

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 吸波材料与微波暗室问题的数学建模

摘 要

本文就尖劈形状吸波体的性能及导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能进行分析研究。

(1) 问题一：在大部分工程应用中，入射微波束相对于尖劈宽度可看作由无数条平行波线构成。不同方向和强度的入射波束，其最终反射波束的方向和强度可能不同；同一入射波束不同位置处的波线，其最终反射波线的方向和强度也可能不同。鉴于此现象，对于二维反射问题，本文首先对平面中单条入射波线的反射情况进行分析，建立了数值模型；然后，基于同一入射波束不同位置处波线的反射情况，建立了波束平面反射的统计模型。其中，单条波线的反射模型通过数值模拟得到；波束反射模型则通过对波线反射数值模型所得统计值进行数值拟合而得到，用多项式表示，该模型中包含了最终反射波线的反射方向、反射波的辐射强度、反射次数与已知反射率、诸几何参数之间定量关系的表达式。此外，本文还对波线的部分反射规律进行了解析分析，给出了只有一次反射以及尖劈角较小时的解析解。

通过分析三维反射发现，尖劈空缺中波线的三维反射和二维反射之间有明确的关系。这种关系由三维入射角和反射次数决定，而反射次数可以通过二维模型得到，据此将平面反射模型扩展为三维反射模型，从而得到尖劈形状吸波体的三维反射模型。

(2) 问题二：在天线微波的辐射下，暗室墙上的每一点都会成为一个被动微波辐射源，每一点反射出的微波又会辐射到其他点上。基于此现象，本文建立了暗室——天线系统的微波辐射耦合模型。这种模型借鉴了有限元的思想，

首先将墙面划分成若干个区域，其中每个区域都可能受到其他区域和天线的辐射；然后，根据每个区域的入射通量与反射通量之间的关系建立暗室——天线系统的耦合方程组，方程组中的未知量为各个区域的反射通量；最后采用超松弛迭代法（SOR）求解该方程组，得到墙面各区域的反射通量，进而求得静区接收到的来自墙面反射的功率，获得静区从信号源直接得到的微波功率之后，即可得到二者之比 γ 。最终建立了导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究模型。同时，建模过程中的数值试验表明，模型误差随着网格细化而快速收敛，据此确定了最终使用的网格密度，数值试验还验证了墙面耗散微波的功率等于天线发射微波的功率。

本文对该问题给出的场景进行了数值分析。计算出了使用两种吸波材料时，静区接收到的墙面反射功率和天线直射功率之比 γ 。计算结果显示：平板吸波材料无法满足导引仿真要求，而尖劈形吸波材料性能优良，满足要求。同时，使用两种材料时， γ 都在视在目标位于中间位置时取得最小值。

关键词：尖劈形状吸波体；波线反射模拟；微波反射统计模型；暗室微波反射耦合模型；暗室吸波性能

目录

一、问题重述.....	- 2 -
二、模型的假设.....	- 3 -
2.1 基本假设.....	- 3 -
2.2 问题 1 的假设.....	- 3 -
2.3 问题 2 的假设.....	- 3 -
三、符号说明.....	- 3 -
四、问题的分析.....	- 4 -
4.1 问题 1：尖劈形状吸波体的性能分析.....	- 4 -
4.2 问题 2：导弹导引仿真实验室用的微波暗室的性能研究.....	- 5 -
五、问题的求解.....	- 6 -
5.1 问题 1 的求解.....	- 6 -
5.1.1 单条波线的平面反射分析和近似模型.....	- 6 -
5.1.2 波带平面反射的数值模拟.....	- 7 -
5.1.3 三维反射模型.....	- 16 -
5.1.4 问题 1 小结.....	- 17 -
5.2 问题 2 的求解.....	- 18 -
5.2.1 反射方程.....	- 18 -
5.2.2 暗室微波反射模型的建立.....	- 18 -
5.2.3 模型收敛性分析.....	- 22 -
5.2.4 数值求解.....	- 24 -
5.2.5 问题 2 小结.....	- 28 -
六、模型的评价与改进.....	- 29 -
参考文献.....	- 29 -
附录.....	- 30 -
1、问题 1 程序截图.....	- 30 -
2、问题 1 核心源代码片段（语言为 C#）.....	- 30 -
3、问题 2 程序截图.....	- 31 -
4、问题 2 核心源代码片段（语言为 C#）.....	- 31 -

一、问题重述

隐身技术对军用装备意义重大，并可应用于其他科技领域。该技术的发展需要研制出高效吸波材料，同时也需要高性能的无回波暗室测试环境。

除了材料本身外，影响吸波材料性能的还有吸波体形状。一般将吸波体制成平板形状和特殊形状。无回波暗室一般使用锥体（正四棱锥或正圆锥等）或尖劈形状的吸波体，以降低辐射波被反射出去的能量。

吸波体的吸波性能计算需要考虑多次反射，微波暗室的电磁特性分析应研究各个墙面间的相互影响。如下所示，图 1-1 为尖劈形吸波体吸波功能的示意图，图 1-2 为无回波暗室工作示意图。通过 Maxwell 方程组和相应的边界条件获得理论解，不但模型复杂而且计算量大。

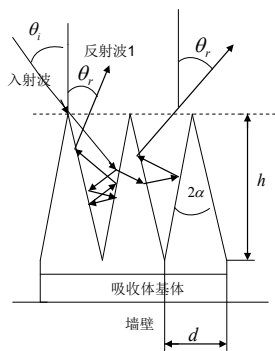


图 1-1 尖劈形吸波体吸波功能的示意

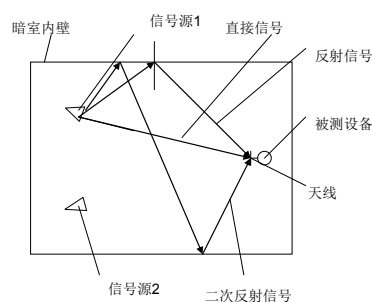


图 1-2 无回波暗室工作示意图

问题中假设采用简单直观的几何光学模型，来初步研究和分析尖劈形状特殊吸波体和微波暗室的性能，具体可分为以下两个方面：

(1) 研究如图 1-3 所示尖劈形状吸波体的性能。建立入射波线在一个尖劈空缺间反射过程的数学模型，分别刻画最终反射波线的方向，反射次数，反射波的辐射强度与已知反射率，诸几何参数之间的定量关系。

(2) 研究如图 1-4 所示导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能。基于已知数据，依据相关假设，建立数学模型，分别判断该微波暗室铺设平板形吸波材料和尖劈形吸波材料两种情况下能否满足静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 $\gamma \leq 0.03$ ，以及何时 γ 值最小。

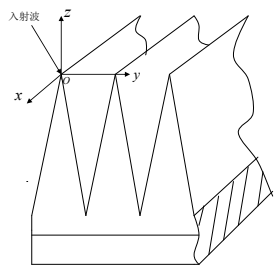


图 1-3 尖劈吸波体示意图

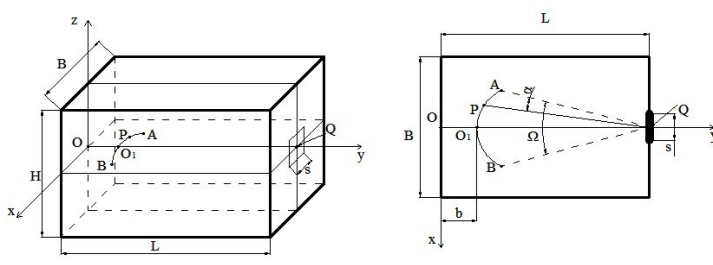


图 1-4 微波暗室示意图

二、模型的假设

2.1 基本假设

(1) 斜入射时，反射率满足余弦法则，即 $\rho(\theta) = \rho \cos(\theta)$ ，其中 θ 为入射角大小， ρ 为垂直入射反射率。

2.2 问题 1 的假设

- (1) 尖劈的长度沿 x 方向为无限长；
- (2) 仅考虑波在两种不同介质界面处的反射，不考虑边缘处的绕射；
- (3) 尖劈材料的电性能参数各处均匀；
- (4) 尖劈外形为等腰三角形；
- (5) 反射均为镜面反射。

2.3 问题 2 的假设

- (1) 视在天线发射功率强度分布满足余弦辐射体的分布规律；
- (2) 不计入模拟器的天线及其安装支架，以及导引头本身对辐射的影响；
- (4) 电磁波射到暗室六个墙面后，每点变成新的余弦辐射体；
- (5) 墙面反射率满足余弦法则。

三、符号说明

符号	符号说明
ρ	垂直入射时的反射率
α	1/2 尖劈角
h	尖劈高度
d	尖劈底部宽度
θ_i	初始入射波线射向角 (z 轴正向与入射波线负向的夹角)
$\theta_{i,n}$	入射波线第 n 次到达尖劈表面时的射向角 (尖劈表面法线方向与入射波线负向的夹角)
θ_r	最终反射波线射向角 (z 轴正向与反射波线正向的夹角)
$\bar{\theta}_r$	绝对反射角强度加权平均值
$\theta_{r,n}$	反射波线第 n 次到离开尖劈表面时的射向角 (尖劈表面法线方向与反射波线正向的夹角)
θ_y	入射波线和水平线 (y 轴) 的夹角
φ_i	入射波线方位角 (x 轴正向与入射波线在 xOy 平面上投影的夹角)
φ_r	反射波线方位角 (x 轴正向与反射波线在 xOy 平面上投影的夹角)
\mathbf{u}	三维空间下入射光的方向
I_i	初始入射波线辐射强度

$I_{i,n}$	入射波线第 n 次到达尖劈表面时的辐射强度
I_r	最终反射波线辐射强度
$I_{r,n}$	反射波线第 n 次离开尖劈表面时的辐射强度
n	反射次数
\bar{n}	反射次数强度加权平均值
γ	静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比，即功率噪声比
I_q	第 q 个计算区域的法向反射强度
$\omega_{q,k}$	计算区域 k 的面积相对于辐射源 q 的立体角
A_k	计算区域 k 的面积
$l_{q,k}$	计算区域 q 的中点到区域 k 的中点的距离
T_r	天线 r 的法向辐射强度

四、问题的分析

4.1 问题 1：尖劈形状吸波体的性能分析

该问题中，由波线和吸波体构成的系统中，变量可分为三部分：1、入射波线的方向；2、吸波体的反射率、几何参数；3、最终反射波线的方向、反射次数、辐射强度。三部分的关系为：变量 3 是变量 1、2 共同作用的结果。变量 2 中吸波体的几何参数包括尖劈角 2α ，尖劈高 h ，尖劈底部宽度 d ，其关键值为 α （锥体顶角的确定对锥体外形具有决定性意义，对锥体的吸波能力也有极大影响^[1]，该值能反映尖劈底边与高度的比值， $\tan(2\alpha)$ 越小，越有利于低频吸收^[2]）。变量 3 中的三个分项并非独立的，在变量 2 确定的条件下，对于某个确定方向的入射波线和尖劈角度，上述三个分项一一对应。

随着尖劈角度、入射波线方向和位置的变化，最终反射波线会出现不同的反射次数。当入射角大于一定值时，能够确定只发生一次反射，此时可以写出解析表达式。随着入射角减小，波线在尖劈空缺中的反射次数并且与入射点位置有关，变得难以分析，此时，可以按照几何光学的基本定律^[3]编写程序，用计算机模拟得到。

在实际应用中，我们通常考虑的是连续的尖劈空缺对连续的微波场的反射，而不是一条波线。为了简化问题，本文考虑一个尖劈空缺对一条满布尖劈空缺入口的平行微波束的反射情况。连续尖劈空缺对连续微波场的反射是对一个尖劈空缺反射情况的不断循环和重复，因此讨论单个的情况是有代表性的。

对于满布尖劈空缺入口的平行微波束，不同入射位置的波线可能有不同的反射次数、反射方向和反射能量。因此，一条波束可能产生若干条反射波束。为了进行定量讨论，借鉴工程上处理复杂问题时采用简化模型的思路，本文从统计意义上考虑波束的反射模型，即将反射次数和反射方向按照一定的方式进行平均，而反射强度即为各个方向上的反射强度之和。这样就可以用一种反射次数、反射方向和反射能量来表示尖劈空缺对一个微波束的反射。

波束反射的模拟可以通过计算机程序来实现：首先将波束离散成若干条波线，然后分别模拟出每一条波线在尖劈空缺的反射情况以及最终反射波线，最

后就可以得到整个波束的反射的情况。

经过分析发现,一条入射波束产生的多条最终反射波束的平面内反射角(即反射波线在 yOz 平面的投影与 z 轴的夹角)的正负号一般不相同,但是它们的绝对值相近。如果直接平均,将会完全消除反射波束在 yOz 平面上的方向特性,因此,本文采用对平面内反射角的绝对值进行加权平均的方式来获得平均绝对平面反射角,权重即为各反射波束的能量,这样的平均绝对反射角反应了反射光线与竖向坐标轴(即 z 轴)的夹角。对于不同方向的波束反射次数不相同的情况,通过对每条反射波束的反射次数加权平均得到平均反射次数,权重也为各反射波束能量。

通过数值模拟得到波束在不同入射角下的反射强度、平均反射角和平均反射次数后,就可以通过最小二乘拟合的方法拟合出反射强度、反射角和反射次数的解析的表达式,该表达式可以采用多项式来表示。

为了简化问题,本文首先分析并建立平面中尖劈空缺的微波反射模型,包括数值模拟和多项式拟合。然后分析平面模型与三维反射模型之间的关系,最终建立三维反射强度、反射角与二维反射强度、反射角之间的定量关系。从而使得拟合得到的二维反射模型能够用于微波的三维反射。

4.2 问题 2: 导弹导引仿真实验室用的微波暗室的性能研究

该问题中,暗室的尺寸、天线的安装位置、天线数量、静区大小、视在目标中心轴线处的发射功率大小及其变化速率都已确定,只需考虑暗室铺设不同的吸波材料即材料的垂直反射率 ρ 取不同的值时,判断静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从天线信号源直接得到的微波功率之比 γ 是否满足 $\gamma \leq 0.03$ 要求。

根据问题 2 的假设,天线发出的微波信号辐射到各个墙面后将会被反射,墙面上的每一点都会形成新的点辐射源,该辐射源是一个余弦辐射体,从该点辐射出的光线又会射向另一个墙面,又形成新的服从余弦辐射分布规律的点辐射源。因此,天线和暗室构成的环境是一个复杂的耦合辐射系统。由于每一条入射波线都会反射出无数条波线,用基于粒子反射的数学模型对暗室进行模拟将变得非常困难,几乎不可能实现。

由于暗室墙面和天线之间是耦合的系统,可以用耦合方法同时求解出墙面上各点的反射状态。墙上各点都满足一定的反射方程,由此可以建立各点受到的其他点的辐射强度与该点的反射强度之间的关系,如果将各点的反射强度设为未知数,则方程数量正好和未知数数量相等,求解该方程即可一次性得到墙面上各点的反射强度。为了进行数值计算,借鉴有限元的思想,可以沿一个墙面的两个方向将墙面均匀划分成 $n \times n$ 个矩形区域,当 n 足够大的时候,每个矩形区域可以看成是一个有面积的点,这样就可以对墙上每个区域的反射强度进行求解。

求解得到墙面上各点的微波反射功率后,就可以根据余弦辐射体的辐射规律算出静区接收到的来自墙面反射的微波功率,同样,也可以计算出静区接收到的来自天线的直接辐射微波功率,进而计算出静区接收到的反射功率和天线直射功率之比 γ 。对视在目标在各个位置上的情况进行计算,就可以分别判断使用平板吸波材料和尖劈吸波材料的暗室是否满足导引仿真的要求。

五、问题的求解

5.1 问题 1 的求解

由题目已知 $I_i=1$ ，且据题意可知尖劈角 2α 变化范围为 $[0,\pi]$ ，入射角 θ_i 的范围为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，入射角、反射角及尖劈角度正方向如图 5-1 所示。

5.1.1 单条波线的平面反射分析和近似模型

当尖劈的角度 2α 、垂直反射时的反射率 ρ 和入射强度 I_i 确定时，反射波线的角度 θ_r 和强度 I_r 与入射波线射向角度 θ_i 、入射点位置有关。把入射波线的入射角记作 θ_{in} ，把第 k ($k=1,2,\dots$) 次反射的波线的入射角记作 $\theta_{in,k}$ 。把入射波线和水平线 (y 轴) 的夹角用 θ_y 表示，向下为正，向上为负，如图 5-2 所示。把第 k 次反射之前和之后的 θ_y 分别用 $\theta_{y,k}$ 和 $\theta_{y,k+1}$ 表示，它们之间有如下递推关系：

$$\theta_{y,k+1} = \theta_{y,k} - 2\alpha$$

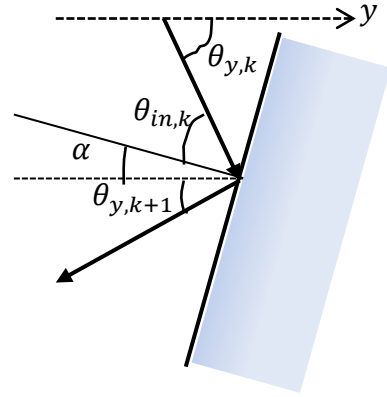
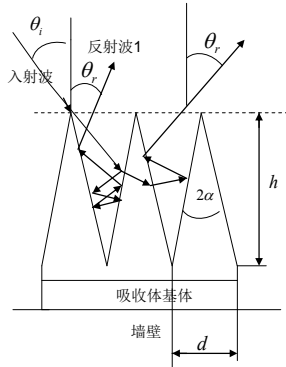


图 5-1 入射角、反射角、尖劈角度的正方向示意图 图 5-2 波线在平面内的反射示意图

由上式可以得到第 k 次反射的入射波线与水平轴的夹角为：

$$\theta_{y,k} = \frac{\pi}{2} - |\theta_i| - 2(k-1)\alpha$$

第 k 次反射时的入射角为

$$\theta_{in,k} = \theta_{y,k} - \alpha = \frac{\pi}{2} - |\theta_i| - (2k-1)\alpha$$

第 k 次反射时的反射率 ρ_k 为

$$\rho_k = \rho \cos(\theta_{in,k}) = \rho \cos\left[\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - (2k-1)\alpha\right]$$

假设入射波线反射 n 次后射出，反射角 θ_r 可以用下式计算

$$\theta_r = \text{sign}(\theta_i)(-1)^n \left\{ \frac{\pi}{2} - \left[2n\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| \right) \right] \right\} = \text{sign}(\theta_i)(-1)^n (\pi - |\theta_i| - 2n\alpha)$$

当入射波线的辐射强度 $I_i=1$ 时，射出波线的强度 I_r 可以用下式计算

$$I_r = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \cdot I_i = \rho^n \prod_{k=1}^n \cos \left[\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - (2k-1)\alpha \right]$$

如果反射次数 n 确定了，带入以上两个公式就可以计算出反射角 θ_r 和反射波线能量 I_r 。反射次数 n 与尖劈空缺的边界有关，从不同的位置射入的波线反射次数可能不一样。某种输入条件下的准确反射次数只有通过计算机模拟才能获得。

根据计算机模拟发现，当尖劈角度 2α 较小时，入射波线及出射波线分别与水平线（即 y 轴）的夹角几乎相等。模拟结果如图 5-3 所示，蓝线表示尖劈壁面，红线表示入射波线，黑线表示反射波线。

也就是说，当 α 较小时，可以假设入射波线、出射波线与水平线的夹角是相等的。根据前文的公式，就可以得到 n 的近似表达式，如下：

$$n = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| \right)}{\alpha}$$

5.1.2 波带平面反射的数值模拟

对于射向角为 θ_i 的入射波带，在一个尖劈角度为 2α 的尖劈几何空缺内，其不同情况下的反射模型可以分为以下几种情况获得：

i. 当 $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$ 时

反射次数 $n=1$ ，反射方向也只有一个，根据上文分析，可以得到解析解。其模拟结果如图 5-4 所示，蓝线表示尖劈壁面，红线表示入射波带，黑线表示反射波带。

入射波带与水平轴的夹角为： $\theta_{y,1} = \frac{\pi}{2} - |\theta_i|$

入射角为： $\theta_{in,1} = \theta_{y,1} - \alpha = \frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha$

则反射波带的射向角为： $\theta_r = -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha)$

根据反射率的余弦法则，可得：

反射率： $\rho_{2D} = \rho \cos(\theta_{in,1}) = \rho \cos \left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha \right)$

反射波的辐射强度： $I_{2Dr} = \rho_{2D} I_i = \rho \cos \left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha \right)$

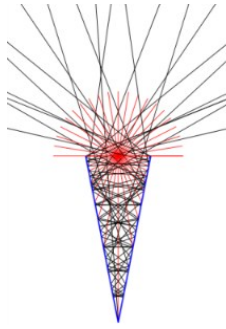


图 5-3 α 较小时单条波线的模拟结果

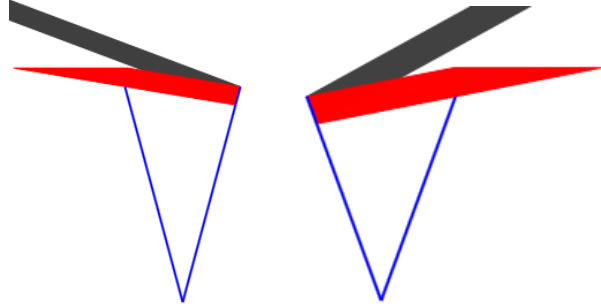


图 5-4 只有一次反射模拟结果示意图

ii. 当 $0 \leq |\theta_i| < \frac{\pi}{2} - \alpha$ 时

给定尖劈角度、反射率、入射坐标和入射角度后，用计算机模拟入射波线在尖劈两个壁面之间的反射过程，即可得到波线的出射角度、出射能量和反射次数等参数。计算机模拟步骤如下：

(1) 求解波线与壁面直线的交点，如果交点在波线出发点前方（沿该波线所在射线方向），且位于壁面区域内部，则说明波线即将被壁面反射，则转到(2)；否则转到(3)。

(2) 计算反射后的方向、强度等。得到一个新的表示波线的射线，然后转到(1)。

(3) 波线射出尖劈区域，模拟结束。

采用参数方程方法求平面中两条直线的交点的方程如下， t_0 和 t_1 为待求解的参数， (x_i, y_i) 为直线 i ($i = 0, 1$)上的一点， $(x_{dir i}, y_{dir i})$ 为直线 i 的方向：

$$\begin{cases} x_0 + x_{dir 0} t_0 = x_1 + x_{dir 1} t_1 \\ y_0 + y_{dir 0} t_0 = y_1 + y_{dir 1} t_1 \end{cases}$$

每一次壁面反射的入射角 $\theta_{i,k}$ 可以通过平面向量的点乘和反三角函数运算得到，也可以用前文推导得到的公式计算。

波线入射的位置对反射波线的方向和强度都有很大的影响，这可以在数值模拟中观察到，也可以从前文的公式中推测出来。因为反射波线的方向和能量具有很大的离散度，一个波线的模拟结果不具有代表性。本文用一段连续的波带的反射试验来讨论尖劈的吸波性能。

由于材料表面是由相同的尖劈组成的，一个尖劈空缺内的射线反射特性即可代表整个材料表面的反射特性。由于材料表面的尖劈很小，可假设一个尖劈空缺宽度内的入射波线是平行的，且沿宽度方向连续分布。

为了进行数值模拟，将连续分布的波线离散为有限条波线来模拟，每条离散波线代表它附近一小段区域中的连续波带，本文在模拟中使用了 1000 条波线。一次模拟结果如图 5-5a、图 5-5b 所示，蓝线表示尖劈壁面，红线表示入射波线，灰线表示出射波线，灰色的深浅表示出射波线能量的大小。

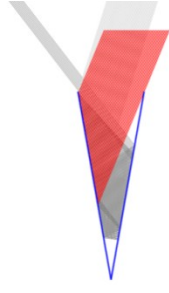


图 5- 5a $\alpha = 5^\circ$ ，波带反射特性的模拟

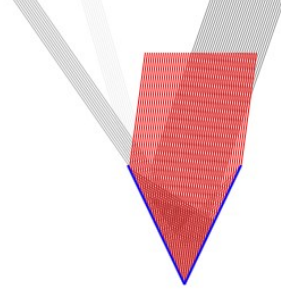


图 5- 5b $\alpha = 25^\circ$ ，波带反射特性的模拟

由于入射波带在该射向角下，反射波带方向不止一个，且其反射次数、辐射强度各异。针对这种情况，将各方向反射波带的反射角绝对值按辐射强度进行加权平均，可获得一个绝对反射角的平均值，将该值作为波带的最终反射方向。二维空间内的反射波带的反射角绝对值加权平均公式如下：

$$\theta_r = \bar{\theta}_r = \frac{\sum_{k=1}^m |\theta_{r,k}| I_k}{\sum_{k=1}^m I_k}$$

其中， m 为最终反射波带的方向的数目； $\theta_{r,k}$ 为第 k 个反射方向的反射波带的最终反射角； I_k 为第 k 个反射方向的反射波带的辐射强度； $\bar{\theta}_r$ 为加权后的反射波带的反射角。

同反射波带反射角计算，对于反射次数，将每个方向反射波带的反射次数按辐射强度进行加权平均，获得一个反射次数的平均值 \bar{n} ，将该值作为与最终的反射方向相对应的最终反射波带的反射次数。其计算公式为：

$$n = \bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^m |n_k| I_k}{\sum_{k=1}^m I_k}$$

其中， m 及 I_k 意义同上， n_k 为第 k 个反射方向对应的反射波带的反射次数。

对于辐射强度，设同一个方向上连续分布的波线按相同宽度被离散为多个波带，总的波带数目为 l ，对每条波带的辐射强度进行平均，获得反射波的平均辐射强度 \bar{I}_r ，公式如下：

$$I_r = \bar{I}_r = \frac{\sum_{j=1}^l I_j}{l}$$

其中， I_j 为第 j 条反射波带的辐射强度。

按照上述思路，对尖劈角度和入射波带射向角度分别取不同的值进行数值模拟，鉴于 ρ 只影响反射波的辐射强度，假定 $\rho = 1$ ，获得反射波带的绝对反射角平均值、反射次数平均值、辐射强度平均值与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。经过数值模拟得到的反射次数平均值（强度加权）、绝对反射角平均值（强度加权）、反射角平均值（强度加权）和辐射强度平均值与尖劈角度 α 、入射波带入射角 θ_i 的定量关系如图 5-6~图 5-9 所示，对于 ρ 取其他值的情况，可通过上文求 I_r 的公式知只需将此处反射波的辐射强度数值模拟的结果乘以 ρ^n 即得到相应的结果。

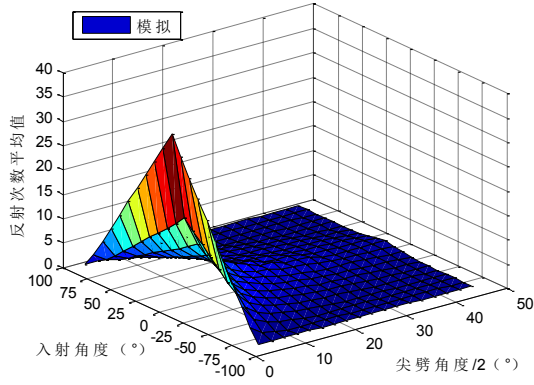


图 5-6 反射次数平均值 \bar{n} 与 θ_i 和 α 关系

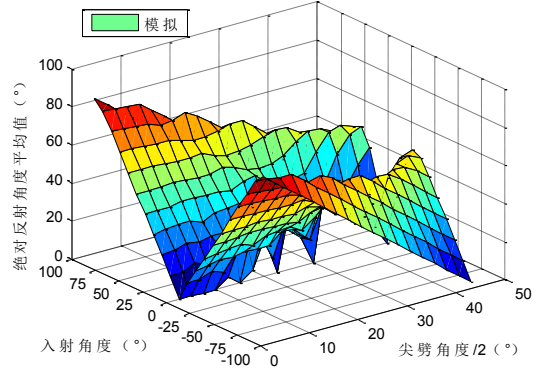


图 5-7 绝对反射角度平均值 $\bar{\theta}_r$ 与 θ_i 和 α 关系

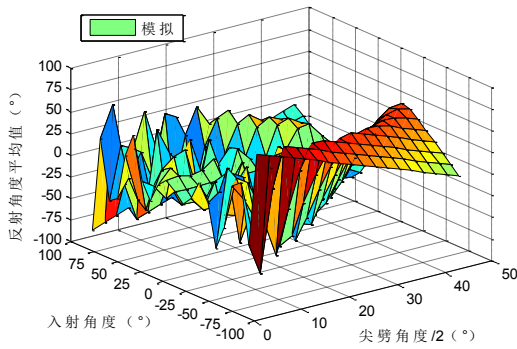


图 5-8 反射角度平均值与 θ_i 和 α 关系

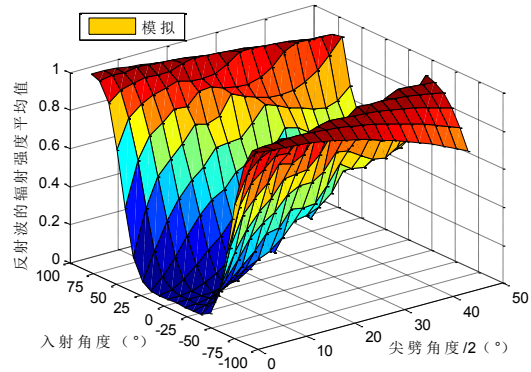


图 5-9 反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与 θ_i 和 α 关系

当对波带的反射建立模型的时候，为建立波带在尖劈空缺中的反射模型，将反射方向绝对值的平均值 $\bar{\theta}_r$ 、反射次数的平均值 \bar{n} 和平均反射强度 \bar{I}_r 定义为波带的反射方向 θ_r 、反射次数 n 和反射强度 I_r 。

分析图 5-6~图 5-9 和上述模型，可以得出尖劈形状吸波体的吸波性能随尖劈角度 α 、入射波线射向角 θ_i 及反射率 ρ 的变化规律如下：

(1) 对于给定的尖劈角度 α 和入射波线射向角 θ_i ，反射率 ρ 越小，则反射波辐射强度 I_r 越小，吸波体的吸波性能就越好；

(2) 对于给定的反射率 ρ ，尖劈角度 α 越小，波线射向角 θ_i 越接近 0° ，则反射波辐射强度 I_r 越小，吸波体的吸波性能就越好。

这里分别给出尖劈角度 $\alpha = 5^\circ$ 、 10° 、 20° 和 30° 时，入射波带的入射角取一系列值时得到的拟合结果。

(1)、 $\alpha = 5^\circ$

对数值模拟得到的反射波的反射次数平均值 \bar{n} 、绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 、辐射强度平均值 \bar{I}_r 随波带入射角度 θ_i 变化曲线按最小二乘法进行拟合，数值模拟结果及最小二乘法拟合结果见图 5-10~图 5-13。

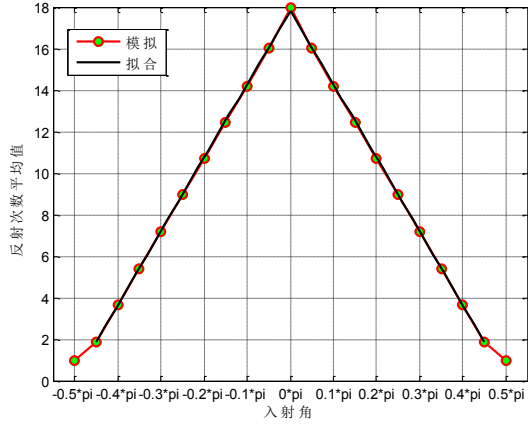


图 5-10 反射次数平均值 \bar{n} 与 θ_i 关系图

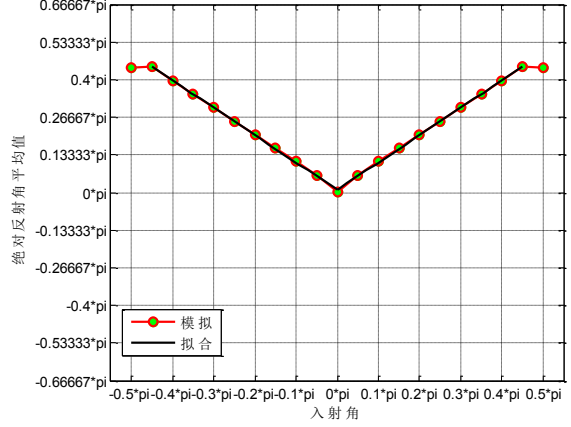


图 5-11 绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与 θ_i 关系图

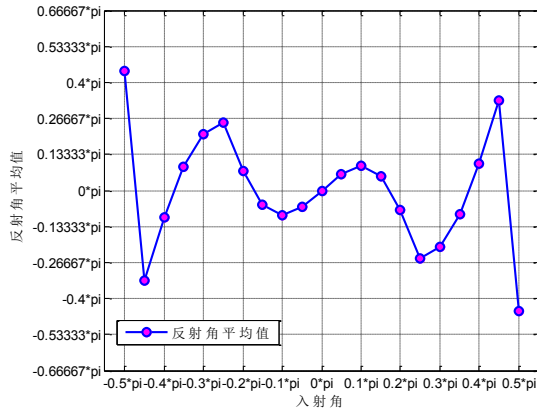


图 5-12 反射角平均值与 θ_i 关系图

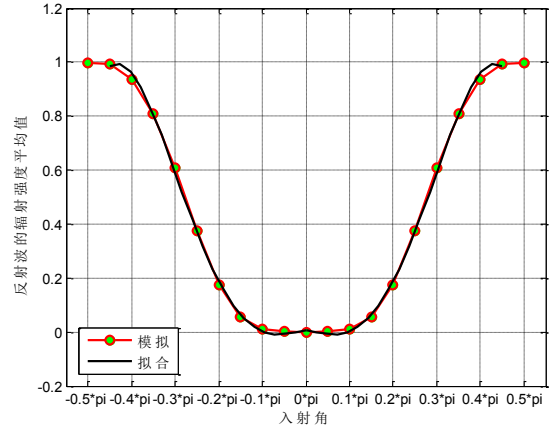


图 5-13 反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与 θ_i 关系图

$\left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right| \leq |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$ 的解析结果和 $|\theta_i| \leq \left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right|$ 的拟合结果综合如下：

反射次数平均值 \bar{n} 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{n} = \begin{cases} 1, & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.472\pi \\ 11.2993\theta_i + 17.8348, & -0.472\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ -11.2993\theta_i + 17.8348, & 0 \leq \theta_i \leq 0.472\pi \\ 1, & 0.472\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{\theta}_r = \begin{cases} -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.472\pi \\ -0.9721\theta_i + 0.0288, & -0.472\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ 0.9721\theta_i + 0.0288, & 0 \leq \theta_i \leq 0.472\pi \\ -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & 0.472\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{I}_r = \begin{cases} \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.472\pi \\ (-1.1557\theta_i^4 - 2.3131\theta_i^3 - 0.4232\theta_i^2 + 0.0672\theta_i + 0.0051)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & -0.472\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ (-1.1557\theta_i^4 + 2.3131\theta_i^3 - 0.4232\theta_i^2 - 0.0672\theta_i + 0.0051)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & 0 \leq \theta_i \leq 0.472\pi \\ \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & 0.472\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

$$n = \bar{n}; \quad \theta_r = \bar{\theta}_r; \quad I_r = \bar{I}_r$$

(2)、 $\alpha = 10^\circ$

对数值模拟得到的反射波的反射次数平均值 \bar{n} 、绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 、辐射强度平均值 \bar{I}_r 随波带入射角度 θ_i 变化曲线按最小二乘法进行拟合,数值模拟结果及最小二乘法拟合结果见图 5-14~图 5-17。

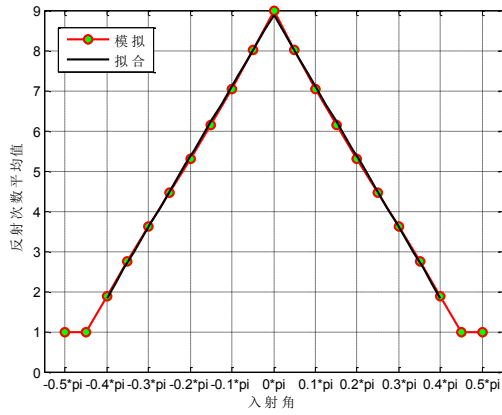


图 5-14 反射次数平均值 \bar{n} 与 θ_i 关系图

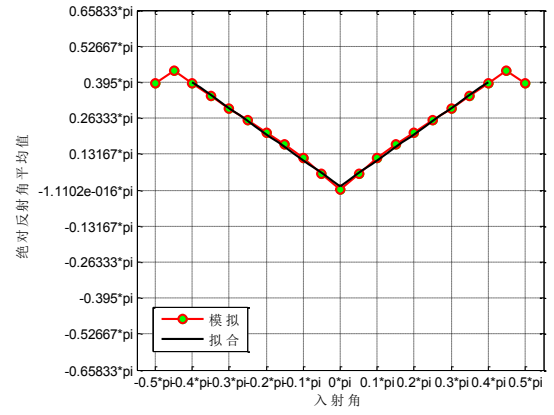


图 5-15 绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与 θ_i 关系图

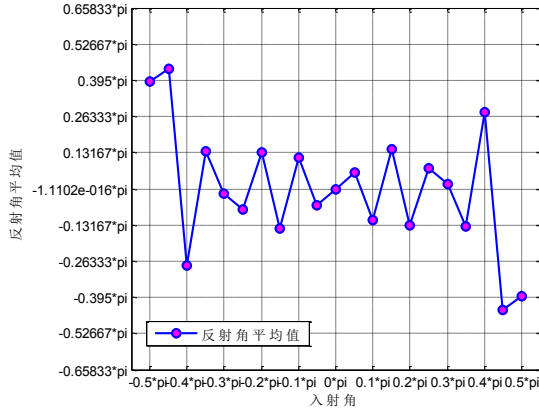


图 5-16 反射角平均值与 θ_i 关系图

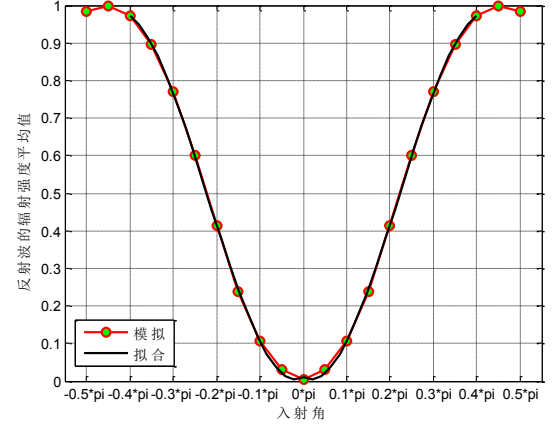


图 5-17 反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与 θ_i 关系图

$\left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right| \leq |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$ 的解析结果和 $|\theta_i| \leq \left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$ 的拟合结果综合如下:

反射次数平均值 \bar{n} 与入射角 θ_i 的函数式为:

$$\bar{n} = \begin{cases} 1, & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.444\pi \\ 5.5894\theta_i + 8.8753, & -0.444\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ -5.5894\theta_i + 8.8753, & 0 \leq \theta_i \leq 0.444\pi \\ 1, & 0.444\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与入射角 θ_i 的函数式为:

$$\bar{\theta}_r = \begin{cases} -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.444\pi \\ -0.954\theta_i + 0.0437, & -0.444\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ 0.954\theta_i + 0.0437, & 0 \leq \theta_i \leq 0.444\pi \\ -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & 0.444\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与入射角 θ_i 的函数式为:

$$\bar{I}_r = \begin{cases} \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.444\pi \\ (0.951\theta_i^3 + 1.9785\theta_i^2 + 0.2184\theta_i + 0.0095)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & -0.444\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ (-0.951\theta_i^3 + 1.9785\theta_i^2 - 0.2184\theta_i + 0.0095)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & 0 \leq \theta_i \leq 0.444\pi \\ \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & 0.444\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

$$n = \bar{n}; \quad \theta_r = \bar{\theta}_r; \quad I_r = \bar{I}_r$$

(3)、 $\alpha = 20^\circ$

对数值模拟得到的反射波的反射次数平均值 \bar{n} 、绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 、辐射强度平均值 \bar{I}_r 随波带入射角度 θ_i 变化曲线按最小二乘法进行拟合,数值模拟结果及最小二乘法拟合结果见图 5-18~图 5-21。

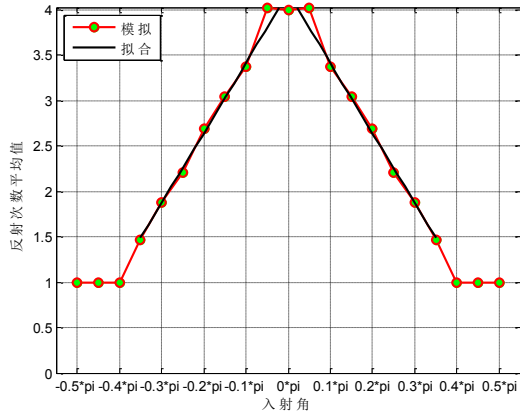


图 5- 18 反射次数平均值 \bar{n} 与 θ_i 关系图

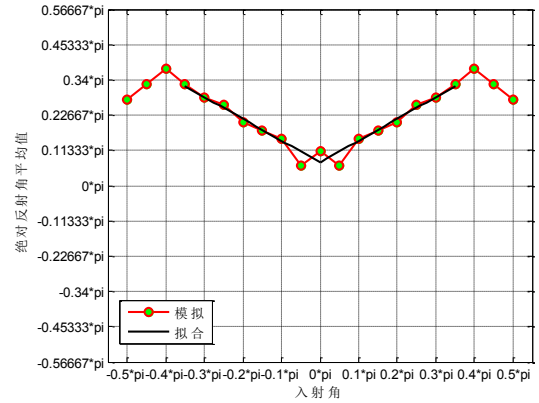


图 5- 19 绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与 θ_i 关系图

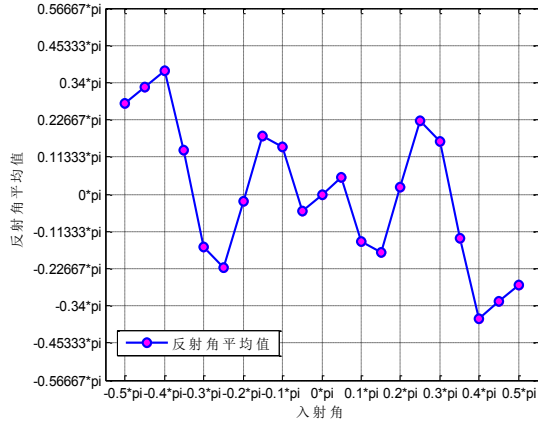


图 5-20 反射角平均值与 θ_i 关系图

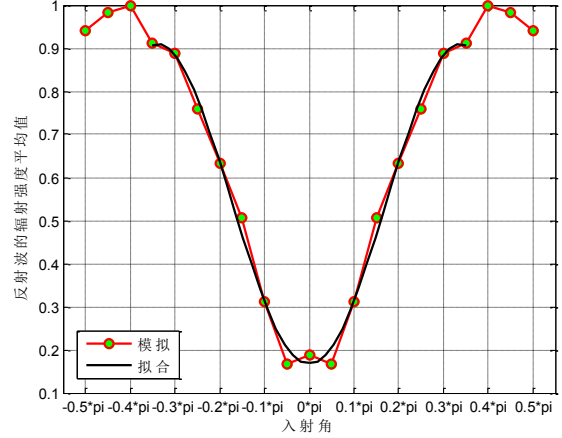


图 5-21 反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与 θ_i 关系图

$\left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right| \leq |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$ 的解析结果和 $|\theta_i| \leq \left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right|$ 的拟合结果综合如下：

反射次数平均值 \bar{n} 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{n} = \begin{cases} 1, & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.389\pi \\ 2.4544\theta_i + 4.1818, & -0.389\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ -2.4544\theta_i + 4.1818, & 0 \leq \theta_i \leq 0.389\pi \\ 1, & 0.389\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{\theta}_r = \begin{cases} -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.389\pi \\ -0.7021\theta_i + 0.2333, & -0.389\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ 0.7021\theta_i + 0.2333, & 0 \leq \theta_i \leq 0.389\pi \\ -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & 0.389\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{I}_r = \begin{cases} \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.389\pi \\ (1.3291\theta_i^3 + 2.1518\theta_i^2 + 0.0893\theta_i + 0.1706)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & -0.389\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ (-1.3291\theta_i^3 + 2.1518\theta_i^2 - 0.0893\theta_i + 0.1706)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & 0 \leq \theta_i \leq 0.389\pi \\ \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & 0.389\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

$$n = \bar{n}; \quad \theta_r = \bar{\theta}_r; \quad I_r = \bar{I}_r$$

(4)、 $\alpha = 30^\circ$

对数值模拟得到的反射波的反射次数平均值 \bar{n} 、绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 、辐射强度平均值 \bar{I}_r 随波带入射角度 θ_i 变化曲线按最小二乘法进行拟合，数值模拟结果及最小二乘法拟合结果见图 5-22~图 5-25。

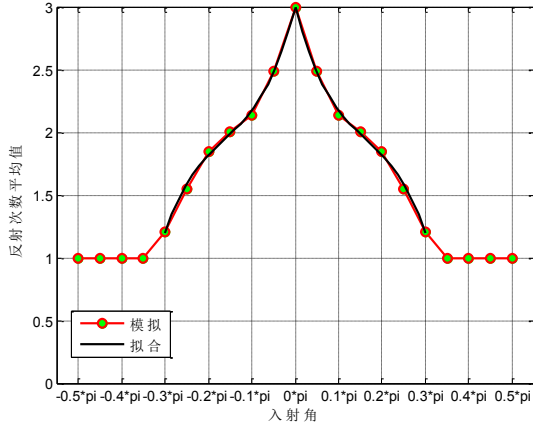


图 5-22 反射次数平均值 \bar{n} 与 θ_i 关系图

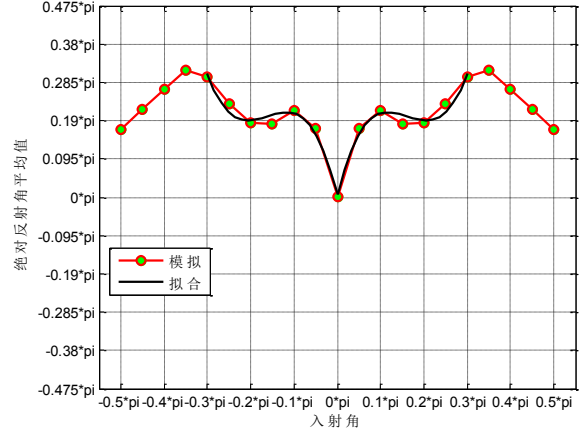


图 5-23 绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与 θ_i 关系图

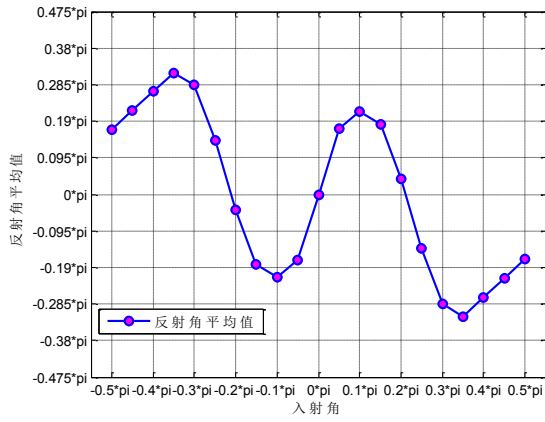


图 5-24 反射角平均值与 θ_i 关系图

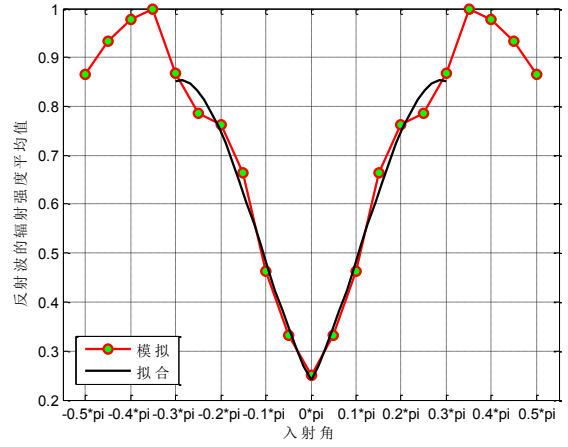


图 5-25 反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与 θ_i 关系图

$\left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right| \leq |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$ 的解析结果和 $|\theta_i| \leq \left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right|$ 的拟合结果综合如下：

反射次数平均值 \bar{n} 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{n} = \begin{cases} 1, & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.333\pi \\ 4.0308\theta_i^3 + 6.2083\theta_i^2 + 4.185\theta_i + 2.9987, & -0.333\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ -4.0308\theta_i^3 + 6.2083\theta_i^2 - 4.185\theta_i + 2.9987, & 0 \leq \theta_i \leq 0.333\pi \\ 1, & 0.333\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

绝对反射角平均值 $\bar{\theta}_r$ 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{\theta}_r = \begin{cases} -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.333\pi \\ -5.9435\theta_i^3 - 9.0752\theta_i^2 - 4.274\theta_i + 0.0216, & -0.333\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ 5.9435\theta_i^3 - 9.0752\theta_i^2 + 4.274\theta_i + 0.0216, & 0 \leq \theta_i \leq 0.333\pi \\ -\text{sign}(\theta_i)(\pi - |\theta_i| - 2\alpha), & 0.333\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

反射波的辐射强度平均值 \bar{I}_r 与入射角 θ_i 的函数式为：

$$\bar{I}_r = \begin{cases} \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & -0.5\pi \leq \theta_i \leq -0.333\pi \\ (0.9278\theta_i^3 + 1.0194\theta_i^2 - 0.05518\theta_i + 0.2398)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & -0.333\pi \leq \theta_i \leq 0 \\ (-0.9278\theta_i^3 + 1.0194\theta_i^2 + 0.05518\theta_i + 0.2398)\rho^{\bar{n}(\theta_i)}, & 0 \leq \theta_i \leq 0.333\pi \\ \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\theta_i| - \alpha\right), & 0.333\pi \leq \theta_i \leq 0.5\pi \end{cases}$$

$$n = \bar{n}; \quad \theta_r = \bar{\theta}_r; \quad I_r = \bar{I}_r$$

5.1.3 三维反射模型

与平面问题相比，三维空间中的波线多了一个 x 方向的分量。三维入射角波线在 xOy 平面中的投影与 x 轴正向的夹角用 φ_i 来描述，在 yOz 平面中投影的角度仍然用 θ_i 。出射波线在 yOz 中投影的角度仍然为 θ_r ，在 xOy 平面中的投影与 x 轴负方向的夹角为 φ_r 如图 5-26 所示。

根据镜面反射的基本原理容易推得，三维情况下反射波线在 yOz 平面中的投影和平面情况下的反射波线是重叠的，二者反射次数 n 也相同。三维问题与二位问题的不同之处在于，每次壁面反射时入射波线与壁面的夹角发生了改变。

把三维空间下入射光的方向记为 \mathbf{v} ，其中各个分量如下：

$$v_x = -\frac{\sin(\theta_i)}{\tan(\varphi_i)}; \quad v_y = \sin(\theta_i); \quad v_z = -\cos(\theta_i)$$

注意，方向 \mathbf{v} 不是一个单位向量，它的模为：

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + 1}$$

入射光在 yOz 平面中的投影向量为：

$$\mathbf{v}_{2D} = (v_y, v_z)^T, \quad |\mathbf{v}_{2D}| = 1$$

由于壁面平行于 x 轴，在反射的时候 x 分量 v_x 大小和符号都不变。每一次壁面反射时的反射率必须使用空间倾角进行计算，即波线与壁面之间的三维夹角 θ_{3D} 。

若将 yOz 平面中的二维夹角记为 θ_{2D} ，则波线和壁面的三维夹角 θ_{3D} 以及该波线和壁面的平面投影夹角 θ_{2D} 如图 5-27 所示，进一步可以得到二者的关系表达式为：

$$\cos(\theta_{3D}) = \frac{\cos(\theta_{2D}) |\mathbf{v}_{2D}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\cos(\theta_{2D})}{\sqrt{v_x^2 + 1}} = \frac{\cos(\theta_{2D})}{\sqrt{\left(\frac{\sin(\theta_i)}{\tan(\varphi_i)}\right)^2 + 1}}$$

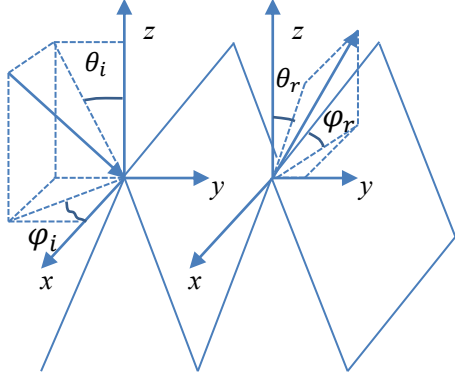


图 5- 26 入射波线方向示意图

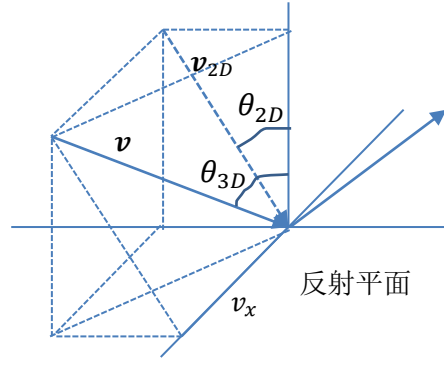


图 5- 27 反射平面上 θ_{2D} 与 θ_{3D} 的关系示意图

每一次三维反射的反射率 ρ_{3D} 与二维反射率 ρ_{2D} 之间关系如下：

$$\rho_{3D} = \rho \cos(\theta_{3D}) = \frac{\rho \cos(\theta_{2D})}{\sqrt{\left(\frac{\sin(\theta_i)}{\tan(\varphi_i)}\right)^2 + 1}} = \frac{\rho_{2D}}{\sqrt{\left(\frac{\sin(\theta_i)}{\tan(\varphi_i)}\right)^2 + 1}}$$

将上式关系带入前文得到的平面反射强度表达式中，可以得到三维反射强度的表达式，如下：

$$I_{3Dr} = \rho_{3D1}\rho_{3D2} \dots \rho_{3Dn} \cdot 1 = I_{2Dr} \frac{1}{\left[\left(\frac{\sin(\theta_i)}{\tan(\varphi_i)}\right)^2 + 1\right]^{n/2}}$$

其中， n 表示反射的次数，可以使用前文通过数值试验拟合得到的结果； I_{2Dr} 为平面中反射波线的强度，按照前文介绍的任意一种方法计算。

三维反射波线在 yOz 平面中投影的角度 θ_r 和平面反射波线相同，如前文所示。在 xOy 平面中投影与 x 轴负方向夹角 φ_r 为：

$$\varphi_r = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_r)}{-v_x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_r) \tan(\varphi_i)}{\sin(\theta_i)}\right)$$

5.1.4 问题 1 小结

综上所述，本文首先提出了尖劈空缺中微波的二维反射模型。从理论上推导出了只与反射次数 n 有关的最终反射波线的方向和辐射强度的表达式。然后，分别对只反射 1 次和反射多次的情况进行了研究。对于只反射 1 次的情况，给出了最终反射波线的方向、反射次数、反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数间定量关系的解析解。对于反射多次的情况，由于一束微波可能存在多种反射次数，因此对微波束反射进行了数值模拟，得到每个反射波束的辐射强度、反射方向和反射次数，然后用它们的辐射强度加权平均值来表示最终反射波束的反射方向和反射次数，最终反射波束的辐射强度取各反射波束的平均值。为了得到定量的表达式，本文把不同尖劈角度下获得的数值结果拟合成了多项式，从而得到平面反射模型中绝对反射角、反射强度和反射次数与已知反射率、诸几何参数之间定量关系的近似表达式。

得到了二维反射模型后，本文推导出了三维反射方向、反射强度、反射次数与二维反射方向、反射强度和反射次数之间的关系，从而将三维反射问题转化为二维反射问题。二维反射方向、反射强度和反射次数可以由之前获得的二维反射模型算得。

同时获得了尖劈形状吸波体的吸波性能随尖劈角度 α 、入射波线射向角 θ_i 及反射率 ρ 的变化规律如下：

(1) 尖劈吸波体的反射率与材料的反射率 ρ 的反射次数次方成正比，因此，材料的反射率 ρ 越小，吸波体的吸波性能就越好，特别是当反射次数较多时。

(2) 大多数情况下，尖劈角度 α 越小，反射次数就越多，吸波性能就越好。

(3) 微波入射角 θ_i 越小，反射次数越多，吸波体的吸波性能就越好。

5.2 问题 2 的求解

5.2.1 反射方程

根据题意，一束波线射到一个墙面上将反射出一个半球形的波球，反射波球的能量按照余弦辐射体分布。把入射角记作 α ，一条入射波线的功率 Φ_{in} 和反射波球在各个方向上的功率之和(即反射通量) Φ_{out} 之间满足以下的反射方程：

$$\rho(\alpha) = \rho \cos(\alpha) = \frac{\Phi_{out}}{\Phi_{in}}$$

反射波球能量按余弦辐射体分布，一个方向上的反射强度为：

$$I(i) = I_N \cos(i)$$

其中， I_N 是反射面法线方向的辐射强度， i 是要计算的反射方向与反射面法向的夹角，在空间中， $0 \leq i \leq \pi/2$ 。

反射波球的总通量 Φ_{out} 可以用辐射强度在单位半球面上的积分得到：

$$\Phi_{out} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_N \cos(i) \sin(i) di d\varphi = \pi I_N$$

这样就能得到入射功率 Φ_{in} 和法向反射强度 I_N 之间的关系，如下：

$$\rho \cos(\alpha) \Phi_{in} = \Phi_{out} = \pi I_N$$

这种反射模型中，反射方向与入射方向无关，因此，多条入射波线产生的反射波可以简单叠加。当同时有 n 条入射波线时，第 k 条入射波线的入射角和功率分别为 α_k 和 $\Phi_{in,k}$ ，则反射波球的法向强度可以用叠加原理得到，如下：

$$\pi I_N = \sum_{k=1}^n \rho \cos(\alpha_k) \Phi_{in,k}$$

5.2.2 暗室微波反射模型的建立

(1) 暗室微波反射耦合模型

天线发出的微波信号照射到各个墙面后将会被反射，墙面上的每一点都会形成新的点辐射源，从该点辐射出的光线又会射向另一个墙面。因此，天线和暗室构成的环境是一个复杂的耦合辐射系统。难以用简单的光线追踪方法进行

计算，必须要对耦合的系统进行求解。

由于题目假设墙上每一点受到辐射后将形成新的余弦辐射体，也就是说墙上每一点的余弦辐射体都是各个入射波线产生的余弦辐射体的叠加之和。每个余弦辐射体的辐射空间分布是相同的，而且与入射电波的功率是呈线性关系的，因此，当不同方向的电波照射到墙上的一点后可以用简单的线性叠加来获得该点的总反射功率。

本文采用基于反射方程的通量平衡的方法来建立系统的耦合方程组，对墙上每一点的反射强度进行求解。

在系统达到微波反射平衡状态的时候，墙面上一点接收到的来自天线及其他点的辐射量与该点的反射量之间应该满足前文所述的反射方程。为了进行数值计算，将墙面划分成若干个离散区域，当区域足够小的时候，该区域可以看作一个有面积的点，进而可以看作一个余弦辐射体。把每个区域的法向反射强度 I_N 设为未知数，每个区域都能写出一个反射方程，这样整个暗室的微波反射平衡状态就可以用有限个未知数和有限个方程组来描述。

以上描述的是系统达到微波辐射平衡时的状态，即微波能量的吸收速率与反射速率满足反射方程确定的平衡条件，天线开启后，暗室最终将达到这种状态。但是由于光速很快，可以认为微波辐射平衡是在一瞬间达到的，即暗室始终处于微波平衡状态。

把每个墙面都离散成若干个矩形区域，6 个墙面的所有区域的编号为从 1 到 n ，每个区域的坐标用它的中心点的坐标表示。天线的编号为从 1 到 m （从左往右），本题中 $m=16$ 。

把区域 q 发出的微波沿法向的强度记作 I_q 。区域 q 发出的微波照射到区域 k 后，把由 q 引起的区域 k 的反射波线的法向强度记作 $N_{k,q}$ ，反射通量即为 $\pi N_{k,q}$ 。把 q 和 k 的连线与 k 的法线的夹角记作 $\alpha_{k,q}$ ($0 \leq \alpha_{k,q} \leq \pi/2$)。将区域 q 辐射到区域 k 上的通量记作 $\Phi_{q,k}$ ，根据反射方程，它们满足以下方程：

$$\pi N_{k,q} = \rho \cos(\alpha_{k,q}) \Phi_{q,k}, \quad (q \neq k)$$

其中， $\Phi_{q,k}$ 的表达式为：

$$\Phi_{q,k} = \omega_{q,k} I_{q,k}$$

其中， $\omega_{q,k}$ 表示区域 k 的面积 A_k 相对于辐射源 q 的立体角； $I_{q,k}$ 为辐射源 q 朝着区域 k 方向的辐射强度，符合余弦辐射模型，即：

$$I_{q,k} = I_q \cos(\alpha_{q,k})$$

立体角 $\omega_{q,k}$ 的表达式为：

$$\omega_{q,k} = \frac{\cos(\alpha_{k,q}) A_k}{l_{q,k}^2}$$

其中， A_k 表示区域 k 的面积； $l_{q,k}$ 表示区域 q 的中点到区域 k 的中点的距离，

$$l_{q,k} = l_{k,q}。$$

这样，就能得到关于 $N_{k,q}$ 和区域 q 的法向辐射强度 I_q 之间的反射通量方程，如下：

$$\pi N_{k,q} = \frac{\rho \cos^2(\alpha_{k,q}) A_k \cos(\alpha_{q,k})}{l_{q,k}^2} I_q, \quad (q \neq k)$$

上式可以简写为：

$$\pi N_{k,q} = D_{k,q} I_q$$

上式是区域 q 的辐射在区域 k 上产生的反射通量的表达式。其中，系数 $D_{k,q}$ 的表达式如下：

$$D_{k,q} = \begin{cases} \frac{\rho \cos^2(\alpha_{k,q}) A_k \cos(\alpha_{q,k})}{l_{q,k}^2}, & (q \neq k) \\ D_{k,q} = 0, & (q = k) \end{cases}$$

按照同样的方法，可以得到天线 r 的辐射在区域 k 上产生的反射通量的表达式，如下：

$$\pi M_{k,r} = C_{k,r} T_r$$

其中， $M_{k,r}$ 表示天线 r 的辐射在区域 k 上产生的反射波线的法向强度； T_r 表示天线 r 的法向辐射强度； $C_{k,r}$ 为系数，表达式如下：

$$C_{k,r} = \begin{cases} \frac{\rho \cos^2(\beta_{k,r}) A_k \cos(\beta_{r,k})}{y_{r,k}^2}, & (\beta_{r,k} > 0) \\ 0, & (\beta_{r,k} \leq 0) \end{cases}$$

上式中， $\beta_{k,r}$ 是区域 k 和天线 r 的连线与 k 的法线的夹角； $\beta_{r,k}$ 是区域 k 和天线 r 的连线与 r 的发射方向的夹角； $y_{r,k}$ 是区域 k 的中点到天线 r 的距离。对于天线背面的接收区域， $\beta_{r,k}$ 小于0，此时天线信号无法直接射向该区域，即系数 $C_{k,r} = 0$ 。

区域总数为 n 个，天线总数为 m 个（本题中 $m=16$ ）。区域 k 的总反射通量就等于其他各个区域和天线发出的辐射在区域 k 上产生的反射通量之和，即：

$$\pi I_k = \pi N_{k,1} + \cdots + \pi N_{k,n} + \pi M_{k,1} + \cdots + \pi M_{k,m}$$

将上文中 $\pi N_{k,q}$ ($q = 1 \sim n$)和 $\pi M_{k,r}$ ($r = 1 \sim m$)的表达式带入上式即可得到一个关于各个发射源的法向辐射强度的方程：

$$\pi I_k = D_{k,1} I_1 + \cdots + D_{k,n} I_n + C_{k,1} T_1 + \cdots + C_{k,m} T_m$$

上式中，每个区域的法向辐射强度 I_r ($r = 1 \sim n$)为未知数，雷达的法向辐射强度

$T_r (r = 1 \sim m)$ 为已知数。对于每个墙面区域都能列出一个这样的方程，整个暗室系统中，各墙面区域的反射通量平衡方程组可以写为：

$$\begin{cases} \pi I_1 = D_{1,1}I_1 + \dots + D_{1,n}I_n + C_{1,1}T_1 + \dots + C_{1,m}T_m \\ \pi I_2 = D_{2,1}I_1 + \dots + D_{2,n}I_n + C_{2,1}T_1 + \dots + C_{2,m}T_m \\ \vdots \\ \pi I_n = D_{n,1}I_1 + \dots + D_{n,n}I_n + C_{n,1}T_1 + \dots + C_{n,m}T_m \end{cases}$$

上式中一共 n 个方程，正好可以解出 n 个未知数 $I_r (r = 1 \sim n)$ 。

引入 $D_{k,k} = 0$ 这个方程，将上式写成矩阵的形式为：

$$\left(\begin{bmatrix} \pi & & & \\ & \pi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & D_{1,2} & \dots & D_{1,n} \\ D_{2,1} & 0 & \dots & D_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n,1} & D_{n,2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{1,1}T_1 + \dots + C_{1,m}T_m \\ C_{2,1}T_1 + \dots + C_{2,m}T_m \\ \vdots \\ C_{n,1}T_1 + \dots + C_{n,m}T_m \end{Bmatrix}$$

由以上方程解得的 $I_r (r = 1 \sim n)$ 就是墙面的各个区域的被动辐射强度，之所以称为被动，是因为它们自己不产生辐射，只是反射天线发出的辐射。

以上方程的系数矩阵为非稀疏矩阵，而且 n 通常取值要大于 1000 以保证模拟精度。因此，用高斯消元法计算上以上方程时间消耗较大。而这个方程的系数矩阵是对角线元素远远大于非对角线元素的正定矩阵，很适合用迭代方法求解。本文即采用超松弛迭代法（SOR）求解以上方程，松弛系数取 1.3。迭代计算的收敛法则为：如果一次迭代中，未知数的增量小于 1×10^{-6} ，则求解结束。

将暗室的每个墙面等间距地分成 $n \times n$ 段，整个暗室共有 $6n^2$ 个小区域，如图 5-28 所示：

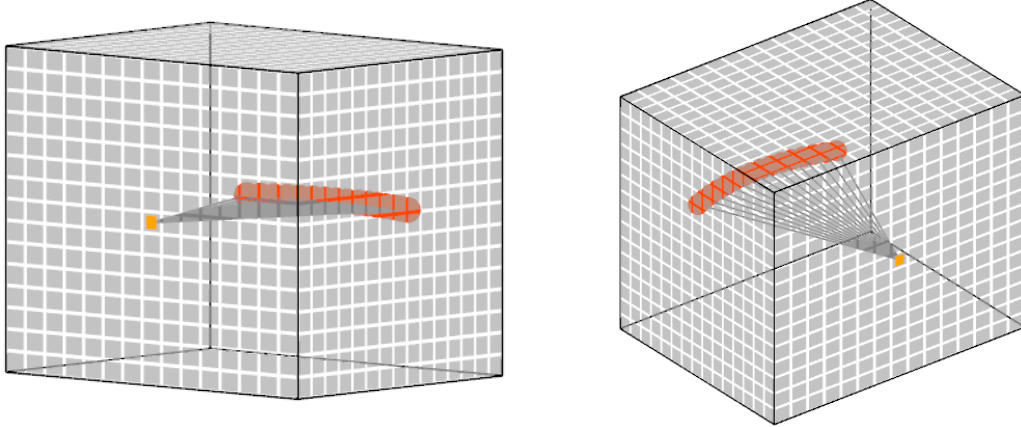


图 5-28 计算模型示意图，一条边分为 15 个格子时的情况，此时有 1350 个计算区域

(2) 静区微波照射量的计算

当已知墙面各个区域的被动辐射强度以后，就可以计算出静区接收到的墙面反射的信号功率。静区的尺寸为 0.3m，暗室最短边长为 14m，是静区尺寸的近 50 倍。因此，本文将静区近似地看作一个有面积的点，计算时用静区中心点的坐标来表示静区的位置。

把静区记作区域 s ，采用上文的符号约定，区域 q 反射到静区 s 上的辐射通量 $\Phi_{q,s}$ 为：

$$\Phi_{q,s} = \omega_{q,s} I_{q,s}$$

式中，区域 q 朝着 s 的方向的辐射强度 $I_{q,s}$ 和立体角 $\omega_{q,s}$ 的表达式分别为：

$$I_{q,s} = I_q \cos(\alpha_{q,s}); \quad \omega_{q,s} = \frac{\cos(\alpha_{s,q}) A_s}{l_{q,s}^2}$$

式中， $\alpha_{q,s}$ 为区域 q 和静区的连线与区域 q 的法线的夹角； I_q 是区域 q 的法向辐射强度； $\alpha_{s,q}$ 是区域 q 和静区的连线与静区法线的夹角； A_s 是静区的面积； $l_{q,s}$ 是静区中点到区域 q 中点的距离。将上式带入通量 $\Phi_{q,s}$ 的表达式得：

$$\Phi_{q,s} = \frac{\cos(\alpha_{s,q}) A_s}{l_{q,s}^2} \cos(\alpha_{q,s}) I_q$$

静区 s 接收到的来自墙面的总辐射通量 $W_{reflect}$ 为接收到的各区域辐射通量 $\Phi_{q,s}(q = 1 \sim n)$ 之和，即：

$$W_{reflect} = \sum_{q=1}^n \Phi_{q,s} = A_s \sum_{q=1}^n \frac{\cos(\alpha_{s,q}) \cos(\alpha_{q,s})}{l_{q,s}^2} I_q$$

按照同样的方式，可以得到静区 s 接收到的直接来自天线的辐射通量 W_{direct} ，如下：

$$W_{direct} = A_s \sum_{r=1}^m \frac{\cos(\beta_{s,r}) \cos(\beta_{r,s})}{y_{r,s}^2} T_r$$

式中， $\beta_{s,r}, \beta_{r,s}$ 的意义和 $\alpha_{q,s}, \alpha_{s,q}$ 类似； $y_{r,s}$ 是静区到天线 r 的距离； T_r 是天线 r 的法向辐射强度。

题目中要求计算的静区从诸墙面获得的反射信号与天线直射信号之比即为：

$$\gamma = \frac{W_{reflect}}{W_{direct}}$$

5.2.3 模型收敛性分析

本文提出的计算模型精度受到墙面区域划分大小的影响。当区域划分趋近于无穷小时，理论上将得到精确解；当区域划分较大时，可能出现较大的计算误差。这种误差主要是由于用区域中心点的坐标来代替整块区域引起的，另外，用中心点的法向和坐标计算得到的立体角也是一种近似。因此在进行问题求解之前，必须对不同网格密度下计算模型的精度进行评估，同时验证此模型随着网格加密时，计算误差的收敛性。

误差分析只在一个工况下进行：按从左到右的方向，打开第4和第5个天线，每个天线的法向辐射强度设为20，墙体垂直入射反射率 $\rho = 0.5$ 。将墙体每个边上的网格划分数量从2变化到30，同时观察静区接收到的来自墙体反射的

功率的变化情况，具体如图 5-29 所示，其中蓝色越深表示反射强度越大。

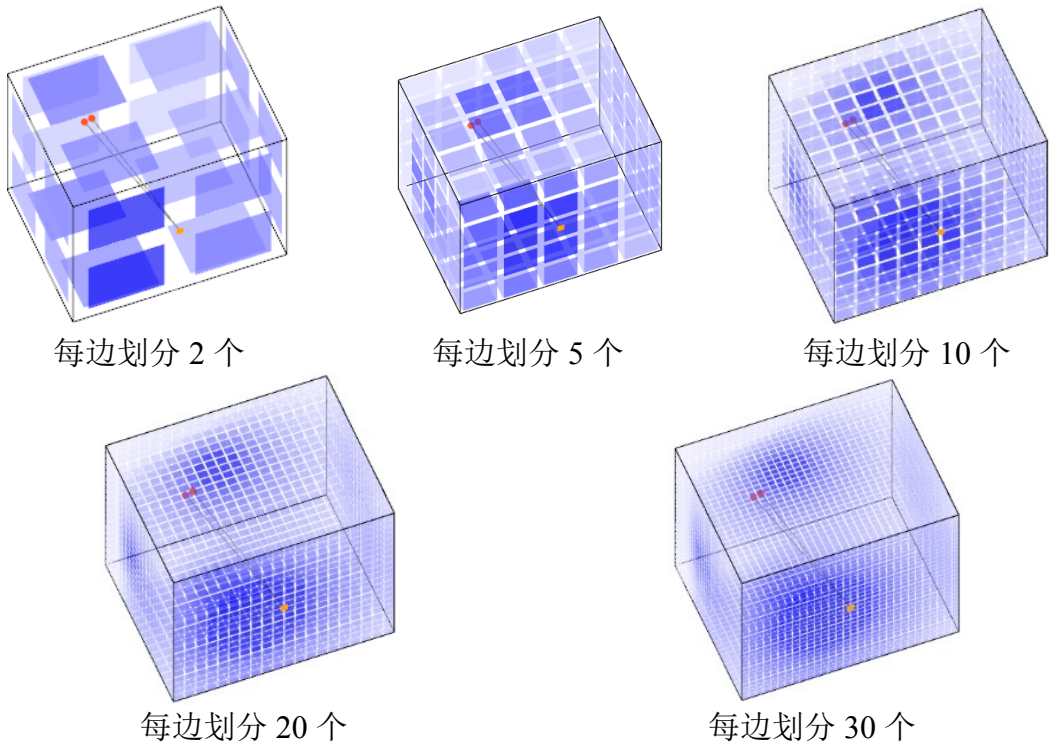


图 5- 29 划分个数不同时各墙面的反射强度

由于无法得到精确的解，因此，用后一次计算结果与前一次计算结果的相对变化量来评价计算误差，当误差变化量很小时，说明求解结果趋近于精确解。另一方面，从能量是否守恒也可以判断模型的准确程度，此处将能量守恒率定义为：墙面总耗散能量/天线总发射能量。

数值计算结果如下表所示。其中从表 5-1 可以看出，当边划分次数达到 30 的时候，静区接收到墙体反射功率的相对变化量小于 5‰，满足工程精度。能量守恒律也随着网格数量的增加迅速趋近于 1，当划分数量达到 30 的时候，能量守恒率与 1 的误差小于 1%，如图 5-30。可见，本文提出的模型求解结果随着网格加密将逐渐收敛。

此外，当划分次数达到 30 的时候，能量守恒率的误差小于 1%。可见，本文提出的模型求解结果随着网格加密将逐渐收敛。故本题求解的时候将每条边划分为 30 份。

表 5- 1 不同网格划分情况下静区接收到的来自墙体反射的功率和能量守恒律

边划分份数	计算区域数	来自墙体反射的功率	功率相对变化量	能量守恒率
2	24	0.026396	-	128.29%
3	54	0.025635	-0.15839	112.12%
5	150	0.025307	-0.07333	106.78%
10	600	0.025122	-0.04307	102.71%
15	1350	0.025082	-0.00947	101.63%
20	2400	0.025065	-0.00391	101.16%
30	5400	0.025052	-0.00317	100.74%

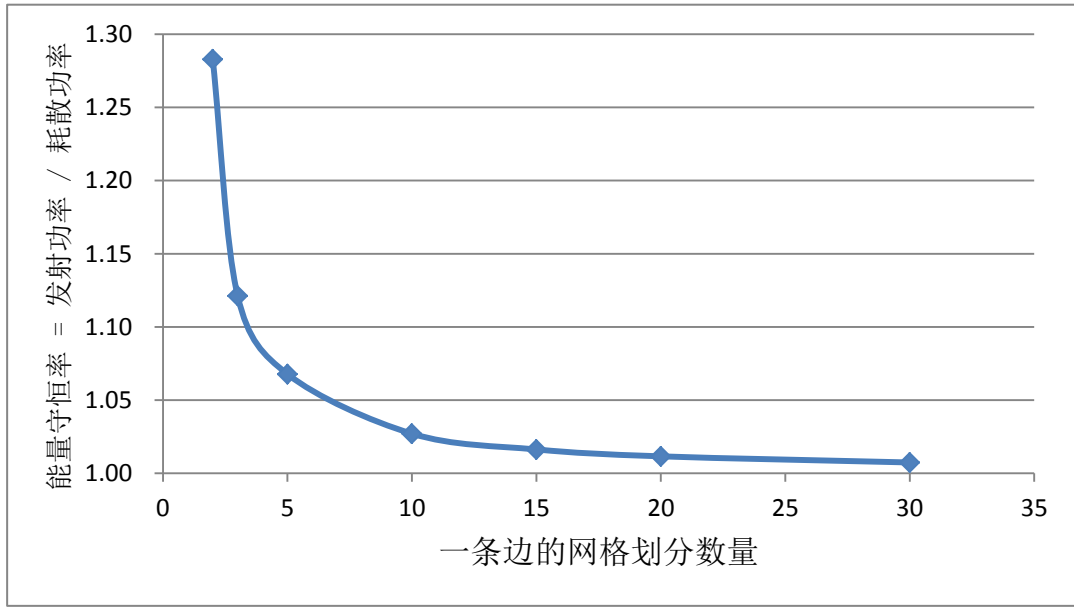


图 5-30 每边划分数量与数值模拟的能量守恒率之间的关系

5.2.4 数值求解

因为反射强度是线性叠加的，所以暗室中墙面的反射强度、静区接收到的反射功率都与天线的微波发射功率成正比。当天线发射功率增大一倍时，静区接收到来自雷达和来自墙面辐射的功率都增大一倍，因此，题目中要求计算的静区从诸墙面反射得到的信号的功率和从信号源直接得到的微波功率之比 γ 与天线发射强度的绝对值无关。此外，微波的传播速度远远大于视在目标的移动速度，可以认为每个时刻暗室中的微波反射状态只与当前天线的辐射状态有关。因此，本文认为视在目标移动速度也不影响 γ 。

根据上述推理，本文在模拟时始终将视在目标的轴线辐射强度设为 1，时间步长设为 0.2s，共 4s。将视在目标与 y 轴的夹角记作 $\mu(-\pi/8 \leq \mu \leq \pi/8)$ ，起点处（左端）的 $\mu = -\pi/8$ 。随时间按下式变化：

$$\mu = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}t$$

(1) 平板吸波材料

当暗室墙面采用平板吸波材料时，垂直反射率 $\rho = 0.50$ 。暗室墙面共分为 5400 个计算区域，判断方程迭代求解结束的阈值取 1×10^{-6} 。

由于辐射强度不影响噪声比，将视在辐射强度设为 1，天线总发射通量为 π (W)。模拟结果如图 5-31 和表 5-2 所示，其中蓝色越深表示反射强度越大。

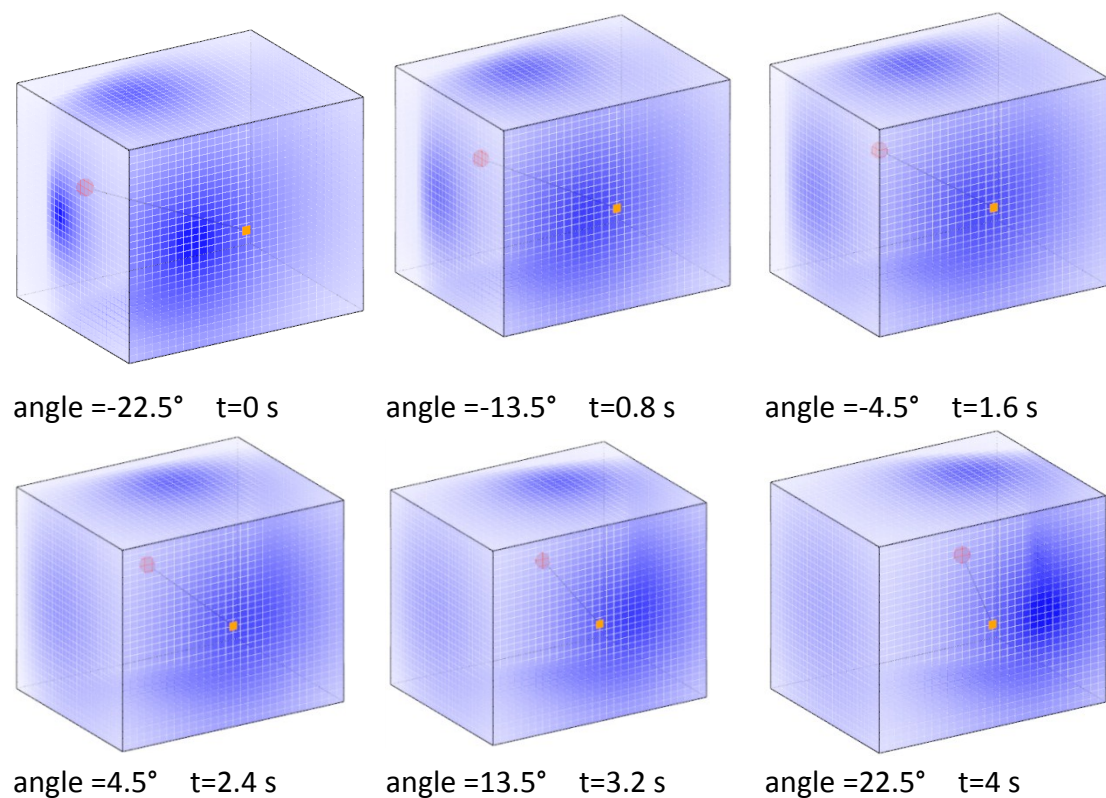


图 5- 31 使用平板吸波材料 ($\rho = 0.50$) 时, 各墙面的反射强度随时间的变化情况

表 5- 2 使用平板吸波材料 ($\rho = 0.50$) 时, 静区接收到的功率参数和方程求解迭代次数

时间	来自天线功率 (W)	来自墙面功率 (W)	功率噪声比 γ	迭代次数
0	0.000492	0.000101	0.206257	7
0.2	0.0005	0.000103	0.205223	4
0.4	0.000506	0.000103	0.20436	4
0.6	0.000512	0.000104	0.203652	4
0.8	0.000518	0.000105	0.203102	4
1	0.000522	0.000106	0.202651	4
1.2	0.000526	0.000106	0.202264	4
1.4	0.000529	0.000107	0.201935	4
1.6	0.000531	0.000107	0.20166	4
1.8	0.000532	0.000107	0.201537	4
2	0.000532	0.000107	0.201496	4
2.2	0.000532	0.000107	0.201536	4
2.4	0.000531	0.000107	0.201658	4
2.6	0.000529	0.000107	0.201932	4
2.8	0.000526	0.000106	0.20226	4
3	0.000522	0.000106	0.202646	4
3.2	0.000518	0.000105	0.203097	4
3.4	0.000512	0.000104	0.203646	4
3.6	0.000506	0.000103	0.204354	4
3.8	0.0005	0.000103	0.205215	4
4	0.000492	0.000101	0.206228	4

由图 5-32 可以看出，视在目标位置不同，静区接收到的功率噪声比 γ 也不同，取值范围在 $0.2014 < \gamma < 0.2063$ 之间，说明平板吸波材料远远没有达到题目提出的 $\gamma \leq 0.03$ 这个要求。同时可以看出，当视在目标位于中间位置(即 $t = 2s$)的时候， γ 的值最小，为 0.201496。

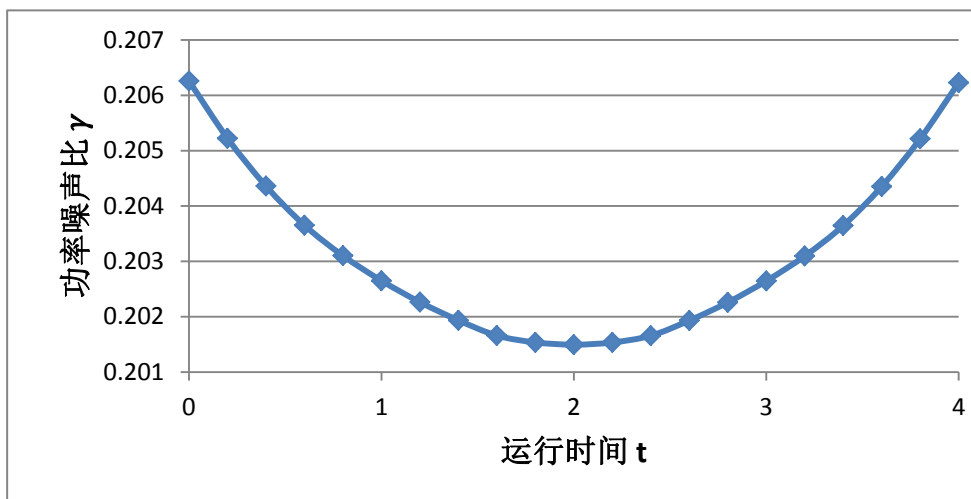
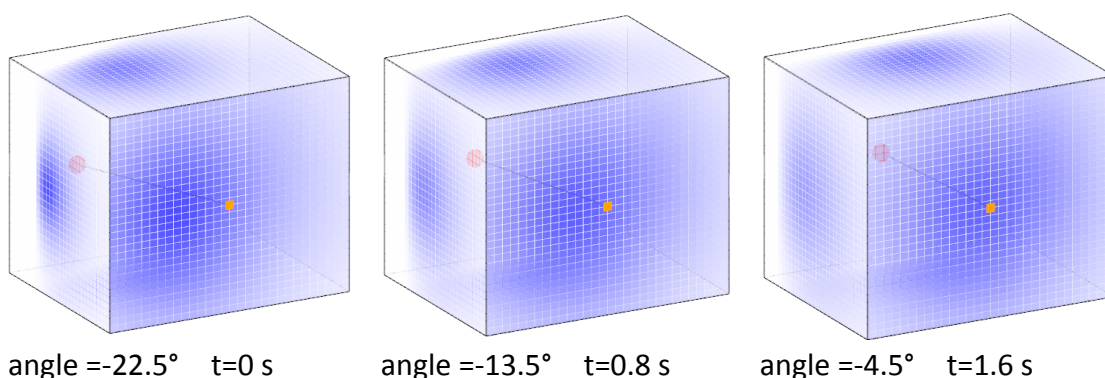


图 5-32 使用平板吸波材料 ($\rho = 0.50$) 时的功率噪声比 γ 随时间变化情况。

(2) 尖劈形吸波材料

由于平板吸波材料不能满足题目的暗室辐射要求，现在将暗室墙面换成尖劈吸波材料进行计算。根据题目假设，尖劈吸波材料的反射方程和平板吸波材料相同，计算时使用平均垂直反射率 $\rho = 0.05$ 。暗室墙面共分为 5400 个计算区域，由于墙面反射率减小，反射强度也减小，将判断方程迭代求解结束的阈值取为 1×10^{-8} 。

由于辐射强度不影响噪声比，将视在辐射强度设为 1，天线总发射通量为 π (W)。模拟结果如图 5-33 和表 5-3 所示，其中蓝色越深表示反射强度越大。



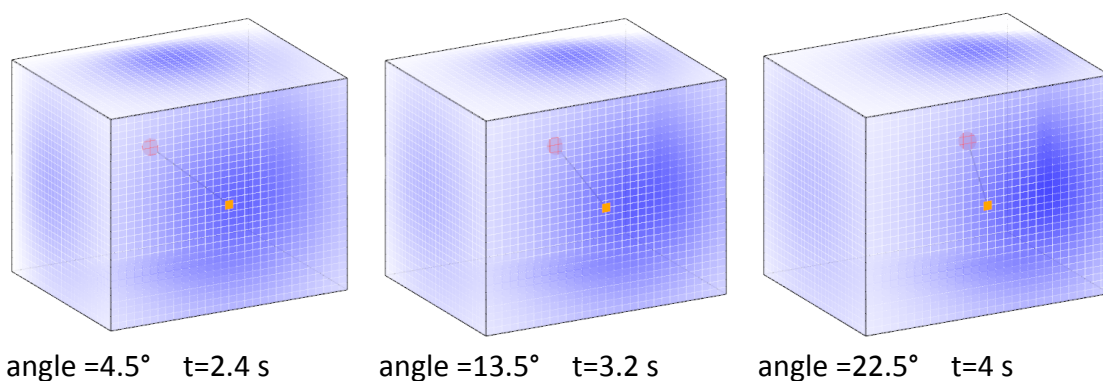


图 5-33 使用尖劈吸波材料 ($\rho = 0.05$) 时, 各墙面的反射强度随时间的变化情况

表 5-3 使用尖劈吸波材料 ($\rho = 0.05$) 时, 静区接收到的功率参数和方程求解迭代次数

时间	来自天线功率 (W)	来自墙面功率 (W)	噪声比	迭代次数
0	0.000492007	6.26E-06	0.012725637	7
0.2	0.000499501	6.33E-06	0.012667187	6
0.4	0.000506306	6.39E-06	0.012618406	6
0.6	0.000512418	6.45E-06	0.012579574	6
0.8	0.00051783	6.50E-06	0.012551003	6
1	0.000522178	6.54E-06	0.012528087	6
1.2	0.000525808	6.58E-06	0.012508685	6
1.4	0.000528717	6.60E-06	0.012492289	6
1.6	0.000530903	6.62E-06	0.012478422	6
1.8	0.000531997	6.64E-06	0.012472418	6
2	0.000532362	6.64E-06	0.012470424	6
2.2	0.000531997	6.64E-06	0.012472427	6
2.4	0.000530903	6.62E-06	0.012478443	6
2.6	0.000528717	6.60E-06	0.012492319	6
2.8	0.000525808	6.58E-06	0.012508724	6
3	0.000522178	6.54E-06	0.012528134	6
3.2	0.00051783	6.50E-06	0.01255106	6
3.4	0.000512418	6.45E-06	0.012579637	6
3.6	0.000506306	6.39E-06	0.012618474	6
3.8	0.000499501	6.33E-06	0.012667259	6
4	0.000492007	6.26E-06	0.012725744	6

由图 5-34 可以看出, 视在目标在不同位置时, 静区接收到的功率噪声比 γ 的取值范围在 $0.0124 < \gamma < 0.0128$ 之间, 说明尖劈吸波材料作为暗室墙面时满足了题目提出的 $\gamma \leq 0.03$ 这个要求! 和平板材料一些样, 当视在目标位于中间位置 (即 $t=2s$) 的时候, γ 的值最小, 为 0.01247。说明以尖劈吸波材料为墙面的暗室能够用于导弹引导头的模拟!

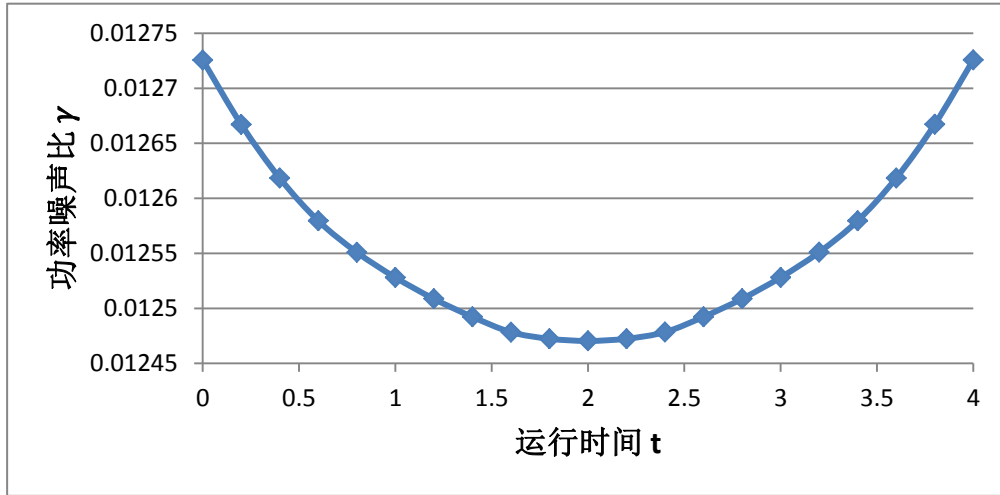


图 5-34 使用尖劈吸波材料 ($\rho = 0.05$) 时的功率噪声比 γ 随时间变化情况。

对比图 5-32 和图 5-34 发现, 使用平板形吸波材料与尖劈形吸波材料的暗室都当视在目标位于中间位置的时候, γ 的值最小, 可以猜测, 不论使用什么材料, γ 总是在目标靠近两端时取得最大值, 目标位于中间时取得最小值。本文认为, 这是因为目标在两端时, 开启的天线靠近暗室墙面, 导致墙面反射强度增大; 而目标在中间时, 开启的天线离墙面较远, 墙面反射强度较小。而天线到静区的距离是恒定的, 直射强度也是定值, 因此, 在中间时静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ 最小。

5.2.5 问题 2 小结

综上所述, 本文首先依据余弦辐射体假设和反射率的余弦法则建立了暗室墙面上一点的微波反射方程。然后, 根据墙面各点微波入射和反射通量满足反射方程的条件, 提出了墙面各点和发射天线之间存在耦合关系。接下来, 通过类似于有限元的离散方法, 将各墙面划分成若干个计算区域, 并推导出了各个计算区域与天线之间的微波辐射耦合方程组, 未知量为各个区域的法向反射强度。由于方程的系数矩阵是大型密实正定矩阵, 因此, 采用超松弛迭代法 (SOR) 进行求解。得到墙面各区域的法向反射强度后, 给出了计算静区接收到的墙面反射微波功率和天线直接发射的微波功率之比 γ 的表达式。

用 C# 程序语言实现了本文推导出的算法, 并且编写了 3D 可视化界面将计算结果形象地显示出来, 以便于对程序和模型进行检查。

在求解问题之前, 本文先对模型的精度和正确性进行了数值验证。测试了不同网格划分密度下, 计算误差随着网格密度增加而收敛的速度, 结果显示误差是随着网格加密而减小的, 并且把一条边划分为 30 段之后, 已有很高的精度。同时计算得到暗室墙面对微波功率的耗散速率与天线发射微波的功率之比, 发现该值也随着网格密度增加而迅速收敛于 1。

计算表明, 使用平板吸波材料 ($\rho = 0.50$) 时, 静区接收到的墙面反射功率与天线直射功率之比 γ 的值介于 $[0.2015, 0.2063]$ 之间, 不满足 $\gamma \leq 0.03$ 这个要求。当视在目标处于中间点时, γ 取得最小值。

使用尖劈形吸波材料 ($\rho = 0.05$) 时, γ 的值介于 $[0.01247, 0.01272]$ 之间, 满足 $\gamma \leq 0.03$ 这个要求。也是当视在目标位于中间点时, γ 达到最小。因此使用

尖劈形吸波材料时，暗室能满足导弹引导头模拟的要求。

六、模型的评价与改进

(1) 本文采用数值试验+表达式拟合的方法来建立尖劈吸波体的反射模型，解决了纯解析推导时遇到的反射次数无法确定的问题。并且用统计方法计算出微波的平均反射方向、强度和反射次数，使问题得到简化，适合于工程使用。另外，通过在三维反射和二维反射之间建立定量关系，使得三维反射分析可以用相对简单的二维模型实现。

(2) 尖劈材料反射模型还有进一步改进的空间，比如，还可以统计出反射强度在各个反射角度上的分布的方式，使得模型更加精确。

(3) 本文提出的暗室微波反射耦合模型符合实际情况，数值验证结果和问题求解结果都说明此模型具有很高的精度，计算效率也非常高！此外，耦合方程组表达式简单，适合程序实现。

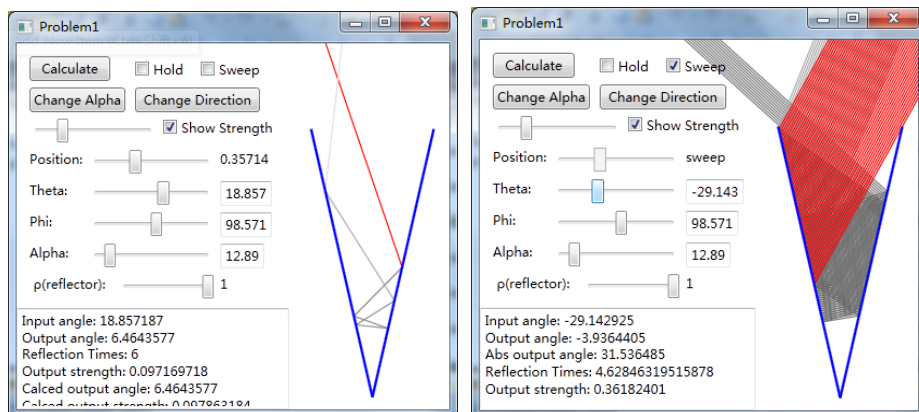
(4) 虽然将暗室墙面一个计算区域的辐射强度假设为常数已经能满足本题要求，但是仍有改进的余地。比如，可以在区域之间设置节点，区域中各点的辐射强度由节点值插值得到，这样就可以建立单元间连续的高阶计算模型，进一步提高求解的精度，减少单元划分数量。

参考文献

- [1]. 吕述平，刘顺华，微波暗室用角锥吸波材料外形的设计和分析，材料科学与工艺，15（4）：572-578，2007.8
- [2]. 刘顺华等，电磁波屏蔽及吸波材料，北京：化学工业出版社，2006.9，p354
- [3]. 张以谟，应用光学，北京：机械工业出版社，1982，p4

附录

1、问题 1 程序截图



2、问题 1 核心源代码片段（语言为 C#）

```
private static bool WallReflect(Vector2 wallStart, Vector2 wallEnd, double reflectFactor, Light
input, out Light output)
{
    var p = input.Position;
    var dir = input.Direction;
    var pWall = wallStart;
    var dirWall = wallEnd - wallStart;
    double tLight, tWall;
    var wallOut = (wallEnd - wallStart).GetLeftPerpendicularVector();
    if (input.Direction * wallOut >= 0)
    {
        output = null;
        return false;
    }
    if (Widgets2D.LineIntersect(p, dir, pWall, dirWall, out tLight, out tWall) && tLight >=
-1e-6 && tWall >= -1e-6 && tWall <= 1+1e-6)
    {
        var reflectPoint = pWall + dirWall * tWall;
        var wallTan = dirWall;
        wallTan.Normalize();
        var lightVector = dir;
        var tanComp = wallTan * lightVector;
        var norVect = lightVector - tanComp * wallTan;
        var norComp = norVect.GetLength();
        var cos2D = norComp;
```

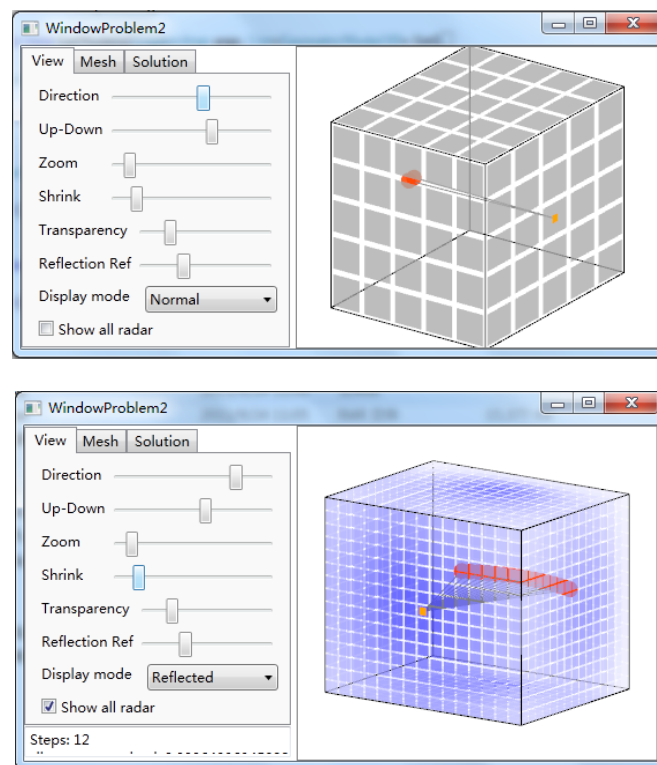


```

        var cos3D = cos2D / Math.Sqrt(input.OutDirection * input.OutDirection + 1);
        var lightDir = tanComp * wallTan - norVect;
        var lightStren = input.Strength * reflectFactor * cos3D;
        lightDir.Normalize();
        output = new Light(reflectPoint, lightDir, input.OutDirection, lightStren);
        return true;
    }
    else
    {
        output = null;
        return false;
    }
}

```

3、问题 2 程序截图



4、问题 2 核心源代码片段（语言为 C#）

```

private double SimulateAStepNotCached()
{
    double maxInc = 0;
    foreach (var rec in Regions)
    {

```

```

{
    double powerReflect = 0;
    double receivedPower = 0;
    foreach (var src in Regions.Union<IRadiationSource>(Radars))
    {
        if (rec != src)
        {
            var recCos = GetReceiverCosAngle(rec, src);
            var srcCos = GetSourceCosAngle(src, rec);
            if (srcCos > 0 && recCos > 0)
            {
                double srcPow = recCos * rec.Area * srcCos /
Vector3.GetDistance2(src.Position, rec.Center) * src.Strength;
                powerReflect += srcPow * _ReflectionFactor * recCos;
                receivedPower += srcPow;
            }
        }
    }
    var lk = powerReflect / Math.PI;
    var inc = lk - rec.OutputStrength;
    rec.OutputStrength += 1.3 * inc;
    rec.ReceivedPower = receivedPower;
    if (Math.Abs(inc) > maxInc) maxInc = Math.Abs(inc);
}
return maxInc;
}

```