

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目                      空气中 PM2.5 问题的研究

### 摘                      要

本文主要探讨的是 PM2.5 扩散、衰减模式的问题，根据该模式分析探究 PM2.5 的危机治理与后 5 年的治理问题。建立了 PM2.5 与其它污染物之间的多元非线性对数模型；在静态、风力和湿度等因素下，分别探究污染物颗粒的运动模式，并建立了 PM2.5 扩散演变模型；在污染物浓度突变的情况下，依据该模型得出不同区域污染物的浓度，最后确定安全区域的范围。建立综合费用和专项费用的多目标优化模型，并运用系统动力学理论对目标值进一步优化。

针对问题一，首先，运用主成分分析法，按照方差贡献率的大小剔除臭氧这个指标；其次，运用 SPSS 软件分析剩余指标之间的相关性及独立性，并建立了 PM2.5 与其它污染物之间的多元非线性对数模型，得出西安市的拟合优度  $R^2 = 0.90$ ；最后，搜集西安市的相对湿度数据，运用该指标对模型进行再度优化，优化后的拟合优度  $R^2 = 0.94$ ，因而相对湿度是 PM2.5 影响因素。

针对问题二：（1）运用统计学原理分析 13 个监测点 PM2.5 的浓度，描绘了西安市 PM2.5 的空间分布云图。同时添加时间因素，探究 PM2.5 颗粒四维空间分布情况，得出采集点之间的 PM2.5 具有较高的协同性。

（2）分析了静态下 PM2.5 粒子受力，漂移模式，通过结合风速、湿度、大气稳定度等季节性因素从点源、面源两方面分析了 PM2.5 扩散模式；建立了 PM2.5 点源和面源扩散的偏微分方程模型；通过利用 P-G 曲线近似法，布里吉斯扩散参数以及现有数据对季节参数进行求解，得出 PM2.5 扩散衰减模型。计算结果与西安市地理位置和提供数据相吻合，说明模型所刻画传播衰减模式与事实相符。

（3）通过第 2 小问所得的 PM2.5 点源扩散模型与 PM2.5 面源扩散模型，以高压开关厂为参考点，在 3 级北风状态下，运用 matlab 软件仿真模拟出的点源

与面源扩散情况，其结果展示如下表：

扩散方向		向东	向西	向南	向北
扩散	点源模型	50	50	200	10
距离(m)	面源模型	500	500	3000	200

(4) 结合西安市各个地区的地理位置和天气、气候等条件，建立了各个区之间的 PM<sub>2.5</sub> 扩散分析体系，利用西安市 2013 年 1 月 8 日—2 月 8 日的的数据，通过模型求解出各个区之间的 PM<sub>2.5</sub> 的相互扩散量，然后计算仿真出各个区的 PM<sub>2.5</sub> 的浓度，通过与原始值进行对比，发现模型所得结果与实际相差在 10% 之内,说明模型可信。仿真与原始对比如下：

日期	真实值	高压开关厂			真实值	兴庆小区	
		计算结果	误差率			计算结果	误差率
2013-1-8	383	356.7054	-6.87%		373	381.1783	2.19%
2013-1-9	216	211.39	-2.13%		236	217.7147	-7.75%

针对问题三：基于系统动力学理论，考虑治理效果，建立了系统动力学多目标复合治理的最优化模型。利用贝叶斯支持向量机方法对武汉市基本数据面数据进行宏观预测，对 PM<sub>2.5</sub> 进行系统性预测，并且仿真求解出 PM 由 280 单位到 35 单位的五年治理方法，结果表明将综合治理与专项治理结合时治理效果最好。其最优相结合治理计划为：

年份		2013	2014	2015	2016	2017
综合	投入费用(百万)	51	42	32	22	12
治理	PM <sub>2.5</sub> 减少浓度	4.5	19.3	34	48.7	63.5
专项	投入费用(百万)	20	21	19	20	18
治理	PM <sub>2.5</sub> 减少浓度	28	21	15	8.5	2

最后结合本文研究结果，对研究实施进行总结撰写了一份研究试验报告。

本文创新点在于，建立了基于贝叶斯理论的支持向量机方法和基于系统动力学的多目标治理模型。

**关键词：** 多元非线性对数模型，扩散衰减微分模型，系统动力学理论

# 一、问题的背景与重述

## 1.1 问题的背景

空气质量指数 AQI 作为空气质量监测指标, AQI 是无量纲指数, 它的分项监测指标为 6 个基本监测指标(二氧化硫  $SO_2$ 、二氧化氮  $NO_2$ 、可吸入颗粒物 PM10、细颗粒物 PM2.5、臭氧  $O_3$  和一氧化碳 CO 等 6 项)。首次将产生灰霾的主要因素——对人类健康危害极大的细颗粒物 PM2.5 的浓度指标作为空气质量监测指标。新监测标准的发布和实施, 将会对空气质量的监测, 改善生存环境起到重要的作用。

鉴于对于细颗粒物 PM2.5 的研究时间较短, 在学术界也是新课题, 尤其是对细颗粒物 PM2.5 及相关的因素的统计数据还太少, 对细颗粒物 PM2.5 的客观规律也了解得很不够。因此对细颗粒 PM2.5 的研究是必要且紧迫的。

## 1.2 问题的重述

启用空气质量指数 AQI 作为空气质量监测指标, 以代替原来的空气质量监测指标——空气污染指数 API (Air Pollution Index)。原监测指标 API 为无量纲指数, 它的分项监测指标为 3 个基本指标(二氧化硫  $SO_2$ 、二氧化氮  $NO_2$  和可吸入颗粒物 PM10)。AQI 也是无量纲指数, 它的分项监测指标为 6 个基本监测指标(二氧化硫  $SO_2$ 、二氧化氮  $NO_2$ 、可吸入颗粒物 PM10、细颗粒物 PM2.5、臭氧  $O_3$  和一氧化碳 CO 等 6 项)。

### 1.2.1 PM2.5 的相关因素分析

PM2.5 的形成机理和过程较为复杂, 可由污染物的来源及成分进行相关分析: 主要来源有自然源(植物花粉和孢子、土壤扬尘、海盐、森林火灾、火山爆发等)和人为源(燃烧燃料、工业生产过程排放、交通运输排放等), 可以分为一次颗粒物(即由排放源直接排放到大气中的颗粒物)和二次颗粒物(即通过与大气组成成分发生化学反应后生成的颗粒物)。

PM2.5 的成分主要由水溶性离子、颗粒有机物和微量元素等组成。有究认为, AQI 监测指标中的二氧化硫( $SO_2$ ), 二氧化氮( $NO_2$ ), 一氧化碳(CO)是在一定环境条件下形成 PM2.5 前的主要气态物体。

### 1.2.2 PM2.5 的分布与演变及应急处理

请依据附件 2、附件 3 中的数据或自行采集某地区的数据, 通过数学建模探索完成以下研究:

- 1、描述该地区内 PM2.5 的时空分布及其规律, 并结合环境保护部新修订的《环境空气质量标准》分区进行污染评估。
- 2、建立能够刻画该地区 PM2.5 的发生和演变(扩散与衰减等)规律的数学模型, 合理考虑风力、湿度等天气和季节因素的影响, 并利用该地区的数据进行定量与定性分析。
- 3、假设该地区某监测点处的 PM2.5 的浓度突然增至数倍, 且延续数小时, 请建立针对这种突发情形的污染扩散预测与评估方法。并以该地区 PM2.5 监测数据最高的一天为例, 在全地区 PM2.5 浓度最高点处的浓度增至 2 倍, 持续 2

小时，利用你们的模型进行预测评估，给出重度污染和可能安全区域。

4、采用适当方法检验你们模型和方法的合理性，并根据已有研究成果探索 PM2.5 的成因、演变等一般性规律。

### 1.2.3 空气质量的控制管理

地方环境管理部门关心的重要问题之一是，为建设良好的人居环境，利用有限财力，制定本地区空气质量首要污染物 PM2.5 的减排治污可行规划。数据 1 所在地区的环境保护部门考虑治污达标的紧迫性和可行性，在未来五年内，拟采取综合治理和专项治理相结合的逐年达到治理目标的方案。请考虑以下问题：

1. 该地区目前 PM2.5 的年平均浓度估计为 280(单位为  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )，要求未来五年内逐年减少 PM2.5 的年平均浓度，最终达到年终平均浓度统计指标 35(单位为  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )，请给出合理的治理计划，即给出每年的全年年终平均治理指标。
2. 据估算，综合治理费用，每减少一个 PM2.5 浓度单位，当年需投入一个费用单位(百万元)，专项治理投入费用是当年所减少 PM2.5 浓度平方的 0.005 倍(百万元)。请你为数据 1 所在地区设计有效的专项治理计划，使得既达到预定 PM2.5 减排计划,同时使经费投入较为合理，要求你给出五年投入总经费和逐年轻费投入预算计划，并论述该方案的合理性。

### 1.3 数据文件使用说明

根据题目中所给数据，对由于本模型中使用的指标及数据以附表中数据为准。结合部分收集数据进行建模分析。

对于由于缺测指标、仪器故障、项目有效数据量不足、网络传输故障等造成监测项目的浓度及分指数缺失均使用 NA 标识的数据，使用贝叶斯方法对数据进行补全，然后进行使用

## 二、模型的假设与符号的说明

### 2.1 模型的基本假设

假设一：风向流动是稳定的，且有主导方向；

假设二：污染物在传播中无剧烈化学反应；

假设三：检测范围内没有其他同类污染源聚集；

假设四：每一面源单元的污染物排放量集中在该单元的形心上；

假设五：大气环境为干空气组分和水蒸气组分的均匀混合物；

假设六：整个研究空间内风速场是均匀稳定的；

假设七：面源单元在下风向造成的浓度可用虚拟点源在下风向造成的同样的浓度所代替。

## 2.2 部分符号的说明

符号	符号说明
$P_{ij}$	第 $i$ 个检测点第 $j$ 天 PM2.5 颗粒污染物的浓度
$F_g$	污染物传播过程中所受的体积力
$F_{st}$	污染物传播过程中所受的粘性力
$F_p$	压力梯度力
$M'$	虚拟质量
$D_x, D_y, D_z$	$x, y, z$ 方向上的分子扩散系数
$D_{mx}, D_{my}, D_{mz}$	湍流扩散系数,
$\varphi$	太阳倾角
$He$	面源的平均高度
$\rho_f$	流体密度
$d_p$	颗粒直径
$\lambda$	为气体分子平均自由程

【注】：在建立的模型中的符号在模型中进行具体说明。

## 三、问题的分析

### 3.1 问题一的分析

对于问题一：通过对题目提供的数据的处理，建立适当的模型，对 AQI 监测指标中的二氧化硫( $SO_2$ )、二氧化氮( $NO_2$ )、可吸入颗粒物(PM10)、细颗粒物(PM2.5)、臭氧( $O_3$ )和一氧化碳(CO)的含量进行定量分析，并最终得出细颗粒物(PM2.5)与其它 5 项分指标及其对应污染物(含量)之间的相关性及其关系进行分析前的影响。

依据数学模型，通过对对武汉和西安两座城市，监测所得的 AQI 中 6 个基本监测指标的相关与独立性进行定量分析，将特别对其中 PM2.5(含量)与其它 5 项分指标及其对应污染物(含量)之间的相关性及其关系进行分析。通过数据进行处理，有部分数据不全面，不能表征全面的信息予以剔除处理。对于剩余的数据通过利用主成分分析法分析等手段，可得出臭氧( $O_3$ )的含量与 PM2.5 相关系数，及臭氧( $O_3$ )含量与 PM2.5 相关关系。

可通过逐步回归法建立多元非线性模型。对主成份与 PM2.5 的关系进行数据分析，得出量化模型。分析四组数据  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO 自身不具有较强的相关性，因此四组数据均可作为计算 PM2.5 的因素，四组数据独立参与计算。于是可建立多元非线性回归模型，同时对  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO 四个变量的与 PM2.5 进行相关性分析，并检验相关性，若相关性较差，再通过建立多元非线性交叉模型，多元非线性指数模型等模型检验。通过绘制散点图，基于对散点图的分析，再次对回归模型进行检验分析，最终可得到回归模型，通过检验值是否在合理范围内，散点图等，对多元非线性对数模型进行检测。

### 3.2 问题二的分析

对于第二问第 1 小问,在数据处理后,将 PM2.5 颗粒污染物浓度区域分布云图形象地刻画在地形图上。首先对 13 个监测点漏报的数据进行剔除,然后得出各个监测点四个月以来的统计均值,最后在地形图上用色彩刻画出 PM2.5 颗粒污染物浓度的分布云图。同时还增加了时间因素,构成时间、地理位置、PM2.5 浓度的四维时空分布规律。根据西安市 13 个监测点 PM2.5 的统计均值,并结合实际情况,分析 PM2.5 颗粒污染物浓度的分布规律。

对于第二问第 2 小问,建立 PM2.5 颗粒污染物浓度的发生和演变(扩散与衰减等)规律的模型。PM2.5 颗粒污染物浓度的变化值分为两大类,一类是在无其他外界因素影响情况下的颗粒运动扩散模型,另一类是在外界因素(考虑风力、湿度等天气和季节因素)的影响情况下的扩散和衰减模型。在不受外界因素影响的情况下,考虑重力、浮力、粘性阻力、压力梯度力和虚拟质量力的多场耦合作用下浓度的变化情况。运用布里吉斯扩散参数对衰减模型进行优化,考虑 PM2.5 颗粒污染物变化的特殊情况,按照污染源的产生不同,按照点源污染和面源污染两大类处理,从而更加全面的对扩散模型进行定量和定性分析。

对于第二问第 3 小问,建立 PM2.5 颗粒污染物浓度发生突变后污染扩散预测模型,并对模型进行评估。在此选择具有代表性的高压开关污染物浓度最高值的一天,即为 2013 年 1 月 14 日的 PM2.5 的值 500。运用第 2 小问建立的点源和面源模型确定不同时间段各地区 PM2.5 污染物浓度,根据 Google 地图上测量的两点距离,判定污染物突变之后的扩散影响区域。同时考虑污染物在风力作用下,在点源和面源两种情况下的浓度变化情况,并将 PM2.5 颗粒污染物浓度的变化情况反映在地形图上,预测出重污染区域和可能的安全区域。

对于第二问第 4 小问,运用面源模式下的 PM2.5 颗粒浓度的变化情况,结合附件给出的 PM2.5 颗粒浓度进行数据检验。PM2.5 颗粒污染物在扩散过程中,相邻区域必然会受到影响。首先,确定每个区都是 PM2.5 的产生源,运用面源扩散模式进行模型检验,使用各个区域 PM2.5 浓度的统计均值从总体上反映 PM2.5 浓度的扩散情况。然后,从附件中任意提取出一段时间内区域的浓度指标值进行检验,同时需要考虑风力、湿度和季节等因素的影响。最后,根据预测值和实际值进行比较检验模型的合理性。

对 PM2.5 颗粒污染物的来源分析,查阅相关文献,再结合西安当地的地理位置来具体分析其来源,如西安的沙尘天气会对 PM2.5 浓度有很大的影响。

### 3.3 问题三的分析

问题三需要解决的是:帮环境管理部门提供合理确实可行的治理方案。首先,结合当地部门的具体情况判断该方案是否具有可行性。其次,还要考虑方案的成效,为了能够量化治理措施对于 PM2.5 浓度改善的程度大小,基于动力系统仿真通过贝叶斯模型预测未来五年治理与不治理作对比观察期效果。最后,找到确实可行的治理方法。

基于成效分析找到最合理的治理方案,以达到充分利用资源的目的。在有限资金的情况下尽可能的选择投资少、见效快的治理方案。为了能够量化对于经济发展影响程度的大小,选取当地现有的 PM2.5 浓度作为指标,按照现有的趋势发展把五年之后治理或者不治理两种情况下的 PM2.5 浓度预测出来,这样才能对比出治理的作用。由于 PM2.5 是与季节、天气状况、湿度、大气稳定度等都有密切

关系的量,通过基于系统动力学分析的贝叶斯支持向量机预测模型可以很好的利用这些信息提高预测的准确性,最终找到合理的治理方案。

## 四、问题一：PM2.5 的相关因素分析

### 4.1 建模的准备与数据分析处理

#### 4.1.1 基于对 AQI 监测指标监测数据的主成分分析处理

题目提供西安和武汉两座城市 AQI 监测指标监测数据,先后对数据通过主成分分析法、相关性分析法、回归分析法对数据进行处理,建立了多元非线性对数模型。基于对原始数据的分析,有部分数据缺失,在此做出剔除处理。

对剩下的数据,通过相关性分析,找对 AQI 监测指标中的  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO、 $O_3$  的方差对 PM2.5 的方差的贡献量。如下表所示:

表 4-1 各指标的总方差

项目	数据	解释的总方差	
		方差 %	累积 %
二氧化硫 $SO_2$		62.00	62.00
二氧化氮 $NO_2$		21.16	83.16
可吸入颗粒 PM10		6.64	89.81
一氧化碳 CO		6.56	96.37
臭氧 $O_3$		3.63	100.00

各种组成因子的方差贡献率检得出  $O_3$  的方差贡献率为 3.63%,由此可以得出,  $O_3$  对 PM2.5 的贡献不大,为了简化模型,提高模型整体的精确度,剔除  $O_3$ 。

#### 4.1.2 基于对 AQI 监测指标监测数据的相关性分析处理

对于剔除  $O_3$  之后的数据通过 Pearson 相关性分析,可以检验任意两个变量之间是否呈现的线性相关趋势,此时的相关性系数大小会比较准确至于两个变量是否相互影响, Pearson 相关系数以  $|r|$  表示。通过进行 Pearson 对  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO、PM2.5 的数据相关性分析得各种粒子之间的相关性如下:

表 4-2 各指标的 Pearson 相关系数

指标	PM2.5	$SO_2$	$NO_2$	PM10	CO
PM2.5	1.00	0.72	0.73	0.78	0.82
$SO_2$	0.72	1.00	0.81	0.68	0.66
$NO_2$	0.73	0.81	1.00	0.73	0.63
PM10	0.78	0.68	0.73	1.00	0.59
CO	0.82	0.66	0.63	0.59	1.00

Pearson 相关性分析的相关程度由相关系数  $|r|$  来评价,  $|r|$  的值越接近 1 说明这两个变量的相关性越好,他们之间的关系越密切反之则相关性越差,甚至不相

关。

表 4-3  $|r|$  的取值及意义

$ r $ 的取值范围	$ r $ 的意义
0.00-0.19	极低相关
0.20-0.39	低度相关
0.40-0.69	中度相关
0.70-0.89	高度相关
0.90-1.00	极高相关

根据表 4-1 和表 4-3 的数据可以得出，相关系数能说明  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO、与 PM2.5 在某种意义上来讲是有些线性的关系，但是这只是很粗略地说明，他们之间是否为线性关系，有待于进一步验证。为此把其中它们之间所有的可能的组合都验证了一下，比方说以  $SO_2$  作为因变量，其它变量任意组合来作为自变量，然后通过 SPSS 软件分别进行检验，画出来的残差图都是类似于图 4-1，残差图是模型的完全随机部分，它的取值是应该与所有变量无关的，所以它的分布应该是随机的，但是从图 4-1 可以明显看出残差会随着  $SO_2$  浓度的增大而变大，这就强有力的说明了  $SO_2$  和其它所有变量(可能是多个)都无线性关系。总的来说， $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO、PM2.5 之间任何组合都无线性关系。

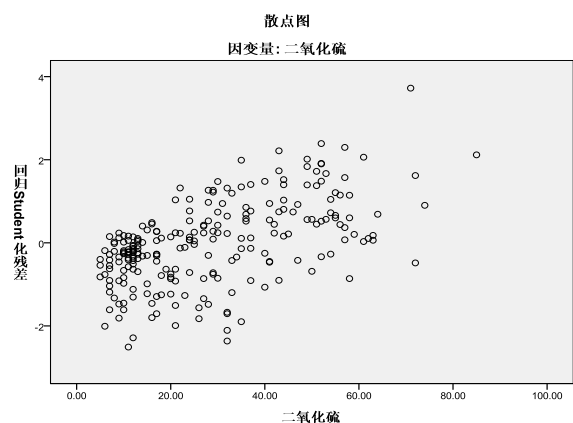


图 4-1 武汉 二氧化硫关于一氧化碳和二氧化氮的 Student 化残差图

4.2 模型的建立(多元非线性对数综合模型)

4.2.1 模型初探——多元非线性交叉模型

上文中已经得出由已经 PM2.5 与  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、PM10、CO 之间并没有线性关系，考虑到复杂的连续函数都可以通过多项式来进行逼近，所以就考虑再添加各个自变量的平方项和交叉相乘项来进行非线性回归分析。当然，先对每一个自变量进行平方求得一个新变量参与回归，交叉项也是类似的处理，这样就把非线性回归转化为线性回归了。

多元非线性交叉回归模型

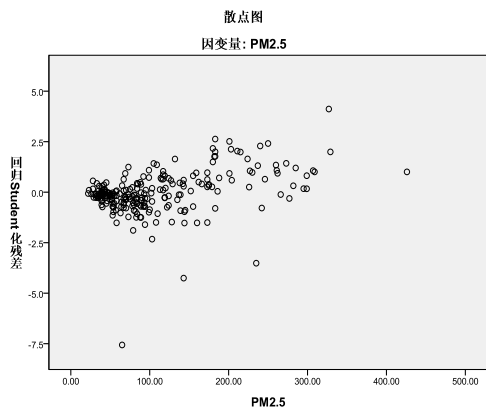
建立模型：



$$y = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 + \dots$$

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_1x_3 + \dots + b_nx_3x_4 + c$$

应用软件 SPSS 进行验证，得出武汉和西安两城市的残差图分别如图 4-2 和图 4-3 所示：



4-2 武汉 PM2.5 Student 化残差图

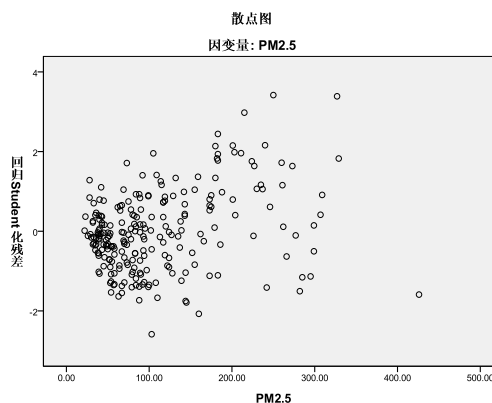


图 4-3 西安 PM2.5 Student 化残差图

通过对上面的两个图的观察，发现还是同样的老问题，两地残差值随着 PM2.5 的增大而增大，显然不管是在武汉还是西安考虑平方项与残差项的模型是错误的。

#### 4.2.2 多元非线性对数模型

上面一问中，得出各个模型的残差都是随着因变量的增加而增加，这就提示对每一个变量进行对数变换来消除这种影响，然后再考虑新变量之间的交叉项与平方项的加入，所以建立多元非线性对数模型如下：

$$\ln y = \sum_{i=1}^4 a_i \ln x_i + b_i (\ln x_i)^2 + \sum_{i=j+1}^4 \sum_{j=1}^3 c_{i,j} \ln(x_i) \ln(x_j)$$

其中  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_{i,j}$  表示系数，通过 SPSS 求解得出：

西安：

$$PM2.5 = e^{0.153 \times \ln(PM10) \times \ln(CO) + 0.021 \times (\ln(SO_2))^2 + 1.503}$$

武汉：

$$PM2.5 = e^{0.446 \times \ln(PM10) \times \ln(CO) - 0.347 \times (\ln(CO))^2 + 1.157 \times \ln(CO) - 0.214 \times \ln(PM10)^2 + 1.115 \times \ln(PM10) - 2.521}$$

两个模型的拟合优度如下表所示：

表 4-4 模型拟合度表

城市	武汉	西安
拟合优度 $R^2$ 取值	0.91	0.90

并分别绘制出了如下 Student 化残差散点图和标准化 P-P 图：

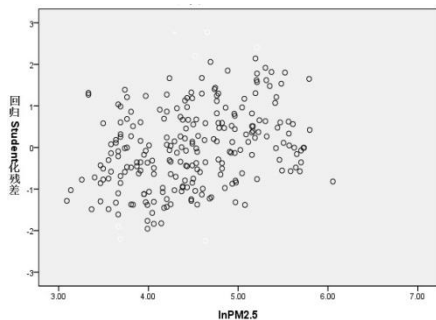


图 4-4 武汉取对数变换后的残差图

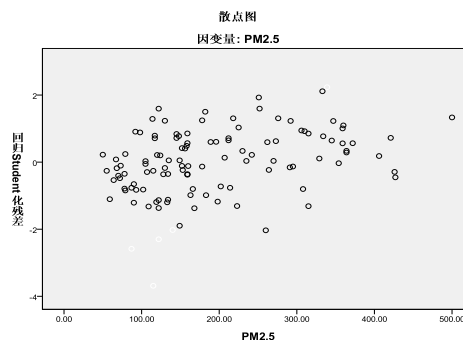


图 4-5 西安对数变换后的残差图

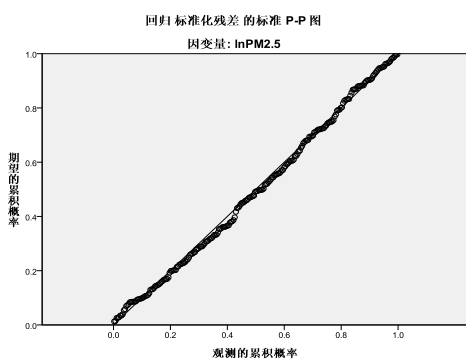


图 4-6 武汉的对数变换后标准化 P-P 图

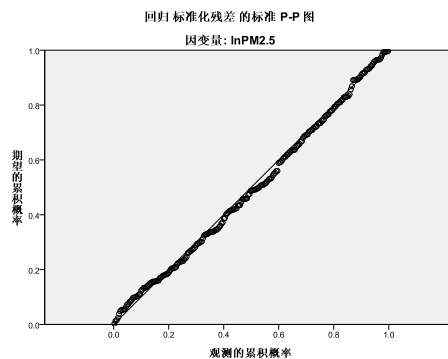


图 4-7 西安的对数变换后标准化 P-P 图

从图 4-4 和图 4-5 可以看出残差是随机分布的，说明模型拟合的效果不错。从图 4-6 和图 4-7 可以看出除了少数数据点偏移直线外，绝大多数点实在直线上的，这也进一步说明了模型的效果很好。

### 4.3 本模型数据来源

通过观察西安地区的  $PM_{2.5}$  随着时间的变化情况，分别统计计算了阴天和晴天的  $PM_{2.5}$  的均值，如表 4-4 所示：

表 4-4 不同天气下  $PM_{2.5}$  浓度表

全西安地区	晴天	阴天
$PM_{2.5}$ 浓度	150	210

通过上表可以明显看见阴天的  $PM_{2.5}$  浓度比晴天的大很多，那么晴天与阴天的区别就在于空气的湿度不同，所以基于这样的考虑就搜集了西安市对应时间的湿度。数据来源于《典型气象(设计典型)年逐时参数报表》西安市基准站 57036 号台站，

表 4-5 西安市基准站 57036 号台站 1 月 1 日至 4 月 26 号日相对湿度统计表

日期	1. 1	1. 2	1. 3	...	4. 24	4. 25	4. 26
日均相对湿度(%)	34	56	62	...	80	73	69

日平均湿度的变化趋势，对数据作出如下柱状图：

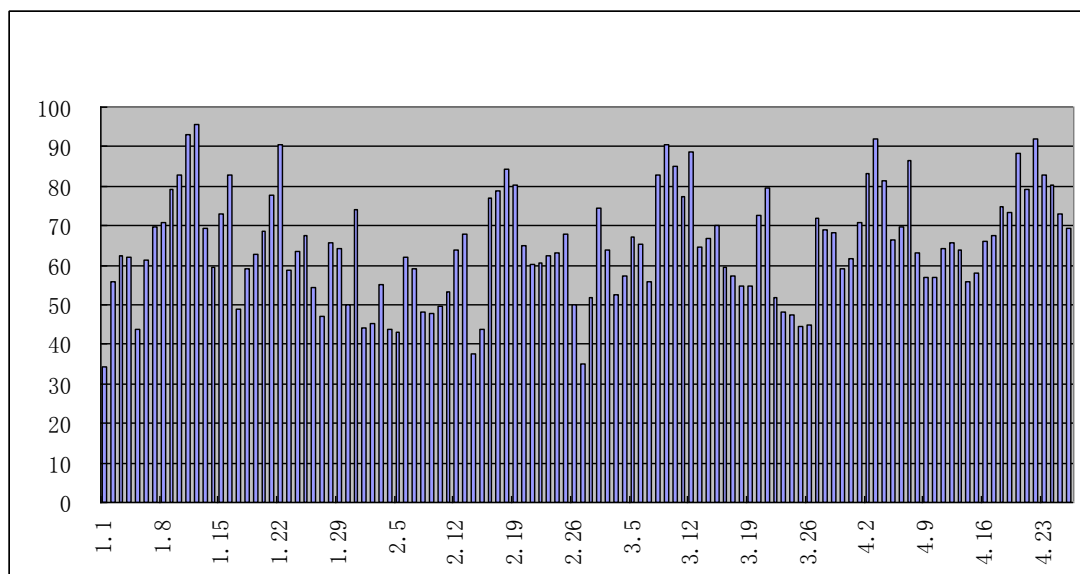


图 4-8 西安市基准站 57036 号台站 1 月 1 日至 4 月 26 号日相对湿度柱状图

从上图中可以看到西安市晴天时的湿度是在 40-50 左右徘徊的，阴天是在 60-70。下面将湿度的指标加入到原来的自变量中，然后重新建立多元非线性对数模型如下：

$$\ln y = \sum_{i=1}^4 a_i \ln x_i + b_i (\ln x_i)^2 + \sum_{i=j+1}^4 \sum_{j=1}^3 c_{i,j} \ln(x_i) \ln(x_j) + d \times H$$

其中  $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_{i,j}$ 、 $d$  表示系数， $H$  为湿度变量， $d$  为湿度变量的系数。通过 SPSS 求解得出：

西安：  $PM2.5 = e^{0.149 \times \ln(PM10) \times \ln(CO) + 0.025 \times \ln(SO_2)^2 - 0.003 \times H + 1.762}$

武汉：

$$PM2.5 = e^{0.436 \times \ln(PM10) \times \ln(CO) - 0.325 \times \ln(CO)^2 + 1.064 \times \ln CO - 0.223 \times \ln(PM10)^2 + 1.002 \times \ln(PM10) - 0.002 \times H - 2.321}$$

两个模型的拟合优度如下表所示：

表 4-6 模型拟合度

城市	武汉	西安
拟合优度 $R^2$ 取值	0.95	0.94

可以看出两个城市的拟合优度有很大的提高，这也进一步丰富了模型，让模型更加准确了。

## 五、问题二第 1 小问：西安市 13 个监测点 PM2.5 的时空分布

### 5.1 西安市 13 个监测点数据处理

在各个检测点所提供的数据中，由于种种原因数据未完整的(即数据有残缺项的)，在计算中对该组数据数据进行补全尽情计算。

### 5.1.1 各个监测点 PM2.5 的统计均值

依据附件 2 提供的西安市 13 个监测点 PM2.5 的检测数据,运用统计学的思想可以得出各个监测点 PM2.5 的均值。各个检测点的检测数据样本较大,持续时间较长,在此可以用各个检测点的数据近似代表各区域的 PM2.5 的值。

各个监测点 PM2.5 的均值计算公式如下:

$$\overline{PM} = \frac{\sum_{j=1}^n P_{ij}}{\sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^n P_{ij}} \quad (i = 1, 2, \dots, 13)$$

西安市 13 个监测点 PM2.5 的均值如下表所示:

表 5-1 13 个监测点 PM2.5 的均值

区域	高 压 开关厂	兴庆 小区	纺织城	小寨	市人民 体育场	高新 西区	经开区
PM2.5 均 值	214.089	180.339	183.027	171.143	178.902	204.884	172.786
区域	长安区	阎良区	临潼区	曲 江 文化集团	广运潭	草滩	
PM2.5 均 值	173.107	185.973	155.295	175.196	193.411	210.036	

从 PM2.5 计算结果可以看出,西安市 PM2.5 均值最高的监测点为高压开关厂,该点位于西安市二环边上,车流较大,同时该地区为西安市重工业较集中的地区,因此 PM2.5 含量较大。草滩地区近年来一直在进行开发建设(西安北火车站及其附属设施建设,以及相应的经济带建设)因此该地点这 PM2.5 含量较大,广运潭,阎良区均是由于工程建设引起,纺织城周边车流量较高压开关厂及兴庆小区相比较小,主要污染来源为灞桥火电厂,及国棉一到十场,随着国棉场外迁,该地区的 PM2.5 有所下降。

### 5.1.2 各个区域内 PM2.5 的时空分布云图

根据 13 个区域的 PM2.5 的均值,将空气质量指数分为 4 种类别后着色处理,形成时空分布云图。该区域中 PM2.5 的最大值为高压开关厂为 214.089,最小值为临潼区为 155.295,其他检测点的 PM2.5 的值处于该区域范围之内。

运用该地区内的 PM2.5 的均值确定的 PM2.5 的等级和颜色。

表 5-2 各个区域 PM2.5 检测均值及相关信息

均值范围	140~155	155~170	170~185	185~200	200~215	215~230
类别	优	良	轻度 污染	中度 污染	重度 污染	严重 污染
颜色	绿色	黄色	橙色	红色	紫色	褐红色

根据表 5-1 和表 5-2 可得西安市各个地区内 PM2.5 的时空分布云图如下图所示:

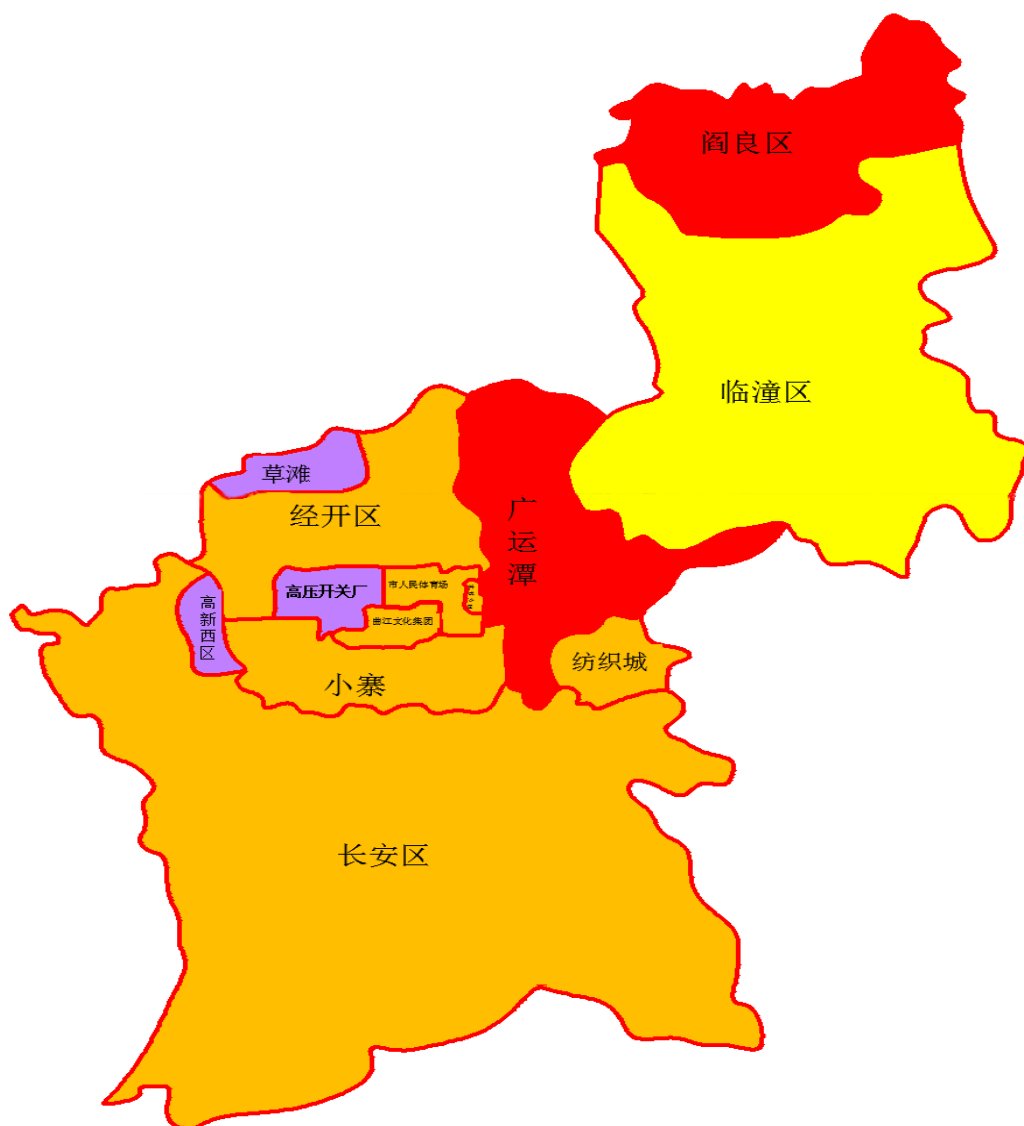


图 5-1 西安市 13 个监测点 PM2.5 的时空分布云图

### 5.1.3 时空分布云图分析

根据图 5-1 中 13 个监测点 PM2.5 的时空分布云图可以得到:

- 1) 高压开关厂、草滩、高新西区三个区域处于重度污染。
- 2) 阎良区和广运潭处于中度污染;
- 3) 临潼区的 PM2.5 的质量类别为良;
- 4) 其他 7 个区域处于轻度污染;
- 5) 这种 PM2.5 时空分布云图的原因分析:

高压开关厂处于工业区,污染较为严重,工业生产过程中排放大量的废弃烟雾造成空气污染,烟雾中含有较小的颗粒是污染的主要原因。高新西区是经济技术中心地段,人流量较大,较多的人群造成的生活垃圾,人为因素(燃烧燃料、对自然的破坏)也是造成 PM2.5 的值升高的主要原因。

草滩处于郊区地带,有一些污染性较严重的小型工厂被迫从市区迁移到郊区,

造成更严重的污染。小型工厂投资成本较低，废弃物处理体系不够完善，从而造成废气大量排放，污染大气。因而这三个区域的质量指标类别处于重度污染。

广运潭地区有谢王立交桥和万家村立交桥，连接通往外省的高速公路。同时广运潭地区处于西安市中心地段，车流量较大，交通运输便利。从而造成交通运输排放的汽车尾气成为主要的污染源。

阎良区是我国唯一、亚洲最大的集飞机设计研究、生产制造、试飞鉴定和科研教学为一体的体系阎良最为完整的重要航空工业基地，区内有全国最大的飞机制造企业——西安飞机工业(集团)有限责任公司，正是由于这个原因，制造飞机等大型产品造成的工业废气污染较为严重，但是公司投资成本较高，废弃物处理系统较为完善，造成的空气污染程度比草滩区轻。因而广运潭地区和阎良地区质量指标类别处于中度污染。

临潼区处于陕西关中腹地，骊山国家森林公园，与秦岭相连，地势高峻，山北麓为广阔原区，依山北下，形成几个阶梯，北接渭河平川。零河、戏水、玉川河等河，自南而北，河谷深切，形成几个南北纵向深谷。由于较好的地理位置和地势条件，工业区较少，居住人群也少，造成的污染较小。因而临潼区质量指标类别为良。

兴庆小区、小寨、纺织城、市人民体育场、经开区、长安区、曲江文化集团这 7 个区域造成 PM2.5 值升高的因素较多，主要来源有自然源(植物花粉和孢子、土壤扬尘、海盐、森林火灾、火山爆发等)和人为源(燃烧燃料、工业生产过程排放、交通运输排放等)。综合多种因素得出该 7 个区域质量指标类别为轻度污染。

5.2 增加时间因素构成四维因素的时空分布规律

检测点 PM2.5 的成分主要由水溶性离子、颗粒有机物和微量元素等组成。AQI 监测指标中的二氧化硫(SO<sub>2</sub>)，二氧化氮(NO<sub>2</sub>)，一氧化碳(CO)是在一定环境条件下形成 PM2.5 前的主要气态物体。

根据已有数据编程得西安市 13 个区域的各周的 PM2.5 时空分布规律如图 5-2 所示：

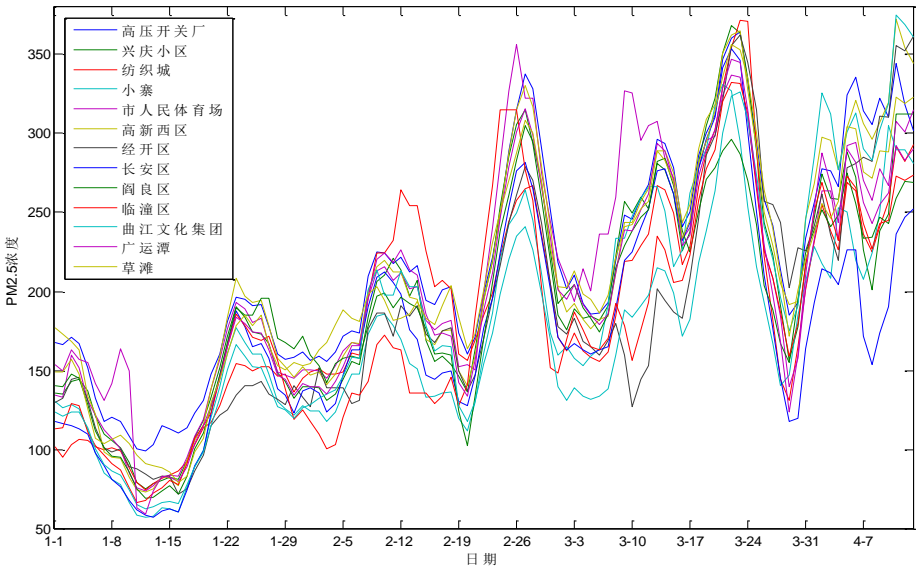


图 5-2 西安 13 个区域 PM2.5 时空分布规律现象

### 5.3 结果分析

根据图 3 可知：西安市 13 个区域总体的 PM2.5 的含量会随着时间的递增成逐渐增长的趋势。因为随着气温的转暖，出行的人群越来越多，车流量自然也会增长。与此同时人为因素带来的生活垃圾和汽车尾气排放造成大气中污染物的含量增加，PM2.5 的监测值也自然会增加。

PM2.5 颗粒浓度随着空气相对湿度增加而增大。因为当空气湿度较大时，空气中水蒸气容易以微尘为凝结形成雾，致使粒子变重，沉聚在底层大气中，形成一层保护层阻碍空气的扩散，导致空气中颗粒物污染增加。因而 PM2.5 与天气关系较大，阴雨天气是空气湿度较大，造成颗粒浓度的增加。

依据附件 3 西安地区气象数据资料可知：2013 年 2 月 19 日到 2013 年 3 月 3 日，天气由多云转阴，而后有小雨，最后由小雨转为晴天。相对湿度变化先增大后减小。因而 PM2.5 颗粒浓度也会随着空气相对湿度的变化量，先增大后减小。从图 3 中也可以看出，2 月 19 日到 3 月 3 日之间 PM2.5 也是先增大后减小，成局部正太分布规律，与根据附件 3 分析的结果吻合。

## 六、问题二第 2 小问：PM2.5 的发生和演变的数学模型

### 6.1 PM2.5 颗粒运动扩散模型的准备

#### 6.1.1 PM2.5 颗粒的受力分析

PM2.5 颗粒能够处于静止状态，一定受到多个力场的耦合作用。颗粒所受的力一般分为：重力、浮力、粘性阻力、压力梯度力和虚拟质量力等。在这多个力相互组合作用下，颗粒处于平衡状态。

##### (1) 重力和浮力

悬浮在流体中的颗粒物，其必然会受重力与浮力作用。这两个力与颗粒体积相关，又称为体积力，其表达式为：

$$F_g = (m_p - m_f)g = \frac{1}{6}(\rho_p - \rho_f)\pi d_p^3 g$$

式中， $F_g$  为体积力 N； $m_p$  为颗粒质量 kg； $m_f$  为与颗粒等体积的流体质量 kg； $\rho_p$  为颗粒密度 kg/m<sup>3</sup>； $\rho_f$  为流体密度 kg/m<sup>3</sup>； $d_p$  为颗粒直径 m； $g$  为重力加速度 m/s<sup>2</sup>。

##### (2) 粘性阻力

颗粒受到的粘性阻力与颗粒雷诺数的大小相关，颗粒雷诺数为： $Re_p = |u_f - u_p|d_p/\mu$ 。当颗粒雷诺数 Re 远远小于 1 时，颗粒受到的粘性力可由斯托克斯方程得出：

$$F_{st} = 3\pi\mu d_p (u_f - u_p)/C_c$$

式中， $F_{st}$  为粘性力，N； $\mu$  为气体动力粘度，kg/(m·s)； $u_f$  和  $u_p$  分别为流体和颗粒的速度矢量，m/s； $C_c$  为 Cunningham 修正系数，其在常压下的表达式

为:

$$C_c = 1 + K_n \left[ 1.257 + 0.400 \exp \left( -\frac{1.10}{K_n} \right) \right]$$

式中,  $K_n$  为努森 (Knudsen) 数,  $K_n = 2\lambda/d_p$ , 其中  $\lambda$  为气体分子平均自由程, 可按式计算

$$\lambda = \frac{\mu}{0.499 \rho \bar{v}}$$

式中,  $\bar{v}$  为气体分子的算术平均速度:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}}$$

式中,  $R$  为通用气体常数,  $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ;  $T$  为气体温度,  $\text{K}$ ;  $M$  为气体的摩尔质量,  $\text{kg}/\text{mol}$ 。

### (3) 压力梯度力

在非均匀流场中, 由于流体速度和流体压力的不均匀性, 在颗粒上产生的作用力称为压力梯度力, 压力梯度力的方向与其压力梯度方向相反, 其表达式为:

$$F_p = -\frac{1}{6} \pi d_p^3 \frac{\partial p}{\partial x}$$

其中  $\frac{\partial p}{\partial x}$  为压力梯度;

由于压力梯度与流体粘性无关, 主要由流场的不均匀性产生, 可在颗粒附近空间建立流场的 Navier-Stokes 方程, 并化简得到压力梯度:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left( \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \right)$$

式中,  $\rho$  为流体的密度, 单位  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;  $\partial u_f / \partial t$  表征流场的局部惯性,  $u_f \partial u_f / \partial x$  表征了流场的对流惯性力。

由以上两个方程式可得压力梯度力为:

$$F_p = \frac{1}{6} \pi d_p^3 \rho \left( \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \right)$$

### (4) 虚拟质量力

颗粒做变速运动时, 其外围包裹的流体随颗粒运动类似于附着了一部分质量在颗粒上, 这部分质量即虚拟质量。设定虚拟质量为  $M'$ , 随同颗粒速度  $U$  运动, 可根据周围流体总动能式计算得到虚拟质量:

$$M' = -\frac{\rho}{U^2} \oint_A \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

式中,  $\phi$  为由于颗粒运动而引起的扰动速度势函数;  $A$  为颗粒表面积。

对任意形状的物体, 其扰动速度势函数取决于该物体的形状和运动方向。因此, 一个给定物体的虚拟质量只与该物体的形状和方位有关, 而与其运动速度、角速度和加速度无关。球形颗粒物的虚拟质量为:



$$M' = \frac{1}{12} \pi d_p^3 \rho$$

声场中, 颗粒物在声波作用下做非恒定运动, 流场在颗粒上产生了虚拟质量。虚拟质量作用于颗粒上的力被称为虚拟质量力, 其表达式为:

$$F_{VM} = M' \frac{dU}{dt} = \frac{1}{12} \pi d_p^3 \rho \frac{dU}{dt}$$

式中,  $\frac{dU}{dt}$  为全导数形式,  $U = u_f - u_p$ 。

### 6.1.2 PM2.5 颗粒的漂移分析

颗粒在空中处于平衡状态是受多场耦合作用, 颗粒在平衡点位置上往复运动的因素主要来源于粘性力、虚拟质量力、压力梯度力的共同作用。流体媒质往复振动与颗粒产生速度差引起粘性力; 颗粒左右两侧媒质压力差产生了压力梯度力; 颗粒表面附近的气体跟随颗粒运动产生虚拟质量力。

在多场耦合作用下, 当一个力发生微小变动后, 颗粒就会发生定向漂移作用。这种作用力主要是颗粒与流体之间相位差异产生的非对称运动漂移作用。

根据已有研究结果可知, 相对粘性力, 虚拟质量力与压力梯度力都较小, 造成颗粒汇聚的主要因素来自于粘性力的变化。由牛顿第二定律, 颗粒受粘性力式等于加速度乘上颗粒物的质量, 得到

$$m_p = \frac{du_p}{dt} = \frac{3\pi\eta d_p}{C_c} (u_f - u_p)$$

引入修正的颗粒弛豫时间  $\tau_p$  :

$$\tau_p = \frac{d_p^2 \rho_p C_c}{18\eta}$$

化简得:

$$\tau_p \frac{du_p}{dt} + u_p = u_f$$

求解方程, 得到颗粒运动速度解为

$$u_p = u_a \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} + C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

由速度方程, 求解可得颗粒位移方程

$$\tau_p \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = u_a$$

若颗粒振动中心位置为  $x_0$ , 在  $\xi_p \ll x_0$  的条件下。颗粒振动位移化简为

$$\xi_p = -\omega^{-1} u_a \eta$$

$$\tau_p \left( \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{d^2 \xi_p}{dt^2} \right) + \left( \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi_p}{dt} \right) = u_a - \frac{1}{4} \frac{ku_a^2 \eta}{\omega} \sin(\delta)$$

式中， $\sin(\delta)$ 可由 $\delta$ 的三角关系得到：

$$\sin(\delta) = \frac{\omega\tau_p}{\sqrt{1+\omega^2\tau_p^2}}$$

最后化简求得，颗粒漂移平衡方程为：

$$\tau_p \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{dx_0}{dt} = -\frac{1}{4}\tau_p k u_a^2 \eta^2$$

上式右边表示由于颗粒的相位滞后而导致颗粒平衡位置发生运动的漂移速度，令颗粒漂移速度为 $v$ ，由上式得

$$v = -\frac{1}{4}\tau_p k u_a^2 \eta^2$$

由漂移力与 *Stokes* 阻力平衡，可得到颗粒的非对称运动对应的漂移力为

$$\bar{F}_v = -\frac{1}{4}C_c m_p k u_a^2 \eta^2$$

### 6.1.3 PM2.5 颗粒污染物扩散模式

PM2.5 颗粒污染物扩散所研究的是湍流与烟流传输过程中污染物浓度衰减的变化关系。为了预测与计算各种条件下污染物浓度在传输过程中的时空分布规律，要将污染源在当时气象要素以及下垫面条件下的污染物扩散过程模式化，并确定模式计算中所需的参数。

#### (1) 点源连续排放扩散模式及解析

##### 1、大气环境下点源连续排放扩散模式

由分子扩散的 *Fick* 定律(即梯度输送理论：分子扩散的质量通量与扩散物质的浓度梯度成正比)和湍流扩散等扩散理论。

由此可以得到污染物在迁移、转化过程中的基本方程：

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + S(x, y, z, c, t)$$

其中： $c$ ：污染物在环境介质中的浓度，单位  $g/m^3$ ； $D_x$ ， $D_y$ ， $D_z$  为  $x$ ， $y$ ， $z$  方向上的分子扩散系数； $D_{mx}$ ， $D_{my}$ ， $D_{mz}$  为湍流扩散系数，单位  $g/m^3$ ； $D_{1x}$ ， $D_{2y}$ ， $D_{3z}$  为弥散系数  $D_{2x}$ ， $D_{2y}$ ， $D_{2z}$  的整合，即：

$$\begin{cases} D_x = D_{mx} + D_{1x} + D_{2x} \\ D_y = D_{my} + D_{1y} + D_{2y} \\ D_z = D_{mz} + D_{1z} + D_{2z} \end{cases}$$

$S(x, y, z, c, t)$  为考虑到环境介质中会由于物理、化学、生物等作用引起污染物的增减在公式中附加的一个源汇项。

##### 2、PM2.5 颗粒在稳定状态下基本模型的解析解

在保持环境介质流动状态和污染源排放速率定常的条件下,环境中的污染物分布状况也是稳定的。此时污染物在某一空间位置的浓度不随时间变化,这种不随时间变化的状态称为稳态。如果所研究的问题的时间尺度很大,但污染物浓度的平均值保持在相对稳定的状态下,这时也可以通过取时间平均值将动态问题按稳态处理。在无边界大气条件下,一个稳定污染点源连续排放的扩散模型可通过基本模型简化得到。

对定常连续点源,有以下假设:

- 1)流动是稳定的,且有主导方向。
- 2)污染物在大气中只有物理运动,没有发生化学和生物变化。
- 3)在所监测的范围内没有其他同类污染源和汇。

由高斯扩散模式可得其扩散方程为:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

已知边界条件为:

$$\begin{cases} x = y = z \rightarrow 0 \text{ 时 } c \rightarrow 0 \\ x = y = z \rightarrow \infty \text{ 时 } c \rightarrow 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u c \, dy \, dz = Q \end{cases}$$

可得浓度解为:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi(D_y D_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{u}{4x}\left(\frac{y^2}{D_y} + \frac{z^2}{D_z}\right)\right]$$

设  $x = ut$ , 令  $2D_y t = \sigma_y^2$ ,  $2D_z t = \sigma_z^2$ ,

则上式的解可表达为:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)\right]$$

此即为连续稳定排放的点源在三维均匀稳定流场中的浓度分布公式,亦即正态浓度分布公式。

此模型的基本假设为:

- 1)污染物在烟羽或烟团的各端面上呈正态分布(高斯分布);
- 2)整个研究空间内风速场是均匀稳定的;
- 3)污染源强是连续均匀的;
- 4)整个扩散过程污染物质量守恒。

因此在公式运用中需要有很强的假定,另外它也未能把许多影响较大的实际情况,如地面和地形的条件,除风速以外的其他气象条件,污染源的空间位置等考虑在内,所以该公式一般不能直接投入应用,在实际应用过程中,需要对公式加以修正,把上述各种影响考虑进去。

## (2)考虑大气湿度变化的 PM2.5 污染物扩散模式及解析

在无边界大气环境中,连续点源排放的气体污染物在均匀流动的含湿大气中做三维扩散,在不考虑化学反应的情况下,可以认为该过程是气体污染物组分在

干空气组分和水蒸气组分的均匀混合物中的扩散过程。

### 1、PM2.5 污染物扩散的数学模型

由于空气湿度主要影响的分子扩散系数，所以模式

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} = & (D_x - D_{x^*} - D_{mx}) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + (D_y - D_{y^*} - D_{my}) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ & + (D_z - D_{z^*} - D_{mz}) \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S(x, y, z, c, t) \end{aligned}$$

修正为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} = & (D_x - D_{x^*} - D_{mx}) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + (D_y - D_{y^*} - D_{my}) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ & + (D_z - D_{z^*} - D_{mz}) \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + S(x, y, z, c, t) \end{aligned}$$

其中： $D_{mx}, D_{my}, D_{mz}$  分别  $x, y, z$  方向上在干空气中的分子扩散系数； $D_x, D_y, D_z$  分别  $x, y, z$  方向上在湿空气中的分子扩散系数； $D_{x^*}, D_{y^*}, D_{z^*}$  湿度对于分子扩散系数的影响变化量。

### 2)PM2.5 颗粒在稳定状态下基本模型的解析解

数学模型基本假设如下：

- 1)流动是稳定的，且有主导方向；
- 2)污染物在大气中只有物理运动，没有发生化学和生物变化；
- 3)在所监测的范围内没有其他同类污染源和汇；
- 4)大气环境为干空气组分和水蒸气组分的均匀混合物。

由基本假设可得

$$\begin{cases} u = u_x = \text{const}, u_y = 0, u_z = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \\ S(x, y, z, c, t) = 0 \end{cases}$$

由于主导风对污染物的输送能力远远大于湍流运动引起的污染物在主导风方向上的扩散，可以假定  $u_x \frac{\partial c}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right)$ ，又有  $D_y$  与  $y$  无关， $D_z$  与  $z$  无关，浓度值仅仅是  $x$  和  $u$  的函数，则基本公式 可变为：

$$u_x \frac{\partial c}{\partial x} = (D_y - D_{y^*} - D_{my}) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + (D_z - D_{z^*} - D_{mz}) \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

$$\text{已知边界条件: } \begin{cases} x=y=z \rightarrow 0 \text{ 时 } c \rightarrow \infty \\ x=y=z \rightarrow \infty \text{ 时 } c \rightarrow 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u c dy dz = Q \end{cases}$$

求解以上方程，可得到

**PM2.5 颗粒污染物浓度值数学模型为：**

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi x \left( D_y + D_y^* - D_{my} \right)^{1/2} \left( D_z + D_z^* - D_{mz} \right)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{u}{4x} \left( \frac{y^2}{\left( D_y + D_y^* - D_{my} \right)} + \frac{z^2}{\left( D_z + D_z^* - D_{mz} \right)} \right) \right]$$

#### 6.1.4 季节因素的影响

陕西省西安市地处西北区，常年受到沙漠化的影响，同时不同季节对空气质量的指标也有很大关系。鉴于附件 2 中仅提供了 2013 年前四个月的 **PM2.5** 颗粒、**SO<sub>2</sub>**、**NO<sub>2</sub>**、**PM10**、**CO** 浓度指标值，运用第一问中求解建立的 **PM2.5** 颗粒浓度与 **SO<sub>2</sub>**、**NO<sub>2</sub>**、**PM10**、**CO** 浓度指标值的多元对数综合模型如下：

$$\ln y = \sum_{i=1}^4 a_i \ln x_i + \sum_{i=1}^4 b_i \ln(x_i^2) + \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=2}^4 \sum_{k=1}^4 c_i \ln x_j x_k$$

#### 6.1.5 考虑风力和季节因素影响下的 **PM2.5** 污染物扩散模型

##### (1) 太阳倾角的计算

$$\varphi = \left[ 0.006918 - 0.399912 \cos Q_0 + 0.0702578 \sin(2Q_0) - 0.002697 \cos(3Q_0) + 0.001480 \sin(3Q_0) \right] \times 180 / \pi$$

式中： $Q_0 = 360d_n / 365$  度； $\varphi$  为太阳倾角； $d_n$  为一年中的日期序数 0, 1, 2, 3, ……364。

##### (2) 太阳高度角 $h_0$ 的计算

$$h_0 = \arcsin \left[ \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos(15t + \theta - 300) \right]$$

式中： $h_0$  为太阳高度角度； $\alpha$  当地纬度； $t$  北京时间； $\beta$  太阳倾角； $\theta$  当地经度。

##### (3) 确定太阳辐射等级

由计算得到的太高度角  $h_0$  和云量，由表 6-1 查出太阳辐射等级

表 6-1 太阳辐射等级

总云量/低云量	夜间	太阳高度角 $h_0$			
		$h_0 \leq 15^\circ$	$15^\circ < h_0 \leq 35^\circ$	$35^\circ < h_0 \leq 65^\circ$	$h_0 \geq 65^\circ$
$\leq 4/\leq 4$	-2	-1	+1	+2	+3
$5 \sim 7/\leq 4$	-1	0	+1	+2	+3
$\geq 8/\leq 4$	-1	0	0	+1	+1
$\geq 5/5 \sim 7$	0	0	0	0	+1
$\geq 8/\geq 8$	0	0	0	0	0

【注】云量是指将天空分为十分(十分制)所占的份数。

#### (4)确定大气稳定度等级

表 6-2 大气稳定度等级

地面风速 ( $m/s$ )	太阳辐射等级					
	+3	+2	+1	0	-1	-2
$\leq 1.9$	A	A-B	B	D	E	F
$2 \sim 2.9$	A-B	B	C			
$3 \sim 4.9$	B	B-C	C	D	D	E
$\geq 6$	D	D	D	D	D	D

地面风速系指离地面 10m 高处的 10 分钟平均风速。若在无组织排放现场测定 10m。

高度的风速有困难,可以用现场开阔地带 2m 以上高度,或高于 10m 高度测定的平均风速代替,并以  $\bar{U}_{10} = \bar{U}_a \left( \frac{10}{a} \right)^n$ , 计算到  $\bar{U}_{10}$  (10 米高度风速), 式中  $a$  为测定风速实际高度,  $n$  见表 6-3:

表 6-3 各稳定度条件下的风廓线幂指数数值

稳定度 地区	A	B	C	D	E、F
城市	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
农村	0.07	0.07	0.10	0.15	0.25

根据地面风速和太阳辐射等级,由表 4-3 查出大气稳定度等级。表中稳定度级别为: A 为极不稳定, B 为不稳定, C 为弱不稳定, D 为中性, E 为弱稳定, F 为稳定; 稳定度级别 A-B 表示按 A、B 级的数据内插。

## 6.2 PM2.5 颗粒污染物浓度的点源扩散模型

### 6.2.1 PM2.5 点源扩散模型

采用传统的高斯及其法定推荐修正模式:

$$c(x, y, z) = Q(2\pi u \sigma_y \sigma_z)^{-1} \cdot \exp\left[-y^2/(2\sigma_y^2)\right] \times \left\{ \exp\left[-(z-He)^2/(2\sigma_z^2)\right] + \exp\left[-(z+He)^2/(2\sigma_z^2)\right] \right\}$$

表 6-4 P-G 曲线近似式( $\sigma_y = \gamma x^a$ )

稳定度	$a$	$\gamma$	$x$ (米)
A	1.12154	0.0799904	0-300
	1.51360	0.00854771	300-500
	2.10881	0.000211545	500- $\infty$
B	0.964485	0.127190	0-500
	1.09365	0.0570251	500- $\infty$
C	0.917595	0.106803	0- $\infty$
C-D	0.838628	0.120152	0-2000
	0.756410	0.235667	2000-10000
	0.815575	0.235667	10000- $\infty$
D	0.826212	0.104634	0-1000
	0.632023	0.400167	1000-10000
	0.555360	0.810763	10000- $\infty$

综上所述:

**PM2.5 颗粒污染物浓度的点源扩散模型为:**

$$c(x, y, z) = Q(2\pi u \sigma_y \sigma_z)^{-1} \cdot \exp\left[-y^2 / (2\sigma_y^2)\right] \times \\ \left\{ \exp\left[-(z - He)^2 / (2\sigma_z^2)\right] + \exp\left[-(z + He)^2 / (2\sigma_z^2)\right] \right\}$$

### 6.2.2 PM2.5 面源扩散模型

在颗粒污染物在扩散过程中随着风力、湿度等的影响下, 扩散会随着风向变化, 成多维面源的形式扩散, 可以认为是推荐的虚点源后置模式。

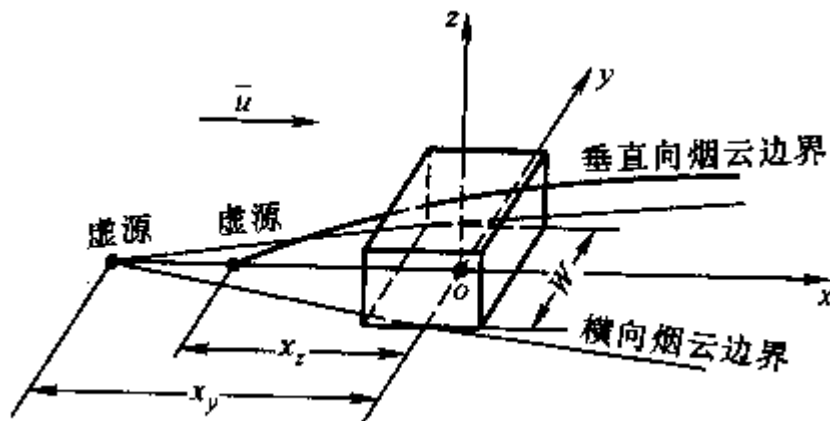


图 6-1: 虚拟点源示意图

由于城市面源的平面分布和高度都是不均匀的,所以一般是把城市划分为许多小正方形,每一正方形作为一个面源单元。正方形边长的选取,视面源的分布和城市大小而定,一般在0.5–10km之间选取。我国的“制订原则和方法”推荐边长取 1、2、4km。

虚拟点源的面源扩散模式假定:

1)每一面源单元的污染物排放量集中在该单元的形心上;

2)面源单元形心的上风向距离  $x_0$  处有一虚拟点源,它在面源单元中心线处产生的烟流宽度( $2y_0 = 4.3\sigma_{y0}$ )等于面源元宽度  $W$ ;

3)面源单元在下风向造成的浓度可用虚拟点源在下风向造成的同样的浓度所代替。

由假定 2)可得:

$$\sigma_{y0} = \frac{W}{4.3}$$

由此求出  $\sigma_{y0}$  和大气稳定度级别,应用 P–G 曲线图或表可反求出  $x_0$ , 再有  $x + x_0$  查出  $\sigma_y$ , 有  $x$  查出  $\sigma_z$ , 代入点源扩散的高斯模式下风向各面源单元形心处的浓度:

$$c = \frac{Q}{\pi u (\sigma_y + \sigma_{y0}) (\sigma_z + \sigma_{z0})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{(\sigma_y + \sigma_{y0})^2} + \frac{He^2}{(\sigma_z + \sigma_{z0})^2} \right] \right\}$$

$He$  面源的平均高度,  $m$ 。

若排放源高度相差较大,相对较高,也可假定  $z$  方向上有一虚拟点源,  $\sigma_{z0}$  由源的最初垂直分布的标准差给出,由  $\sigma_{z0}$  求出一个  $x_{z0}$ , 由  $x + x_{z0}$  求出  $\sigma_z$ , 由  $x + x_{z0}$  求出  $\sigma_y$ , 再代入上述模式中估算面源浓度。

综上所述:

**PM2.5 颗粒污染物浓度的点源扩散模型为:**

$$c = \frac{Q}{\pi u (\sigma_y + \sigma_{y0}) (\sigma_z + \sigma_{z0})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{(\sigma_y + \sigma_{y0})^2} + \frac{He^2}{(\sigma_z + \sigma_{z0})^2} \right] \right\}$$

$He$  面源的平均高度  $m$ 。

## 6.3 模型的求解

### 6.3.1 扩散参数的计算

扩散参数  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  的确定是很困难的,往往需要进行特殊的气象观测和大量的计算工作。参数选取至少应满足以下条件:其一,满足计算公式本身所要求的条件;其二,参数的选取和计算结果要有典型性和代表性;其三,要符合实际情况。但在实际工作中,总是希望根据常规的气象观测资料就能估算出扩散参数。

#### (1)P-G 曲线近似



帕斯奎尔 (Pasquill) 于 1961 年推荐了一种方法, 仅需常规气象观测资料就可估算出  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$ 。吉福德 (Gifford) 进一步将它作成应用更方便的图表, 所以这种方法又简称 P-G 曲线法。这种方法的计算结果在 D、C 级稳定度时误差较小, 在 E、F 级稳定度时误差较大。H/H 越大, 误差越小。改进办法是对 P-G 曲线进行修正。在粗糙下垫面时, 按实测的稳定度等级向不稳定方向提高 1-2 级然后再查 P-G 曲线。我国的“制定原则和方法”采用了这一办法, 并规定: 在平原地区农村和城市远郊区, 对 A、B、C 级稳定度, 直接用表中的 P-G 曲线幂函数式计算; D、E、F 级则需向不稳定方向提高半级后查算。对工业区或城区中的甲类排放标准的污染源, 稳定度 A、B 级不提级, C 级提到 B 级, 级向不稳定方向提一级半后按表查算。非工业区的城区, A、B 级不提级, C 级提到 B-C 级, D、E、F 级向不稳定方向提一级后按表查算。丘陵山区的农村或城市, 按城市工业区处理。

表 6-5 P-G 曲线近似式 ( $\sigma_y = \gamma x^a$ )

稳定度	$a$	$\gamma$	$x$ (米)
A	0.901074	0.425806	0-1000
	0.850934	0.602052	1000- $\infty$
B	0.914370	0.281846	0-1000
	0.865014	0.396353	1000- $\infty$
C	0.924279	0.177154	0-1000
	0.885157	0.232123	1000- $\infty$
D	0.929418	0.110726	0-1000
	0.888723	0.146669	1000- $\infty$
E	0.9208018	0.0864001	0-1000
	0.896864	0.101947	1000- $\infty$
F	0.929418	0.0553634	0-1000
	0.888723	0.0733348	1000- $\infty$

## (2) 布里吉斯扩散参数

总结在城市或粗糙下垫面条件下的试验资料对 P-G 曲线进行改进提出布里吉斯扩散参数公式, 如表 4-7 和 4-8 所示。对于开阔平坦的下垫面, 即平坦的农村用表 4-7 中的公式, 城市下垫面用表 4-8 中的公式。这套公式适用于高烟囱排放下风向 20-30km 左右的范围。

### 6.3.2 季节因素分月计算

将每天的颗粒污染物浓度指标值求和得出每个月的污染物浓度总指标值, 进而得出 2012 年每个月的 PM2.5 颗粒污染物浓度的指标值。

表 6-6 各个月份 PM2.5 颗粒污染物指标总含量的预测值

月份	1	2	3	4	5	6
PM2.5	7636	7523	5610	3599	5537	6684
月份	7	8	9	10	11	12
PM2.5	3257	4683	5874	6431	4686	6895

小寨和兴庆小区四个季节的 PM2.5 颗粒污染物指标总含量如下表及下图所示:

表 6-7 三个检测点不同季节 PM2.5 颗粒污染物指标值的总含量

PM2.5 检测点 \ 季节	春季	夏季	秋季	冬季
高压开关厂	20769	15820	13814	18012
小寨	16670	13586	15328	16127
兴庆小区	19735	14579	14657	17457

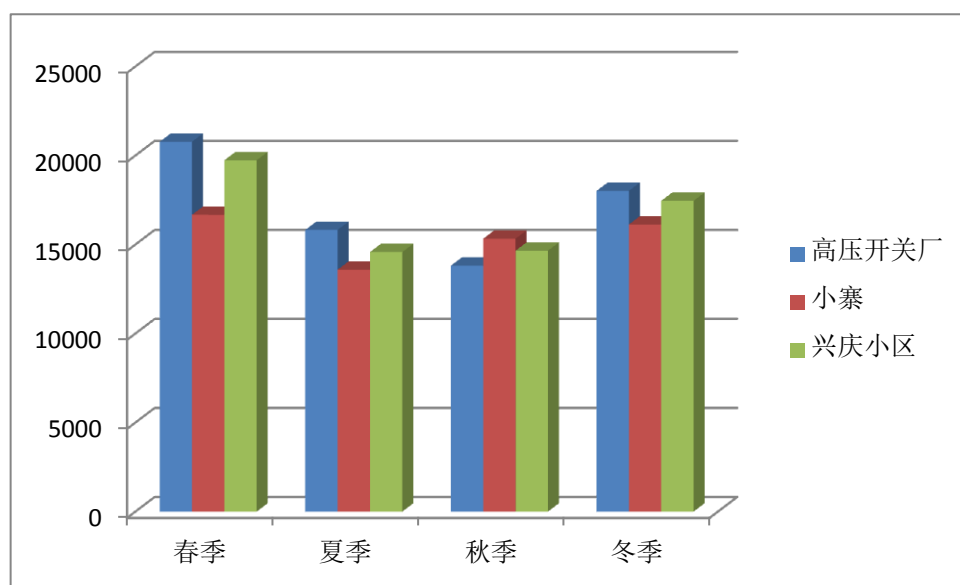


图 6-2 三个检测点不同季节 PM2.5 颗粒污染物的指标值

西安市的秋季污染水平低于冬春两季。这是由于冬春季节风速大于夏秋季节, 导致地面扬尘增加, 细颗粒物浓度升高。秋季秋高气爽, 大气扩散条件好, 初秋繁茂的植被对颗粒物有良好的吸纳作用。而且冬春季节温度较低, 大气层结较稳定, 易出现辐射逆温现象, 这些都不利于 PM2.5 迅速的扩散迁移, 使其浓度发生积累而增大。

### 6.3.3 PM<sub>2.5</sub> 颗粒污染物定量与定性分析

表 6-8 13 个检测点春、夏季 PM<sub>2.5</sub> 平均值

PM <sub>2.5</sub> 季节 \ 地区	高压开关厂	兴安小区	纺织城	小寨	...	草滩
春季	138.4231	115.8077	101.5385	102.16	...	119.4615
夏季	236.0114	219.6875	214.8118	196.0465	...	237.4186

【注】相关数据来源:

[http://www.xianemc.gov.cn/sxmcp\\_qt.asp?lb=%D6%CA%C1%BF%C8%D5%B1%A8&parame=1&whichpage=19&pagesize=30](http://www.xianemc.gov.cn/sxmcp_qt.asp?lb=%D6%CA%C1%BF%C8%D5%B1%A8&parame=1&whichpage=19&pagesize=30)

表 6-9 季节相同、气象大致相同、地理方位不同受风向影响的 PM<sub>2.5</sub> 变化表

时间	季节	天气	相对湿度	风向	广运潭	临潼
2013-8-14	夏季	晴	66%	东风≤3 级	77	62
2013-8-15	夏季	晴	67%	东风≤3 级	70	69
2013-8-16	夏季	晴	69%	东风≤3 级	72	85

【注】: 临潼位于广运潭东北部

表 6-10 同一地点、季节相同、气象条件基本相同下受天气影响的 PM<sub>2.5</sub> 变化

时间	季节	天气	相对湿度	风向	温度	开关厂小区 PM <sub>2.5</sub> 值
2013-4-18	春季	阴	73%	东风 5~6 级	6~14℃	200
2013-4-19	春季	小雨	75%	东风≤3 级	12~24℃	125
2013-4-23	春季	晴	73%	东风≤3 级	14~27℃	200
2013-4-24	春季	晴	76%	东风≤3 级	11~26℃	195

表 6-11 同一地点、季节相同、天气相同下受相对湿度影响的 PM<sub>2.5</sub> 变化

时间	季节	天气	相对湿度	风向	广运潭	临潼	阎良	长安
2013-4-30	春季	多云	49%	东风≤3 级	54	50	64	62
2013-5-01	春季	多云	75%	东风≤3 级	109	92	87	93
2013-5-02	春季	多云	54%	东风≤3 级	57	75	72	63
2013-5-03	春季	多云	84%	东风≤3 级	125	128	117	NA

由上述四表结合上文西安市 PM<sub>2.5</sub> 的发生与演变、扩展与衰减模型得到如下结论:

1)不同季节在西安市区的 PM<sub>2.5</sub> 有所变化,可以发现夏季 PM<sub>2.5</sub> 的值明显比春季小,大约小 80~120,这可以得出 PM<sub>2.5</sub> 的形成受季节影响较大,季节为 PM<sub>2.5</sub> 成因的一个因素;

2)从地理信息上看,临潼位于广运潭的东北方向,在季节相同、气象大致相同,由于风向的影响,在 2013-8-14 到 2013-8-16,临潼 PM<sub>2.5</sub> 值不断升高,涨幅约为 7~16,广运潭涨幅约为-7~2,而临潼为轻度污染区、广运潭为重度污染

区且附件为轻度污染区。不考虑风向的因素，理论上广运潭 PM2.5 的增幅应该比临潼大，而实际确小。所以风向会导致 PM2.5 的扩散，使地区 PM2.5 含量增高。因此风向为 PM2.5 成因的主要因素之一；

3)在 2013-4-30 到 2013-5-3 号，同一地点、季节相同、天气相同下结合风向的因素，发现受到相对湿度的影响，13 个监测点的 PM2.5 增幅均达到 50，该数据远比受风向带来的影响大，因此得出相对湿度是影响 PM2.5 形成的重要因子；

4)在 2013-4-18 到 2013-4-19，和 2013-4-23 到 2013-4-24，这两段时间类，在季节相同、气象条件基本相同下，开关小区 PM2.5 的起始值在 2013-4-18 和 2013-4-23 日均为 200，但是第二天的天气由于变故 2013-4-19 为小雨，当天 PM2.5 下降 75，而 2013-4-24 继续为晴天且 PM2.5 变化值不大，综合分析，得出天气的变化也是影响 PM2.5 形成的重要成因之一。

## 七、问题二第 3 小问：PM2.5 突变应急处理模型

西安市地处秦岭以北，受沙尘暴的影响较大。市内大力发展工业，人口密度逐年增长，车辆使用频繁，燃烧燃料、工业生产过程排放、交通运输排放尾气等造成空气污染越来越严重。倘若出现化工厂的燃料出现泄漏，造成 PM2.5 的指标值发生突变，此时需要对污染源进行预测，并做好应急处理工作。

依据题目要求该地区 PM2.5 监测数据最高的一天作为研究对象，在此选取 2013 年 1 月 14 日颗粒污染较严重的高压开关厂的 PM2.5 颗粒污染物的含量，当日的 PM2.5 指标值为 500，处于四个月以来监测数据最大值。当此时的 PM2.5 颗粒污染物的浓度得以有效控制，其他地区污染物的浓度也将有很大的改观。当日天气阴，湿度较大；风向为北风，风速  $\leq 3m/s$ 。当浓度增至 2 倍，即 PM2.5 颗粒污染物的指标值突变为 1000，在风速  $\leq 3m/s$  的情况下，持续 2 小时，在下风口的方向上影响范围为 2.16km。在沿着风向，PM2.5 颗粒污染物浓度会随着距离的递增，呈现递减的趋势。

### 7.1 PM2.5 在点源扩散模式下的突变应急处理

当某地区的一处化工厂燃烧大型锅炉排烟现象，该地区 PM2.5 的浓度随时会增加数倍。此时需要用点源扩散模型进行浓度分析，同时需要考虑风向，湿度等天气和季节因素的影响。

用点云图可以很清晰的表示出 PM2.5 颗粒污染物浓度沿着风向的变化情况。其中红色表示浓度最高，绿色浓度最低，污染最小。在空间浓度分布图中，高度可以反映 PM2.5 的浓度大小，更加形象反映出浓度的变化情况。

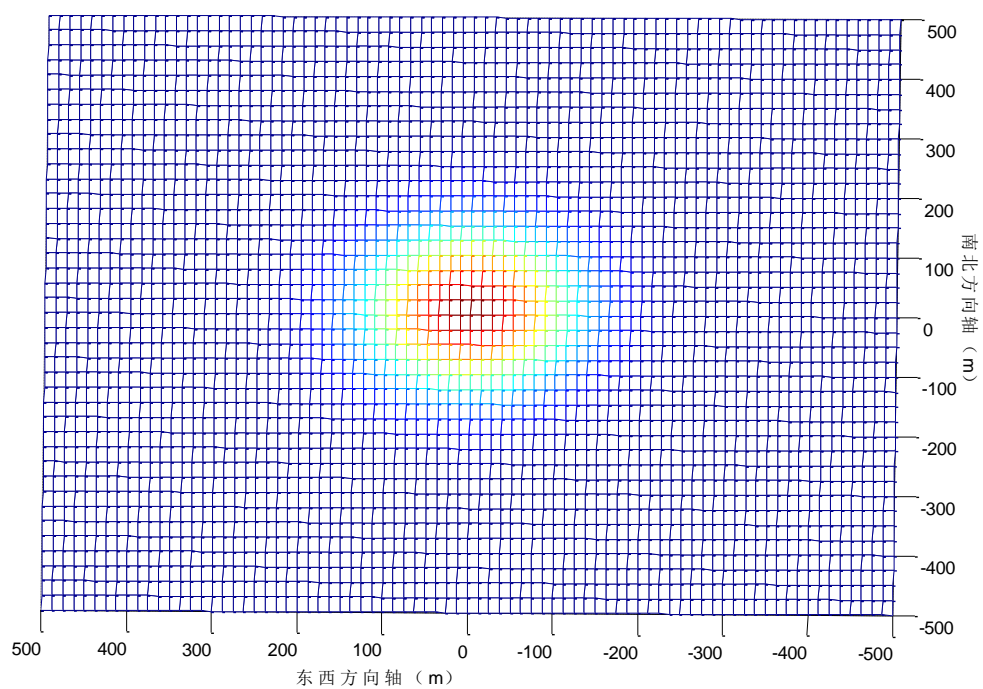


图 7-1 PM2.5 颗粒污染物浓度点源模式分布图

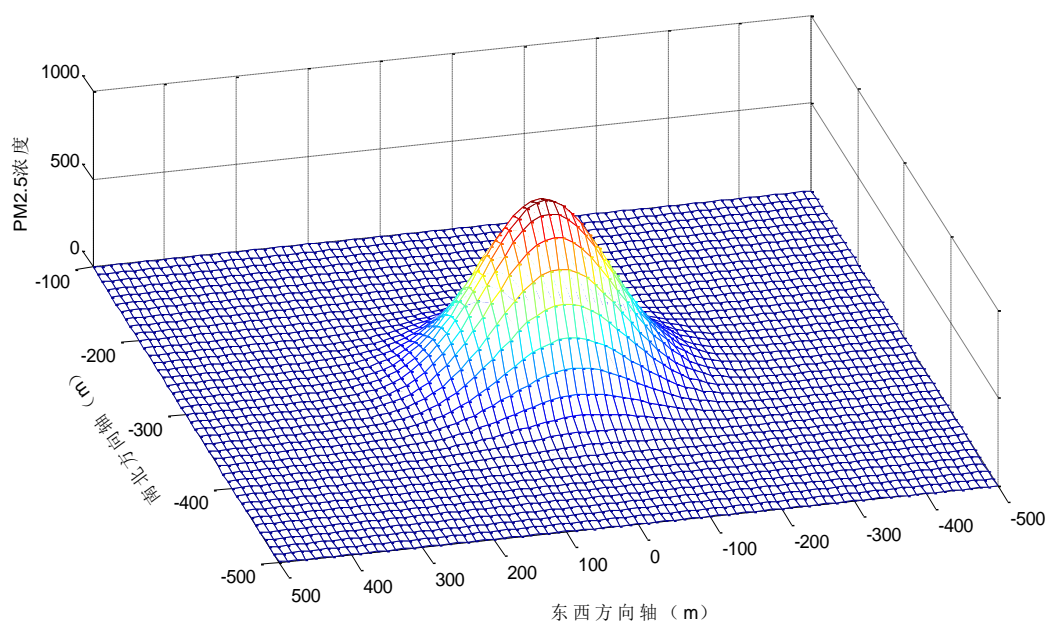


图 7-2 PM2.5 颗粒污染物在点源模式下空间分布图

当外界有风时，在风力作用下，PM2.5 浓度沿着风吹的方向扩散变化情况。示意图如下：

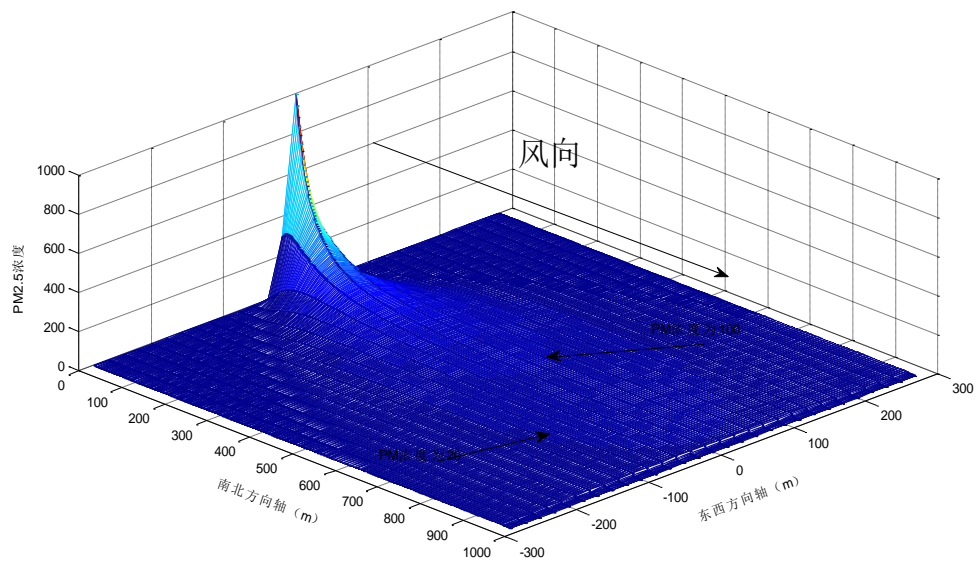


图 7-3 在风力作用下，PM2.5 颗粒浓度的扩散的空间

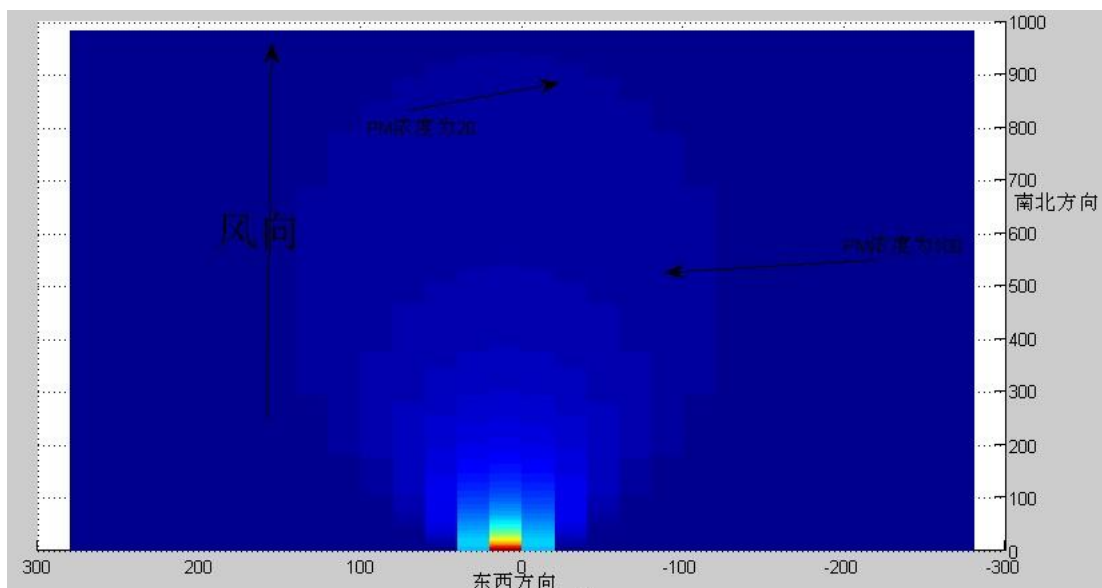


图 7-4 在风力作用下，PM2.5 颗粒污染物浓度的消散

## 7.2 在点源扩散模式下，PM2.5 浓度的重度污染区和可能安全区域

在点源模式下，高压开关厂的污染点源在风作用下，PM2.5 颗粒污染物浓度在地形图上的变化情况。

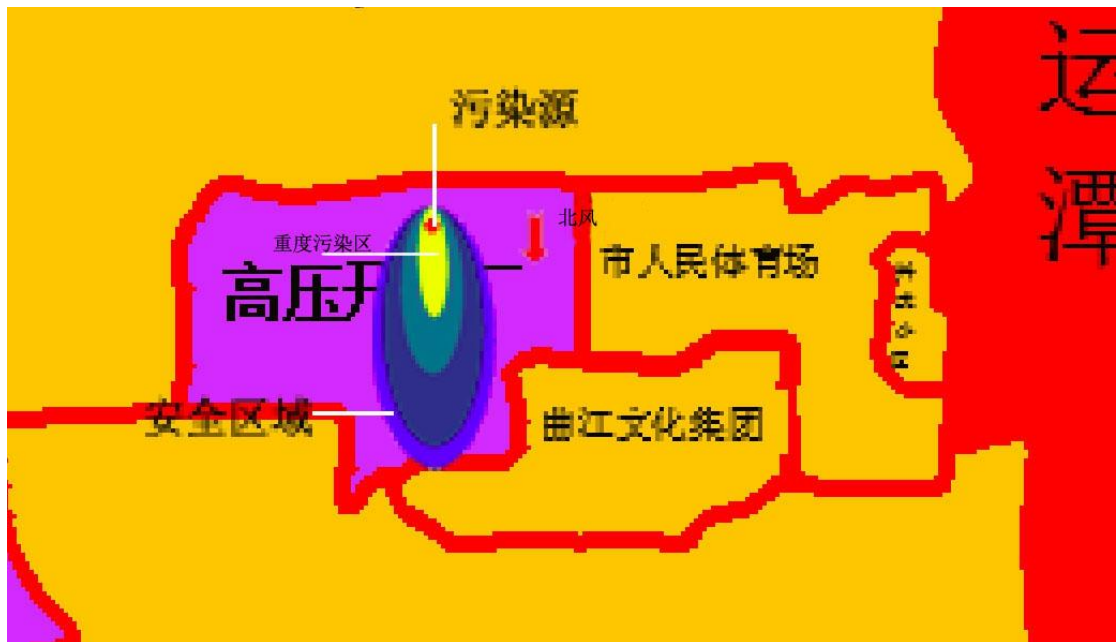


图 7-5 在点源模式下，PM2.5 颗粒污染物浓度扩散示意图

当点源污染物排放后，首先上升到一定的高度，在风力、风速、湿度等天气和季节等因素的影响下，污染物的消散较为复杂，但是在风力的作用下，PM2.5 颗粒污染物的质量较小，它会随着风的变化而变化，有时候还会产生涡旋现象。总体移动方向是沿着风吹的方向，垂直于风的方向也会发生相应的扩散现象，但是扩散幅度不是太大。

在点源模式下，污染物的影响范围较小，消散较快。

根据第二小问点源扩散模型，在假设北风的情况下，以污染源 PM 为 280 进行计算，扩散时间及污染范围如下表：

表 7-1 PM2.5 点源扩散实例计算表

风级	危险区域半径	安全区域	污染源消散时间
风级 3 级	893.00m	1428.8m~1786.0m	75min
风级 4 级	1339.5m	2143.2m~2629.0m	61min
风级 5 级	1875.3m	3000.5m~3750.6m	48min
风级 6 级	2500.4m	4000.6m~5000.8m	32min

由上表可得到如下结论：

1)对于点污染而言，风级越大污染区域的半径越大、安全区域的起始值也相应扩大；

2)消散时间随着风级的加大而减少，这与前文分析风速是 PM2.5 形成或扩散的重要因素之一高度一致；

### 7.3 PM2.5 在面源扩散模式下的突变应急处理

当某地区出现沙尘暴、大面积有害剧增时，该地区的 PM2.5 颗粒污染物浓



度会大面积的急剧增长，此时需要采用面源扩散模型进行分析。它具有受影响的范围大、扩散广、消散慢和沿着风向方向递减速慢等特点。

用色彩云图可以很清晰的表示出 PM2.5 颗粒污染物浓度沿着风向的变化情况。其中红色表示浓度最高，绿色浓度最低，污染最小。在空间浓度分布图中，高度可以反映 PM2.5 的浓度大小，更加形象反映出浓度的变化情况。

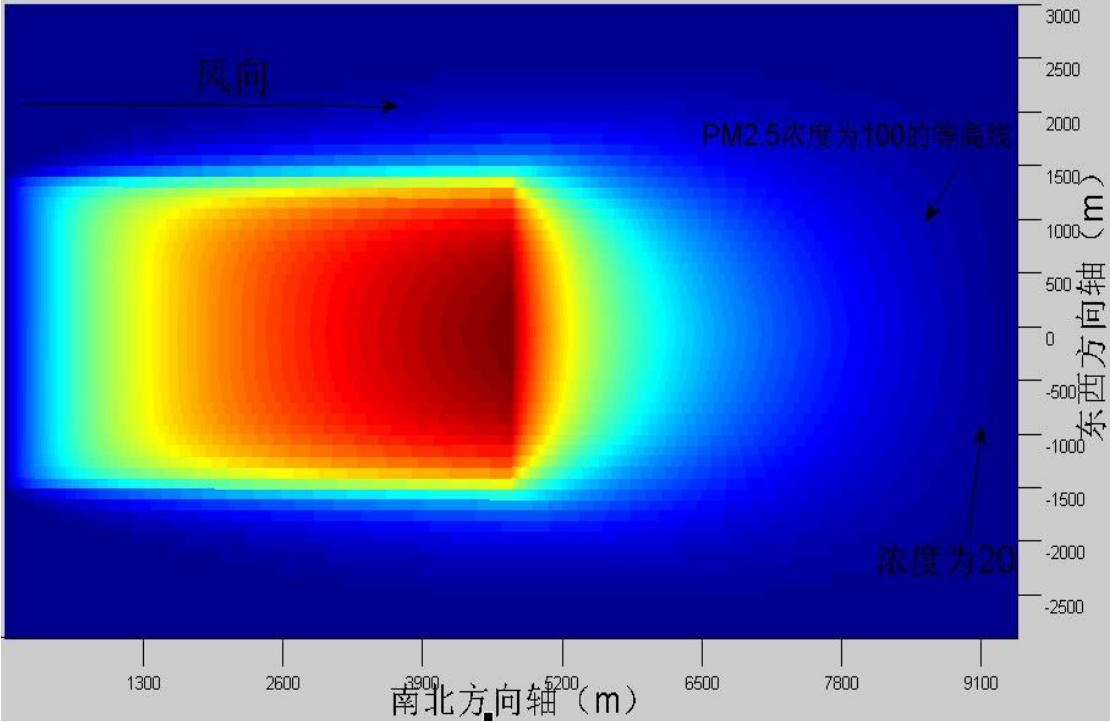


图 7-6：在风力作用下，PM2.5 在面源模式下的扩散

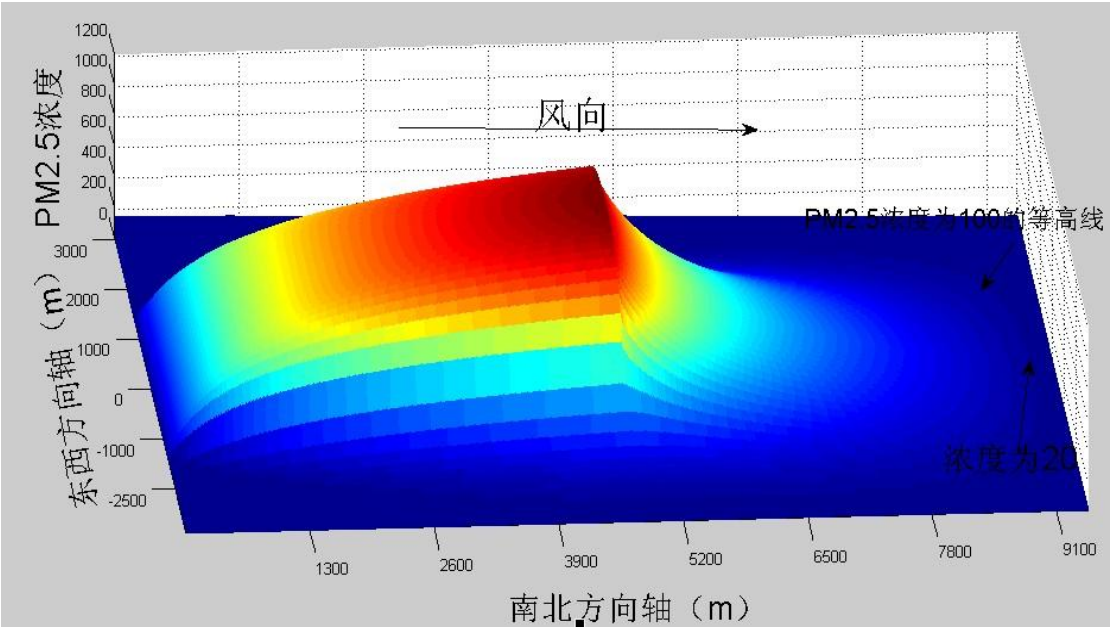


图 7-7：在风力作用下，PM2.5 在面源模式下扩散的空间示意图



#### 7.4 在面源扩散模式下，PM2.5 浓度的重度污染区和可能安全区域

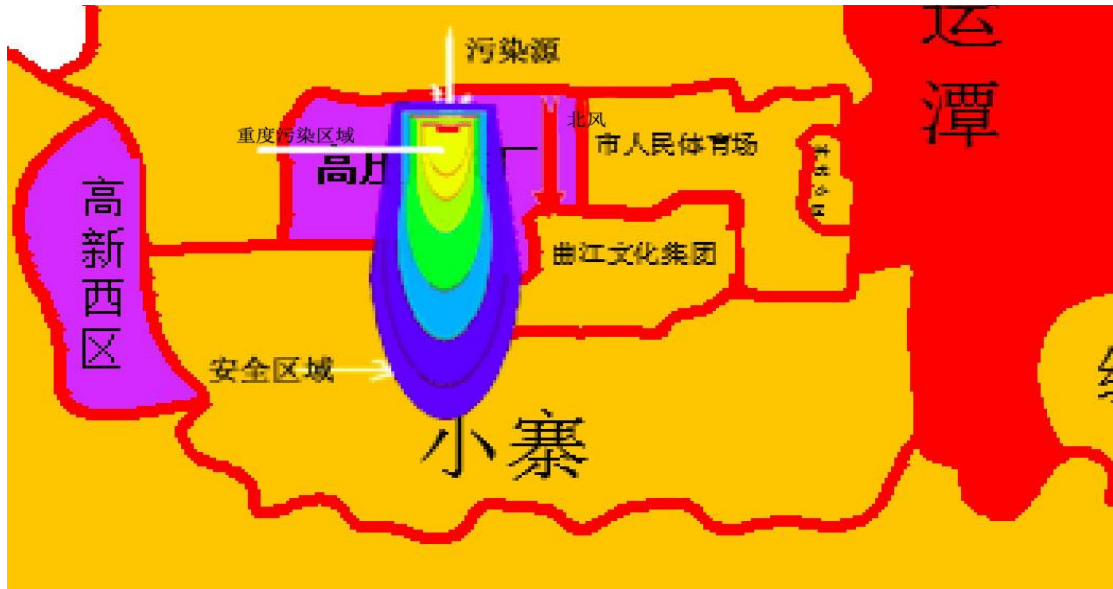


图 7-8：在面源模式下，PM2.5 颗粒污染物浓度扩散示意图

在面源式下，PM2.5 颗粒污染物浓度距污染源模风向距离一定条件下的污染扩散浓度成正太分布规律。若改变污染源中污染物的浓度，将导致污染物浓度最大值位置向下风向偏移，扩散与稀释速度减慢，污染浓度最大值明显升高。

重度污染主要集中在污染源处，安全距离在图中显示的事蓝色区域。当出现 PM2.5 浓度突变时，可以组织人员迅速向上风口撤离，或者以最快的速度向安全距离撤离。

根据第二小问面源扩散模型，在假设北风的情况下，以污染源 PM 为 1000 进行计算，扩散时间及污染范围如下表：

表 7-2 PM2.5 面源扩散实例计算表

风级	危险区域半径	安全区域	污染源消散时间
风级 3 级	4500m	7200m~9000m	126min
风级 4 级	6750m	10800m~13500m	107min
风级 5 级	9450m	15120m~18900m	87min
风级 6 级	12600m	20160m~25200m	58min

由上表可得到如下结论：

- 1)对于点污染而言，风级越大污染区域的半径越大、安全区域的起始值也相应扩大；
- 2)消散时间随着风级的加大而减少，这与前文分析风速是 PM2.5 形成或扩散的重要因素之一高度一致；
- 3)面源扩散时间比点源扩散时间长且危险区域大，说明污染范围越大，危险

区域半径也相应越大，且消散时间也相应加长。  
4)面源污染扩散比点源污染扩散治理困难度也相应加大。

八、问题二第 4 小问：PM2.5 成因分析与模型检验

8.1 PM2.5 成因分析

颗粒物来源可分为自然源与人为源，西安位于中国的北方，近几年常出现沙尘暴灾害，这说明沙尘将会是颗粒物的一个重要来源，另外一方面，西安在漫长的冬季会使用煤炉来取暖，而煤在燃烧的过程中由于不充分燃烧的普遍存在，就会产生大量的颗粒物质，这说明煤炭燃烧也将会是颗粒物的来源。在文章中，作者总结了形成颗粒的五大来源，在此表示如下图：

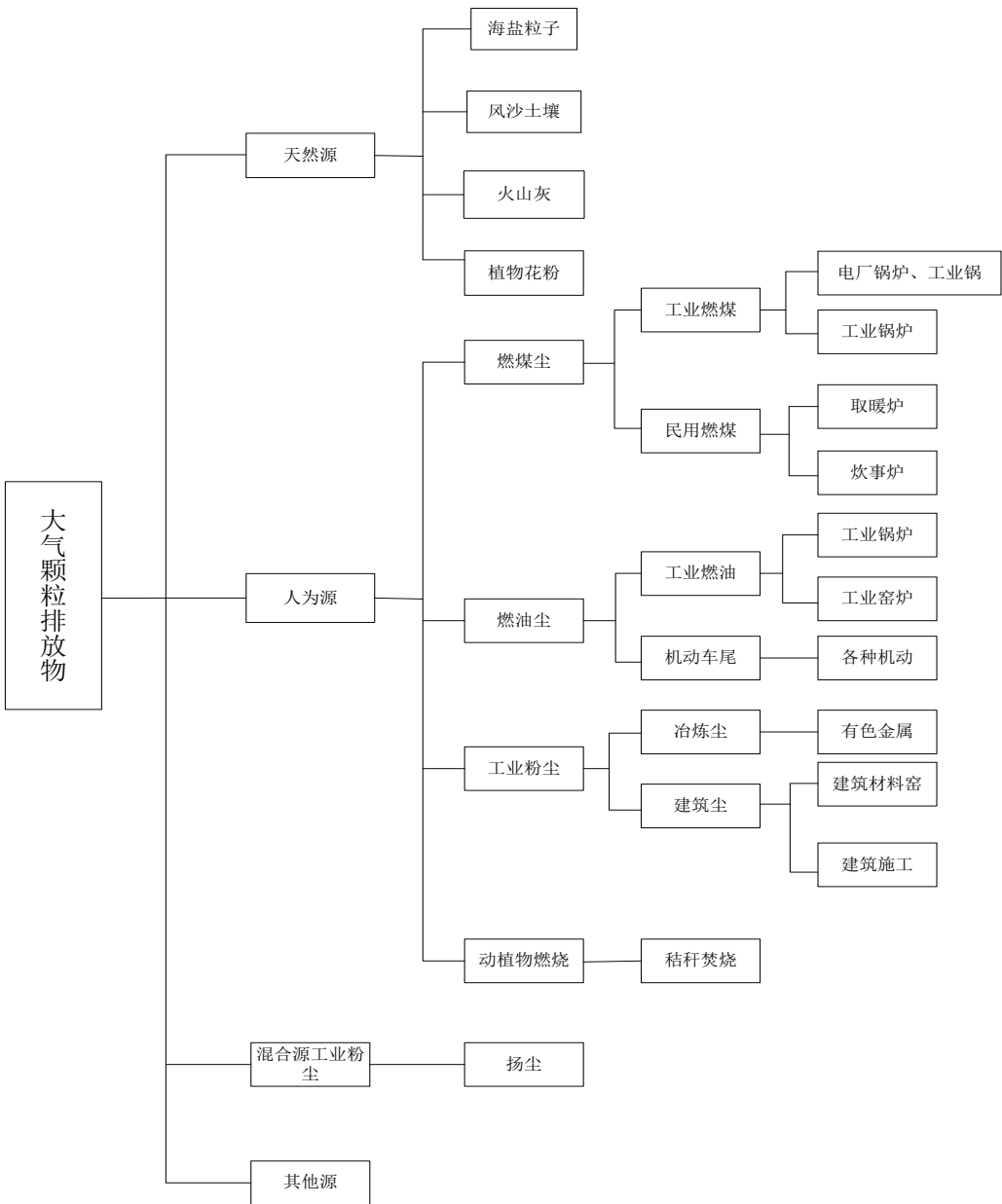


图 8-1：颗粒污染物五大来源的示意图

针对于西安，海盐粒子是不在考虑范围类的，在我们所考虑的地区内部有几个大的工厂，这将产生工业粉尘。而且，西安的民用燃煤会占有相当大的比例，城市中车辆排的尾气也将是一大来源。

## 8.2 模型检验

在上面 2.3 中，我们建立了  $PM_{2.5}$  粒子扩散的三个模型，在实际生活中，因为总会有风速等其他因素的影响，而且一个大块的区是一块很大的面积，另外在整块区域各个点上，都会有各种各样的产生  $PM_{2.5}$  的源头，那么为了简化起见，同时又尽量符合实际，就用一整块面积来表示  $PM_{2.5}$  源头，所以模型三的基于面积考虑的扩散模型是最合乎实际的。下面我们就来检验面源扩散模型的合理性。

### 8.2.1 检验的原理

题目中给出了各个地点处的各时间的  $PM_{2.5}$  的浓度，各个地区之间必然会又相互的影响，比方说若两个区离得不远，那么就有可能两个区会相互把  $PM_{2.5}$  扩散，其中一个区对另一区影响的大小是和天气状况、风速、大气稳定度、季节、湿度是直接相关的。

首先，是要搞清楚各个区的自身的产生  $PM_{2.5}$  的情况，由于缺乏对周边环境的认识与数据的严重不足，就用各个区所对应的所有天的  $PM_{2.5}$  浓度的平均值来代表自身产生  $PM_{2.5}$  的量。

其次，在每个区产生自己本身的  $PM_{2.5}$  基础之上，来考虑各个区之间的相互影响，并且要具体结合每一天的天气状况、大气稳定度情况、风速、湿度等因素来综合考虑。

最后，把每个区都抽象简化成一个均匀的  $PM_{2.5}$  释放源，然后利用面源扩散模型进行计算机仿真，具体算出各个区之间相互影响的大小，然后再算出每个区在受到影响之后的总的  $PM_{2.5}$  浓度。这样通过计算机仿真就得到了当天  $PM_{2.5}$  的仿真值，倘若仿真值与真实值很接近，那么就说明了模型的正确性。

### 8.2.2 检验的步骤

结合上校问的分析，我们选取西安市 2013 年 1 月 8 日—2013 年 2 月 8 日作为检验时间段，然后从 2013 年 1 月 8 日开始分别对每一天进行计算，并且一定要结合每一天的风速、湿度等信息。

其具体步骤如下所示：

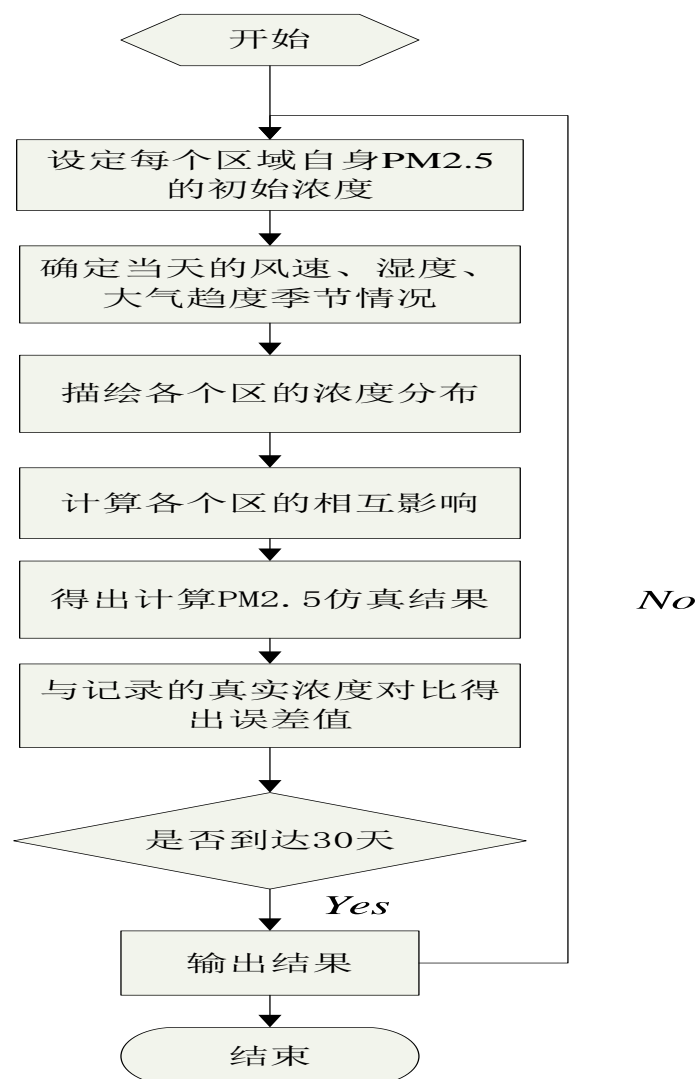


图 8-2: PM2.5 模型检验步骤流程图

实施以上步骤之后，我们将高压开关厂所在区域的计算机仿真浓度与实际浓度进行对比，如下表：

表 8-1: 将高压开关厂所在区域的计算机仿真浓度与实际浓度进行对比

	高压开关厂			兴庆小区		
日期	真实值	计算结果	误差率	真实值	计算结果	误差率
2013-1-8	383	356.7054	-6.87%	373	381.1783	2.19%
2013-1-9	216	211.39	-2.13%	236	217.7147	-7.75%
2013-1-10	333	335.4757	0.74%	389	405.7752	4.31%
2013-1-11	269	254.8478	-5.26%	250	251.9495	0.78%
2013-1-12	308	335.5287	8.94%	空缺		
2013-1-13	399	373.3358	-6.43%	空缺		

2013-1-14	500	548.5477	9.71%	空缺		
2013-1-15	148	145.3628	-1.78%	120	119.3058	-0.58%
2013-1-16	300	327.8854	9.30%	193	193.9219	0.48%
2013-1-17	214	212.5222	-0.69%	242	243.8959	0.78%
2013-1-18	329	351.2895	6.77%	349	359.2703	2.94%
2013-1-19	458	477.9892	4.36%	458	485.4351	5.99%
2013-1-20	319	298.9144	-6.30%	368	362.7607	-1.42%
2013-1-21	94	104.6641	11.34%	78	85.75852	9.95%
2013-1-22	219	219.3892	0.18%	124	134.9892	8.86%
2013-1-23	312	302.9594	-2.90%	299	306.6183	2.55%
2013-1-24	65	60.4767	-6.96%	54	54.83057	1.54%
2013-1-25	169	171.6336	1.56%	137	129.8737	-5.20%
2013-1-26	172	188.7269	9.72%	183	202.7237	10.78%
2013-1-27	266	266.5591	0.21%	219	224.928	2.71%
2013-1-28	293	292.7027	-0.10%	321	353.1119	10.00%
2013-1-29	413	458.6928	11.06%	346	334.1093	-3.44%
2013-1-30	429	441.9358	3.02%	447	487.9308	9.16%
2013-1-31	318	322.6232	1.45%	370	393.4306	6.33%
2013-2-1	440	467.7957	6.32%	459	442.4433	-3.61%
2013-2-2	391	430.5537	10.12%	385	363.8628	-5.49%
2013-2-3	240	223.3333	-6.94%	250	271.1702	8.47%
2013-2-4	199	195.2189	-1.90%	200	201.2255	0.61%
2013-2-5	166	184.5504	11.17%	144	141.6606	-1.62%
2013-2-6	346	374.3145	8.18%	325	356.8596	9.80%
2013-2-7	221	204.7338	-7.36%	208	214.9369	3.34%
2013-2-8	190	179.9189	-5.31%	150	144.6024	-3.60%

从上表可以看出有 95% 以上的数据误差在 10% 之内，有 60% 的数据误差在

5%之内，这已经说明面源扩散模型是符合实际情形的。之所以有误差，一方面是因为现实情形的不可预见的情况太多，另一方面也是由于题目本身的数据采集点太少，本身就很难用少数点的信息正确描绘区域的特点，还有一方面是因为其他未知浓度的区域的对本区域有影响，但是却没有办法把这种影响加进来，所以就出现了误差，但是此模型总体上来讲还是相当准确的。

## 九、问题三第 1 问：PM2.5 复合治理模型

PM2.5 治理是一个系统工程需要，社会的发展会对环境有所危害，同时会造成 PM2.5 的含量上升，治理会使各项宏观经济数据有所变化，同时治理也不能使宏观基本面数据发生剧烈动荡，因此在建立多目标系统动力学模型时，需对宏观基本面数据进行预测分析，以保证治理不会产生经济跳跃。同时对相关污染数据进行分析预测，使系统动力治理时 PM2.5 数据有所补偿，以满足系统的持续性。

### 9.1 模型的准备(贝叶斯的支持向量机预测模型)

#### (1) 支持向量回归机非线性预测原理

支持向量机模型是从线性可分情况下的最优分类面发展而来的。

基本思想是：给定训练集  $T = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_l, y_l)\} \in (R^n \times R)^l$

其中： $x_i$  为输入向量， $y_i$  为对应的输出值， $l$  为样本个数， $y_i$  通过一个非线性映射  $\varphi$  将输入向量  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  映射到高维特征空间。其映射函数式为  $\varphi(X) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_l))$ ，利用结构风险最小化的原理在高维特征空间内构造最优决策函数：

$$f(x, \omega, b) = \omega^T \psi(x) + b$$

将非线性估计函数便转化为高维特征空间中的线性估计函数，利用原空间的核函数高维特征空间中的点积运算。最小二乘支持向量机总是寻找全局最优解，同时可防止过学习现象的发生。

对最小二乘支持向量机，优化问题为：

$$\begin{aligned} \min \quad & J(\omega, \varepsilon) = \frac{1}{2} \omega^T \omega + \frac{1}{2} \gamma \sum_{i=1}^l \varepsilon_i^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i = \omega^T \psi(x_i) + b + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

其中：偏执变量满足  $b \in R$ ；误差变量满足  $\varepsilon_i \in R$ ； $\gamma > 0$  时为罚系数，可调整误差，如果训练数据有较大的噪声，则应适当选择较小的  $\gamma$ 。

由于(2)式可以看到其差别仅在于约束条件的不同。约束条件的差异使得相应的拉格朗日函数也不尽相同：

$$L(b, \varepsilon, \omega, \alpha) = f(x, \omega, b) - \sum_{i=1}^l \alpha_i (\omega^T \psi(x_i) + b + \varepsilon_i - y_i)$$

其中  $\alpha_i \in R$  为 Lagrange 乘子，对该方程求偏导数，经过整理可写为：

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \Omega + \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

其中  $\Omega_{ij} = K(x_i, x_j)$ ,  $\bar{1} = [1, 1, \dots, 1]$  求解方程(5)得到非线性估计函数为:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l a_i K(x, x_i) + b$$

式中,  $K(x, x_i) = \exp(-\|x - x_i\|^2 / \sigma^2)$ , 即选取 Gauss 径向基核函数为支持向量机的核函数; 在(5)式中不妨设  $B = \Omega + \gamma l$ , 则经变换可以得到:

$$b = \frac{\bar{1}^T B^{-1} y}{\bar{1}^T B^{-1} \bar{1}}$$

$$\alpha = B^{-1}(y - b \bar{1})$$

## (2) 贝叶斯理论的反馈方式

支持向量机的非线性时间序列预测模型属于一个黑箱模型, 其模型输入输出之间的非线性函数关系, 可以借助最小二乘支持向量机实现。其相应的参数的选择对模型的预测精度有很大的影响。目前对支持向量机的参数的选取主要有经验法、自举法、交叉验证法<sup>[10]</sup>、VC 维的界法、遗传算法以及贝叶斯证据框架等方法。同时, 贝叶斯证据框架在神经网络中的优化参数方面被广泛应用, 它的基本思想是最大化参数分布的后验, 而最佳参数值或模型是在参数分布后验最大的情况下得到的。

贝叶斯推断参数优化步骤:

第一步: 推断参数  $\omega$  和  $b$

假设  $D$  为数据空间,  $H$  为模型空间, 由贝叶斯准则可得:

$$p\left(\frac{\omega}{D}, \lambda, H\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^T \omega - \sum_{i=1}^l L(y_i - f(x_i))\right)$$

其中  $\lambda = \frac{1}{c}$ ; 可以看出, 最小二乘支持向量机的训练(1)是最大化  $\omega$  的后验  $p(\omega/D, \lambda, H)$ 。

第二步: 推断正则化参数

利用最大化参数  $\lambda$  的后验, 即可得到参数  $\lambda$  的最佳值。参数  $\lambda$  的后验为:

$$p(\lambda/D, H) \propto p(D/\lambda, H)p(\lambda/H)$$

第三步: 推断核函数参数

利用最大化模型  $H$  的后验, 即可得到核参数  $H$  的最佳值。模型  $H$  的后验为:

$$p(H/D) \propto p(D/H)p(H)$$

这可以看作模型的比较过程。针对 RBF 核函数, 通过调节核宽度参数可获得不同的模型  $H_j$ 。首先通过给出核宽度参数的一系列可能的值  $\sigma_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), 然后计算并比较相应模型  $H_j$  的后验概率, 找出最大者所对应的  $\sigma_j$  即为最佳核参数。

## (3) Bayes 支持向量机预测模型建模步骤

具体模型建立的步骤如下:

1. 确定输入变量, 选取样本数据。
2. 对样本数据进行归一化等。
3. 选取支持向量机估计算法。
4. 根据选取的估计算法初始化模型, 设置精度  $\delta$  的值, 以及参数的初值。
5. 利用贝叶斯原理, 使用历年同期数据对参数进行初步修正; 转回 4 检验。
6. 利用贝叶斯证据框架推断参数, 准则 1 可推断参数  $\omega$  和  $b$ , 准则 2 可估

计正规化参数  $c$ ，准则 3 可估计核参数  $\sigma$ 。

7. 返回 4 进行多次迭代，用所求的正规化参数和核参数重新训练模型，建立最优模型。

8. 用建立的最优参数模型进行估计和预测。

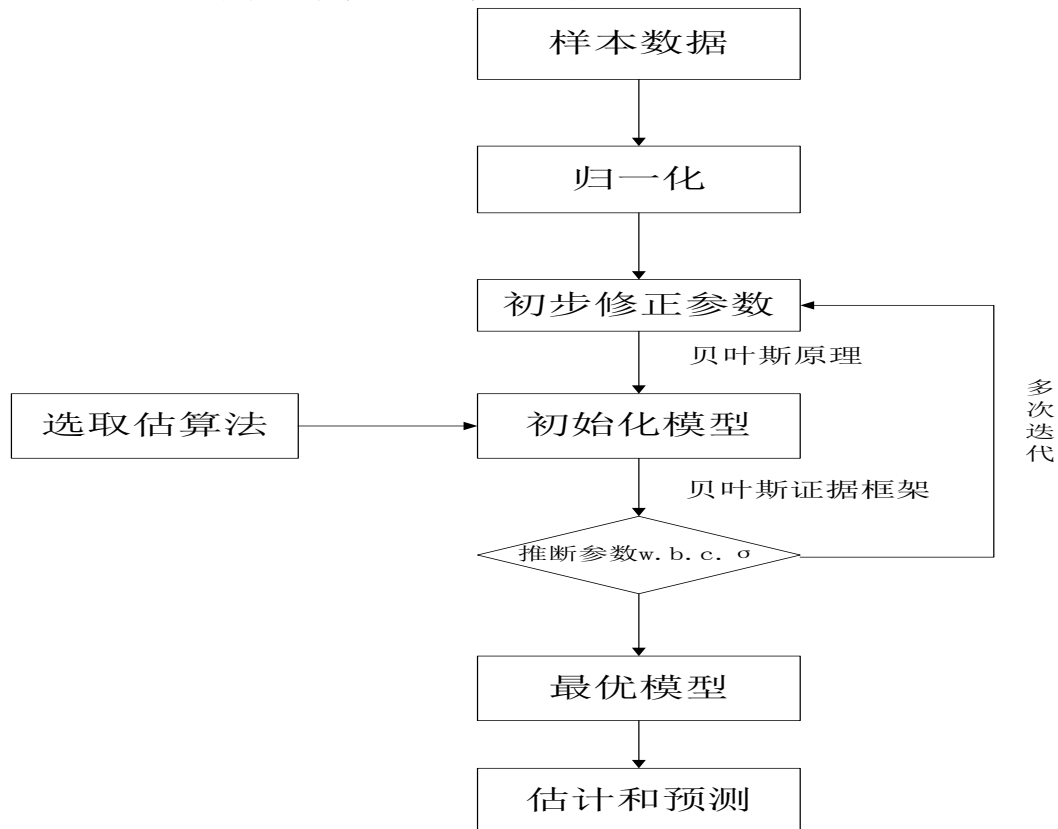


图 9-1: Bayes 支持向量机预测模型建模流程图

## 9.2 多目标系统动力学 PM2.5 复合治理模型

自然环境与人类社会是一个有机的整体，各个量之间都存在着关系，这样就组成了一个关系系统。同样的，本文中的 PM2.5 作为一种物质，必然会有其来源，有很多原因会造成 PM2.5 的产生，而 PM2.5 又会带来一系列的影响，这样我们找出那些与 PM2.5 浓度有直接或间接关系的量，然后来分析它们之间的相互影响关系，这样就得出了一个关系动力系统了。当然，有些量之间的关系是很复杂的，通过直观观察是没有办法搞清楚他们之间的精确关系的，但是可根据经验公式或则用多项式函数或分段函数进行逼近也是可行的，其中那些变量与变量间关系的参数可以通过经验公式取得或则是通过计算机寻优求得。建立好了系统动力学模型后，其准确程度可以被检验出来，只有检验合格之后才能够用来探究方案的治理。

在了解了各个变量相互关系的基础之上，因为有经济发展和 PM2.5 浓度降低两个目标，我们建立了基于动力系统的多目标优化模型，在这里面一定要明确约束条件，再结合当地的具体情况来具体给出管理部门每年的规划安排。

结合系统动力学分析描绘各因子关系如下：



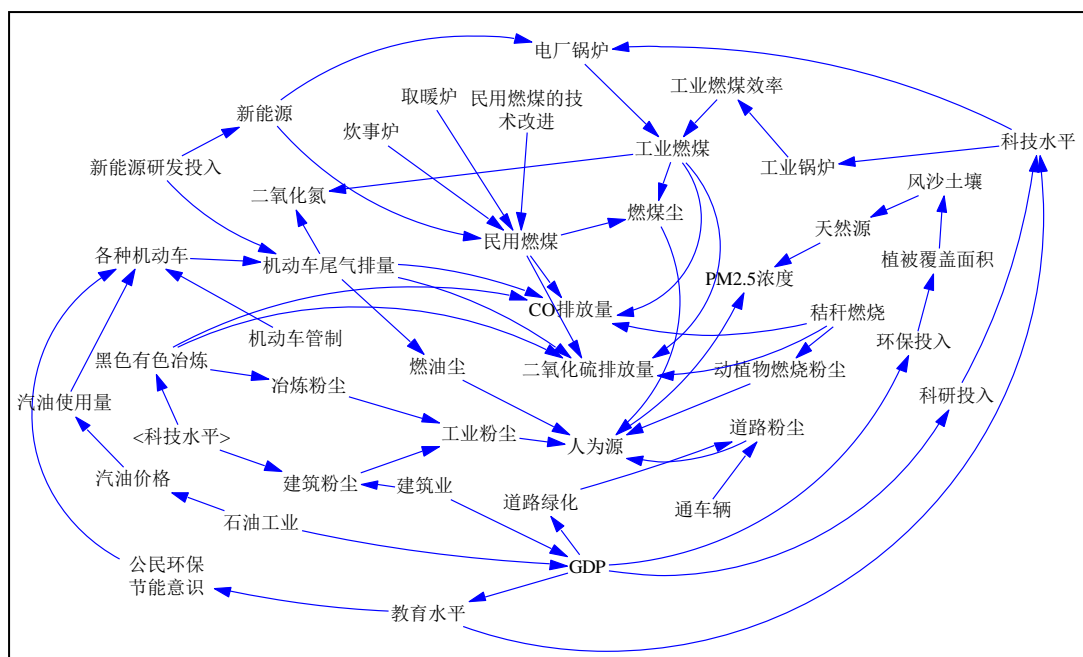


图 9-2 污染源影响因素的系统动力学关系图

动力系统的检验模型：通过对武汉市预测值和实际值进行对比，得到相应的误差百分比。

表 9-1 武汉市 GDP 预测值和实际值的比较

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
GDP（亿）	2590	3141	3960	4560	5565	6756	8003
预测 GDP	2794.4	2999.0	4003.5	4436.9	6106.3	6966.7	7322.5
误差率	7.89%	-4.52%	1.10%	-2.70%	9.73%	3.12%	-8.50%

从上表数据可知：武汉市 GDP 预测值和实际值的误差率较小，均小于 10%。表明运用动力系统模型进行预测的数据较为准确。

针对以上分析确定治理模型的优化目标：

**目标一：**五年之后 PM2.5 的浓度值达到最小

本题目要解决的核心问题就是如何更加有效的改善五年之后 PM2.5 的浓度值的问题，当然在改善的过程中要有计划、循序渐进地改进，尽可能考虑社会的长远效益，不能盲目治理，以免造成更大的社会问题。

基于题目提供数据的基础之上，通过贝叶斯模型对未来五年的情况进行预测，得出不经过治理的情况 PM2.5 的浓度值和持续治理的 PM2.5 的浓度值。通过对比可以看出环境治理的成效，可以为以后的决策者提供科学的计算依据。

总体而言，PM2.5 可以归为人为源(MM)，天然源(TR)两大类  $c_{PM} = c_{MM} + c_{TR}$ 。其中人为源又和人们生产生活产生的工业粉尘(IF)、燃油尘(RY)、燃煤尘(RM)、动植物燃烧尘(AP)、道路粉尘(RF)， $c_{MM} = c_{IF} + c_{RY} + c_{RM} + c_{AP} + c_{RE}$  有关系。天然源主要由风沙土壤修正产生  $c_{TR} = a_{33}c_{FT}$ 。因此通过数学模型求解出实施防治措施和不实施治理措施差值的对比值，可以很直观的看出治理效果  $T = \max \Delta c_{PM}$  最大的优化模型。

综上所述建立以  $\min c_{PM}$  为的目标函数的优化模型：

$$\begin{cases} T = \max \Delta c_{PM} \\ \min c_{PM} = c_{MM} + c_{TR} \end{cases}$$

$$st \begin{cases} \Delta c_{PM} = c_{uPMi} - c_{zPMi} \\ c_{MM} = c_{IF} + c_{RY} + c_{RM} + c_{AP} + c_{RE} \\ c_{TR} = a_{33}c_{FT} + b_{20}c_{TR} \\ c_{zPMi} \geq 280\mu g / m^3 \quad (i \leq 1) \\ c_{zPMi} \leq 35\mu g / m^3 \quad (i = 5) \end{cases}$$

其中： $c_{MM}$ ：表示人为源产生的 PM2.5 浓度； $c_{PM}$ ：表示 PM2.5 浓度； $c_{TR}$ ：表示天然源对 PM2.5 作用产生的浓度； $c_{IF}$ ：表示工业粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RY}$ ：表示燃油尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RM}$ ：表示燃煤尘对人为源作用产生的浓度； $c_{AP}$ ：表示动植物燃烧粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RE}$ ：表示道路粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{FT}$ ：表示风沙土壤对天然源作用产生的浓度； $a_{33}$ ：表示风沙土壤对天然源作用的修正系数； $c_{zPMi}$ ：表示实施治理措施第  $i$  年后 PM2.5 浓度； $c_{uPMi}$ ：表示不实施任何治理措施第  $i$  年后 PM2.5 浓度；

**目标二：**在 PM2.5 浓度值得到改善的情况下，宏观基本面数据波动最小

在治理环境的同时也要注意对经济的影响，对环境的治理要正本清源，但是国民经济是保证民生的基础，也不能因为过度保护环境从而破换了国民经济，那样的话有可能造成比环境污染更加复杂的社会问题。

国内或者某一地区的宏观基本面数，是指在一定时期内(一个季度或一年)，的经济数据，可由 GDP 等因素进行说明。因此整体的宏观基本面变动误差最下

综上所述建立以 GDP 最大为目标函数的优化模型：

$$\begin{cases} \xi = GDP_i - GDP_j / \Delta h \\ GDP = a_2OI + b_2JZ - (TT + HB + RG + EL) \end{cases}$$

其中： $OI$ ：表示石油工业产值； $JZ$ ：表示建筑业产值； $TT$ ：表示投入到科研领域的经费； $HB$ ：表示投入到环保领域的经费； $RG$ ：表示投入到道路绿化的经费； $EL$ ：表示投入到教育事业领域的经费； $GDP_i$  为治理结束时 GDP 的值； $GDP_j$ ：表示治理开始时的 GDP 值； $\Delta h$ ：为治理的时间。

**目标三：**单项治理目标

假设该地区投入治理资金为  $A$  单位(百万元)，针对单项治理过程中项目的数量 ( $i \leq 1$ )，但是一次投资  $a_{ij}$  必须超过总投资的 70%，由于单项治理引出的社会问题也应该投入资金( $b$ )来解决。针对综合治理资金可以用完。无论哪种投资方式必须留总投资资金的 10% 作为应急资金( $s$ )。

最终比较整个地区 PM2.5 降低的平均数为度量值，项目数为  $i$  个项经过  $j$  年之后总投资数  $Z_{ij}$  与 PM2.5 浓度的降低值  $\Delta c_{PM}$  得出综合效益参数  $\eta_1$ ，综合参数越大即投资越合理，反之则要考虑投资是否正确。

单项治理既是集中优势资金对集中的问题进行整治，在单项治理的过程中不能参与其他项目，但是对一个项目投入过分集中，有可能会引发一些其他的次生问题，从而带来一些负面影响，因此针对次生问题要通过项目资金来进行解决。

针对一个污染源复杂的地区最好使用综合治理,因为各污染源之间可能有相互影响,必须找到他们之间的关系,长期投资以争取达到最终效益。

综上所述建立单项治理模型如下:

$$\eta_1 = \frac{\sum Z_{ij}}{\Delta c_{PM}}$$

$$\text{st} \begin{cases} i \leq 1 \\ 0 \leq \Delta c_{PM} \\ b_1 = 5\% A \\ b_2 = 0 \\ s = 10\% A \\ Z_{ij} \leq A \\ a_{ij} \geq 70\% A \\ Z_{ij} = 0.005(\Delta c_{PM})^2 - b \end{cases}$$

其中:  $A$ : 表示投入治理资金为单位(百万元);  $a_{ij}$ : 表示第  $i$  个项目经过  $j$  年当年的投资数;  $\eta_1$ : 表示单项治理投资的综合效益参数;  $\eta_2$ : 表示综合治理投资的综合效益参数;  $b_1$ : 表示单项治理社会问题补偿金;  $b_2$ : 表示综合治理社会问题补偿金;  $Z_{ij}$ : 表示第  $i$  个项目经过  $j$  年之后总投资数;  $\Delta c_{PM}$ : 表示  $i$  年之后 PM2.5 浓度的降低值;

综上所述建立了多目标系统动力 PM2.5 符合治理优化模型:

$$\begin{cases} \min & c_{PM} \\ \min & \Delta gdp \end{cases}$$

$$\text{st} \begin{cases} i \leq 1 \\ 0 \leq \Delta c_{PM} \\ s = 10\% A \\ Z_{ij} \leq A \\ a_{ij} \geq 70\% A \\ Z_{ij} = 0.005(\Delta c_{PM})^2 \end{cases}$$

其中:  $T$ : PM2.5 的治理效果;  $M$ : 表示经济生产总值;  $c_{PM}$ : 表示 PM2.5 浓度。

### 9.3 模型的求解

求解步骤:

**Step1.**利用贝叶斯支持向量机结合当地具体气象环境、季节等因素预测出未来 5 年的 GDP 量、PM2.5 浓度。

**Step2.**先找出那些与 PM2.5 浓度有直接或间接关系的量并且影响较大的变量,然后,据经验公式或则用多项式函数或分段函数进行逼近变量间的关系,且要通过已有的历史数据不断进行修正。

**Step3.**建立基于动力系统的多目标优化模型,综合统筹考虑各个目标和现实的约束条件,这样求解出一个最优化的解。

利用贝叶斯支持向量机对未来五年宏观经济数据及 PM2.5 初值进行预测分析。

表 9-2 未来五年宏观面数据预测

年份	2013	2014	2015	2016	2017
<b>GDP (亿)</b>	8643.2	9334.7	10081.5	10887.9	11759.1

表 9-3 未来五年 PM2.5 初值预测

年份	2013	2014	2015	2016	2017
<b>PM2.5 (<math>\mu\text{g}/\text{s}</math>)</b>	247	206.7	157.7	100.5	35

利用系统动力学仿真软件 vensim 计算得到五年综合治理和专项治理需要投资的费用如下表所示。

表 9-4 五年治理投资费用

年份		2013	2014	2015	2016	2017
综合治理	投入费用 (百万)	51	42	32	22	12
	PM2.5 减少浓度	4.5	19.3	34	48.7	63.5
专项治理	投入费用 (百万)	20	21	19	20	18
	PM2.5 减少浓度	28	21	15	8.5	2

根据求解过程及过程结果,综合治理投资主要集中在环境改建方面和基础设施方面。环境改建集中在对外绿化,以增加扬尘的吸收率,同时需要对绿化带进行定期清理,以保证绿化带可以最大化的吸收扬尘,该部分投入为综合治理费用的 40%。城市公交系统的改善,尽可能的使用环保节能车辆,该部分占综合治理费用的 20%。部分资金(15%综合治理费用)应投入于对落后产能的改进研究以方便,城市产业顺利转型,降低碳排放量。其他相关治理约占综合治理费的 25%。

专项治理费用主要用于大型污染企业的监控,占专项的 10%左右,使大型污染企业在安全范围内对废弃物进行排放。城市必备工业生产的污染物处理,占总费用的 25%左右,如火电厂的排污治理问题。城市建设单位监控,约占投资的 10%左右。大型污染企业外迁等占专项治理的 40%左右。

专项治理有助于较快治理 PM2.5 的污染问题,但是持久性较差,基本上是有监管有治理,无监管无治理的状态,综合治理立足于基础进行治理,具有长久性。

## 十、问题三第 2 小问：专项治理模型

本问在治理单位费用已知的情况下对武汉市 PM2.5 实行专项治理。专项治理要求治理在满足治理结果的前提下，同时要求整体治理费用最小。

### 10.1 专项治理模型的建立

在了解了各个变量相互关系的基础之上，因为有经济发展和 PM2.5 浓度降低两个目标，我们建立了基于动力系统的多目标优化模型，在这里面一定要明确约束条件，再结合当地的具体情况来具体给出管理部门每年的规划安排。

由第 7 章系统关系知专项治理模型为多目标优化模型：

**目标一：**预测五年之后不进行专项治理与进行专项治理之后的 PM2.5 浓度差的最大值。

本题目要解决的核心问题就是如通过预测模型，在现在的 PM2.5 浓度变化趋势下，预测五年之后不进行任何治理和进行治理之后的浓度变化。浓度变化越大，越说明了专项治理的必要性与治理环境的紧迫性。

通过基于动力系统仿真下的贝叶斯模型，在当前 PM2.5 变化趋势情况下，预测五年之后的 PM2.5 情况。通过对比可以看出环境治理的成效，可以为以后的决策者提供科学的计算依据。

通过动力系统模型从全局角度分析该问题，从产生 PM2.5 的源头治起，找到影响 PM2.5 浓度最核心的因素，为人为源(MM)，天然源(TR)两大类。其中人为源占绝大多部分，天然源从某种意义上说也是由于人类对自然过渡索取造成的。此控制人类生产活动是不科学的，也不实际的。

从人为源的角度分析，其中包括工业粉尘(IF)、燃油尘(RY)、燃煤尘(RM)、动植物燃烧尘(AP)、道路粉尘(RF)， $c_{MM} = c_{IF} + c_{RY} + c_{RM} + c_{AP} + c_{RE}$  有关系。因此通过数学模型求解出实施防治措施和不实施治理措施差值的对比值，可以很直观的看出治理效果  $T = \min c_{PM}$  最大的优化模型。

综上所述建立以  $T = \min c_{PM}$  为的目标函数的优化模型：

$$\begin{cases} M = c_{uPM} - c_{PM} \\ c_{PM} = \min c_{MM} + c_Q \end{cases}$$

$$st \begin{cases} c_{MM} = c_{IF} + c_{RY} + c_{RM} + c_{AP} + c_{RE} \\ c_{TR} = a_{33}c_{FT} + b_{20}c_{TR} \\ c_{zPMi} \geq 280\mu g / m^3 \quad (i \leq 1) \\ c_{zPMi} \leq 35\mu g / m^3 \quad (i = 5) \end{cases}$$

其中： $c_{MM}$ ：表示人为源产生的 PM2.5 浓度； $c_Q$ ：表示人类除了工业粉尘、燃油尘、燃煤尘、动植物燃烧尘、道路粉尘之外的其他粉尘； $PM$  表示 PM2.5 浓度； $c_{TR}$ ：表示天然源对 PM2.5 作用产生的浓度； $c_{IF}$ ：表示工业粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RY}$ ：表示燃油尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RM}$ ：表示燃煤尘对人为源作用产生的浓度； $c_{AP}$ ：表示动植物燃烧粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{RE}$ ：表示道路粉尘对人为源作用产生的浓度； $c_{zPMi}$ ：表示实施治理措施第  $i$  年后 PM2.5 浓度； $c_{uPMi}$ ：表示不实施任何治理措施第  $i$  年后 PM2.5 浓度；

通过该目标函数可以看出由于人类不合理生产开发活动造成的环境压力这是完全可控可操作的，比如控制增燃油尘，那样就会减小汽油的使用量，会促使更多的人选择更加低碳环保的出行形式，那样不仅缓解了交通压力，也能提高国民体质。不仅对环境有利，对提高国民身体素质也是有帮助的。

**目标二：环境的治理措施对经济的影响最小**

在治理环境的同时，肯定或多或少对经济有影响。经济的发展也不能放松，因为国民经济是保证民生的基础，同样对污染企业的治理也是循序渐进的，同样这样子也能促进企业的科技进步，那样也能产生经济效益，而且那样的企业更具有生命力。

在 PM2.5 浓度值得到降低的情况下，GDP 的平稳发展，说明治理环境对经济的影响尽量减小，这样的治理也能更加的长久。以 GDP 的变化率  $\min \xi = \text{GDP}_i - \text{GDP}_j / \Delta h$  最小值为目标函数。

**综上所述建立以 GDP 最大为目标函数的优化模型：**

$$\begin{cases} \min \xi = \text{GDP}_i - \text{GDP}_j / \Delta h \\ \text{GDP} = a_2 \text{OI} + b_2 \text{JZ} - (\text{TT} + \text{HB} + \text{RG} + \text{EL}) \end{cases}$$

其中：OI：表示石油工业产值；JZ：表示建筑业产值；TT：表示投入到科研领域的经费；HB：表示投入到环保领域的经费；RG：表示投入到道路绿化的经费；EL：表示投入到教育事业领域的经费；GDP<sub>i</sub> 开始治理时的 GDP 值；GDP<sub>j</sub> 为结束时的 GDP 的值，Δh 为开始治理到结束的时间差。

**目标三：单位浓度 PM2.5 的降低所需要的资金最少**

该问题类似于商业上性价比的说法，同样的钱买到的商品更实惠则认为该商品的性价比高。同样该说法也可以引入本问题，投入同样的资金，如果 PM2.5 的浓度变化越大说明投资效果越好，则引入总投资数  $Z_{ij}$  与 PM2.5 浓度的降低值  $\Delta c_{PM}$  的比值得出综合效益参数  $\eta_i$ ，综合参数越大即投资越合理，反之则要考虑

投资是否正确。单位浓度 PM2.5 的降低所需要的资金最少，目标函数： $\eta = \frac{\sum Z_{ij}}{\Delta c_{PM}}$

其中： $\eta$ ：表示单项治理投资的综合效益参数； $Z_{ij}$ ：表示第  $i$  个项目经过  $j$  年之后总投资数； $\Delta c_{PM}$ ：表示  $i$  年之后 PM2.5 浓度的降低值；

**综上所述建立了多目标系统动力 PM2.5 符合治理优化模型：**

$$\begin{cases} \min & c_{PM} \\ \min & \xi \\ \max & \eta \end{cases} \quad \text{st} \begin{cases} i \leq 1 \\ 0 \leq \Delta c_{PM} \\ s = 10\% A \\ Z_{ij} \leq A \\ a_{ij} \geq 70\% A \\ Z_{ij} = 0.005(\Delta c_{PM})^2 \end{cases}$$

其中： $T$ ：PM2.5 的治理效果； $M$ ：表示经济生产总值； $c_{PM}$ ：表示 PM2.5 浓度。

### 10.2 模型的求解

求解步骤：

**Step1.**利用贝叶斯支持向量机结合当地具体气象环境、季节等因素预测出未来 5 年的 GDP 量、PM2.5 浓度。

**Step2.**先找出那些与 PM2.5 浓度有直接或间接关系的量并且影响较大的变量，然后，据经验公式或则用多项式函数或分段函数进行逼近变量间的关系，而且还要通过已有的历史数据不断进行修正。

**Step3.**建立基于动力系统的多目标优化模型，综合统筹考虑各个目标和现实的约束条件，这样求解出一个最优化的解。

计算预测结果同第三问第 1 小问的宏观面板数据预测及 PM2.5 数据预测，仅考虑专项治理武汉市的治理模式如下表：

表 10-1 专项治理各年投入产出表

年份	2013	2014	2015	2016	2017
投入费用 (百万)	75	70	73	69	71
PM2.5 减少浓度	91.8	76.7	47.7	23.3	9.2

从上表可以看出专项治理每年投资几乎持平的状态下 PM2.5 的治理收益逐年递减，越往后收效愈小。导致专项治理有落入“有监管有治理”的圈套的危机，故建议武汉使用专项治理的同时结合综合治理。

武汉市，分别考虑综合治理，专项治理以及专项治理与综合治理同时考虑状态下的 PM2.5 治理时间与收益对比图如下：

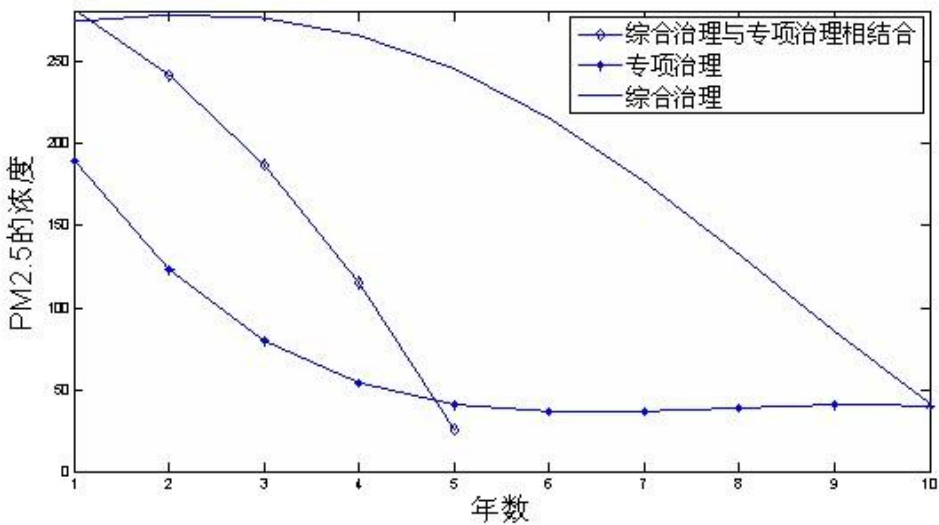


图 10-1 不同治理模式收效对比图

根据上图易发现，仅综合治理收效较慢不利于较危机的局面，仅考虑专项治

理容易使治理落入“有监管有治理”的局面，应实施专项治理与综合治理相结合的模式，用专项治理加速治理，用综合治理巩固治理结果。

## 十二、模型的评价、改进与推广

### 12.1 模型的评价

#### 12.1.1 模型的优点

本文在对 6 个基本监测指标的相关与独立性进行定量分析时，采用多元非线性对数模型，将数据对数化可以有效地避免了拟合优度  $R^2$  较小，拟合效果较差的情况。在建立 PM2.5 扩散模型时，分为点源和面源两大类，更为合理的确定污染物的扩散情况。

对于污染物来源较多、较复杂的情况，运用动力系统模型，对单一因素发生变化时，同时影响其他因素，从而对 PM2.5 浓度造成影响的情况。动力系统可以不断更新因素之间的关系，得出更为合理的浓度指标值。。

#### 12.1.2 模型的缺点

在进行模型检验和预测时，监测点数量较少，某个监测点可能还受到其他监测点污染物的扩散影响，这一点还需要进行考虑。同时，污染物在扩散的过程中，还可能发生化学反应，造成浓度的进一步变化。污染物在风力的作用下，可能还产生漩涡效应，产生更为复杂的变化情况。当然，污染物扩散时，污染源的高度也是影响污染物扩散浓度的影响因素之一，还要考虑线源污染源的影响情况。在建模过程中，为了简化模型，进行了必要的假设。

### 12.2 模型的推广

本模型的建立对于研究减少城市污染问题和保护环境具有重要意义，尤其在当今以高能耗高污染的生产模式为主的工业时代，对地下水质污染，重金属的扩散和污染源的确定有一定的指导意义。同时还可以用于对热源扩散的研究，热源位置的确定及传播过程的中热度的扩散和衰减情况。本模型实用性较强，适用面广。

## 十三、空气中 PM2.5 的研究分析报告

**研究目的：**通过对空气中 PM2.5 的研究，更好的改善生存环境。

**研究对象：**空气中 PM2.5 问题的研究。

**研究方法和结论：**对空气中 PM2.5 的相关因素的分析，以及 PM2.5 的分布应急处理，空气质量的控制管理。

为了响应可持续发展道路以及科学发展观的伟大思想，我们对空气中 PM2.5 的研究，发现这个地区的 PM2.5 污染比较严重，以及各个检测指标已严重超标，严重危害了居民正常的生活环境，危害人们的身体健康，这给居民的生活造成了很难大的困难。为了居民的生活健康环境，以及生态城市，文明城市的建设，我



们提出了如下建议，希望对改善环境有所帮助。

①鉴于  $PM_{2.5}$  与  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、 $PM_{10}$ 、 $CO$ 、与  $PM_{2.5}$  呈线性相关关系，还与空气的湿度有关，如遇到阴霾浓雾天气时，注意防护措施，尽量少外出活动，如有必要外出的话，请注意呼吸道感染。

② $PM_{2.5}$  值过高时，应向安全区域撤离，尽量减少污染物的吸入量，注意天气的变化，时时关注天气预报，做好防护措施。

③通过对空气中  $PM_{2.5}$  的形成机理和演变规律，适当的植树造林的方法，加大城市绿色覆盖率，可以降低  $SO_2$ 、 $NO_2$ 、 $PM_{10}$ 、 $CO$  的浓度。

④对排污严重的企业进行综合治理，鼓励企业引进新技术进行企业体制改革，在污染源进行严格的控制，从而降低  $PM_{2.5}$  的浓度。

⑤加大对科学技术的资金投入，加大对教育事业的资金投入，提高居民的知识水平，，从而降低居民污染物的排放。

⑦为建设良好的居住环境，利用有限的财力，对  $PM_{2.5}$  的减排治污可行规划，采用综合治理的办法，虽然综合治理投入资金比较巨大，但综合生态效益显著。采用专项治理的办法，对污染严重的企业进行专项治理，投资少， $PM_{2.5}$  浓度减低，但综合生态效益不如综合治理效益好。

⑧采用综合治理与专项治理相结合的方法，在不影响城市经济可持续发展的条件下，减少  $PM_{2.5}$  的排放，降低  $PM_{2.5}$  浓度，提高居民的生活水平和生活环境。

## 十四、参考文献

- [1] Afeti, G.M., Resch, F.J., 2000. Physical characteristics of Saharan dust near the gulf of Guinea. *Atmospheric Environment* 34, 1273–1279.
- [2] Allegrini, I., Febo, A., Pasini, A., Schiarini, S., 1994. Monitoring of the nocturnal mixed layer by means of particulate radon progeny measurements. *Journal of Geophysical Research* 99 (d9), 18765–18777.
- [3] APEG, 1999. The airborne particle expert group. Source apportionment of particulate matter in the United Kingdom. Zone 4/F15, Air and Environment Quality Division,
- [4] Yao Q, Li S Q, Xu H W, et al. Studies on formation and control of combustion particulate matter China: A review[J]. *Energy*, 2010, 34(9): 4480-4493.
- [5] 徐东群, 张文丽, 王焱, 等. 大气颗粒物污染特征研究[J]. *中国预防医学杂志*, 2005, 5(1): 7-9.
- [6] 国家环境保护总局. 全国环境统计公报[N]. *中国环境报*, 2000-2010.
- [7] 胡京南. 小个子杀手—可吸入颗粒物[J]. *百科知识*, 2005, 2S: 30-31.
- [8] 杨复沫, 马永亮, 贺克斌. 细微大气颗粒物  $PM_{2.5}$  及其研究概况[J]. *世界环境*, 2000, 4: 32-34.
- [9] Toon O B. How pollution suppresses rain[J]. *Science*, 2000, 287(10): 1763-1765.
- [10] 郝明途, 林天佳, 刘焱. 我国  $PM_{2.5}$  污染状况和污染特征[J]. *环境科学与管理*, 2006, 31(2): 58-61.
- [11] 王玮, 汤大钢, 刘红杰, 等. 中国  $PM_{2.5}$  污染状况和污染特征研究[J]. *环境科学研究*, 2000, 13(1): 1-5.
- [12] Rich D Q, Kipen H M, Huang W. Association between changes in air pollution levels during the Beijing Olympics and biomarkers of inflammation and thrombosis in healthy young adults[J]. *JAMA*, 2012, 307(19): 2068-2078.
- [13] 王宗爽, 武婷, 车飞, 等. 中外环境空气质量标准比较[J]. *环境科学研究*, 2010, 23(3): 253-260.

- [14] GB3095-2012, 环境空气质量标准[S].
- [15]白希尧, 储金字, 白敏药, 等. 电除尘器及其电离荷电机制的研究新进展[J]. 电力环境保护, 2007, 23(5): 39-42.
- [16]李茹雅, 祁君田, 殷焕荣, 等. 布袋除尘器过滤效率影响因素研究[J]. 热力发电, 2012, 41(1): 6-7,11.
- [17]唐敏康, 马艳玲, 郭海萍. 电袋除尘技术的研究进展[J]. 有色金属科学与工 87 声场中 PM<sub>2.5</sub> 相互作用机理和动态过程研究 程, 2011, 2(5): 53-56.
- [18]赵伟. 清华同方 EF 型电袋除尘器在电厂中的应用[J]. 工会博览, 2010, 3(3): 47-48.
- [19] 陈厚涛. 声波团聚增强燃烧源细颗粒物排放控制的研究[D]. 南京: 东南大学, 2009.
- [20] Andrade C. Phenomena in a Sounding Tube[J]. Nature, 1931, 127: 438-438.
- [21] Patterson H S, Cawood W. Phenomena in a sounding tube[J]. Nature, 1931, 127: 667-680.
- [22] Brandt O. Über das verhalten von schwebstoffen in schwingenden gasen bei schall-und ultraschallfrequenzen[J]. Kolloid-Z, 1936, 76: 272-278.
- [23] Volk M J, Moroz W J. Sonic agglomeration of aerosol particles[J]. Water, Air and Soil Pollution, 1976, 5(3): 319-334.
- [24] Hinds W, Mallove E F, First M W. Acoustic and turbulent agglomeration of sodium aerosols[R]. Boston: Harvard School of Public Health, 1977.
- [25] Volk M J, Hogg R. Sonic agglomeration: a promising method of enhancing the collection efficiency of electrostatic precipitators[J]. AIChE Symposium Series, 1977, 75(188): 123-134.
- [26] Shaw D T, Tu K W. Acoustic particle agglomeration due to hydrodynamic interaction n between monodisperse aerosols[J]. Journal of Aerosol Science, 1979, 10(3): 317-328.
- [27] U. S. Environment Protection Agency. Integrated Science Assessment for Particulate Matter (Final Report)[R]. Washington DC: U. S. Environment Protection Agency, 2009.
- [28] U. S. Environment Protection Agency. National ambient air quality standards for particulate matter[S].
- [29] Dong S, Lipkens Bart, Cameron T M. The effects of orthokinetic collision, acoustic wake, and gravity on acoustic agglomeration of polydisperse aerosols[J]. Aerosol Science, 2006, 37: 540-553.
- [30] Brandt O, Hiedemann E. The aggregation of suspended particles in gases by sonic and supersonic waves[J]. Transactions of the Faraday Society, 1936, 42: 1101-1110.
- [31] Mednikov E P. Acoustic coagulation and precipitation of aerosols[M]. New York: Consultants Bureau, 1965.
- [32] Temkin S. Gasdynamic agglomeration of aerosols I. Acoustic waves[J]. Physics of Fluids, 1994, 6 (7): 2294-2303.
- [33] Song L, Koopmann G H, Hoffmann T L. An improved theoretical model of acoustic agglomeration[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116(2): 208-214.
- [34] Danilov S D. Average force on a small sphere in a travelling wave field in a viscous fluid[J]. Soviet Physics-Acoustics, 1985, 31(1): 26-28.
- [35] Hoffmann T L, Koopmann G H. Visualization of acoustic particle interaction and agglomeration: Theory and experiments[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1996, 99(4): 2130-2141.
- [36] Hoffmann T L, Koopmann G H. Visualization of acoustic particle interaction and agglomeration: Theory evaluation [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1997, 101(6): 3421-3429.
- [37] Boigne M B, Boulaud D, Malherbe C, et al. Influence of acoustic turbulence on aerosols agglomeration and precipitation[C]. Proceedings—Second International Aerosol Conference, Pergamon Press, 1986: 1037-1040.
- [38] Malherbe C, Boulaud D, Boutier A, et al. Turbulence induced by an acoustic field-Application to acoustic agglomeration[J]. Aerosol Science and Technology, 1988, 9(2), 93-103.
- [39] King L V. On the acoustic radiation pressure on spheres[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 1934, 147: 212-240.
- [40] Westervelt J P. The theory of steady forces caused by sound waves[J]. The Journal of the

- Acoustical Society of America, 1951, 23(3): 312–315.
- [41] González I, Gallego J A, Riera E. The influence of entrainment on acoustically induced interactions between aerosol particles—an experimental study[J].