

全国第六届研究生数学建模竞赛



题 目

基于布朗分子运动的警车巡逻调度

摘

要

本文首先对城市的道路以 10 米警力可控距离为间隔进行离散化，在原来的 307 个交叉口基础上扩充到 49175 个点进行构造路线图。

首先，将问题一和问题二作为统一的问题进行研究，提出了在接警后规定时间内对道路的线覆盖率、线重复覆盖率以及离散化点覆盖率作为警车部署优劣的评价指标，并由此建立初等模型。在初等模型的基础上分别扩展出四种模型：基于启发式洪泛搜索模型、基于层次聚类分析模型、基于模块性的 Newman 快速社区发现模型、基于遗传算法的最优点集模型。这四种模型最少配备警车数分别为：24、22、23、19；线覆盖率分别为 90.89%、90.08%、90.05%、91.21%；线重复覆盖率 78.41%、49.44%、79.54%、21.57%；离散点的覆盖率分别为 90.95%、91.08%、90.10%、91.32%。依据上述指标，发现利用遗传算法得到警车的最优部署方案。

其次，将问题三和问题四进行统一建模。根据问题四，提出基于布朗分子运动的概率碰撞模型来制定巡逻方案，其优点主要表现为隐秘性高。在提出的概率模型加上约束控制，可以求解出一套符合问题三带有一定规律性的巡逻方案，这样会导致隐秘性降低，因此综合问题三和问题四，制定既满足 D1 和 D2，尽量满足 D3 的巡逻方案。上述四种扩展模型确定的警车部署方案均可作为布朗分子运动的概率碰撞模型的初始位置，并且都可以得到较优的巡逻方案，在 4 个小时内以上述四种模型为基础的巡逻方案对应的平均线覆盖率分别为 90.29%、90.15%、90.13%、90.02%；平均线重复覆盖率 64.05%、57.06%、65.90%、32.65%；平均离散点的覆盖率分别为 90.33%、90.18%、90.22%、90.05%。

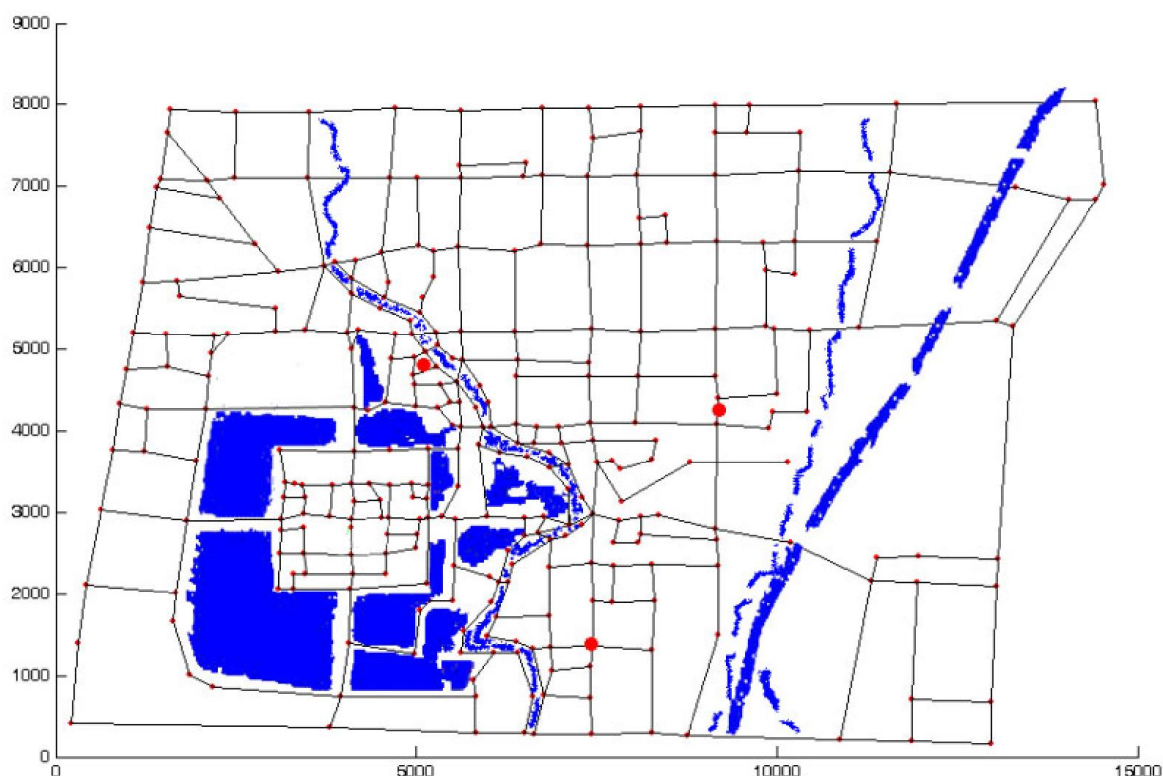
然后，对模型进行灵敏度分析，针对问题五和问题六中，对车辆数量配置的限制和速度条件的改变，该模型依然能够给出一个近似最优解。分别求出问题五和问题六的巡逻方案。当限定配属警车为 10 辆时，对应巡逻方案的线覆盖率分别为 59.94%；线重复覆盖率 8.40%；离散点的覆盖率分别为 60.51%。当警车接警之后平均行驶速度提高到 50km/h 时，其对应巡逻方案中，车辆部署为 15，线覆盖率分别为 91.12%；线重复覆盖率 52.59%；离散点的覆盖率分别为 92.29%。

最后，从社会生活中的实际情况出发，巡逻方案还需考虑因素主要有：考虑每辆警车巡逻路线尽量平均，巡视路线尽可能均匀，对重点区域的巡视力度和对犯罪高发地区和犯罪高发时间的巡视力度等。巡逻方案应综合这些因素来制定。

一、问题叙述

在城市，为了加强街道安全，降安排 110 警车在街道上巡逻。110 警车在街道上巡弋，既能够对违法犯罪分子起到震慑作用，降低犯罪率，又能够增加市民的安全感，同时也加快了接处警（接受报警并赶往现场处理事件）时间，提高了反应时效，为社会和谐提供了有力的保障。

考虑某城市内一区域，为简化问题，假定所有事发现场均在下图的道路上。该区域内三个重点部位的坐标分别为： $(5112, 4806)$ ， $(9126, 4266)$ ， $(7434, 1332)$ （见下图红点部位，蓝色部分为水域，道路数据见附件,相邻两个交叉路口之间的道路近似认为是直线）。



某城市拟增加一批配备有 GPS 卫星定位系统及先进通讯设备的 110 警车。设 110 警车的平均巡逻速度为 20km/h，接警后的平均行驶速度为 40km/h。警车配置及巡逻方案要尽量满足以下要求：

- D1. 警车在接警后三分钟内赶到现场的比例不低于 90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内。
- D2. 使巡逻效果更显著；
- D3. 警车巡逻规律应有一定的隐蔽性。

请回答以下问题：

- 一. 若要求满足 D1,该区最少需要配置多少辆警车巡逻？
- 二. 请给出评价巡逻效果显著程度的有关指标。
- 三. 请给出满足 D1 且尽量满足 D2 条件的警车巡逻方案及其评价指标值。
- 四. 在第三问的基础上，再考虑 D3 条件，给出你们的警车巡逻方案及其评价指标值。

- 五. 如果该区域仅配置 10 辆警车, 应如何制定巡逻方案, 使 D1、D2 尽量得到满足?
- 六. 若警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h, 回答问题三。
- 七. 你们认为还有哪些因素、哪些情况需要考虑? 给出你们相应的解决方案。

二、模型假设

- 1、假设问题中描述的 90% 表示以车辆当前位置在 3 分钟 (40km/h, 即在接警后) 可到达的线覆盖长度之和与图中街道路线总长之比。
- 2、假设警车初始位置为交叉路口或者离散化的点上。
- 3、假设 D3 条件中所谓的隐蔽性是指能够依照警车巡逻的历史数据推断出警车的巡逻路线概况。
- 4、除问六题外, 假设 110 警车的平均巡逻速度为 20km/h, 接警后的平均行驶速度为 40km/h。问题六要依照接警后平均行驶速度为 50km/h。
- 5、假设在安排巡逻路线时, 以未有报警为前提进行安排。
- 6、已知 (5112, 4806), (9126, 4266), (7434, 1332) 为重点区域, 将离这三个坐标最近的点假设为接警后 2 分钟可达的优先保护的线路坐标。

三、警车巡逻数量限制

3.1 问题分析与数据处理

分析前问题一和问题二如下:

问题一是对警车的静态分布划分, 使其警车所在的位置可以覆盖 90% 以上的路线。

问题二主要是在将问题一作为必要条件的前提下, 对你的静态划分进行进一步评价的定义。

因此, 在这里将问题一和问题二进行统一建立模型求解。在这里对已有数据进行初步处理以及一些概念解释。

首先, 以某点进行扩展, 在接警 3 分钟 (或 2 分钟) 后必到的约束下, 其该点的可达集合中线和点覆盖的示意图如图 1, 其中蓝点表示起始点 x_i , 而绿色表示可达结合区域, 定义 $\varphi(x_i)$ 表示 x_i 在接警后可以覆盖的路线的总长度, 而 $\psi(x_i)$ 表示 x_i 在接警后可以覆盖的点的总数 (也适用于统计离散化后的点)

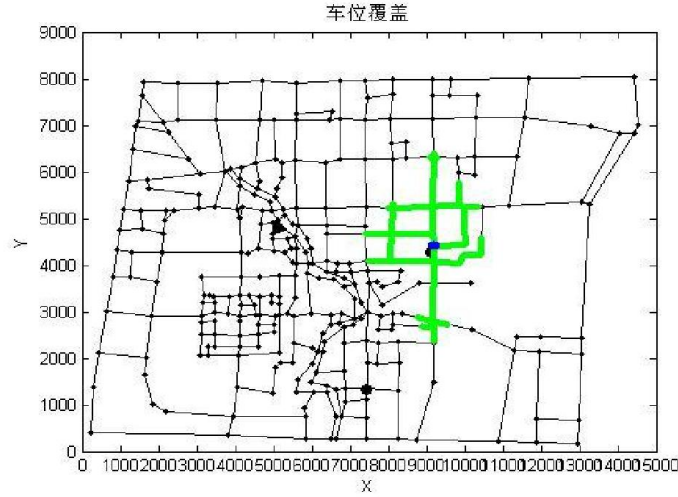


图 1 可达集中线与点的覆盖示意图

另外，就是对现有的 307 个交叉口所连起来的道路进行离散化，理论上以 10 米进行划分，然后有些道路无法完美划分，则在划分的一端进行限制。其示意图如图 2 所示，对 i 到 j 进行 $k = d(i, j) / 10$ 次划分，若进行第 k 划分时，如果 $d(k, j) \leq 5$ 时，不做第 k 次划分，而将 j 作为最后一个点，如果 $d(k, j) \geq 5$ ，则进行做 k 次划分。最后将 307 个交叉口，离散成了 49175 个点，详见附录[1]。

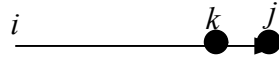


图 2 i 和 j 的划分示意图

3.2 模型建立

首先要建立初等模型，从未离散化的位置坐标集合或者离散化后的位置坐标集合进行确定警车的位置，主要思想：将警车部署到未离散（离散化的点）的坐标位置上，去确保 D1。综合这种静态部署，提出了一下评价指标做为部署的情况的优劣评价：

- 1、在接警后巡逻警车对道路的线覆盖率，其定义为 L_{cr} ；
- 2、在接警后巡逻警车对道路的线覆盖中重复率，其定义为 L_{rr} ；
- 3、在接警后巡逻警车对离散化的点的覆盖率，其定义 Q ：

在这些评价指标的约束下，初等模型应该满足最基本的约束如公式 3.2.1 所示

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \text{线的覆盖率大于} 90\% \\ \text{点的覆盖率大于} \delta \end{cases}$$

根据以上的优劣评价指标与最基本的约束，建立初等模型如公式 3.2.2 所示。

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{x_i \in U} x_i \\
& \min L_{rr} \\
& \max L_{cr} \\
& \max Q
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$s.t. \left\{ \begin{aligned}
& L_c = \bigoplus_{x_i \in U} \varphi(x_i) / U \\
& L_r = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \theta(x_i, x_j) \\
& L_{rr} = L_r / L \\
& L_{cr} = (L_c - L_r) / L \\
& L_{cr} \geq 90\% \\
& P_c = \bigoplus_{x_i \in U} \psi(x_i) / U \\
& P_r = \bigoplus_{\substack{x_i, x_j \in U \\ i \neq j}} \sigma(x_i, x_j) / U \\
& Q = (P_c - P_r) / P \\
& Q \geq \delta
\end{aligned} \right.$$

U ：表示 n 个的离散化点的集合。

x_i ：表示在第 i 个点上是否有警车，如果是 1，表示有，如果是 0，则表示没有。 $x_i \in U$ 。

$\varphi(x_i)$ ：表示 x_i 在接警后在规定时间内可达路线的总长度。

$\theta(x_i, x_j)$ ：表示 x_i 与 x_j 在接警后在规定时间内可达路线的重叠路线长度。

L ：表示路线总长度。

P ：表示离散化点的总数。

L_c ：表示 x_i ($x_i \in U$) 在接警后在规定时间内可达集合路线的总长度，包括重复的。

L_r ：表示任意两个不同点 x_i 与 x_j 在接警后在规定时间内可达路径中重复路线总长度。

P_c ：表示 x_i ($x_i \in U$) 为 1 坐标上的警车在接警后在规定时间内可达集合中覆盖点的总个数，包括重复的。

P_r ：表示任意两个不同点 x_i 与 x_j 在接警后在规定时间内重复覆盖点的总个数。

$\psi(x_i)$: 表示 x_i 在接警后大可达集合中点的覆盖数。

$\sigma(x_i, x_j)$: 表示任意两个不同点 x_i 与 x_j 在接警后在规定时间内可达路径中重复点的数目。

Q : 表示 $x_i \in U$ 在接警后在规定时间内所能覆盖离散化点的比率。

δ : 限制最小的离散化点的覆盖率。

初等模型是最理想的状态，但是很难求解，由此通过近似求解最优车辆数来求解第一问，由此，根据不同算法的特点，提供了求解问题一的四种警车定位方案：

第一种：利用启发式洪泛策略对警车进行定位，其思想为以三个重点部位作为洪泛点的中心，在这三个点附近先放三个警车作为扩散覆盖的源点，进而通过广度优先搜索算法（BFS）进行扩散确定警车位置，直至警车分布时的线覆盖率达到 90% 以上。将此时的警车数目近似作为最优解。

第二种：利用层次聚类分析方法，逐步将两个距离相近的聚类合并起来，形成一个新的聚类，直到不能再聚类为止。最终形成了最小的聚类个数，并且每个聚类内部只需要摆放一辆警车，即可覆盖到该区域，这样对总区域的覆盖率也是最优的。

第三种：在以社区模块性为增量的前提下，利用 Newman 快速社区发现算法，不断合并社区，进而得到在 90% 覆盖率的限定条件下的最优发现，并以此来进行分析。进而在已发现的社区上找出警车点，并通过线覆盖率进行限制求解。

第四种：如何保证在满足“覆盖要求”的同时，使用的巡逻警车数目最小是一个 NP 完全问题。结合遗传算法在处理集合搜索中的广泛应用，设计了一种基于遗传算法的节点集搜索机制。在保证充分覆盖的前提下，形成最优覆盖节点集。

3.3 扩展模型

3.3.1 基于启发式洪泛模型

3.3.1.1 模型建立

基于近似求解的思想，设计启发式洪泛策略对警车进行定位，基于初等模型的约束，进而考虑到重点部位的需求，即重点部位要求有辆警车必须在在 2 分钟内赶到。在此优先考虑重点部位的保护，进而形成了这个模型的主旨思想：以三个重点部位作为洪泛点的中心，在这三个点附近先放三个警车作为扩散覆盖的源点，进而通过广度优先搜索算法（BFS）进行扩散确定警车位置，直至警车分布时的线覆盖率达到 90% 以上。建立模型如公式 3.3.1。

$$\begin{aligned}
& \min L_{rr} \\
& \max L_{cr} \\
& \max Q
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$s.t. \begin{cases}
\varphi(x_{1,i}) = \sup_{x_{1,j} \in S_i} \{\varphi(x_{1,j})\} \\
S_{i+1} = S_i \cap B(x_{1,i}) \\
L_c = \bigoplus_{x_i \in S_i} \varphi(x_i) / S \\
L_r = \bigoplus_{\substack{x_i, x_j \in S \\ i \neq j}} \theta(x_i, x_j) / S \\
L_{rr} = L_r / L \\
L_{cr} = (L_c - L_r) / L \\
L_{cr} \geq 90\% \\
P_c = \bigoplus_{x_{1,i} \in S} \sigma(x_{1,i}) / S \\
P_r = \bigoplus_{\substack{x_i, x_j \in S \\ i \neq j}} \psi(x_{1,i}, x_{1,j}) / S \\
Q = (P_c - P_r) / P \\
Q \geq \delta
\end{cases}$$

S ：表示警车位置集合。

$x_{1,i}$ ：表示在第 i 个进入 S_i 的警车的位置。

$\varphi(x_{1,i})$ ：表示 $x_{1,i}$ 在接警后可达路线的总长度。

$\theta(x_{1,i}, x_{1,j})$ ：表示 $x_{1,i}$ 与 $x_{1,j}$ 在接警后可达路线的重叠路线长度。

L ：表示路线总长度。

P ：表示离散化点的总数。

L_c ：表示 $x_{1,i}$ （ $x_{1,i} \in U$ ）在接警后可达集合中路线的总长度，包括重复的。

L_r ：表示在 U 中任意两个不同位置 $x_{1,i}$ 与 $x_{1,j}$ 在接警后的重复路线总长度。

P_c ：表示 $x_{1,i}$ （ $x_{1,i} \in U$ ）在接警后可达集合中覆盖点的总个数，包括重复的。

P_r ：表示在 U 中任意两个不同点 $x_{1,i}$ 与 $x_{1,j}$ 在接警后的重复覆盖点的总个数。

Q ：表示当前警车在接警后所能覆盖离散化点的比率。

S_i ：表示第 i 次扩充到 S 的备选集合。 $x_{1,i}$ 可以扩展的位置的集合。

$B(x_{1,i})$ ：表示在第 i 次扩充时，选取从 $x_{1,i}$ 可扩展到的边界位置 $x_{1,j}$ ($x_{1,j} \notin U, x_{1,j} \notin S$) 组成的集合。

3.3.1.2 算法流程

鉴于上述启发式洪泛巡逻模型，设计其启发式洪泛模型算法如下：

Step1：将三个优先确保的三个坐标初始化到集合 S_0 。

Step2：同时以 $\varphi(x_{1,i}), x_{1,i} \in S_0$ 扩展 S_0 ，仅将 $\varphi(x_{1,i}), x_{1,i} \in S_0$ 的边界点压入 S_0 ，将原来的 S_0 中的三个点加入集合 S 。形成备选集合 S_1 。

Step3：计算在车位置集合 S 中的线覆盖长度 L_{cr} ，如果 $L_{cr} \geq 90\%$ ，则 S 中车的位置即为最优解。若 $L_{cr} < 90\%$ ，则进行 Step4。

Step4：在 S_i ($i=1,2,\dots$) 中选取 $\varphi(x_{1,i}) = \sup_{x_{1,j} \in S_0} \{\varphi(x_{1,j})\}$ 的点 $x_{1,i}$ ，作为启发式洪泛算法的扩展方向，进而将 $x_{1,i}$ 并入 S ，而在 S_i 中剔除 $x_{1,i}$ ，并将 $x_{1,i}$ 通过 $\varphi(x_{1,i})$ 扩展的边界点压入 S_i ，形成新的集合 S_{i+1} 。跳到 Step3。

3.3.1.3 模型结果

通过该启发式洪泛巡逻模型，确定的结果如表 1 评价指标。

表 1 评价指标

警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
24	90.89%	78.41%	90.95%

其车辆位置如表 2 表示 24 辆车的坐标

表 2 24 辆车的坐标

车号	X 坐标	Y 坐标
1	4986	4896
2	9198	4392
3	7452	1368
4	5616	7110
5	9162	7146
6	11574	7164
7	5040	6264

8	10242	6318
9	6516	2934
10	14418	6840
11	3096	5958
12	2394	5184
13	1818	2898
14	4122	2250
15	2502	7902
16	3798	360
17	11142	5274
18	8100	6606
19	5526	2340
20	7434	5256
21	7398	4662
22	8748	252
23	10872	216
24	12978	684

对 24 个车辆进行区域覆盖描述，如图 3 所示 24 辆车的区域覆盖。

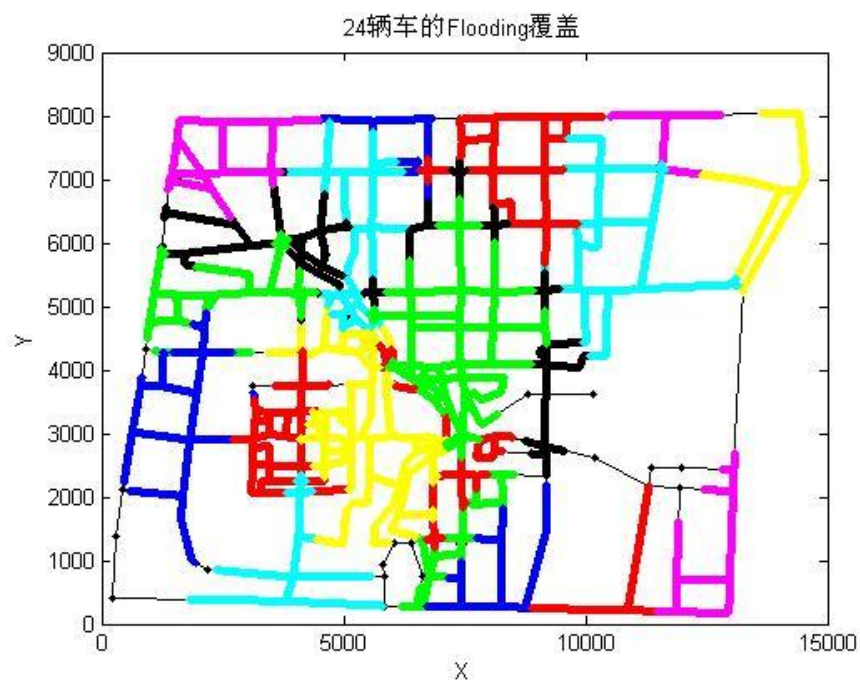


图 3 24 辆车的区域覆盖

3.3.2 基于层次聚类分析模型

3.3.2.1 模型建立

根据层次聚类模型的思想。假设在未离散化的点上都安排一辆巡逻车，即初

始化时在每个路口设置一辆巡逻警车，共有 n 个对象。此时，设每个对象包含该对象覆盖的路口集合 S_i ，在每个对象中任意两个路口的最短距离的最大值即为该

对象的直径，记为 $D_i = \max_{u \in S_i, v \in S_i} \{d(u, v)\}$ ， $d(u, v)$ 记为路口 u 到路口 v 的最短距离；

两个聚类间距离计算采用最大距离方式计算两个聚类之间的距离，聚类间的最大距离定义为分别属于两个聚类的最大对象间的距离，即

$$D(C_i, C_j) = \max_{p \in C_i, q \in C_j} (d(p, q))$$

合并规则：根据题目要求，当 $\max\{D(C_i, C_j), D_i, D_j\} \leq D$ 是，即说明两个聚类可

以合并成一个聚类 C_i' ，其中 D 为巡逻警车接警后三分钟所能赶到的距离，新的

聚类 C_i' 所包含该对象覆盖的路口集合 $S_i' = S_i \cup S_j$ ，新的聚类 C_i' 的直径为

$$D_i' = \max\{D(C_i, C_j), D_i, D_j\}。$$

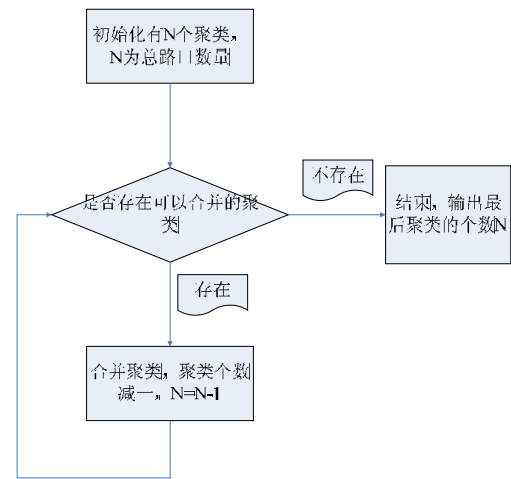
通过上述过程，假设最后形成含 k 个区域的集合 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ ，其对于警车定位的模型建立如公式 3.3.2:

$$\begin{aligned} \max \quad & L' = L_c - L_r \\ \min \quad & \sum_{\substack{x_i \in S_i, x_j \in S_j \\ i \neq j}} \theta(x_{2,i}, x_{2,j}) \\ \max \quad & Q \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$s.t. \begin{cases} L_c = \bigoplus_{x_{2,i} \in S_i} \varphi(x_{2,i}) / S \\ L_r = \bigoplus_{\substack{x_i \in S_i, x_j \in S_j \\ i \neq j}} \theta(x_{2,i}, x_{2,j}) / S \\ (L_c - L_r) / L \geq 90\% \\ P_c = \bigoplus_{x_{2,i} \in S_i} \psi(x_{2,i}) / S \\ P_r = \bigoplus_{\substack{x_i \in S_i, x_j \in S_j \\ i \neq j}} \psi(x_{2,i}, x_{2,j}) / S \\ Q = (P_c - P_r) / P \\ Q \geq \delta \\ D(S_i, S_j) \geq D \end{cases}$$

3.3.2.2 算法流程

- 算法步骤：
- Step 1: 构造 N 个初始聚类，每个聚类只包含一个路口， $D_i = 0$ ；
- Step 2: 依据合并规则，判断是否存在两个聚类能够合并，如果不能，跳至 Step 3;将两个聚类合并成一个新的聚类；
- Step 3: 输出最终的聚类个数。



3.3.2.3 模型结果

利用层次聚类模型分析计算出，满足条件 D_1 , 该区域最少得配置 22 辆警车巡逻。

表 3 评价指标

警车数量（辆）	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
22	90.08%	49.44%	91.08%

其车辆具体位置表 4 22 辆车的坐标

表 4 22 辆车的坐标		
车号	X 坐标	Y 坐标
1	11574	7164
2	8118	7668
3	3510	7110
4	5580	6246
5	9810	6300
6	1080	5202
7	14418	6840
8	5274	4788
9	8082	4662
10	2088	4266

11	4104	2916
12	8352	2970
13	7308	3186
14	432	2106
15	10152	3618
16	11952	2142
17	6876	1350
18	4986	1260
19	5652	1548
20	9198	1494
21	1854	1008
22	12978	684

对 22 个车辆进行区域覆盖描述，如图 4 所示 22 辆车的区域覆盖。

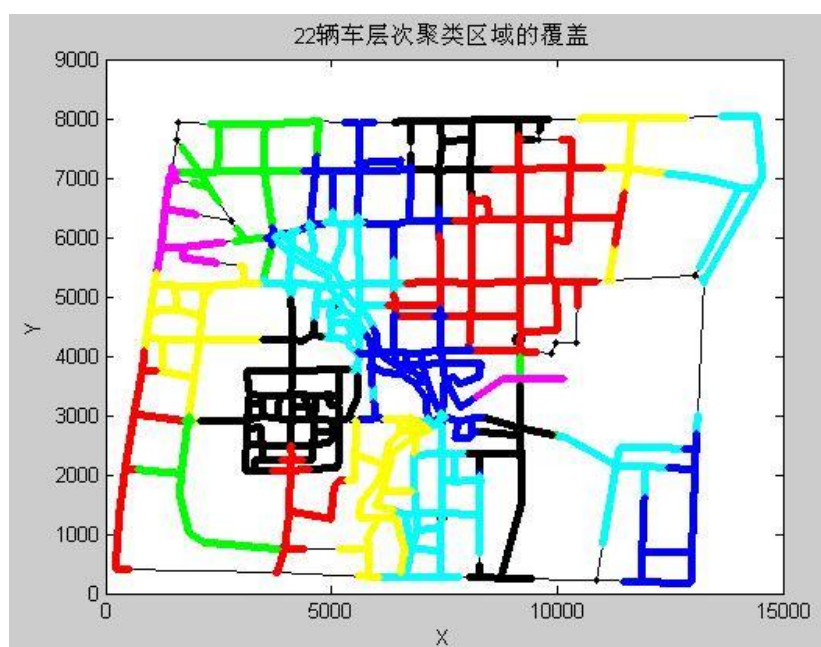


图 4 22 辆车的区域覆盖

3.3.3 基于模块性的 Newman 社区发现模型

3.3.3.1 模型建立

通过对前两个问题的分析，在此引入基于网络划分模块性优化的 Newman 快速社区发现算法，建立以模块性最大，社区数最少为目标函数的社区发现优化模型，其步骤如图 4 所示。

该模型的处理对象也是离散化后的点初始化为 n 个点（49000）作为集合，即最终会在这些离散的点上分布警车。

模块性是网络图的一个属性，表示出一个图划分的好坏。如果社区内的边越多，社区间的边越少，模块性就越好。 A_{vw} 的 0/1 矩阵为邻接矩阵

$$A_{vw} = \begin{cases} 1, & v \text{ 和 } w \text{ 相连} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

用 k_v 表示 v 点的度数 $k_v = \sum_w A_{vw}$ ，如果 v, w 之间存在一条边，那么这条边的期望度数为

$k_v k_w / 2$ ，那么定义模块性为：

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{vw} \left[A_{vw} - \frac{k_v k_w}{2m} \right] \delta(c_v, c_w) \quad (\delta(i, j) = 1, \text{ if } i = j, \text{ else } 0.)$$

为了简化我们算法的描述，我们可以定义两种变量：

$$e_{ij} = \frac{1}{2m} \sum_{vw} A_{vw} \delta(c_v, i) \delta(c_w, j)$$

$e_{i,j}$ 表示第 i 个点与第 j 个点关联性，即

$$e_{ij} = \begin{cases} 1/2m, & i \text{ 和 } j \text{ 相邻} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中， m 为网络中的总边数。

另外，定义 a_i 代表 i 个点度密度，定义为： $a_i = \frac{1}{2m} \sum_v k_v \delta(c_v, i)$ 简化为： $a_i = d_i / 2m$ 。

而 $\delta(c_v, c_w) = \sum_i \delta(c_v, i) \delta(c_w, i)$ ，则可以推导如下公式：

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2m} \sum_{vw} \left[A_{vw} - \frac{k_v k_w}{2m} \right] \sum_i \delta(c_v, i) \delta(c_w, i) \\ &= \sum_i \left[\frac{1}{2m} \sum_{vw} A_{vw} \delta(c_v, i) \delta(c_w, i) - \frac{1}{2m} \sum_v k_v \delta(c_v, i) \frac{1}{2m} \sum_w k_w \delta(c_w, i) \right] \\ &= \sum_i \delta(e_{ii} - a_i^2) \end{aligned}$$

随后，不断的合并 R 值增量 (ΔR) 最大的相邻集合，直至合成一个集合为止。

$$\Delta R = e_{ij} + e_{ji} - 2a_i a_j = 2(e_{ij} - a_i a_j)$$

在合并过程中，可以包含 $(1 \sim n)$ 中 k 个子集组成集合 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ 。建立模型如

3.3.3:

$$\begin{aligned}
& \max \quad L' = L_c - L_r \\
& \min \quad \omega(S) \\
& \min \quad \sum_{\substack{x_i, x_j \in S \\ i \neq j}} \theta(x_{1,i}, x_{1,j}) \\
& \max \quad Q
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$s.t. \begin{cases}
L_c = \bigoplus_{x_i \in U} \varphi(x_i) / U \\
L_r = \bigoplus_{\substack{x_i, x_j \in U \\ i \neq j}} \theta(x_i, x_j) / U \\
(L_c - L_r) / L \geq 90\% \\
P_c = \bigoplus_{x_{1,i} \in U} \psi(x_{1,i}) / U \\
P_r = \bigoplus_{\substack{x_i, x_j \in U \\ i \neq j}} \psi(x_{1,i}, x_{1,j}) / U \\
Q = (P_c - P_r) / P \\
Q \geq \delta \\
\Delta R_{i,j} = \sup_{S_i, S_j \in S} \{R(S_i, S_j)\} \\
S'_{i,j} = C(S_i, S_j), \quad \Delta R_{i,j} \text{ 相关的 } i \text{ 与 } j \\
S = (S - S_i - S_j) \cup S'_{i,j}
\end{cases}$$

3.3.3.2 算法流程

初始化网络为 n 个社团，即每个节点就是一个独立社团。初始的 e_{ij} 和 a_i 满足：

$$e_{ij} = \begin{cases} 1/2m, & i \text{ 和 } j \text{ 有边相连} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad a_i = d_i / 2m$$

其中 d_i 为节点 i 的度， m 为网络中的总边数。

依次合并右边相连的社团对，并计算合并后的 R 值增量：

$$\Delta R = e_{ij} + e_{ji} - 2a_i a_j = 2(e_{ij} - a_i a_j)$$

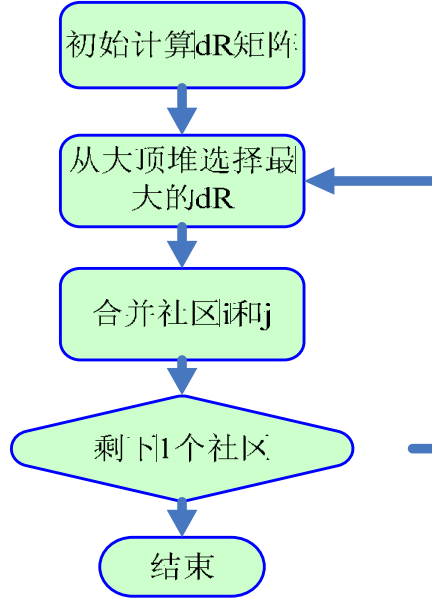
该算法的主要步骤为：

步骤 1) 计算出模块性的初始增量值 ΔR ，并记录 a ，用最大堆存储模块增量矩阵中的每一行。

步骤 2) 选择模块性增量最大的两个社区，进行合并，并且将整体模块性的

变化更新。

步骤 3) 不断重复步骤 2, 直到最后合并为一个社区。



Newman 快速算法流程图

根据贪婪算法的原理, 每次合并应该沿着使 R 增大最多或者减少量最小的方向进行。算法复杂度为 $O(m)$ 。每次合并以后, 对相应的元素 e_{ij} 更新, 并将与 i, j 社区相关的行和列相加。这步时间复杂度为 $O(n)$ 步骤 2) 的总时间复杂度为 $O(m+n)$ 。

重复步骤 2), 不断合并社团, 知道整个网络合并为一个社团。最多要执行 $n-1$ 次合并。

算法总复杂度为 $O((m+n)n)$, 对于稀疏网络则为 $O(n^2)$ 。最后得到一个社团结构分解的树状图。再通过选择在不同位置断开可以得到不同的网络社团结构。在这些结构中选择一个对应着局部最大 Q 值的, 就得到最好的网络社团结构。利用堆结构可以将时间复杂度降低为 $O(n(\log_2^n)^2)$ 。

关于社区 i 和社区 j 合并时模块性的更新, 如果 k 同时连着 i 与 j , 则

$$\Delta R'_{jk} = \Delta R_{ik} + \Delta R_{jk}$$

如果 k 连着 i , 但 k 不连着 j , 则:

$$\Delta R'_{jk} = \Delta R_{ik} - 2a_j a_k$$

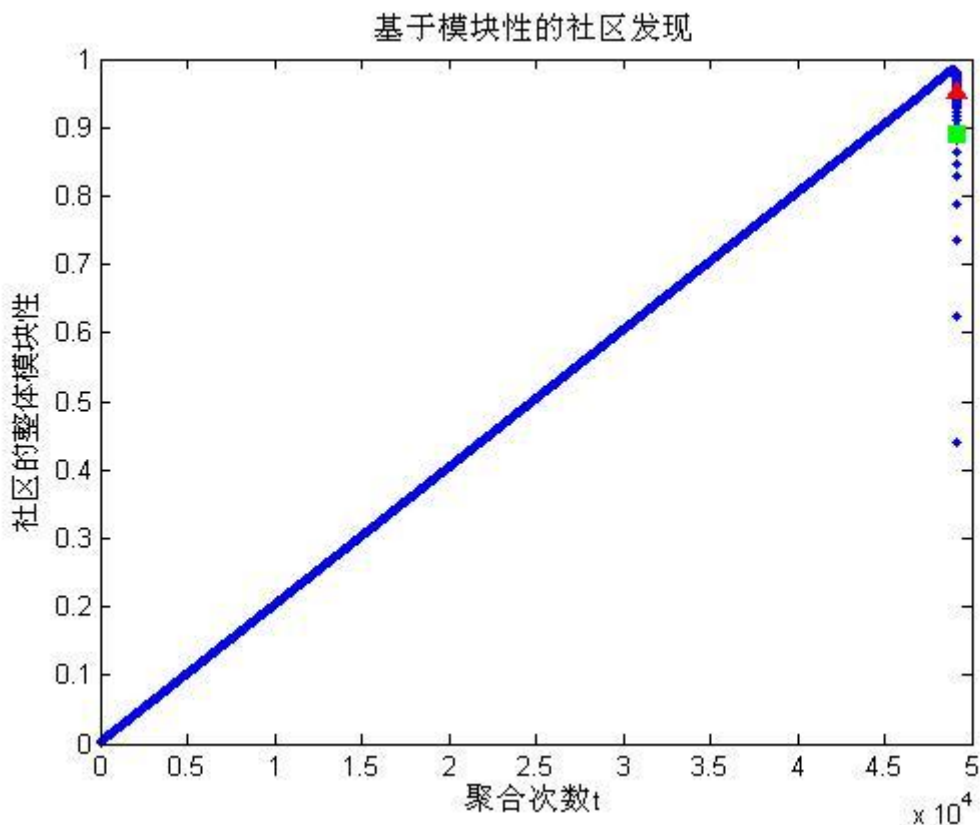
如果 k 连着 j , 但 k 不连着 i 则:

$$\Delta R'_{jk} = \Delta R_{jk} - 2a_j a_k$$

3.3.3.3 模型结果

针对目前的交通网络图，警察在下车后的 10 米范围内是属于武器可控范围内。我们已经根据警察的实际控制能力，将街道进行了 10 米间隔的离散化点后，共 49000 多个点这样基本上等同于原先的线覆盖。

在这些的社区发现中，不断的找两个社区进行合并，得到一个新的模块性，这里我们描绘出在社区合并过程中的模块性变化趋势。



合并 49000 多个点时的模块性增量

上图中，可以观察到红色三角为划分 23 个社区时的模块性，而且经过检测 23 个社区内的布警覆盖率在 90%以上，而此处的模块性 0.9507，说明这已经是非常理想的一个社区划分；绿色正方形处为划分 10 个社区的模块性，而且经过检测 10 个社区内的布警覆盖率在 64%以上，而此处的模块性达到了 0.8912，在这么大的社区内仅有 10 辆警车的布控是比较理想的一个社区划分了。下面分别对这两个数据的结果分析：

(1) 多警车布控下，使得街道线覆盖率在 90%以上，警车尽量少

此处经过合并后的社区分析，在社区内选取合适的点后计算其覆盖率，而此时当覆盖率在 90%以上时，所需要的警车数量最少为 23 辆。选取好警车初始发车点的控制区域图如 5 所示。

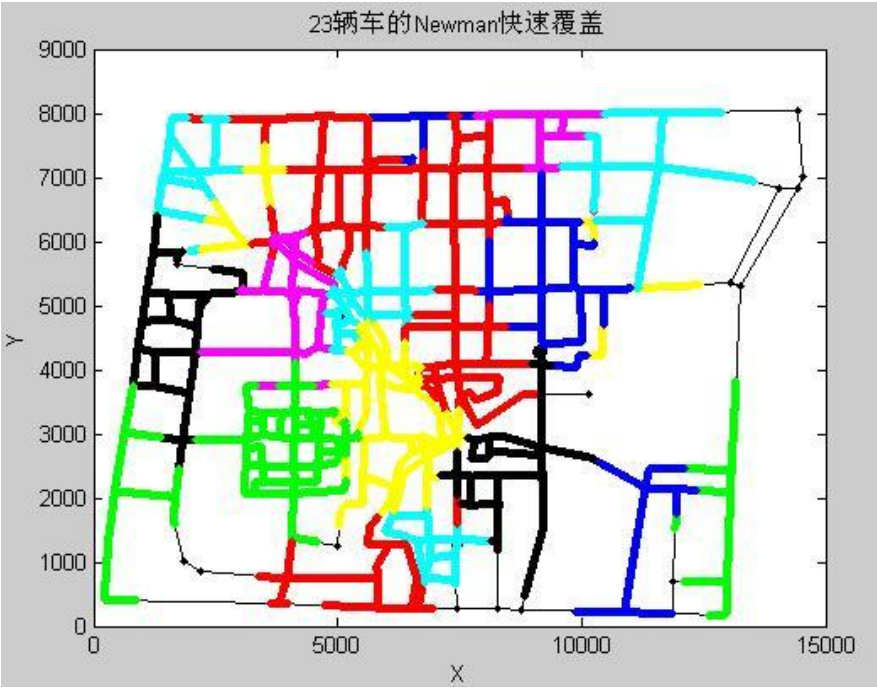


图 5 不同颜色区域为 23 辆不同警车的警力覆盖图

从上图明显可以看出，23 个点在地图上的线覆盖基本上快覆盖完毕了，达到 90%的覆盖率也在乎情理之中。

表 5 评价指标

警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
23	90.05%	79.54%	90.10%

布控的 23 个车辆位置表 6 23 辆车的坐标

表 6 23 辆车的坐标

车号	X 坐标	Y 坐标
1	10428	5239
2	1954	3597
3	375	1781
4	6850	7143
5	3629	7907
6	9484	7650
7	2507	6585
8	11579	7214
9	7643	6270
10	4104	5688
11	1892	5174
12	13036	1807
13	9162	5065
14	5238	6210
15	4140	4244
16	6390	4561
17	6840	2121
18	7506	3618

19	5855	2942
20	9117	2342
21	3689	2496
22	11091	1203
23	5372	738

3.3.4遗传算法的最优点集模型

3.3.4.1 模型建立

原问题可抽象为：在路口摆放警车集合 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ ，求一个子集 C' ，使得路线覆盖率 $\varphi(C) > 90\%$ ，并且摆放的警车数目 $|C'|$ 最少。

摆放的警车数目 $|C'| = \sum_{i=1}^N X_i$ ，其中 $X_i = 0, 1$ ；

目标函数： $f(x) = 1 - \frac{|C'|}{N}$ ，其中 $|C'| = \sum_{i=1}^N X_i$ ，($X_i = 0, 1$) 表示摆放巡逻警车的数量， N 表示总路口数。

约束条件： $\varphi(C) > 90\%$ ，表示该方案的覆盖率超过90%;其中

$$\varphi(C) = \sum_{i=1}^N X_i \cdot \varphi(x_{1,i})$$

3.3.4.2 模型求解

如果采取暴力搜索求解该问题，时间复杂度为 $O(2^N)$ 属于NP问题,当 N 较大时，时间复杂很高，故暴力搜索不可行。而遗传算法(GA, genetic algorithm)具有并行搜索，群体寻优的特点，已广泛用于解决各种具体NP难度的问题。

遗传算法不直接处理优化问题的决策变量，而是与类似染色体的编码一起运动，用编码来表示解，对于最优化集合搜索问题，解用一个位串 $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ 通过下述方式表示：

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{选定 } C_i \text{ 时等于1, 其他时为0} \\ 0, & \end{cases}$$

利用编码映射，建立遗传算法中的初始种群。种群由 T 个个体组成，路口总

数为 N ，算法中每个个体的染色体均由 N 个基因组构成。初始化种群为：

$$\left. \begin{aligned} P_{p0_1} &= \{g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1,j}, \dots, g_{1N}\} \\ P_{p0_2} &= \{g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2,j}, \dots, g_{2N}\} \\ P_{p0_i} &= \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{i,j}, \dots, g_{iN}\} \\ P_{p0_T} &= \{g_{T1}, g_{T2}, \dots, g_{T,j}, \dots, g_{TN}\} \end{aligned} \right\}$$

通过目标函数，遗传算法只需要一个简单的测量，即能判断出其相对于其他解好的程度。每个个体的质量用适值估计，本文中，每个个体的适值即是其目标韩式。适值的分配关系到挑选过程，是优化策略的制定部分，本文采用定标分配方法，这是一种适用于单目标的适值分配方法。

为了产生优秀的后代，优秀的父代挑选方法是必要的。挑选过程决定了哪个个体会对下一代产生的影响，同时也是搜索策略的一个主要组成部分。另一个方面，它能保持种群的必要多样性，避免过早收敛，陷入局部最优。

在遗传算法中，挑选通常随机产生，本文采用著名的轮盘赌法。其结构如下：独立的可挑选解围成一圈，每个个体被挑选的概率（再生概率）与个体的适值成正比。再生概率定义如下：

$$P_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^K z_j}$$

其中， z_i 是每个个体 \bar{a}_i 的适值，种群尺寸大小为 K 。挑选后，再对每个个体 \bar{a}_i 计算其路线覆盖率 $\varphi(C)$ ，如果大于 90%，则以较高的比例存活；如果小于 90%，则以较高比例淘汰。

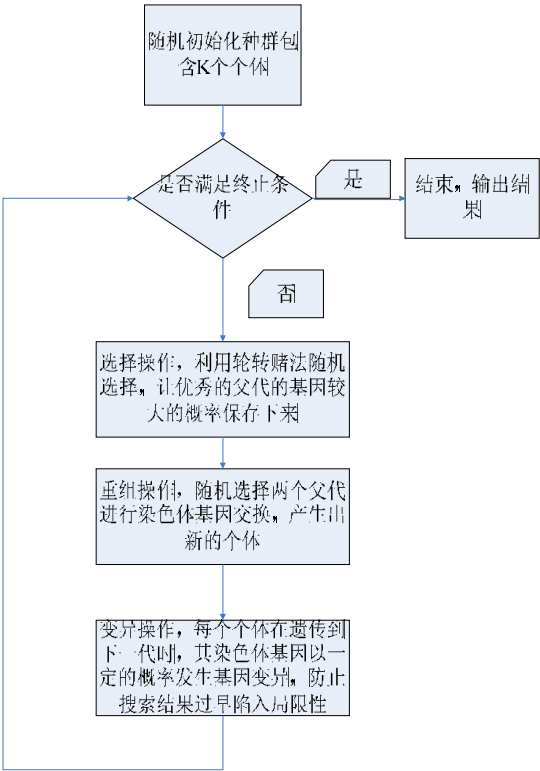
重组操作使得个体成对地或大群地相互交换遗传信息，综合了每个较高适值个体的特征来产生新的个体。为了能够使父代双亲的基因在子代中尽可能得到保留，采取循环重组的方法。从父代中选取 K 个个体进行繁殖： $(ind_1, ind_2, \dots, ind_K)$ ；

第一次选取 (ind_1, ind_2) 作为双亲，第二次选取 (ind_2, ind_3) 作为双亲，第 i 次选取 (ind_i, ind_{i+1}) 。这样每个父代个体的基因将在两个子代个体中有所保留。以交叉

概率 P_{cr} ，在父代中选取 K 个个体进行繁殖。具体交换过程为，随机选择一个位串位置 p ，然后将两个个体的染色体 p 位置后所有的基因交换。

变异操作只应用于由双亲繁殖所得的后代个体。在所有后代个体构成的基因组集合中按变异概率 P_c 选取基因组进行变异操作。变异是重要的灵活搜索算子，它可以强迫算法搜索新的区域，从而帮助遗传算法避免过早收敛产生局部最优解。本文中，变异概率 P_c 为染色体长度的倒数 $1/N$ ，这一点在理论上证明是

最优的。
遗传算法求解流程：



3.3.4.3 模型结果

利用遗传算法模型分析计算出，满足条件 D_1 该区域最少得配置 19 辆警车巡逻。

表 7 评价指标

警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
19	91.21%	21.57%	91.32%

其车辆具体位置表 8 表示 19 辆车的坐标

表 8 19 辆车的坐标

车号	X 坐标	Y 坐标
1	7452	1908
2	9180	4086
3	5562	4608
4	4104	2916
5	2268	6858
6	2160	4950
7	6480	7128
8	10296	7182

9	14040	6840
10	6066	1278
11	306	1386
12	8118	5220
13	4644	7110
14	11142	5274
15	10872	216
16	13068	2430
17	1854	1008
18	8802	3618
19	3798	360

对 19 个车辆进行区域覆盖描述，如图 6 所示 19 辆车的区域覆盖。

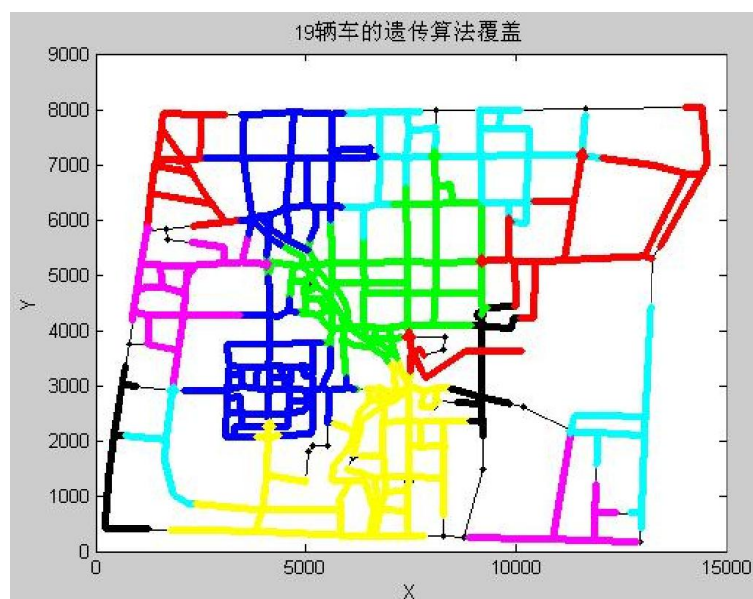


图 6 19 辆车的区域覆盖

四、基于布朗运动的概率巡逻方案模型

4.1 问题分析

接下来使对问题三、四、五进行分析，分析如下：

问题三： 在满足 D1 和 D2 的条件下，设定巡逻方案，其评价指标都有：

- 1、覆盖的均匀度；
- 2、巡逻覆盖的线密度；
- 3、在现实中，也要考虑一定的隐秘性；
- 4、巡逻覆盖线的重复率最小；

问题四：在问题三的基础上，防止它人根据历史数据来统计出巡逻车的路线，而提出了巡逻隐秘性的需求。其评价指标并没有增加，而是在一定程度上加入概率性模型进行改进。

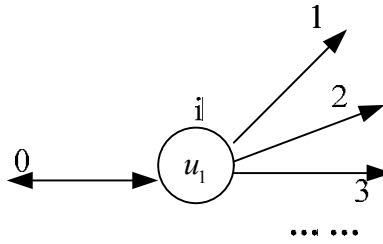
根据这两个问题的特点，在这里进行归一化建模。由于要保证巡逻车线覆盖达到 90%以上，引入概率性模型，能够解决巡逻方案的。对于问题三，加控制约束来对此进行求解。但是在加入控制约束的同时，它的隐秘性也在下降。

4.2 模型建立

建模中为了确保随时随刻的保证线的覆盖率 ρ 在 90%以上。假设警车是在离散化点上作为初始点。利用随机产生一个可以走得方向进行走。这个是利用布朗分子碰撞原理，产生一个依据碰撞产生的夹角映射作为下一次试探性方向，其试探性方向的选取，这里划分为一下两种情况：

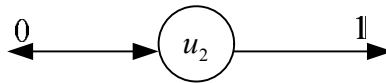
- 1、警车位置处于度 d_i 大于 2 的节点上的概率线路选择函数 u_1 ，如图所示。

其中， u_1 表示该警车在 i 点时的随机函数。在图中，标号为 0 的点，表示警车是从 0 方向进入第 i 点，而在 i 点需要变更方向，为尽量保证警车不发生在一个很短的线段上抖动，因而，以 80%的概率向前随机选取一个方向运动，而以 20%的概率掉头。



- 2、警车位置处于度 d_i 为 2 的节点上的概率线路选择函数 u_2 ，如图所示。其

中， u_2 表示该警车在 i 点时的方向上选取随机函数，在图中，表示警车是从 0 方向进入第 i 点，而在 i 点需要变更方向，为尽量保证警车不发生在一个很短的线段上抖动，进而在以 80%的概率继续向前运动，而以 20%的概率掉头回走。



以上分析了在途中警车所处不同位置时路线的选取方法。其主要目标函数是线覆盖率最大：

$$\max L' = L_c - L_r. \text{ 因为警车在某一时刻，都停留在离散化的点上，因而，在处理}$$

路线的随机选择时，只有上述两种情况。在优化模型中，引入 l_1 和 l_2 为 0, 1

变量，是通过 $f(x_{t,i})$ 判断该 $x_{t,i}$ 位置处于上述的那种情况。其 $x_{t,i}$ 表示第 t 时刻所

属的点的位置。 $F(x_{t,i}, l_1 u_1, l_2 u_2)$ 表示从 $x_{t,i}$ 确定 $x_{t+1,i}$ 的位置。根据初等约束模型，建立基于布朗运动的概率模型如公式 4.1：

$$\begin{aligned}
 & \max \quad L' = L_c - L_r \\
 & \min \quad \sum_{\substack{x_{t,i}, x_{t,j} \in S_t \\ i \neq j}} \theta(x_{t,i}, x_{t,j}) \quad 0 \leq t \leq 240 \\
 & \max \quad Q \\
 & s.t. \left\{ \begin{aligned}
 & L_c = \oint_{x_{t,i} \in S_t} \varphi(x_{t,i}) / S_t \\
 & L_r = \oint_{\substack{x_{t,i}, x_{t,j} \in S_t \\ i \neq j}} \theta(x_{t,i}, x_{t,j}) / S_t \\
 & (L_c - L_r) / L \geq 90\% \\
 & P_c = \oint_{x_{t,i} \in S_t} \psi(x_{t,i}) / S_t \\
 & P_r = \oint_{\substack{x_{t,i}, x_{t,j} \in U \\ i \neq j}} \psi(x_{t,i}, x_{t,j}) / S_t \\
 & Q = (P_c - P_r) / P \\
 & Q \geq \delta \\
 & x_{t+1,i} = F(x_{t,i}, l_1 u_1, l_2 u_2) \\
 & (l_1, l_2) = f(x_{t,i}) \quad l_1, l_2 = 0, 1
 \end{aligned} \right. \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

4.3 模型求解

在布朗运动的概率情况下，加上覆盖率的约束来对上述的四种算法所得到的警车开始动态巡逻，且它的无规则性保证了其隐蔽性的存在。

4.3.1 启发式洪泛车位点的动态巡逻

此处已经得到了 24 个警车车位点，针对这 24 个车位点，结合布朗运动模型进行动态运动。其在 4 小时候的巡逻轨迹为图 7。

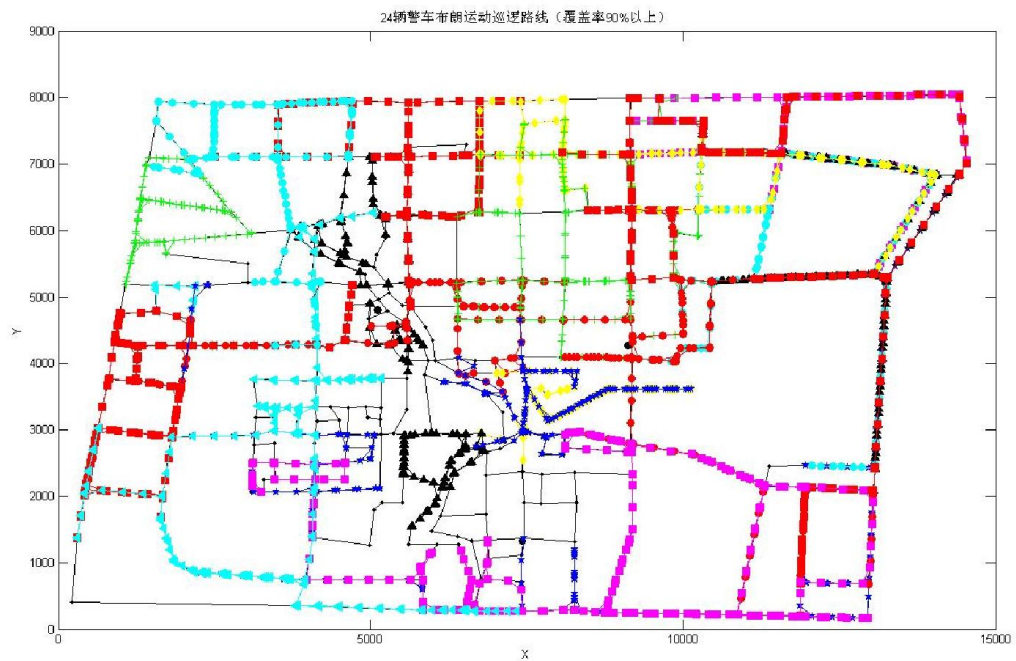


图 7 24 辆警车的巡逻路线图（覆盖率 90%以上）

上图为基于启发式洪泛模型得到的 24 辆警车，在布朗运动概率模型下的运动路线，可以看出上面的路线图毫无规律可言，满足了警车行动路线的隐蔽性，如果继续运动下去，路线会越来越乱，但是覆盖率还是保持在 90%以上的。

4.3.2 层次聚类分析模型中的动态巡逻

此处已经得到了 22 个警车车位点，针对这 22 个车位点，结合布朗运动模型进行动态运动。其在 4 小时后的巡逻轨迹图 8。

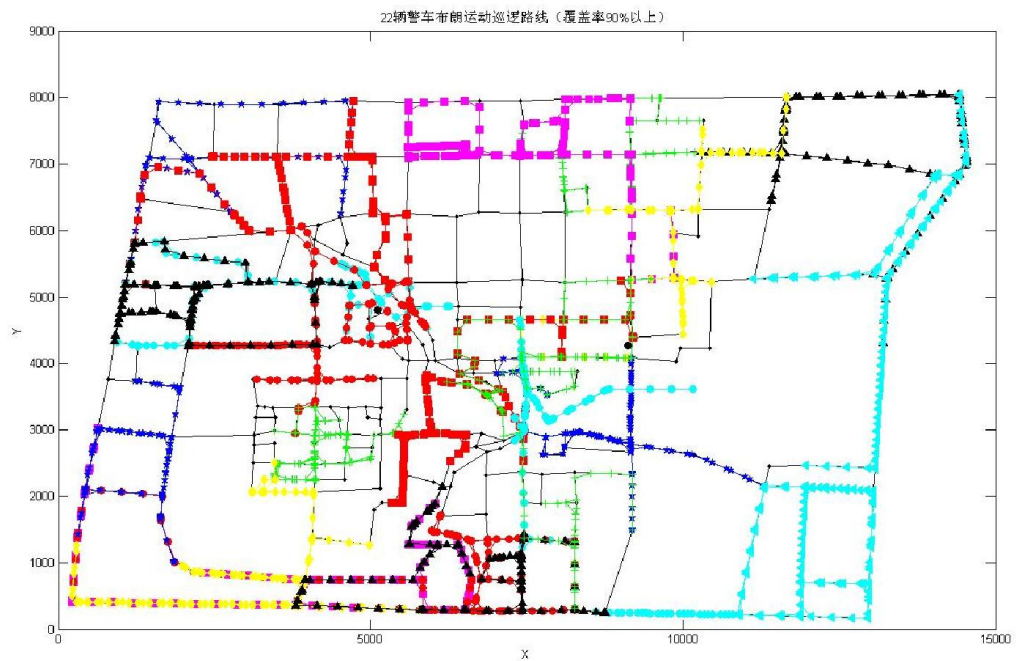


图 8 22 辆警车的巡逻路线图（覆盖率 90%以上）

上图为基于层次聚类分析模型得到的 22 辆警车，在布朗运动概率模型下的运动路线，可以看出上面的路线图毫无规律可言，满足了警车行动路线的隐蔽性，如果继续运动下去，路线会越来越乱，但是覆盖率还是保持在 90%以上的。

4.3.3 Newman 社区发现模型的动态巡逻

在模型中得到了 23 个警车车位点，针对这 23 个车位点，结合布朗运动模型进行动态运动。其在 4 小时时候的巡逻轨迹如图 9。

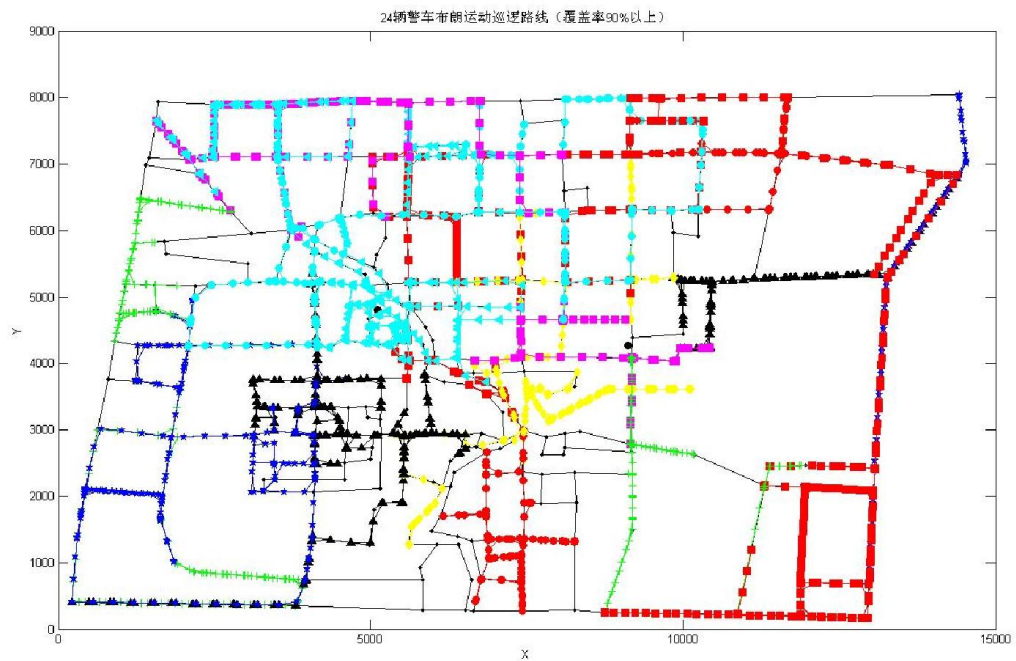


图9 23 辆警车的巡逻路线图（覆盖率 90%以上）

上图为基于启发式洪泛模型得到的 23 辆警车，在布朗运动概率模型下的运动路线，可以看出上面的路线图毫无规律可言，满足了警车行动路线的隐蔽性，如果继续运动下去，路线会越来越乱，但是覆盖率还是保持在 90%以上的。

4.3.4 遗传算法优化模型的动态巡逻

此处已经得到了 19 个警车车位点，针对这 19 个车位点，结合布朗运动模型进行动态运动。其在 4 小时时候的巡逻轨迹图 10。

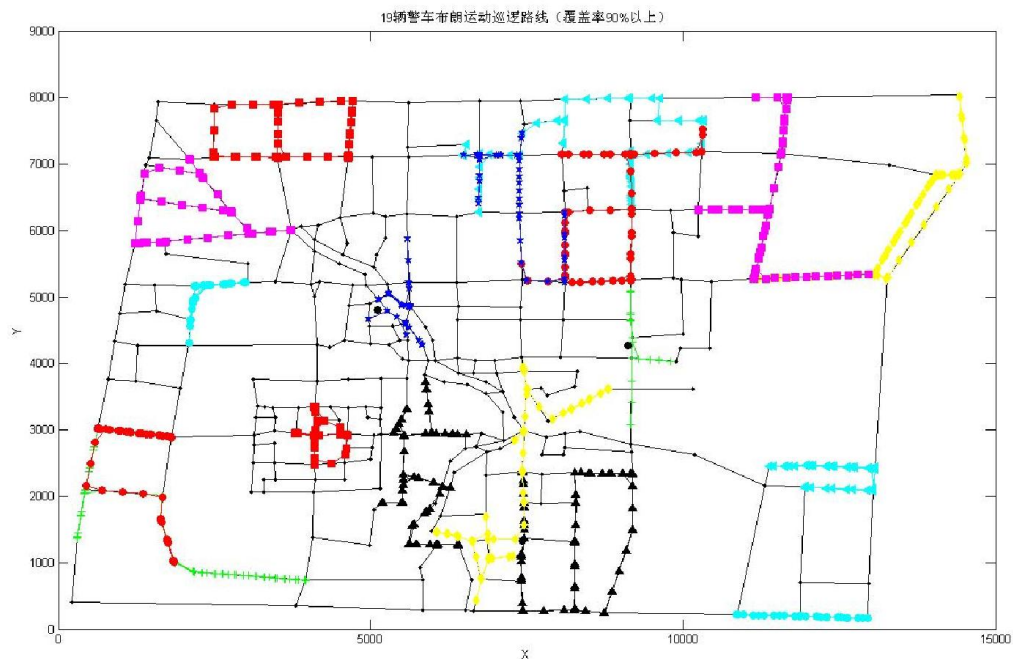


图 10 19 辆警车的巡逻路线图（覆盖率 90%以上）

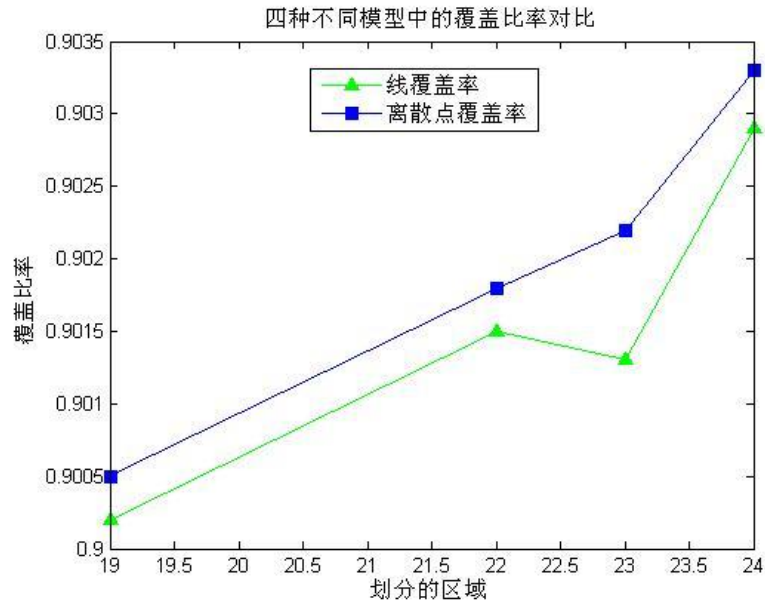
上图为基于启发式洪泛模型得到的 19 辆警车，在布朗运动概率模型下的运动路线，与前面的图进行对比，可知这张图上警车活动范围要小得多，因为车很少的时候，要保证很高的线覆盖率车动起来的范围就会很小。而且可以看出上面的路线图毫无规律可言，满足了警车行动路线的隐蔽性，如果继续运动下去，路线会越来越乱，但是覆盖率还是保持在 90%以上的。

4.3.4 巡逻效果评价指标的对比分析

四种算法在原地巡逻指标效果如表 9 所示，遗传算法得出的结论最好。

表 9 四种算法的原地巡逻指标效果

警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
24	90.29%	64.05%	90.33%
23	90.13%	65.90%	90.22%
22	90.15%	57.06%	90.18%
19	90.02%	32.65%	90.05%



从上图观察，绿色为线覆盖率，蓝色为离散点覆盖率，可见一般情况下，点覆盖率还是要比线覆盖率要高的，这也充分说明了考虑离散点覆盖率的时候，边界点与点之间的部分线被忽略掉的可能性是非常大的。

五、模型的灵敏度分析

在第五问和第六问是关于车辆数和出警车速的调节，我们通过这两个调节来对前面的模型进行灵敏度的分析。

（1）仅配置 10 辆警车

用基于模块性的 Newman 快速算法求解，模块性可达到 89%，相对可观的数据。

在只有 10 辆警车的条件下，希望能够覆盖的区域越广越好，也就是覆盖率最大化。这样应该该 Newman 社区发现算法得到的覆盖率在 64%，相对来说是一个不错的覆盖方案，其覆盖区域图如图 11。

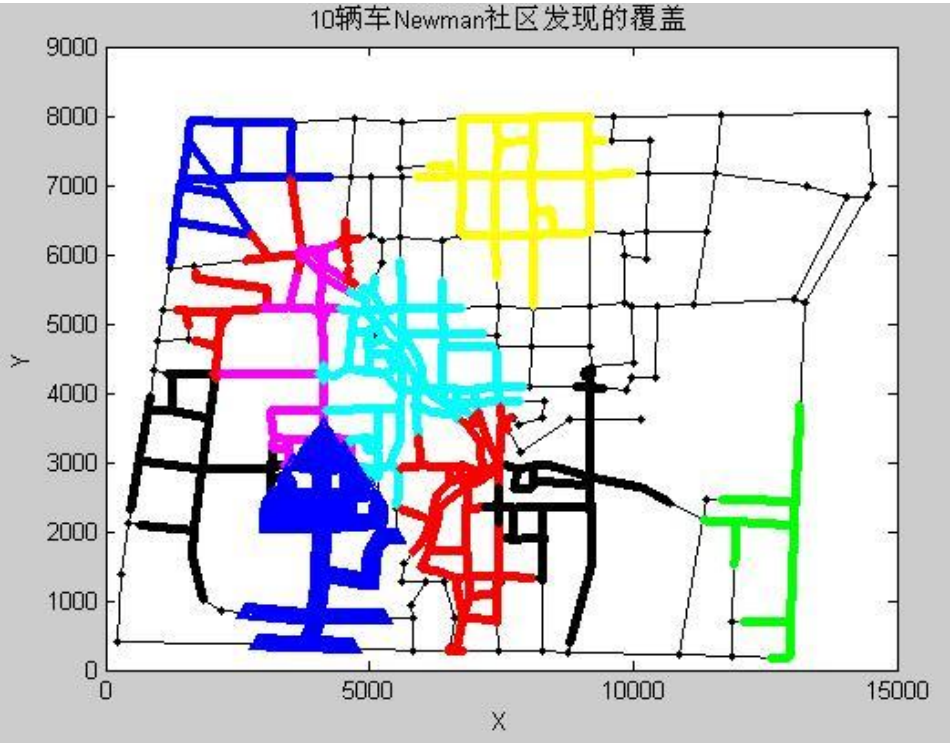


图 11 不同颜色区域为 10 辆不同警车的警力覆盖图

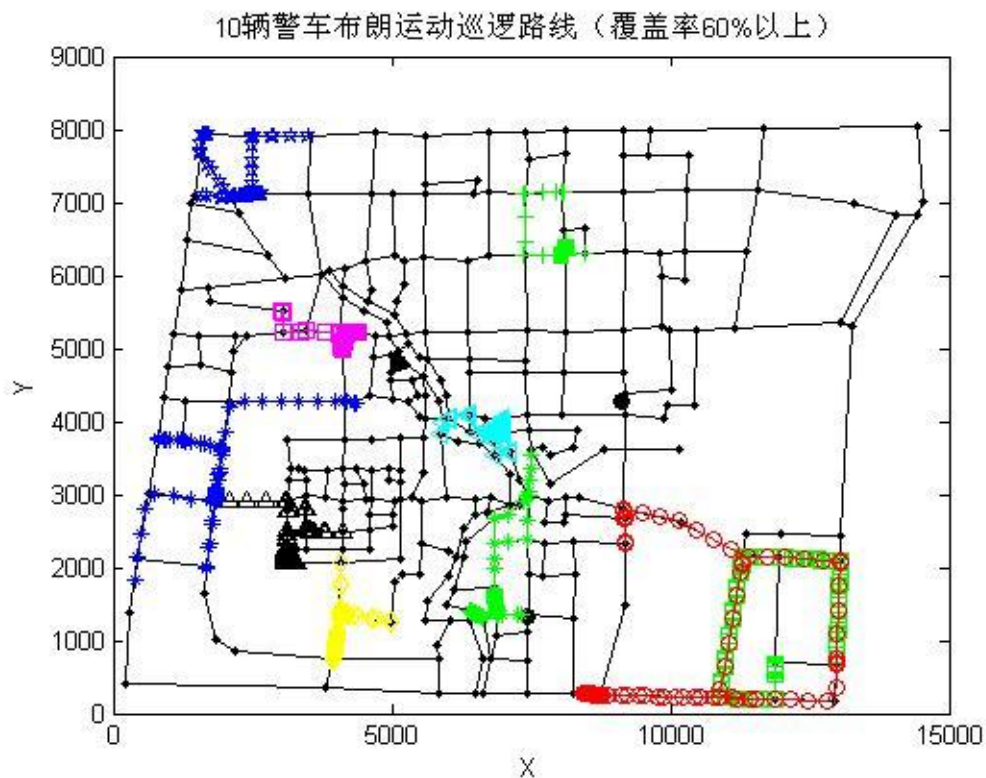
表 1

警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
10	59.99%	9.18%	60.07%

布控的 10 个车辆位置如下

车号	X 坐标	Y 坐标
1	1833	2977
2	7943	7143
3	2249	7088
4	13036	1807
5	3353	5233
6	4180	4277
7	5907	3991
8	6840	2131
9	9198	2340
10	4070	1446

其动态巡逻轨迹为：



警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h

(2) 警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h

表 1

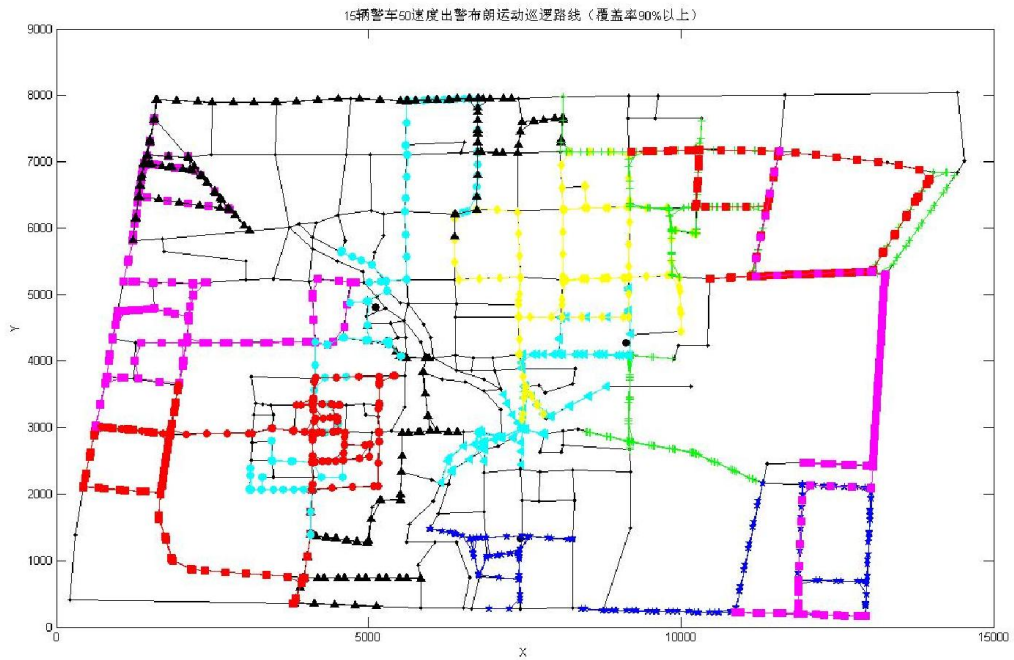
警车辆	线覆盖率	线重复率	点覆盖率
15	90.19%	58.83%	90.21%

布控的 10 个车辆位置如下

车号	X 坐标	Y 坐标
1	4986	4896
2	9198	4392
3	7452	1368
4	4086	2070
5	1566	4788
6	6750	7146
7	8082	4662
8	1674	2016
9	8118	6282
10	2106	7074
11	8118	7974
12	11952	2142
13	13050	5346

14	11574	7164
15	3528	7902

其动态巡逻轨迹为：



六、模型改进

从社会生活中的实际情况出发，巡逻方案还需考虑因素主要有：考虑每辆警车巡视路线尽量平均，巡视路线尽可能均匀，对重点区域的巡视力度和对犯罪高发地区和犯罪高发时间的巡视力度等。

模型改进方向为：划分巡逻区域。即把重点要害部位多，易受侵害对象多，案件、事件发生多，政治影响、社会影响大的区域划为巡逻区。在城市中，这些区域主要是党、政、军首脑机关所在地，商业繁华闹市区，大型商贸农贸集市，车站、码头、机场，大型旅游景点，夜生活丰富的餐饮、文化、娱乐区，市民的主要休闲地，周边治安环境复杂的学校、厂矿、企业集中区，以及治安情况复杂的居民生活区等等。划分巡逻区域时，不仅要考虑如何搞好巡区内的巡逻监控，而且要考虑如何搞好巡区外围的封堵，所以在确定巡逻区域的界线时，还应包括该区对外的主要通道。

规定巡区的安全保卫等级。为确保重点、兼顾全面，有必要确定各个巡逻执勤区的安全保卫等级。划分等级的基本标准是全效监控面积与有效监控面积的比例，其主要标准：一是巡警的目视监控范围；二是预警反应的时间；三是巡逻频率。这三项具体标准虽密切相关，却各有侧重。

巡逻执勤方式的选择。一是巡逻线路的选择要确保重点，对监控范围大、重点要害多、案事件易发多发处，要多巡视、多逗留；二是步巡与车巡相结合，以步巡为主，对两者扬长避短，步巡慢、静，便于走访了解情况，故要多用，车巡快、显眼，适用于视野开阔、交通方便的主干道。步巡组配车，可实行远距离投放警

力步巡和围堵，扩大了步巡的监控范围；三是正确处理好定时定期巡逻与非常规线路巡逻的关系，总的要求是巡逻要有针对性、有利于扩大战果，增强巡逻的威慑力。

七、参考文献

- [1] 洪伟. 我国警察巡逻勤务中存在的问题及改革方向 [J] 云南警官学院学报 2008 年第六期
- [2] Adamcsek, B. G. Palla, I. j. Farkas, I. Derenyi, and T. Vicsek, 2006, Bioinformatics 22(8), 1021
- [3] Chung, F. R. K., 1997, Spectral Graph Theory (American Mathematical Society, Providence, USA)
- [4] van Dongen, S., 2000a, Graphy Clustering by Flow Simulation, Ph. D. thesis
- [5] 贾杰, 陈剑, 常桂然. 无线传感器网络中最优覆盖节点集的求解算法 [J] 东北大学学报(自然科学版) 28 卷 11 期