

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 乘用车物流运输计划问题

### 摘 要：

整车物流计划的制定，其问题本质上是一个整数线性规划问题。前四问优化模型的建立都是以满载为先决条件的方案作为决策对象的，其中，前三问目的地只有一个，直接以成本作为目标进行优化。第四、五问的问题复杂性增加，轿运车的使用数量转化为约束。

前三问，本文构建“每种类型轿运车的满载方案”作为模型的决策对象，使得轿运车与乘用车之间的复杂关系转化为两个阶段的优化：①每种类型轿运车装载方案的优化，即决策对象集合的优化；②不同装载方案下的各型轿运车线性组合优化。决策对象构建及优化过程如下：穷举单层满载方案→上下层随机组合→整体归一剔除→极端条件排除→冗余率筛选→形成决策对象集合。这些决策对象均满足“下层装满、上层平衡”的限制。在此决策对象集合基础上，建立了仅有数量约束和 20%约束以及成本最低的优化模型。由于决策对象架构合理，模型表现清晰明了，求解简单易行。最后分别得出问题一需要 1-1 型车 16 辆，1-2 型车 2 辆；问题二需要 1-1 型车 12 辆，1-2 型车 1 辆；问题三需要 1-1 型车 25 辆，1-2 型车 5 辆。需要指出的是每一问最优解繁多，但使用轿运

车类型和数量都相同，本文只取其中之一。

问题四，应用启发性思想得到三条准则，首先计算轿运车需求量的下限并考察了各型轿运车运输的“成本效率”，给出准则 1 和 2：成本效率高的 1-2 型轿运车运载单位乘用车的成本低，而其数量最多为四辆，应该优先运往最远处以降低总体成本。然后将各目的地按距离远到近排序，给出准则 3：优先规划距离远的点，即按照  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  顺序规划各个目的地的运输方案。问题四对路径规划的考量就转化为这三条准则。准则 1 和 2 转化为模型附加约束条件，准则 3 提供了分步求解策略，最后，问题四模型则转化为前三问模型进行求解。得出问题四需要 1-1 型轿运车 21 辆，1-2 型轿运车 4 辆，具体行车方案参考图 5-2。

问题五是问题四模型的“巨大化”，必须对问题进行降维。通盘考虑轿运车和乘用车的规格，拆分轿运车并归并为 A、B 两类宽度上仅容纳一辆乘用车的“板” (18 页)，乘用车归并为 24 种类型 (表 5-8)。成本考量与问题四一致，路径规划以问题四为基础。问题五规模增大不再考虑用远方目的地的轿运车富余空间为途径目的地“捎带” (合理性见 p 页码)，因此路线图转化为类同问题四的星型路线图。在问题的求解过程中，采取分地点分板类型的方法进一步降低维度。问题五使用新的决策变量改为每块板上放置的每种类型乘用车数量。规划过程中先进行 B 类，在进行 A 类板的规划，分步进行。最后的结果是需要 118 辆轿运车。

本文问题是一个典型的、复杂的指派问题，约束条件复杂，目标影响机制不明确。最后的前四问的结果均通过了本文设计的冗余上限验证法的验证 (13 页，17 页)，证实为最优解。第五问结果比较接近下限值 113 辆车，说明模型设计策略的合理性。

**关键词：**满载方案 冗余率优化 分步规划 冗余上限验证法 类型归并

## 一、问题重述

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以调用的轿运车中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。轿运车是通过公路来运输乘用车整车的专用运输车，本题仅考虑双层轿运车。双层轿运车又分为三种：上下层各装载 1 列乘用车，记为 1-1 型；下、上层分别装载 1、2 列，记为 1-2 型；上、下层各装载 2 列，记为 2-2 型，每辆轿运车可以装载乘用车的最大数量在 6 到 27 辆之间。

在确保完成运输任务的前提下，物流公司追求降低运输成本。但由于轿运车、乘用车有多种规格等原因，当前很多物流公司在制定运输计划时主要依赖调度人员的经验，在面对复杂的运输任务时，往往效率低下，而且运输成本不尽理想。

装载具体要求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层。

整车物流的运输成本计算简化为：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；其次，在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，但物流公司 1-2 型轿运车拥有量小，为方便后续任务安排，每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；再次，在轿运车使用数量及型号均

相同情况下，行驶里程短的成本低，注意轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回。最后每次卸车成本几乎可以忽略。为物流公司安排以下五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线。

1. 物流公司要运输 I 型乘用车 100 辆及 II 型乘用车 68 辆。
2. 物流公司要运输 II 型乘用车 72 辆及 III 型乘用车 52 辆。
3. 物流公司要运输 I 型乘用车 156 辆、II 型乘用车 102 辆及 III 型乘用车 39 辆。
4. 物流公司要运输 166 辆 I 型乘用车（其中目的地 A、B、C、D 分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆 II 型乘用车（其中目的地 A、C 分别为 31、47 辆），具体路线长度：OD=160，DC=76，DA=200，DB=120，BE=104，AE=60。

5. 附件给出的物流公司需要运输的乘用车类型、尺寸大小、数量和目的地，附件给出可以调用的轿运车类型、数量和装载区域大小，1-1 型及 2-2 型轿运车上、下层装载区域相同；1-2 型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽 0.8 米。此外 2-2 型轿运车因为层高较低，上、下层均不能装载高度超过 1.7 米的乘用车。

## 二、安全车距数据处理

纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，需要对乘用车型的长宽及轿运车类型的长宽进行处理，如图 2-1 所示。

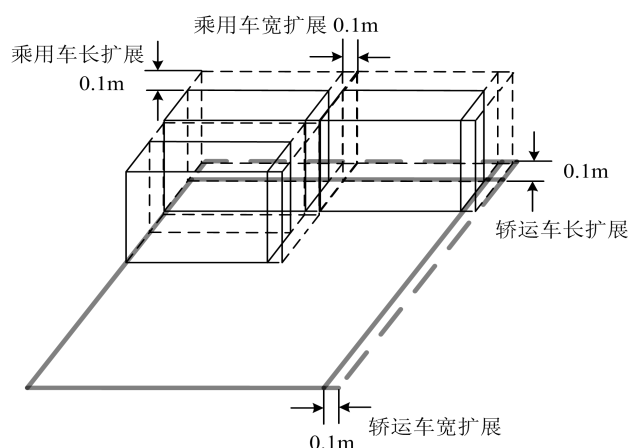


图 2-1 乘用车、轿运车空间扩展示意

乘用车型号长和宽各加 0.1 米，轿运车型号长和宽各加 0.1 米，形成乘用车与轿运车安全存放扩展空间如表 2-1、2-2 所示。这样以来，在编程中原问题就转化为矩形空间的密铺，能直接用于累加，列写不等式计算。如无特殊说明，下文的“乘用车、轿运车长度与宽度”均指“乘用车、轿运车扩展空间长度与宽度”。

表 2-1 乘用车安全存放数据等效处理

乘用车型号	长度(米)	宽度(米)	高度(米)
I	4.71	1.8	1.51
II	3.715	1.705	1.394
III	4.73	1.885	1.77

表 2-2 轿运车安全存放数据等效处理

轿运车类型	上下层长度(米)	上层宽度(米)	下层宽度(米)
1-1	19.1	2.8	2.8
1-2	24.4	3.6	2.8

### 三、问题分析

#### 3.1 前三问分析

前三问要求解决在给定乘用车需求量的条件下每辆轿运车的乘用车装载方案。模型建立的难点在于如何确定决策的对象：同种类型的轿运车可以有不同的装载方案，同种装载方案的轿运车也可以是不同类型，所以单单取轿运车类型或者是装载方案类型作为模型决策对象都是无效的。只有把两者结合起来，即每种类型轿运车的装载方案，作为模型的决策对象，才能把本优化模型表达出来。

这样以来，前三问的模型建立的方法就显得非常清晰，可以分为两个阶段去考察：

1) 求解决策对象集合。通过轿运车和乘用车空间限定条件去，列举出各型轿运车的所有可能的装载方案；

2) 优化模型建立并求解。在成本最低的目标下，通过数量限定、需求限定等条件建立整数规划模型。

其中，可能出现的问题是：虽然这个方法理论上是可实现的，但因为决策对象集合庞大，可能性过多，程序量过大，也许会导致寻优耗时很长甚至无法运行。因此，需要考虑削减决策对象集合，需要挑选出具有代表性的、装载量大的装载方案。

筛选装载方案，必须得保证模型的最优解不受影响，换一个角度看，在不影响模型最优解的情况下，如何削减装载方案都是可行的，因为在寻优时装载量低的方案自动会被淘汰掉。因此，注意力还是放在保留装载量大的方案，剔除装载量小的方案。

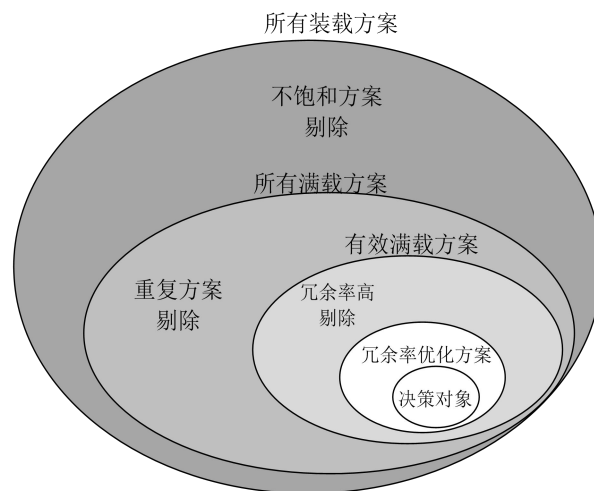


图 3-1 单辆轿运车装载方案优化思路

首先，如果让每一辆轿运车都满载，可以保证给出的每一个决策对象都是饱和的，剔除所有能继续容纳下多一辆乘用车的方案。

然后，满载方案里也有效率高和效率低之分，劣势的方案肯定可以通过优势方案线性组合得到，所以可以考虑剔除。衡量满载方案好坏的标准应该是冗余的空间，通过判断冗余空间大小，进一步剔除低效率方案。

最后，值得注意的是，每辆轿运车都分上下两层，它们的装载方案相互独立，可以有不同的组合，但它们又是一个整体，局部组合不同的情况下整体总和可能相同。这要求我们先分开考虑，进行组合，然后从整车的角度出发去归并整体总和相同的方案。

综上，按照这样的思路建立的前三问模型是合理的，模型是被降维而可以求解的。

### 3.2 问题四分析

问题四纳入了行车路线的规划，而它的本质还是建立在前三问模型上的。如果融为一体去考虑，决策对象就会变成每条行车路线上的每种类型轿运车装载方案，而各路线和目的地间仍有前后连锁，可能性成倍剧增，恐怕模型十分复杂，难以解决。因此，需要分步去拆解这个问题。

第一，要解决这个复杂的规划，可以先考察模型中轿运车需求下限，有了模型的下限，最优解应该就在其附近，为模型建立确定方向。

第二，要使得行车成本最低，首先要保证让最节约成本的型号轿运车跑最远的距离，以此类推。因此，一方面需要衡量轿运车节约成本的能力，可以考察轿运车上每辆乘运车的单位距离上成本高低，它的倒数就是一辆轿运车的单位距离成本投资回报率。应用这一指标，可以将各型号轿运车按节约成本能力排序，投资回报率高的跑远的路，以节约成本。另一方面，需要将各目的地按距离远近进行排序，先规划距离远的点，再规划距离近的点。以上的策略，使得问题四模型即可被拆解成由远及近的目的地点上的轿运车装载模型规划，可以转化成前三问模型求解。

第三，值得注意的是，虽然行车路线问题被转化成了由远及近的规划顺序，目的地点上的轿运车装载模型可以用前三问模型求解，但这是一个步步为营的策略，下一点的约束条件跟着前一点模型的结果在改变。一方面，因为远的点在规划中出现富余的空间，富余空间可以直接提供给中途停靠点上的规划，因此，在中途停靠点乘运车需求约束要相应减去这一项。另一方面，先把回报率高的轿运车安排给远的点，而其数量有限，所以每一个点的规划也要更新轿运车数量约束条件。

综上，按照这样的分步策略建立的问题四模型是简洁有效的，求解过程中可以多次使用前三问所建立的模型。

### 3.3 问题五分析

问题五的在问题四的基础上增加了轿运车和乘用车的复杂性，这是本质的一点。前面考虑的满载方案实在种类过于繁多，本问不再采用。为此，首先考虑通过拆分轿运车、归并类型等策略降低轿运车和乘用车的类型，然后重新构建优化模型。

模型的成本、路径背景与问题四基本一致，可以利用问题四的模型构建经验。

由于整个问题规模的复杂性，考虑不再规划富余空间的再利用。因为富余空间可以根据调整换一辆长度较短的轿运车。

## 四、模型假设与符号说明

### 4.1 模型的假设

- (1) 假设所给的所有轿运车规格是乘用车的摆放限度，不需在轿运车与乘用车之间留出安全空隙；
- (2) 1-2 型车上层两列完全对称，即两列乘用车完全相同，数量计算时直接乘以 2；
- (3) 对于装载相同型号和数量乘用车的方案，其优劣是一样的，乘用车具体摆放位置对方案无关其优劣；
- (4) 假设 1-1、1-2、2-2 型轿运车的使用成本  $\alpha_i$  比例为 4: 5: 7；
- (5) 轿运车到达目的地后可以原地待命无须放空返回，每次卸车成本忽略不计；

### 4.2 符号说明

- (1)  $L_i$  为轿运车长度， $l_i$  为乘用车长度；
- (2)  $N_i$  为轿运车中装载乘用车列数，对于 1-1、1-2、2-2 型轿运车  $N_i$  分别为 2,3,4；
- (3)  $B_i$  为乘用车物流需求量， $\alpha_i$  为轿运车的单项成本；
- (4)  $R$  为轿运车冗余率，是衡量单辆轿运车满载方案优劣的参考指标；
- (5)  $\eta_i$  为单位距离成本效率，表征轿运车投资回报率的高低；
- (6)  $p_i$  为单位距离成本；
- (7)  $(a_1, a_2, a_3)$  指的是轿运车装载方案，其中装载 I, II, III 型乘用车各  $a_1, a_2, a_3$  辆；

## 五、模型建立

### 5.1 前三问模型建立

(1) **决策变量** 不同乘用车装载方案下的各型轿运车数量  $x_i$

表 5-1 1-1 型轿运车装载方案

乘用车型	方案 1	方案 2	...	方案 n
I	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
II	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
III	$a_{31}$	$a_{32}$	...	$a_{3n}$
对应决策变量	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$

如表 5-1 所示，1-1 型轿运车共  $n$  种装载方案， $a_{1k}$ ， $a_{2k}$ ， $a_{3k}$  分别为 I，II，III 型乘用车的装载数量，对应决策变量为  $x_k$ ， $k=1,2,\dots,n$ ；类似地，1-2 型轿运车共  $m$  种装载方案， $b_{1k}$ ， $b_{2k}$ ， $b_{3k}$  分别为 I，II，III 型乘用车的装载数量，对应决策变量为  $y_k$ ， $k=1,2,\dots,m$ ；前三问不考虑 2-2 型轿运车。

(2) **目标函数** 不考虑 2-2 型轿运车，令  $\alpha_1$ ， $\alpha_2$  分别为 1-1 型、1-2 型轿运车的单项成本，使得轿运车总成本最小。

$$\min f = \alpha_1 \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^m y_k \quad (\text{式 5-1})$$

(3) **约束条件**

**约束 1** 数量限制条件：1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即

$$20\% \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m y_k \geq 0 \quad (\text{式 5-2})$$

**约束 2** 物流需求限制条件：装载各型乘用车的能力大于等于物流公司需求量，即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^m b_{ik} y_k \geq B_i, i=1,2,3 \quad (\text{式 5-3})$$

式 5-3 左边为各型乘用车总数，分别表示所有轿运车对于 I、II、III 的装载能力， $B_1$ ， $B_2$ ， $B_3$  分别为 I 型、II 型、III 型乘用车的需求量。

(4) **建立整数规划模型** 综上，得到承运车物流优化模型如式 5-4 所示：

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f = \alpha_1 \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^m y_k \\
 s.t. \quad & \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^m b_{ik} y_k \geq B_i \\
 & 20\% \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m y_k \geq 0 \\
 & x_k, y_k \geq 0 \text{ 且为整数}, i=1,2,3
 \end{aligned} \tag{式 5-4}$$

### 5.1.1 决策对象的确定

在前三问优化模型中，决策变量的选取是本模型建立的重点，单辆轿运车装载方案就是本模型的决策点，准确、高效的单辆轿运车装载方案是解决问题的关键。

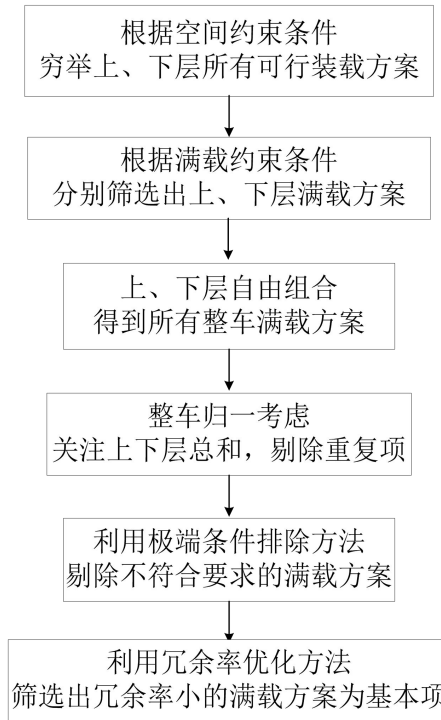


图 5-1 单辆轿运车装载方案的计算和优化

#### 步骤 1 穷举装载方案

结合表 2-1、2-2 乘用车与轿运车空间限制，首先由题中所给高度限制得到 III 型只能装 1-1 型下层或者 1-2 型下层；然后分析长度，分别得到对于方案 k 的轿运车满载上下层的长度约束条件。

$$\begin{aligned}
 \text{下层长度约束: } & 4.71a'_{1k} + 3.715a'_{2k} + 4.73a'_{3k} \leq 19.1 \\
 & 4.71b'_{1k} + 3.715b'_{2k} + 4.73b'_{3k} \leq 24.4
 \end{aligned} \tag{式 5-5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{上层长度约束: } & 4.71a''_{1k} + 3.715a''_{2k} \leq 19.1 \\
 & 4.71b''_{1k} + 3.715b''_{2k} \leq 24.4
 \end{aligned} \tag{式 5-6}$$

最后考虑宽度，1-2 型车下层与 1-1 型车自动满足要求，需要特别考虑 1-2 型车上层



与 2-2 型车宽度限定。由于题中要求力求对称，则令 1-2 型车上层以及 2-2 型车上下层均装载两列相同的车，分别得到方案 k 各轿运车上下层对应乘用车种类与数量如表 5-2 所示。

表 5-2 各型轿运车上下层穷举方案

轿运车满载	下层	上层
	(I, II, III)	(I, II, III)
1-1 型	$(a'_{1k}, a'_{2k}, a'_{3k})$	$(a''_{1k}, a''_{1k}, 0)$
1-2 型	$(b'_{1k}, b'_{2k}, b'_{3k})$	$(2b''_{1k}, 2b''_{2k}, 0)$

通过穷举所有满足式 5-6, 5-6 约束条件的所有装载方案，得到 1-1 型，1-2 型轿运车符合空间约束的下层装载方案 36,61 种，上层装载方案 16,24 种。

### 步骤 2 上下层满载方案

要得到最优轿运车成本，就需要最少的轿运车使用数量，这必须先保证每辆轿运车满载（不能再多装任何一辆乘用车）。只要先得到各型轿运车各种满载方案，再根据成本要求和限定条件确定各方案相应轿运车数量，即可得到优化模型。引入使得方案 k 满载条件，即冗余长度不能超过最短的 II 型车，如式 5-7, 5-8 所示，筛选出满载方案。

$$\begin{aligned} \text{下层满载约束: } 19.1 - 4.71a'_{1k} - 3.715a'_{2k} - 4.73a'_{3k} &\leq 3.715 \\ 24.4 - 4.71b'_{1k} - 3.715b'_{2k} - 4.73b'_{3k} &\leq 3.715 \end{aligned} \quad (\text{式 5-7})$$

$$\begin{aligned} \text{上层满载约束: } 19.1 - 4.71a''_{1k} - 3.715a''_{2k} &\leq 3.715 \\ 24.4 - 4.71b''_{1k} - 3.715b''_{2k} &\leq 3.715 \end{aligned} \quad (\text{式 5-8})$$

结合式 5-7, 5-8 约束条件，通过编程计算，得到 1-1 型，1-2 型轿运车下层满载方案 15,21 种，上层满载方案 5,6 种。

### 步骤 3 满载方案整体归一

通过上下层的随机组合，得到 1-1 型，1-2 型轿运车各 15×5, 21×6 种满载方案。其中，1) 需要去除重复项包括：上下层组合虽然不同，但对于一辆轿运车装载各型乘用车数量总和相同，2) 需要去除劣势项包括：上下层组合虽然都满载，但求和运算以后，每种乘用车数量都不如另一种方案，表达如式 5-9, 5-10 所示。

$$\begin{aligned} a'_{1k} + a''_{1k} &\leq a'^{(2)}_{1k} + a''^{(2)}_{1k} \\ \text{1-1 型: } a'^{(1)}_{2k} + a''^{(1)}_{2k} &\leq a'^{(2)}_{2k} + a''^{(2)}_{2k} \\ a'^{(1)}_{3k} &\leq a'^{(2)}_{3k} \end{aligned} \quad (\text{式 5-9})$$

$$\begin{aligned} b'_{1k} + 2b''_{1k} &\leq b'^{(2)}_{1k} + 2b''^{(2)}_{1k} \\ \text{1-2 型: } b'^{(1)}_{2k} + 2b''^{(1)}_{2k} &\leq b'^{(2)}_{2k} + 2b''^{(2)}_{2k} \\ b'^{(1)}_{3k} &\leq b'^{(2)}_{3k} \end{aligned} \quad (\text{式 5-10})$$

最终剔除上述重复项目和完全劣势方案①，将满载方案整体归一，得到各满载方案轿运车 1-1 型 35 种，1-2 型 74 种。详见附表 I。

### 步骤 4 满载方案优化

前 3 步得到了全部的满载方案，这样的考虑是全面的，但是如果取其为优化模型的决策对象，数量过多，程序效率低下，难以找到最优解。因此，需要对上述满载方案进

一步筛选和优化。

### ① 极端条件排除

题中所给的问题一与问题二中，分别是只需 I、II 型车和只需 II、III 型车，则对于此类极端问题，可以直接排除无效的满载方案。对于问题一，只选择无 III 型车的满载方案作为备选决策变量；对于问题二，只选择无 I 型车的满载方案作为备选决策对象。

### ② 轿运车冗余率优化

对于单辆轿运车而言，冗余的空间无法利用，但对于整体运输方案而言，如果能选择冗余小的方式，运输效率必定高于冗余大的满载方案，所以通过筛选可以在不影响最优解的情况下，大大减少优化模型决策对象的个数，提高运算效率。

因此，引入衡量指标，即轿运车冗余率 R，公式如下：

$$R_i = \frac{N_i L_i - \sum l_j}{N_i \times L_i} \times 100\%, i = 1, 2, 3 \quad (\text{式 5-11})$$

其中，1-1 型，1-2 型，2-2 型轿运车装载列数 n 分别为 2,3,4。例如，就 1-1 型车而言，其空间长度为 19.1 米，装载总长为 38.2 米，在运输目标相同的情况下，当一种劣势的组合方案的冗余总长  $N_i L_i - \sum l_j$  比优势组合方案的冗余总长多出 38.2 米时，就比优势方案差了整整一辆 1-1 型车。

这里给出一个说明的例子。

例 5-1：若需要运输 80 辆 I 型乘用车，85 辆 II 型乘用车，分别采用运输方式 A 和 B 均使用 1-1 型轿运车装载。其中，A 采用了冗余率较高的满载方案 1 和 2 的组合，B 采用冗余率较低的满载方案 3 和 4 的组合，对比如表 5-3 所示。

表 5-3 冗余率高低方案比较

运输方式	满载方案	各型乘运车数量 (I, II, III)	冗余长度 $N_i L_i - \sum l_j$	冗余率 R	所需轿运车数量	富余空间
A	方案 1	(1, 8, 0)	3.770	9.92%	5	20 无
	方案 2	(5, 3, 0)	3.505	9.22%	15	
B	方案 3	(8, 0, 0)	0.520	1.37%	2	19 4 辆 I 型车
	方案 4	(4, 5, 0)	0.785	2.07%	17	

理论上单辆轿运车都不能再多装载任何一辆乘用车，但由于冗余率的差别很大，在多量装载能力比较中，冗余率低的满载方案优势就十分显著。如表 5-3 所示，在如此小需求的运输任务下，运输方式 B 采用低冗余率轿运车满载方案，不但节省出整整一辆轿运车，而且还空出了 4 辆 I 型车空间。

由此可见，轿运车冗余率 R 可以作为筛选优化轿运车满载方案的标准。实际上，因为冗余率高的满载方案即使被纳入优化模型决策变量，在寻求最优基时也会被剔除，不如在优化模型建立之前就筛选出冗余率低的方案作为模型决策对象，大大降低程序运算的工作量，提高了搜索效率。所有满载方案的冗余率排序详见附表 I。

### 步骤 5 决策对象最终确定

基于上述冗余率的筛选和极端条件的排除，可以为轿运车优化模型的决策变量选择相应满载方案。

问题一，不考虑使用 2-2 型轿运车，在无 III 型车的满载方案中，分别取 1-1 型、1-2

型轿运车冗余率最低方案作为基本方案。经过尝试，本文取冗余率最低的 8 个 1-1 型轿运车基本方案为(8,0,0), (4,5,0), (0,10,0), (7,1,0), (3,6,0), (3,6,0), (6,2,0), (2,7,0), (5,3,0)，其数量分别为  $x_i, i=1,2\cdots 8$ ；取冗余率最低的 8 个 1-2 型轿运车基本方案为(6,12,0), (9,8,0), (5,13,0), (12,4,0), (8,9,0), (4,14,0), (15,0,0), (11,5,0)，数量分别为  $y_j, j=1,2\cdots 8$ 。所以，  $x_i, y_j$  共 16 个决策变量。

问题二，不考虑使用 2-2 型轿运车，在无 I 型车的满载方案中，经过尝试，本文取 1-1 型轿运车冗余率最低的 5 个作为基本方案：(0,5,4), (0,10,0), (0,6,3), (0,7,2), (0,8,1)，其数量分别为  $x_i, i=1,2\cdots 5$ ；取 1-2 型轿运车冗余率最低的 6 个作为基本方案：(0,16,2), (0,12,5), (0,17,1), (0,13,4), (0,18,0), (0,14,3)，数量分别为  $y_j, j=1,2\cdots 6$ 。所以，  $x_i, y_j$  共 11 个决策变量。

问题三，不考虑使用 2-2 型轿运车，由于三种乘用车型都有涉及，直接分别取 1-1 型轿运车冗余率最低的 8 个作为基本方案：(4,0,4), (5,0,3), (6,0,2), (7,0,1), (8,0,0), (0,5,4), (1,5,3), (2,5,2)，其数量分别为  $x_i, i=1,2\cdots 8$ ；取 1-2 型轿运车冗余率最低的 8 个作为基本方案：(4,12,2), (5,12,1), (6,12,0), (4,8,5), (5,8,4), (6,8,3), (7,8,2), (8,8,1)，数量分别为  $y_j, j=1,2\cdots 8$ 。所以，  $x_i, y_j$  共 16 个决策变量。

综上所述，不同的乘用车运输需求决定选择不同的决策对象集。

### 5.1.2 前三问结果

题中给出 1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值。在不考虑使用 2-2 型轿运车的情况下，令轿运车的单项成本  $\alpha_1=4, \alpha_2=5$ ，分别代入前三问的运输需求量  $B^{①}=[100 \ 68 \ 0]^T$ 、 $B^{②}=[0 \ 72 \ 52]^T$ 、 $B^{③}=[156 \ 102 \ 39]^T$ 。

本文通过程序求解，问题一需要 1-1 型车 16 辆，1-2 型车 2 辆；问题二需要 1-1 型车 12 辆，1-2 型车 1 辆；问题三需要 1-1 型车 25 辆，1-2 型车 5 辆；得到详细运输计划如表 5-4，5-5，5-6 所示。

表 5-4 问题一详细运输方案

轿运车型	装载方案	决策变量	数量	下层装载方案	上层装载方案
1-1	(8, 0, 0)	$x_1$	6	(4, 0, 0)	(4, 0, 0)
1-1	(4, 5, 0)	$x_2$	4	(0, 5, 0)	(4, 0, 0)
1-1	(0,10,0)	$x_3$	2	(0, 5, 0)	(0, 5, 0)
1-1	(7, 1, 0)	$x_4$	2	(4, 0, 0)	(3, 1, 0)
1-1	(3, 6, 0)	$x_5$	2	(3, 1, 0)	(0, 5, 0)
1-2	(5,13,0)	$y_3$	1	(1, 5, 0)	(4, 8, 0)
1-2	(12,4,0)	$y_4$	1	(2, 4, 0)	(10, 0, 0)

表 5-5 问题二详细运输方案

轿运车型	装载方案	决策变量	数量	下层装载方案	上层装载方案
1-1	(0, 5, 4)	$x_5$	12	(0, 0, 4)	(0, 5, 0)
1-2	(0,12,5)	$y_2$	1	(0, 0, 5)	(0, 12, 0)

表 5-6 问题三详细运输方案

轿运车型	装载方案	决策变量	数量	下层装载方案	上层装载方案
1-1	(7, 0, 1)	$x_5$	15	(3, 0, 1)	(4, 0, 0)
1-1	(8, 0, 0)	$x_6$	1	(4, 0, 0)	(4, 0, 0)
1-1	(0, 5, 4)	$x_7$	9	(0, 0, 4)	(0, 5, 0)
1-2	(5,12,1)	$y_2$	3	(1, 4, 1)	(4, 8, 0)
1-2	(4, 8, 5)	$y_4$	1	(0, 0, 5)	(4, 8, 0)
1-2	(8, 8, 1)	$y_8$	1	(4, 0, 1)	(4, 8, 0)

### 5.1.3 结果分析

前三问的最优解是多种多样的，表 5-4，5-5，5-6 给出的均是前三问最优配送方案中的一种，但它们之所以都为最优解，是因为最终配送方案所使用的轿运车类型和数量都相同，并且成本最小。

**冗余上限验证** 若轿运车冗余长度之和小于最短的乘用车长度，说明装载方案一定最优。将最终得到的方案中所有冗余长度累加，即  $N_i L_i - \sum l_j$ ，前三问结果的冗余总长分别为 33.98，18.16，22.84，均小于装载能力最小的 1-1 型轿运车装载长度 38.2，所以都不可能再减少一辆轿运车，说明前三问结果均是最优解。

## 5.2 问题四模型建立

### 5.2.1 模型的下限

在不考虑运输路线的情况下，确定轿运车需求下限，这样才有模型建立的方向。

①**目标函数** 轿运车使用量最少，即

$$\min f = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^m y_k \quad (\text{式 5-12})$$

其中， $x_k$  为使用装载方案 k 的 1-1 型轿运车数量， $y_k$  为使用装载方案 k 的 1-1 型轿运车数量。

②**约束条件 1** 轿运车装载列总长不小于乘用车总长，即

$$N_1 L_1 \sum_{k=1}^n x_k + N_2 L_2 \sum_{k=1}^m y_k \geq \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 B_i \cdot l_j \quad (\text{式 5-13})$$

其中， $N_1 = 2$ ， $N_2 = 3$  分别为 1-1、1-2 型轿运车中装载乘用车列数， $L_i$  为轿运车长度， $B_i$  为乘用车物流需求量， $l_j$  为乘用车长度。

③**约束条件 2** 数量限制条件：1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即

$$20\% \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m y_k \geq 0 \quad (\text{式 5-14})$$

④**建立整数规划模型** 综上，得到轿运车需求下限求解模型如式 5-15 所示：

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^m y_k \\ s.t. \quad &N_1 L_1 \sum_{k=1}^n x_k + N_2 L_2 \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 B_i \cdot l_j \geq 0 \\ &20\% \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m y_k \geq 0 \\ &a_{ik}, b_{ik} \geq 0 \text{ 且为整数} \end{aligned} \quad (\text{式 5-15})$$

⑤**求解模型** 问题四给出乘用车物流需求量  $B = [166 \ 78]^T$ ，得到 1-1、1-2 型轿运车需求下限数量分别为 21，4。

## 5.2.2 成本与路径的考量

**步骤 1** 考虑轿运车使用数量

由（1）中得本次规划至少使用 1-1、1-2 型轿运车数量为 21，4。1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即使再增加轿运车，也不可能增加 1-2 型轿运车，得到准则 1。

**准则 1** 由数量限制，1-2 型轿运车至多使用 4 辆。

**步骤 2** 考虑各型轿运车单位距离成本效率差异

$$\eta_i = (N_i L_i) / p_i \quad (\text{式 5-16})$$

其中， $\eta_i$  为单位距离成本效率， $p_i$  为单位距离成本， $N_1 = 2$ ， $N_2 = 3$  分别为 1-1、1-2 型轿运车中装载乘用车列数， $L_i$  为轿运车长度， $N_i L_i$  即为对应型号轿运车装载能力。因此， $\eta_i$  越大，表明轿运车运送投资回报率越高。

题中给出，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值。不考虑使用 2-2 型轿运车，令 1-1 型、1-2 型两种轿运车的单位距离成本  $p_1 : p_2 = 4 : 5$ ，则单位距离成本效率  $\eta_1 : \eta_2 = 1 : 1.53$ ，1-2 型轿运车运送成本效率明显较高，应该尽可能多地使用，得到准则 2。

**准则 2** 优先使用 1-2 型轿运车，以降低成本。

**步骤 3** 考虑轿运车行驶距离成本差异

同型轿运车运行成本与行驶距离是成正比的，而本文仅考虑各种方案的运行总成本的相对比较，而不作出绝对成本的计算。综合考虑轿运车型号和行驶距离，给出运行总成本计算公式，即

$$P = \sum p_i \cdot S_j \quad (\text{式 5-17})$$

其中， $P$  为总成本， $p_i$  为对应型号轿运车单位距离运行成本， $S_j$  为轿运车行驶距离。位置越远的目的地， $S_j$  越大，其对应运输成本也越高，对优化问题的影响权重就越大，应该优先考虑，得到准则 3。

**准则 3** 优先满足距离远的目的地需求，以降低成本。

### 5.2.3 问题四分析与求解

目的地 A、B、C、D 与发车地 O 形成星型结构，其中，OD=160，DC=76，DA=200，DB=120。D 离 O 最近，而 DA>DB>DC，A 最远，根据准则 3，应该首先考虑规划 A，其次规划 B，然后规划 C，最后规划 D。

#### 步骤 1 求解目的地 A 配送方案

对于每个目的地的规划，模型参考前三问优化模型，但根据准则 2 和准则 1，优先使用 4 辆 1-2 型轿运车增加约束条件，即  $\sum_{k=1}^m y_k \leq 4$ 。

代入需求量  $B_A = [42 \ 31]^T$ ，解得 A 点配送方式如下：

1-2 型轿运车 4 辆，装载方案均为 (9, 8)；

1-1 型轿运车 1 辆，装载方案为 (8, 0)；

浪费空间：1 辆 II 型乘用车，B 规划中用不到；

富余空间：2 辆 I 型乘用车，作为步骤 2 的 B 规划条件。

#### 步骤 2 求解目的地 B 配送方案

与 A 规划类似，约束条件需要修改：

1) 不能使用 1-2 型轿运车，故  $\sum_{k=1}^m y_k = 0$ ；

2) 目的地 A 运送中富余 2 辆 I 型乘用车，因此需求量规划调整为  $B_B = [48 \ 0]^T$ ；解得 B 点配送方式如下：

1-1 型轿运车 6 辆，装载方案均为 (8, 0)，无富余空间和浪费空间。

#### 步骤 3 求解目的地 C 配送方案

与 A 规划类似，但  $\sum_{k=1}^m y_k = 0$ ；代入需求量  $B_C = [33 \ 47]^T$ ，解得 C 点配送方式如下：

1-1 型轿运车 9 辆，其中，8 辆装载方案为 (4, 5)，1 辆为 (2, 7)。

富余空间：1 辆 I 型乘用车，作为步骤 4 的 D 规划条件。

#### 步骤4 求解目的地D配送方案

与A规划类似，但约束条件需要修改：

$$1) \sum_{k=1}^m y_k = 0;$$

2) 目的地C运送中富余1辆I型乘用车空间，因此需求量规划调整为  $B_D = [40 \ 0]^T$ ；

解得D点配送方式如下：

1-1型轿运车5辆，装载方案均为  $(8, 0)$ 。

#### 步骤5 得出综合行车方案结论

共需要1-1型轿运车21辆，1-2型轿运车4辆，具体行车与装卸方案如图5-2所示：

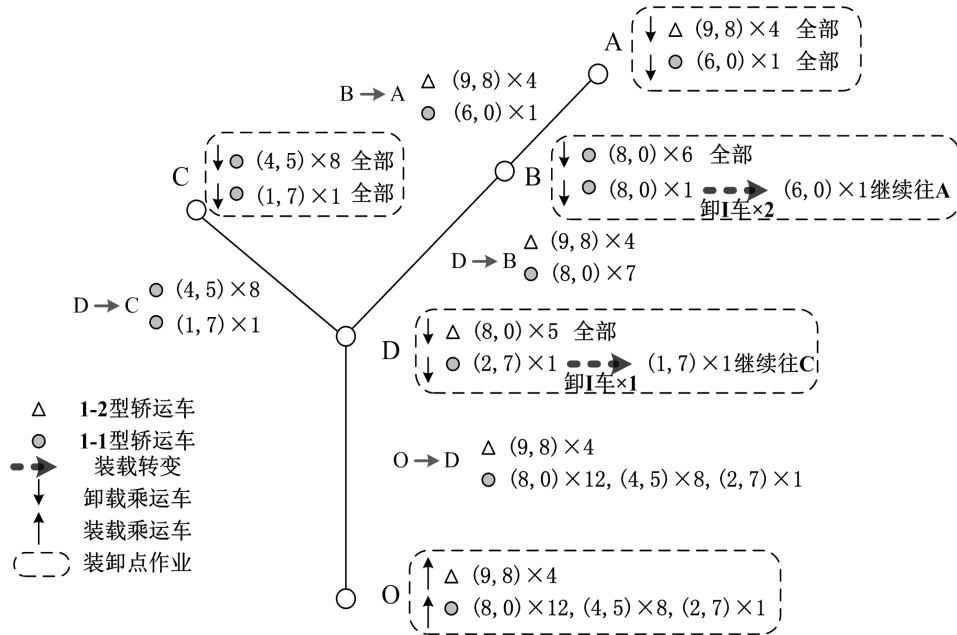


图 5-2 问题四综合行车方案

**O→D:** 1) 1-2型轿运车4辆，具体装载方案： $(9, 8) \times 4$ ；

2) 1-1型轿运车21辆，具体装载方案：

$(8, 0) \times 12, (4, 5) \times 8, (2, 7) \times 1$ ；

**D卸车:** 1) 全部卸下，原地待命：1-1型轿运车5辆，对应装载方案  $(8, 0) \times 5$ ；

2) 部分卸下，继续前行：1-1型轿运车1辆，对应装载方案  $(2, 7) \times 1$ ，

卸下1辆I型乘用车，装载方案变为  $(1, 7) \times 1$ ，继续前往C点；

**D→C:** 1-1型轿运车9辆，具体装载方案： $(4, 5) \times 8, (1, 7) \times 1$

**D→B:** 1) 1-2型轿运车4辆，具体装载方案： $(9, 8) \times 4$ ；

2) 1-1型轿运车21辆，具体装载方案： $(8, 0) \times 7$

**B卸车:** 1) 全部卸下，原地待命：1-1型轿运车6辆，对应装载方案  $(8, 0) \times 6$ ；

2) 部分卸下，继续前行：1-1型轿运车1辆，对应装载方案  $(8, 0) \times 1$ ，

卸下2辆I型乘用车，装载方案变为  $(6, 0) \times 1$ ，继续前往A点；

**B→A:** 1) 1-2型轿运车4辆，具体装载方案： $(9, 8) \times 4$ ；

2) 1-1型轿运车1辆，具体装载方案： $(6, 0) \times 1$

**A、C卸车:** 全部卸下，原地待命

每辆轿运车具体上下层装载方案如表5-7所示，其中，中间停靠地代表此处有卸车

任务，具体卸车方法参考图 5-2。

表 5-7 问题四详细行车方案

轿运车 类型	相同装载方 式的车辆数	上层 I 型 乘用车数	上层 II 型 乘用车数	下层 I 型 乘用车数	下层 II 型 乘用车数	中间 停靠地	目的地
1-1	1	4	0	4	0	B	A
1-2	4	4	8	5	0	--	A
1-1	6	4	0	4	0	--	B
1-1	8	0	5	4	0	--	C
1-1	1	0	5	2	2	D	C
1-1	5	4	0	4	0	--	D

#### 5.2.4 结论最优验证

①**数量下限验证** 验证模型中使用轿运车数量最少。在确定轿运车需求下限时，本文考虑了轿运车装载列总长不小于乘用车总长，从而得到问题四至少使用 1-1、1-2 型轿运车数量为 21 和 4，共 25 辆。而最终得到的行车路线方案结论已达到了此下限，已达到轿运车数量最少，并使用了最大限额的 1-2 型轿运车。

②**冗余上限验证** 若轿运车冗余长度之和小于最短的乘用车长度，说明装载方案一定最优。将最终得到的行车路线方案中所有冗余长度累加，得到冗余总长为 23.37，小于装载能力最小的 1-1 型轿运车装载长度 38.2，所以不可能再减少一辆轿运车，说明已是最优装配方案。

③**成本最低验证** 验证模型中运行成本最低。当轿运车使用数量最少，要使得运行成本最低，单位距离成本效率  $\eta_i$  最高的 1-2 型轿运车应该跑最远的距离。而最终得到的行车路线方案结论，4 辆 1-2 型轿运车均运往最远目的地 A，说明这已是最优路线方案。综上，行车路线方案最优结论得以验证。

#### 5.2.5 灵敏度分析

问题四模型的基础仍然是前三问模型，取轿运车的单位距离成本  $p_1 : p_2 = 4 : 5$ ，而  $p_i$  在题中没有给出定量描述，只给出  $p_1 < p_2$ ，并且差别不是很大。所以，需要对  $p_1$  与  $p_2$  比值变化的情况下，分析最优解的变化。本优化模型目标是节约成本，其核心问题是在路线规划中尽可能多使用单位距离成本效率高的轿运车，因此，只要模型中保证  $\eta_1 < \eta_2$  条件不变，即保证 1-1 型车的单位距离成本效率小于 1-2 型车，那么模型的最优方案不会改变。

由  $\eta_i = (N_i L_i) / p_i$ ，得  $p_i = (N_i L_i) / \eta_i$ ，代入  $N_i, L_i$ ，得到  $p_1 : p_2 = 1 : 1 \sim 1 : 1.916$  之间，轿运车数量和装载方案都不会改变，其行车路线规划也不会改变，模型最优解亦不变。



## 5.3 问题五模型建立

### 5.3.1 轿运车归并与拆分

#### (1) 轿运车归并

1-1 型轿运车的宽度和高度在性质上是一样的（宽度满足所有乘用车放置要求，上下层高度属性情况一致），因此所有 1-1 型轿运车可以归并。

对于 5 号（宽 2.8m）和 10 号（宽 2.7m）1-2 型轿运车，因为后文乘用车归并处②通过计算表明可以将宽度为 1.7~1.75m 之间的乘用车等同于大于 1.75m 看待，而  $[(1.7\sim 1.75\text{m})+0.1\text{m}]\times 2-0.1\text{m}=(3.5\sim 3.6\text{m})$ ，所以可以将两种 1-2 型轿运车归并。在长度上也是接近的，可以等同看待

2-2 型轿运车只有一种，不需要归并。

#### (2) 轿运车拆分

归并之后的轿运车仍然比较复杂，轿运车的每一层和每层的列数有差别。考虑到实际上每一层或者列能够在宽度和高度上能够放置的乘用车是具有一致性的，因此这里将作出如下定义。

**定义 1 板：**所有型号的轿运车进行上下层、左右列（双排的）的拆分，使得所有轿运车拆分为仅能存放一条乘用车队列的列，这样的列称为“板”。

#### (3) 板的归并

**步骤①** 所有 1-1 下层、两种 1-2 上层和所有 1-1 上层能够满足所有乘用车的宽度要求，但是 1-1 上层对于乘用车的高度要求上是不一致的，但是 E、A、B、C、D 五个各自仅有 24、22、43、35、32 辆高度超过 1.7m 的乘用车需要考虑，这与各地车乘用车需求总量 292、211、252、235、217 相比，百分比仅有 7.53%、20.38%、13.49%、14.89%、14.75%，故可在最后对于方案进行调整。

调整方法为：

**a.**1-1 上层的不符合要求的乘用车与 1-1 下层和 1-2 下层中能够摆放在 1-1 上层的乘用车（高度不超过 1.7m）进行调换。

**b.**若 1-1 下层和 1-2 下层满足调换要求的乘用车数量不够，增加 1-1 下层和 1-2 下层。

**步骤②** 因为两种 1-2 型上层的宽度分别为 3.6m、3.5m、唯一一种 2-2 上层的宽度为 3.5m，故此把它们分别拆分成两块板之后归并为一类。板的归并结果如下

A 板：1-1 下层  $\cong$  1-1 上层  $\cong$  1-2 下层，共有 6 种规格，分别为 18.2m、19m、21m、22m、24.3m、23.7m。

B 板：1-2 上层  $\cong$  2-2 上层  $\cong$  2-2 下层，共有 2 种规格，分别为 19m、23.3m。

### 5.3.2 乘用车归并

乘用车有 45 种类型，每种类型的长度、宽度、高度都不一致。对乘用车归并的实际上必须参考“板”规格。

(1) 根据前四问经验，轿运车每层的空隙距离都在 0.5m 以上，而根据每辆乘用车车长，平均每层车可以装载 4~5 辆乘用车，若乘用车长度很小（小于 3.6），则可以装 6 辆。所以对大于 3.6m 的乘用车可以适当增加长度，与其他大于 3.6m 乘用车归为一类。

**准则①：**长度大于 3.6m 的乘用车可通过适当增加长度与其他乘用车归并。

(2) 根据粗略计算，宽度小于 1.7m 的乘用车超过了 1-2 型上层以及 2-2 型轿运车的运载量，不用再考虑宽度在 1.7~1.75m 之间的乘用车可以放在 5 号但不能放在 10 号

1-2型乘用车上层的问题。因此,可以将宽度为1.7~1.75m之间的乘用车等同于大于1.75m的情况,将其放置在1-1型上层或1-2型下层。实际上,由于1-2型上层只放1.7m以下的,两种1-2型乘用车在宽度上是等效的。

**准则②: 1.7~1.75m 之间的乘用车等同于大于 1.75m 的乘用车。**

(3) 高度超过1.7m的乘用车并不多,一共只有89辆,而1-1型和1-2型轿运车数量在100辆以上,所以即使一辆轿运车下层放置一辆超过1.7m的乘用车也是可行的。因此,只需要将超过1.7m的乘用车与一般乘用车等同看待,最后将高度不满足的调至所在层为轿运车下层即可。而实际上,前文轿运车的归并已经将剔除了轿运车的高度限制。

**准则③: 解除所有乘用车的高度限制。**

根据上述准则,乘用车归并成24中规格如下:(被吞并项的规格记为归并结果)

表 5-8 乘用车规格归并

归并结果	吞并项	归并结果	吞并项
1	11,12,26,32,35,36	29	40
3	8	30	--
5	--	31	--
10	--	33	4
13	21,9,6	34	--
14	18	37	--
16	--	38	--
19	15,17	39	27,7
20	--	42	22
23	28,41	43	2
24	--	44	--
25	--	45	--

实际上,在D点时已经没有1-2型车和2-2型车了,所以我们做出更加针对性的乘用车种类合并,在上表的基础上做如下改变:3→31,34→45,33→25,7→8(表示归并到)。

### 5.3.3 成本考量与路径规划

(1) 问题五相比问题四,在乘用车和轿运车的规模和复杂性增加了很多。但是方案规划的所在的路线图是一致的。轿运车的成本的规则也是一致的,所以问题四中5.2.2的准则1、2、3同样适用于问题五。

(2) 特别指出的是,在第四问的路径规划中,提出了各个目的地的顺序规划策略。该策略存在一个“捎带”的概念,就是较远的目的地可以把富余空间装上途中经过地点需要的乘用车,使得途中地点的运输压力减轻。在第五问的路径规划中,不存在这个问题。

“捎带”最多捎带一个轿运车能够装载的乘用车,即8~12辆。由于第五问问题规模的扩大,这个数量不需要在考虑。实际上在问题具体分析时,只需要调换一辆较短的车,减少富余空间。由于没有“捎带”,环形网络可以直接简化,路线图转化为图5-3。

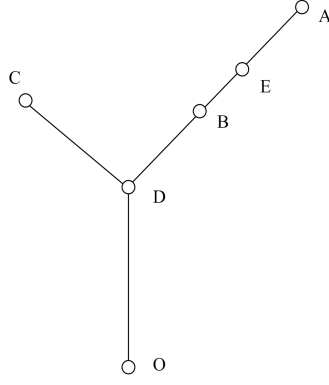


图 5-3 问题四路线图简化

### 5.3.4 单目的地方案规划

#### (1) 下限求解

下限求解的过程可以参考本文第四问 5.2.2。

①**目标函数** 轿运车使用量最少，即

$$\min f = \sum_{i=1}^n z_i \quad (\text{式 5-18})$$

其中， $z_i$  表示第  $i$  ( $i=1,2,\dots,10$ ) 类型的轿运车的数量。

②**约束条件 1** 考虑按冗余长度平均每车 0.5m 来设置最小轿运车需求总长。轿运车装载列总长不小于乘用车总长，即

$$\sum_{i=1}^{10} N_i \cdot (L_i - 0.5) \cdot z_i \geq \sum_{j=1}^{45} B_j \cdot l_j \quad (\text{式 5-19})$$

$N_i$  表示第  $i$  ( $i=1,2,\dots,10$ ) 类型的轿运车的数量， $L_i$  表示第  $i$  ( $i=1,2,\dots,10$ ) 类型的轿运车长度， $B_j$ 、 $l_j$  分别为该目的地的第  $j$  ( $j=1,2,\dots,45$ ) 车型乘用车需求量和长度。

③**约束条件 2** 20%数量限制条件：1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即

$$20\% \cdot \sum_{k=1, k \neq 5, k \neq 10}^n z_k - \sum_{k=5, 10} z_k \geq 0 \quad (\text{式 5-20})$$

④**建立整数规划模型** 综上，得到轿运车需求下限求解模型如式 5-21 所示：

$$\begin{aligned}
\min f &= \sum_{i=1}^n z_i \\
s.t \quad &\sum_{i=1}^{10} N_i \cdot (L_i - 0.5) \cdot z_i \geq \sum_{j=1}^{45} B_j \cdot l_j \\
&20\% \cdot \sum_{k=1, k \neq 5, k \neq 10}^n z_k - \sum_{k=5, 10} z_k \geq 0
\end{aligned} \tag{式 5-21}$$

**⑤求解模型** 这里给出一个启发性求解思路：提高长度大的轿运车的数量，即尽可能多地使用效率高的轿运车。

**具体的求解方式：**

- 1) 对轿运车的长度进行排序，排在前面的级别高
  - 2) 将级别高的（最长的）轿运车数量定为极限值（直到不能再增加一辆轿运车）
  - 3) 考虑次一级别轿运车数量，不行则减少上级轿运车数量重做该步。
  - 4) 重复 3 直到所有轿运车数量都确定。
  - 5) 上述过程均需满足 20%约束，不满足则减少本级别轿运车数量，重做该步。
- 最后得到的结果如下所示。

表 5-9 各地轿运车数量下限

型号	1-2 型	1-1 型	1-1 型 (24.3)	1-1 型 (22)	1-1 型 (21)	1-1 型 (19)	1-1 型 (18.3)
数量	18	5	22	15	20	21	12

## （2）决策架构

由于问题五模型规模的扩大，以类似前四问方式构建的决策对象的数量过于庞大。其表述向量维数（45 维）过长，也不能够对于其中的优势对象做出筛选。因此问题五只能重新规划决策对象和决策变量。

基于 5.3.1 轿运车归并和 5.3.2 乘用车归并，决策对象定为每种类型的乘用车，决策变量定为决策对象的数量，即  $z_{ij}$  表示第  $i$  块板上存放第  $j$  类型的乘用车数量。

## （3）决策对象

由于第五问模型规模的扩大，以类似前四问方式构建的决策对象的数量过于庞大。其表述向量维数（45 维）过长，也不能够对于其中的优势对象做出筛选。因此第五问只能重新规划决策对象和决策变量。

基于 5.3.1 轿运车归并和 5.3.2 乘用车归并，决策对象定为每种类型的乘用车，决策变量定为决策对象的数量，即  $z_{ij}$  表示第  $i$  块板上存放第  $j$  类型的乘用车数量。

## （4）优化策略

- ①按照准则 3 给目的地分配用车类型，实行优者全占。
- ②按照先 b 板后 a 板的顺序安排乘用车。因为 b 板类型少，很可能出现运输类型不足的情况，此时调整未装下的乘用车至 a 板装载。
- ③根据 b 板所求方案调节至 a 板的乘用车数量。求解 a 板装载方案。根据轿运车的实际空闲长度，调节部分车长，尽量使轿运车辆数相同时车辆总长最小。

(5) 根据 (3) 的策略编程得到所有车的调配方案。

### 5.3.5 问题五结果

由于问题规模实在过于庞大，经过程序运行时间过于冗长。最后得到五个目的地对于轿运车的需求情况，如表所示。详细的每辆轿运车的装载方案表述详见附录附表 II。最后总共需要 118 辆轿运车，与前文计算的下限 113 辆轿运车的差距还是比较小的，从一定程度上佐证了本模型求出的结果是比较好的解。

从轿运车剩余上来看，6 号 1-1 型轿运车大量闲置，这是其长度小 (18.2m) 装载能力差导致的结果。另外，10 号 1-2 型轿运车剩余是 20% 约束导致的结果。

实际上，部分轿运车之间具有相似性，所以表中的数字是可以调整的。

表 5-10 各地轿运车需求

轿运车 编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	3	12	3	3	0	3	0	0	3
B	14	0	0	4	0	0	0	0	0	4
C	6	0	1	8	0	0	0	2	5	1
D	0	13	0	0	0	0	1	14	0	0
E	0	0	9	0	7	2	0	0	0	0
总和	20	16	22	15	10	2	4	16	5	8
剩余	1	2	0	0	0	23	0	0	0	7

## 六、模型的评价与改进

### 6.1 模型评价

#### 6.1.1 模型优点

(1) 关于决策对象的建立。本文采取穷举单层满载方案→上下层归一剔除→整体归一剔除→极端条件排除→冗余率筛选的步骤建立的决策对象。该决策对象本质是各型号轿运车装满乘用车的所有方案，其实质是把轿运车和乘用车之间的宽度约束和高度约束暗含其中。这个优点简化了轿运车和乘用车之间的数量约束的建立（即能不能装下的问题），使得整个模型的表述都变得简洁简单。

(2) 关于前三问求解方式。本文基于生产实际的考虑，提出了生产实际的两种要求，即快速性和全面性。由于实际生产中，会有快速决策和需要更多决策方案的考量，本文给出快速提供最优解和提供很多最优解的两种方式。

(3) 轿运车单位距离成本效率。从轿运车成本效率角度分析成本，能够定量描述轿运车的运输投资回报率，一方面可以直接作为规划的准则，另一方面可以用于分析最优模型的灵敏度。

(4) 优先满足远距离目的地准则的确立。该准则实际上是一个启发性的策略，使得所有目的地的全局最优问题转化为按目的地的顺序分步优化，问题的规模得以降低，但是又不会对于最优解造成影响。

6.1.2 模型缺点

- (1) 由于选取的决策变量并不包含所有的满载方式，最后给出的前三问结论并不是所有的最优解。另外，极端条件排除和冗余率优化的过程使得一些满载方案被排除。由于决策对象并不是真正的轿运车运输方案，中间相差松弛变量，因此有可能存在运输方案不是本模型的最优解，但是能够达到和最优解一样的效果。
- (2) 问题四、五模型是启发性思想得到的分步规划，虽然工作量大大削减，但通用性不强。

6.2 模型改进

- (1) 本文希望后续构建轿运车数量和运输路径长度与运输成本之间的详细关系，形成更加严谨的量化考核。
- (2) 对于多种乘用车和轿运车的类型合并形成系统性的策略，增加模型的普适性效果。

参考文献

[1] Wei Li, Wen Qi, Huang, Dong Chen, Jiang, XiangLong Liu. A heuristic algorithm for cube packing with time schedule[J]. Science in China Series F: Information Sciences.2010 (1).

[2] A Bricklaying Best-fit Heuristic Algorithm for The Orthogonal Rectangle Packing Problem[A]. Proceedings of 2010 The 3rd International Conference on Computational Intelligence and Industrial Application(Volume 2)[C]. 2010(2)

[3] Ruo-Yang Liu,Huai-Bao Lu, Jin-Chuan Cui, Xiao-Bing Li. Studies on the Heuristic Algorithm for the N-Vehicle Exploration Problem (NVEP)[J]. 2011(8)

[4] 度巍，曾飞.基于 LINGO 的优化问题动态规划法求解.电脑知识与技术 [J].2014(4).743-746.

[5] 瞿勇，袁昊劼，黄登斌.LINGO 软件在数学建模中的典型应用举例.计算机光盘软件与应用[J].2014(5).63-64.

[6] 王国鹏，张立伟，刘丽. 基于整数规划的调度计划算法研究. 科技与企业 [J].2014(7).170-172.

[7] 赵中凯，梅国建，李洪广. 基于启发式拟人算法的三维装箱问题求解. 物流技术 [J].2013(3).

附录 数据表

附表 I 前三问模型各满载方案按照冗余率排序

轿运车	I 型 乘用车	II 型 乘用车	III 型 乘用车	冗余 长度	冗余率	轿运车	I 型 乘用车	II 型 乘用车	III 型 乘用车	冗余 长度	冗余率
1-1	4	0	4	0.44	0.0116	1-2	3	14	1	2.33	0.0613
1-1	5	0	3	0.46	0.0121	1-2	4	14	0	2.35	0.0618
1-1	6	0	2	0.48	0.0126	1-2	10	0	5	2.45	0.0645
1-1	7	0	1	0.5	0.0132	1-2	11	0	4	2.47	0.065
1-1	8	0	0	0.52	0.0137	1-2	12	0	3	2.49	0.0655
1-1	0	5	4	0.705	0.0186	1-2	13	0	2	2.51	0.0661

1-1	1	5	3	0.725	0.0191	1-2	14	0	1	2.53	0.0666
1-1	2	5	2	0.745	0.0196	1-2	15	0	0	2.55	0.0671
1-1	3	5	1	0.765	0.0201	1-2	10	5	1	2.795	0.0736
1-1	4	5	0	0.785	0.0207	1-2	11	5	0	2.815	0.0741
1-1	0	10	0	1.05	0.0276	1-2	2	10	5	2.98	0.0784
1-1	3	1	4	1.435	0.0378	1-2	3	10	4	3	0.0789
1-1	4	1	3	1.455	0.0383	1-2	4	10	3	3.02	0.0795
1-1	5	1	2	1.475	0.0388	1-2	5	10	2	3.04	0.08
1-1	6	1	1	1.495	0.0393	1-2	6	10	1	3.06	0.0805
1-1	7	1	0	1.515	0.0399	1-2	7	10	0	3.08	0.0811
1-1	0	6	3	1.72	0.0453	1-2	2	15	1	3.325	0.0875
1-1	1	6	2	1.74	0.0458	1-2	3	15	0	3.345	0.088
1-1	2	6	1	1.76	0.0463	1-2	10	1	4	3.465	0.0912
1-1	3	6	0	1.78	0.0468	1-2	11	1	3	3.485	0.0917
1-1	2	2	4	2.43	0.0639	1-2	12	1	2	3.505	0.0922
1-1	3	2	3	2.45	0.0645	1-2	13	1	1	3.525	0.0928
1-1	4	2	2	2.47	0.065	1-2	14	1	0	3.545	0.0933
1-1	5	2	1	2.49	0.0655	1-2	8	6	2	3.77	0.0992
1-1	6	2	0	2.51	0.0661	1-2	9	6	1	3.79	0.0997
1-1	0	7	2	2.735	0.072	1-2	10	6	0	3.81	0.1003
1-1	1	7	1	2.755	0.0725	1-2	2	11	4	3.995	0.1051
1-1	2	7	0	2.775	0.073	1-2	3	11	3	4.015	0.1057
1-1	1	3	4	3.425	0.0901	1-2	0	16	2	4.3	0.1132
1-1	2	3	3	3.445	0.0907	1-2	1	16	1	4.32	0.1137
1-1	3	3	2	3.465	0.0912	1-2	2	16	0	4.34	0.1142
1-1	4	3	1	3.485	0.0917	1-2	8	2	5	4.44	0.1168
1-1	5	3	0	3.505	0.0922	1-2	9	2	4	4.46	0.1174
1-1	0	8	1	3.75	0.0987	1-2	10	2	3	4.48	0.1179
1-1	1	8	0	3.77	0.0992	1-2	11	2	2	4.5	0.1184
1-2	4	12	2	0.32	0.0084	1-2	12	2	1	4.52	0.1189
1-2	5	12	1	0.34	0.0089	1-2	13	2	0	4.54	0.1195
1-2	6	12	0	0.36	0.0095	1-2	0	12	5	4.97	0.1308
1-2	4	8	5	0.99	0.0261	1-2	1	12	4	4.99	0.1313
1-2	5	8	4	1.01	0.0266	1-2	2	12	3	5.01	0.1318
1-2	6	8	3	1.03	0.0271	1-2	0	17	1	5.315	0.1399
1-2	7	8	2	1.05	0.0276	1-2	1	17	0	5.335	0.1404
1-2	8	8	1	1.07	0.0282	1-2	8	3	4	5.455	0.1436
1-2	9	8	0	1.09	0.0287	1-2	9	3	3	5.475	0.1441
1-2	4	13	1	1.335	0.0351	1-2	0	13	4	5.985	0.1575
1-2	5	13	0	1.355	0.0357	1-2	1	13	3	6.005	0.158
1-2	10	4	2	1.78	0.0468	1-2	0	18	0	6.33	0.1666
1-2	11	4	1	1.8	0.0474	1-2	6	4	5	6.43	0.1692

1-2	12	4	0	1.82	0.0479	1-2	7	4	4	6.45	0.1697
1-2	4	9	4	2.005	0.0528	1-2	8	4	3	6.47	0.1703
1-2	5	9	3	2.025	0.0533	1-2	0	14	3	7	0.1842
1-2	6	9	2	2.045	0.0538	1-2	6	5	4	7.445	0.1959
1-2	7	9	1	2.065	0.0543	1-2	7	5	3	7.465	0.1964
1-2	8	9	0	2.085	0.0549	1-2	6	6	3	8.46	0.2226
1-2	2	14	2	2.31	0.0608						

附表 II 问题五最优解

表 II-1 E 地-10 号车方案

轿运车	乘用车	I 车	I 车	II 车	II 车	III 车	III 车	IV 车	IV 车	V 车	V 车	VI 车	VI 车	VII	VII
序号	车	1 列	2 列	1 列	2 列	1 列	2 列	1 列	2 列	1 列	2 列	1 列	2 列	1 列	2 列
10 号车 上层 (两列)	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	0
	5	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	3	2	2	2	0	0	0	0	1
	20	3	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	29	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	1
	30	0	0	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	3
	34	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3	0	0
	39	2	2	2	2	0	0	3	3	3	2	0	0	4	0
10 号车 下层 (单列)	37	2		0		0		0		0		0		0	
	38	0		3		2		0		0		0		0	
	13	0		0		0		2		2		2		2	
	42	0		0		0		0		0		0		0	
	1	0		0		0		3		3		3		3	
	25	0		0		3		0		0		0		0	
	43	3		2		0		0		0		0		0	

表 II-1 E 地-3 号车方案

轿运车	乘用车	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII 车	VIII 车	IX 车
型号										
3 号车 上层	10	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0
	16	0	0	0	0	0	0	2	3	0
	13	0	3	0	0	0	0	0	2	3
	42	0	0	0	0	0	0	0	0	2



	1	0	0	2	3	3	3	0	0	0
	25	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	23	0	0	3	0	0	0	0	0	0
	19	0	0	0	2	2	2	0	0	0
	24	0	2	0	0	0	0	0	0	0
3 号车 下层	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	3	2
	13	0	0	2	2	2	2	0	0	0
	1	0	3	0	0	0	0	0	0	2
	45	3	0	0	0	0	0	3	0	0
	25	2	2	0	0	0	0	0	2	0
	23	0	0	3	3	3	3	2	0	0

表 II-1 E 地-2 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车
	37	3	0
2 号车上层	3	0	2
	42	0	2
2 号车下层	3	2	2
	42	2	2

表 II-2 D 地-1 号车方案

轿运	乘用	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII 车	VIII	IX 车	X 车	XI 车	XII 车	XIII
	5	2	3	5	5	5								
	20	3	2											
1 号车	39								2	2	2	2	4	4
上层	14										1	2		
	13						4	4						
	1								2	2	1			
	31			2	2	2	2							
1 号车	16		2											
下层	14	2										2	2	2
	13							4	4	4	4			

42	2											2	2	2
1		2	2	2	2	2								

表 II-2 D 地-7 或者 8 号车方案

轿运	乘用	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII	VIII	IX 车	X 车	XI 车	XII	XIII	XIV	XV
	29	2	2	2	2	2	2									
7 号	30							2	3							
或 8	10							3								
号上	39						2		2							
层	31	3	3	3	3	3	1									3
	25												4	4	4	
	23									4	4	4				
	5									1						
	37														3	3
	14															1
	13														2	
7 号	42															1
或 8	1							4	4							
号下	45		2	4	4	4	2									
层	25	4	2													
	23													1		
	19												2			
	43									2	1	4	1			
	24										3					
	44									1						

表 II-3 C 地-9 号车方案

轿运车	乘用车	I 车 1 列	I 车 2 列	II 车 1	II 车 2	III 车 1	III 车 2	IV 车 1	IV 车 2	V 车 1	V 车 2
	5			2	2						
9 号车	20	2	2								
上层	29	3	3	3	3						
(两列)	14					2	2	2	2	2	2

	34				2	2	2	2	2	2	2
	5								2		
9 号车	20										3
下层	29										2
(两列)	30					3	4	4	3		
	39			4	3	1					
	3	4	4	4	1						

表 II-3 C 地-5 或 10 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车 1 列	I 车 2 列
5 号或 10 号	5		1
上层	29	1	
(两列)	30	5	5
5 号或 10 号	16	2	
下层	45	3	

表 II-3 C 地-3 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车
	13	3
3 号车上层	24	2
	13	3
3 号车下层	24	2
	44	

表 II-3 C 地-7 或 8 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车
7 号或 8 号	13		4
车上层	42	4	
	37		0
7 号或 8 号	10		0
车下层	38		1

3	2
13	1
1	1
45	3

表 II-3 C 地-4 号车方案

轿运车	乘用车	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII 车	VIII 车
4 号 上层	37	2	2					3	3
	13					4	4		
	1	3	3						
	45								
	25			1	4				
	23			3					
	19							2	2
4 号车 下层	37	3	3	3				1	
	10					4		1	
	38				3			1	5
	3						5	1	
	16				2				
	13							1	
	1					1			
	23		1	2					
	19	2	1						

表 II-3 C 地-1 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车
1 号车上层	1					4	4
	45				3		
	25	4	4	4	1		
1 号车下层	13				4	4	4
	1	4	4	3			

表 II-4 B 地-5 号车方案

轿运车	乘用车	I 车 1 列	I 车 2 列	II 车 1 列	II 车 2 列	III 车 1 列	III 车 2 列	IV 车 1 列	IV 车 2 列
	5		3	3	2				
	14					2	5	3	1
5 号车	20	3						0	
上层	29	1			3			1	0
(两列)	30		1	1				1	0
	34					2			
	39	2	2	2	1				4
5 号车	38	2		2					
下层	13					2		2	
(单列)	1					3		3	
	25	3		3					

表 II-4 B 地-1 号车方案

轿运	乘用	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII 车	VIII	IX 车	X 车	XI 车	XII 车	XIII	XIV
	37	2	2												
	3	0	0	2	2								2		
	16													2	2
1 号	13					2	2	2			3	4			
车上	42								3	3					
层	1			1	1										
	45			1	1								1		
	25					2	2	2							
	23	2	2	0	0				1	1	1		1	2	2
	3													2	
	16														1
1 号	13	2	2	2	2										1
车下	42									1			2		
层	1					2	2	2	2	2	4	4	2		
	45				1	2	2	2	2	1					
	25	2	2	2	1										
	23													2	2

表 II-4 B 地-7 或 8 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车
7 号或 8 号	43	2	4
上层	24	2	
7 号或 8 号	19	1	4
下层	43	3	

表 II-4 B 地-4 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车
4 号上层	16	2	2
	1	2	2
4 号下层	38		3
	3	5	2

表 II-5 A 地-10 号车方案

轿运	乘用	I 车 1	I 车 2	II 车 1	II 车 2	III 车 1	III 车 2	IV 车 1	IV 车 2	V 车 1	V 车 2	VI-1	VI-2
	3	1	1									5	5
10 号	5		2	3	3	3					1		
车上	14			3	3	3	2	2	2	2	3		
层	20	3											
(两列)	29		3										
	39	2					3	3	3	3	1		
10 号	13					3		3		3		2	
车下	42	3		3		2							
层	1	2		2								3	
	45							2		2			

表 II-5 A 地-3 号车方案

轿运	乘用	I 车	II 车	III 车	IV 车	V 车	VI 车	VII 车	VIII 车	IX 车	X 车	XI 车	XII 车
	1	2	2	2	2	2	2	2	2			2	2
3 号车	45									3	2		
上层	25										3	3	3
	23	3	3	3	3	3	3	3	3	2			

	13	2								
3 号车	1		3	3	3	3	3	3	3	3
下层	19	3								
	43		2	2	2	2	2	2	2	

表 II-5 A 地-2 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车	III 车
2 号车上层	13	4	4	4
2 号车下层	38			1
	13	4	4	

表 II-5 A 地-4 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车	III 车
	10		3	3
4 号车上层	3	5		
	42		2	2
	37			
	10			
4 号车下层	38	2	2	3
	3			
	16	3	3	2

表 II-5 A 地-7 或 8 号车方案

轿运车型号	乘用车	I 车	II 车	III 车
7 或 8 号车	25			4
上层	19	4	4	
7 或 8 号车	25	4		1
下层	24		4	3