

# 全国第二届部分高校研究生数模竞赛



题 目                      空中加油问题的递推模型与调度策略 （B 题）

---

## 摘                      要：

本文首先对空中加油问题进行了分析,提取了相关性质,在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型,文中提出了一种启发式搜索算法。该算法计算复杂度低,适用性好。对应于辅机是否可以多次起飞,该算法分为两子算法。对这两种不同情况下的具体问题,本文设计了相关的优化函数。所有算法都在计算机中运行,并得到了相应结果。

值得指出的是,本文提出的启发式搜索算法十分高效。对于问题 1 和问题 2,该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3,问题 4,问题 5,该算法所得解逼近最优调度策略。

参赛队号    1002

参赛密码    _____ (由组委会填写)
---------------------------

# 空中加油问题的递推模型与调度策略 (B 题)

**摘要：**本文首先对空中加油问题进行了分析,提取了相关性质,在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型,文中提出了一种启发式搜索算法。该算法计算复杂度低,适用性好。对应于辅机是否可以多次起飞,该算法分为两子算法。对这两种不同情况下的具体问题,本文设计了相关的优化函数。所有算法都在计算机中运行,并得到了相应结果。

值得指出的是,本文提出的启发式搜索算法十分高效。对于问题 1 和问题 2, 该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3, 问题 4, 问题 5, 该算法所得解逼近最优调度策略。

## 1. 问题描述

对飞机进行空中加油,可以大大提高其直航能力。为了简化问题,可作如下假设。设  $A$  为空军基地,基地有一架作战飞机(简称主机)和  $n$  架加油机(简称辅机)。主机与辅机的速度和单位时间的耗油量均相同且为常数,油箱装满油后的最大航程均为  $L$  (公里)。辅机可以对主机加油,辅机之间也可以相互加油。今主机要执行某作战任务(如侦察或空投),所有飞机在完成自身的任务后均要求返回基地。

主机的最大作战半径(简称作战半径)是指主机在  $n$  架辅机的协助下所能飞到的(并安全返回)离基地  $A$  的最远距离。

假设飞机垂直起飞、垂直降落、空中转向、在地面或空中加油的耗时均忽略不计,每架飞机只能上天一次,求取  $r_n$ 。

若每架辅机可以多次上天,辅机从机场上空降落及在地面检修、加油、再起飞到机场上空的时间相当于飞行  $L/12$  的时间,飞机第一次起飞、转向、在空中加油的耗时仍忽略不计,讨论作战半径。

若另有两待建的空军基地  $A_1, A_2$ , 有  $n$  架辅机,主机从基地  $A$  起飞,向一给

定的方向飞行，必须在  $A$  降落，辅机可在任一基地待命，可多次起飞，且可在任一基地降落。讨论基地选址和作战半径。

设  $ABCD$  为矩形， $AB = 4L$ ， $AD = 2L$ ， $A, B, D$  为三个空军基地，主机从  $A$  起飞，到  $C$  执行任务（执行任务时间仍忽略不计）再返回  $A$ 。假设辅机起飞、降落的基地可任意选择，要求按最快到达并返回和最少辅机架数两种情况给出的作战方案。

## 2. 求解结果

在此，在计算机上运行文中提出的算法，得到结果如下。

为表述方便，以长度  $L$  为单位长度。

### 2. 1 问题 1 与问题 2

此时每架辅机只能飞行一次，该算法所求解为最优解。求解结果如下：

$$r_1 = 0.66667,$$

$$r_2 = 0.83333$$

$$r_3 = 0.91667$$

$$r_4 = 1$$

$$r_5 = 1.0556$$

$$r_6 = 1.1111$$

$$r_7 = 1.1611$$

$$r_8 = 1.2111$$

$$r_9 = 1.2444$$

$$r_{10} = 1.2778$$

当  $n=20$  时，作战半径首次达到 1.5， $r_{20}=1.5093$ .

可以证明，当  $n \rightarrow \infty$ ， $r(n) \rightarrow \infty$ 。（可证  $n$  小于  $r_n$  的某一对数，限于篇幅，略去此证明）

## 2. 2 问题 3

该算法所求解为近似最优解，其值小于或等于最优作战半径。也即该解不一定最优，但离最优解很近。

$$r_1=0.83333$$

$$r_2=1$$

$$r_3=1.1$$

$$r_4=1.1944$$

$$r_5=1.2659$$

$$r_6=1.2667$$

$$r_7=1.3889$$

$$r_8=1.3988$$

$$r_9=1.4333$$

$$r_{10}=1.4861$$

其中取到该值的调度策略对应于算法中的搜索路径。

当  $n=20$  时，所求作战半径为  $r_{20}=1.828$ 。

可以证明，当  $n \rightarrow \infty$ ， $r(n) \rightarrow \infty$ 。

## 2. 3 问题 4

对于两基地选址问题，对于任意  $n$ ， $A_1$  和  $A_2$  应处于同一直线上。

当  $n=1$  时， $AA_1=47/36$ ， $A_1A_2=33/36$ ，初始状态时辅机停于  $A_1$ ，最优半径为  $109/36$ ；

当  $n=2$  时， $AA_1=47/36$ ， $A_1A_2=58/36$ ，初始状态时辅机一架停于  $A_1$ ，一架挺于  $A_2$ ，最优半径为  $67/18$ ；

当  $n=3$  时， $AA_1=59/36$ ， $A_1A_2=58/36$ ，初始状态时辅机一架停于  $A$ ，一架停于  $A_1$ ，一架停于  $A_2$ ，最优半径为  $73/18$ ；

当  $n=4$  时， $AA_1=131/72$ ， $A_1A_2=5/3$ ，初始状态时辅机一架停于  $A$ ，两架停于  $A_1$ ，一架停于  $A_2$ ，最优半径为  $161/36$ ；

相应达到最优半径的调度方案对应于算法的搜索路径。

## 2. 4 问题 5

飞机去矩形地图 D 处执行任务，其最短路径为由 A 到 D 的直线，单程路径长度为  $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 。这可由当  $n \rightarrow \infty$  时， $r(n) \rightarrow \infty$  得证。

算法求得的最少飞机架数为 **46 架**，飞行路径为  $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$ ，初始状态是 **33 架辅机停于 B**，**13 架辅机停于 A**。其调度策略对应于算法中的搜索路径。

值得指出的是，算法先由  $B \rightarrow D \rightarrow B$  确定 B 处辅机架数，再由  $A \rightarrow B$  确定对于 A 处最少飞机架数。其中  $r_{33} = 2$ 。

## 3. 辅机单次起飞的递推模型与启发式算法

记主机单向飞行中（不考虑主机返回），p 架辅机能把空中加满油的主机送达的最远距离为  $h_p$ 。

**性质 1:** 对于 p 架辅机，存在某一调度策略，其能把空中加满油的主机送达  $h_p$  处，则必定找到另一调度策略，使得 p 架辅机能从  $h_p$  处把油量为零的主机接回基地 A 处。

事实上，这两种调度策略是对称的。由此也可得到该性质的证明。

记主机与 q-1 个辅机整体单向飞行中（不考虑主机返回），另 p 架辅机能把空中加满油的主机与空中加满油的 q 个辅机送达的最远距离为  $H_p(q)$ ，事实上，此时主机与 q-1 个辅机整体中，每两个飞机间都没有区别。显然有  $H_1(q) = h_q$ 。

**性质 2:**  $H_1(q) = \frac{1}{q+2}$ ，对  $q=1, 2, 3, \dots$

该性质是显而易见的。

**性质 3:**  $H_p(q) = \max_{i=0,1,\dots,p-1} \{H_i(q+1) + H_{p-1-i}(1) + \theta\}$ , 其中  $\theta$  为由  $H_i(q+1)$ ,

$H_{p-1-i}(1)$  决定的参数。其表示式为  $\theta = \frac{1 + H_i(q+1)(q+1) + H_{p-1-i}(1)}{q+2}$ 。

性质 2 和性质 3 即为启发式算法的核心内容。

**性质 4:**  $r_n = \max_{p=1,2,\dots,n-1} \left\{ \frac{H_p(1) + H_{n-p}(1) + 1}{2} \right\}$ 。

事实上, 根据分析  $H_p(1)$ ,  $p=1, 2, 3, \dots$ , 性质可知,  $r_n$  为关于  $n$  的凹函数, 因此上式可简化为

$$r_n = \max_{p=1,2,\dots,n-1} \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \frac{2H_{n/2}(1)+1}{2}; n\text{偶} \\ \frac{H_{(n+1)/2}(1)+H_{(n-1)/2}(1)+1}{2}; n\text{奇} \end{array} \right. \right\}$$

启发式算法设计思路就由上式而来。

## 4. 辅机多次起飞的递推模型与启发式算法

辅机多次起飞的情形, 其基本思路与辅机单次起飞一样, 但其计算复杂度要大些。

记主机单向飞行中 (不考虑主机返回),  $p$  架辅机能把空中加满油的主机送达的最远距离为  $h_p$ 。

**性质 5:** 对于  $p$  架辅机, 存在某一调度策略, 其能把空中加满油的主机送达  $h_p$  处, 则必定找到另一调度策略, 使得  $p$  架辅机能从  $h_p$  处把油量为主机接回基地 A 处。

事实上, 这两种调度策略是对称的。由此也可得到该性质的证明。

记主机与  $q-1$  个辅机整体单向飞行中 (不考虑主机返回), 另  $p$  架辅机能把

空中加满油的主机与空中加满油的  $q$  个辅机送达的最远距离为  $H_p(q)$ ，事实上，此时主机与  $q-1$  个辅机整体中，每两个飞机间都没有区别。显然有  $H_1(q) = h_q$ 。

**性质 6:**  $H_1(q) = \frac{1}{q+2}$ ，对  $q=1, 2, 3, \dots$

该性质是显而易见的。

**性质 7:**

$$H_p(q) = \max_{i=0,1,\dots,p-1; j=0,1,\dots,p-1} \left\{ H_i(q+1) + H_{p-1-i+j}(1) + \theta \mid \text{st. } \text{Que}[H_i(q+1), H_{p-1-i+j}(1)] = p \right\}$$

其中  $\theta$  为由  $H_i(q+1)$ ， $H_{p-1-i}(1)$  决定的参数。其表示式为

$$\theta = \frac{1 + H_i(q+1)(q+1) + H_{p-1-i}(1)}{q+2}。 \text{Que}[H_i(q+1), H_{p-1-i+j}(1)] = p \text{ 表示 } H_i(q+1) \text{ 与}$$

$H_{p-1-i+j}(1)$  结合后，其所需总飞机架数恰好为  $p$ 。

性质 6 和性质 7 即为启发式算法的核心内容。

**性质 8:**

$$r_n = \max_{p=1,2,\dots,n-1; j=0,1,2,\dots,n-1} \left\{ \frac{H_p(1) + H_{n-p+j}(1) + 1}{2} \mid \text{s.t. } \text{Que}[H_p(1), H_{n-p+j}(1)] = n \right\}。$$

此时不能性质 8 不能做性质 4 式的简化，因为其复杂性更高。

启发式算法设计思路就由上式而来。

## 5. 作战半径与两基地选址

先确定  $A_1$  和  $A_2$  应处于同一直线上，然后假定  $A$ ， $A_1$ ， $A_2$  上飞机数为分别为  $n_1, n_2, n_3$ ，满足  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ 。对前面得到的  $H_i(1)$ ， $r_j$ ， $i, j = 1, 2, 3, \dots$ ，在这两条轴线上展开搜索。

其中  $n_1, n_2, n_3$  间满足一定的关系，利用此可降低搜索复杂性。

值得注意的是，当  $n$  较小时，计算机搜索需增加一些注意事项，这在程序中也有所体现。

## 6. 矩形地图的最快到达与最少辅机架数

这可用类似的优化方法得到, 对得到的  $H_i(1)$ ,  $r_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots$ , 在这两条轴线上搜索。算法先由  $B \rightarrow D \rightarrow B$  对  $r_j$  搜索, 确定 B 处辅机架数, 再由  $A \rightarrow B$  对  $H_i(1)$  搜索, 确定对于 A 处最少飞机架数。

## 7. 总结

本文首先对空中加油问题进行了分析, 提取了相关性质, 在此基础上建立了问题的递推模型。根据该模型, 文中提出了一种启发式搜索算法。受篇幅和时间的限制, 一些性质的证明没有详细展开。设计算法前, 所有算法中要用到的性质都经过了严格论证, 而本文中并没有展开。。

该算法十分高效。对于问题 1 和问题 2, 该算法所得解是最优调度策略。对于问题 3, 问题 4, 问题 5, 该算法所得解逼近最优调度策略。

## 参考文献

- 1 Pflieger CH. , Models for the optimization of airre-fueling mission [ R].AD-A262392,1993.
2. 张贤达, 现代信号处理, 北京, 清华大学出版社, 2004
3. 刘 勇,etal. 非数值并行算法(第二册)[M]. 北京: 科学出版社,1997.