

“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 光传送网建模与价值评估

摘 要：

本文以最优化理论为基础，研究了光链路建模、光传送网规划、星座图的改进问题。首先，通过结合概率论和信息论的知识方法，从理论上得出了纠错码率与信噪比容限点、入纤功率与传输距离的关系，然后结合最优化理论尝试探索了星座图的改善问题，并提出了有效的模型；本文还利用“破圈法”和贪心算法给出了最优网络规划，最后使用动态规划给出各节点间的传输容量分配。

问题一中，对于子问题一，为了研究信号中的信噪比容限点与纠错码率之间的关系，首先将信道噪声建模为了零均值、高斯白噪声过程，然后基于极大似然准则，在 QPSK、8QAM 和 16QAM 的星座图上划分出各符号的判决区域并且推导出各信号的误码率计算公式，最后通过仿真给出各信号的信噪比—误码率曲线图。根据曲线可得到在题设要求误码率 BER 等于 0.02 时，各信号的信噪比容限点，其中 QPSK 为 6.32dB，8QAM 为 10.65dB，16QAM 为 12.72dB。对于子问题二，需要求解三种调制格式在 80 km 和 100km 光链路下的最大传输距离；根据放大器噪声和光纤噪声与入纤功率的关系，求出每跨跨后信噪比与入纤功率的近似函数关系式，该关系式是一个简单的凸函数，运用最优化理论得出每种单跨距离下最佳入纤功率；再根据第一小问得到的信噪比容限点，可以求出每种调制格式在不同单跨距离下的最大传输距离：其中传输 QPSK 格式信号应选用每跨 100 km 光链路，最大传输距离为 8500 km；传输 8QAM 格式信号应选用每跨 80 km 光链路，最大传输距离为 4160 km；传输 16QAM 格式信号应选用每跨 80 km 光链路，最大传输距离为 3520 km。

问题二中，分三步求解了第一小问。通过利用“破圈法”和贪心算法，并考虑了节点 GPD 对网络价值的影响，分别求出了连接数为 16 和 33 时的最大网络

价值 6714mTb/s 和 11828mTb/s，其网络规划见图 16，图 17。第二小问利用第一小问中类似的方法，先求得最大生成树，由于加入中间节点需要分配容量，所以再为度最大节点之间加入连接扩大容量以满足需求，生成的最优网络规划见图 18-20，最后利用动态规划，得出了所有中间节点的传输容量分配，其具体分配见表 7-9，连接数为 16 和 33 时的最大网络价值 5060mTb/s 和 10996mTb/s。当由市扩大为省，由于人口增加，其网络规划变为图 22-24，容量分配见表 11-13，连接数为 16 和 33 时的最大网络价值 17133mTb/s 和 39378mTb/s。第三小问引入了人口发展指数作为评价地区经济是否发达的指标，用于平衡欠发达地区和发达地区的网络价值，以达到各地区均衡发展，得出的网络规划见图 25-27，在不考虑容量分配的情况下，连接数为 33 时的网络价值 39729mTb/s。

问题三中，研究如何改进调制方式（星座图）以降低信噪比容限点。本文首先探讨了影响信噪比容限的因素，其中信号的平均功率和相邻点最短欧式距离为评估不同星座图的性能的重要指标。接下来根据星座点的个数等于 8 和大于 8 两种情况去探索了新的调制方案，当星座点数等于 8 时，在 3bit 的信息熵限制条件下发送符号是等概的；而星座点数大于 8 时，发送符号不能是等概的，因此我们建立了方程组去求解各星座点的概率，同时给出了不同星座图对比信噪比容限点的判决条件。因为建立的方程组为欠定方程组，不仅有无无数多组解并且难以求解，因此我们设立了一些假设条件，在这些假设条件下我们给出了两种星座图方案，一种为环形 8QAM，一种为 (6,6) 分布的 12QAM。计算结果显示，这两种方案的星座图的信噪比容限点都比题设给出的 8QAM 信号的信噪比容限点低，相比而言具有更优的性能。

关键词：星座图、光传送链路、光传送网规划、极大似然准则、“破圈法”

目 录

1. 问题重述.....	4
1.1 背景知识.....	4
1.2 问题重述.....	4
2. 符号说明.....	7
3. 问题一：光传送链路建模.....	8
3.1 子问题一：纠前信噪比与信噪比容限点的计算.....	8
3.1.1 基本假设	8
3.1.2 模型建立	9
3.1.3 问题求解	12
3.1.4 计算结果与分析	14
3.2 子问题二：光链路性能计算.....	15
3.2.1 基本假设	15
3.2.1 模型建立	16
3.2.3 问题求解	17
3.2.4 计算结果与分析	18
4. 问题二 光传送网规划.....	20
4.1 基本假设.....	20
4.2 模型建立.....	20
4.3 子问题一.....	21
4.2 子问题二.....	25
4.5 子问题三.....	32
5. 问题三 改善星座图.....	35
5.1 问题简述.....	35
5.2 问题分析.....	35
5.3 建模与问题求解.....	36
5.3.1 方案一	36
5.3.2 方案二	38
参考文献.....	43

1. 问题重述

1.1 背景知识

光纤通信从诞生至今，50 多年里基于数字光纤通信技术的光传送网构建起了全球通信的骨架。从城市内的传输，直到跨越大洋的传输，光传送网为人类提供了大容量、高可靠性和低能耗的信息传输管道，人类对通信容量的追求也成为光传送技术发展的源源不断的动力。

1966 年 7 月，高锟博士在 *PIEE* 杂志上发表论文《光频率的介质纤维表面波导》，从理论上分析证明了用光纤作为传输媒体以实现光通信的可能性，并预言了制造通信用的超低耗光纤的可能性。从此世界各国开始研究光纤通信如何才能运用到实际生产和生活中。

最初的研究主要集中于如何将光传输链路变为可能，在上世纪 60 年代，玻璃纤维的传输损耗大于 1000 dB/km，到 1976 年光纤材料的传输损耗就降低到了 0.5 dB/km，同时由于贝尔研究所和日本电报电话公司的使用寿命长达 100 万小时的半导体激光器的研制成功，世界上第一条光纤通信系统 1977 年在美国芝加哥投入商用，速度为 45 Mb/s。同时，通信的调制与编码技术能极大地影响信号传输的可靠性，从另一个角度上说，能有效降低硬件的需求，因此，时至今日，通信技术仍在不断飞速发展。

1992 年，光放大器实现了突破，贝尔实验室与日本合作伙伴成功试验了可以无错误传输 9000 km 的光放大器，光纤通信不再局限于短距离通信和区域网络，地区之间的光纤通信成为可能。

1999 年中国生产的 8×2.5 Gb/s WDM 系统首次在青岛至大连开通，沈阳至大连的 32×2.5 Gb/s WDM 光纤通信系统开通，中国开始架设自己的光通信网络。

随着科学的进步和社会的发展，通信的速度与容量的要求也在日益增长，2012 年我国的光纤产能达到了 1 亿 2000 万公里，同时光纤的铺设也需要大量的人力财力。因此，资源的限制产生了光传送网络合理规划的研究需求，如何架设我们国家的光传送网络才能实现人民利益和经济利益的平衡和最大化，为此我们必须对网络价值进行建模。

1.2 问题重述

问题一：光传送链路的简单建模

光传送链路可以建模为现代数字传输系统，其简化模型示意图如图 1 所示，其中光传送链路等效为光纤信道，光纤传输的光波就是传送信息的载体。现代数字传输系统可认为是对二进制序列进行编码传输的系统，二进制码元 0 或 1 经编码调制后，便可通过信道传输到接收机，接收机再通过某种已知的“规则”解调出原来的发送码元序列，获得发送的信息。这里的 0 或 1 称为一个比特（bit）。但是信道中始终存在的噪声会对发送的序列产生干扰，如果噪声过大，可能会导致最后接收机解调出的二进制序列出现错误，即产生误码。因此，在数字传输系统中，误码率（Bit Error Ratio, BER）是衡量通信系统性能的一个极为重要的指

标。

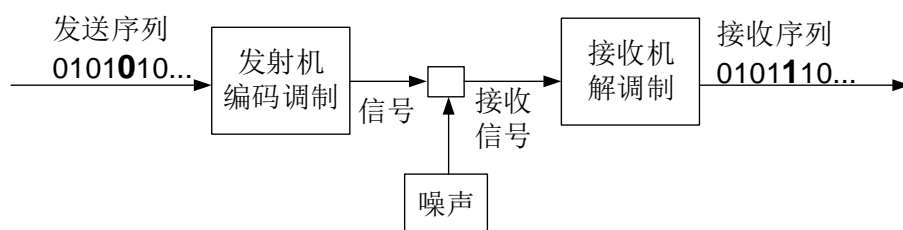


图 1 简化后的数字传输模型

子问题-1: 研究图 2 给定的三种给定调制格式 QPSK、8QAM (Quadrature Amplitude Modulation)、16QAM 的 BER 与 SNR 的关系并给出关系曲线，并求出其在 BER=0.02 时 SNR 容限点分别为多少；

子问题-2: 考虑当单跨传输距离为 80km 和 100km 两种情况，以纠正前误码率 0.02 为门限，求出图 2 给出的三种调制格式所能达到的最远的传输距离（每跨距离×跨段数量）。

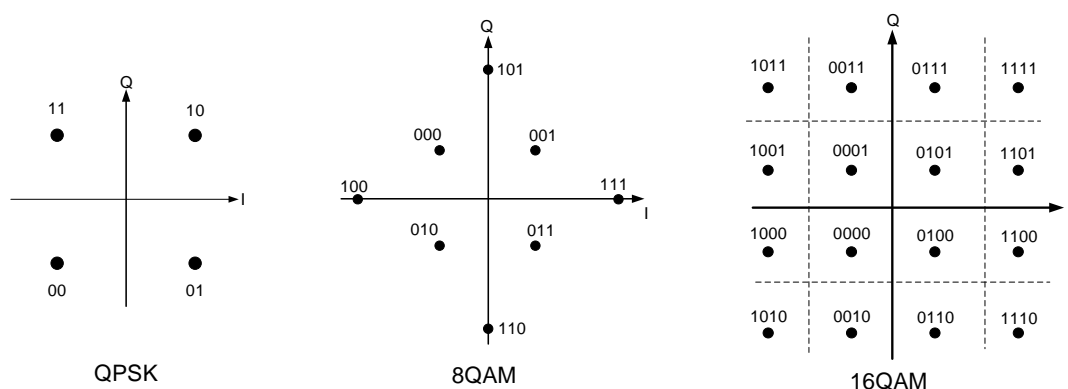


图 2 三种调制格式的编码方案

问题二：光传送网规划

表 1 给出进一步优化升级后的三种典型光传输设备参数。考虑到通信网络的目的是把更多的人更充分地连接到一起，我们按照如下方式定义网络的价值：

单波传输容量	最大传输距离	总容量
100 Gb/s	3000 km	8 Tb/s
200 Gb/s	1200 km	16 Tb/s
400 Gb/s	600 km	32 Tb/s

表 1 不同传输格式的传输距离

- 1) 每条直接连接两个城市的链路当做 1 个连接，每个连接的价值定义为传输的容量与连接区域人口数的乘积（取两区域人口数乘积的 0.5 次方）
- 2) 网络的价值则是所有连接价值的加权和

$$\text{网络价值} = \sum \text{权重} * \text{容量} * \text{人口}$$

考虑价值与需求为图 3 中的我国城市群制定光传送网规划

子问题-1: 连接数分别为 16 条和 33 条时，不考虑中间节点，分别给出网络规划及其价值，并求解网络价值最多是多少？

子问题-2: 若存在中间节点，且两个节点之间可以有多个连接的情况下，重新解决子问题-1 并给出所有中间节点传输容量的分配，假定每条链路容量可任意分配，只要总容量不超过表 1 的规定。如果由市扩大为省（区）影响如何？

子问题-3: 光传送网络价值有多个侧面，例如从运营商的角度，连接经济发达的地区会带来更多的收入，从政府的角度保障发展相对滞后地区的通信是均衡发展的要求等。你认为制定光传送网络规划的目标函数应该是什么？前面制定的规划有无变化？

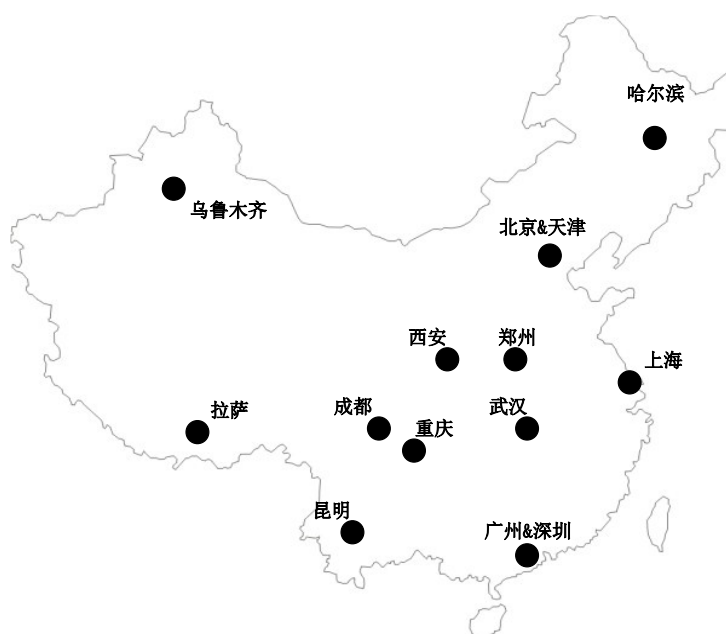


图 3 需要考虑的城市群

问题三：改善星座图

由第一问可知，纠前 BER 不变时，降低 SNR 容限点可以提高系统容忍噪声的能力，从而延长链路的总长度。请尝试任意改变 16QAM 方案中星座点的位置、数量或每个点的概率，探索产生比图 5 中 8QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限点的调制方案？调制格式的信息熵需保持为 3bit。

2. 符号说明

符号	中文名称	定义
BER	误码率	错误比特占总比特比例
SER	误符号率	错误符号占总符号比例
E_s	符号能量	
N_0	噪声的功率谱密度	
E_b / N_0	比特信噪比	
E_s / N_0	符号信噪比	
$SNR(dB)$	信噪比	$SNR(dB) = 10\log_{10}(P_s / P_n)$
n_A	放大器噪声	
n_L	光纤噪声	
w_{ij}	权值	节点 i, j 之间的权值
v_{ij}	网络容量	节点 i, j 之间的网络容量
P_i	节点人口	
G_i	节点 GDP	
B_i	节点房屋面积	
Q_i	人口系数	根据节点人口等级计算的人口系数
$Level_i$	人口等级	按照节点人口划分的等级
nv_{ij}	网络价值	
x_{ij}	分配容量	为节点 i, j 之间的连接分配的网络容量
L_{ij}	最短路	用最短路算法求出的节点 i, j 之间的路

3. 问题一：光传送链路建模

3.1 子问题一：纠前信噪比与信噪比容限点的计算

3.1.1 基本假设

考虑 M 进制 QAM 星座图，在 QAM 体制中，信号的振幅和相位作为两个独立的参量同时受到调制，该信号的一个符号可以表示为：

$$S_k(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \theta_k) \quad kT < t \leq (k+1)T \quad (1)$$

式中，T 是一个符号的时长，k 为正整数， A_k 和 θ_k 分别表示光波的振幅和相位，这里分别可以取多个离散值，式(1)可以展开为：

$$S_k(t) = A_k \cos \theta_k \cos \omega_0 t - A_k \sin \theta_k \sin \omega_0 t \quad (2)$$

令式中 $X_k = A_k \cos \theta_k$ ， $Y_k = A_k \sin \theta_k$ ，则式(2)可以写为：

$$S_k(t) = X_k \cos \omega_0 t - Y_k \sin \omega_0 t \quad (3)$$

其中， X_k 和 Y_k 也是可以取多个离散值的变量，由式(3)可以看出， $S_k(t)$ 可以写为两个正交基函数的和，如下式所示：

$$S_k(t) = X_k \varphi_1(t) - Y_k \varphi_2(t) \quad 0 < t \leq T, k = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (4)$$

选取一对正交基函数，即可将符号集 $\{S_k(t), k = 1, 2, 3, \dots, M\}$ 映射到正交平面中的点，如下图 4 所示，每个符号点正是两个正交矢量的和。由于从矢量图看像是星座，故又称为星座图。当 $M=8$ 时，每个 QAM 符号在一个符号周期内可以传输 $\log_2 8 = 3 \text{ bit}$ 的信息。当只有信号相位作为参量受到调制，信号的振幅的模值恒取为 $+A_k$ 时，此时的调制方式变为 MPSK。

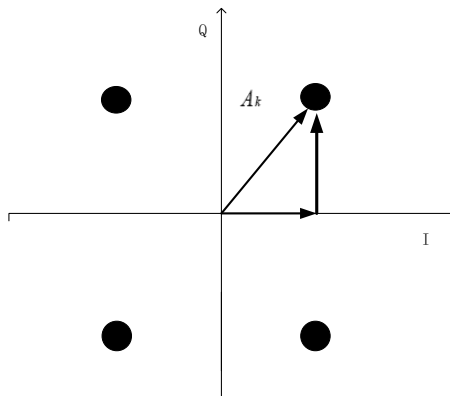


图 4 星座图

3.1.2 模型建立

当调制后的信号通过信道时，会受到噪声的干扰，本文将信道建模为加性高斯白噪声信道，每个通道的噪声建模为平稳的零均值，双边带功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性高斯白噪声过程 $n(t)$ ，高斯白噪声的概率密度函数为：

$$P(n(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{N_0}\right) \quad (5)$$

则接收信号模型为：

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \bar{s}_k + \bar{n}_k = (s_{1k}, s_{2k}) + (n_{1k}, n_{2k}) \\ &= (s_{1k} + n_{1k}) \cdot \varphi_1(t) + (s_{2k} + n_{2k}) \cdot \varphi_2(t) \\ &= r_{1k} \cdot \varphi_1(t) + r_{2k} \cdot \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中， $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 为一组正交基。

因为 $n_{ik} (i=1, 2)$ 为服从均值为零的正态分布的高斯随机向量，因此 $r_{ik} (i=1, 2)$ 也是服从正态分布的高斯随机变量。又因为 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 的内积为零，即：

$$\int_0^T n_1(t) \cdot n_2(t) dt = 0 \quad (7)$$

其中， T 为符号周期， $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 为零均值高斯白噪声过程，上式表明 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 相互正交，所以我们可以将 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 作为我们的正交基即 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 。

我们组建立的信号模型图如下图 5 所示，其中，黑色点为发送符号集中的符号，红色的点为受到噪声干扰后偏离原符号点的接收信号。假设发送符号集中的每个符号是等概出现，则我们此时可以采用极大似然准则来作为我们的判决准则，因为在我们设定的情况中，该准则等价于最小错误准则，是在高斯白噪声背景下的最佳判决准则^[1]。通过星座图，极大似然准则就是将接收该符号判决为与其欧式距离最小的发射符号集中的一个符号。在仅考虑下图中的两个发送符号点的情况下，依据极大似然准则判决区域由图中蓝色虚线标出，左边的符号判决为 S1，右边的符号判决为 S2（此时图中 $k=2$ ）。当图中的红点越过蓝线，则将产生误码。

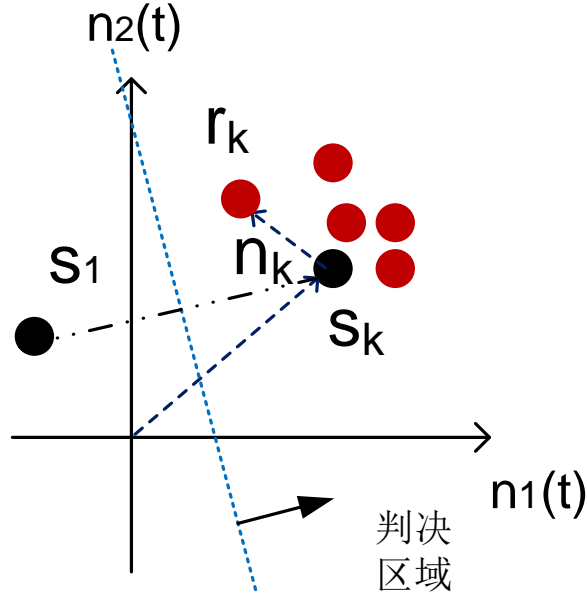


图 5 信号判决模型

QPSK、8QAM、16QAM 信号的星座映射关系分别如下图 6 所示：其中，QPSK 和 16QAM 编码采用格雷码，8QAM 信号映射关系与题目给出条件一致，且由于 8QAM 信号不是规则的方形，因此在图中标注了 8QAM 信号每个点的坐标。

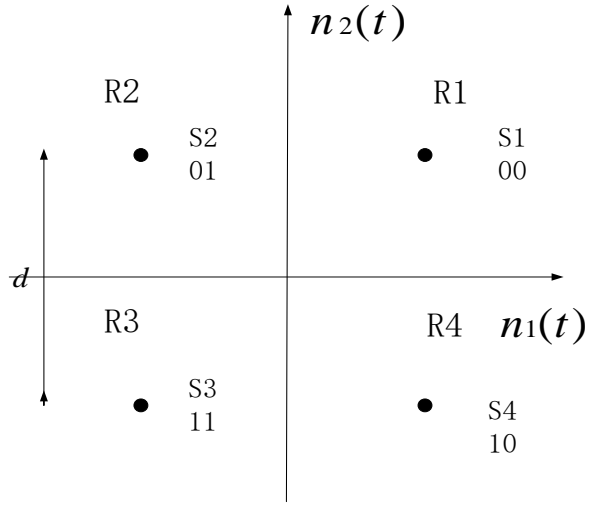
假设每个符号等概率出现，相邻点之间的距离相等，设为 d 。则下列各个星座图的误码率可以由此模型计算得到：每个符号的判决区域如图中蓝色虚线所示，它们将整个平面划分为 R_k ， $k=1,2,\dots,M$ ，如果发射信号符号点 s_k 经过噪声 n_k 干扰后得到的相应接收符号 r_k 能够落入相应的 R_k 区域，则我们根据极大似然准则就可以正确判决出 s_k ，不会产生误码。根据这种判定思想，我们可以推导出误码率计算公式。正确判决每个点的概率为：

$$P_c = \sum_{k=1}^M P(R_k | s_k) P(s_k) \quad (8)$$

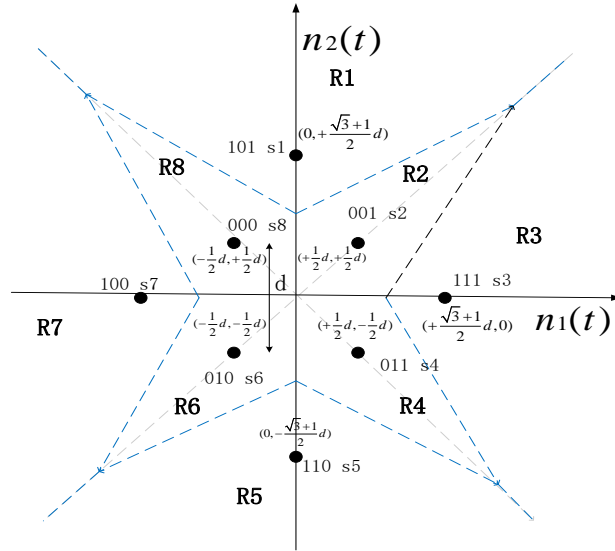
则误符号率计算公式：

$$P_e = 1 - P_c \quad (9)$$

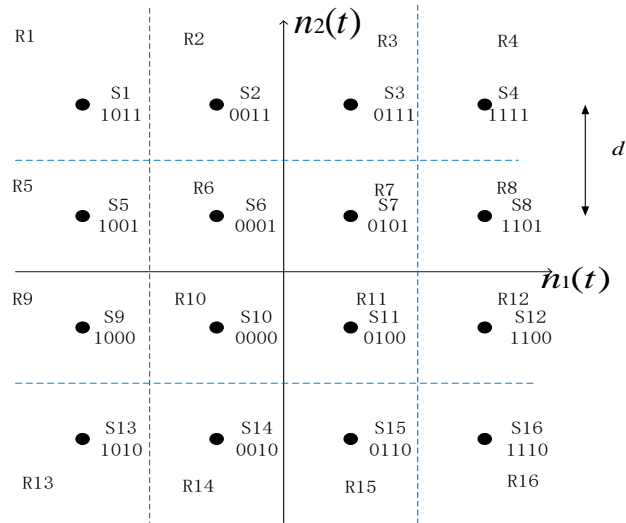
其中， M 在 QPSK、8QAM、16QAM 中分别取 $M=4$ 、 $M=8$ 、 $M=16$ 。



(a) QPSK



(b) 8QAM



(c) 16QAM

图 6 信号星座映射关系及判决区域图

3.1.3 问题求解

QPSK、8QAM 以及 16QAM 的信号模型以及判决区域已在上一节给出，本节根据上节提出的模型进行求解各信号的误码率。QPSK 信号正确解码出原码元序列的概率由下列公式给出：

$$\begin{aligned}
 P_c &= \sum_{k=1}^M P(R_k | s_k) P(s_k) \\
 &= \frac{1}{4} P(R_1 | s_1) + \frac{1}{4} P(R_2 | s_2) + \frac{1}{4} P(R_3 | s_3) + \frac{1}{4} P(R_4 | s_4) \\
 &= P(R_1 | s_1) \\
 &= p\{(n_1 + \frac{d}{2}) > 0, (n_2 + \frac{d}{2}) > 0\} \\
 &= p\{n_1 > -\frac{d}{2}, n_2 > -\frac{d}{2}\} \\
 &= p\{n_1 > -\frac{d}{2}\} p\{n_2 > -\frac{d}{2}\} \\
 &= [1 - p\{n_1 > \frac{d}{2}\}] \cdot [1 - p\{n_2 > \frac{d}{2}\}]
 \end{aligned} \tag{10}$$

因为 n_1 、 n_2 都是服从均值为零、方差为 σ^2 的正态分布的随机变量，因此有：

$$\begin{aligned}
 p\{n_1 > \frac{d}{2}\} &= \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp(-\frac{n_1^2}{2\sigma^2}) dn_1 \\
 &= \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{N_0}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n_1^2}{2 \cdot \frac{N_0}{2}}) dn_1 \\
 &= \int_{\frac{d}{\sqrt{2N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{n_1^2}{2}) dn_1 \\
 &= Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})
 \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-t^2 / 2) dt \quad t \geq 0 \tag{12}$$

错误概率为：

$$P_e = 1 - P_c = 1 - [1 - Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})]^2 \tag{13}$$

每个通道的 $n(t)$ 为零均值，双边带功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声过程，所

以有 $\sigma^2 = N_0 / 2$ 。

根据题设信噪比的定义，可以得到信噪比转换公式：

$$SNR = P_n / P_s = d^2 / N_0 \quad (14)$$

所以，QPSK 的误符号率 SER 为：

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c = 1 - [1 - Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})]^2 \\ &= 1 - [1 - \text{erfc}(\sqrt{SNR/2})]^2 \end{aligned} \quad (15)$$

在格雷码的编码方式下，QPSK 的误码率 BER 为：

$$P_b = P_e / \log 2M = (1 - [1 - \text{erfc}(\sqrt{SNR/2})]^2) / 2 \quad (16)$$

同理，可以推出 8QAM 和 16QAM 的 BER 和 SNR 的关系式，由此可以得到他们的关系曲线。

8QAM 信号的误码率 BER 计算公式为：

$$P_b = \sum_{k=1}^8 P(e_B | s_k) P(s_k) \quad (17)$$

根据图 6(b)图，可以得到下列计算关系：

$$\begin{aligned} P(e_B | s_1) &= P(e_B | s_3) = P(e_B | s_5) = P(e_B | s_7) \\ P(e_B | s_2) &= P(e_B | s_8) = P(e_B | s_6) = P(e_B | s_4) \end{aligned} \quad (18)$$

其中，

$$\begin{aligned} P(e_B | s_1) &= \frac{1}{3} [2P(R_8 | s_1) + P(R_2 | s_1) + P(R_7 | s_1) + \\ &\quad 3P(R_6 | s_1) + 2P(R_4 | s_1) + 2P(R_5 | s_1) + P(R_3 | s_1)] \\ P(e_B | s_2) &= \frac{1}{3} [P(R_8 | s_2) + P(R_1 | s_2) + 2P(R_7 | s_2) + \\ &\quad 2P(R_6 | s_2) + 2P(R_4 | s_2) + 3P(R_5 | s_2) + 2P(R_3 | s_2)] \end{aligned} \quad (19)$$

则最终 8QAM 信号的误码率 BER 计算公式为：

$$P_b = \frac{1}{2} [P(e_B | s_1) + P(e_B | s_2)] \quad (20)$$

但是由于 8QAM 的判决区域不规则，因此很难通过计算得到最后准确的结果，但是根据其判决区域和极大似然的判决准则可以仿真得到 8QAM 的误码率 BER 和信噪比 SNR 的关系曲线图。通过非线性最小二乘拟合方式可以得到任意给定误码率 BER 情况下的 SNR 容限点。

16QAM 的误码率 BER 计算方式与 QPSK 完全类似，则其误符号率公式可以计算得到，如下所示：

$$P_e = 1 - P_c \quad (21)$$

其中，正确判决概率 P_c 的计算公式为：

$$P_c = \frac{1}{16} \{ 4 \cdot [1 - Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})]^2 + 4 \cdot [1 - 2Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})]^2 + 8[1 - 2Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})] \cdot [1 - Q(\frac{d}{\sqrt{2N_0}})] \} \quad (22)$$

用到一些近似关系，最终的 BER 计算公式结果如下所示：

$$P_b = P_e / \log_2 M = \frac{3}{8} \cdot \text{erfc}(\sqrt{\frac{2}{15}} \text{SNR}) \quad (23)$$

3.1.4 计算结果与分析

QPSK、8QAM 和 16QAM 的 SNR-BER 曲线图如图 7 所示：

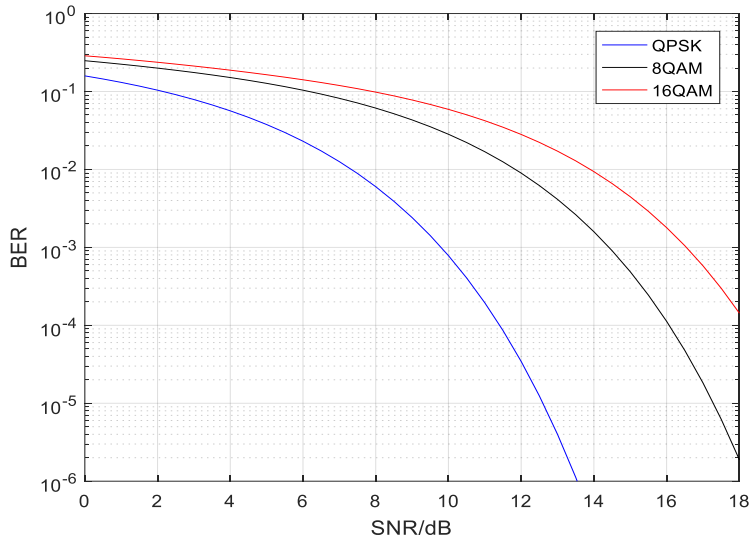


图 7 SNR-BER 曲线图

由此曲线图可以得到结论：在信噪比相等的情况下，调制的阶数越高，即 M 越大，则误码率越高，表示此通信系统的抗噪声性能越差，这我们的理论分析以及实际情况都是相符合的；但是 M 越大，则表示每个符号的承载信息量越大，因此，两者各有利弊，在实际中可以根据情况选择。

当 $\text{BER}=0.02$ 时，由图 8 可分别得到 QPSK、8QAM、16QAM 的 SNR 容限点。QPSK 为 6.32dB，8QAM 为 10.65dB，16QAM 为 12.72dB。

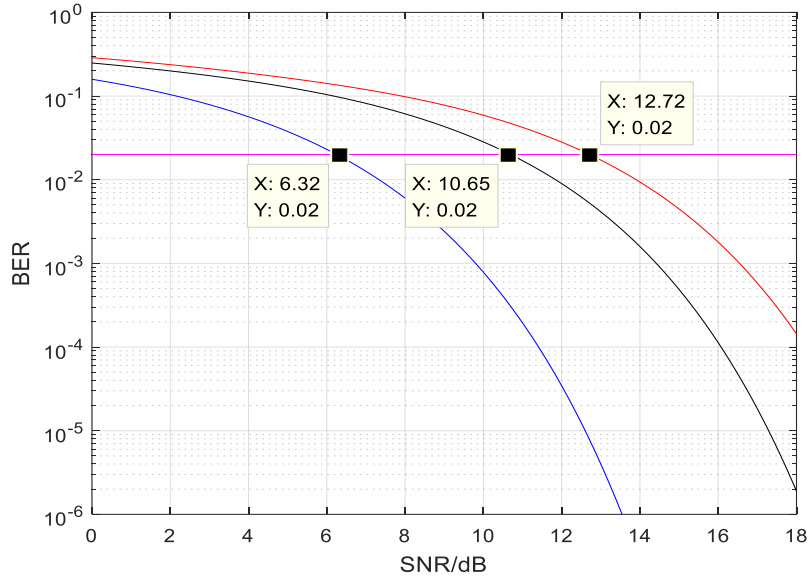


图 8 BER=0.02 时的信噪比容限点

3.2 子问题二：光链路性能计算

3.2.1 基本假设

普遍的信号传输模型大致分为：发射端、信道与接收端；光传输链路与常见的网络电缆类似，由多个相同跨段的级联构成，如图 4 所示，几十公里的光纤和一个放大器构成了一个跨段；其中的每个过程都不可避免地会受到噪声的影响，我们要将其中的信号传输问题抽象成数学模型，求解当单跨传输距离为 80km 和 100km 两种情况，以纠正前误码率 0.02 为门限，使用问题一给出的传输格式所能达到的最远的传输距离（每跨距离×跨段数量）是多少。

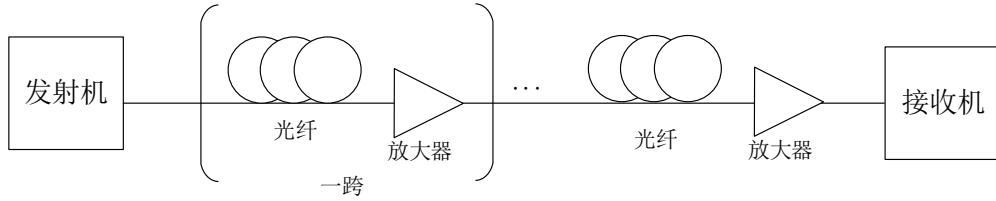


图 9 基本的光传输链路模型

光信号在光纤中的传输损耗为 0.2 dB/km （每传输 15 km ，光功率衰减一半）。因此经过一段光纤传输后，需要使用放大器对光功率进行补偿，在放大器对信号与噪声同步放大的过程中，还会引入自发的辐射噪声，其噪声功率 P_{n_A} 为：

$$P_{n_A} = 2\pi h f B (NF + 1 / \text{Gain}) \quad (24)$$

其中 h 是普朗克常数 ($6.62606896 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$)， f 是光波频率（设定为 $1.931 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ）， B 为带宽（设为 $5 \times 10^{10} \text{ Hz}$ ）， NF 为噪声指数（设为 4）， Gain 为补偿光纤功率衰减所对应的增益。

另一方面，光纤作为传输介质，其本身也会等效地引入噪声。其等效噪声功

率与入纤功率近似呈平方关系，光纤功率为 1 mW 时的非线性噪声 P_{n_L} 约等于单个放大器噪声的 $2/3$ ：

$$P_{n_L} = \frac{2}{3} P^2 P_{n_A} \quad (25)$$

其中 P 表示入纤功率，非线性噪声在每跨开头叠加，放大器噪声在每跨末尾叠加；每跨中间信噪比保持不变。每跨叠加的噪声间相互独立。

3.2.1 模型建立

假定发射机所发射的信号 $x(t)$ 不含有噪声，功率为 P_{x_1} ，则在一跨结束时，信号 $y_1(t)$ 可以表示为：

$$y_1(t) = \sqrt{D(l)} \left[\sqrt{P_{x_1}} x(t) + \sqrt{P_{n_L}} n_{L_1}(t) \right] + \sqrt{P_{n_A}} n_{A_1}(t) \quad (26)$$

其中 $D(l)$ 表示通过 l 距离光纤的信号功率衰减， n_{L_1} 表示一跨中开始时光纤所产生的非线性噪声， n_{A_1} 表示一跨时结束时放大器产生的噪声，其中 $x(t)$ 、 $n_{L_1}(t)$ 和 $n_{A_1}(t)$ 均为平均功率为 1 的信号，即 P_{x_1} 、 P_{n_L} 和 P_{n_A} 分别代表信号、光纤噪声和放大器噪声的实际功率；其中，信号 $x(t)$ 、 $n_{L_1}(t)$ 和 $n_{A_1}(t)$ 互不相关；各个跨段的噪声互不相关；通过概率论知识得到，线性无关的高斯变量相加仍为高斯变量，因此叠加后的噪声仍然可以视为一个新的白高斯噪声：

$$n_{A_1} \sim (0, P_{n_A}), \quad n_{L_1} \sim (0, P_{n_L}) \rightarrow n_{A_1} + n_{L_1} \sim (0, P_{n_A} + DP_{n_L}) \quad (27)$$

得到的信号的功率 P_{y_1} 和信噪比为：

$$P_{y_1} = D(l) (P_{x_1} + P_{n_L}) + P_{n_A} \quad (28)$$

$$SNR = \frac{D(l) P_{x_1}}{D(l) P_{n_L} + P_{n_A}} = \frac{D(l) P_{x_1}}{P_{y_1} - D(l) P_{x_1}}$$

本问题中，由于每跨光纤长度一定，光信号在光纤中传输的衰减值确定，每跨放大器的增益相等并应与信号的衰减一致：

$$Gain = \frac{P_{x_1}}{P_{y_1}} \quad (29)$$

我们接着讨论二跨中，信号功率与信噪比的变化，由于放大器的功率已经确定，二跨中信号的入纤功率 P_{x_2} 仍为 P_{x_1} ：

$$P_{y_2} = D(l) (P_{x_2} + P_{n_L}) + P_{n_A} = D(l) (P_{x_1} + P_{n_L}) + P_{n_A} \quad (30)$$

由于放大器增益、光纤长度均没有变化，二跨中的 P_{n_L} 、 P_{n_A} 与一跨中的数值一致，推导得到二跨中的信噪比为：

$$SNR_2 = \frac{D^2(l) \cdot Gain \cdot P_{x_1}}{P_{y_1} - D^2(l) \cdot Gain \cdot P_{x_1}} \quad (31)$$

通过数学归纳可以得到：

$$SNR_i = \frac{D^i(l) P_{x_1}^i}{P_{y_1}^i - D^i(l) P_{x_1}^i} \quad (32)$$

我们最终可以得到这样的结论，每跨最终的信噪比仅取决于发射机发射的信号功率 P_{x_1} ，即我们要确定最佳的入纤功率 P_x 使得每跨后的信噪比最优，问题最后转化成求得最佳的入纤功率 P_x 使得光链路的总传输距离最长。

当入纤功率 P_x 较小时，由于光纤噪声 P_{n_L} 与入纤功率 P_x 的平方成正比，此时光纤噪声 P_{n_L} 影响较小，但由于放大器噪声 P_{n_A} 大小与入纤功率相关性较小，在入纤功率小时，放大器噪声将对信噪比影响较大；当入纤功率较大时，虽然放大器噪声 P_{n_A} 大小影响变小，但光纤噪声急剧 P_{n_L} 增大，信噪比急剧恶化。因此传输距离总长关于 P_x 的函数是一个凸函数，该问题可以转化为一个最优化问题。

3.2.3 问题求解

当单跨距离为 $L \text{ km}$ 时，根据光信号在光纤中的传输损耗为 0.2 dB/km ，求得每段功率衰减为 $0.2L \text{ dB}$ ，即减小为原来的 $10^{0.02L}$ ；当单跨距离为 $l = 100 \text{ km}$ 时，减小为原来的 $D(100) = \frac{1}{100}$ （问题求解过程中均使用单跨距离为 100 km ）。

根据放大器噪声公式(24)及给定条件，我们可以解得放大器的噪声功率近似为 $P_{n_A} \approx 1.608 \times 10^{-4} \text{ mW}$ ，一跨的最终功率和信噪比重写为：

$$\begin{aligned} P_{y_1} &= 0.01P_{x_1} + 1.072 \times 10^{-6} \times P_{x_1}^2 + 1.608 \times 10^{-4} \\ SNR_1 &= \frac{0.01P_{x_1}}{1.072 \times 10^{-6} \times P_{x_1}^2 + 1.608 \times 10^{-4}} \end{aligned} \quad (33)$$

对信噪比进行求导并求极值点：

$$SNR' = \frac{0.01}{1.072 \times 10^{-3} \times P_{x_1}^2 + 1.608 \times 10^{-7}} - \frac{0.01P_{x_1} \times 2.144 \times 10^{-3} \times P_{x_1}}{(1.072 \times 10^{-3} \times P_{x_1}^2 + 1.608 \times 10^{-7})^2} = 0 \quad (34)$$

解得 $P_{x_1} = \sqrt{1.5} \times 10 \text{ mW}$

将答案代回原式(33)，得到一跨跨后功率和信噪比：

$$SNR_1 \approx 381 = 25.8 \text{ dB}, \quad P_{y1} = \sqrt{1.5} \times 10^{-1} + 3.216 \times 10^{-3} \text{ mW} \quad (35)$$

我们利用 matlab 画出入纤功率对一跨后信噪比的影响曲线验证我们的答案：

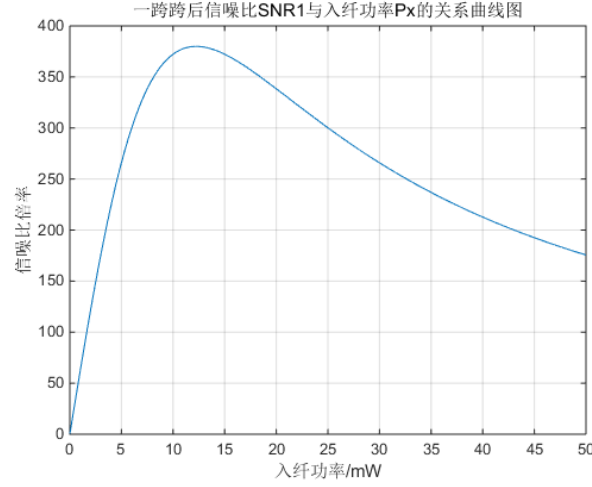


图 10 100 km 情况下一跨跨后信噪比与入纤功率的关系曲线图

该图中的最大值点为(12.25, 379.9121)，与我们理论近似解($\sqrt{1.5} \times 10^{-1}$, 381)基本一致， $P_{x1} = \sqrt{1.5} \times 10 \text{ mW}$ 是单跨距离为 100 km 时的最佳入纤功率。

同理可以求得多跨信噪比：

$$SNR_i = \frac{1}{\left(1 + 2.6253 \times 10^{-3}\right)^i - 1} \quad (36)$$

我们利用 matlab 求出每跨后的信噪比曲线图：

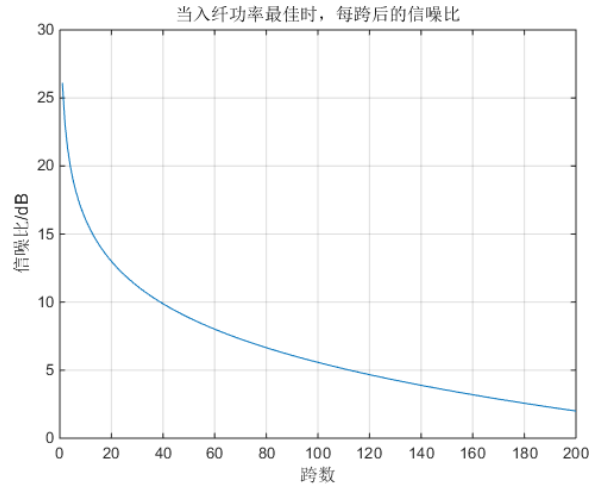


图 11 100 km 情况下多跨后信噪比与跨数的关系曲线图

3.2.4 计算结果与分析

根据子问题一所求得的当前误码率为 0.02 时，QPSK、8QAM 和 16QAM

的噪声容限点分别为 $SNR_{4Q} = 6.32 \text{ dB}$, $SNR_{8Q} = 10.65 \text{ dB}$, $SNR_{16Q} = 12.72 \text{ dB}$ ；我们可以得出每种传输格式所需信噪比至多经过多少跨段： $N_{4Q} = 85$, $N_{8Q} = 33$, $N_{16Q} = 21$ ；因此得出最远传输距离为： $L_{4Q} = 8500 \text{ km}$, $L_{8Q} = 3300 \text{ km}$, $L_{16Q} = 2100 \text{ km}$ 。

同理，我们求每跨距离为 80 km 时问题的最佳解：

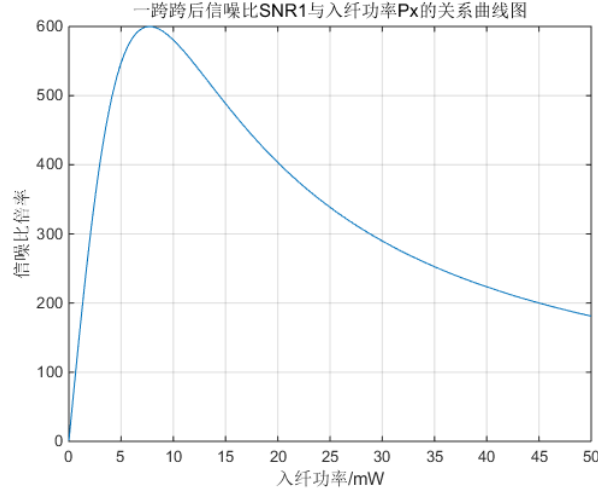


图 12 80 km 情况下一跨跨后信噪比与入纤功率的关系曲线图

$$P_{x1} = 7.73 \text{ mW}, P_{y1} = 0.1945 \text{ mW}, SNR_1 \approx 600 = 27.8 \text{ dB}$$

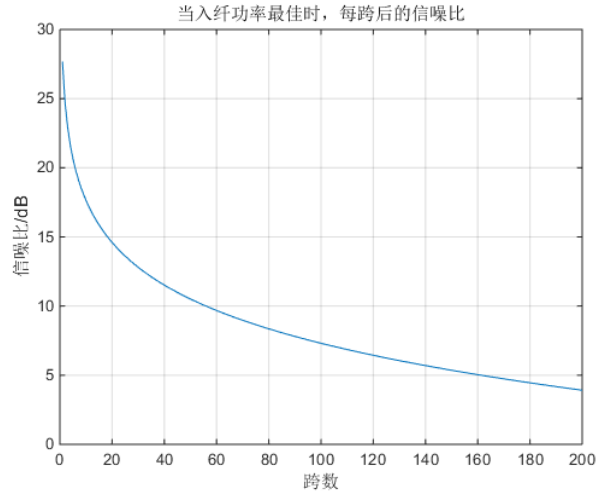


图 13 100 km 情况下多跨后信噪比与跨数的关系曲线图

$$N_{4Q} = 86, N_{8Q} = 52, N_{16Q} = 44; L_{4Q} = 6860 \text{ km}, L_{8Q} = 4160 \text{ km}, L_{16Q} = 3520 \text{ km};$$

当传输 QPSK 格式信号时，应选用每跨 100 km 光链路，最大传输距离为 8500 km；
当传输 8QAM 格式信号时，应选用每跨 80 km 光链路，最大传输距离为 4160 km；
当传输 16QAM 格式信号时，应选用每跨 80 km 光链路，最大传输距离为 3520 km；

4. 问题二 光传送网规划

4.1 基本假设

1. 本文以 2017 年国家统计局给出的各城市人口作为题目中计算网络价值参数。
2. 假设光传送网沿公路铺设，两城市间的最大传输距离为两城市的公路距离；
3. 对于子问题 2-1，考虑到每个城市必须有网络连通，各城市必须接入光传送网络，各节点至少和其他节点有一条连接，且两节点之间不可以有多条连接；
4. 对于子问题 2-2，各节点之间不可无限建立连接。否则将只在网络价值大的节点之间建立连接，从而忽略了其他节点；

4.2 模型建立

从问题描述中可知，题目要求在已选定的 12 个城市中题目要求从已给定的点连接关系和边权赋值 $G=(E,V,W)$ 中，分别选出 16 和 33 条边，使得总网络价

值 $NV = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_{ij} \cdot v_{ij} \cdot \sqrt{P_i P_j}$ 最大。式中 w_{ij} 表示节点 i, j 之间的权值， v_{ij} 表示节

点 i, j 之间的网络容量， P_i 表示节点 i 的人口数。

按照题目信息，各城市之间的传输容量受城市之间距离的限制，传输设备参数如下：

单次传输容量	最大传输距离	总容量
100 Gb/s	3000 km	8 Tb/s
200 Gb/s	1200 km	16 Tb/s
400 Gb/s	600 km	32 Tb/s

表 2 不同传输格式的传输距离

城市	乌鲁木齐	哈尔滨	京津	西安	郑州	拉萨	成都	重庆	武汉	上海	昆明
哈尔滨	4000										
京津	2790	1270									
西安	2540	2400	1080								
郑州	3010	1960	690	480							
拉萨	2680	4850	3590	2750	3220						
成都	2870	3060	1800	720	1190	2050					
重庆	3000	3030	1770	710	1150	2300	300				
武汉	3280	2400	1170	740	510	3480	1130	880			
上海	3920	2350	1220	1390	940	4120	1960	1700	820		
昆明	3690	3830	2600	1530	1920	2220	850	850	1560	2320	
广深	4180	3360	2120	1630	1450	3540	1580	1300	1000	1450	1350

表 3 各城市间距离距离

由于受到以上传输距离的限制,可得出各个城市之间的可能的网络连接关系如下图:

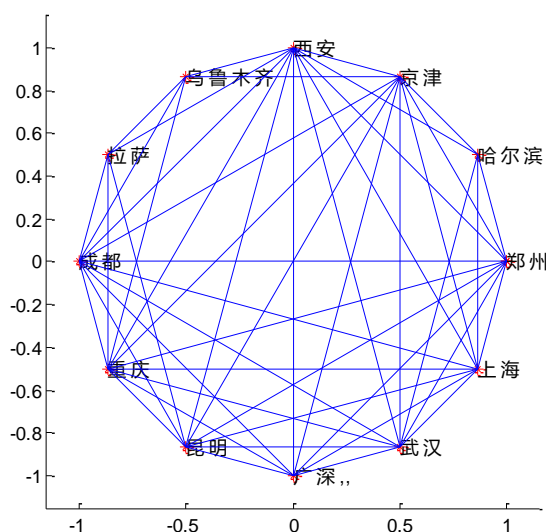


图 14 各节点之间可能的网络连接

4.3 子问题一

所以本题转化为在已知连通图中,从已有的 50 条边选出 16 或 33 条边,使得该网络规划的价值最大。根据子问题-1 的要求,本文假设最后得出的网络规划图是连通图,即每个点都可以经过一条路到达网络的任意一点。

通过分析,此题可以分为两步来解答:

第一步:计算图的边赋值。首先根据给定的网络连接关系,设定一个合理权值,计算两个城市间的网络价值。

第二步:建立一个最少边数的连通网络。首先应保证每个城市都在网络规划中。显然,在人口多,传输容量高的城市之间建立连接可以得到更大的网络价值,然而此方法可能会排除一些人口数量低,传输容量低的城市。建立的光纤通信是为了搭建全国通信的骨架,此做法显然不符合搭建光纤网络的通信的基本目的。因此,应首先建立网络使得所有城市被覆盖,并且此网络的网络价值足够高。

第三步:在有价值的城市间建立更多连接。由于第二步在 12 个城市之间搭建一条最小连通网络只需要 11 条边,题目中给了 16 和 33 条边,所以应在最小连通网络上在搭建更多连接,以满足题目给定边数要求,并且使得网络价值尽量大。由于此子问题不考虑中间节点,并且限定两个节点之间不能有多条连接,则使用“贪心”的思想,每次从剩余未选择的边中找一条网络价值最大的边加入现有网络规划。

依照上述分析,将问题化为三步求解:

(1) 计算图的边赋值。

题目中已给出每个连接的网络价值的计算方法:

$$nv_{ij} = w_{ij} \cdot v_{ij} \cdot \sqrt{P_i P_j} \quad (37)$$

其中， w_{ij} 题目未给出，下面提出 w_{ij} 的设定方法：

两个城市之间建立的连接是否有价值，可以以城市的年度人均 GDP 总量为评价标准。众所周知，电视信号是通过光纤传输，所以两城市之间是否应建立连接，城市的住宅面积也可以作为考量标准。各城市 2017 年度各指标总量如下表：

城市	2017 年 GDP 总量/亿	人口/百万	人均 GDP/万	房地产/万 平方米
京津	46595	37.35	12.47523	7871
广深	43941	27.03	16.25638	4969
上海	28178	24.2	11.6438	4724
重庆	19500	30.48	6.397638	11362
成都	13889.4	16.04	8.659227	7207
武汉	13410.3	10.91	12.29175	6186
郑州	9130.2	9.57	9.540439	5430
西安	7469.9	9.62	7.764969	3902
哈尔滨	6355	10.93	5.814273	1965
昆明	4857.6	6.73	7.217831	2648
乌鲁木齐	2743.8	2.22	12.35946	1101
拉萨	478	0.9	5.311111	200

表 4 各城市人口、GDP 和房地产参数表

为避免两个城市之间的人均 GDP 相差过大，使得该城市之间的连接网络价值过小，可按照以下方式设置权值计算：

$$w_{ij} = 0.9w_{ij}^{GDP} + 0.1w_{ij}^{Building} \quad (38)$$

$$w_{ij}^{GDP} = 100^{\frac{G_i + G_j}{2 \sum_{k=1}^N G_k}}, w_{ij}^{Building} = 100^{\frac{B_i + B_j}{2 \sum_{k=1}^N B_k}}$$

考察权值的计算方式，每个城市不论人口差异有多大，对总体的函数求和贡献度是均等的，都为 1。这种均等性质忽略了各个城市的经济体大小差异，把完全不同的经济总量和完全不同的人口总量同等看待是不合理的^[3]。

例如，考察拉萨 2017 年 GDP 总量为 478 亿元，在统计省会城市中排名第 36 位，而其人口统计只有 90 万人，排名在第 36 位。经人均 GDP 换算，其人均 GDP 在省会城市中位居 20 位。而哈尔滨作为老工业城市，经济发展水平相对较高，其 GDP 总量远远大于拉萨，然而由于人口同样过高，其排名接近拉萨。单纯地计算人均 GDP，将每个城市处于同样重要的位置存在明显的误导性偏差，城市之间的差异不能等同看待。

克服这种误导性偏差，考虑经济总量中“人”的因素，基于 Francisco (2003) 的人口加权思想，结合中国各个城市人口分布极度不均的显示，对中国各城市的人均 GDP 进行人口因素加权的计算。给每个观察点赋予一个等级，按照等级赋予权值，重新计算人均 GDP。

$$G_i = \frac{GDP}{Q_i * P_i}, Q_i = \left(\frac{e}{2}\right)^{Level_i}$$

人口	500 万	1000 万	1500 万	2000 万	2500 万	3000 万	3500 万	4000 万
等级	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1
权值	10	7.498942	5.623413	4.216965	3.162278	2.371374	1.778279	1.333521

表 5 人口等级与权值关系

经过以上赋权后，各城市人均 GDP 如下表：

	GDP/亿	人口/百万	人均 GDP/万	权值	赋权人均 GDP/万
京津	46595	37.35	12.47523	1.33352	9.355106
广深	43941	27.03	16.25638	2.37137	6.855259
上海	28178	24.2	11.6438	2.37137	4.91015
重庆	19500	30.48	6.397638	2.37137	2.697861
成都	13889.4	16.04	8.659227	4.21696	2.053426
武汉	13410.3	10.91	12.29175	5.62341	2.185817
郑州	9130.2	9.57	9.540439	7.49894	1.272238
西安	7469.9	9.62	7.764969	7.49894	1.035475
哈尔滨	6355	10.93	5.814273	5.62341	1.03394
昆明	4857.6	6.73	7.217831	7.49894	0.962513
乌鲁木齐	2743.8	2.22	12.35946	10	1.235946
拉萨	478	0.9	5.311111	10	0.531111

表 6 各城市计算得到的赋权人均 GDP

(2)建立一个最小的连通网络

利用给定的光传送网，以城市作为节点 V ，两城市如连通则作边 E ，建立图模型 G ，及其邻接矩阵 A 。图 G 的一个生成子图 T 如果是一棵树，称他为 G 的一颗生成树。对于一个连通赋权图 $G=(V,E,W)$ ， T 是 G 的一个生成树， T 每条边的所赋权值之和称为 T 的权，记为 $W(T)$ 。 G 中有最大权的生成树称为 G 的最大生成树。

求最大生成树的方法有很多，本文使用“破圈法”^[3]。

Step1: 如果 $G=(V,E,W)$ 中有圈，则选定任意一圈。

Step2: 删除此圈中一条权值最小的边 e ， $G=G-e$ 。

Step3: 返回 Step1,。当 Step1 无法执行时，剩下的图为最大生成树。

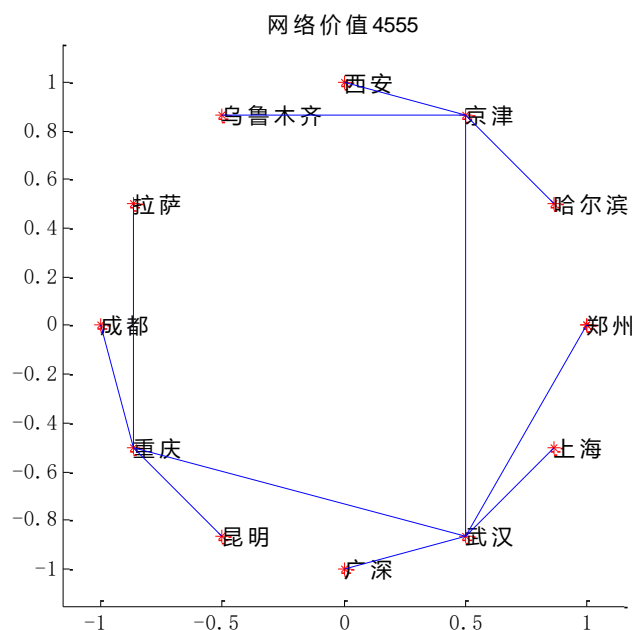


图 15 “破圈法”得出的最大生成树

由得出的最大生成树可见北京、武汉、重庆作为光纤网络的辐射中心，符合目前经济发展以及地理位置，可见利用最大生成树首先构建连通网络的思路正确。

(3) 在有价值的城市间建立更多连接

由于题目中要求应分别建立 16、33 条连接，上文找出的最大生成树只有 11 条连接，所以应该在剩余城市之间再建立 5、22 条连接，使得网络价值最大。本子问题不考虑中间节点，故直接使用连接两端城市人口及连接容量计算网络价值。

$$NV = NV_{11} + \sum_{i=1}^K NV_i, \text{ 其中 } NV_{11} \text{ 为已选择的 11 条边的网络价值, } \sum_{i=1}^K NV_i \text{ 为待}$$

选择的边的网络价值，要使得 NV 最大，则应 $\sum_{i=1}^K NV_i$ 最大。故利用“贪心算法”，

对未选择的边的网络价值进行排序，选择最大的 K 条边加入已有网络，如图 x.

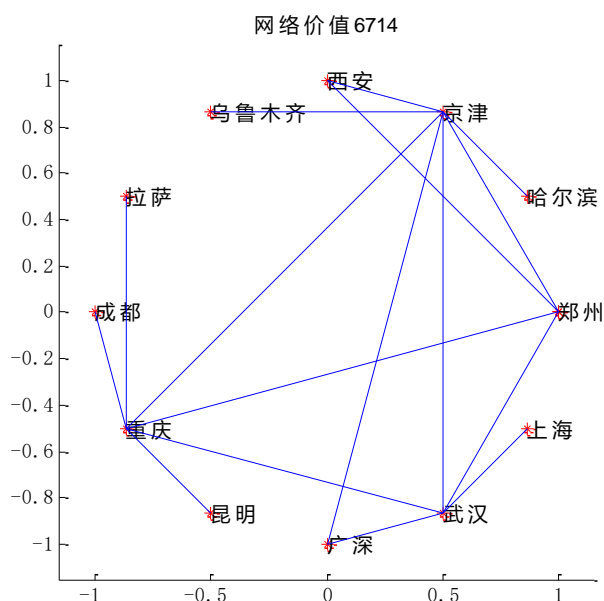


图 16 16 条连接的光传送网规划

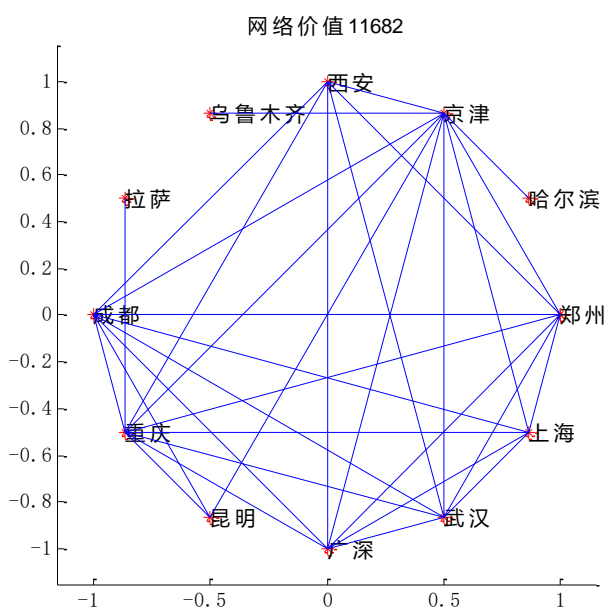


图 17 33 条连接的光传送网规划

4.2 子问题二

此问题要考虑中间节点，两个不相邻的节点传输数据需占用两接点间最短路径上的容量。

如果直接从可能的 50 条边中找 16、33 条边，再进行容量分配，那么就有

$$C_{50}^{16} = 4.92 \times 10^{12}、C_{50}^{33} = 9.85 \times 10^{12} \text{ 种可能结果，数据量过大，不适合计算。}$$

所以仍然沿用上文第一、二步的方法，先找到使得网络连通的生成树，再按

照某种规则补全边数，最后对网络内流量进行分配。

(1) 生成网络规划

第一步：与第一问类似，第一步首先使用“破圈法”找到网络中的最大生成树。

第二步：此子问题中两个城市可以有多个连接，所以加边规则改变如下：

Step1 设置两城市间重边的最大值 Max 。

Step2 如还可以加边，则在所有边中找到所有度大于 3 的节点

$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ，如果在最大生成树 T 中 v_i, v_j 之间有边，则加一条边重 E 。

重复 Step2 直到遍历所有节点 $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 。

Step3 如果还需要加边，则找到最大边，并且重边数目不超过 Max 。

完成的规划图如下，其中红色为一重边，蓝色为两重边，黑色为三重边。

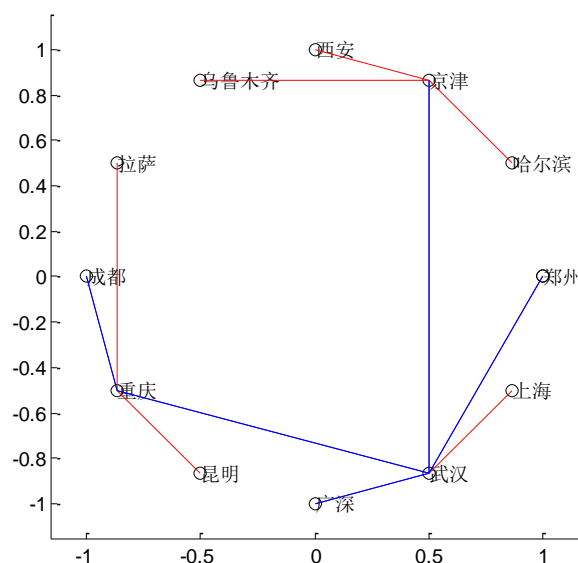


图 18 最大重边为 2 的 16 个连接的网络规划

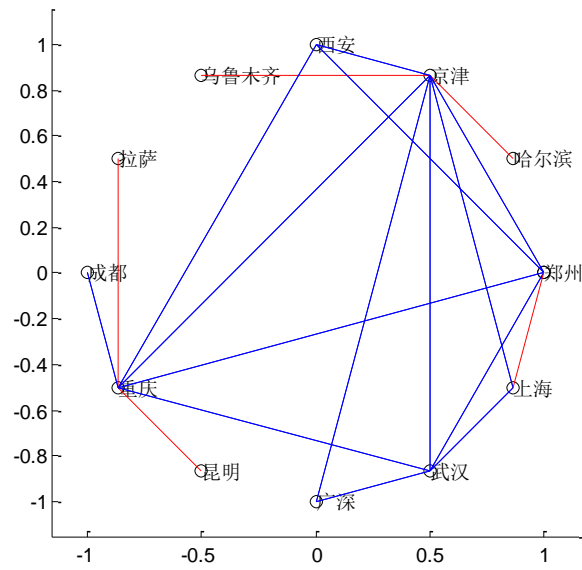


图 19 最大重边为 2 的 33 个连接的网络规划

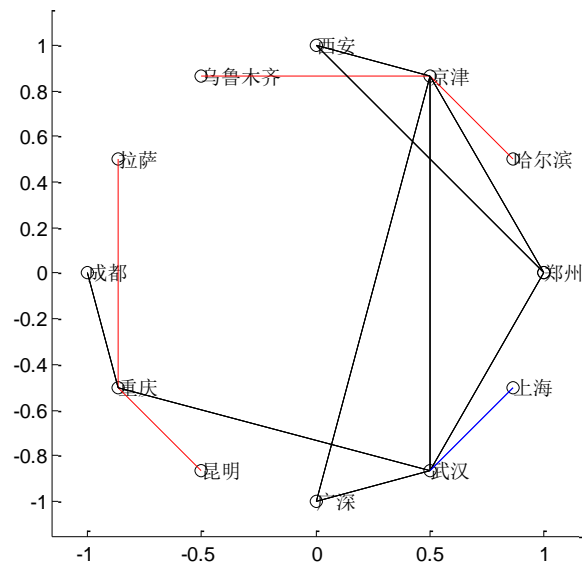


图 20 最大重边为 3 的 33 个连接的网络规划

(2) 分配网络传输容量

以图 x 为例。北京和上海、上海和南京之间的容量分别为 8Tb 和 24Tb，由于需要传输北京至南京的数据，所以要从北京-上海-南京之间的网络分配给北京-南京，相当于在北京-南京之间架设一条新连接。

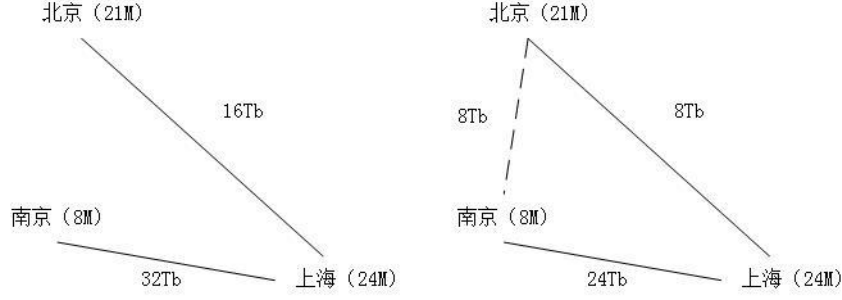


图 21 中继节点的表示方法

对于两个邻接的节点， $NV_{adjacency} = w_{ij} \cdot (v_{ij} - \sum_i^M x_{ij}) \cdot \sqrt{P_i P_j}$

对于原本不相邻的节点， $NV_{unadjacency} = w_{mn} \cdot \sum_m^M x_{mn} \cdot \sqrt{P_m P_n}$

建立数学模型，找到最优分配 x_i ，使得目标方程最大化。

$$\begin{cases} \max \left\{ NV = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_{ij} \cdot (v_{ij} - \sum_i^M x_{ij}) \cdot \sqrt{P_i P_j} + \sum_m^K \sum_n^K w_{mn} \cdot \sum_m^M x_{mn} \cdot \sqrt{P_m P_n} \right\} \\ s.t. \quad v_{ij} - \sum_i^M x_i \geq 0 \end{cases} \quad (39)$$

合并其中的未知量，式(39)变为：

$$NV = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_{ij} \cdot v_{ij} \cdot \sqrt{P_i P_j} + \sum_m^K \sum_n^K w_{mn} \cdot x_{mn} \cdot (\underbrace{\sqrt{P_m P_n} - \sqrt{P_m P_\gamma} - \dots - \sqrt{P_\varepsilon P_n}}_{m \text{ 到 } n \text{ 的最短路}}) \quad (40)$$

求和式中第一项为固定值，所以式(40)的价值由第二项决定。

如果 $\underbrace{\sqrt{P_m P_n} - \sqrt{P_m P_\gamma} - \dots - \sqrt{P_\varepsilon P_n}}_{m \text{ 到 } n \text{ 的最短路}} \geq 0$ 则应为 x_{mn} 分配一个较大值，但分配容量不

得超过最短路上的所有的连接的最小容量；

如 $\underbrace{\sqrt{P_m P_n} - \sqrt{P_m P_\gamma} - \dots - \sqrt{P_\varepsilon P_n}}_{m \text{ 到 } n \text{ 的最短路}} < 0$ ，则为 x_{mn} 分配一个较小值可以使得 NV 更

大，分配 0 容量自然使得 NV 最大，但是不符合实际情况，所以应该设置一个最小值，以确保其最低通信需求。

因此，对于网络的传输容量可以按照以下步骤：

Step1: 设定分配容量的最大值 Max ，最小值 Min 。

Step2: 选取两个不邻接的节点 v_i, v_j ，找到连接 v_i, v_j 的最短路 L_{ij} ，计算

$$A = \sqrt{P_i P_j} - \underbrace{\sqrt{P_i P_\gamma} - \dots - \sqrt{P_\varepsilon P_j}}_{m \text{ 到 } n \text{ 的最短路}}。如果 A > 0，则给 v_{ij} 分配 $Max = \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\underbrace{\sqrt{P_i P_\gamma} + \dots + \sqrt{P_\varepsilon P_j}}_{i \text{ 到 } j \text{ 的最短路}}}$ 。$$

如果 $A < 0$ ，则给 v_{ij} 分配 $Min = \frac{1}{20} \cdot \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\underbrace{\sqrt{P_i P_\gamma} + \dots + \sqrt{P_\varepsilon P_j}}_{i \text{ 到 } j \text{ 的最短路}}}$ ，并且路 L 上的容量都要减

去 Max 或者 Min 。

按照以上分配容量规则，各个节点之间容量分配如：

	哈尔滨	京津	西安	郑州	拉萨	成都	重庆	武汉	上海	昆明	广深
乌鲁木齐	0.134	5.590	0.198	0.327	0.064	0.308	0.346	0.202	0.322	0.175	0.333
哈尔滨		3.829	0.314	0.566	0.118	0.590	0.623	0.324	0.574	0.329	0.597
京津			11.267	1.492	0.266	1.294	1.405	14.120	1.320	0.721	1.361
西安				0.622	0.132	0.625	0.716	0.419	0.661	0.359	0.687
郑州					0.244	0.980	1.441	22.939	1.380	0.600	1.409
拉萨						0.278	6.110	0.160	0.235	0.151	0.243
成都							56.180	0.787	1.114	0.684	1.158
重庆								12.709	1.260	11.280	1.297
武汉									7.281	0.421	7.039
上海										0.628	1.224
昆明											0.651

表 7 16 条边，最大重边为 2 的网络容量分配/Tb，网络价值 5060

	哈尔滨	京津	西安	郑州	拉萨	成都	重庆	武汉	上海	昆明	广深
乌鲁木齐	0.134	4.869	0.198	0.343	0.094	0.404	0.541	0.297	0.427	0.246	0.447
哈尔滨		2.238	0.314	0.587	0.177	0.783	0.998	0.572	0.843	0.471	0.883
京津			4.190	26.460	0.410	1.734	7.890	31.487	14.179	1.058	16.000
西安				42.242	0.137	0.645	13.458	0.448	0.682	0.372	0.714
郑州					0.136	0.643	16.284	55.890	0.680	0.371	0.712
拉萨						0.278	5.854	0.193	0.278	0.151	0.291
成都							55.515	0.839	1.208	0.684	1.267
重庆								24.098	1.591	10.732	1.664
武汉									26.289	0.513	24.048
上海										0.624	1.197
昆明											0.778

表 8 33 条边，最大重边为 2 的网络容量分配/Tb，网络价值 10996

	哈尔滨	京津	西安	郑州	拉萨	成都	重庆	武汉	上海	昆明	广深
乌鲁木齐	0.134	4.153	0.198	0.343	0.111	0.460	0.647	0.452	0.594	0.288	0.619
哈尔滨		0.940	0.314	0.587	0.213	0.907	1.229	0.815	1.124	0.562	1.174
京津			23.090	39.727	0.484	1.980	2.841	41.842	2.623	1.245	21.016
西安				44.701	0.181	0.787	1.033	0.682	0.949	0.479	0.988
郑州					0.131	0.624	0.715	72.532	0.660	0.358	0.686
拉萨						0.278	5.898	0.160	0.235	0.151	0.157
成都							87.568	0.787	1.114	0.684	0.812

重庆								25.886	1.260	10.736	0.818
武汉									6.063	0.421	44.532
上海										0.628	0.750
昆明											0.447

表 9 33 条边，最大重边为 3 的网络容量分配/Tb，网络价值 12418

以上结果相对于子问题 1，最大两次重边的情况下，两节点由 16 个连接和 33 个连接的网络价值分别下降 24%和 6.4%。然而最大三次重边的情况下反而提升 6%，说明此分配方式有较好的效果。

对于如果人口扩大为省，则改变各节点的人口数，重新计算各节点之间的网络价值，按照上文的算法步骤重新规划网络，省人口如下表。

新疆	23.98
黑龙江	37.99
京津	37.35
陕西	38.13
河南	95.32
西藏	3.31
四川	82.62
重庆	30.48
湖北	58.85
上海	24.2
云南	47.71
广东	110

表 10 2017 年中国各省人口数量（百万）

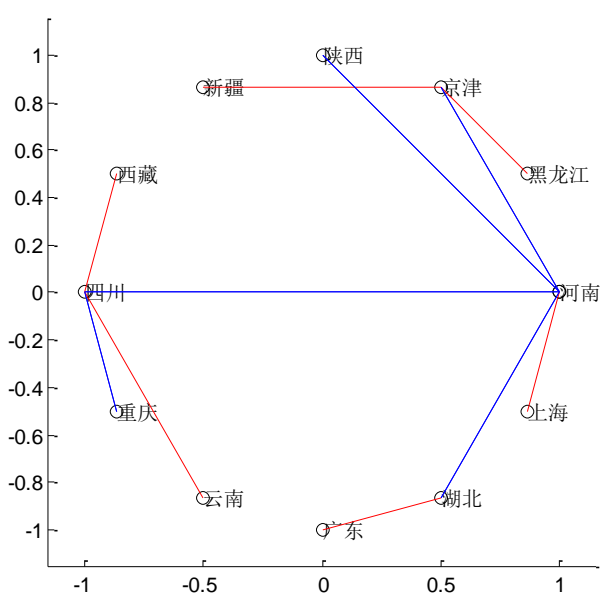


图 22 最大重边为 2 的 16 个连接的省市网络规划

	黑龙江	京津	陕西	河南	西藏	四川	重庆	湖北	上海	云南	广深
新疆	0.357	3.266	0.565	0.640	0.110	0.499	0.426	0.639	0.350	0.393	0.755
黑龙江		2.386	0.676	0.742	0.133	0.602	0.519	0.769	0.417	0.479	0.921
京津			0.755	17.617	0.135	0.599	0.544	0.836	0.447	0.480	0.954
陕西				24.586	0.190	0.904	0.685	1.121	0.673	0.644	1.201
河南					0.202	15.118	0.931	47.490	11.051	0.712	1.582
西藏						6.142	0.301	0.217	0.117	0.190	0.264
四川							25.583	1.023	0.523	10.190	1.250
重庆								0.792	0.465	0.810	0.944
湖北									0.737	0.749	6.373
上海										0.409	0.812
云南											0.944

表 11 最大重边为 2 的 16 条连接的网络容量分配（Tb），各省市的总网络价值 17133

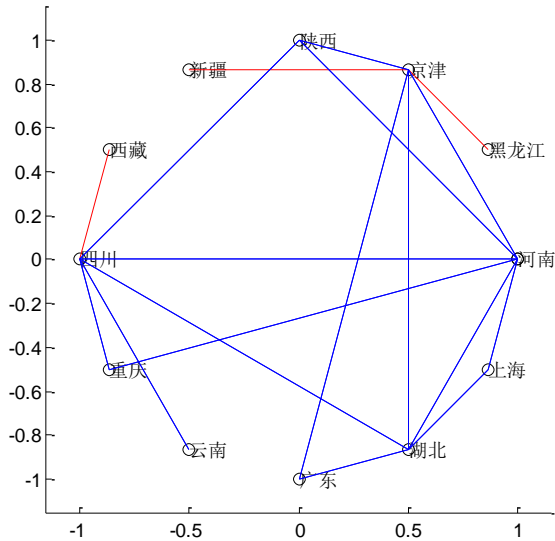


图 23 最大重边为 2 的 33 个连接的省市网络规划

	黑龙江	京津	陕西	河南	西藏	四川	重庆	湖北	上海	云南	广深
新疆	0.357	1.879	0.536	1.046	0.153	0.739	0.527	0.729	0.472	0.665	0.896
黑龙江		0.667	0.606	1.242	0.186	0.899	0.644	0.895	0.581	0.817	1.106
京津			4.702	21.794	0.197	0.952	0.683	30.947	0.607	0.859	16.000
陕西				48.050	0.155	24.819	0.577	32.000	0.538	0.746	1.010
河南					0.292	15.313	27.988	64.000	30.462	1.338	16.000
西藏						5.974	0.161	0.231	0.153	0.211	0.286
四川							47.717	30.809	0.746	30.968	16.000
重庆								21.836	0.414	9.654	0.777
湖北									28.489	1.053	26.011
上海										0.656	0.882
云南											1.032

表 12 最大重边为 2 的 33 条连接的网络容量分配（Tb），各省市的总网络价值 39378

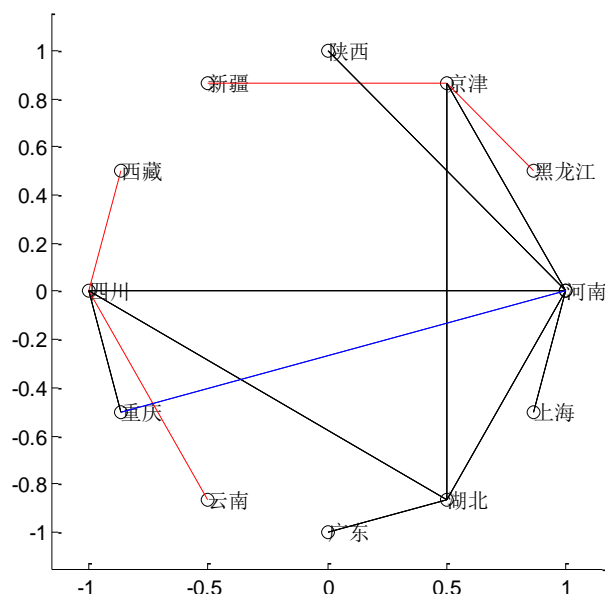


图 24 最大重边为 3 的 33 个连接的省市网络规划

	黑龙江	天津	陕西	河南	西藏	四川	重庆	湖北	上海	云南	广深
新疆	0.357	2.417	0.536	1.046	0.153	0.739	0.527	0.577	0.386	0.533	0.728
黑龙江		1.334	0.606	1.242	0.186	0.899	0.644	0.707	0.475	0.652	0.897
天津			27.915	35.082	0.197	0.952	0.683	38.005	0.490	0.677	0.913
陕西				80.838	0.155	0.724	0.577	0.592	0.414	0.548	0.770
河南					0.258	28.094	45.512	96.000	46.824	0.903	1.314
西藏						6.186	0.126	0.184	0.129	0.190	0.235
四川							93.568	38.894	0.614	41.790	1.106
重庆								0.633	0.439	0.521	0.769
湖北									45.053	0.858	39.708
上海										0.473	0.702
云南											0.856
新疆											

表 13 最大重边为 3 的 33 条连接的网络容量分配 (Tb)，各省市的总网络价值 46610

4.5 子问题三

对于运营商，连接经济发达地区可以提高收入。则应该建立一个标准，用于衡量某地区经济是否发达。从政府的角度，对于落后地区，应保障该地区与外界的通信。应设立一个标准保障其最低通信要求，并且对于运营商搭建的网络，应考察其是否均衡分配通信容量，不至于某些地区之间通信网络很稠密，而其他地区很稀疏。

建立标准，衡量一个地区是否发达，可以采用联合国开发计划署提出的人类发展指数 (HDI) 评判方法^[6]。HDI 由预期寿命指数、教育指数、GNI 指数三项系数构成。

Step1: 创建维度索引

维度	参量	最小值	最大值
健康	平均寿命	20	85
教育	在校时间	0	18
生活标准	人均国民收入	100	75000

表 14 HDI 维度索引表

$$I = \frac{\text{实际值} - \min}{\max - \min} \quad (41)$$

Step2: 聚合维度指数以产生 HDI

$$HDI = (I_{\text{健康}} \cdot I_{\text{教育}} \cdot I_{\text{收入}})^{\frac{1}{3}} \quad (42)$$

	平均寿命/年	平均受教育年限/年	GNI/美元	<i>HDI</i>
京津	79.53	7.45	17868	0.44801
广深	70.49	5.78	10594	0.326941
上海	80.26	7.58	16702	0.442314
重庆	75.7	5.17	7655	0.291723
成都	74.75	5.37	5777	0.267057
武汉	74.87	5.57	7535	0.295984
郑州	74.57	5.47	6192	0.274796
西安	74.68	5.42	7529	0.292885
哈尔滨	75.98	6.34	6964	0.302931
昆明	69.54	4.14	4341	0.214908
乌鲁木齐	72.35	5.62	6621	0.279748
拉萨	68.17	1.92	4512	0.166987

表 15 各城市平均寿命、教育程度和 GNI 值

根据上表得出的 HDI 作为考量一个城市的经济是否发达。作为运营商，在可以建立的连接有限制的条件下，连接两个 HDI 高的地区可以获得更多的经济收益。

站在政府角度，应该保证欠发达地区的通信，但也不宜占用过多的资源。因为经济发达地区的网络、电视、医疗、通信、教育、运输，都离不开光纤网络，对于信道的容量需求自然也比经济相对落后地区更迫切。所以在连接数量不足的情况下，只需保证欠发达地区有和外界的通信渠道，保障其通信联络即可。其余网络连接应尽可能分配给经济发达地区，以确保网络容量能满足其经济发展需求。在连接数目戳戳有余的情况下，就应该不仅仅保证经济欠发达地区的最低通信需求，应为其建立与外界较多的连接，以推动其经济发展。所以，在最大网络连接为 16 的情况下，不考虑优先为经济欠发达地区分配连接。在最大网络连接为 33 的情况下，可以为所有节点至少分配两条连接，用以保证其与外界的连接。

因此，将两节点之间的网络价值计算规则更改如下：

$$NV = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_{ij} \cdot v_{ij} \cdot \sqrt{P_i P_j}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{\sqrt{HDI_i \cdot HDI_j}} (0.9w_{ij}^{GDP} + 0.1w_{ij}^{Building}) \quad (43)$$

$$w_{ij}^{GDP} = 100^{\left(\frac{G_i + G_j}{2 \sum_{k=1}^N G_k}\right)}, w_{ij}^{Building} = 100^{\left(\frac{B_i + B_j}{2 \sum_{k=1}^N B_k}\right)}$$

根据新拟定的分配规则，由于 16 条边的情况边数太少，所以暂不考虑有限优先为边远地区分配连接，故该情况下网络规划并未改变。对于 33 条边的情况，不考虑中间节点，新的网络规划如下。

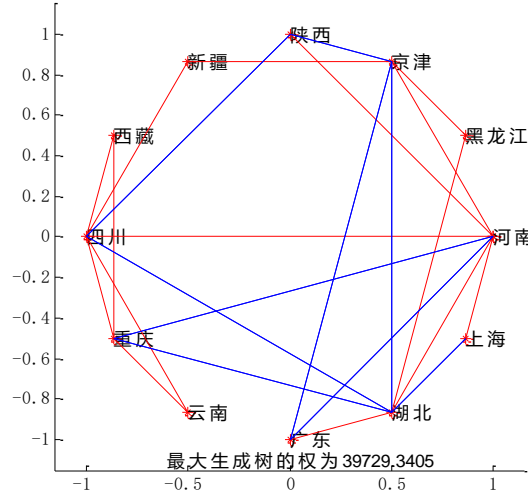


图 25 根据 HDI 参数规划的最大重边为 2 的 33 个连接的规划图

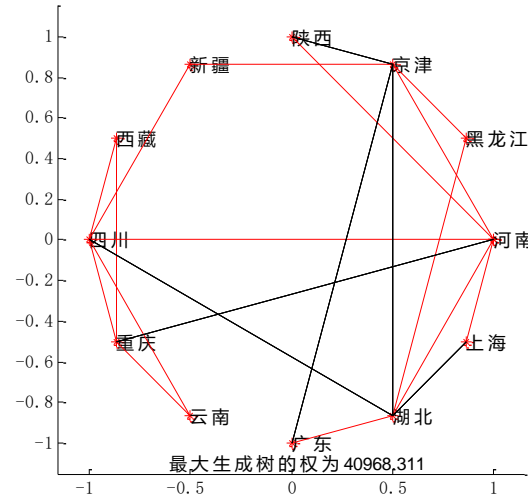


图 26 根据 HDI 参数规划的最大重边为 3 的 33 个连接的规划图

由图 25 和图 26 可见，几个经济欠发达地区都被规划进了网络，且网络价值相比子问题 2 仅下降约 10%。

5. 问题三 改善星座图

5.1 问题简述

由前面分析与建模结果可知,当纠前 BER 不变时,若能降低其 SNR 容限点,则可以提升系统容忍噪声的能力,从而延长链路的总长度。在本题中,我们将尝试任意改变 16QAM 方案中星座点的位置、数量和概率,在保持调制格式信息熵为 3bit 的前提下,探索产生比题设中 8QAM 具有更低 SNR 容限点的调制方案。

5.2 问题分析

(1) 影响 SNR 容限点的因素

a. 相邻点的最小欧式距离: 星座图中相邻点的最小的欧式距离直接代表着噪声容限的大小,在信号平均功率相等时,噪声容限越大,误码率越低。

b. 信号的平均功率。

(2) 星座点数量等于 8

当星座点数量等于 8 时,则该星座图仍是 8QAM 的一种。根据信息论与编码理论中点的最大离散熵定理:在离散情况下,集 X 中各符号等概出现,即服从均匀分布时,熵值最大。

根据此定理我们可以得出结论:当我们选择的星座点仍等于 8 时,即 8QAM,则每个星座点必须等概出现,即每个符号点出现的概率都为 $1/8$ 。

(3) 星座点数量大于 8

当星座点数量大于 8,即星座点的数量在 9-16 之间,此时要保持调制格式信息熵为 3bit,则星座点一定不是等概出现。

设星座点的数量为 M ,各点出现的概率为 P_i , $i=1,2,\dots,M$ 。则为了求解模型中的各个参数,有下列两种假设:

a. 假设 BRE 相等,即噪声容限相等,等价于相邻点间最小欧式距离 d 相等。根据限定条件有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} = 3 \\ \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\ SNR(MQAM) \leq SNR(8QAM) \end{array} \right. \quad (44)$$

由式中可见:此时转换为 SNR 的不等式约束,因为

$$SNR = P_s / P_n \quad (45)$$

带宽不变,则噪声功率不变,因此此时的 SNR 只与信号的平均功率有关,即星座点的幅值有关,则上式变为有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} = 3 \\ \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^M p_i \cdot |s_i|^2 \leq \frac{3+\sqrt{3}}{4} d^2 \end{array} \right. \quad (46)$$

b. 假设 SNR 相等，即信号的平均功率相等，根据限定条件有：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} = 3 \\ \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\ BER(MQAM) > BER(8QAM) \end{array} \right. \quad (47)$$

因为在信号平均功率相等的情况下，BER 由噪声容限决定，又因为相邻点的最小欧式距离 $d_{\min(MQAM)}$ 直接代表着噪声容限的大小，所以式 (47) 可以写为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} = 3 \\ \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\ d_{\min(MQAM)} > d_{\min 8QAM} \end{array} \right. \quad (48)$$

这两组方程实际是等价的，只是假设条件不一样。因此可根据其中一种假设情况来建立模型。但是这两种假设下的方程组都是欠定方程组，因此若要取得特解，可以根据假设再提出一些约束条件来建立模型和题设 8QAM 模型进行性能比较。

5.3 建模与问题求解

5.3.1 方案一

方案一我们选取了一种圆形 8QAM^[6]，各点等概出现。模型如下图所示，(a) 为我们选取的模型，(b) 图为题设给出的 8QAM。

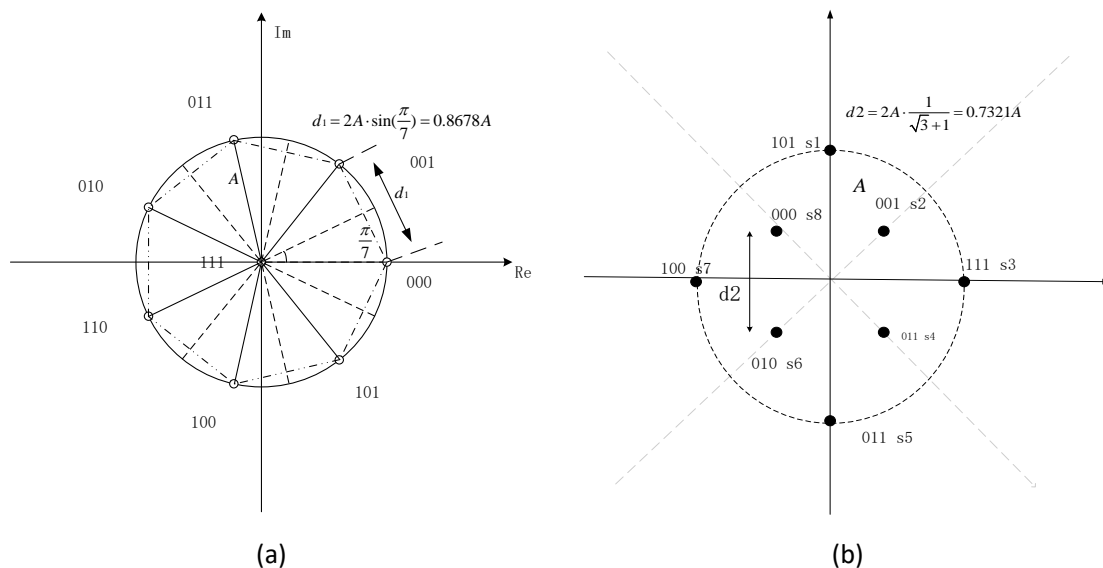


图 27 8QAM 星座图

我们将此方案与原题设给出的 8QAM 星座图的性能做比较^[2]。我们是按照最大振幅画出这两种信号的星座图，设最大振幅为 A 。在最大功率相等的条件下进行比较。

a 图的相邻点的最小欧式距离为 $d1 = 2A \cdot \sin(\frac{\pi}{7}) = 0.8678A$ ，b 图的相邻点的最小欧式距离为 $d2 = 2A \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+1} = 0.7321A$ ，则 $d1$ 是 $d2$ 的 1.1854 倍，即图 b 的噪声容限比图 a 大 1.4773dB；

因为两图中的点都是等概出现的，因此可以计算它们的平均功率。图 a 的平均功率为 $P_{1s} = \frac{7A^2}{8} \approx 0.8750A^2$ ，最大功率与平均功率之比为 1.1429 倍，即

0.5800dB；图 b 的平均功率为 $P_{2s} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} d^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} A^2 = 0.634A^2$ ，最大功率与

平均功率之比为 1.5773 倍，即 1.9791dB。

则在平均功率相等条件下，图 a 比图 b 的噪声容限大 0.0782dB。这意味着，在相同 SNR 情况下，图 a 的 BER 一定会比图 b 的 BER 更低，如下图所示。图中，曲线 a 表示图 a 的 SNR-BER 曲线，曲线 b 表示图 b 的 SNR-BER 曲线。则图 b 要达到与图 a 相同的误码率，则一定要增大其信噪比到 $\text{snr}2$ 。

因此对此模型的理论分析结果是图 a 中的 8QAM 信号比图 b 中的 8QAM 具有更低的 SNR 容限点。

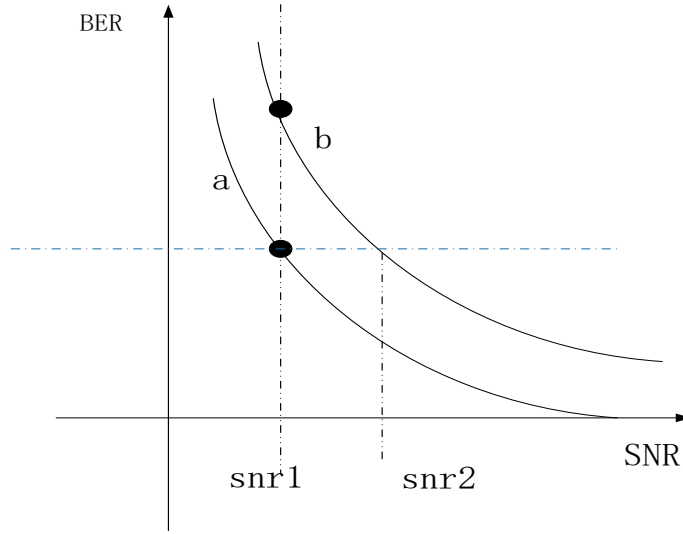


图 28 所建 8QAM 模型与题设 8QAM 模型的 SNR-BER 曲线示意图

5.3.2 方案二

当我们选取的符号星座点大于 8 个时，则此时的各个符号出现的概率不全相等，因此此时需要根据上节问题分析第三点的角度来考虑问题，但是若不另加一些约束条件，上述方程组为一个欠定方程组，很难得到特解。因此我们需要设定某些假设条件来简化的我们的计算模型。

假设条件：

- a. 根据星座点通常分布在一个或几个圆上的规则，我们假设此时星座图上有两个圆，每个圆上分布 6 个星座点，且相同圆上的信号符号概率相等；
- b. 内层圆上符号的概率大于外层圆上的符号概率。

方案二我们根据上节中假设二的思路建立了一种 (6,6) 模型的 12QAM 星座图，我们求解公式：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} = 3 \\ \sum_{i=1}^M p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^M p_i \cdot |s_i|^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} d^2 \end{cases} \quad (49)$$

通过 MATLAB 搜索，我们可以搜索到满足此方程组前两式的概率值，会有多组值，我们组取概率 $p_1=0.015$ ， $p_2=0.1517$ ，则信息熵为：

$$H = \sum_{i=1}^6 p_1 \cdot \log_2 \frac{1}{p_1} + \sum_{i=1}^6 p_2 \cdot \log_2 \frac{1}{p_2} = 3.02 \text{ bit} \quad (50)$$

此信息熵满足题设精度 $\pm 1\%$ 的要求。

根据此符号概率若能计算得到 $d_{\min(MQAM)} > d_{\min(8QAM)}$ ，则证明提出的 14QAM

比题设中的 8QAM 的 SNR 容限点大，若 $d_{\min(MQAM)} < d_{\min(8QAM)}$ ，则表明提出的 14QAM 比题设中的 8QAM 的 SNR 容限点小。

建立的模型如下所示：

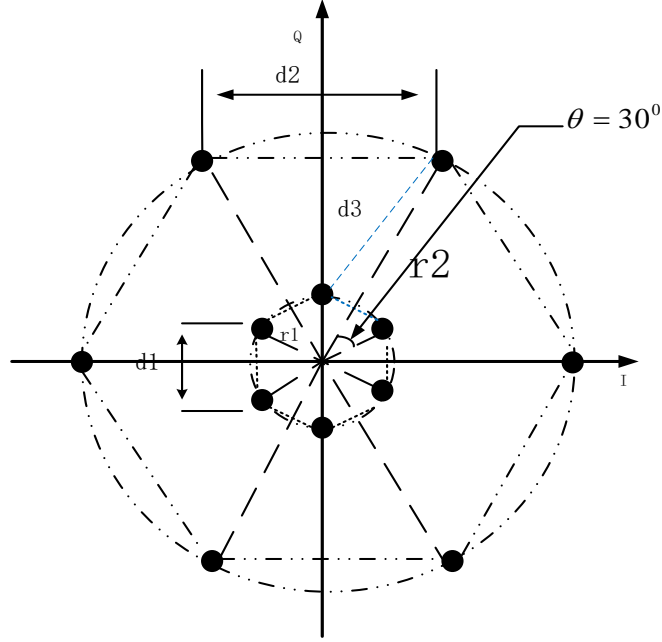


图 29 建立的 (6,6) 12QAM 信号星座图

因为正六边形的高度对称性，从图中易得如下关系：

$$r_1 = d_1, \quad r_2 = d_2 \quad (51)$$

根据勾股定理，可以得到 d_3 的值：

$$d_3^2 = (r_2 - r_1 \cdot \cos \theta)^2 + \frac{1}{4} d_1^2 \quad (52)$$

由图中的关系可以看出相邻点的最短欧式距离为 $d_{\min(MQAM)} = \min\{d_1, d_3\}$ ，则有下列三种假设：

a) $d_1 > d_3$ ，则 $d_1^2 > d_3^2$ ， $d_{\min(MQAM)} = d_3$

b) $d_1 < d_3$ ，则 $d_1^2 < d_3^2$ ， $d_{\min(MQAM)} = d_1$

c) $d_1 = d_3$ ，则 $d_1^2 = d_3^2$ ， $d_{\min(MQAM)} = d_1 = d_3$

因为正六边形的特殊性，首先我们组选择计算假设 c)，即 $d_1 = d_3$ 。

则：上式 (3) 可计算得： $d_2 = \sqrt{3}d_1$

根据两图的平均信号功率相等，有：

$$\begin{aligned}
P_{s(8QAM)} &= \frac{3+\sqrt{3}}{4} d^2 = P_{s(12QAM)} = \sum_{i=1}^M p_i \cdot |s_i|^2 \\
&= 6p_2 \cdot r_2^2 + 6p_1 \cdot r_1^2
\end{aligned} \tag{53}$$

其中， $p_1 = 0.015$ ， $p_2 = 0.1517$ ，因此可以得到下列等式：

$$0.09d_2^2 + 0.9102d_1^2 = 1.1830d^2 \tag{54}$$

其中， $d = d_{\min(8QAM)}$ ，联立式(52)和(54)，可以得到以下结果：

$$d_1 = 1.0012d \tag{55}$$

即：

$$d_{\min(MQAM)} = d_1 = 1.0012d_{\min(8QAM)} > d_{\min(8QAM)} \tag{56}$$

(2) 计算假设 a，即 $d_1 > d_3$

源于只有 d_1 和 d_3 的不等关系，有：

$$\begin{aligned}
d_3^2 - d^2 &= (d_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}d_1)^2 - 0.7476d_1^2 \\
&\approx (d_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}d_1)^2 - \frac{3}{4}d_1^2
\end{aligned} \tag{57}$$

由上式可知：

若 $d_2 > \sqrt{3}d_1$ ，则 $d_{\min(MQAM)} = d_3 > d_{\min(8QAM)}$ ，符号题设要求；但是此时可以

易知 $d_{\min(MQAM)} = d_2$ ，与我们的假设相违背，不存在此 12QAM 信号模型。

若 $d_2 < \sqrt{3}d_1$ ，则 $d_{\min(MQAM)} = d_3 < d_{\min(8QAM)}$ ，不符合题设要求；

(3) 计算假设 b，即 $d_1 < d_3$

与假设 a 类似，也是与我们假设相违背，不存在此信号模型。

综上，则通过上述讨论分析我们可以得到优于 8QAM 信号模型的 (6,6) 12QAM 信号模型，如下图所示，并且得出结论：此模型的 SNR 容限点比题设中的 8QAM 信号模型的容限点低，其性能更优。

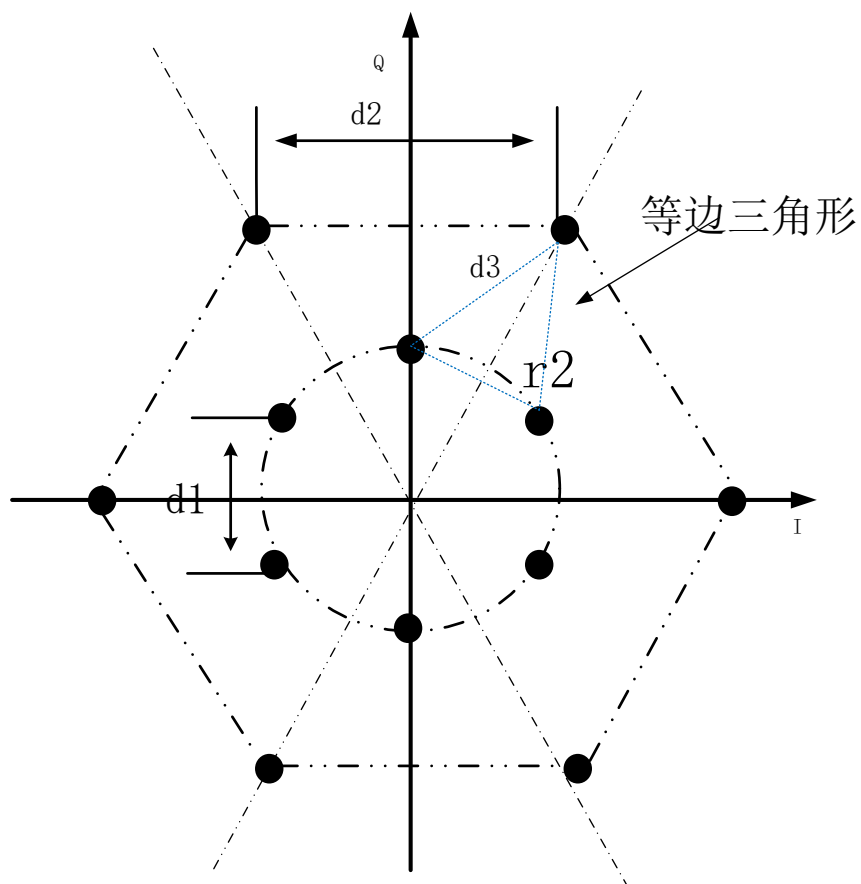


图 30 最终确定的 (6,6) 12QAM 星座图

6. 模型评价

6.1 模型的优点

对于问题一：

本文从噪声概率密度分度着手，建立了各星座点在信号空间中的概率分布模型，根据最大似然准则选择判决门限，因此我们的模型理论上适用所有的调制格式（星座图），并且精度也能得到保证。

对于问题二：

要从给出的 50 条网络连接中选出 16 和 33 条构建网络，这是组合爆炸问题。本文通过首先找出最大生成树，减少组合可能以降低求解难度。对于考虑节点的容量分配，本文通过建立线性目标函数，并利用凸优化，找到了次优解。

对于问题三：

问题三中本文提出了两种星座图改进方案，均达到了比题设中 8QAM 信号更低的 SNR 容限点，且模型结构简单，易于继承和推广。

6.2 模型的缺点

对于问题一：

该模型无法解决噪声相关的情况，并且对于不规则判决区域的星座图计算难度较大，可能无法准确计算出理论值。

对于问题二：

使用了“贪心算法”得到了局部最优解，但不一定是全局最优解，所以得到的结果可能只是次优解。并且假设对节点容量分配只做了二元假设，只能得到这种假设下的最优分配。

对于问题三：

本文的模型是一个非通用模型，即本文只尝试探索了某种可能的情况，本文还可以对模型进行优化，建立一个更为通用的模型，从而探索出更多的满足要求的星座图。除此之外，提出的模型相比题设中的 8QAM 性能只是略微提升，可能目前还不具备较强的实用性。

参考文献

- [1] Foschini G J, Gitlin R, Weinstein S. Optimization of Two-Dimensional Signal Constellations in the Presence of Gaussian Noise[J]. IEEE Trans Commun, 1974, 22(1):28-38.
- [2]任强. 分布式环境下图坚韧度的计算[D].哈尔滨工业大学,2015.
- [3]许冰.一种可选择的新方法:加权人均 GDP[J].数量经济技术经济研究, 2006(07): 14-23.
- [4]管梅谷.求最小树的破圈法[J].数学的实践与认识,1975(04):38-41.
- [5] UNDP, Human Development Index (HDI), <http://hdr.undp.org/en/content/human-development-index-hdi>, 2018 年 9 月 16 日
- [6] Nolle M, Frey F, Elschner R, et al. Performance comparison of different 8QAM constellations for the use in flexible optical networks[C]// Optical Fiber Communications Conference and Exhibition. IEEE, 2014:1-3.