然从系统的高度认清当前房地产行业的态势、从定量角度把握各指标之间的数量关系、依据较为准确的预见对房地产行业进行有效地调控、深刻认识房地产行业的经济规律进而实现可持续发展是解决问题的有效途径。通过建立数学模型研究我国房地产问题是一个值得探索的方向。

利用附录中提供的及可以查找到的资料建立房地产行业的数学模型，建议包括：

1、住房需求模型；

2、住房供给模型；

3、房地产行业与国民经济其他行业关系模型；

4、对我国房地产行业态势分析模型；

5、房地产行业可持续发展模型；

6、房价模型等。

并利用模型进行分析，量化研究该行业当前的态势、未来的趋势，模拟房地产行业经济调控策略的成效。希望在深化认识上取得进步，产生若干结论和观点。如果仅就其中几个问题建立模型也是适宜的。

2、问题分析

本题所建议的六个模型，既分散，又相互联系。本文从住房需求，住房供给和房地产业可持续发展模型三个方面考虑。

首先，住房的需求和供给是一种预测，结合前人的结果，研究房地产住房需求和供给的模型大多使用回归分析方法，然后预测出住房的需求和供给。在建立此模型之前，本文需要找出影响住房需求和供给的相关因素，所以使用主成份分析发去除对此没有影响的因素。

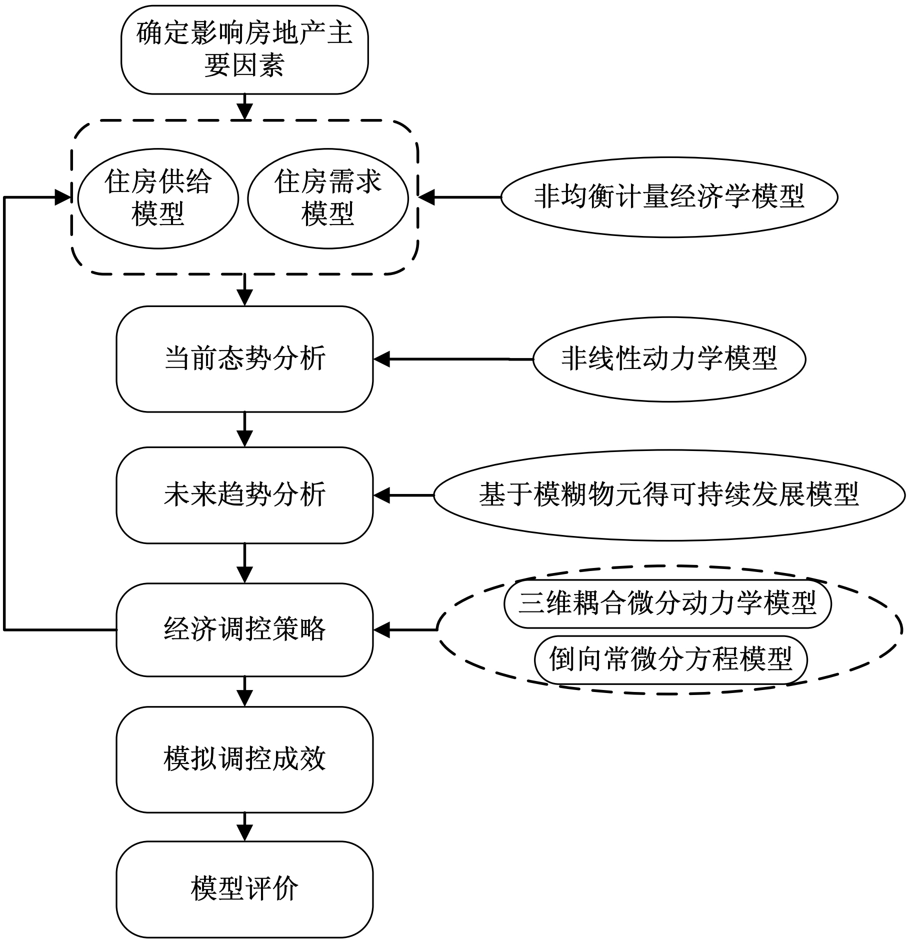
接着，本文可以使用多元回归分析建立住房需求和住房供给模型，使用简单的模型阐述复杂的关系，为后面建立调控模型做好准备。建立好供给和需求模型之后，可以依据模型结果分析当前态势，此态势需要建立微分方程模型，以揭示其内部的关联，最终分析出当前房地产业的供求关系。

然后，为了分析房地产业未来的发展趋势，本文需要建立房地产业可持续发展模型，此模型需要分析出房地产业未来发展变化，是否可持续发展。之后本文还要建立房地产调控模型，为改善房地产当前的状况或者使房地产业可持续发展，提供可执行策略。此模型可以考虑使用倒向微分方程建立。为达到将来的某一具体目标，现在需要做哪些准备。此模型适用于政府宏观调控。

最后，可以使用计算机仿真的方法模拟调控策略之后的发展趋势，使用可持续发展模型进行检验，查看调控策略是否能够可持续发展，如果能够保证可持续发展，那么说明调控策略可行，否则不可行。在模拟调控策略的成效时，需有理论依据对调控策略进行分析，所以在前面建立调控模型时，必须对模型进行一定的理论分析。

为了把握问题分析的中心思路，使读者能够清晰地了解我们的解题过程，绘制思路

流程图如下。



3、符号说明和模型假设

3.1 符号说明

N	房地产行业中具体的房价
S	住房供给面积
D	住房需求面积
C	人均消费性支出
A	人均经济支配能力
J	房地产行业投入资金
γ	贷款利率
GDP	国民经济发展水平
Pe	消费者对房价的预期
Fe	房地产投入成本
其他未列出符号在文中另附说明	

3.2 模型假设

为了使实际问题能够使用数学模型进行具体的描述，本文需要假设一些条件，这些条件的假设对建立模型起到了关键作用，但是，具体实际问题的解决，还需要根据模型的修改而对假设条件进行调整。

（1）假设居民的住房需求是一种刚性需求，即住房是居民生活的必备条件，无论外界如何干涉，居民都需要住房；

（2）不考虑房地产泡沫的影响因素；

（3）假设所搜集的数据真实可靠；

（4）假设本研究课题中提到的房地产只考虑商品房；

（5）在建立模型时，默认因素之间相互关联，而有些因素之间的关联可以忽略。

4、住房需求和住房供给模型

房地产业已成为拉动国民经济增长的重要产业，房地产业的持续健康发展，不仅影响到整个国民经济发展的速度和质量，也直接影响到社会的安定。作为国民经济的基础性产业的房地产业必须走可持续发展的道路。

从 2003 年下半年开始，房地产业在发展过程中出现了部分地区房地产投资过热、房价上涨过高的现象，各项指标表明中国房地产存在一定程度的泡沫。为保持经济健康稳定的发展，近年来，中央政府综合运用经济、法律和必要的行政手段，以区别对待和循序渐进的方式，对房地产业连续出台了一系列宏观调控政策。但房地产市场仍然存在住房供给结构不合理、部分城市房价上涨太快、中低收入居民住房难以满足等问题。

根据题目中提供的数据，可得到商品房本年销售面积走势图、商品房本年竣工面积走势图、商品房本年销售面积和商品房本年竣工面积波动比较图，分别如图 4-1、图 4-2、图 4-3 所示。

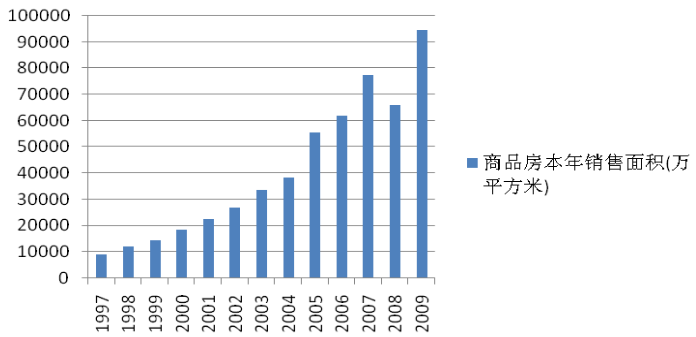


图 4-1 商品房本年销售面积走势图

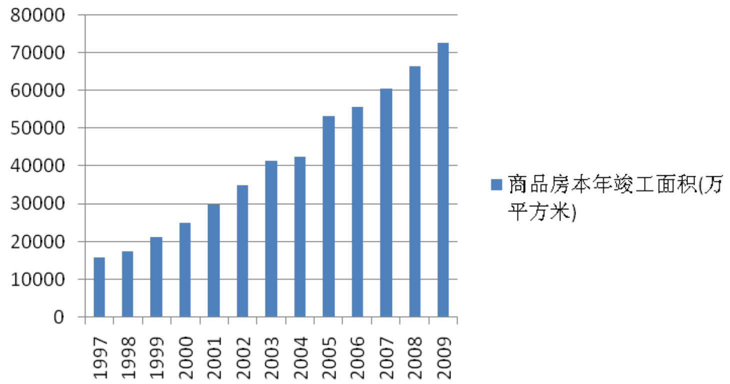


图 4-2 商品房本年竣工面积走势图

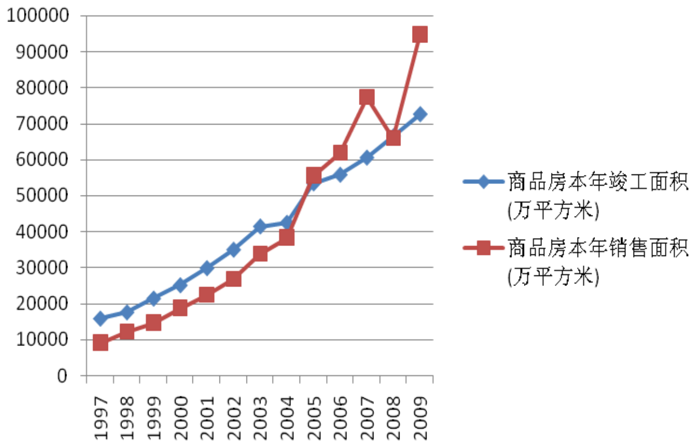


图 4-3 商品房本年销售面积和商品房本年竣工面积波动比较图

针对房地产业的分析定性分析多于定量分析的问题，本文将从系统的高度认清当前房地产行业的态势、从定量角度把握各指标之间的数量关系、依据较为准确的预见对房地产行业进行有效地调控、深刻认识房地产行业的经济规律进而实现可持续发展是解决问题的有效途径。我国房地产行业市场结构图如下图所示：

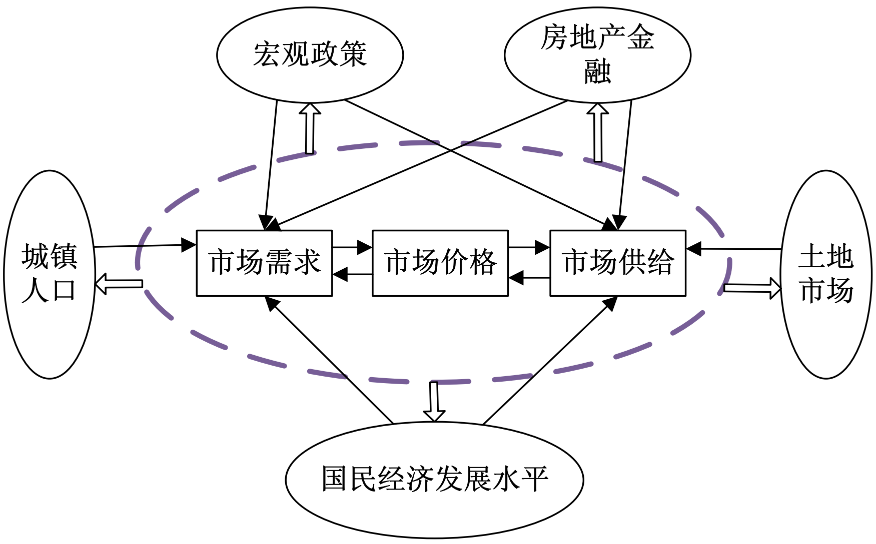


图 4-4 房地市场结构关系示意图

4.1 住房需求影响与研究假设及变量的选取

对于影响房地产需求因素的研究有很多，结合参考文献[1][2][3]分析研究，本文认为影响房地产需求的因素主要有房地产价格、消费者收入水平、消费者对未来的预期、国民经济发展水平、城镇化进程以及贷款利率，并且提出如下假设：

（1）在正常消费占主导情况下，房地产价格对房地产需求有显著的负向影响；在投资投机占主导情况下，房地产价格对房地产需求有显著的正向影响。

（2）在其他条件不变的情况下，消费者收入水平会对房地产需求产生显著的正向影响。

（3）在正常消费占主导情况下，消费者对未来房地产价格的预期会对房地产需求产生显著的负向影响；在投资投机消费占主导情况下，消费者对未来房地产价格的预期会对房地产需求产生显著的正向影响。

（4）在其他条件不变的情况下，城镇化进程加快会促进房地产行业的发展，也就是说城镇化进程会对房地产需求产生显著的正向影响。

（5）在其他条件不变的情况下，贷款利率会对房地产需求产生显著的负向影响。

（6）在其他条件不变的情况下，国民经济发展水平会对房地产需求产生显著的正向影响。

变量选取

本文选取全国商品房的销售面积来表示房地产的需求量；房地产价格用全国商品房的平均销售价格指数来表示；消费者收入水平用城镇居民家庭人均可支配收入来表示；消费者对未来的预期用消费者对房地产价格的预期来表示，因为消费者对房地产价格的预期是所有预期中最主要的，为了简单起见本文只选取消费者对房地产价格的预期来代表消费者对未来的预期，而且本文还假设消费者的预期为理性预期，因此消费者对房地产价格的预期可选用下一年商品房的平均销售价格指数来表示；城镇化进程用每年城镇居民的人口总数来表示；国民经济发展水平用国内生产总值 GDP 来表示；贷款利率用金融机构一年期贷款利率来表示。

4.2 住房供给影响与研究假设及变量的选取

对于影响房地产供给因素的研究有很多，经过分析研究本文认为影响房地产供给的因素主要有房地产价格、房地产开发商对未来的预期、房地产成本以及贷款利率，并且提出如下假设：

（1）在其它条件不变的情况下，房地产当期价格会对房地产供给产生显著的正向影响。

（2）在其它条件不变的情况下，房地产开发商对未来房地产价格的预期会对房地产供给产生显著的正向影响。

（3）在其它条件不变的情况下，房地产成本（土地价格）会对房地产供给产生显著的负向影响。

（4）在其它条件不变的情况下，贷款利率会对房地产供给产生显著的负向影响。

变量选取

本文的主要目的是构建房地产的供给模型，并检验房地产价格、房地产开发商对未来的预期、房地产成本以及贷款利率对房地产供给的影响效果（也即检验上述 4 个假设是否成立），因此本研究选取全国商品房的竣工面积来表示房地产的供给量；房地产价格用全国商品房的平均销售价格指数来表示；房地产开发商对未来的预期用房地产开发商对未来房地产价格的预期来表示，因为房地产开发商对房地产价格的预期是所有预期中最主要的，为了简单起见本文只选取房地产开发商对房地产价格的预期来代表消费者对未来的预期，而且本文还假设房地产开发商的预期为理性预期，因此房地产开发商对房地产价格的预期可选用下一年商品房的平均销售价格来指数表示；房地产成本用土地交易价格指数来表示；贷款利率用金融机构一年期贷款利率来表示。

4.3 全国住房需求模型和住房供给模型的建立

4.3.1 非均衡计量经济模型理论

非均衡理论（Non-Equilibrium Theory）也称非瓦尔拉斯均衡理论，源于对新古典经济学中的经典理论—瓦尔拉斯均衡（Walrasian Equilibrium）的修正。Bapro 和 Grossman 于 1971 年正式构建了一个非瓦尔拉斯均衡模型，从而奠定了非瓦尔拉斯均衡理论的基

础。随着非均衡理论的不断发展和计量经济学方法的广泛应用，自 20 世纪 70 年开始，非瓦尔拉斯均衡计量模型开始应用于对非瓦尔拉斯均衡状态的定量描述之中，并最早应用在房地产市场非均衡状态的分析，详见参考文献[4]。参照[4]的研究成果，非均衡计量模型的具体形式如下。

首先，符合“短边规则”的非均衡模型由以下 3 个方程构成：

$$D_t = \alpha_0 Xd_t + \alpha_1 P_t + \mu d_t \ (t = 1, 2, ..., T) \tag{4-1}$$

$$S_t = \beta_0 Xs_t + \beta_1 P_t + \mu s_t \ (t = 1, 2, ..., T) \tag{4-2}$$

$$Q_t = \min(D_t, S_t) \tag{4-3}$$

在上述方程组中，（4-1）为需求方程，（4-2）为供给方程，（4-3）为交易量方程；D_t 表示时期 t 的需求量，S_t 表示时期 t 的供给量，P_t 表示时期 t 的价格，Q_t 表示时期 t 的成交量；μd_t 和 μs_t 表示方程的随机扰动项，假设 μd_t 和 μs_t 的均值为 0、方差为常数、无序列相关且与 Xd_t 和 Xs_t 相互独立；Xd_t 和 Xs_t 分别表示除了价格 P_t 和扰动项 μd_t、μs_t 以外影响需求和供给的各种变量的项量。α_0、β_0、α_1、β_1 为方程变量的系数。在符合“短边规则”的非均衡分析中，市场交易量 Q_t 并不等于需求量和供给量，而是等于需求量和供给量中较小的一个，即有 $Q_t = \min(D_t, S_t)$，该交易量方程常被称为最小原则方程。

其次，在上述基本模型的基础上，本文进一步引进包含“交易摩擦”概念的双曲线型市场聚合方程来表示市场上的交易量，这样，非均衡模型则由以下 3 个方程构成：

$$D_t = \alpha_0 Xd_t + \alpha_1 P_t + \mu d_t \ (t = 1, 2, ..., T) \tag{4-1}$$

$$S_t = \beta_0 Xs_t + \beta_1 P_t + \mu s_t \ (t = 1, 2, ..., T) \tag{4-2}$$

$$Q_t = 0.5(D_t + S_t) - 0.5\sqrt{(D_t - S_t)^2 + 4r^2 D_t S_t} \tag{4-4}$$

r 为市场的聚合程度系数，r 越小，表明市场上“交易摩擦”程度越低，市场机制越趋于有效，聚合后的宏观市场就越接近于“短边规则”成立的市场情况。同时，$r > 0$ 为市场常态，因此，对于任意 $r(r > 0)$，都存在 $Q_t < \min(D_t, S_t)$ 且 $\lim Q_t = \min(D_t, S_t)^{r \to 0}$。

4.4 我国住房供需非均衡计量模型[5][14]的建立

本文中，记 S 为年度商品房供给量；D 为年度商品房需求量；α 为市场摩擦系数；N 为年度商品房销售价格；GDP 为年度国民经济发展水平；Pe 为年度消费者对房地产价格的预期；R 为年度城镇家庭平均每人可支配收入；J 为年度房地产行业投入资金；G 为年度商品房交易量。

依据 1997 年至 2009 年的数据，可得我国商品房供求情况的非均衡度曲线如图 4-5。

依据 4.3.1 节介绍的模型，得到住房需求方程如下：

$$D = c_0 + c_1 N + c_2 Pe + c_3 R + c_4 GDP + c_5 \gamma + \mu_s,$$

其中 c_0 为常数项，又称为截距，μ_s 为残差。

得到住房供给方程如下：

$$S = a_0 + a_1 N + a_2 Pe + a_3 Fe + a_4 \gamma + \mu_d \text{。}$$

其中 a_0 为常数项，又称为截距， μ_d 为残差。

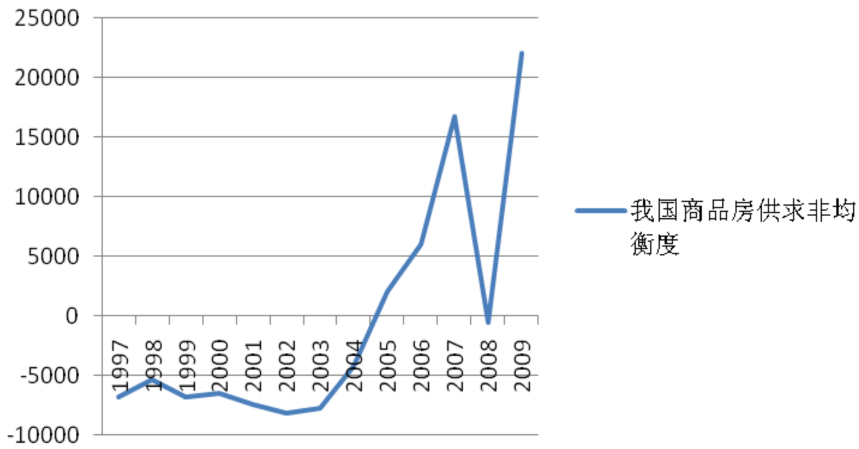


图 4-5 我国商品房供求情况的非均衡度曲线

本文采用双曲线形式，即交易量：

$$G = 0.5\times(S+D) - 0.5\times\sqrt{(S-D)^2 + 4\alpha^2 SD}\text{。}$$

由于模型只考虑 1997 年至 2009 年的数据，因此为了简化计算，令市场摩擦系数 $\alpha = 0$，由此：

$$G = 0.5\times(S+D) - 0.5\times|S-D|\text{。}$$

这样得到全国房地产市场住房非均衡模型：

$$\begin{cases} D = c_0 + c_1 N + c_2 Pe + c_3 R + c_4 GDP + c_5 \gamma + \mu_s \\ S = a_0 + a_1 N + a_2 Pe + a_3 Fe + a_4 \gamma + \mu_d \\ G = 0.5\times(S+D) - 0.5\times|S-D| \end{cases}$$

根据提供的 1997 年至 2009 年长沙市房地产相关数据，分别对有效供应方程、有效需求方程进行拟合回归。首先，对 N、Pe、R、GDP、γ 进行相关分析，由相关系数矩阵（见表 4-1）可以看出，各解释变量相互之间的相关系数较高，从而证实确实存在严重的多重共线性问题。

表 4-1 相关系数矩阵

解释变量	N	Pe	R	GDP	γ
N	1.0000	0.9954	0.8405	0.8673	0.7012
Pe	0.9954	1.0000	0.8377	0.8668	0.7497
R	0.8405	0.8377	1.0000	0.5975	0.4631
GDP	0.8673	0.8668	0.5975	1.0000	0.6640
γ	0.7012	0.7497	0.4631	0.6640	1.0000

为了消除多重共线性问题，本文分别做 D 对 N、Pe、R、GDP、γ 的一元回归，结果如表 4-2 所示。

表 4-2 一元回归结果

解释变量	N	Pe	R	GDP	γ
参数估计	1.0180	1.0109	0.4813	1.6657	0.8708
T 值	7.2547	7.0970	1.0747	13.7230	0.6280
$\overline{R^2}$	0.5574	0.5524	0.0070	0.8028	-0.1334
F 值	52.6301	50.3678	1.1549	188.3203	0.3943

然后，运用最小二乘法，得到系数如下：

$c_0 = -21.3779$， $c_1 = -4.4485$， $c_2 = 3.1563$，， $c_4 = 3.511$， $c_5 = -2.5226$，

所以，住房需求方程如下：

$$D = -21.3779 + 4.4485N + 3.1563Pe + 3.511GDP - 2.5266\gamma \text{。}$$

同理，可得住房供给方程如下：

$$S = 7.1023 + 1.7059N + 2.4936Pe - 1.471\gamma \text{。}$$

由图 4-6、图 4-7 可知，在住房供应回归模型及住房供应回归模型中，各量之间具有良好的关系，可以说明建立的两个模型的合理性。

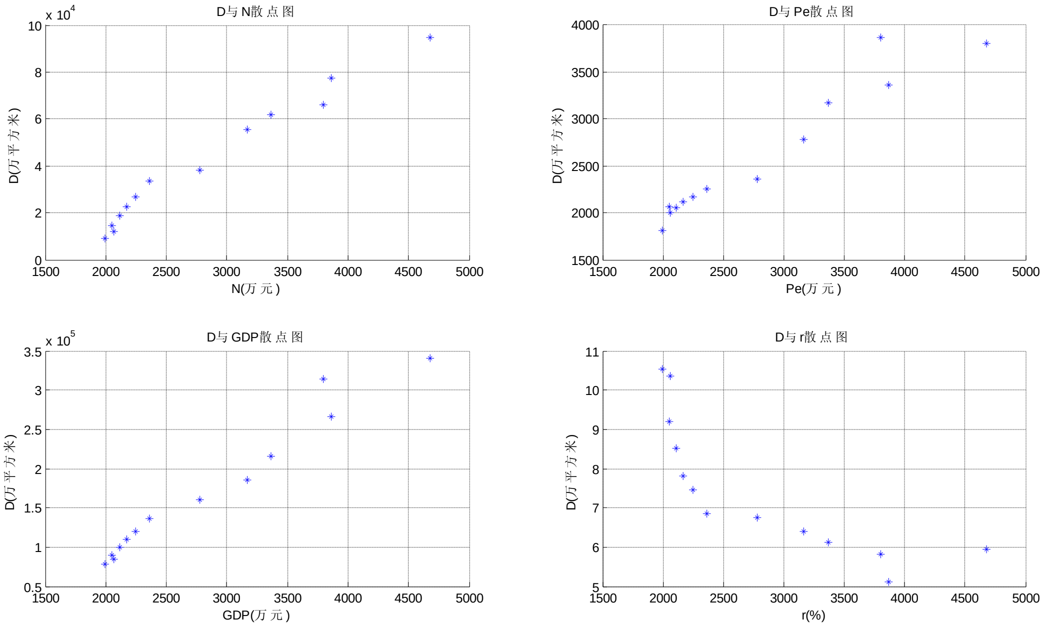


图 4-6 住房需求回归模型散点图

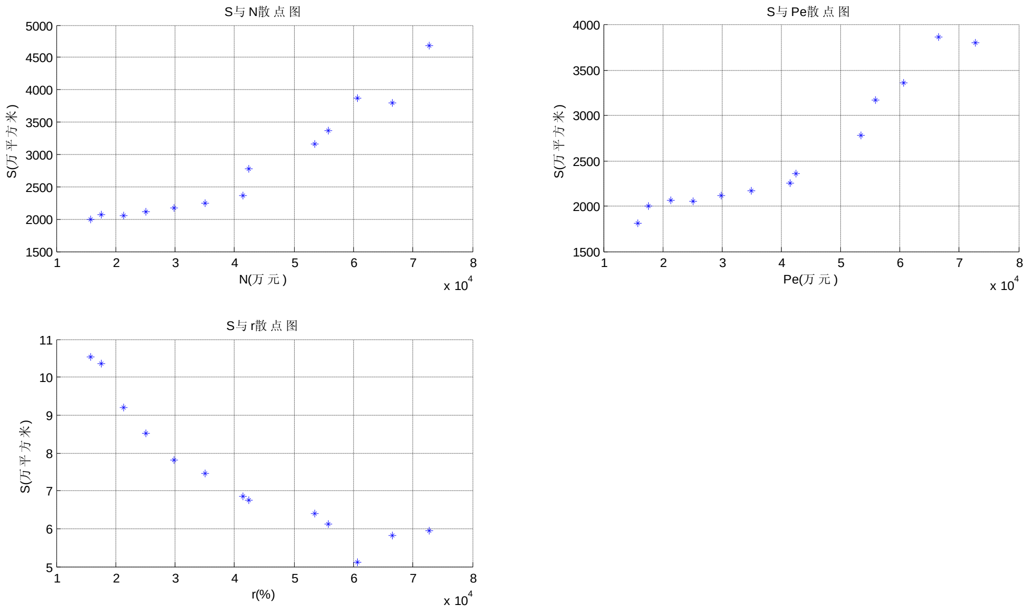


图 4-7 住房供给回归模型散点图

5、房地产行业态势分析模型

5.1 中国房地产现状发展系统的非线性动力学模型

为了研究中国目前房地产的经济发展状况，本文用住房需求模型和供给模型两部分组成的宏观动态模型来进行模拟，具体模型为：

$$\begin{cases} \dfrac{D'}{D}=\alpha-\beta\dfrac{D}{S},\alpha,\beta>0 \\ S=AD^{a},A>0,a\in(0 \end{cases} \qquad (5\text{-}1)$$

此处，S 为商品房的供给，D 表示商品房的需求，且 S 和 D 均为时间函数，α，β 为方程系数，A 为人均经济支配能力，a 表示商品房供给产出的弹性。其离散化形式已由美国经济学家Stutzer给出：

$$D_{t+1}=D_t[(1+\alpha)-\beta N_t^{1-\alpha}/A], \qquad (5\text{-}2)$$

在宏观经济中，令 $S_t=G_t/L_t$，$D_t=K_t/L_t$ 分别表示就业人员人均 GDP 和人均全社会固定资产投资。根据Haavelmo（1954）经济增长模型，将 $S_t=G_t/L_t$ 代入到（5-2）得到：

$$\left[\frac{G_{t+1}}{L_{t+1}A}\right]^{1/a}=\left[\frac{G_t}{L_tA}\right]^{1/a}\left[(1+\alpha)-\frac{\beta}{A}\left(\frac{G_t}{L_t}\right)^{\frac{1-a}{a}}\right]。 \qquad (5\text{-}3)$$

考虑商品房需求量的增加对房地产投资 R 的依存度：

$$K_t=\frac{R_t}{G_t}, \qquad (5\text{-}4)$$

该指标反映GDP对房地产投资的需求水平，也反映房地产投资对国民经济的参与度。对（5-4）式做适当变换，再代入到（5-3）式，可以得到如下关于房地产投资的非线性动力学模型：

$$\left[\frac{R_{t+1}}{K_{t+1}L_{t+1}A}\right]^{\frac{1}{a}}=\left[\frac{R_t}{K_tL_tA}\right]^{\frac{1}{a}}\left[(1+\alpha)-\frac{\beta}{A}\left(\frac{R_t}{K_tL_tA}\right)^{\frac{1-a}{a}}\right], \tag{5-5}$$

令 $u_t=\left[R_t/K_tL_tA\right]^{1/a}$ 本文可以求得

$$u_t=u_t\left[(1+\alpha)-\beta u_t^{1-a}/A\right], \tag{5-6}$$

令 $u_t=u_t\left[A(1+\alpha)/\beta\right]^{\frac{1}{1-a}}Y_t$ 可以求得

$$Y_{t+1}=(1+\alpha)Y_t\left(1-Y_t^{1-a}\right), \tag{5-7}$$

即它为一个简化了的关于房地产投资的 Logistic 类型的动力学方程，其中，a 和 α 的含义同上。

5.2 中国房地产现状发展系统的状态分析

在本文的研究当中，要搜集数据的变量主要是国内生产总值GDP，全社会就业人员总数 L，全社会固定资产投资 K ，以及历年房地产投资额 R。由于样本长度越长模拟效果越好，并考虑数据的可获得性及可靠性，本文选取中国在1986-2009年间的相关数据。数据来源于国家统计局的年度数据。表5-1给出了本文研究所要用到的原始数据。

表5-1 1997-2009年中国GDP、L 、K 和 R 数据

年份	GDP（亿元）	L（万人）	K（亿元）	R（亿元）
1997	78060.83	69600	24941.11	3178.37
1998	83024.28	70637	28406.17	3614.23
1999	88479.15	71394	29854.71	4103.2
2000	98000.45	72085	32917.73	4984.05
2001	108068.22	73025	37213.49	6344.11
2002	119095.69	73740	43499.91	7790.92
2003	135173.98	74432	55566.6	10153.8
2004	159586.75	75200	70477.4	13158.25
2005	185808.56	75825	88773.6	15909.25
2006	217522.67	76400	109998.2	19422.92
2007	267763.66	76990	137323.9	25288.84
2008	316228.82	77480	172828.4	31203.19
2009	343464.69	77995	224598.8	36241.81

利用以上数据，借助统计软件SPSS行参数估计，得出相关数据如表5-2所示，并且可以画出相应的参数估计树状图5-1。

表5-2 参数估计结果表

	GDP（亿元）	L（万人）	K（亿元）	R（亿元）
最大值	343464.69	77995	224598.8	36241.81
最小值	78060.83	69600	24941.11	3178.37
平均值	105643.49	67898	48488.17	8097.97
中值	80542.56	70119	26673.64	3415.34
标准差	97367.24	8545	58618.87	10334.8

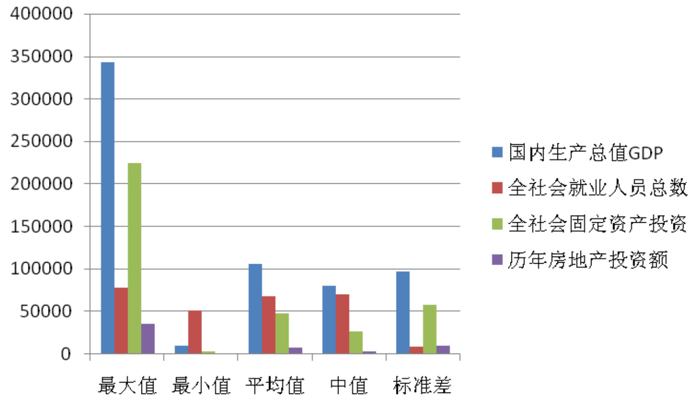


图5-1 参数估计树状图

借助统计软件SPSS进行参数估计，得出

$$A = 2.252, a = 0.806, \alpha = 0.44, \beta = 0.534$$ 。

将上述参数的估计值代入到（5-7），则有$Y_{t+1} = 1.44Y_t\left(1 - Y_t^{0.194}\right)$。

根据Stutzer的研究结论，在资本产出弹性a恒定的条件下，离散动力系统的长期演化状况随着系统参数α的变化呈现不同类型，见表5-3。

表5-3 离散系统的长期演化状况

α	系统状况
$0 < \alpha < 2/(1-a)$	稳定态
$2/(1-a) < \alpha < \alpha^c$	偶周期状态
$\alpha_c < \alpha < \alpha^*$	混沌状态

注：α_c为偶周期状态和混沌状态的临界点，即迭代的稳定解为周期无穷大时的α值。

根据参数估计值计算$2/(1-\alpha) \approx 10.309$，值落在$\left(0, \dfrac{2}{1-a}\right)$里面，因此认为目前中国房地产现状发展系统处于稳定状态。为了更好的发展中国房地产经济，本文需要该系统的经济一直处于稳定发展状态，以下本文研究它的可持续发展状况。

6、可持续发展模型

6.1 可持续房地产发展的内涵

可持续发展是指既满足现代人的需求又不损害后代人满足需求的能力。根据可持续发展的定义，本文将可持续房地产业发展定义为：房地产业可持续发展是指既满足现代人对房地产的需求，又要合理利用土地及各种资源，保护生态环境，不损害后代人满足房地产需求的能力。从宏观的角度研究房地产的可持续发展，它涉及了社会的人口、资源等很多领域，因此本文应将房地产可持续发展作为一个系统工程来研究。

可以看出房地产业可持续发展包括两方面含义：系统的核心部分是现代人对房地产的需求和将来的人对房地产的需求，具体来说，房地产业的发展既要满足当代人对住房，以及他们进行经济活动所需的各种其他房地产产品，如办公楼、厂房、商店、基础设施等的需求，又要满足子孙后代未来发展的需要。从需求层次上是现代人优先于将来人的，因为人类首先要满足自身的生活所需，在其本需求满足的前提下，才能够考虑后代的需

求，因此现代人类具有优先权，但是不能随意满足自身泛滥的房地产需求，必须考虑到将来人，实现房地产业的可持续发展。

6.2 基于模糊物元的可持续房地产业发展模型介绍

6.2.1 模糊物元的概念

给定事物M，它关于特征C有量值为u，以有序三元组$R=(M,C,X)$作为描述事物的基于元，称为物元。如果其中量值X具有模糊性，则称物元R为模糊物元。记作：$R=\begin{bmatrix} & M \\ C & X \end{bmatrix}$。式中：$R$为模糊物元，$M$为事物，$C$为事物$M$的特征，$X$为与事物特征$C$相应的模糊量值，也就是事物$M$对于其特征$C$相应量值的隶属度。通常本文把$m$个事物的$n$维物元组合在一起，构成$m$个事物的$n$维复合模糊物元$R_{mn}$，即：

$$R_{mn}=\begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_n \\ C_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ C_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{6-1}$$

式中R_{mn}为m个事物的n个模糊特征的复合物元；M_j为第j个事物$j=1,2,...,m$；C_i为第i个特征$i=1,2,...,n$；x_{ji}为第j个事物第i个特征对应的模糊量值。

6.2.2 从优隶属度模糊物元

用从优隶属度原则所算出的隶属度u_{ji}代替x_{ji}，则可构成从优隶属度模糊物元R_{mn}。

$$R_{mn}=\begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_n \\ C_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ C_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m & u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} \tag{6-2}$$

式中，u_{ji}表示第j个事物第i个特征相应的隶属度，可由从优隶属度原则予以确定:

$$\text{效益型指标:}\ u_{ji}=\frac{x_{ji}}{\max x_{ji}}，\text{成本性指标:}\ u_{ji}=\frac{x_{ji}}{\min x_{ji}}。\tag{6-3}$$

6.2.3 标准模糊物元与简单差绝对值复合模糊物元

由（6-2）式可构成标准方案n维模糊物元R_{0n}，其中各项由R_{mn}内各评价指标的从优隶属度的最大值或最小值加以确定，即

$$R_{0n}=\begin{bmatrix} & M_0 \\ C_1 & u_{01} \\ C_1 & u_{02} \\ \vdots & \vdots \\ C_1 & u_{0n} \end{bmatrix} \tag{6-4}$$

式中，M_0表示标准方案，u_{0i}表示标准方案第i项指标的相应从优隶属度。若以Δ_{ij} $\left(i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m\right)$表示标准模糊物元$R_{0n}$与复合从优隶属度模糊物元$R_{mn}$中各项差的绝对值，则构成简单差绝对值复合模糊物元$R_{\Delta}$，表示为:

$$R_{mn}=\begin{bmatrix} & M_1 & M_2 & \cdots & M_n \\ C_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ C_2 & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m & \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \dots & \Delta_{mn} \end{bmatrix} \quad （6\text{-}5）$$

其中，$\Delta_{ji}=|u_{0i}-u_{ji}|$。

6.2.4 熵权的确定

信息系统中的信息熵是信息无序度的度量，熵值越小，系统无序程度越小，故可用信息熵评价所获系统信息的有序度及其效用。由评价指标值构成的判断矩阵来确定指标权重，可尽量消除各指标权重计算的人为干扰，使评价结果更符合实际。熵权的计算步骤如下:

a.构建 m 个事物 n 个评价指标的判断矩阵 R： $R=(x_{ji})_{mn},(i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m)$；

b.将判断矩阵进行归一化处理，利用下式得到归一化判断矩阵 B: $b_{ij}=\dfrac{x_{ij}-\min x_i}{\max x_i-\min x_i}$，式中，$\max x_i$ 和 $\min x_i$ 各为同一评价指标下不同事物中最满意者或最不满意者（越大越满意或越小越满意）；

c.根据熵的定义，m 个评价事物 n 个评价指标，评价指标的熵为:

$$H_i=-\frac{1}{Inm}[\sum_{j=1}^{m}(f_{ij}\ln f_{ij})],\ f_{ij}=b_{ij}/\sum_{j=1}^{m}b_{ij},$$

显然，当 $f_{ij}=0$ 时，$\ln f_{ij}$ 无意义，因此对 $f_{ij}=0$ 的计算加以修正，将其定义为: $f_{ij}=b_{ij}/[\sum_{j=1}^{m}(b_{ij}+1)]$；

d.计算评价指标熵权 $W=(w_i)_{1\times n}$，其中: $w_i=H_i/\left[n-\sum_{i=1}^{n}H_i\right]$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。

可见，利用熵值法计算各指标的权重，其本质是利用各指标所含信息有序度的差异性。指标内样本值的差异性越大，指标权重就越大。

6.2.5 贴近度和综合评价

贴近度是反映评价样品与标准样品间相互接近的程度。其值越大表示越接近；反之则相离较远。从而，可依据贴近度大小对评价样品进行优劣排序或进行类别的划分。在这里，本文采用欧氏贴近度 $\rho H_j(j=1,2,...,m)$ 作为评价标准，运用 $(\cdot,+)$ 算法来计算和构建贴近度复合模糊物元 $R_{\rho H}$

$$R_{\rho H}=\begin{bmatrix} & M_1 & \cdots & M_m \\ \rho H_j & \rho H_1 & \cdots & \rho H_m \end{bmatrix}, \quad （6\text{-}6）$$

式中 ρH_j 为贴近度模糊物元矩阵 $R_{\rho H}$ 中的第 j 个度:

$$\rho H_j=1-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta_{ij}},(j=1,2,...,m) \quad , \quad （6\text{-}7）$$

得到贴近度模糊物元矩阵 $R_{\rho H}$ 后，评价样本属于哪个评价标准，可以用 ρH_j 之间的欧氏距离来判断。

6.3 基于模糊物元的可持续房地产业发展模型

6.3.1 评价指标的构建

可持续房地产发展评价指标体系的建立是区域房地产可持续发展评价的前提和基础。只有建立科学的评价指标体系，才能对房地产可持续发展状况做出客观正确的评价。本文依据以下几个原则：a. 全面性与代表性相结合；b. 定性分析与定量分析相结合，定量为主，定性指标尽转化为定量指标；c. 科学性与可操作性相结合；d. 动态性与静态性相结合。由于数据有限本文选取房地产可持续发展体系中资源环境、经济、社会可持续发展 3 个系统层的 3 个指标作为综合评价指标。本文在保证评价指标体系科学性的基础上更注重其完备性，即将系统分为 3 个层次，区域的总体房地产可持续为第 1 层次，系统层为第 2 层次，指标层为第 3 层次，并以"非常协调"、"协调"、"基本协调"、"不协调"、"极不协调"作为体系的评价标准，标准阈值的确定参考了国家统计局是数据资料。

6.3.2 模型的建立

按照表6-1中评价标准提供的数据，利用Matlab7.0编程进行计算和评价。

表6-1 房地产可持续发展评价体系

评价指标体系		人均国内生产总值（万元/人）	城镇居民人均建筑面积（m^2/人）	房地产业增加值（亿元）
评价标准阈值	2009年指标值	25575.5	29.5	18654.7
	非常协调	35000	30	22350
	协调	30120	28	20135
	基本协调	24200	26	17120
	不协调	19546	24	14320
	极不协调	14560	22	11250

根据上述理论和评估指标体系， 对房地产可持续发展评价的步骤如下:

（1）确定复合模糊物元。将上表中的评价指标值作为物元， 根据公式（6-1）构造复合模糊物元如下:

$$R_{6\times3}=\begin{bmatrix}25575.5 & 29.5 & 18654.7\\ 35000 & 30 & 22350\\ 30120 & 28 & 20135\\ 24200 & 26 & 17120\\ 19546 & 24 & 14320\\ 14560 & 22 & 11250\end{bmatrix},$$

（2）确定评价指标权重。由上面公式可以构造出从优隶属度矩阵，平方差矩阵，房地产可持续评价的熵权，得权重集为：

$$w=(w_1,w_2,w_3)=(0.4376,0.3162,0.2462)\text{ 。}$$

（3）计算欧氏贴近度。根据公式（6-7）得到各方案的欧氏贴近度（见表6-2）:

表6-2 评价样本的贴近度

	2009年	非常协调	协调	基本协调	不协调	极不协调
$R_{\rho H}$	02374	0.4970	0.3872	0.2389	0.1407	0.0312

6.3.3 结果分析

由表6-2可以看出,贴近度从大到小的排序中国2009年可持续房地产状况处在“协调”和“基本协调”之间。从欧氏距离来看，成都市2006年可持续房地产状况与“协调”之间的欧氏距离为0.1478，而与“基本协调”之间的欧氏距离为0.0015，由此得出，中国2009年可持续房地产状况应属于“协调”。说明房地产可持续发展状况调和，可持续房地产发展超前型、保持生态环境承载力阀值内，短期内可以接受。评价结果表明了基于熵权的模糊物元模型应用在可持续房地产状况综合评价中是合理可行的，且计算简便实用。

类似的方法本文可以求得这几年中国房地产的可持续发展状况。运用模糊物元模型来评价可持续房地产发展状况，既可从纵向上衡量某城市可持续房地产发展的变化趋势，又可从横向上比较不同城市可持续房地产发展的相对优良状况。

利用熵值理论计算熵权，可以从数据本身所反映的信息无序化效用值得到权重系数，从而可有效地减小评价的主观性，评价结果更加客观，而且易实现计算机编程，应用前景广阔。

7、宏观调控模型及成效分析

7.1 模型准备

为了建立有效的宏观调控模型，本文首先想到可以建立倒向微分方程。但是倒向常微分方程是倒向随机微分方程的一种退化，所以在此本文先介绍一下倒向随机微分方程，为本文的倒向常微分方程模型做好理论准备。倒向随机微分方程（BSDE）的标准形式为

$$y_t = \xi + \int_t^T g\left(s, y_s, z_s\right) \mathrm{d}s - \int_t^T z_s \cdot \mathrm{d}B_s, \quad t \in \left[0, T\right]$$

其中 $\xi \in L^2\left(\Omega, F_T, P\right)$ 称为终端条件，$T < +\infty$ 称为终端时间，生成元 g 是一个四元实值函数， $g\left(\omega, t, y, z\right): \Omega \times \left[0, T\right] \times R \times R^d \to R$， B 为 d 维标准布朗运动。它的非线性形式由我国著名院士彭实戈和法国院士 Pardoux [16]给出，并在生成元关于 y, z 一致 Lipschitz 条件下证明了解的存在唯一性。

BSDE 一般应用与金融投资、经济的效用函数等领域中。文献[17]介绍了它的直观解释，在将来的某一时刻 T 想要达到一个具体的目标 ξ，那么现在应该做哪些准备。

其中的 y, z 都是随机变量，最后一项 $\int_t^T z_s \cdot \mathrm{d}B_s$ 可以看做随机扰动项。当 y, z 都退化为仅与时间 t 有关的一元函数，去掉随机扰动项时，就退化为倒向常微分方程，而此时，其方程的直观解释并没有改变。

7.2 三维耦合微分方程动力学模型

为了抑制房价的上涨，或者调节房地产业的持续发展，政府需要对房地产业进行宏观调控，对房地产业进行强行干预。但是此时，政府的调控需要定量的分析而不能单纯依靠定性的结论。所以本文希望通过具体的数学模型，得到相应的数值采取详细的调控策略。

此处，本文假设居民的住房需求 D 为时间 t 的函数 $D(t)$，住房供给 S 为时间 t 的函数 $S(t)$，房价格 N，人均消费性支出为 C，贷款利率为 γ。需要注意的是，此处的时间为离散时间，即时间为年，以每年作为时间的坐标。为了使政府能够宏观调控，本文假设：（1）$N(t)$ 的时间变化率，与住房供给，住房需求成正的线性相关，而与人均消费性支出成负的线性相关，与贷款利率成二次负相关；（2）如果房价越高，那么根据实际情况，住房需求应该降低；（3）如果住房需求越高，那么应该使住房的供给变大，以保证居民的正常生活需求。

政府为宏观调控，设定房价基数为 N_m，住房需求基数为 D_m，根据前面的假设，本文可以得到关于房价、住房需求与住房供给的三维耦合微分方程动力学模型：

$$\begin{cases} dN/dt = (S+D-C)N-\gamma N^2 \\ dD/dt = \delta(N_m - N) \\ dS/dt = k(D-D_m) \end{cases} \tag{7-1}$$

其中：$\delta, k>0$ 为比例系数。

通过对模型（7-1）应用文献[1]中介绍的 Routh-Hurwitz 判别准则、稳定性判别法，以及极值分析，本文有：

定理 7.1 当 $N_m > k\gamma$ 时，三维耦合微分方程动力学模型（7-1）有稳定的平衡点：

$$\left(N^*, D^*, S^*\right) = \left(N_m, D_m, C-D_m+\gamma N_m\right)。$$

近一步地，政府给定的房价基数 N_m 是近期住房需求达到极大值时的房价，并且房价的变化量可以估计为

$$N_m < N(t) < \frac{S_m + D_m - C}{\gamma}, \quad (t > t_m),$$

其中 $S_m > S^*$ 是 t_m 时刻的住房供给。

证：设（7-1）式的右端为零，可以得到其平衡点为：

$$\begin{pmatrix} -\gamma N_m & N_m & N_m \\ -\delta & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix},$$

它的特征方程为：

$$\gamma^3 + 2N_m\gamma^2 + \delta k N_m = 0, \tag{7-2}$$

由于 $\gamma N_m > 0$，$\delta k N_m > 0$，故当 $N_m > k/\gamma$ 时，有方程（7-2）的系数满足：

$$N_m \cdot \gamma\delta N_m - \delta k N_m = \delta N_m\left(\gamma N_m - k\right) > 0。$$

于是，根据 Routh-Hurwitz 判别准则，方程（7-2）的所有特征根均具有负实部；再根据微分方程平衡点的稳定性判别定理[1]，知平衡点是稳定的。

为证明第二个结论，本文利用函数的极值判别法进行证明。设模型（7-1）在时刻 t_m 达到房价 N_m，则有 $dD/dt=0$，而此时房价上升的条件是 $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=t_m} > 0$。从而有 $d^2N/dt^2 < 0$，从而政府制定的房价基数 N_m 是住房需求达到极大值 D_m 时的需求面积。最后再由模型（7-1）的第一个方程得知

$$N_m < N(t) < \frac{S(t)+D(t)-C}{\gamma} < \frac{S(t)+D_m-C}{\gamma}, \quad (t>t_m) \tag{7-3}$$

又由 $D(t)\le D_m$ 知 $dD/dt\le 0$，故 $S(t)$ 是一个单调递减的函数，于是 $S(t)\le S(t_m)\le S_m$（当 $t>t_m$）时，将其带入（7-3）式便得到住房需求的估计式。

最后再由稳定性结果，对 $S(t)\le S(t_m)=S_m$，取 $t\to\infty$ 时的极限，就得到 $S_m>S^*$。□

根据定理 7.1，政府对房价的调控原则是：只要政府参照近期住房需求的极大值，去确定房价基数，那么房价就会稳定在基数上。又由定理 7-1 的估计式可知，房价在基数左右变化时，要综合考虑住房需求，住房供给和贷款利率的情况。

现在转而研究另外一种政府调控行为。如果在住房需求较高（较低）时，政府采取减少（加大）住房供给进行宏观调控的话，亦即把模型（7-1）的第三个方程改为：

$$\frac{dS}{dt}=k(D_m-D),$$

那么本文得到相应的三维耦合微分方程动力学模型如下：

$$\begin{cases} dN/dt=(S+D-C)N-\gamma N^2 \\ dD/dt=\delta(N_m-N) \\ dS/dt=k(D_m-D) \end{cases} \tag{7-4}$$

根据文献[1]所给出的代数方程的所有根均具有负实部的必要条件，为了避免模型（7-4)平衡点的不稳定性，把模型(7-1)中的第二个和第三个方程中的绝对变化率 dD/dt 与 dS/dt 分别改为相对变化率 $\frac{1}{D}\cdot\frac{dD}{dt}$ 和 $\frac{1}{S}\cdot\frac{dS}{dt}$，那么本文就得到改进的关于房价，住房需求与住房供给之间的三维耦合微分方程动力学模型如下：

$$\begin{cases} dN/dt=(S+D-C)N-\gamma N^2 \\ dD/dt=\delta(N_m-N)D \\ dS/dt=k(D_m-D)S \end{cases} \tag{7-5}$$

其中 $\delta,k>0$ 为比例系数。

仍然根据 Routh-Hurwitz 判别准则和稳定性判别方法，以及极值分析，本文有如下定理。

定理 7.2 三维耦合微分方程动力学模型（7-5）有平衡点：

$$(N^*,D^*,S^*)=(N_m,D_m,C-D_m+\gamma N_m), \tag{7-6}$$

平衡点（7-6）稳定的必要条件为：

$$S^*>D_m;\quad \max\left\{D_m\frac{k}{2\gamma+\delta},D_m\left(\frac{k}{\delta}+\frac{k-1}{2\gamma}\right)\right\}<N_m<\frac{S^*-D_m}{2\gamma}。$$

近一步地，本文有房价的价格估计为：

$$N_m<N(t)<\frac{S(t)+T(t)-C}{\gamma},\quad (t>t_m)。 \tag{7-7}$$

证：设（7-5）式右端为零，同定理 7-1，可以得到（7-5）式得平衡点为（7-6）式。模型（7-5）在（7-6）处的线性化系统的矩阵为：

$$
\begin{aligned}
&\gamma^3+\left[\left(2\gamma+\delta\right)N_m-kD_m\right]\gamma^2+\left[2\gamma\delta N_m^2-D_mN_m\left(2\gamma k+k\delta-\delta\right)\right]\gamma \\
&\quad+\delta kD_mN_m\left(S^*-D_m-2\gamma N_m\right)=0,
\end{aligned}
\tag{7-8}
$$

根据文献[1]所给出的袋鼠方程所有根均具有负实部的必要条件，本文有代数方程（7-8）的所有根具有负实部的必要条件是方程（7-8）的所有系数均为正，即：

$$
\begin{aligned}
&\left(2\gamma+\delta\right)N_m-kD_m>0;\\
&2\gamma\delta N_m^2-D_mN_m\left(2\gamma k+k\delta-\delta\right)>0;\\
&S^*-T_m-2\gamma N_m>0.
\end{aligned}
$$

再根据平衡点稳定性的判别方法，本文可以得到平衡点稳定的必要条件。

对模型（7-5）利用函数极值分析，可以得到房价的估计式为（7-7）。 □

定理 7.2 对政府进行宏观调控具有重要的指导意义。事实上，要达到制定的房价，住房需求，住房供给的稳定状态，必须要求住房供给大于住房需求（对应于 $S^*>D_m$ ），而不是住房供给与住房需求相等，因为房地产是一个动态的行业，必须由一种因素调动另一种因素而达到动态的平衡；而且当贷款利率变的很低（ $\gamma\to\infty$ ，即贷款利率高）时，政府规定的房价基数可以控制在一个较大的范围内，它对应于估计式（7-7）的第二个条件。

在此，本文需要指出，由 Routh-Hurwitz 判别准则还可以得到（7-8）的所有根均具有负实部的充分条件，但是条件复杂，不适用与实际应用，因此此处不做讨论。而且，定理 7-2 的估计式要比定理 7-1 的弱。

根据上面两种情况得到的房价调控结果，本文还需要根据前文建立的住房需求和住房供给模型，对具体影响因素进行调节，已达到政府宏观经济调控的成效。找出具体每个因素该如何调节之后，本文需要带入可持续发展模型中进行检验，查看调控的结果是否能够维持可持续发展，如果可以维持，说明此宏观经济调控是合理的，否则是失败的。

然而本文建立的三维耦合微分方程动力学模型并不能找出精确解，只能通过计算机找出数值解或者使用仿真技术找到逼近解。一般采用的方法为 Euler 方法找到微分方程的数值解。

下面本文使用 Euler 方法求得房价，住房需求，住房供给的数值解，根据前文建立的住房需求和供给模型，给出具体的宏观经济调控策略，再用可持续发展模型进行检验，模拟调控的成效。

7.3 正向调控具体策略及成效

本文只根据定理 7-1 求解模型给出调控策略，模拟其调控成效，另外一种调控策略与其类似。为了方便计算，本文指定系数 δ,k 均为 0.5（此处只是为了方便编程和计算，实际具体数值应根据实际情况和政府调控目的而定），贷款利率 $\gamma=5.94\%$（超过五年的中长期贷款），假设政府指定商品房房价基数为 $N_m=4800$ 元/平方米，住房需求基数 $D_m=11000.0$ 万平方米，根据给定数据，本文可以得到当前即 2009 年的商品房房价 $N_0=4681$ 元/平方米，当前的住房需求 $D_0=94755$ 万平方米，住房供给 $S_0=75961$ 万平方米，人均消费性支出 $C_0=3993.45$ 元，目标是调控未来第三年即 2012 年的房地产行业。那么本文通过计算机编程，使用 Euler 算法求解三维耦合微分方程动力学模型（7-1），得出第三年的商品房房价为 $N=4927$ 元/平方米，住房需求 $D=108645$ 万平方米，住房供给 $S=78361$ 万平方米。

接下来，本文根据住房需求和供给模型，调整各个因素的数值，得到调控之后的住房需求和住房供给，带入到可持续发展模型，并与没有调控前的数据进行对比，可以得出调控结果，如表 7-1 所示。

表 7-1 三维耦合微分方程动力学模型调控策略成效对比

	调控前	调控后
房价（元/平方米）	4681	4927
住房需求（万平方米）	94755	108645
住房供给（万平方米）	75961	78361
可持续发展情况	0.2374 （即基本协调）	0.3294 （即协调）

表 7-1 的结果说明，经过正向宏观模型的宏观经济调控，通过住房需求、住房供给和可持续发展模型的模拟，说明此调控是合理的，能够保证可持续发展的，而且说明了政府的宏观经济调控是房地产行业发展的一种辅助。

7.4 倒向常微分方程模型

7.3 节建立的调控模型是一种正向的调控，即根据目前的态势，目前的各种因素，进行调控，以达到某一效果，但是这个效果是未知的，并不确定的，可能调控效果有效，也可能无效。这使得调控具有不确定性。那么能否建立一种可以在确定调控结果的前提下，找出调控策略呢？这使本文想到了“倒向随机微分方程模型”，即确定了将来某一确定时刻想要达到的目标，求解为达到目标现在应该做哪些准备的随机微分模型。但是，针对于此房产问题，不涉及随机变量，所以本文只考虑倒向常微分方程（即退化的倒向随机微分方程）。

仍然根据 7.3 节建立的三维耦合微分方程动力学模型，在方程（7-1）中，令第一个方程中的 S,D,C 用当前时刻 t=0 的住房供给面积 S_0，住房需求面积 D_0 和人均消费性支出 C_0 替换，而且政府为了达到具体的宏观经济调控，想要使房价在未来的 T 时刻达到 ξ，那么对于房价的倒向常微分方程为：

$$\mathrm{d}N=\left(S_0+D_0-C_0\right)N\mathrm{d}t-\gamma N^2\mathrm{d}t,\qquad N_T=\xi, \tag{7-9}$$

模型（7-9）与模型（7-1）最大的不同在于终端条件，模型（7-1）的终端条件是已经现在时刻的房价，求解调控的具体数值，而调控的效果不能预测；模型（7-9）的终端条件是将来某一时刻经过调控之后房价所要达到的具体数值，求解为了达到这一数值现在时刻应该做哪些调整，这样可以先根据调控效果得到房价的调控数值，从而确定调控具体策略，换句话说，模型（7-9）得出的调控决策更具有目标性。

要想得到具体的调控策略，还需要根据前文建立的住房需求和住房供给模型。根据（7-9）只能得出调整房价的具体数值，然后将（7-9）得出的 N_0 带入到

$$\mathrm{d}D=\delta\left(N_0-N\right)\mathrm{d}t\,, \tag{7-10}$$

因为住房需求是一种刚性需求，即居民在任何情况下都有住房需求，它的调控并不能由政府直接进行干预，只能通过间接策略，所以（7-10）仍然是一个正向的常微分方程。

接下来，根据住房需求来调整住房供给，需要这样考虑，（7-10）的解是将来 T 时刻的住房需求，在房地产行业这个动态的系统中，在 T 时刻的供给也应该满足住房的需求，为了达到这个目标，也应该建立一个倒向微分方程来求得现在应该如何调节住房的

供给，设定住房供给在T时刻的终端值为s。本文将（7-10）的解D_T替换（7-1）第三个方程中的D_m，于是，得到如下模型

$$\mathrm{d}S = k\left(D - D_T\right)\mathrm{d}t, \quad S_T = s \text{。} \qquad (7\text{-}11)$$

综合方程（7-9）（7-10）（7-11）可以得到关于房价，住房需求与住房供给的**倒向常微分方程模型**

$$\begin{cases} \mathrm{d}N = \left(S_0 + D_0 - C_0\right)N\mathrm{d}t - \gamma N^2 \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}D = \delta\left(N_0 - N\right)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}S = k\left(D - D_T\right)\mathrm{d}t \\ N_T = \xi \\ S_T = s \end{cases}$$

为求解此模型，本文仍然使用 Euler 法进行求解，得到房价，住房需求和住房供给的数值解，然后继续使用住房需求和供给模型找出各个因素的具体调节量，再使用可持续发展模型进行检验。倒向常微分方程模型的检验与三维耦合微分方程动力学模型的检验意义不同：后者，是调控现在的房地产情况，检验将来某一时刻的房价，住房需求和住房供给是否满足可持续发展；而前者，是为达到将来的某一具体目标，调控现在房地产情况，检验的是当前调控后是否满足可持续发展。

7.5 倒向调控具体策略及成效

为了方便计算和比较本文采用 7.3 节的数值，本文指定系数δ, k均为 0.5（此处只是为了方便编程和计算，实际具体数值应根据实际情况和政府调控目的而定），贷款利率$\gamma = 5.94\%$（超过五年的中长期贷款），假设政府指定在将来的第三年即 2012 年，商品房房价为$N_T = 4800$元/平方米，住房供给$S_T = 78361$万平方米，这是要调控的目标；且当前住房需求$D_0 = 94755$万平方米，人均消费性支出$C_0 = 3993.45$元。

现在本文通过计算机编程，使用 Euler 算法求解倒向常微分方程模型，得出的解，即为，为达到上面的调控目标，本文现在需要如何调整，商品房房价应为$N_0 = 5031$元/平方米，住房供给$S_0 = 77231$万平方米，住房需求在第三年将达到$D_T = 99845$万平方米。

接下来，本文根据住房需求和供给模型，调整各个因素的数值，得到调控之后的住房需求和住房供给，带入到可持续发展模型，并与没有调控前的数据进行对比，可以得出调控结果，如表 7-2 所示。

表 7-2 倒向常微分方程模型调控策略成效对比

	调控前	调控后	三年后
房价（元/平方米）	4681	5031	4800
住房需求（万平方米）	94755	94755	99845
住房供给（万平方米）	75961	77231	78361
可持续发展情况	0.2374 （即基本协调）	0.2869 （即基本协调）	0.3987 （即非常协调）

表 7-2 的结果说明，经过倒向宏观模型的宏观经济调控，通过住房需求、住房供给和可持续发展模型的模拟，说明此调控是非常合理的，虽然在最近几年，其可持续发展水平变化不大，但是能够保证房地产业长期可持续发展。

8、模型的评价

8.1 模型的优点

1、模型充分考虑了当今我国住房需求与住房供给之间的关系，确定了影响房地产的主要因素并建立了非均衡计量经济学模型对其进行了分析；

2、在全面、宏观了解房地产市场及房地产投资的基础上，采用非线性动力学方法探索我国房地产行业当前态势，希望能对政府的宏观调控提供一些参考和建议。与以往的线性模型相比，避免了一些武断和误判；

3、模型中所用的数据主要来自与《中国统计年鉴》、国家统计局网站和以给出的参考数据，数据真实可靠；

4、模型中没有考虑房价模型和房地产行业与国民经济其他行业关系模型，而是抓住本质以独特的眼光以商品房为例进行了其它模型的讨论分析，观点鲜明，分析有据，结果明确；

5、模型中杜绝了苍白的纯文字说明，所有的论文分析都是建立在所得到数据之上，文章的思路清晰且具有很好的连贯性；

6、根据倒向常微分方程建立的宏观调控模型，可以在确定调控结果的前提下，找出具体调控策略。

8.2 模型的缺点

1、由于所得数据的限制，我们在建立模型时选取的指标不够广泛，也没有进行模型检验；

2、在考虑房地产市场的时候只考虑了商品房而没有考虑住宅房急经济适用房，还有待改进。

9、参考文献

[1] 钟学军. 房地产需求分析[J]. 科技信息，2010，(5):580-583.
[2] 张兵. 基于灰色理论的房地产需求分析—以安徽淮南市房地产市场为例[J]. 区域金融研究，2009，(9):66-68.
[3] 刘畅，从静，李民. 房地产需求的分析与预测[J]. 建筑管理现代化，2005，（3）:30-32.
[4] R.C.Fair and D.M.Jaffee， Maximum Likelihood Methods for Market Disequilibrium. Econometrica [J]，Vol.3， 1972， pp.497-515.
[5] 张军，孟令克. 哈尔滨市房地产市场供求分析 [J]. 建筑管理现代化，2007，43-45.
[6] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础 [M]. 长春：东北师范大学出版社，1994.
[7] Michael J.Stutzer. Chaotic Dynamics and Bifurcation In a Macro Model [J]. Journal of Economic Dynamics and Control， 1980， (2): 353-376.
[8] 北京市科学技术委员会. 可持续发展词语释义[M]. 北京: 学苑出版社， 1997.
[9] 张斌，雍歧东，肖芳淳.模糊物元分析 [M]. 北京: 石油工业出版社，1997.
[10] 肖芳淳. 模糊物元分析方法的研究. 模糊分析设计的理论与应用——第三届全国模糊分析设计学术会议论文集 [C]. 北京：中国建筑工业出版社，1993.
[11] 肖芳淳，张效羽，张鹏，姚安林. 模糊分析设计在石油工业中的应用 [J]. 北京：石油工业出版社，1993.
[12] 蔡文. 物元模型及其应用 [M] . 北京: 科学技术文献出版社， 1994: 17- 36.
[13] 刘志峰， 王淑旺， 万举勇. 基于模糊物元的绿色产品评价方法 [J] . 中国机械工程，2007，18(2) : 166.
[14] 陈俊. 基于非均衡理论的房地产市场有效供求总量分析—以武汉市为例 [J]. 决策&信息，2008，4-15.
[15] 陆启韶. 常微分方程的定性方法与分叉 [M]，北京：北京航空航天大学出版社，1989.
[16] Pardoux， E.， Peng， S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J]. Systems & Control Letters，1990，14， 55-61.
[17] 严加安，吴黎明等. 随机分析学选讲 [M]. 北京：科学出版社，1997.
[18] 罗登跃.基于非线性混沌动力学模型的宏观经济系统运行实证分析[J].数量经济技术经济研究，2005，(10):136-140.
[19] 闫莹，李敏强.基于竞合关系的网络组织演化动力学分析[J].系统工程，2009，(10):98-103.
[20] 史永东，赵永刚.证券市场非线性动力学模型及其模拟分析[J].财经问题研究，2009，(9):46-54.
[21] 陈彦光,周一星.中国城市化过程的非线性动力学模型探讨[J].北京大学学报:自然科学版，2007，(4):542-548.
[22] 王书宽.非线性动力学与混沌理论在经济学中的应用前景[J].生产力研究，2006，(7):20-21.

附录一（住房需求 matlab 程序）

```
%住房需求
S=[15819.7,17566.6,21410.8,25104.9,29867.4,34975.8,41464.1,42464.9,53417,55830.9,60606.7,66544.8,72677.4];
s1=[72677.4 66544.8 60606.7 55830.9 53417 42464.9 41464.1 34975.8 29867.4 25104.9 ];
%商品房本年销售价格
N=[1997,2063,2053,2112,2170,2250,2359,2778,3168,3367,3864,3800,4681];
%消费者对未来的预期
Pe=[1806,1997,2063,2053,2112,2170,2250,2359,2778,3168,3367,3864,3800];
%房地产总投资
Fe=[2443003,8418989,3024487,2155664,4717344,3255888,4082557,19747277,15964546,20100000,19670000,29034000,29067000];
%贷款利率
r=[10.53,10.35,9.21,8.51,7.81,7.46,6.86,6.76,6.39,6.12,5.11,5.83,5.94];
subplot(2,2,1)
scatter(S,N,'*')
title('S 与 N 散点图')
xlabel('N(万元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,2)
scatter(S,Pe,'*')
title('S 与 Pe 散点图')
xlabel('Pe(万元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,3)
scatter(S,Fe,'*')
title('S 与 Fe 散点图')
xlabel('Fe(元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,3)
scatter(S,r,'*')
title('S 与 r 散点图')
xlabel('r(%)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
```

住房供给 matlab 程序

```
%住房供给
S=[15819.7,17566.6,21410.8,25104.9,29867.4,34975.8,41464.1,42464.9,53417,55830.9,60606.7,66544.8,72677.4];
s1=[72677.4 66544.8 60606.7 55830.9 53417 42464.9 41464.1 34975.8 29867.4 25104.9 ];
%商品房本年销售价格
```

```
N=[1997,2063,2053,2112,2170,2250,2359,2778,3168,3367,3864,3800,4681];
%消费者对未来的预期
Pe=[1806,1997,2063,2053,2112,2170,2250,2359,2778,3168,3367,3864,3800];
%房地产总投资
Fe=[2443003,8418989,3024487,2155664,4717344,3255888,4082557,19747277,15964546,20100000,
19670000,29034000,29067000];
%贷款利率
r=[10.53,10.35,9.21,8.51,7.81,7.46,6.86,6.76,6.39,6.12,5.11,5.83,5.94];
subplot(2,2,1)
scatter(S,N,'*')
title('S 与 N 散点图')
xlabel('N(万元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,2)
scatter(S,Pe,'*')
title('S 与 Pe 散点图')
xlabel('Pe(万元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,3)
scatter(S,Fe,'*')
title('S 与 Fe 散点图')
xlabel('Fe(元)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
subplot(2,2,3)
scatter(S,r,'*')
title('S 与 r 散点图')
xlabel('r(%)')
ylabel('S(万平方米)')
grid on
```

附录二（Euler 法求微分方程数值解）

```
%这是 euler 的改进法的平均值求解法 euler.m
%E=euler(f,a,b,ya,m)
%input:
%f 表示微分方程函数式
%a,b 表示上下界
%ya 表示初值
%m 表示计算的步数
%output:
%E 计算的对应的范围的散点值

function E=euler(f,a,b,ya,m)
h=(b-a)/m;
t=zeros(1,m+1);
y=zeros(1,m+1);
t=a:h:b;
y(1)=ya;
for j=1:m
    k1=y(j)+h*feval(f,t(j),y(j));
    k2=y(j)+h/2*(feval(f,t(j),y(j))+(feval(f,t(j+1),k1)));
    y(j+1)=1/2*(k1+k2);
    %求平均值避免迭代
end
E=[t',y'];
```