

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 基于基扩展的快时变多径信道建模与估计

摘 要：

本文主要解决快时变多径信道建模与估计问题，主要完成工作如下：

1、建立了离散化时变信道的简化模型，能够同时反映出高速移动通信环境中的快时变与多径传播两种特性，模型如下：

$$\begin{aligned} \text{sub. } h_l(n) &= h_l(t) \Big|_{t=nT_s} \\ \text{s.t. } \begin{cases} h_l(t) = \sum_{k=1}^{K_l} s_{(l,k)} e^{j(2\pi f_{d_{(l,k)}}t + \phi_{(l,k)})} \\ l = 0, \dots, L-1 \\ n = 0, \dots, N-1 \\ N \leq \text{ceil}\left(\frac{T_c}{T_s}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

2、建立了快变信道的基扩展逼近模型，同时对基函数扩展阶数和系数进行优化，以进一步降低模型算法的复杂度；对三种典型的基函数（复指数基、离散卡-洛基和多项式基）进行了性能分析，推导了多项式基函数扩展阶数下限的显式表达式，可以证明在相关时间范围内，该下限为 2。仿真表明，2 阶多项式基函数逼近模型，在相关时间范围内，其归一化均方误差性能低于 10^{-4} 且随移动速度变化不大，具有很好的稳健性。

3、建立了适用于快变信道的帧格式优化模型，优化系统导频数，进一步提高系统的传输效率。复杂度分析表明，在相同条件下，离散卡-洛基信道估计算法复杂度最高。仿真结果表明，当阶数较低或导频数较大且已知信道的时域相关特性时，选择离散卡-洛基扩展逼近模型性能更优；综合考虑估计精度、算法复杂度和性能稳健性，多项式扩展逼近模型更优。同时，根据新的离散化时变信道模型，建立了基于 Jakes 模型的快变信道仿真器，仿真表明，本文所建模型对该仿真器产生的仿真数据具有很好的适用性。

4、搭建了一个实用的通信系统仿真平台，通过仿真系统的 BER 性能来进一步验证本文所建模型的有效性，仿真结果表明，基函数扩展阶数为 3，导频数为 10 的情况下，离散卡-洛基扩展逼近模型信道估计算法的 BER 性能最优，多项式基次之，复指数基最差。

目 录

1 引言.....	2
2 快时变多径信道特性分析与建模	2
2.1 衰落特性分析	3
2.2 离散化时变信道的简化模型	5
3 快变信道的基扩展逼近模型	6
3.1 复指数基 (CE_BEM)	8
3.2 离散卡-洛基 (DKL-BEM)	8
3.3 多项式基 (P-BEM)	9
4 基于基扩展模型的快变信道估计	12
4.1 快变信道帧格式优化设计.....	12
4.2 基于 Jakes 模型的快变多径信道仿真器	15
5 系统性能分析.....	18
5.1 系统模型和线性 MMSE 均衡	18
5.2 性能分析	20
6 结论与展望	21
参考文献	22
附录	22
附录 1 关于级数收敛特性的证明.....	22

1 引言

无线电信号通过移动通信信道时会经受不同类型的衰减损耗,大致可以分为三类^[1]:

- (1) 传播损耗: 又称路径损耗, 它指电波传播所引起的平均接收功率衰减。
- (2) 阴影衰落: 由于传播环境中的地形起伏、建筑物及其他障碍物对电波遮蔽所引起的衰落。
- (3) 多径衰落: 由于移动通信环境的多径传播而引起的衰落, 该衰落会使接收信号场强呈现快速变化的特征。有些文献也称该衰落为小尺度衰落。

从工程设计角度看, 传播损耗和阴影衰落合并在一起反映了无线信道在大尺度上对传输信号的影响, 它们对分析信道的可用性、选择载波频率以及越区切换等有重要意义, 且对移动无线网络规划也很重要。而小尺度衰落则与传输技术的选择和数字接收机的设计紧密相关, 因此, 多径衰落信道的建模和仿真是研究移动通信的重要研究方向。

传统的多径衰落信道建模主要考虑多径传播引起的时延扩展, 造成其接收信号在时域上波形展宽, 在频域上产生频率选择性衰落, 因此通常将多径信道建模成时变或缓慢时变的 **FIR** 滤波器, 即频率选择性信道或准静止(块衰落)频率选择性信道模型, 这在低速移动通信场景中是适用的^[2]。但是, 随着技术的发展和需求的提高, 移动通信对传输信号的带宽、速率和载体的移动性有了更高要求, 传统的多径衰落信道模型已经不能满足对新技术的有效设计和评估需要。例如, 在高速铁路、高速飞行器等通信应用场景中, 多径传播与移动台的高速运动除了造成多径时延扩展, 还会造成较大的多普勒扩展, 无线信道同时具有快时变和多径传播特性。信道模型只有能够同时反映出快时变和多径这两种特性, 才能更好地对高速通信环境中的无线信道进行估计, 并进一步地为通信系统其它模块(例如均衡器)的设计提供更精准的信道数据。

基于上述情况, 本文分析高速、超高速移动通信环境中的快时变与多径传播特性, 建立基于基拓展的快时变多径信道模型, 为快时变信道估计及均衡提供精准的数据支撑, 并搭建通信系统仿真平台以验证本文所建快时变多径信道模型的有效性。

2 快时变多径信道特性分析与建模

移动通信信道是色散信道, 即传输信号波形通过移动通信信道后, 信号在时域和频域上都产生色散, 本来分开的波形在时间上或频域上会产生交叠, 从而引起信号衰落。本文考虑移动通信信道在时频两域的色散情况, 并在此情况下建立

时变信道的数字离散化模型。

2.1 衰落特性分析

2.1.1 多径效应与时延扩展

在无线通信系统中，由于传播环境的复杂性，发射信号经历一系列的反射、散射、衍射等物理过程，最后通过多个路径到达接收设备，这样就导致了信号的多径传播。其传播特征如下图所示。

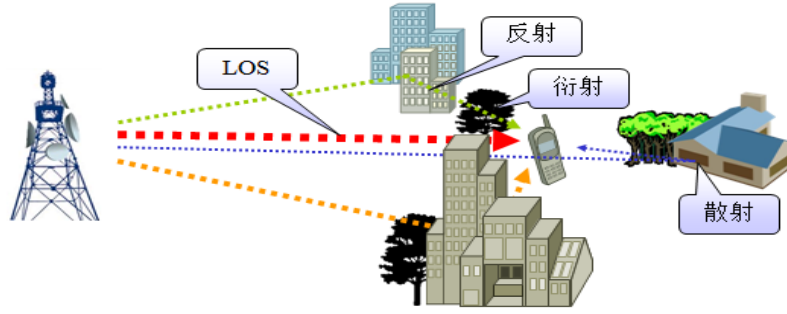


图1. 无线信道传播特征

图 1 中 LOS (line of sight) 是信号直接到达的传播路径。由于电波通过各个路径的距离不同，因而各条路径电波信号到达时间不同，相位也就不同。不同相位的多个信号在接收端叠加，有时同相叠加而增强，有时反相叠加而减弱。这样，接收信号的幅度将急剧变化，即产生了衰落，称为多径效应。

从发送端到接收端之间的传播特性可以用如下的时变冲激响应来表征^[2]：

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{N_0} a_i e^{j\phi_i(t)} \delta(\tau - \tau_i) \quad (1)$$

式中， N_0 为到达接收端的多径数量， a_i 和 τ_i 分别为第 i 个多径谐波分量的幅度和时延， $\phi_i(t)$ 为其在时间 t 的相移。

显然，多径效应在时域上会引起接收信号的时延扩展，使其波形展宽，反映在频谱上会导致接收信号在频域上产生频率选择性衰落，相关（干）带宽是描述该衰落特性的一个重要参数，当信号带宽大于相关带宽时就会发生频率选择性衰落。

2.1.2 多普勒效应与多普勒扩展

当移动台在运动中通信时，由于多普勒效应，接收信号的频率会发生变化，由此引起的附加频移称为多普勒频移。第 i 个多径分量的多普勒频移 $f_{d_i}(t)$ 可用

下式表示：

$$f_{d_i}(t) = \frac{v}{\lambda} \cos \theta_i(t) = \frac{vf_c}{c} \cos \theta_i(t) = f_m \cos \theta_i(t) \quad (2)$$

其中 c 为光速， f_c 为载波频率， v 为移动台移动速度， $\theta_i(t)$ 为运动方向与接收机电磁波的入射方向的夹角， f_m 为最大多普勒频移。

根据电磁波传播原理，式（1）中 $\phi_i(t)$ 显然与第 i 个多径分量的多径时延 τ_i 和多普勒频移 f_{d_i} 有关，即：

$$\phi_i(t) = 2\pi f_{d_i}(t)t + \varphi(\tau_i) \quad (3)$$

其中 $\varphi(\tau_i)$ 为由多径时延 τ_i 产生的相移， $2\pi f_{d_i}(t)t$ 为移动台移动产生的相移。

显然，多普勒效应在频域上会引起接收信号的频谱扩展，使其带宽展宽。假设移动台天线为全向天线，且入射角 α 服从 $[0, 2\pi)$ 的均匀分布，即多径电波均匀地来自各个方向，则接收信号功率谱可表示为^[2]

$$S(f) = \frac{2P_r}{w_m \sqrt{1 - \left(\frac{f - f_c}{f_m} \right)^2}} \quad (4)$$

其中， P_r 为所有到达电波的平均功率， $w_m = 2\pi f_m$ 。由（4）可知，接收信号的功率谱 $S(f)$ 的形状是 U 形的，称为 U 形谱。如图 2 所示为数据文件 1 中数据的功率谱密度函数曲线，可以直观的看出该信道的功率谱是 U 形谱。

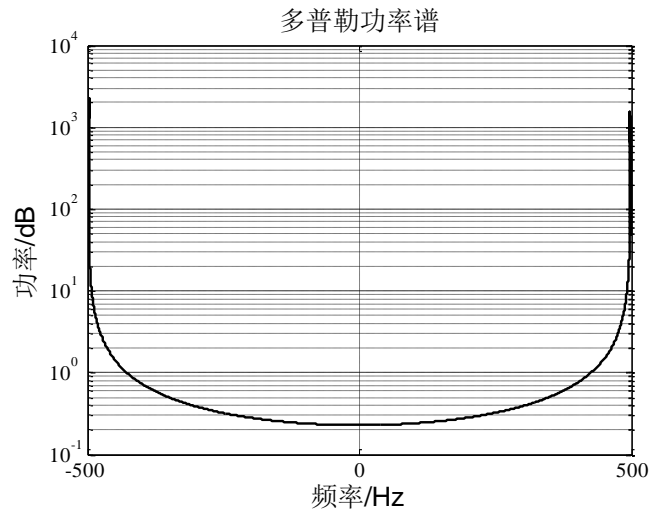


图2. 多普勒功率谱

由于移动性导致的多普勒效应反映在时域上会导致发送信号在时域上产生时间选择性衰落，相关（干）时间是描述该衰落特性的一个重要参数。相干时间定义为信道冲激响应维持不变（或一定相关度）的时间间隔。也就是说，相关时间是指在一段时间间隔内，两个到达信号具有较强的相关性。因此，相关时间表征了时变信道变化快慢程度。

由于时间相关函数与多普勒功率谱之间是傅里叶变换关系，由此由（4）可以推导出信号包络相关性与时间间隔的关系如下^[1]：

$$\rho = J_0^2(2\pi f_m \Delta t) \quad (5)$$

其中， ρ 为信号包络相关度， Δt 为时间间隔， $J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。

由此可得信号包络相关度为 0.5 时的相关时间为：

$$T_{c-0.5} \approx \frac{9}{16\pi f_m} \quad (6)$$

根据相关时间的表达式（6）可知，虽然信道是时刻变化的，但是其在相关时间范围内，仍具有较强的相关性（相关度为 0.5），因此可以利用有限个基函数的线性组合来描述一定时间（如相关时间范围）内的时变信道。下表给出了移动速度分别为 90Km/h、180Km/h、270Km/h 和 450Km/h 时，信道采样频率为 200KHz，信号包络相关度为 0.5 时，相关时间范围内的样点值数目：

表1. 不同速度下相关时间范围内的样点值数目

运动速度	90Km/h	180Km/h	270Km/h	450Km/h
相关时间范围内的样点值数目	143	71	47	28

从表中可以看出，随着移动速度的增加，信号的时变特性更强，相关时间范围内的样点值数目更少，即在高速运动的快时变信道条件下，系统需要频繁地使用训练信号进行信道估计，这部分信号不承载有用信息，过多的插入显然增加了传输系统的负担，同时降低了传输效率。因此，建立行之有效的快时变多径信道模型，减少训练信号的使用是十分有意义的。

2.2 离散化时变信道的简化模型

对于发射信号 $x(t)$ 和接收信号 $y(t)$ 来说，无线信道的作用可以写成：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(t - \tau) d\tau + w(t) \quad (7)$$

从上式可以看出，在任意时刻，接收端收到的信号为发送信号与若干个路径的卷积和。为了便于分析和数字离散化的需要，我们通常在接收端对接收信号以

T_s 为间隔进行采样。经过采样后，我们将到达接收端的路径分为两类，一类是**可分辨路径**，其多径时延差大于一个采样间隔，假设有 L 条；一类是**不可分辨路径**，其多径时延差小于一个采样间隔，显然经过采样后，每一条可分辨路径的采样值都是由若干个不可分辨路径合成的，假设第 l 条可分辨路径 ($l=0, \dots, L-1$) 由 K_l 条不可分辨路径组成。显然，有关系式：

$$N_0 = \sum_{l=0}^L K_l \quad (8)$$

这样在信道相关时间 T_c 范围内，接收信号的时间离散形式的数学表达式为：

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l(n)x(n-l) + w(n), n=0, \dots, N-1, \quad N \leq \text{ceil}\left(\frac{T_c}{T_s}\right) \quad (9)$$

式中 L 为信道可分辨路径数， N 为信道相关时间范围内的采样点个数， $\text{ceil}()$ 为向下取整， $w(n)$ 为信道噪声的采样值， $h_l(n)$ 就是第 l 条路径在第 n 点的信道参数。

根据以上分析，离散化时变信道参数 $h_l(n)$ 在信道相关时间 T_c 范围内可以用以下模型描述：

$$\begin{aligned} \text{sub. } h_l(n) &= h_l(t) \Big|_{t=nT_s} \\ \text{s.t. } \begin{cases} h_l(t) = \sum_{k=1}^{K_l} s_{(l,k)} e^{j(2\pi f_{d_l(k)}t + \phi_{(l,k)})} \\ l = 0, \dots, L-1 \\ n = 0, \dots, N-1 \\ N \leq \text{ceil}\left(\frac{T_c}{T_s}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $s_{(l,m)}$ 、 $f_{d_l(m)}$ 和 $\phi_{(l,m)}$ 分别是第 l 条可识别路径中第 k ($k=1, \dots, K_l$) 个不可识别路径谐波分量的幅度、多普勒频移和由多径时延产生的相移。

本文将该模型称为**模型一**，即**离散化时变信道的简化模型**。

3 快变信道的基扩展逼近模型

为了简化分析，本文以信道相关时间范围内单条可识别路径为例，对信道进行建模和分析，即忽略模型一 $h_l(n)$ 中的下标 l 。根据该模型，信道参数在 Δt

($\Delta t \leq T_c$) 的时间间隔内可以通过对下式抽样获得:

$$h(n) = \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)} \Big|_{t=nT_s} \quad (11)$$

然而, 在实际工程应用中, 直接获取 K 条不可识别路径谐波分量的各项参数是非常困难的, 我们需要对上述模型进行进一步的简化以便于求解。

显然 $h(n)$ 满足狄里赫利 (Dirichlet) 条件, $h(n)$ 可以展开为无穷级数求和的形式, 这样我们就可以使用某些基函数将 $h(n)$ 进行展开, 如下式所示:

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} b_m B_m(n) + \sum_{m=M}^{+\infty} b_m B_m(n) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} b_m B_m(n) + o(n) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $B_m(n)$ 为第 m 个基函数, b_m 为其基系数。从式中可以看出我们可以使用 $\sum_{m=0}^{M-1} b_m B_m(n)$ 来逼近 $h(n)$, $o(n)$ 为逼近误差。显然, 基函数阶数 M 越高, 误差 $o(n)$ 越小, 同样需要估计的基系数越多, 在实际通信系统也就意味着需要的训练序列长度越长, 算法复杂度越大。因此本文需要对基函数阶数 M 与逼近误差 $o(n)$ 之间进行一个折中, 即寻找满足一定逼近精度下的最小基函数阶数。本文使用归一化均方误差 $NMSE$ 来描述逼近精度, 有:

$$NMSE = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |h(n) - \tilde{h}(n)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2} \quad (13)$$

式中 N 为样点个数, $h(n)$ 为信道在第 n 个采样时刻的理想值, $\tilde{h}(n)$ 为逼近值, 这样, 在给定基函数类型情况下, 快变信道的基扩展逼近模型可以建立如下:

$$\begin{aligned} \text{sub. } \tilde{h}(n, M, \{b_m\}) &= \arg \min_{M=1, \dots, +\infty} M \min_{\{b_m\}} NMSE \\ \text{s.t. } \begin{cases} \tilde{h}(nn, M, \{b_m\}) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m B_m(n) \\ \text{归一化均方误差满足一定条件} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

本文将该模型称为**模型二**, 即**快变信道的基扩展逼近模型**。

下面, 本文针对几个常用基函数类型^[4,5], 对其快变信道下的基扩展模型进

行性能分析和仿真。

3.1 复指数基 (CE-BEM)

复指数基扩展模型 (CE-BEM) 采用傅里叶基来作为基函数，是比较常用的一类基函数，其基函数表达式为：

$$B_m(n) = e^{j\omega_m n}, \quad m = 0, \dots, M-1 \quad (15)$$

其中， M 为基扩展阶数， ω_m 为第 m 个傅里叶基的相位。一般情况下其傅里叶基的相位是从 $[-\pi, \pi]$ 范围内均匀取 M 个。

根据离散化时变信道模型，有：

$$h(n) = \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)} \Big|_{t=nT_s} = \sum_{k=1}^K (s_k e^{j\phi_k}) e^{j2\pi f_{d_k} t} \Big|_{t=nT_s} \quad (16)$$

从上式可以看出，复指数基的逼近程度很大情况取决于傅里叶基的相位能不能取到 $2\pi f_{d_k}$ ，显然 M 值越大，傅里叶基的频谱分辨率越高，取到 $2\pi f_{d_k}$ 的可能性越大；同样的， M 值越小，频谱泄露的可能性也就越大。考虑到 $2\pi f_{d_k}$ 的取值范围，可以将傅里叶基的相位范围进一步缩小到多普勒频谱扩展范围内，这样对于相同的基扩展阶数可以获得更高的频谱分辨率。

3.2 离散卡-洛基 (DKL-BEM)

对信道的归一化协方差矩阵 \mathbf{C} 进行奇异值分解，得到：

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中， $\mathbf{\Lambda}$ 是由矩阵 \mathbf{C} 的特征值按照从大到小的顺序组成的对角阵， \mathbf{U} 为各特征值对应的特征向量所组成的矩阵，取前 M 个特征值对应的特征向量组成离散卡-洛基的基函数矩阵：

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}(:, 1:(M+1)) \quad (18)$$

离散卡-洛基模型虽然是在最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE) 准则下的最优模型，但在使用 DKL-BEM 信道建模时必须已知信道的时间相关特性及协方差矩阵 \mathbf{C} 。

3.3 多项式基 (P-BEM)

定义函数 $f(t) = \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)}$ ，对其进行泰勒级数展开，有：

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)} \\
 &= \sum_{k=1}^K s_k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)]^i}{i!} \\
 &= \sum_{k=1}^K s_k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} [j^i \sum_{k=0}^i C_i^m (2\pi f_{d_k} t)^m \phi_k^{i-m}] \\
 &= \sum_{k=1}^K s_k \sum_{m=0}^{+\infty} t^m \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} t^m
 \end{aligned} \tag{19}$$

这样可以将信道进行 M 阶多项式扩展：

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \right) n^m + \sum_{m=M}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \right) n^m \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \right) n^m + o(n)
 \end{aligned}$$

其多项式基扩展系数 b_m 为：

$$b_m = \sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \tag{20}$$

逼近误差 $o(n)$ 为：

$$o(t) = \sum_{m=M}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=m}^{+\infty} s_k \frac{j^i \phi_k^{i-m} (2\pi f_{d_k})^m}{(i-m)! m!} \right) n^m \tag{21}$$

从上式可以看出，多项式基扩展模型的误差主要受到多普勒频移、相移、多项式的阶数等参数的影响。

定理一： 多项式基扩展的阶数 M 必须满足以下条件：

$$M \geq G \left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_m T_p + \pi)^2}}{4} \right) \tag{22}$$

其中， f_m 为最大多普勒频移， T_p 为逼近的信道长度。

证明：定义函数 $f(t) = \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)}$ ，根据泰勒级数展开有：

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^K s_k e^{j(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)} \sum_{n=0}^N S_n e^{j(w_d t + \phi_n)} \\
&= \sum_{k=1}^K s_k [\cos(2\pi f_{d_k} t + \phi_k) + j \sin(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)] \\
&= \sum_{k=1}^K \left[\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i s_k \frac{(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^{2i}}{(2i)!} + j \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i s_k \frac{(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

令

$$a(k, i) = (-1)^i s_k \frac{(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^{2i}}{(2i)!} \tag{24}$$

$$b(k, i) = (-1)^i s_k \frac{(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{25}$$

那么

$$h(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^K a(k, i) + j \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^K b(k, i) \tag{26}$$

由幂级数 $a(n, m)$ 的收敛特性（证明见附录 1）不难得知：对于一个固定的 k ，

总存在一个 i_{r_k} 满足 $a(k, i_{r_k}) = \max(|a(k, i)|)$ ， $i = 0, 1, 2, \dots$ ，此时有：

$$i_{r_k} = G \left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^2}}{4} \right) \tag{27}$$

同理对于一个固定的 k ，亦存在一个 i_k ，满足 $b(n, i_k) = \max(|b(n, m)|)$ ，此时有

$$i_k = G \left(\frac{-5 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_{d_k} t + \phi_k)^2}}{4} \right) \tag{28}$$

其中，定义函数

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \text{ceil}(x) + 1 & x > 0 \end{cases} \tag{29}$$

显然，为了降低逼近误差，多项式基扩展必须包含 $a(k, i_{r_k})$ 和 $b(n, i_k)$ 对应的

阶数项，也即多项式基扩展的阶数必须满足以下关系：

$$\begin{aligned}
 M &\geq \max \left(\max_k (i_{r-k}), \max_k (i_k) \right) \\
 &\geq \max \left(G \left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_m T_p + \pi)^2}}{4} \right), G \left(\frac{-5 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_m T_p + \pi)^2}}{4} \right) \right) \\
 &\geq G \left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_m T_p + \pi)^2}}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

证毕。

从定理一中不难发现，多项式基阶数的选取与最大多普勒频移有关，与需要逼近的信道长度有关，当 T_p 选择为信号包络相关度为 0.5 时的相关时间时，有：

$$M \geq G \left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4(2\pi f_m \frac{9}{16\pi f_m} + \pi)^2}}{4} \right) = 2 \tag{31}$$

下图给出了相关时间长度下，九条可分辨路径，不同速度情况下的 2 阶多项式基扩展的逼近误差情况。

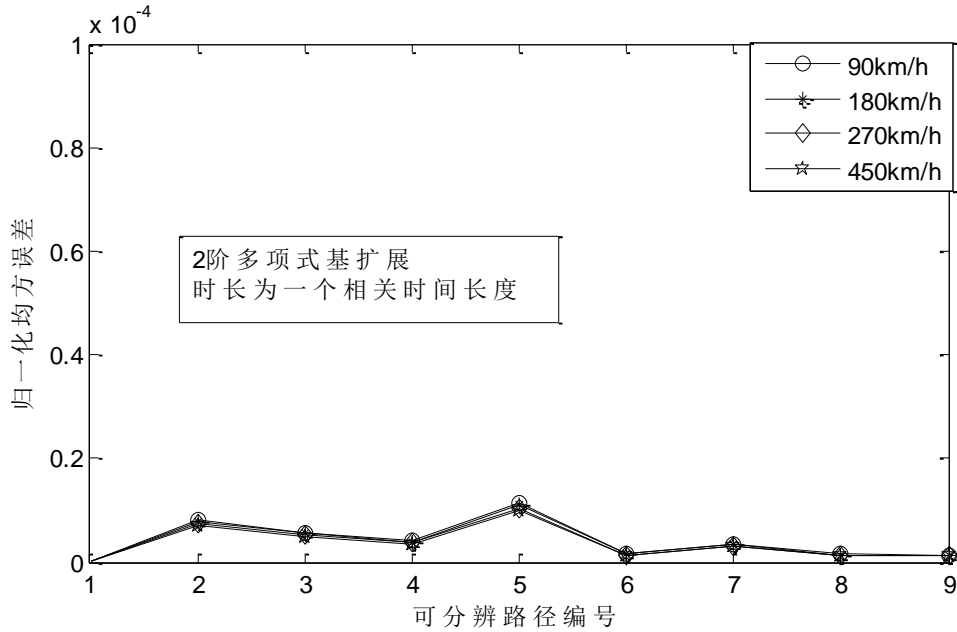


图3. 不同的可分辨路径上信道的归一化均方误差

从图 3 中可以看出，在相关时间范围内，多项式基阶数的选取受多普勒频移影响较小，且选 2 阶就能够满足 10^{-4} 量级的归一化均方误差。

4 基于基扩展模型的快变信道估计

4.1 快变信道帧格式优化设计

本文在快变信道估计中，将每帧信号长度 T_f 取为信号包络相关度为 0.5 时的相关时间长度，即：

$$T_f = \frac{9}{16\pi f_m} \quad (32)$$

而每帧信号由训练序列（导频）和传输数据组成，其中导频长度占帧长的比重不易过高，否则会影响信息的传输效率。

假设一帧的抽样点数为 N ，其中导频数 N_p ($N_p \leq N$)，那么 $h(n)$ ， $n=1, \dots, N_p$ 可以通过对导频进行估计获得，本文假设这种估计是理想的。使用 $h(n)$ ， $n=1, \dots, N_p$ 可以根据快变信道的基扩展模型对基函数的阶数和系数进行优化，最终得到 $h(n)$ 在 $n=N_p+1, \dots, N$ 的估计值^[6]：

$$\tilde{h}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m B_m(n), \quad n = N_p + 1, \dots, N \quad (33)$$

这样可以通过在信道估计值满足一定归一化均方误差条件下，对一帧中的导频数目进行优化，优化模型如下：

$$\begin{aligned} & \text{sub. } \min N_p \\ & \text{s.t. } \begin{cases} N_p \text{ 大于基函数扩展模型的阶数} \\ \text{归一化均方误差满足一定条件} \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

基于上述的三种基扩展模型和相应的信道估计算法，本小节对题目给出的四种移动速度下信道数据进行分析，研究了信道估计 NMSE 与基扩展模型、速度 v 、阶数 M 、导频量 N 的关系，在优化阶数 M 和基扩展模型系数的基础上，揭示给定信道估计 NMSE 需求时需要的最小导频数，从而尽可能的减少实际数据的测试量。此外，通过对三种基扩展模型进行信道估计的 MSE 性能和计算复杂度分析，给出了不同基扩展模型的优缺点，为实际建模和信道估计提供了指导。

(1) 根据数据文件 1（移动速度为 180km/h）中第 1 径信道数据进行分析，可以得到不同基扩展模型的信道估计 NMSE 与模型阶数 M 的关系，如下图所示，仿真中导频数设置为 $T_f/4$ 。

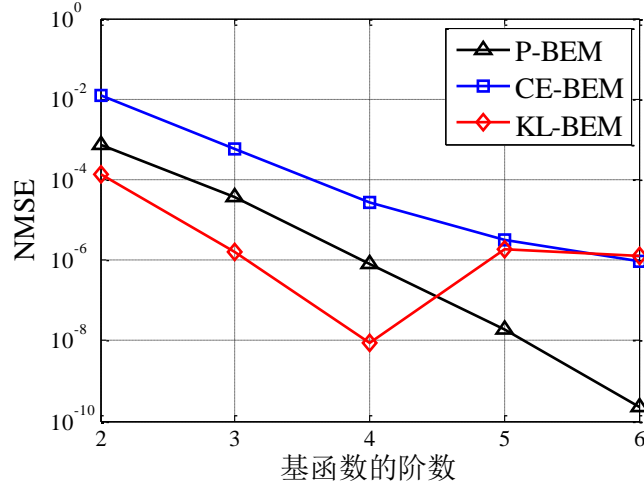


图4. 归一化均方误差与基函数的阶数的关系

从上图中可以看出，在三种基扩展模型中，在阶数较低时，KL-BEM 的性能最好，但当阶数较高时，KL-BEM 的性能恶化比较严重。而复指数模型在两种情况下都不是最优。多项式模型虽然低阶时性能不如 KL-BEM，但高阶时表现出了良好的鲁棒性。

(2) 根据数据文件 1 中第 1 径信道数据进行分析，通过设置不同的导频数，可以得到不同基扩展模型的估计误差与导频数的关系，如下图所示，仿真中三种基扩展模型的阶数 $M = 3$ 。

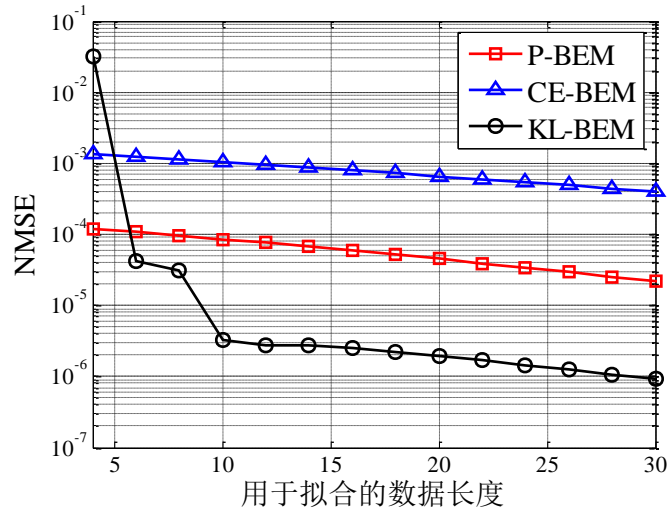


图5. 归一化均方误差与用于拟合的数据长度的关系

从图 5 中可以看出，在三种基扩展模型中，在导频数较短时，KL-BEM 的性能不佳，但当数据量较长时，KL-BEM 的性能收敛速度快，性能优越。而复指数模型在各种导频数情况 NMSE 性能都是最差的。

(3) 下表比较了应用不同基扩展模型进行信道估计的计算复杂度

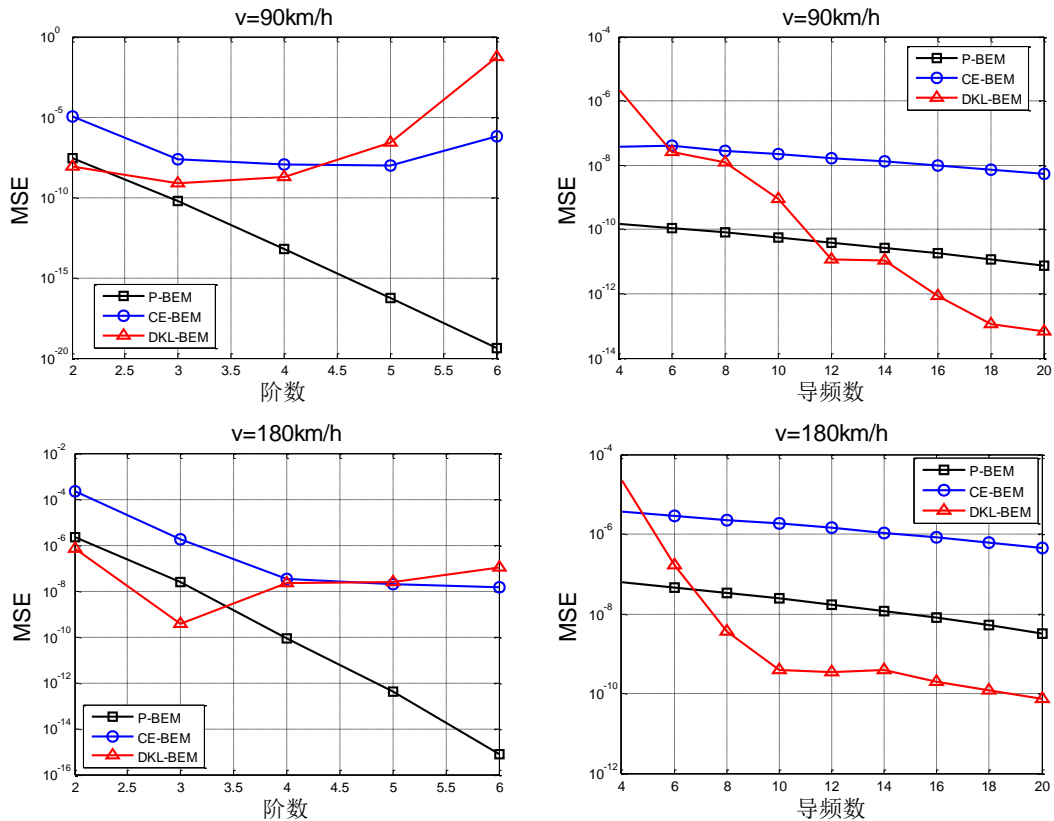
表2. 应用不同基扩展模型进行信道估计的计算复杂度

信道估计方法	复数乘法数量级
多项式	$O(M^2 N_p) + O(M^3) + O(M(N - N_p))$
复指数	$O(M^2 N_p) + O(M^3) + O(M(N - N_p))$
DKL	$O(N_p^2) + O(N_p^3) + O(M^2 N_p) + O(M^3) + O(M(N - N_p))$

从表中可以看出，在三种基扩展逼近模型中，DKL 模型的复杂度最高，多项式和复指数模型算法复杂度是同一数量级，这主要是由于 DKL 模型需要对归一化协方差矩阵进行特征值分解，已获得模型的基向量。

综上所述，三种基扩展模型选择中应该选择复杂度和估计误差折衷的基扩展模型方案。当阶数较低或拟合数据量较大且已知信道的时域相关特性时，选择 KL-BEM 性能更优；如果结合性能表现和模型稳定性，多项式模型则是最优选择。

下面探究相对运动速度对选择基函数模型的影响。通过对数据文件 1-4 中第 1 路径信道数据进行分析，各不同基扩展模型的信道估计 NMSE 与导频数量和阶数的关系如下图所示。



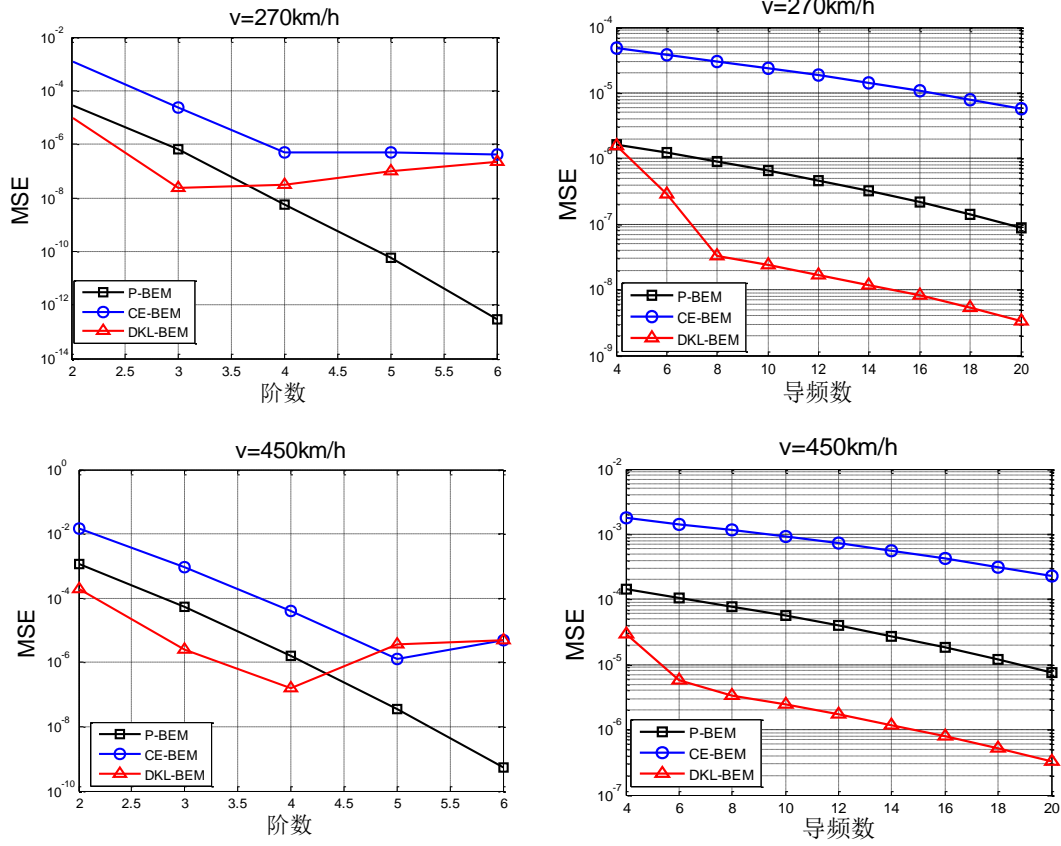


图6. 不同速度下基函数阶数及导频数对均方误差的影响

从图中可以看出，在低速情况下，DKL-BEM 模型表现不佳，速度越低，越要求低阶高导频数，这样对数据中包含的信息量是一种浪费；但在高速条件下，DKL-BEM 模型性能提升很快，到 270km/h 的速度上，在导频数方面已经有绝对优势。同时可以看到，与速度关联并不大，复指数模型的性能一直不是最优。性能最稳定的应该是多项式模型，相对于复指数模型，它具有更好的估计误差，相对于 DKL 模型，它的性能更加稳定，是性能和稳定性折衷的更优选择。

4.2 基于 Jakes 模型的快变多径信道仿真器

假设可分辨多径衰落信道相互独立，幅度服从瑞利(Rayleigh)分布，相位服从均匀分布的假设条件下，本文根据第二章提出的离散化时变信道模型，设计了基于 Jakes 模型的快变信道仿真器。

对于单条可分辨路径的仿真，本文的目标是设计一个复高斯广义平稳随机过程 $c(t)$ ，使得其实部和虚部的功率谱(也称多普勒功率谱)满足一个特定的表达式，其中应用最为广泛的功率谱为 Jakes 的 ‘U’ 型功率谱，其表达式为：

$$P_{c_i}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_0^2}{\pi f_m \sqrt{1 - (f/f_m)^2}} & |f| < f_m, i=1,2 \\ 0 & |f| \geq f_m \end{cases} \quad (35)$$

其中， f_m 是最大多普勒频移， σ_0^2 是实部或虚部的方差。

根据第二章提出的离散化时变信道模型，可以将 $c(t)$ 描述为以下形式：

$$\begin{aligned} c(t) &= c_1(t) + jc_2(t) \\ c_i(t) &= \sum_{k=1}^K c_{i,k} \cos(2\pi f_{i,k} t + \theta_{i,k}), i=1,2 \end{aligned} \quad (36)$$

其中，把 $c_{i,k}$ 、 $f_{i,k}$ 和 $\theta_{i,k}$ 分别称作多普勒系数、离散多普勒频率和多普勒相位。

根据前面的假设，可以取^[1]：

$$\begin{aligned} v_{i,n} &= v_{\max} \cos\left(\frac{2\pi n - \pi + \phi}{4N}\right) \\ c_{1,n} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{N}} \cos(\varphi_n) \\ c_{2,n} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{N}} \sin(\varphi_n) \\ \theta_{i,n} &\text{满足假设3} \end{aligned} \quad (37)$$

其中， ϕ, φ_n 独立均匀分布于 $[0, 2\pi)$ 。这样基于 Jakes 模型的快变信道仿真流程如下：

- 1) 先用 Jakes 模型仿真出多个相互独立的可分辨径信道；
- 2) 对各个可分辨径上赋予相应的离散传播时延和路径增益。

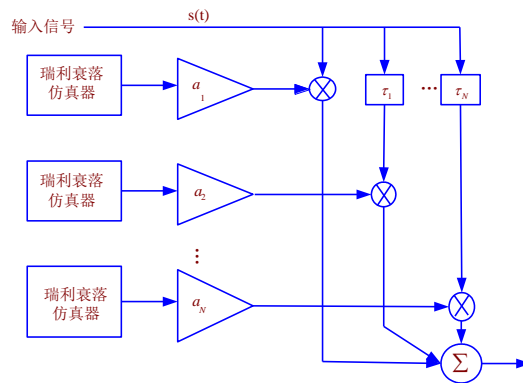


图7. Jakes 多径信道仿真器

根据以上所述的建模和仿真方法，对 3GPP 标准中三种典型信道进行仿真，产生相应的信道数据分别为 channel_data_EPA.mat，channel_data_EVA.mat，

channel_data_ETU.mat (见附件 2)，信道参数见 3GPP 标准附录 B 2.2.1 表 B 2.2.1-4^[7]，假设移动台运动速度 $v=180\text{Km/h}$ ，载波频率 $f_c=3\text{GHz}$ ，信道采样频率 $f_s=200\text{kHz}$ 。采用 4.1 节中所述的三种基扩展模型和相应的信道估计算法对本节中信道仿真器输出的仿真数据进行研究，下图给出了三种典型信道下不同基扩展模型的信道估计 NMSE 与模型阶数和导频量的关系。

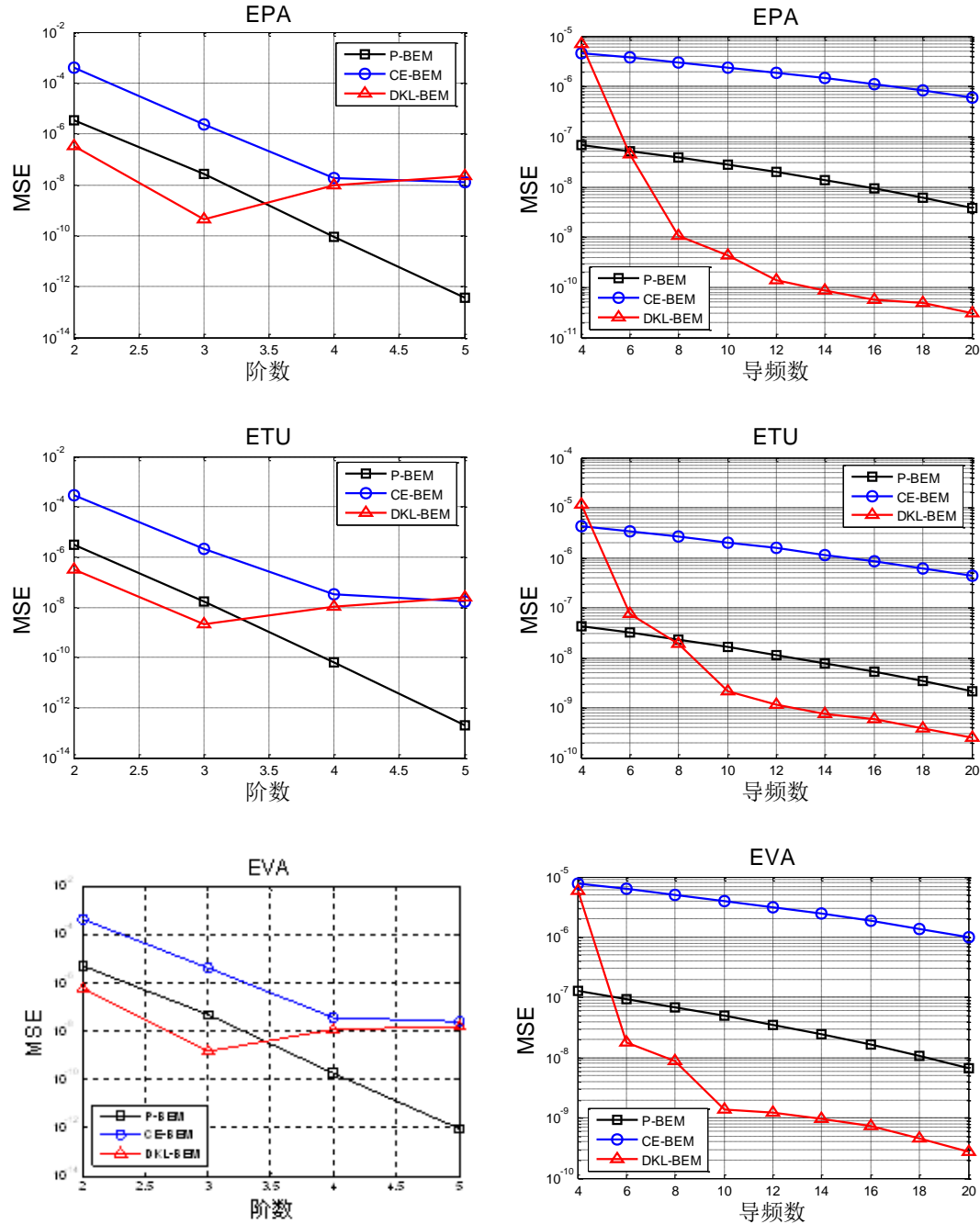


图8. 不同信道环境下基函数阶数及导频数对均方误差的影响

从图中可以看出，在 3GPP 标准下，三种基扩展模型的预测性能类似于三种模型在题目中给出的 180km/h 的信道的性能。容易知道，降低阶数可以减少估计

过程中基系数的计算量，而导频数的减小则可以直观反映出需要实际测试数据的减少，两者都可以反映出所建模型在减少测试数据方面的性能，即 DKL-BEM 在低阶高导频情况下性能不佳，但在高阶低导频的情况下性能卓越，三者中最稳定的是多项式模型。

5 系统性能分析

信道估计模型的评价一般用归一化信道估计误差（NMSE）表征，可以体现模型与信道的拟合程度和估计准确性。但在实际工程应用中，系统性能不但与信道估计误差有关，还与编译码方式、调制方式和均衡方式等密切相关，甚至一些因素还对信道估计误差比较敏感，因此一个信道模型的优劣不只与 NMSE 有关，还在于该模型是否能适应现有通信系统，能否与系统其他因素协调配合。在实际系统中，一般用端到端信噪比（SNR）与系统误码率（BER）的关系来表征通信系统性能。

5.1 系统模型和线性 MMSE 均衡

考虑一个移动通信系统，载波频率 $f_c = 3\text{GHz}$ ，信道采样频率 $f_s = 200\text{kHz}$ ，发送端发送二进制序列，调制方式采用 16QAM。假设移动台运动速度为 $v=180\text{Km/h}$ ，接收信号受到 AWGN 影响，接收端采用线性 MMSE 均衡，均衡后进行 16QAM 解调和硬判决，恢复二进制序列。

16QAM 调制具有能充分利用带宽、抗噪声能力强等优点，是一种工程上常用的调制方式，其星座图如下图所示：

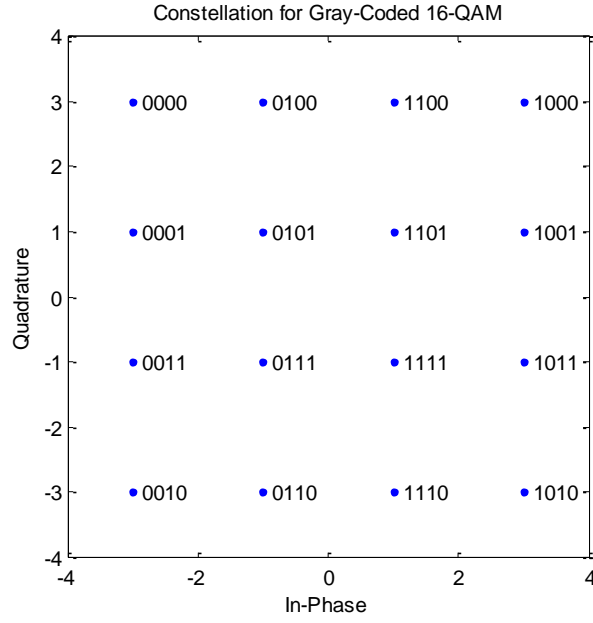


图9. 16QAM 调制星座图

信息符号通过时变的具有 AWGN 的 ISI 信道，根据等效的离散时间基带模型可以将接收端数据表示为：

$$y_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_{k,l} x_{k-l} + n_k$$

其中 $h_{k,l}$ 是信道的时变冲击响应。 x_k ， y_k 分别是发送信号、接收信号， n_k 是高斯白噪声，可以用矩阵形式表示为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

其中：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{1,0} & h_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ h_{2,0} & h_{1,1} & h_{0,2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{0,N} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

发送信号、接收信号、信道噪声分别为 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$ ， $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^T$ ， $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \cdots, n_N]^T$ 。

经过信道后，信号的星座图发生偏移

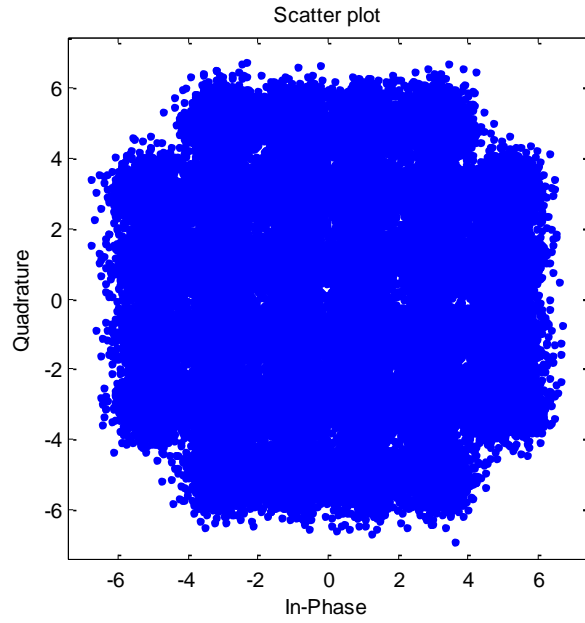


图10. 过信道后信号星座图

线性均衡是通过设计加权矩阵 W ，使其满足

$$\hat{x} = Wy = x + Ww = x + \hat{z}$$

即可估算出发射信号 x 。

MMSE 均衡的加权矩阵

$$W = (H^H H)^{-1} H^H$$

因而发送信号 x 的估计值

$$\hat{x} = (H^H H + N_0 I)^{-1} H y$$

再通过 16QAM 解调，可以得到系统误码性能曲线。

5.2 性能分析

系统采用载波频率 $f_c = 3\text{GHz}$ ，信道采样频率 $f_s = 200\text{kHz}$ 且信道参数加入了 AWGN 的信道，输入二进制信息序列，进行 16QAM 调制解调过程及均衡后恢复二进制序列，可以得到不同速度下，系统端到端信噪比（SNR）与系统误码率（BER）的关系曲线如图 11 所示：

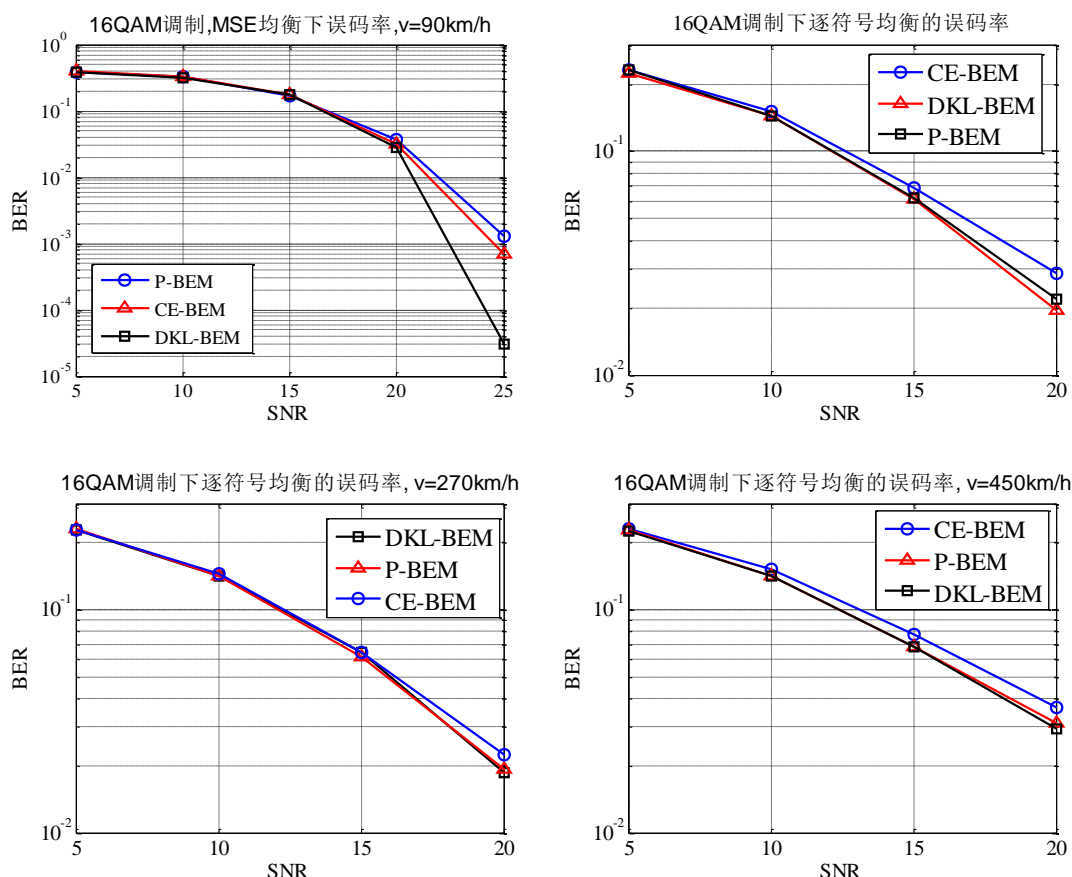


图11. SNR 与 BER 的关系曲线

从图中可以看出，三种基扩展模型相比，DKL-BEM 的误码性能最佳，而 CE-BEM 的最差，P-BEM 居中。虽然随着信道速度的增加，各模型的误码性能有所下降，但相对优劣并没有发生变化。

6 结论与展望

在实际工程应用当中，导频的估计并不是准确的，存在一定的估计误差，这样在后续的信道估计当中会造成误差的传播和估计的不准确性，因此在以后的研究中，可以在信道仿真过程中在信道上加入随机噪声以模拟信道误差，进而探究更加逼真的模型。

而在帧结构的设计上，本文是通过相干时间确定帧长度，因此帧长度随运动速度的变化而变化，但在实际工程应用中帧结构的设计实时改变无法实现的，因此应该根据运动速度给帧长进行分级设计，使帧长相对固定，从而更加便于工程实现。

参考文献

- [1] 吴伟凌等.移动通信原理(第2版)[M].电子工业出版社, 2009.1.
- [2] 樊昌信等.通信原理(第6版)[M].国防工业出版社, 2013.8.
- [3] 李子.无线 OFDM 系统中的盲信道估计[D].江苏南京:解放军理工大学, 2005.
- [4] 李昕.基于基扩展快时变信道模型的 OFDM 系统信道估计[D].四川成都:西南交通大学, 2010.
- [5] 陈东华,蔡灿辉. 时间选择性衰落信道的基扩展模型比较[A].通信理论与信号处理学术年会论文集, 2009.
- [6] Tomasz Hrycak, etc. Low Complexity Equalization for Doubly Selective Channels Modeled by a Basis Expansion [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2010, 58(11):5706-5719.
- [7] 3rd Generation Partnership Project, Technical Specification, 36.101(3GPP TS36.101), v8.0.0, 2007.12

附录

附录 1 关于级数收敛特性的证明

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2n!} \quad n \geq 0 \text{ 的整数}$$

不考虑 n 是整数, 我们首先来求 $u_n > u_{n+1}$ 时 n 的解

$$\text{此时 } \frac{x^{2n}}{2n!} > \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$$

化简得到 $4n^2 + 6n + 2 - x^2 > 0$

$$\text{令 } f(n) = 4n^2 + 6n + 2 - x^2$$

$$\text{则该方程有两个解 } N_1 = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4} \quad N_2 = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4x^2}}{4}$$

若 n 取大于等于零的整数, 那么根据二次方程的性质不难知级数 u_n 有以下性质:

若 $N_1 > 0$, 则 u_n 随着 n 的增大先增大后减小, 其最大值的点在 $n_{\max} = \text{ceil}(N_1)$ 处。

若 $N_1 \leq 0$, 则 u_n 随着 n 的增大而减小, 其最大值的点在 $n_{\max} = 0$ 处。

定义函数 $G(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \text{ceil}(x) & x > 0 \end{cases}$

则对于级数 $u_n = \frac{x^{2n}}{2n!}$ ($n \geq 0$ 的整数) 而言其最大值在 $n_{\max} = G\left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4}\right)$ 处。

同理可以证明对于级数 $u_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($n \geq 0$ 的整数) 而言其最大值在

$n_{\max} = G\left(\frac{-5 + \sqrt{1 + 4x^2}}{4}\right)$ 处。