

## 1 问题假设

本文根据 Ad Hoc 网络中的区域划分和资源分配问题的一些要求, 为了达到简化模型的目的, 除问题中已给出的假设外, 仅以可不作出以下假设

(1) 本文考虑在指定区域  $1000 \times 1000$  的范围内, 假设均放置等大小的圆, 并且使其在区域范围内对称 (仅对无湖的情况考虑对称)。

(2) 假设两圆相切不相交时不属于相邻的情况

(3) 假设在一个节点有多个信道的情况下, 多信道可以同时工作。

(4) 假设转发也可以看作是一次接收和一次发射。

注: 部分问题涉及到的假设, 在相应问题中给出。

## 2 参数说明

R: 一跳覆盖区圆的半径;

$\theta$ : 相邻两圆公共面积所确定弦长对应的圆心角;

W: 单个节点的发射功率;

h: 单个节点的最大传输距离;

n: 正方形区域内的节点总数;

M: 整个网络通信中, 数据包丢失的几率

## 3 问题分析

### 3.1 对于问题一的分析

(1) 对覆盖整个网络所用最少圆的问题分析, 要考虑一个实际问题, 即对称性。通过分析, 必须保证网络的覆盖对称, 这样才能保证所用的圆的数量最少。还要满足任意两个相交的圆的面积要大于 5%, 通过后面的定量计算, 使得任意一个圆都和周围的六个圆相交, 才能符合。

(2) 对信道选择的理解为, 任意两个相邻的圆均要拥有不同的频率, 并且要选择最少的频率来填充。此问题类似于用最少的颜色来填充地图问题, 属于离散数学方面的问题。

### (3) 对于网络抗毁性的理解

随机抽掉一定比例的节点后, 只考虑剩余的节点是否任意两个都可以通信, 即为连通即可。故当任意一个节点周围均匀分布的所有节点都被抽掉时, 网络会有一个节点无法与外界通信, 这也就是网络抗毁性研究的临界情况。

### 3.2 对问题二的分析

由于半径是可变化的, 可先考虑无湖情况下, 采用什么样的一跳覆盖区可以使得全部圆半径之和最小。在此基础上, 考虑有湖情况下, 改进现有方案。

### 3.3 对问题三的分析

采用基于节点的划分方式, 可以将实际问题抽象为, 在  $1000 \times 1000$  的正方形区域内, 用半径为 75-100 的圆将节点全部覆盖 (允许在没有节点的区域内不进行覆盖)。这样的模型要满足这样的条件, 任意相交的两个圆的重叠部分的面积要大于其中的大圆面积的 5%, 并且使得这样的所有大小不等的圆的半径之和最小。

### 3.4 对问题四的分析

基于问题三的模型, 利用节点的划分方式以及概率的计算方法, 进行定量的计算并比较。考虑节点移动的时候, 其所覆盖的区域的半径也在变化 (参考问题三模型与算法), 这样当其走出最大可能半径范围而又未进入其他覆盖区, 则此时其发生通信中断。计算这个最大半径的值与问题三模型进行比较, 得出结

果。

### 3.5 对问题五的分析

本问题所要解决的目标是节能，并使第一个退出网络的节点的时间尽量长。则根据题设，半径越小，则越能节省能源，使得网络的周期延长。基于此思想，可以列出能量相等的公式，得出所要求的模型中圆的半径与题设中给的半径 100 的比值关系，这样就能确定最优答案。

电池的总能量是可看作固定常量，题中假设覆盖半径为 100 发送状态下的工作总时间是 400 个时间单位，可看作半径 100 时正常工作 400t 电池能量耗尽。现要求工作 1200t，则可以求出满足条件的临界覆盖半径。

### 3.6 对问题六的分析

对问题五中的网络通信质量进行定量的分析，就是讨论数据包在申请接收的过程中，丢失的几率。可以将网络划分为两种状态，即“忙”（接收和发射中）与“闲”（等待中）。这样，让数据包去询问节点，是否可以接收，若“忙”则等待十个时间单位，若“闲”则进行接收，数据包最多可以进行 4 次访问，此时若还是没有被接收，则数据包丢失。然后进行概率计算，从而求得，在整个网络通信中，数据包丢失的几率。

## 4 模型建立

### 4.1 问题一

所有一跳覆盖区均为半径 100 的圆，按相邻两圆的公共面积分以下两种情况分析。

(1) 相邻两个圆的公共面积不小于 5%

1) 所需最少圆个数的模型建立

由已知条件则可得到如下方程：

$$\frac{2(S_{\text{扇}} - S_{\text{三角形}})}{S_{\text{圆}}} = 5\% \quad \text{即} \quad 2 * \left( \frac{\pi R^2 \theta}{360} - R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) = 5\%$$

其中  $\theta$  为公共面积所确定的弦长对应的圆心角，示意图见图 1。

$$\text{化简得到：} \frac{\theta}{180} - \frac{\sin \theta}{\pi} = 5\%$$

使用牛顿迭代法计算：

$$\text{令 } F(\theta) = \frac{\theta}{180} - \frac{\sin \theta}{\pi} - 0.05$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{F(\theta)}{F'(\theta)} = \theta_k - \frac{\pi \theta_k - 180 \sin \theta_k - 0.05 * 180 \pi}{\pi - 180 \cos \theta_k}$$

令  $\theta_0 = 57.1^\circ$  可求得  $\theta_1$ ，代入编程公式求得较为精确的  $\theta_k$  值。经过 15 次迭代，

使  $\theta_k$  趋近  $\theta$  的真值：

表 1 牛顿迭代法计算机模拟（一维）

$\theta_k$	$\theta_k$ 加减项	$\theta_{k+1}$
57.1	-0.378344475	57.47834447
57.47834447	-0.076949773	57.55529425

57.55529425	-0.004672622	57.55996687
57.55996687	-1.79893E-05	57.55998486
57.55998486	-2.67173E-10	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486
57.55998486	-1.5381E-15	57.55998486

取  $\theta = 57.56^\circ$ ，则以其中任意一个圆为中心时满足条件的与其相邻的圆的个数  $n = 360 / 57.56 = 6.254$ 。故  $n=6$  即为足以满足 5% 条件并且浪费一跳区面积最少的最优解。

若将此相邻的 6 圆的圆心做连线，则可得到的图形是一个规则的六边形。要覆盖整个  $1000 \times 1000$  的正方形区域，可看作是用若干规则的六边形依次相接直至覆盖整个区域。

下面计算覆盖整个区域所需圆的个数：

纵向考虑：

六边形两横边距离的一半即为圆形一跳覆盖区的一层排列距离，其值为相邻两圆的圆心距乘以  $\cos 30^\circ$ ，即

$$d = 2R \cos \frac{\theta}{2} \cos 30^\circ = 2 * 100 * \cos 30^\circ * \cos 30^\circ = 150$$

此外在边缘区还可利用的纵向长度为  $a = R \sin \frac{\theta}{2} = 100 * \sin 30^\circ = 50$ 。纵向需覆盖的长度  $1000 = 6 * 150 + 50 + 50$ ，即 6 层圆加上两个边缘相交圆可利用的长度刚好可以覆盖整个区域，所以满足条件时的纵向所需的圆为 7 排。

横向考虑：

任取左边缘一个圆形一跳区，它与其上排圆的左交点设为 B，与其下排圆的左交点设为 C，则 B 与 C 的连线即为可利用的面积左起始点，如图 2 所示，经计算可证明此直线刚好经过此边缘圆的圆心 D。简单证明如下：

由  $\theta = 60^\circ$ ，则  $AB = AC = BC = d + a = 150 + 50 = 200$ 。ABC 为等边三角形，故过 A 点向 BC 做垂线交 BC 于  $D'$ ，由对称特性，圆心也 D 必在此垂线上。

AD 为两圆的圆心距，则  $AD = 2R \times \cos 30^\circ = 2 \times 100 \times \sqrt{3} / 2 = 100\sqrt{3}$ 。而  $AD' = AB \cdot \cos \frac{\theta}{2} = 200 \times \cos 30^\circ = 100\sqrt{3}$ 。AD = AD' 且 D 与 D' 都在  $\theta$  角的平分线上，故 D 与 D' 重合。此问题即可简化为直接采用圆心距来计算求解。

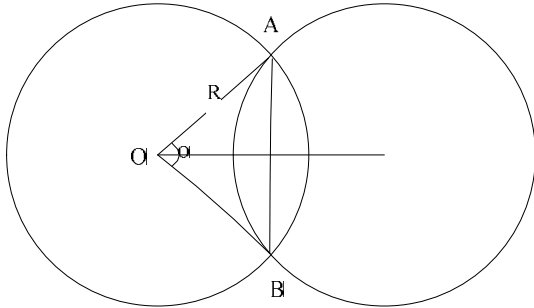


图1 相邻两圆相交的情况分析

$$\text{圆心距 } b = 2R \cos \frac{\theta}{2} = 2 * 100 * \cos 30^\circ = 100\sqrt{3}$$

横向所需的圆的层数为  $\frac{1000}{100\sqrt{3}} \approx 5.77$ ，故为能覆盖所有区域横向也为 6 层。

因此，可得到用六边形方式划分结果如图 3 所示，每个交点代表一个圆的圆心，用圆的形式画出如图 4 所示。

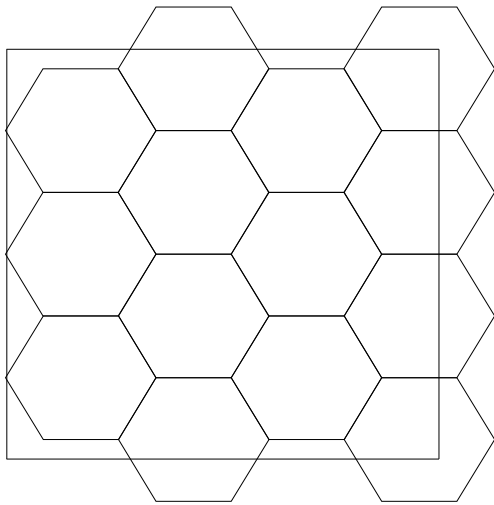


图3 以六边形表示法覆盖所有区域

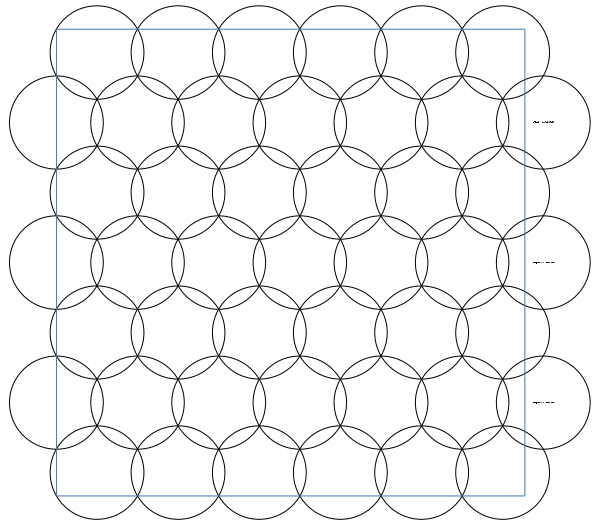


图4 满足条件的区域划分

当一个圆只有部分在正方形区域内，也按一个计算，故满足条件所需的圆最少为  $7 \times 3 + 6 \times 4 = 45$ （个）。

## 2) 所需圆的信道分配

由于处于方形一定范围内的圆同时与六个圆相邻，加上本身，最少需要三种信道，如图 5 所示。

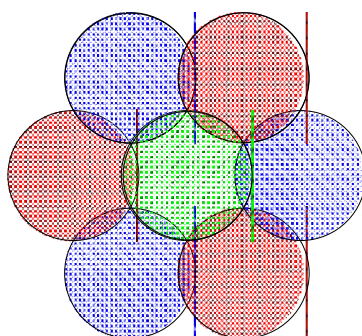


图 5 所需圆的信道分配

用改进的 Welch Powell 法对上图进行信道分配：

- ① 将第一个信道分配给第一个圆，并以离第一个圆最近的不相邻的圆的圆心，到第一个圆的圆心的距离为半径画圆，对圆心位于所画圆周上的圆分配同样的信道。
- ② 用第二个信道对尚未分配信道的圆重复 A)，用第三个、第四个……信道继续这种做法，直到所有的点全部分配信道为止。

从上面的结果可以看到，使用三个信道即能满足要求。如图 6：

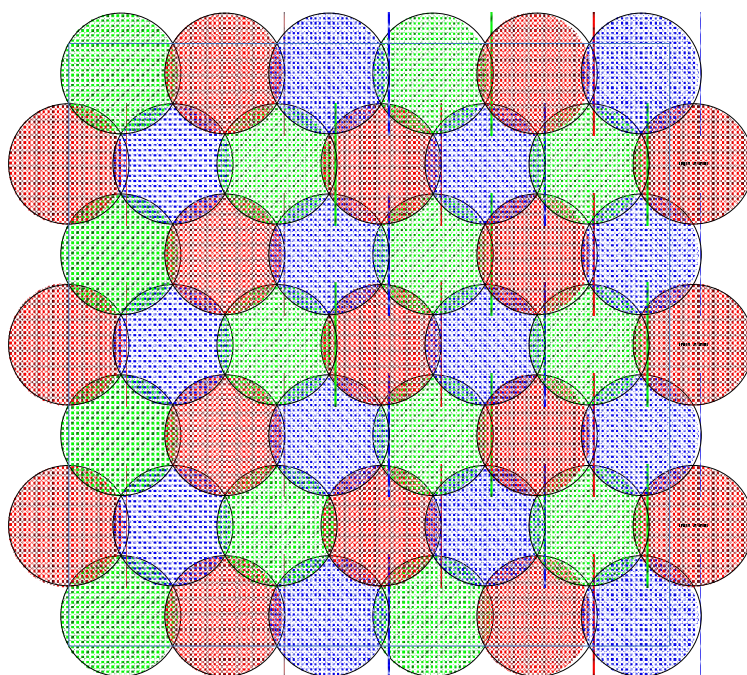


图 6 满足条件的圆的信道分配

### 3) 网络的抗毁性

#### ① 对此问题的注释与说明

首先，在此网络中任意一个圆内都相同的分布着 7 个节点，以每一个节点为中心，周围相邻最近的等距离的六个点，全部抽掉的时候，则圆心附近区域没有被覆盖，即网络瘫痪。

其次，边界的情况应特殊考虑，有些边界点周围相邻最近的等距离的点不是 6 个。如下图，存在周围有 3 个，4 个以及 5 个的情况。这样，在作此问题的时

候应全面考虑，方才周到。

再次，题目中，抽取的点数为总数的 2%，5%，10%，15%。通过计算，这样的比例抽取，不是整数，那么我们假定取小于此数的最大整数来计算。由于，问题的目的是要比较抽取不同比例后的抗毁性的问题的比较，基于此做出假设，并不影响问题的解决。

② 具体的做法如下：

$$\text{公式: } \sum_{I=3}^6 \frac{C_{N-I}^{M_J-I}}{C_N^{M_J}} \times K_I \quad (J=1, 2, 3, 4)$$

说明：第一， J 取 1, 2, 3, 4 分别代表抽取节点为 2%，5%，10%，15%的情况

$$\text{第二, } I \leq M_J \quad N=152$$

$$M_1 = N \times 2\% \approx 3 \quad M_2 = N \times 5\% \approx 7$$

$$M_3 = N \times 10\% \approx 15 \quad M_4 = N \times 15\% \approx 22$$

(I 是某点瘫痪时周边抽掉的点数，  $M_J$  是随机抽取的点数)

$$\text{第三, } K_3=13 \quad K_4=24 \quad K_5=3 \quad K_6=112$$

( $K_J$  分别代表抽取 3, 4, 5, 6 个点后网络瘫痪，不同类型的点的个数)

具体计算：

a. 当抽取的比例为 2%时，即  $M_1=3$

$$\frac{C_{152-3}^{3-3}}{C_{152}^3} \times 13 = 2.2656 \times 10^{-5} = 2.2656 \times 10^{-3} \%$$

b. 当抽取的比例为 5%时，即  $M_2=7$

$$\frac{C_{152-3}^{7-3}}{C_{152}^7} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{7-4}}{C_{152}^7} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{7-5}}{C_{152}^7} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{7-6}}{C_{152}^7} = 0.004723 = 0.4723\%$$

c. 当抽取的比例为 10%时，即  $M_3=15$

$$\frac{C_{152-3}^{15-3}}{C_{152}^{15}} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{15-4}}{C_{152}^{15}} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{15-5}}{C_{152}^{15}} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{15-6}}{C_{152}^{15}} = 0.01188 = 1.188\%$$

d. 当抽取的比例为 15%时，即  $M_4=22$

$$\frac{C_{152-3}^{22-3}}{C_{152}^{22}} \times 13 + \frac{C_{152-4}^{22-4}}{C_{152}^{22}} \times 24 + \frac{C_{152-5}^{22-5}}{C_{152}^{22}} \times 3 + \frac{C_{152-6}^{22-6}}{C_{152}^{22}} = 0.04378 = 4.378\%$$



③ 对比分析如下（见图 7）：

1. 当取的点越少，抗毁性越好。
2. 如下图，抗毁性的分布与抽点的数量的关系为指数关系。

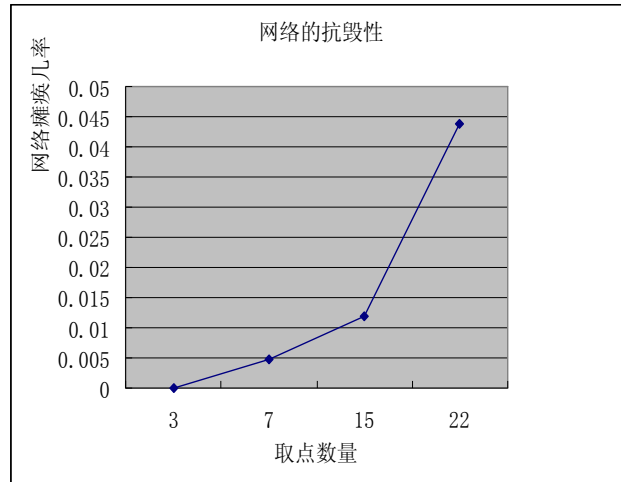


图 7 取点数量与网络瘫痪的关系

综上所述：由于抽点数量与网络瘫痪几率的比值近似可以看成指数分布，应尽量少抽取节点才能尽可能的保证网络不被摧毁

(2) 相邻两个圆的公共面积不小于 18%

1) 所需最少圆的个数

假设两圆相切不相交时不属于相邻的情况。则采用如上方法计算得到  $n=4$ ，则考虑用四边形覆盖整个区域，横向纵向情况相同，只考虑一种即可。圆心距经计算为  $100\sqrt{2}$ ，边缘可利用长度刚好为圆心距的一半  $50\sqrt{2}$ ，而  $\frac{1000}{50\sqrt{2}} \approx 14.14$ ，

故横向纵向需要的圆形一跳区均为 7 排，则所需的最少圆的个数为  $8 \times 8 = 64$ （个）。设计结果如图 8 所示。

2) 上述覆盖区域方法所需圆的信道分配

分配方法同上，可得到所需信道数为 2，具体分配如图 9 所示。

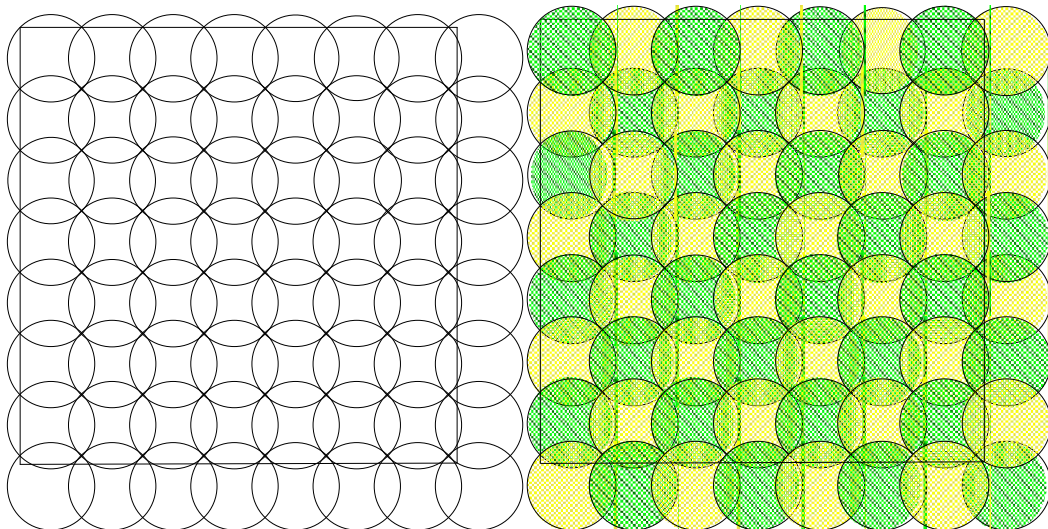


图 8 满足条件的区域划分

图 9 所需圆的信道分配

### 3) 网络的抗毁性

同(1)题的抗毁性求法,应用上述公式,可求得抽掉节点百分比不同各种情况的抗毁性结果(见图10)。

说明:

① 在上面的图中不难得到如下结果

- A. 抽掉周围2个节点则网络瘫痪,这样的节点共有4个
- B. 抽掉周围3个节点则网络瘫痪,这样的节点共有32个
- C. 抽掉周围3个节点则网络瘫痪,这样的节点共有20个
- D. 抽掉周围3个节点则网络瘫痪,这样的节点共有24个
- E. 抽掉周围3个节点则网络瘫痪,这样的节点共有96个

这样,共有节点176个。(值得注意的是,与1问不同的是,这里有56个点在 $1000 \times 1000$ 正方形外面,考虑到所有正方形内的连通,所以算抗毁性是,将在外面的节点考虑到公式里面)

② 当分别抽掉2%,5%,10%,15%节点时,得出的结果并非整数。同上一问假设相同,假定取小于此数的最大整数来计算,则分别为3,8,17,26。

计算结果:

- A. 当抽掉2%时,网络瘫痪的几率为0.0815%
- B. 当抽掉5%时,网络瘫痪的几率为0.932%
- C. 当抽掉10%时,网络瘫痪的几率为6.11%
- D. 当抽掉15%时,网络瘫痪的几率为18.7%

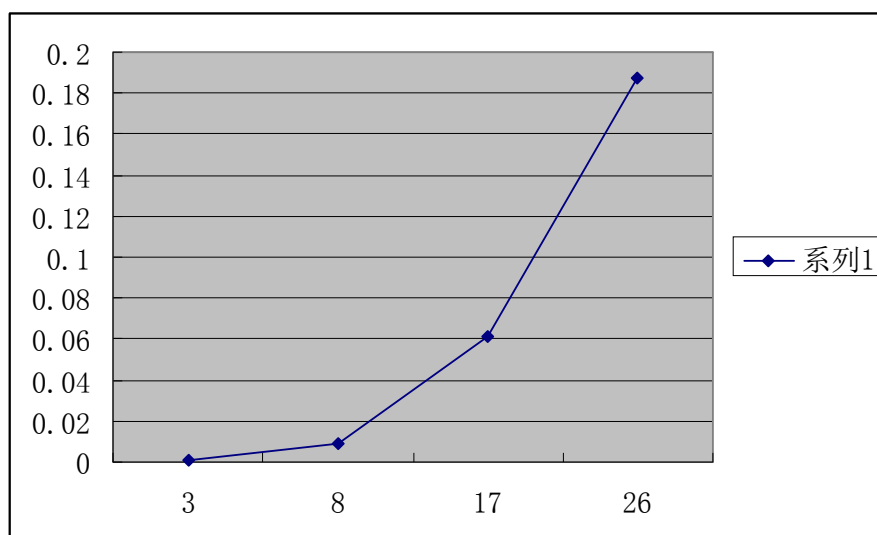


图10 取点数量与网络瘫痪的关系

### 4.2 问题二

(1) 若先不考虑湖泊问题,一跳覆盖区圆形的半径在75~100间任意选择。则任意两个相邻的圆可分为以下几种情况:两圆半径相同且为最大值( $R_1=R_2=100$ );两圆半径相同且为最小值( $R_1=R_2=75$ );两圆半径不同取值为75~100。按照问题一的排列方式(以正六边形为单位),每个圆与六个圆相邻,弧被等分为六份,每份对应一个公共弦,一个公共面积和一个 $60^\circ$ 的圆心角。其中设公共弦两端



点与圆心组成的三角形面积为单位有效面积（整个面积近似由单位有效面积组成，如下图 11）。

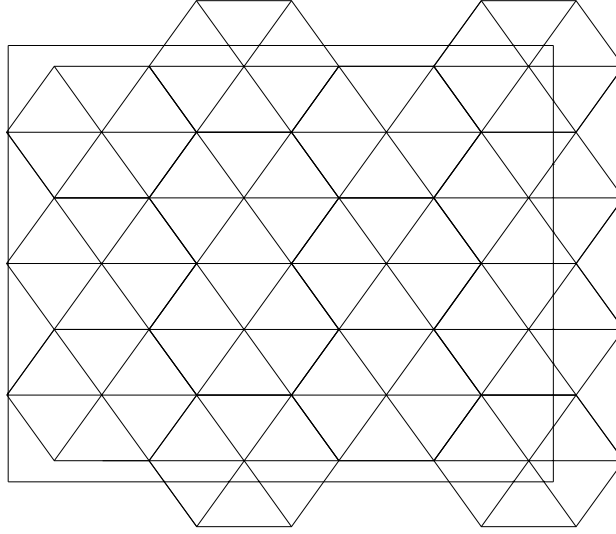


图 11 问题 2 示意图

当满足所求条件“全部圆半径之和为最小”时，两圆相交公共面积为 5%，两个单位有效面积与两半径和的比值为最大，即用单位面积填满正方形时所需的半径和最小。设相交两圆的两个单位面积之和为  $S$ （当  $R$  不相等时两单位面积不等），左圆单位有效面积为  $S_1$ ，右圆单位有效面积为  $S_2$ ，公共弦长之半为  $a$ ，单位有效面积与两半径和的比值为  $k$ ， $R_1$  对应圆心角  $\theta$ ， $R_2$  对应圆心角  $\alpha$ 。则

$$k = \frac{S}{R_1 + R_2} = \frac{S_1 + S_2}{R_1 + R_2}$$

假设变化过程为右圆半径由 100 减小到 75（过程 1），而后左圆半径同样由 100 减小到 75（过程 2），试推导  $k$  与半径减小的关系，得出  $k$  的最大值。由上式得出在过程一中  $R_2$  从 100 减小到 75，假设弦长  $a$  与  $R_2$  同级减小，则  $S_1$  与  $R_2$

同级减小， $S_2$  与  $R_2^2$  同级减小， $R_1$  不变，则  $k$  随  $R_2$  的减小而减小。同理， $k$  随  $R_1$  的减小而减小。通过以下三种情况讨论加以验证：

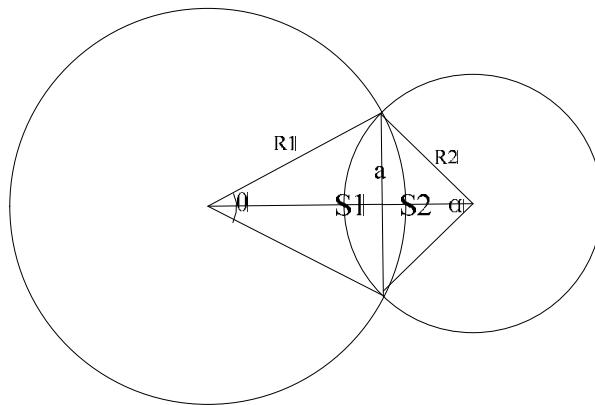


图 12 单位有效面积与两半径和的比值证明示意图

① 当  $R_1=R_2=100$  时,  $\theta=\alpha=57.56^\circ$ , 此时

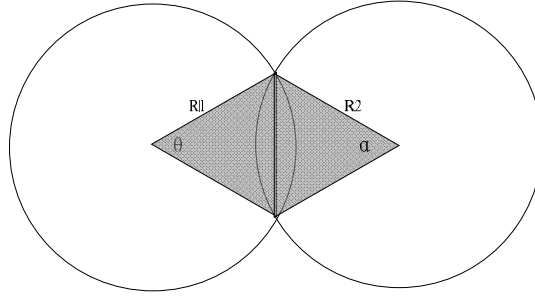


图 13  $R_1=R_2=100$  图示

$$S = \frac{\theta \pi R_1^2}{360} + \frac{\alpha \pi R_2^2}{360} - 5\% \pi R_1^2 = 2697378\pi = 8475.319$$

$$k = \frac{S}{R_1 + R_2} = \frac{S}{2R_1} = 42.3766$$

② 当  $R_1=100$ ,  $R_2=75$  时, 此时  $\theta < 60^\circ$ ,  $\alpha > 60^\circ$ , 得方程组:

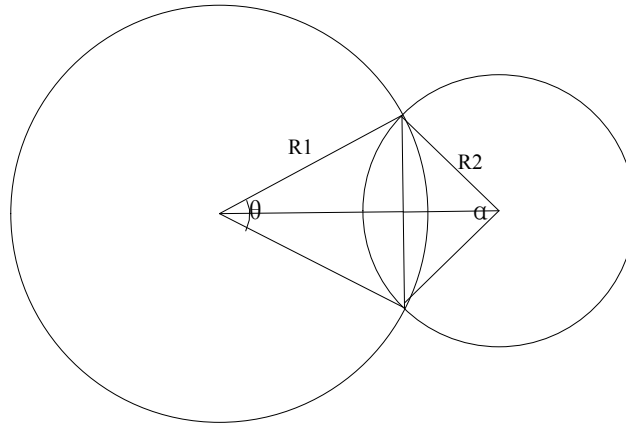


图 14  $R_1=100$ ,  $R_2=75$  图示

$$\begin{cases} R_1 \sin \frac{\theta}{2} = R_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ 5\% \pi R_1^2 = \left( \frac{\theta \pi R_1^2}{360} - \frac{1}{2} * 2R_1 \sin \frac{\theta}{2} R_1 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \left( \frac{\alpha \pi R_2^2}{360} - \frac{1}{2} * 2R_2 \sin \frac{\alpha}{2} R_2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \end{cases}$$

令

$$F_1(\theta, \alpha) = R_1 \sin \frac{\theta}{2} - R_2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$F_2(\theta, \alpha) = \left( \frac{\theta \pi R_1^2}{360} - R_1 \sin \frac{\theta}{2} R_1 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \left( \frac{\alpha \pi R_2^2}{360} - R_2 \sin \frac{\alpha}{2} R_2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) - 0.05 \pi R_1^2$$

得非线性方程组

$$\begin{cases} F_1(\theta, \alpha) = 0 \\ F_2(\theta, \alpha) = 0 \end{cases}$$

求解上述方程组的牛顿迭代格式为

$$\begin{pmatrix} \theta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} - \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} F_1(\theta_k, \alpha_k) \\ F_2(\theta_k, \alpha_k) \end{pmatrix}$$

估计真值所在区间为  $\theta_k$  (50, 53),  $\alpha_k$  (62, 71), 取初值  $\theta_k=51$ ,  $\alpha_k=66$ , 代入方程组通过十五次迭代编程计算。

表 2 牛顿迭代法计算机模拟 (二维)

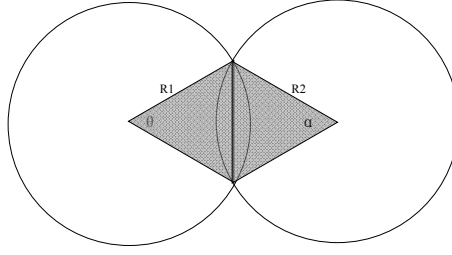
$\theta_k$	$\alpha_k$	$\theta_{k/2}$	$\alpha_{k/2}$	$\theta_k$ 加减项	$\alpha_k$ 加减项	$\theta_{k+1}$	$\alpha_{k+1}$
51	66	25.5	33	-0.8369	-0.0662177	51.8369	66.06622
51.8369	66.0662	25.9185	33.0331	-0.143823	0.51566736	51.980724	65.55055
51.9807	65.5506	25.9904	32.7753	0.0723577	0.00860988	51.908366	65.54194
51.9084	65.5419	25.9542	32.771	-0.000229	0.00504569	51.908595	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	7.897E-06	4.4716E-06	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	3.821E-12	6.3774E-11	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689
51.9086	65.5369	25.9543	32.7684	-1.34E-15	-4.233E-15	51.908587	65.53689

由表 2 解得的趋近真值为  $\theta_k=51.908587$ ,  $\alpha_k=65.53689$ 。

$$S = \frac{1}{2} R_1^2 \sin \theta + \frac{1}{2} R_2^2 \sin \alpha = 6495.15393$$

$$k = \frac{S}{R_1 + R_2} = \frac{S}{2R_1} = 37.1152$$

③ 当  $R_1=R_2=75$  时,  $\theta=\alpha=57.56^\circ$ , 此时

图 15  $R_1=R_2=75$  图示

$$S = \frac{\theta \pi R_1^2}{360} + \frac{\alpha \pi R_2^2}{360} - 5\% \pi R_1^2 = 1517.5\pi = 4767.367$$

$$k = \frac{S}{R_1 + R_2} = \frac{S}{2R_1} = 31.782$$

由上面证明得出，在不考虑边缘的情况下，当满足所求条件“全部圆半径之和为最小”时，两圆相交公共面积为 5%，两个单位有效面积与两半径和的比值为最大的“大圆相交”的分划方式成为首选。即  $R=100$  的大圆两两相交所的半径和最小，一大一小两圆相交次之，两小圆相交最大。

(2) 考虑湖泊存在时满足条件的区域分划

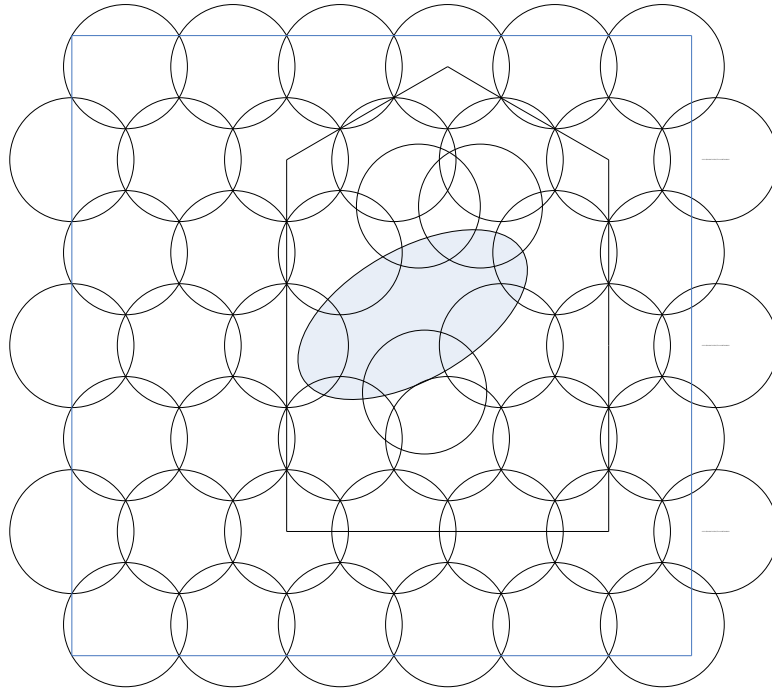


图 16 有湖情况下的区域分划

如上图，通过在邻湖区域内的面积的半径和计算（图中黑色框内的圆的个数  $\times$  半径 100。其中部分圆的个数按照其框内部分与整个面积的比值计算）。当半径在 75~100 之间时，计算的半径为 100 时半径和最小。

## (3) 信道分配方案

当如上图分布时，每个圆最多与 7 个圆相邻，则该单位最少需要分配 4 个信道。如下图

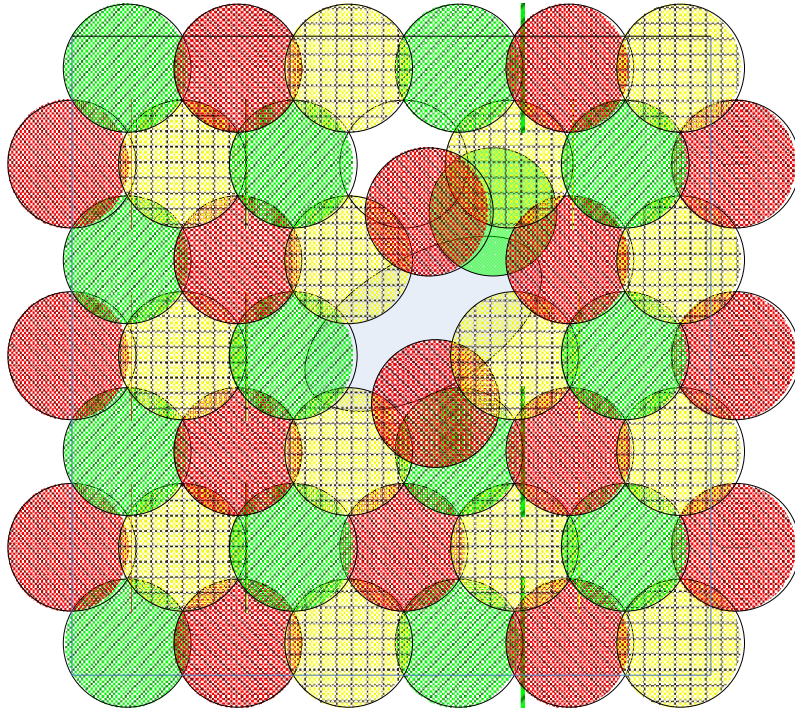


图 17 有湖情况下的最少信道分配

## 4.3 问题三

(1) 当无湖存在条件下，在问题二中已证得，在不考虑边缘的情况下， $R=100$  的大圆两两相交的半径和最小，一大一小两圆相交。本题首选以较大的半径划分区域。采用以下算法编程：

假设每个一跳覆盖区依然是以节点为圆心，计算覆盖后如还有没被覆盖的点，再取消圆心为节点的限制。

假设处于一条边缘上的点看成已被覆盖。

1) 选择任意节点为起点（图中点  $A_1$ ），以 175.29497 为半径画圆（当两大圆相交面积为 5% 时圆心距）。如果在圆的内部与圆的边缘距离  $d_1$  最小的点（图中点 B）和起点  $A_1$  的距离在 100~175.29497 之间，那么

2) 以这个点  $B_1$  为新的圆心，175.29497 为半径再画圆

3) 通过上一步的  $A_1$  点为圆心，100 为半径画圆，通过子程序 1 求得圆  $B_1$  半径  $r_1$ （已知圆  $A_1$  半径和圆心距，相交面积为大圆面积的 5%），考察以  $B_1$  为圆心，半径为 100 的区域内若没有点与  $B_1$  点的距离在  $(r_1, 100)$  之间，则以  $r_1$  为半径画圆。否则连接  $B_1$  点与圆内离  $B_1$  最远的点，并以此为半径画圆。

4) 每个点设置一个二进制符号位和一个数据位 (初值为 0)，当节点在步骤 3 所画的圆内，第一位置 1。当节点 ( $B_1$ ) 为圆心，数据位记录所在的较小的同心圆的半径。

5) 重复此操作，直到第  $n$  次以 175.29497 为半径画圆后，没有节点在 100~175.29497 之间。

6) 此时查找是否有节点的符号位为 0。如果有，通过查找第  $n$  次以 100~175.29497 为半径画圆时，是否还有点在圆内且符号位为 0。如没有，查找第  $n-1$  次直到第一次以 100~175.29497 为半径画圆的情况；如果有，查看圆的内部与圆的边缘距离  $d_2$  第二小的点  $B_{n2}$  和第  $n$  个起点  $A_n$  的距离是否在 100~175.29497

之间。如果在，通过子程序 1 求得圆  $B_{n2}$  半径  $r_{n2}$ 。以  $B_{n2}$  为圆心，半径为 100 的区域内若没有点与  $B_{n2}$  点的距离在  $(r_{n2}, 100)$  之间，则以  $r_{n2}$  为半径画圆。否则连接  $B_{n2}$  点与圆内离  $B_{n2}$  最远的点，并以此为半径画圆。期间若出现下图情况，

即当通过 A 点确定点 C 及  $r_c$ ，并以点 C 为圆心做圆时，若在半径 200 范围内有数据位不为零的点 (即圆心)，通过子程序 2 (比较两圆半径大小，以大圆面积确定 5% 面积，已知两圆半径，解得满足条件的圆心距  $H$ )，当圆心距  $BC$  在  $(H, r_c + r_b)$  之间，圆 C 与圆 B 相交但不满足相交面积为大圆面积的 5%，则分别以 A, B 为圆心，AC, H 为半径作弧。两弧相交于点 D。此时以点 D 为新的圆心， $r_c$  为半径做圆，则圆 D 与圆 A 和圆 B 相交的公共面积满足条件，且点 C 到点 D 的移动距离小于圆 C 半径的  $1/3$ 。新增节点 D，将  $r_c$  的值计入点 D 的数据位。

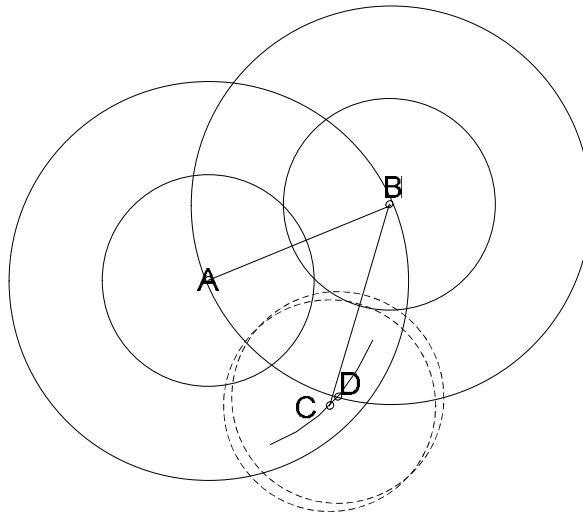


图 18 三圆公共面积优化

7) 重复 6，直到没有节点的符号位为 0 或直到查看第一个起点  $A_1$  后仍有节点



的符号位为 0。当直到查看第一个起点  $A_1$  后仍有节点 A 的符号位为 0 时，以该点为圆心， $(300-24.705=275.295)$  为半径作圆（如图 19）。若无点在圆内，则该点不连通；若有点在圆内，找出与 A 点距离最近的节点 C，连接 AC，并以 C 点为圆心，100 为半径做圆，交 AC 于点 D。求 AC 上圆 E 半径  $= [AC - (100 - 24.705)] / 2$ 。以点 A 为起点在 AC 上找到点 E，并以 E 为圆心，AE 为半径做圆，则点 A 可连通。新增节点 E，将 AE 计入点节点 E 的数据位。

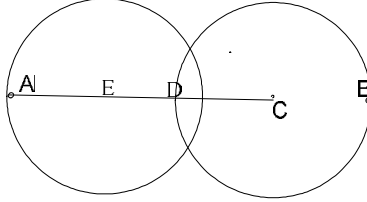


图 19 最远距离时的算法

注： $(100-24.705)$  为公共部分面积中两段弧间的最大距离。

8) 将所有节点的数据位相加，即为所有圆的半径和。

9) 依次以 926 个点为起点，重复步骤 1~8，找出最小半径和及其区域分布方式。

子程序 1：已知圆  $A_1$  半径和圆心距，相交面积为大圆面积的 5%

子程序 2：比较两圆半径大小，以大圆面积确定 5% 面积，已知两圆半径，解得满足条件的圆心距 H

(2) 当有湖存在条件下，在运行上述程序之前，先将代入椭圆方程左端：

$$\frac{(x-550)^2}{205^2} + \frac{(y-550)^2}{105^2} = 1$$

若结果小于 1，则该点在湖内，不予以考虑。剔除湖内点之后再运行 1~9 步程序。

区域连通的充分条件：运行程序后无未覆盖的节点

区域连通的必要条件：该节点与其距离最近的临节点之间的距离不大于  $400-24.705=375.295$

#### 4.4 问题四

运动的方向角、速度是分别服从在  $[0, 2\pi]$ 、 $[0, 2]$  上均匀分布的随机变量。

则  $E(\theta) = \pi$ ， $\sigma^2(\theta) = \frac{\pi^2}{3}$ ； $E(v) = 1$ ， $\sigma^2(\theta) = \frac{1}{3}$ 。

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}, 0 < \theta < 2\pi; \quad \varphi(v) = \frac{1}{2}, 0 < v < 2;$$

$400t/30t \approx 13.3$ ，故 400 单位时间后前十个用户改变方向角和速度各 13 次。

前十个用户作折线运动，由于网络采用基于节点的划分方式，故随着用户的移动其周围的覆盖区也在发生变化。当其走出最大可能半径范围而又未进入其他覆盖区，则此时其发生通信中断。

其按平均值移动时，400t 后偏移量为 20。考虑改变方向角和速度最大的情

况，400t 后最大偏移量为

$$d = \sqrt{\left[ (30 \times 6 + 10) \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \times \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]^2 + \left[ 30 \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3} (7 - 6 \cos \frac{\pi}{\sqrt{3}}) - 10 \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \times \cos \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]^2}$$

$$= 33.09$$

即任意节点的偏移量的范围为 20~33.09，则 400 个时间单位后任一节点的可能位于以原初始位置为圆心，分别以 20、33.09 为半径的圆环内。

$$\text{圆环面积可求: } S_{\text{环}} = \pi (R^2 - r^2) = \pi \times (33.09^2 - 20^2) \approx 2183.24$$

以该节点初始位置为圆心，100 为半径画圆，找出在其范围内包含的所有问题三中确定的圆心点，圆心距可求，环形的内外环半径已知，则可求圆环与该圆心点所确定的圆的公共面积，计算圆内所有满足此条件的面积和  $S_0$ ，注意多圆

相交面积不要重复计算。判断  $S_{\text{环}} - S_0$  是否为 0，若为零则网络可正常工作，若大于零则部分网络将中断。

#### 4.5 问题五

假设最大传输距离取极限情况即  $h=2R$ ，则单个节点的发射功率  $W = K_1 h^3 = K_1 (2R)^3 = 8K_1 R^3$ ，由于发射、接收、备用三种状态的功率之比为 11:10:1，故三种情况对应的功率分别为  $W$ 、 $10W/11$ 、 $W/11$ 。由题目所给数据可得节点总数为  $n=926$ 。

假设转发也可以看作是一次接收和一次发射，每个节点平均发射 25 次，则每个节点平均接收也是 25 次，以单个节点的能量情况为例计算：发射能量消耗

$$E_{\text{发}} = W \times 4 \times 25, \text{ 接收能量消耗 } E_{\text{收}} = \frac{10W}{11} \times 4 \times 25, \text{ 备用时能量消耗 } E_{\text{备}} = (1200 - 4 \times 25 \times 2) \frac{W}{11}。$$

假设在一个节点有多个信道的情况下，多信道可以同时工作。则实际消耗的总能量为  $E_1 = (E_{\text{发}} + E_{\text{收}} + E_{\text{备}}) \times 926 = \frac{2870600}{11} \times 8K_1 \times R^3$ 。

由题设条件可知，当覆盖半径为 100 时，电池可工作的时间为 400t。且平均 1200t 时间内每个节点的发射次数为 25，则 400t 时间内每个节点的平均发射次数为 25/3。则按照上述方法可得：电池的总能量  $E_{\text{总}} = \frac{2870600}{33} \times 8K_1 \times 100^3$ 。

实际工作中为使网络可以满足条件运行 1200t，则需要使  $E_1 \leq E_{\text{总}}$ 。

$$\text{带入即得: } \frac{2870600}{11} \times 8K_1 \times R^3 \leq \frac{2870600}{33} \times 8K_1 \times 100^3$$

解得:  $R \leq 69.34$

故为使其工作时间满足 1200t，则最大的覆盖半径应为 69。

区域划分方法可参照问题三中基于节点划分方法的编程思想。对组网方式可

以结合路由监测, 动态监测每个节点的即时位置, 随着节点的运动动态的改变组网方式, 以提高网络的抗毁性。

#### 4.6 问题六

##### (1) 问题分析

对问题五中的网络通信质量进行定量的分析, 就是讨论数据包在申请接收的过程中, 丢失的几率。选取区域内任意一点, 给出剩下的  $N-1$  个点对该点申请接受几率的数学公式, 看其余点与所选点连线的几率。并将网络划分为两种状态, 即“忙”(接收和发射中)与“闲”(等待中)。这样, 让数据包去询问节点, 是否可以接收, 若“忙”则等待十个时间单位, 若“闲”则进行接收, 数据包最多可以进行 4 次访问, 此时若还是没有被接收, 则数据包丢失。然后进行概率计算, 从而求得, 在整个网络通信中, 数据包丢失的几率。

##### (2) 问题计算

公式如下:

$$M = \left\{ \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right] \times \frac{1}{6} \right\}^4$$

$n=926$  (网络区域内所有节点得数量)

$M$ : 整个网络通信中, 数据包丢失的几率

应用泰勒展开公式:

$$\left( 1 - \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \approx C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{n-1} + C_{n-1}^2 \left( \frac{1}{n-1} \right)^2$$

近似计算  $M = 4.8 \times 10^{-5}$

##### (3) 通信质量评价

可以看出  $M$  的值相当小, 百万分之四十八, 数据包丢失几率很小, 因此网络的通信质量相对较好,

#### 5 模型结果的分析

通过上述的计算结果, 可以看出基于圆覆盖全部面积方式的模型假设(即问题 1, 2)可以较好的节省成本, 但是网络抗毁性差, 相邻两圆相交部分越大(即节点设置的越多), 抗毁性越差。基于节点划分方式的模型假设(即问题三), 可以较好的解决抗毁性差的问题。在后面的问题中, 计算出了比较节能的区域划分方式, 满足题设条件的圆半径为 69, 并且该网络的建立, 可以很好的解决通信质量问题。

#### 6 模型的优缺点与改进方向

##### (1) 基于圆覆盖全部面积的方式(即问题 1, 2)

优 点: 技术要求不高, 实际操作简单, 易于实现, 耗能相对较少, 相对成本较低。

缺 点: 但是不能较高的抗毁性, 网络寿命较短, 出现信息不能传输到指定位置的几率大。

改进方法：可以在通信技术上进行改革，在能够保证较高的抗毁性的前提下，使得相邻圆重叠的面积尽量小，甚至可以相切，并保证所有圆的半径之和相对较小。这样可以最大限度的节省能量，减少服务的成本。但是有可能会增加维护的费用，具体操作还要在今后继续探索研究。

(2) 基于节点划分方式（即问题 3, 4, 5, 6）

优点：能保证较高的抗毁性，网络寿命较长，信息的传输接受能力强，较小的掉包率，通信质量高。

缺点：技术要求高，实际操作困难，不易于实现，耗能相对较多，相对成本较高。

改进方法：通过技术改革，简化实际操作，降低成本。

### 参考文献

- [1]左孝凌,李为鑑,刘永才《离散数学》上海科学技术文献出版社 2003.6 P319
- [2]唐焕文,秦学志《实用最优化方法》大连理工大学出版社 2004.1
- [3]李慶揚《数值分析(第4版)》清華大學出版社 2001.8.1