全国第七届研究生数学建模竞赛

题 目　　特殊工件磨削加工问题研究

摘　　要

本文对特殊工件的磨削加工过程进行抽象、建模和求解；根据工件母线方程设计加工方案，并对方案进行了误差分析，然后提出修整策略。

磨床是通过下台、中台的平移变换和上台的旋转变换，使得工件母线始终与砂轮相切。为了便于坐标变换和建模，建立两个平面直角坐标系：底座和砂轮所在的刚性坐标系{A}和工件母线所在坐标系{B}，其中，母线方程通过横轴正方向平移 b 变换到坐标系{B}。在{A}下设定加工基准，加工基准由砂轮的初始位置和上台的初始旋转角构成。根据工件母线方程设定砂轮几何尺寸，同时发现圆柱形砂轮是轮式砂轮圆弧半径趋近无穷时的特殊情况。

建立三层优化模型：第一层保证误差最小化（误差分析包括局部误差和全局误差，局部误差是运动轨迹与母线方程在坐标系{B}下 y 方向偏差的最大值，全局误差是偏差的均值），通过优化工件在坐标系{B}下的磨削步长，得出指令的脉冲序列；第二层以磨削用时最小化为目标，优化脉冲指令的发射时间；第三层以脉冲频率变化最小为目标，用三次样条插值优化脉冲分布，以使工作台稳定运行和加工表面光滑。

问题 1 和问题 2 中，认为切点位于垂直于砂轮转轴的中截面上，在坐标系{A}下是固定点，并在建模过程中要求工件母线始终在该点与砂轮接触并相切。根据母线方程，利用坐标变换，误差分析策略等建立优化模型，确定加工基准、砂轮尺寸、脉冲数及分布，得出问题 1 和问题 2 中工件加工时耗分别为 46.75min 和 50.95min。

问题 3 和问题 4 实际上分别是对问题 1 和问题 2 策略的修整。这两个问题中的切点不断变化，以使得砂轮圆弧表面均匀磨损。问题 3 中的切点在坐标系{A}下沿 x 正向平移；问题 4 中的切点在坐标系{A}下沿砂轮圆弧旋转。模型思想分别类同问题 1 和问题 2，得到问题 3 和问题 4 中工件加工时耗分别为 45.19min 和 48.08min。

文章最后对模型进行了评价，并针对不足的地方提出改进策略。

关键词：特殊工件磨削　加工基准　坐标变换　脉冲指令工序　三层优化

目　　录

1 问题重述

某科研单位和工厂研制了一种大型精密内外圆曲线磨床，用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件。本题的研究内容是：运用数学建模的方法，根据旋转体工件的光滑母线方程 $y = f(x)$，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

根据上述要求，需依次研究下列 4 个问题（单位：mm）：

问题 1 和问题 2 为在给定母线方程以及砂轮样式的前提下，给出加工方案，并对方案作误差分析。

问题 3 和问题 4 中为了使砂轮表面的磨损尽量均匀，需要分别针对问题 1 和 2 的条件，给出新的修整策略。给出加工方案，并对方案作误差分析。

2 基本假设

1. 不考虑各组步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杠——螺母副的各种误差；
2. 认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级(10^{-3} 秒)，即认为打磨是瞬间完成的；
3. 三工作台的可移动范围足够大，能满足工件的加工要求；
4. 工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形，砂轮尺寸可任意选择。
5. 砂轮与工件开始接触磨削前，工作台应有一小段预运动，加工方案从预动后开始。
6. 砂轮在预动过程中可以在底座上往复调节，即可调节到与夹具基准面刚好接触的位置。
7. 砂轮的旋转轴不会碰到工件工作箱；
8. 工件母线方程一阶、二阶可导；
9. 对于工件，磨削过程是从左至右进行的；
10. 加工基准的砂轮初始位置为初始切点位置。

3 符号说明

符 号	含 义
$\{*\}$	坐标系，本题中“*”代表 A、B、C
b	工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离, $b = 250mm$
R	中台转轴到上工作台的控制丝杠—螺母副中心线的距离, $R = 300mm$
φ	砂轮直径
a	砂轮厚度
Δa	砂轮厚度微元
r	轮式砂轮横断面外轮廓线半径
α	轮式砂轮横断面外轮廓线张角， $\alpha \le 180^{\circ}$
$\Delta\alpha$	轮式砂轮横断面外轮廓线张角微元
ρ	母线的曲率半径
ϕ	初始切点处砂轮的法向量方向角

θ_0	步进电机的步进角度，θ_0=1º
h	丝杆的螺距，$h = 12mm$
ω	变速器的传动比，ω=10:1
Δx	磨床下台理论平移量
Δy	磨床中台理论平移量
$\Delta\theta$	磨床上台理论旋转角度
$\Delta\theta_0$	加工基准内上台的初始旋转角
$\Delta x'$	磨床下台实际平移量
$\Delta y'$	磨床中台实际平移量
$\Delta\theta'$	磨床上台实际旋转角度
n_x	磨床下台移动距离Δx对应的脉冲数
n_y	磨床中台移动距离Δy对应的脉冲数
n_θ	磨床上台旋转角度$\Delta\theta$对应的脉冲数

4 基本理论

4.1 坐标变换

平面中任意点P在不同坐标系中的描述是不同的，平面上任意一点P相对于平面直角坐标系$\{A\}$的位置，可以用2×1列向量${}^A\vec{p}$（称位置矢量）来表示

$$^A\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

其中p_x，p_y是点P在坐标系$\{A\}$中的两个坐标分量。

下面描述坐标系之间的变换关系。

4.1.1 坐标平移变换

假设坐标系$\{B\}$与$\{A\}$的方位相同，但是原点不重合，如图4-1所示。

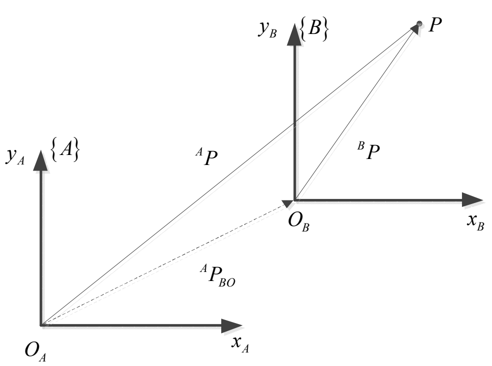


图 4-1 坐标平移变换

用位置矢量${}^A\vec{P}_{B0}\left(p_{xB0}, p_{yB0}\right)$描述坐标系$\{B\}$的原点在坐标系$\{A\}$中的位置，把${}^A\vec{P}_{B0}$

称为坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的平移矢量。如果点P在坐标系$\{B\}$中的位置矢量${}^{B}\vec{P}\left(p_{xB}, p_{yB}\right)$，则它相对于坐标系$\{A\}$的位置矢量${}^{A}\vec{P}\left(p_{xA}, p_{yA}\right)$可由矢量叠加得出，即

$$ {}^{A}\vec{P} = {}^{B}\vec{P} + {}^{A}\vec{P}_{B0} \tag{4-2} $$

$$ 或\begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xBo} \\ p_{yBo} \end{bmatrix} \tag{4-3} $$

4.1.2 坐标旋转变换

假设坐标系{B}与{A}的坐标原点相同，但是坐标轴方位不同，如图4-2所示。

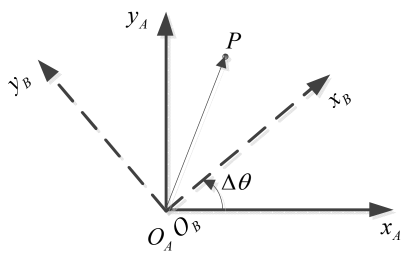


图 4-2　坐标旋转变换

为了确定空间某刚体B的方位，另设一个直角坐标系$\{B\}$与此刚体固接。用坐标系$\{B\}$的三个单位主矢量$\vec{x}_{\mathbf{B}}$、$\vec{y}_{\mathbf{B}}$相对于坐标系$\{A\}$的方向余弦组成的2×2矩阵${}_{B}^{A}R$来表示刚体B相对于坐标系$\{A\}$的方位，${}_{B}^{A}R$表达式如下：

$$ {}_{B}^{A}R = \begin{bmatrix} {}^{A}x_{B} & {}^{A}y_{B} \end{bmatrix} \tag{4-4} $$

$$ 或\ {}_{B}^{A}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \tag{4-5} $$

${}_{B}^{A}R$称为旋转矩阵，上标A代表参考坐标系$\{A\}$，下标B代表被描述的坐标系$\{B\}$。

坐标系$\{A\}$旋转角θ到坐标系$\{B\}$的旋转矩阵为：

$$ {}_{B}^{A}R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4-6} $$

θ为坐标系$\{A\}$的x轴正方向与坐标系$\{B\}$的x轴正方向之间的夹角。

任意一点P在两个不同的坐标系中$\{A\}$、$\{B\}$的描述${}^{A}\vec{P}$和${}^{B}\vec{P}$，具有下面的变换关系：

$$ {}^{A}\vec{P} = {}_{B}^{A}R \cdot {}^{B}\vec{P} \tag{4-7} $$

$$ 或\begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} \tag{4-8} $$

4.1.3 一般变换

一般的情况是坐标系$\{B\}$与$\{A\}$的方位不相同，而且坐标原点的位置也不重合，如

图4-3所示。

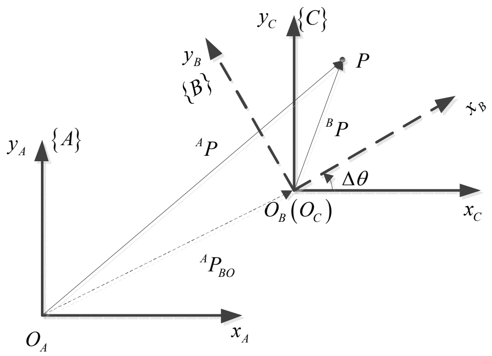


图 4-3　坐标一般变换

这种情况下，我们用矢量 $^A\vec{P}_{B0}$ 描述坐标系 $\{B\}$ 的原点相对于 $\{A\}$ 的位置；用旋转矩阵 ^A_BR 描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的方位。任意一点 P 在两个不同的坐标系中 $\{A\}$、$\{B\}$ 的描述 $^A\vec{P}$ 和 $^B\vec{P}$，具有下面的变换关系：

$$^A\vec{P} = {}^A_BR \cdot {}^B\vec{P} + {}^A\vec{P}_{B0} \tag{4-9}$$

$$或\begin{bmatrix} p_{xA} \\ p_{yA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xBo} \\ p_{yBo} \end{bmatrix} \tag{4-10}$$

一般变换对应的逆变换为：

$$^B\vec{P} = \left({}^A_BR\right)^{-1}\left({}^A\vec{P} - {}^B\vec{P}_{Bo}\right) \tag{4-11}$$

$$或\begin{bmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{xA} - p_{xBo} \\ p_{yA} - p_{yBo} \end{bmatrix} \tag{4-12}$$

4.2 曲率的概念及计算

曲率是刻画曲线弯曲程度的数学量，是一个局部概念。

4.2.1 曲率的概念

设曲线 C 具有连续转动的切线，在 C 上选定一点 M_0，作为度量弧的基点。如图 4-4。

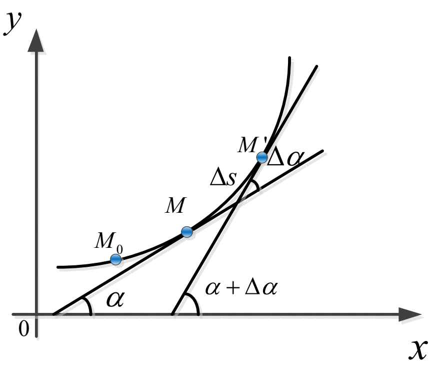


图 4-4　曲率计算示意图

设曲线 C 上的点 M 对应于弧 s，切线的倾角为 α，曲线上另一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$，切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$。那么，弧段 MM' 的长度为 $|s|$，当切点从 M 移到点 M' 时，切线

转过的角度为$\left|\Delta\alpha\right|$。比值$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$表示单位弧段上的切线转角，刻画了$MM'$的平均弯曲程度。称它为弧长段$MM'$的平均曲率。记作$\bar{k}$，$\bar{k}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$。当$\Delta s\to 0$时(即：$M\to M'$)，上述平均曲率的极限就称做曲线在点$M$处的曲率，记作$k$，$k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，当$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{d\alpha}{ds}$存在时，有$k=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$。

4.2.2 曲率的计算公式

设曲线的直角坐标方程为$y=f\left(x\right)$，且$f\left(x\right)$具有二阶导数。$\tan\alpha=y'$(α是曲线的切线与x轴正向夹角)，两边对x求导得$\sec^2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dx}=y''$，$\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{y''}{1+\left(y'\right)^2}$，$d\alpha=\dfrac{y''}{1+\left(y'\right)^2}dx$，又$ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx$，据曲率计算公式有

$$k=\left|\frac{d\alpha}{dx}\right|=\frac{\left|y''\right|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{3/2}} \tag{4-13}$$

一般称$\rho=\dfrac{1}{k}$为曲线在某一点的曲率半径。曲线上一点处的曲率半径越大, 曲线在该点处的曲率越小(曲线越平坦)；曲率半径越小, 曲率越大(曲线越弯曲)。

5 问题分析

本题需运用数学建模的方法，根据旋转体工件的母线方程$y=f(x)$，给出一个合理的加工方案，在尽可能短的时间内完成磨削，并作加工误差分析。

加工方案指为了完成加工任务的各个步骤（含具体内容）以及相应的数据，包括如何确定加工基准，如何选择加工次序，如何选择砂轮几何尺寸，如何确定三组控制步进电机在各时间段（自主进行时间分段）中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布等。

误差方析主要包括实际加工曲线与理论曲线在整体与局部的误差，误差的来源分析，采用什么数学量来表示上述误差，以及所采取的措施在减少加工误差方面的实际效果等。

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求。

5.1 设定坐标系

本题中涉及到磨床上台的旋转，下台和中台的平移，为清晰地描述它们的运动关系，设立如下三个平面直角坐标系。如图 5-1。

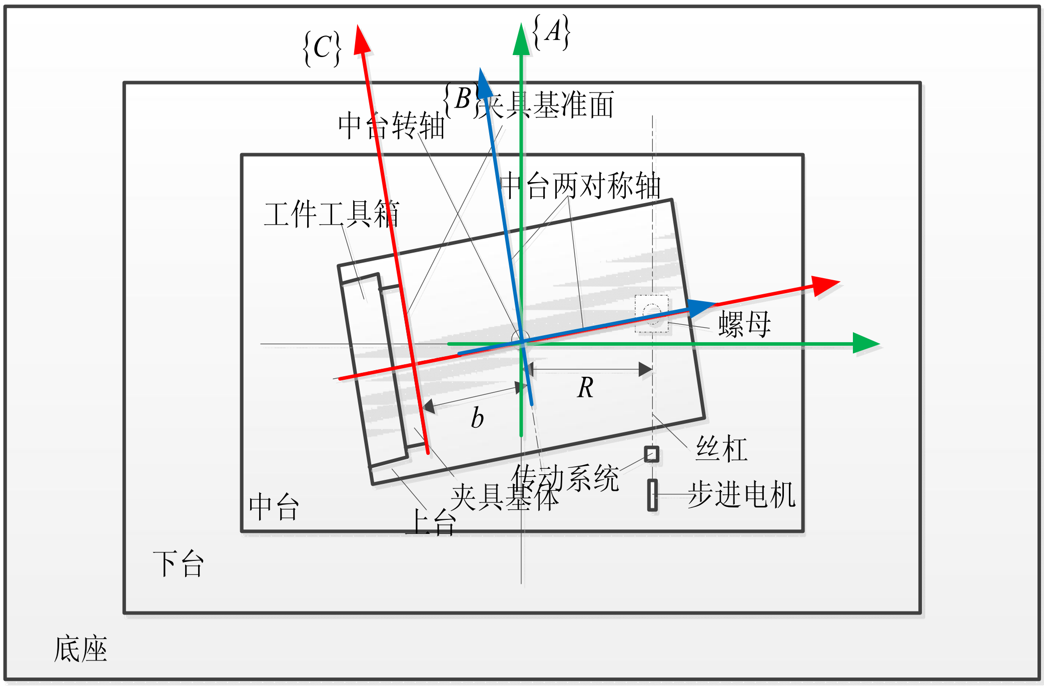


图 5-1　坐标系示意图

坐标系$\{A\}$，底座两对称轴构成的直角坐标系，原点为两坐标轴的交点。坐标系$\{A\}$是刚性坐标系，砂轮位于该坐标系。

坐标系$\{B\}$，上台两对称轴构成的直角坐标系，原点为两坐标轴的交点（即中台转轴）。

坐标系$\{C\}$，以夹具基准面的垂直投影为纵坐标，上台横轴为横坐标，其交点为坐标原点。坐标系$\{C\}$与坐标系$\{B\}$位于同一平面内，只是做了横轴方向的平移。原始工件母线方程根据坐标系$\{C\}$设定。

5.2 加工基准分析

首先对磨床上台、中台、下台的位置初始化。初始状态为三个台的对称轴在俯视条件下完全重合，此时的坐标原点为(0,0)，上台的旋转角为 0。

母线的初始方程为$y=f(x), x\in[c,d]$，建立在坐标系$\{C\}$中。根据坐标平移变换，则在坐标系$\{B\}$中，母线方程就变为$y=f(x+b), x\in[c-b,d-b]$。对于坐标系$\{B\}$，母线是刚性物体。在坐标系$\{B\}$中，工件母线始终与砂轮相切。为了满足始终相切，对坐标系$\{B\}$做旋转变换和平移变换，其中，平移变换是通过下台和中台的移动实现的，旋转变换是通过上台的旋转实现的。

由假设 6，设定加工基准时不需要调节下台和中台，仅仅需要调节上台使得工件母线起点($x=0$)与砂轮相切。在坐标系$\{B\}$上，母线在$x=-b$处的法线为：

$$y-f(0)=-\frac{1}{f'(0)}(x+b) \tag{5-1}$$

则上台初始的旋转角$\Delta\theta_0$为

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \phi \tag{5-2}$$

其中ϕ为初始切点处砂轮的法向量方向角。

$\Delta\theta_0$的正负表示上台的旋转方向，为负表示逆时针方向旋转，为正表示顺时针方向旋转。

工件的母线起点在坐标系$\{B\}$中的坐标为$(-b, f(0))$，该点经过旋转变换，在坐标系$\{A\}$中的坐标(p_{xo}, p_{yo})为

$$\begin{bmatrix} p_{xo} \\ p_{yo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta_0 & -\sin\Delta\theta_0 \\ \sin\Delta\theta_0 & \cos\Delta\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ f(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\cos\Delta\theta_0 - f(0)\sin\Delta\theta_0 \\ -b\sin\Delta\theta_0 + f(0)\cos\Delta\theta_0 \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

(p_{xo}, p_{yo})即为砂轮在坐标系$\{A\}$中的坐标。

得到加工基准：在坐标系$\{A\}$中，上台旋转的角度为$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \phi$，砂轮位置为$\left(-b\cos\Delta\theta_0 - f(0)\sin\Delta\theta_0, -b\sin\Delta\theta_0 + f(0)\cos\Delta\theta_0\right)$。

5.3 砂轮尺寸几何分析

在坐标系$\{B\}$或$\{C\}$中，砂轮与工件始终相切。我们在坐标系$\{C\}$内进行分析，以确定出砂轮几何尺寸。

1. 确定砂轮圆弧半径r

在坐标系$\{C\}$内，工件母线方程为$y = f(x)$。根据 4.2 所述曲率半径的算法，可以求出母线的二阶导数$f''(x)$和曲率半径$\rho(x)$。要确保工件与砂轮始终相切，在磨削外表面时，在$f''(x) \ge 0$的x区间内，曲率半径的最小值为$\min\rho(x)$，此时应满足$r \le \min\rho(x)$即可确保在打磨过程中工件与砂轮始终相切，我们取值为$r = \min\rho(x)$；若$f''(x) \ge 0$的x区间为$\varnothing$，则$r = +\infty$，即为圆柱形砂轮。

2. 确定砂轮的直径φ

要使得砂轮磨削到工件的所有部位，砂轮的半径$\frac{\varphi}{2}$必须不小于母线方程的最大值和最小值之差，即

$$\varphi \ge 2\left[\max f(x) - \min f(x)\right] \tag{5-4}$$

根据目前市场上的砂轮规格，取直径φ的区间为[150mm,300mm]。考虑到本文磨削的工件横坐标跨度为 600mm，则砂轮直径取值为：

$$\varphi = \max\left\{150, 2\left[\max f(x) - \min f(x)\right]\right\} \tag{5-5}$$

3. 确定砂轮厚度a

砂轮的厚度$a \le 2r$且为常数，当r比较小时，令$a = 2r$；一般情况下，r都比较大，可通过目前普遍采用的砂轮尺寸来确定。在本论文中，当$r \le 10mm$，取$a = 2r$，其他情况取$a = 20mm$。

4. 确定砂轮圆弧张角α

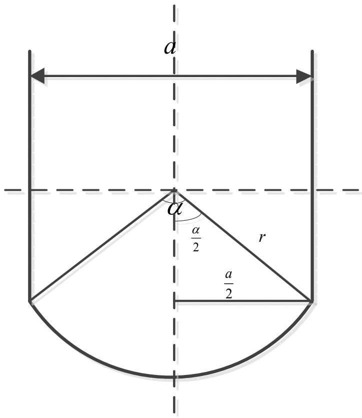


图 5-2　砂轮张角求解示意图

由图 5-2 的几何关系容易得到：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2r}\Rightarrow\alpha=2\arcsin\frac{a}{2r} \tag{5-6}$$

a一定，当$\alpha\to 0$，砂轮的弧度越趋于平缓，到达极端情况$\alpha=0$时，轮式砂轮就变成圆柱形砂轮。所以，圆柱形砂轮是轮式砂轮的特殊情况。

5.4 机理分析

在坐标系$\{B\}$中，曲线方程$y=f\left(x+b\right)$，对$\forall\left(x_0,y_0\right)$，当$x_0\to x_0+\Delta x_0$，则有$f\left(x_0\right)\to f\left(x_0+\Delta x_0+b\right)$，即$\Delta y_0=f\left(x_0+\Delta x_0+b\right)-f\left(x_0+b\right)$。点$\left(x_0,y_0\right)$处的法线方程为：

$$y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0+b\right)}\left(x-x_0\right),\quad y_0=f\left(x_0+b\right) \tag{5-7}$$

当磨削过程进行到点$\left(x_0,y_0\right)$时，设坐标系$\{B\}$转过的角度为θ，坐标的平移总量为p_{xB},p_{yB}。

1. 确定脉冲数(正变换)

当$x_0\to x_0+\Delta x_0$，法线转过的角度$\Delta\theta$为：

$$\begin{aligned}\Delta\theta&=\arctan\left(-\frac{1}{f'(x_0+\Delta x+b)}\right)-\arctan\left(-\frac{1}{f'(x_0+b)}\right)\\&=\arctan\left(\frac{1}{f'(x_0+b)}\right)-\arctan\left(\frac{1}{f'(x_0+\Delta x+b)}\right)\end{aligned} \tag{5-8}$$

为了保证工件与砂轮始终相切，需要将坐标系$\{B\}$内的点$\left(x+\Delta x_0,f\left(x+\Delta x_0+b\right)\right)$变换到坐标系$\{A\}$下砂轮的初始位置$\left(p_{xo},p_{yo}\right)$处，变换方程为：

$$\begin{bmatrix}p_{xo}\\p_{yo}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\Delta\theta)&-\sin(\theta+\Delta\theta)\\\sin(\theta+\Delta\theta)&\cos(\theta+\Delta\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0+\Delta x_0\\f(x_0+\Delta x_0+b)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{xB}+\Delta x\\p_{yB}+\Delta y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\Delta x=p_{xo}-\cos(\theta+\Delta\theta)(x_0+\Delta x_0)+\sin(\theta+\Delta\theta)f(x_0+\Delta x_0+b)-p_{xB} \tag{5-9}$$

$$\Rightarrow\Delta y=p_{yo}-\sin(\theta+\Delta\theta)(x_0+\Delta x_0)-\cos(\theta+\Delta\theta)f(x_0+\Delta x_0+b)-p_{yB} \tag{5-10}$$

由上可知，一组$\left(\Delta x,\Delta y,\Delta\theta\right)$即可表征工件在磨床的三层工作台上的运动情况。$\Delta x,\Delta y,\Delta\theta$有正负情况，为正表示表示工作台向坐标轴的正向移动或顺时针旋转；为负表示工作台向坐标轴的负向移动或逆时针旋转。

以下分析将$\Delta x, \Delta y, \Delta\theta$转化成脉冲信号：

每一个脉冲信号代表的位移s_0为：

$$s_0 = \frac{\varphi_0 h}{360\omega} \tag{5-11}$$

其中,θ_0为步进电机的步进角度，h为丝杆的螺距，ω为变速器的传动比。

下台和中台移动Δx，Δy对所对应应的脉冲数n_x，n_y为分别为：

$$n_x = \left\| \frac{\Delta x}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega\Delta x}{\theta_0 h} \right\| \tag{5-12}$$

$$n_y = \left\| \frac{\Delta y}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega\Delta y}{\theta_0 h} \right\| \tag{5-13}$$

上台旋转$\Delta\theta$所对应的脉冲数n_θ为:

$$n_\theta = \left\| \frac{R\tan(\Delta\theta)}{s_0} \right\| = \left\| \frac{360\omega R\tan(\Delta\theta)}{\theta_0 h} \right\| \tag{5-14}$$

注：$\|*\|$表示对“*”四舍五入取整，脉冲的正负表示电机的转动方向。

根据正变换得到工序指令(n_x, n_y, n_θ)。

2. 脉冲轨迹还原(逆变换)

因脉冲指令(n_x, n_y, n_θ)必须是整数，所以该组指令不能保证将$(x_0+\Delta x_0, f(x_0+\Delta x_0+b))$定位到目标点$(p_{xo}, p_{yo})$，而是定位到一个很接近的点$(p_x, p_y)$。

根据(5-12)，可得x方向上的实际平移量$\Delta x'$为:

$$\Delta x' = n_x s_0 \tag{5-15}$$

同理

$$\Delta y' = n_y s_0 \tag{5-16}$$

$$\Delta\theta' = \arctan\frac{n_\theta s_0}{R} \tag{5-17}$$

根据坐标逆变换，还原脉冲轨迹(p_x, p_y),即

$$\begin{bmatrix} p_{xo} \\ p_{yo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\Delta\theta') & -\sin(\theta+\Delta\theta') \\ \sin(\theta+\Delta\theta') & \cos(\theta+\Delta\theta') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{xB}+\Delta x' \\ p_{yB}+\Delta y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_x = (p_{xo}-p_{xB}-\Delta x')\cos(\theta+\Delta\theta') + (p_{yo}-p_{yB}-\Delta y')\sin(\theta+\Delta\theta') \tag{5-18}$$

$$\Rightarrow p_y = -(p_{xo}-p_{xB}-\Delta x')\sin(\theta+\Delta\theta') + (p_{yo}-p_{yB}-\Delta y')\cos(\theta+\Delta\theta') \tag{5-19}$$

5.5 误差原理

工序指令集磨削出的曲线方程为$y = p(x)$，母线方程为$y = f(x)$，在$\forall x_i$处的偏差为$|p(x_i)-f(x_i)|$，为了便于计算，将x离散成M个点。则局部误差为$|p(x_i)-f(x_i)|$，全局误差为局部误差的均值，即$\sum_{i=1}^{M}|p(x_i)-f(x_i)|\Big/M$，建立目标函数

$$\min_{\Delta l}\left\{10^{-\sigma}\max_i\left\{|p(x_i)-f(x_i)|\right\} + \sum_{i=1}^{M}|p(x_i)-f(x_i)|\Big/M\right\} \tag{5-20}$$

式中，σ表示局部误差与全局误差的数量级之差，以确保优化目标视局部误差和全局误差同等重要。通过优化Δl，可得出一组误差最小的工序指令集。

5.6 脉冲分布

脉冲指令执行过程是一个时间序列，为了减小前后两个脉冲发射时间间隔之差，本文采用三次样条对累积时间和累积脉冲数的样本点进行插值，以求得平滑变化的相邻脉冲发射时间间隔。具体分析如下：

假设通过模型计算出工序指令为：$t_i,(1 \le i \le N)$，

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} & t_1 \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} & t_N \end{pmatrix} \tag{5-21}$$

对上式做累积计算得到

$$\begin{pmatrix} |n_{x1}| & |n_{y1}| & |n_{\theta 1}| & t_1 \\ \sum_{j=1}^{2}|n_{xj}| & \sum_{j=1}^{2}|n_{yj}| & \sum_{j=1}^{2}|n_{\theta j}| & \sum_{j=1}^{2}t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{N}|n_{xj}| & \sum_{j=1}^{N}|n_{yj}| & \sum_{j=1}^{N}|n_{\theta j}| & \sum_{i=j}^{N}t_j \end{pmatrix} \tag{5-22}$$

分别对时间序列$\left(\sum_{j=1}^{i}t_j,\sum_{j=1}^{i}|n_{xj}|\right),\left(\sum_{j=1}^{i}t_j,\sum_{j=1}^{i}|n_{yj}|\right),\left(\sum_{j=1}^{i}t_j,\sum_{j=1}^{i}|n_{\theta j}|\right),(1 \le i \le N)$做三次样条插值，可得到每个脉冲的发射时间间隔，即得到脉冲分布。

6 模型的建立与求解

6.1 问题 1 和问题 2 的模型建立与求解

6.1.1 问题 1 和问题 2 的模型建立

问题 1 和问题 2 考虑砂轮与工件切点固定不变，切点位于与砂轮转轴垂直的最大中截面上，其法线方向角为$\frac{\pi}{2}$，可求得磨削问题 1 和问题 2 中的工件的加工基准。上台初始旋转角为：

$$\Delta\theta_0 = -\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{6-1}$$

砂轮初始位置

$$\begin{cases} p_{xo} = -b\cos\Delta\theta_0 - f(0)\sin\Delta\theta_0 \\ p_{yo} = -b\sin\Delta\theta_0 + f(0)\cos\Delta\theta_0 \end{cases} \tag{6-2}$$

将母线以步长Δl离散化，得到点对序列

$$(-b,f(0)),(\Delta l-b,f(\Delta l)),\cdots,(i\Delta l-b,f(i\Delta l)),\cdots,(N\Delta l-b,f(N\Delta l))$$

根据机理，一个步长Δl可得到一组磨床工序指令

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} \end{pmatrix} \tag{6-3}$$

因为脉冲指令(n_x, n_y, n_θ)是取整之后的结果，所以按照得到的工序指令磨削工件所得的表面曲线与母线存在误差。在此，以Δl为优化变量，以误差最小为目标建立优化模型。

工序指令集磨削出的曲线方程为$y = p(x)$，母线方程为$y = f(x)$，在$\forall x_i$处的偏差为$\left|p(x_i) - f(x_i)\right|$，为了便于计算，将$x$离散成$M$个点。则局部误差为$\left|p(x_i) - f(x_i)\right|$，全局误差为局部误差的均值，即$\sum_{i=1}^{M}\left|p(x_i) - f(x_i)\right| \Big/ M$，建立目标函数

$$\min_{\Delta l}\left\{10^{-\sigma}\max_i\left\{\left|p(x_i) - f(x_i)\right|\right\} + \sum_{i=1}^{M}\left|p(x_i) - f(x_i)\right| \Big/ M\right\} \tag{6-4}$$

式中，σ表示局部误差与全局误差的数量级之差，以确保优化目标视局部误差和全局误差同等重要。通过优化Δl，可得出一组误差最小的工序指令集。

求得的指令集保证了加工误差最小，下面来分析如何节省加工时间。

根据题目，控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级(10^{-3}秒），可以认为是瞬时发射，而不考虑其发射时间。另外，对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲，即脉冲的发射时间不能少于 1/100s，则有

$$\begin{cases} \Delta t_x \geq \dfrac{1}{100} \\ \Delta t_y \geq \dfrac{1}{100} \\ \Delta t_\theta \geq \dfrac{1}{100} \end{cases} \tag{6-5}$$

工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250——300 转，每转动 100 转，花费的时间是 20s~24s，在这段时间内，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4 mm，即x方向上的脉冲数不超过 1200 个($4/s_0$)，即脉冲频率区间为[50,60]，本文取区间上限，即 60，则得到下台电机发射脉冲时间间隔约束为

$$\Delta t_x \geq \frac{1}{60} \tag{6-6}$$

综合(6-5)、(6-6)，得到

$$\begin{cases} \Delta t_x \geq \dfrac{1}{60} \\ \Delta t_y \geq \dfrac{1}{100} \\ \Delta t_\theta \geq \dfrac{1}{100} \end{cases} \tag{6-7}$$

每条工序指令时间的执行时间t_i为

$$t_i = \max\left\{\Delta t_x n_{xi}, \Delta t_y n_{yi}, \Delta t_\theta n_{\theta i}\right\} \tag{6-8}$$

以磨削工件总时间最小化为目标，建立如下模型

$$\min T = \sum_{i=1}^{k} t_i \tag{6-9}$$

该模型以式(6-6)为约束。通过模型计算出工序指令的最小发射时间$t_i,(1 \le i \le N)$，

$$\begin{pmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{\theta 1} & t_1 \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{\theta 2} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{xN} & n_{yN} & n_{\theta N} & t_N \end{pmatrix} \tag{6-10}$$

脉冲指令执行过程是一个时间序列，为了减小前后两个脉冲发射时间间隔之差，本文采用三次样条对累积时间和累积脉冲数的样本点进行插值，以求得平滑变化的相邻脉冲发射时间间隔。具体分析如下：

对(6-10)做累积计算得到

$$\begin{pmatrix} |n_{x1}| & |n_{y1}| & |n_{\theta 1}| & t_1 \\ \sum_{j=1}^{2}|n_{xj}| & \sum_{j=1}^{2}|n_{yj}| & \sum_{j=1}^{2}|n_{\theta j}| & \sum_{j=1}^{2} t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{N}|n_{xj}| & \sum_{j=1}^{N}|n_{yj}| & \sum_{j=1}^{N}|n_{\theta j}| & \sum_{i=j}^{N} t_j \end{pmatrix} \tag{6-11}$$

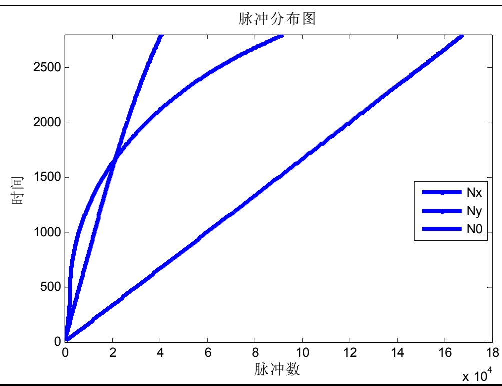
分别对时间序列$\left(\sum_{j=1}^{i} t_j, \sum_{j=1}^{i}|n_{xj}|\right), \left(\sum_{j=1}^{i} t_j, \sum_{j=1}^{i}|n_{yj}|\right), \left(\sum_{j=1}^{i} t_j, \sum_{j=1}^{i}|n_{\theta j}|\right), (1 \le i \le N)$做三次样条插值，可得到每个脉冲的发射时间间隔，即得到脉冲分布。

6.1.2 问题 1 和问题 2 的模型求解

考虑到优化变量Δl的取值范围较小，而且式(6-3)的最优化有非常典型的非线性特征。为了求得更加精确的解。这里利用遍历算法，以 0.01mm 为步长，以下界 0 上界 4mm 为边界进行遍历，最终求得加工方案为：

表 6-1　问题 1 的加工方案

加工基准	坐标系$\{A\}$下坐标(-247.80，134.15)，上台转角-0.95°
砂轮的 几何尺寸	厚度 a = 20mm，直径 φ=150mm
迭代步长	坐标系$\{B\}$下：1.71 mm
指令组数	351 组
总耗时(min)	46.7544
误差(mm)	平均误差=7.2974e-4；　最大误差=0.026；

<table>
<tr>
<td>加工次序
时间分段
脉冲数</td>
<td>
<table>
<tr><th>加工次序</th><th>下台脉冲数</th><th>中台脉冲数</th><th>上台脉冲数</th><th>指令持续时间(s)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-565</td><td>-95</td><td>-116</td><td>9.42</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-565</td><td>-93</td><td>-116</td><td>9.42</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-565</td><td>-90</td><td>-116</td><td>9.42</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-565</td><td>-89</td><td>-116</td><td>9.42</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>
详细结果参见附件 Excel：“结果.xls” 中表《问题 1》
</td>
</tr>
<tr>
<td>脉冲分布</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

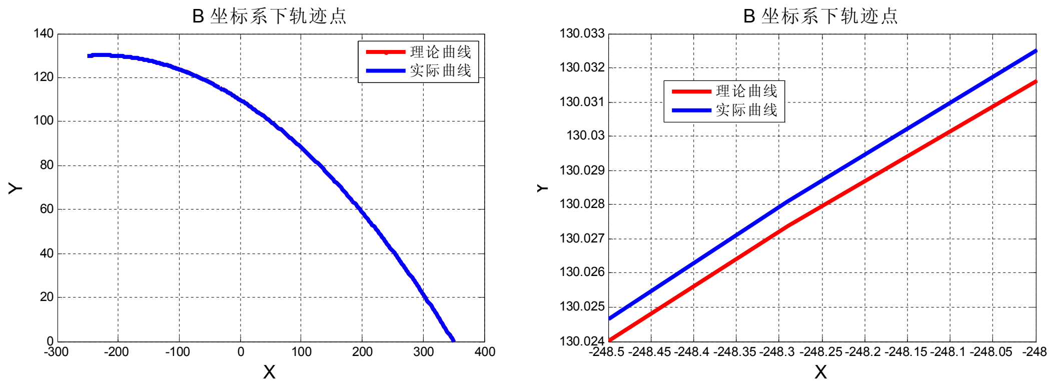


图 6-1　实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

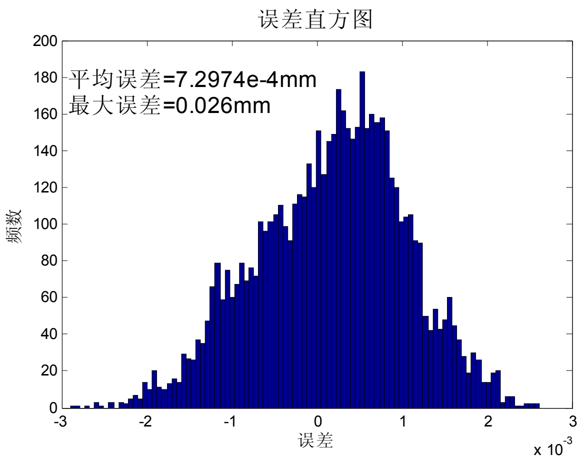
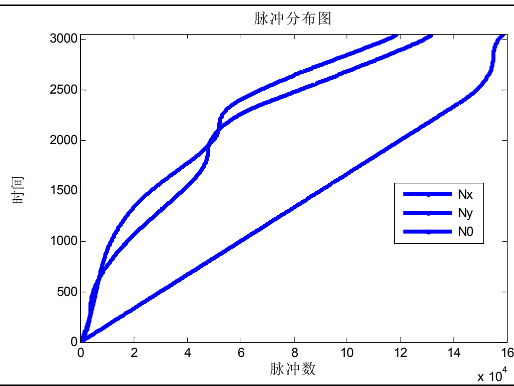


图 6-2　误差分布

表 6-2　问题 2 的加工方案

<table>
<tr><td>加工基准</td><td>坐标系$\{A\}$下坐标(-223.14,188.62)，上台转角-9.04°</td></tr>
<tr><td>砂轮的
几何尺寸</td><td>厚度 a = 20mm，直径 φ=150mm
外轮廓线半径r = 718.27mm,外轮廓线张角α=1.60°</td></tr>
<tr><td>迭代步长</td><td>坐标系$\{B\}$下：0.6 mm</td></tr>
<tr><td>指令组数</td><td>1000 组</td></tr>
<tr><td>总耗时(min)</td><td>50.94711</td></tr>
<tr><td>误差(mm)</td><td>平均误差= 7.1928e-4；　最大误差=0.029；</td></tr>
<tr><td>加工次序
时间分段
脉冲数</td><td>
<table>
<tr><th>加工次序</th><th>下台脉冲数</th><th>中台脉冲数</th><th>上台脉冲数</th><th>指令持续时间(s)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-149</td><td>40</td><td>53</td><td>2.48</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-149</td><td>39</td><td>53</td><td>2.48</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-149</td><td>40</td><td>53</td><td>2.48</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-149</td><td>39</td><td>53</td><td>2.48</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>
详细结果参见附件 Excel：“结果.xls” 中表《问题 2》</td></tr>
<tr><td>脉冲分布</td><td>
</td></tr>
</table>

对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

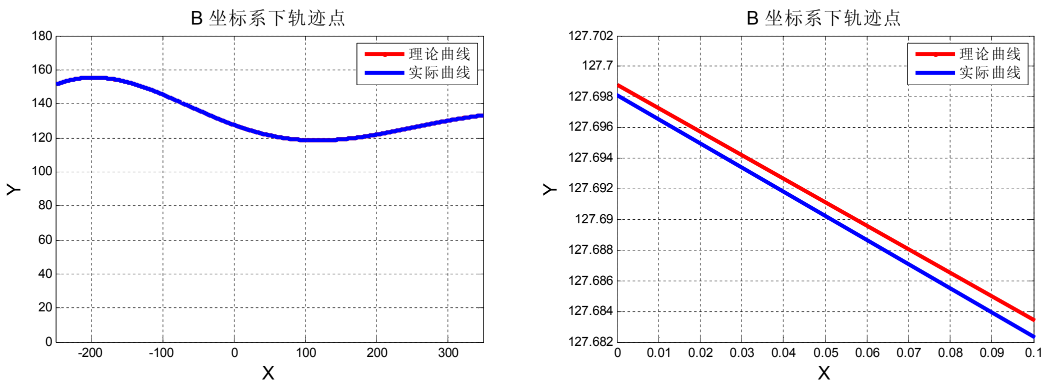


图 6-3　实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

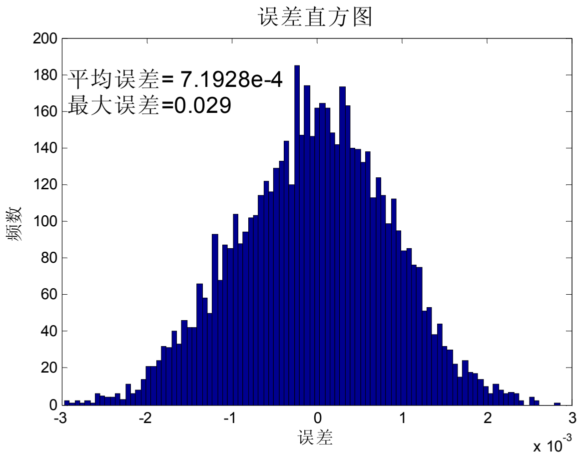


图 6-4　误差分布

6.2 问题 3 的模型建立与求解

6.2.1 修整策略

为了加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀，应该使砂轮与工件的切点不只是固定的一个点，而是在砂轮表面移动。在坐标系$\{A\}$中，当工件前进时，使用 6.1 中的模型只能求得砂轮表面相同切点下的加工方案。而为了使切点在砂轮表面的不同位置，那么工件就需要在法线方向平移。而平移的过程就是修政策略的核心。如图 6-5 所示，利用 6.1 中的模型，工件应该移动到位置 1，切点位置为切点 1，而为了使工件和砂轮的切点移动到切点 2，那么工件在移动到这个位置的时候，还应该在切点处沿法线方向平移，实际位置为经过平移修正的位置 2。

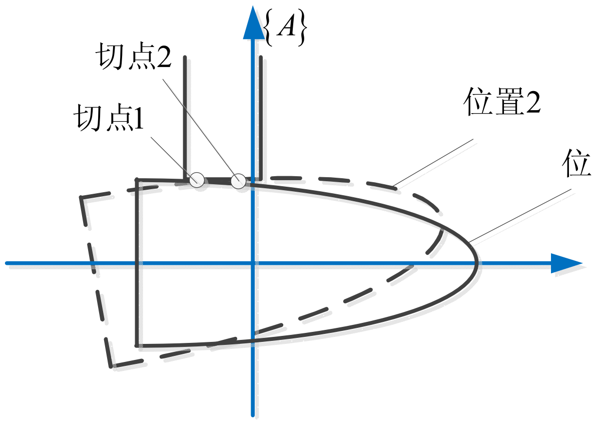


图 6-5　模型 1 的修整策略示意图

而由于在坐标系$\{A\}$中，工件的修整过程沿直线运动，那么只需要下平台和中平台移动。根据修整策略，建立的模型如下。

6.2.2 问题 3 的模型建立

为了使砂轮表面磨损均匀，厚度为a的砂轮中厚度Δa截面（垂直于砂轮旋转轴）磨削工件母线的范围为Δx_0。若设 m 为砂轮厚度的等分数，有

$$m=\frac{d-c}{\Delta x_0}=\frac{a}{\Delta a}\Rightarrow \Delta a=\frac{a\Delta x_0}{d-c}=\frac{a}{m} \tag{6-12}$$

加工基准：

在坐标系$\{A\}$下，轮式砂轮圆弧起点处法线方向角为$\phi=\dfrac{\pi}{2}$，上台旋转角为：

$$\Delta\theta_0=-\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right)-\frac{\pi}{2} \tag{6-13}$$

根据式(5-3)，可求得砂轮的初始位置(p_{xo},p_{yo})，运行到第k个指令集$(0\le k\le m)$的切点为$(p_{xo}+k\Delta a,p_{yo})$。

根据式(5-5)，求得$\Delta\theta$，执行第k个指令集的变换方程为

$$\begin{bmatrix} p_{xo}+k\Delta a \\ p_{yo} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\theta+\Delta\theta) & -\sin(\theta+\Delta\theta) \\ \sin(\theta+\Delta\theta) & \cos(\theta+\Delta\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\Delta x_0-b \\ f(k\Delta x_0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{xB}+\Delta x \\ p_{yB}+\Delta y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta x=p_{xo}+k\Delta a-\cos(\theta+\Delta\theta)(k\Delta x_0-b)+\sin(\theta+\Delta\theta)f(k\Delta x_0)-p_{xB} \tag{6-14}$$

$$\Rightarrow \Delta y=p_{yo}-\sin(\theta+\Delta\theta)(k\Delta x_0-b)-\cos(\theta+\Delta\theta)f(k\Delta x_0)-p_{yB} \tag{6-15}$$

根据式(5-12)、(5-13)、(5-14)可求得$\left(n_x,n_y,n_\theta\right)$，根据式(5-15)、(5-16)、(5-17)可求得$\Delta x',\Delta y',\Delta\theta'$，逆变换为：

$$\Rightarrow p_x=(p_{xo}+k\Delta a-p_{xB}-\Delta x')\cos(\theta+\Delta\theta')+(p_{yo}-p_{yB}-\Delta y')\sin(\theta+\Delta\theta') \tag{6-16}$$

$$\Rightarrow p_y=-(p_{xo}+k\Delta a-p_{xB}-\Delta x')\sin(\theta+\Delta\theta')+(p_{yo}-p_{yB}-\Delta y')\cos(\theta+\Delta\theta') \tag{6-17}$$

其余同问题 1 的模型。

6.2.3 问题 3 的模型求解

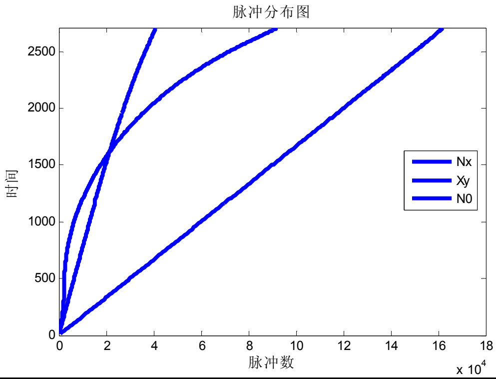
利用 6.1.2 中所述的遍历算法，可以求得加工方案为：

表 6-3　　问题 3 的加工方案

加工基准	坐标系$\{A\}$下坐标(-247.80,134.15)，上台转角-0.94°
砂轮的几何尺寸	厚度 a = 20mm，直径 φ=150mm
迭代步长	坐标系$\{B\}$下：1.72 mm
指令组数	349 组
总耗时(min)	45.1897
误差(mm)	平均误差= 7.4151e-4；　最大误差= 0.025；
加工次序 时间分段 脉冲数	见下表；详细结果参见附件 Excel：“结果.xls”　中表《问题 3》

加工次序	下台脉冲数	中台脉冲数	上台脉冲数	指令持续时间(s)
1	-551	-95	-117	9.18
2	-551	-94	-117	9.18
3	-552	-91	-117	9.20
4	-552	-90	-117	9.20
…	…	…	…	…

详细结果参见附件 Excel：“结果.xls”　中表《问题 3》

脉冲分布	

对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

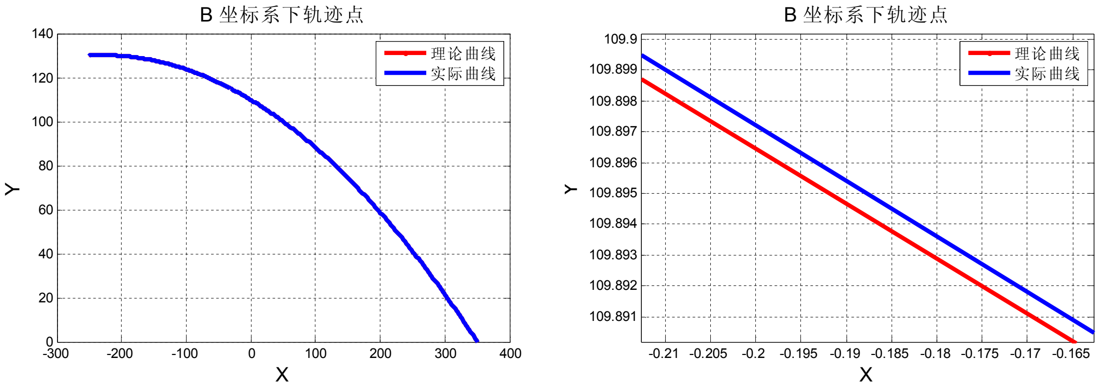


图 6-6　实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

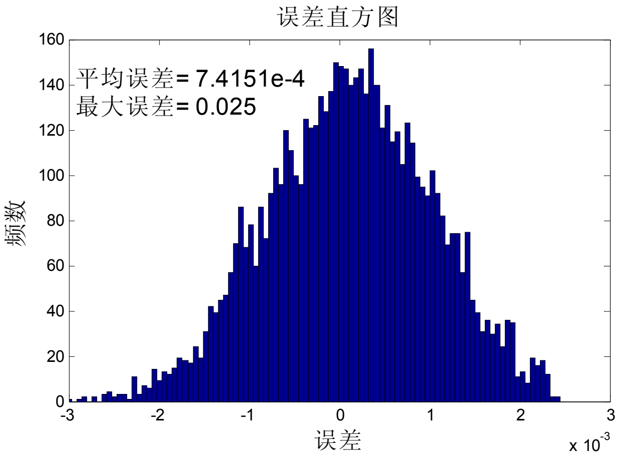


图 6-7　误差分布

6.3 问题 4 的模型建立与求解

6.3.1 修整策略

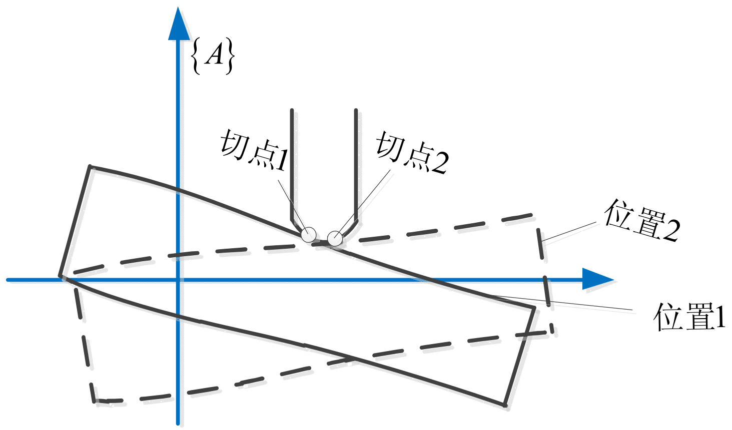


图 6-8　模型 2 的修整策略示意图

此问题的修改策略和 6.2.1 中的修整策略类似，不同的地方在于，砂轮采用了轮式。砂轮与工件的切点围绕砂轮圆弧方程变化，切点处的法向量不断旋转变化（如图 6-8 所示），建立了的模型如下。

6.3.2 问题 4 的模型建立

在坐标系 $\{A\}$ 下，轮式砂轮圆弧起点处法线方向角 $\phi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，上台旋转角为：

$$\Delta\theta_0=-\arctan\left(-\frac{1}{f'(0)}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{6-18}$$

根据(5-3)，求得砂轮的初始位置

$$\{p_{xo},p_{yo}\}=\left(-b\cos\Delta\theta_0-f(0)\sin\Delta\theta_0,-b\sin\Delta\theta_0+f(0)\cos\Delta\theta_0\right) \tag{6-19}$$

在坐标系 $\{A\}$ 下，砂轮圆弧的方程为:

$$\left[x-\left(r\sin\frac{\alpha}{2}+p_{xo}\right)\right]^2+\left[y-\left(r\cos\frac{\alpha}{2}+p_{yo}\right)\right]^2=r^2 \tag{6-20}$$

将角度 m 等分，有

$$m=\frac{d-c}{\Delta x_0}=\frac{\alpha}{\Delta\alpha}\Rightarrow\Delta\alpha=\frac{\alpha\Delta x_0}{d-c}=\frac{\alpha}{m} \tag{6-21}$$

第 k 次 $(0\le k\le m)$ 的切点为:

$$\left(p_{xo}+2r\sin\frac{\alpha}{2}-r\sin(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha,p_{yo}+2r\cos\frac{\alpha}{2}-r\cos(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha\right) \tag{6-22}$$

坐标系 $\{B\}$ 的旋转角为:

$$\Delta\theta=\arctan\left(\frac{1}{f'((k-1)\Delta x)}\right)-\arctan\left(\frac{1}{f'(k\Delta x)}\right)+\Delta\alpha \tag{6-23}$$

根据坐标变换有

$$\Delta x = p_{xo} + 2r\sin\frac{\alpha}{2} - r\sin(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - \cos(\theta+\Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) + \sin(\theta+\Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{xB} \tag{6-24}$$

$$\Delta y = p_{yo} + 2r\cos\frac{\alpha}{2} - r\cos(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - \sin(\theta+\Delta\theta)(k\Delta x_0 - b) - \cos(\theta+\Delta\theta)f(k\Delta x_0) - p_{yB} \tag{6-25}$$

根据式(5-12)、(5-13)、(5-14)可求得$\left(n_x, n_y, n_\theta\right)$，根据式(5-15)、(5-16)、(5-17)可求得$\Delta x', \Delta y', \Delta\theta'$，逆变换为：

$$p_x = \left[p_{xo} + 2r\sin\frac{\alpha}{2} - r\sin(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - p_{xB} - \Delta x'\right]\cos(\theta+\Delta\theta') + \left[p_{yo} + 2r\cos\frac{\alpha}{2} - r\cos(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - p_{yB} - \Delta y'\right]\sin(\theta+\Delta\theta') \tag{6-26}$$

$$p_y = -\left[p_{xo} + 2r\sin\frac{\alpha}{2} - r\sin(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - p_{xB} - \Delta x'\right]\sin(\theta+\Delta\theta') + \left[p_{yo} + 2r\cos\frac{\alpha}{2} - r\cos(\frac{1}{2}-\frac{k}{m})\alpha - p_{yB} - \Delta y'\right]\cos(\theta+\Delta\theta') \tag{6-27}$$

6.3.3 问题 4 的模型求解

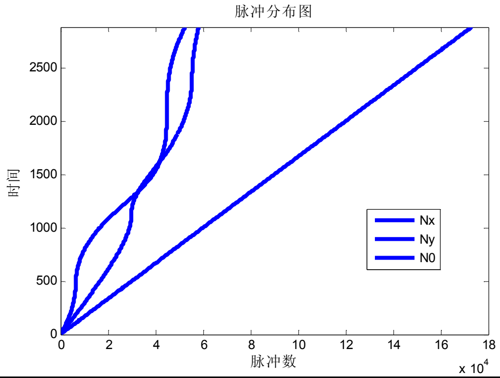
利用 6.1.2 中所述的遍历算法，可以求得加工方案为：

表 6-4　问题 4 的加工方案

加工基准	坐标系$\{A\}$下坐标(-225.74,185.49)，上台转角-8.24°
砂轮的 几何尺寸	厚度 a = 20mm，直径 φ=150mm 外轮廓线半径r = 718.27mm,外轮廓线张角α=1.60°
迭代步长	坐标系$\{B\}$下：0.68 mm
指令组数	883 组
总耗时(min)	48.08
误差(mm)	平均误差= 7.2679e-4；最大误差= 0.028
加工次序 时间分段 脉冲数	见下表

加工次序	下台脉冲数	中台脉冲数	上台脉冲数	指令持续时间(s)
1	-311	-137	-179	5.18
2	-311	-136	-179	5.18
3	-311	-134	-180	5.18
4	-312	-133	-180	5.20
…	…	…	…	…

详细结果参见附件 Excel：“结果.xls”　中表《问题 4》

脉冲分布	

对加工方案进行误差分析，可以发现误差较小。

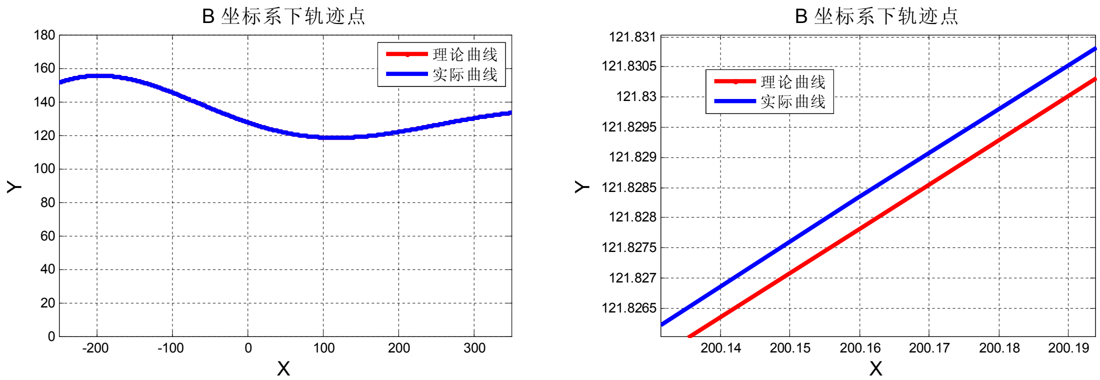


图 6-8　实际曲线和理论曲线整体及局部放大对比

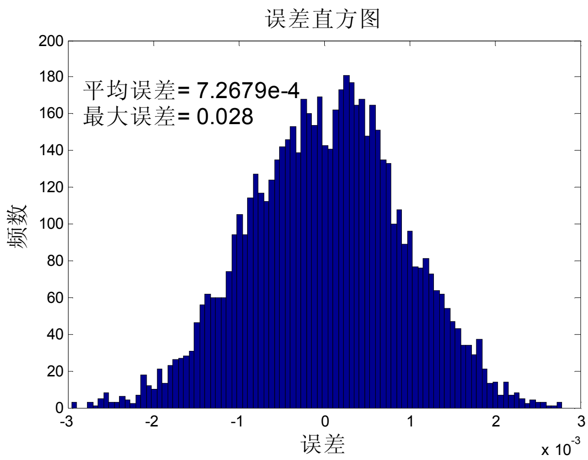


图 6-9　误差分布

7　模型的评价与改进

7.1　模型的评价

本文先后进行了问题分析，模型建立，数据处理，基于最小误差的遍历求解，加工方案的确定，误差分析等工作。对模型中几个关键问题进行分析，包括坐标系的设定、加工基准的确定、砂轮几何尺寸对问题的影响、机理分析、误差分析以及如何确定脉冲分布。

问题 1 和问题 2 转化为以全局误差和局部误差为目标的最优化问题，并且根据问题

的特性提出了较为快捷的遍历算法，并且用 matlab 求解得到合理的加工方案。

问题 3 提出了一种能使圆柱型砂轮表面的磨损尽量均匀的修整策略，可利用下台和中台的移动实现。而问题 4 则提出了一种基于轮式砂轮的修整策略，可利用下中上台的移动实现，并且用 matlab 求解得到合理的加工方案。

总体来说，本文较好的解决了题目中提出的 4 个问题，但还存在一些不足需要改进，改进方案如下。

7.2 模型的改进

7.2.1 模型 1 的改进

改进 1：在模型 1 中考虑的磨削轨迹为连接控制点的折线 $p_1(x)$，而实际轨迹是经过控制点的切线所连成的折线 $p_2(x)$，应用 $p_2(x)$ 替代 $p_1(x)$。如图 7-1 所示。

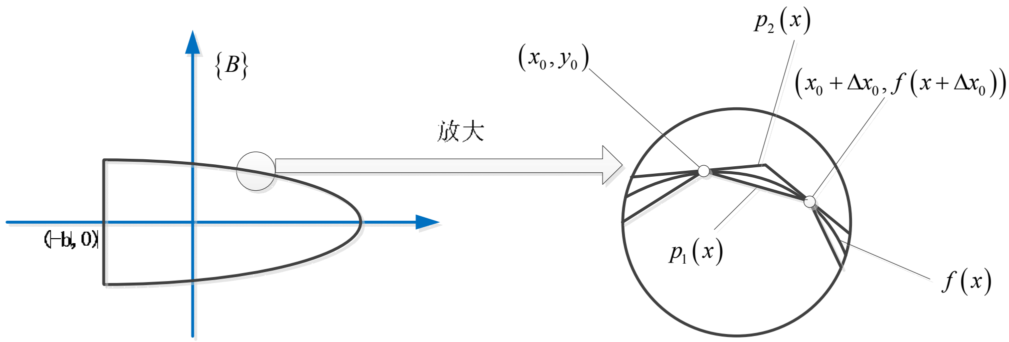


图 7-1　模型 1 的改进 1 示意图

改进 2：模型建立中是以 $|p(x)-f(x)|$ 的均值为全局误差，可以采用 $p(x)$ 和 $f(x)$ 围成的面积 $\int|p(x)-f(x)|dx$ 来度量全局误差。如图 7-2 所示。

结合改进 1 和改进 2，步长 Δl 优化模型(或误差优化模型)改进为:

$$\min_{\Delta l}\left\{10^{-\sigma}\max_i\left\{|p(x_i)-f(x_i)|\right\}+\int|p_2(x)-f(x)|dx\right\} \tag{7-1}$$

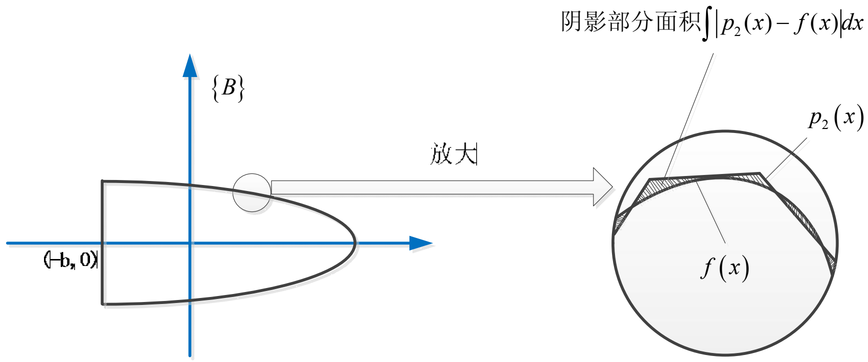


图 7-2　模型 1 的改进 2 示意图

7.2.2 模型 2 的改进

在模型 2 中考虑的磨削轨迹为连接控制点的折线 $p_1(x)$，而实际轨迹是与控制点相切的圆弧围成的曲线 $p_3(x)$。全局误差和步长 Δl 优化模型也可做相应的改进，如图 7-3。

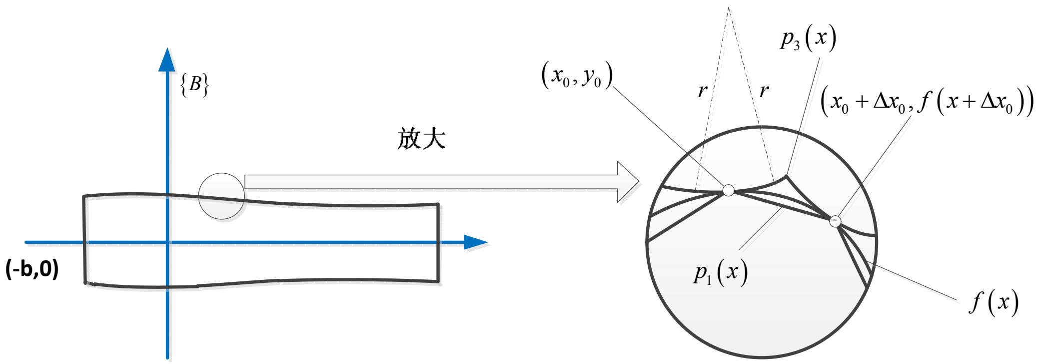


图 7-3　模型 2 的改进示意图

7.2.3 模型 3 的改进

考虑模型 3 时，用相等比例的 Δa 磨削相等比例的母线横坐标的变化量 Δx_0 来起到砂轮磨损均匀效果。这种方法有不妥之处，可改进为相等比例的 Δa 磨削相等比例的母线变化量 Δe，即

$$\frac{\Delta e}{e}=\frac{\Delta a}{a} \tag{7-2}$$

其中，$e=\int\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ 是母线长度。通过母线长度积分反解出移动 Δe 对应的母线横轴的移动量 Δx_0，进而通过机理得出工序指令。

7.2.4 模型 4 的改进

可做同模型 3 类似的改进，如下

$$\frac{\Delta e}{e}=\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \tag{7-3}$$

其余同模型 3 的改进。

8　参考文献

[1]. 王晓东 编著，算法设计与分析[M],，北京：清华大学出版社，2003 年 8 月：266
[2]. 林锉云，董加礼 编著，多目标优化的方法与理论[M]，吉林：吉林教育出版社，1992.8
[3]. 求是科技，Matlab7.0 从入门到精通人民邮电出版社，2006
[4]. 刑文训，谢金星，现代优化计算方法，清华大学出版社，2005
[5]. 黄宣国，空间解析几何与微分几何，复旦大学出版社，2003
[6]. 张艳军，周瑾，梁敏，2007 年全国研究生数学建模大赛：机械臂运动路径设计问题，武汉大学

9　附件

附件 1：结果（excel）
附件 2：程序源代码