

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目                      数控加工刀具运动的优化控制

### 摘                      要：

数控加工技术正朝着高速高效高精度方向发展，研究刀具运动优化控制方法已成为现代高性能数控系统研究的重点。其实质是数控机床在精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化加工效率。

针对问题一，以折线加工型线为研究对象，采用数字积分(DDA)插补算法逼近刀具期望运行轨迹，在满足指定加工误差的前提下，建立实时加工优化控制模型。首先，分析得折线加工型线间夹角范围与引入过渡直线条数的关系(见表1)。当直线插补次数大于  $(r \cdot \theta) / l$  时，折线加工型线轨迹可近似为圆弧。然后，在建立实时加工优化控制算法时，将折线加工型线分为三段(圆弧过渡段，圆弧过渡段前直线与圆弧过渡段后直线)分别分析讨论，通过匀速控制方法建立圆弧过渡段实时加工控制算法(见式(13))；通过加减速控制方法建立圆弧过渡段前直线和圆弧过渡段后实时加工控制算法，其分别见式(14)到式(17)和式(19)到式(21)。最后，通过上述模型求解得到当相邻两折线段夹角为  $90^\circ$  时，折线交点对应的运动速度变化为  $a_x = a_y = \sqrt{2}v^2 / (2r)$ ；当相邻两折线段夹角为  $135^\circ$  时速度的变化为  $a_x = 0.3827v^2 / r, a_y = 0.9239v^2 / r$ ，且  $y$  方向的速度变化大于  $x$  方向的速度变化。两个角度下沿  $x$  和  $y$  轴方向的加速度与圆弧速率平方成正比，与圆弧半径成反比。

针对问题二，以直线段和圆弧段组成的加工型线为研究对象，采用时间分割插补法对直线段和圆弧段相切情况的误差进行计算分析，可以满足加工要求。然后分析不相切的情况，得到不相切情况可以用相切情况来近似。接下来对相切情况建立  $S$  型加减速实时加工优化算法(式(34)到式(38))。因为每相邻的两条直线分别对应  $S$  型曲线的上升阶段与下降阶段，所以可用相邻两条直线与其间

的过渡圆弧模型(式(39)到式(43))来代替整个模型。由于  $S$  型曲线与  $x$  轴围成的面积和梯形加减速面积完全相等,因此计算过程可以用梯形加减速来代替。将  $S$  加速阶段等效为一个匀加速阶段,减速阶段等效为一个匀减速阶段,建立简化实时运动模型(式(45)到式(48))。在简化参数后得出当圆弧半径  $r$  增大时,加工总时间减小,加工效率增加;当  $r$  减小时,总时间增大,加工效率减小。在模型验证中利用极限加速度得到工件的 2 号节点不满足速度条件,舍弃节点 2 的速度条件后得到加工效率随圆弧半径的变化关系见图 14,给定加工工件各运动阶段时间、经过的路径长度及特定点的速度见表 2 和表 3。其中当圆弧半径  $r = 0.5cm$  时,加工指定工件的最短时间  $t = 79.4857s$ 。

针对问题三,在考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度情况下,在第二问的基础上对加工初始速度和梯形加减速等效加速度约束条件进行修正,得到圆弧半径和算法效率间的加工优化控制模型。对该模型定性分析得出当圆弧半径  $r$  增大时,加工总时间减小,加工效率增加;当  $r$  减小时,总时间增大,加工效率减小。在模型验证中利用极限加速度得到工件的 2 号节点不满足速度条件,舍弃节点 2 的速度条件后得到加工效率随圆弧半径的变化关系见图 16,给定加工工件各运动阶段时间、经过的路径长度及特定点的速度见表 4 和表 5。其中当圆弧半径  $r = 0.5cm$  时,得到加工指定工件的最短时间  $t = 79.16955s$ 。通过二三问对比,得出考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度比不考虑情况下,工件加工时间减小,算法效率提高。

针对问题四,在满足精度和速度要求的条件下,使加加速度连续可提高机床运行平稳性。分别进行了正向与反向两种思路分析。正向思路即先给定速度曲线,然后求导,使得加加速度连续;反向即先给定连续的加加速度曲线,使得两次积分后的速度曲线仍然保持平稳。正向方法用了三次样条速度曲线(见式(65))和分段三角函数(见式(76)到(82))优化控制运动模型,反向思路我们自己提出了使用傅里叶级数与 *sigmoid* 函数方法来建立提高机床运行平稳性的优化控制运动模型(分别见式(86)和(88))。最后将上述四种方法与  $S$  型加减速控制算法比较,发现四种方法都可以提高速度平稳性,其中 *sigmoid* 函数的加加速度的平滑性最好,最能提高速度的平稳性。

**关键词:** 数控加工 优化控制  $S$  型加减速曲线 傅里叶级数 *sigmoid* 函数

## 一、问题重述

数控加工技术正朝着高速高效高精度方向发展，研究开发数控加工刀具加减速控制方法，已成为现代高性能数控系统研究的重点。

加工刀具运动的优化控制则是在数控机床所提供的精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化其加工效率。而对于一般曲线加工，加工控制算法就是在满足误差要求的条件下，通过插补的方法，找出若干小直线段组成加工刀具的运动轨迹，同时计算出刀具对应的运动速度、加速度。

目前，数控加工对单个坐标运动的控制方法有多种，其中较有代表性的是基于 S 型曲线的加减速控制方法。其特点是将加减速过程分为 7 个阶段：加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段，从而渐变地控制各段的加速度使机床运动速度按 S 型曲线形式平滑变化，以保证速度光顺，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性。

在基于 S 型曲线的运动过程中，对于速度和加速度都有一定的限制性要求，速度  $V$  不大于机床最大速度  $V_{\max}$ ，加速度  $a$  不大于机床最大加速度  $a_{\max}$ ，加加速度为常量  $J_{\text{const}}$ 。

在目前采用的 S 型速度控制曲线中，加速度每次都是从 0 增加，最后又降为 0，而在实际运动过程中电机启动时允许有一个瞬时启动加速度  $a_0$ ，即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度  $a_0$ ，或瞬间从  $a_0$  下降到 0，速度也有类似功能，这样整个加速过程及速度的变化规律有一些改变。

假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点。对以下问题进行研究：

问题一：设加工型线为折线，在指定加工误差（指在加工型线的法线方向上加工型线与刀具实际轨迹的差值的最大值）的条件下，建立实时加工优化控制算法，当相邻两折线段夹角为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化；

问题二：设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题三：在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题四：结合前 3 问，分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型（如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等）。

## 二、模型假设

- 1、假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点；
- 2、假设每个插补周期内，刀具进给速度是恒值；
- 3、假设不考虑加工材料对给定速度的影响；
- 4、假设刀具行进的每段路程都是机床分辨率的整数倍；
- 5、假设刀具在到达圆弧段之前已达匀速状态。

### 三、符号说明

符号	符号含义
$\varepsilon_{\max}$	加工工件能接受的最大误差
$V_{\max}$	机床的进给加速度的上界
$V_{\min}$	机床的进给加速度的下界
$a_{\max}$	机床的进给加速度的上下界
$a_{\min}$	机床的进给加速度的上下界
$l$	机床分辨率
$S_g$	期望的轨线的转折点和过渡圆弧之间的距离
$J_{\text{const}}$	车床系统的最大加加速度
$\theta_0$	加工型线为折线时进行直线插补过渡的阈值

### 四、问题分析

#### 4.1 问题一分析

当加工型线为折线时,在指定加工误差条件下,建立实时加工优化控制算法,当相邻两折线段夹角为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  时,讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化。因为加工型线为折线,所以刀具不能直接转向,因此在折线交点处附近使用 DDA 插补法进行直线插补,并在这种插补方法下进行误差计算,使其在指定的加工误差以内。当插补的小直线段足够多时,其轨迹可近似于圆弧过渡段。然后,分别对过渡段,过渡段前的直线段和过渡段后的直线段进行建模。通过分析过渡段的模型,得出相邻两折线段夹角为  $90^\circ$  和  $135^\circ$  时折线交点时对应各坐标运动速度的变化。

#### 4.2 问题二分析

当加工型线是由直线段和圆弧段(相切或不相切)组成的连续曲线时,在指定加工误差的条件下,不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度,建立实时加工优化控制算法,讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响;并应用所建立的模型对指定加工路径示例进行检验。首先对直线段和圆弧段相切与不相切的情况进行讨论,分别得出两种情况的模型。通过分析,不相切模型可以用相切情况来近似。因为每相邻的两条直线分别对应  $S$  型曲线的上升阶段与下降阶段,所以可用相邻两条直线与其间的过渡圆弧来代替整个模型。由于  $S$  型曲线与  $x$  轴围成的面积和梯形加减速面积完全相等,因此计算过程可以用梯形加减速来代替。将  $S$  加速阶段等效为一个匀加速阶段,减速阶段等效为一个匀减速阶段,建立简化运动模型。由于模型中有许多参数对圆弧半径有影响,无法直接定量判断圆弧半径的变化对算法效率的影响,因此定性分析得出结论。最后将模型应用到实际加工路径实例中进行验证。

#### 4.3 问题三分析

在第 2 问基础上,考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度,建立相对应的实时加工优化控制算法;并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验。在本问中,考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度,即电机启动时允许有一个瞬时启动加速度  $a_0$ ,即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度  $a_0$ ,或瞬间从  $a_0$  下降到 0,速度也有类似功能,这种情况相当于将  $S$  型曲线  $a_0$  以及  $v_0$  以下的部分去掉,其分析过程同第二问相差不大,只是加速度和速度的突变使得运动规律发生一些

变化,这使得约束条件也会因此而改变,但是建模的思路不变。同样在建立好模型之后,应用到实例中进行验证。

#### 4.4 问题四分析

在满足精度和速度要求的条件下,建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型(如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等)。本问题要求建立提高机床运行平稳性的优化控制运动模型,并且给出提高机床运行平稳性的解决方法,即刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化。基于这种方法,通过查阅资料,分别进行了正向与反向两种思路分析,正向思路即先给定速度曲线,然后求导,使得加加速度连续;反向即先给定连续的加加速度曲线,使得两次积分后的速度曲线仍然保持平稳。正向方法用了三次样条曲线方法和分段三角函数方法,反向思路使用了傅里叶级数与 *sigmoid* 函数方法来建立提高机床运行平稳性的优化控制运动模型。最后对几种方法优劣进行了对比。

### 五、模型的建立与求解

#### 5.1 问题一模型建立与求解

由于机床在高速运行过程中,数控系统要求对机床平滑地控制,从而避免产生较大的冲击而影响工件加工质量,保护机床的进给系统<sup>[1,2]</sup>。当加工型线为折线,在指定加工误差的条件,采用过渡直线的方法来减小因加工型线夹角过大造成的刀具损害。

##### 5.1.1 数控机床插补原理及方法

在数控加工过程中,待加工工件外形具有多样性。为了满足加工精度要求,刀具中心轨迹应该完全符合工件的轮廓形状,但做到这点是相当困难的。如果要完成精细控制,会使控制算法变得很复杂。一般情况下,待加工工件允许有一定的加工误差,所以实际中,常采用一小段直线或者圆弧逼近。

插补是数据密化的过程。对数控系统输入有限坐标点的情况下,数控系统根据线段特征(直线、圆弧、椭圆等),应用一定控制算法,自动地在有限坐标点直线上生成一系列的坐标数据,即数据密化,从而完成整个线段的轨迹运行,以满足加工精度的要求<sup>[3]</sup>。

数控系统常用的插补算法有:逐点比较法、时间分割法、数字积分法(DDA)等。DDA 插补具有运算速度快,脉冲分配均匀等特点,因此在实际的轮廓加工数控系统中得到广泛的应用。图 1 为 DDA 插补示意图。

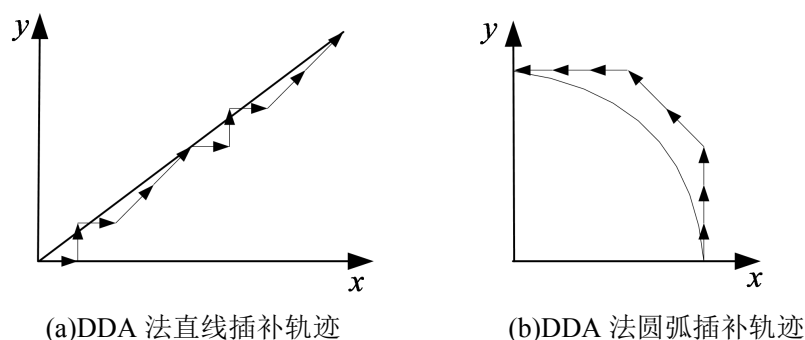


图 1 DDA 插补图

由图 1(a)(b)可以看出,无论工件期望的轮廓形状为直线或者曲线,都可以使用小直线段来逼近。

##### 5.1.2 加工型线过渡段平滑处理

假设  $\theta_0$  为加工型线为折线时进行直线插补过渡的阈值。当  $\theta \geq \theta_0$  时,加工型

线间不用直线插补过渡；否则，使用直线插补过渡。

图 2 为加工型线为折线时的示意图。图 2(a)和图 2(b)都为加工型线折线夹角  $\theta < \theta_0$  的情况，加工型线之间引入  $\frac{r \cdot \theta}{l}$  条直线段过渡，其中  $l$  为机床的加工分辨率。

表 1 加工型线折线夹角与引入过渡直线条数关系

$\theta$	$\theta < \theta_0$	$\theta > \theta_0$
过渡直线条数	$> \frac{r \cdot \theta}{l}$	0

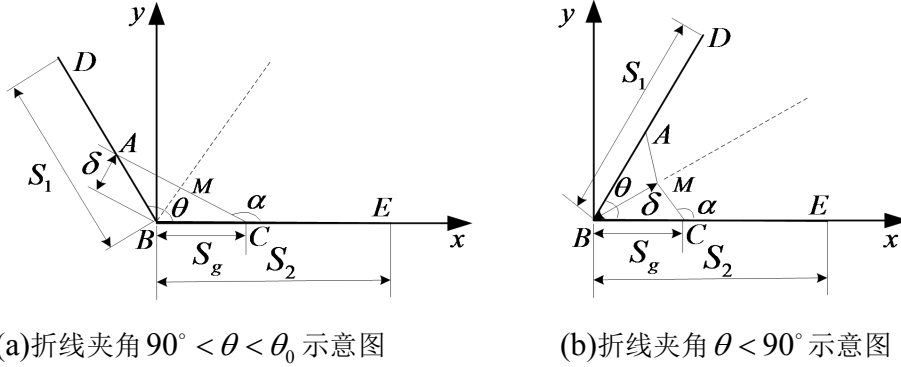


图 2 加工型线为折线时插补示意图

图 2(a)和图 2(b)采用较平滑的型线  $A \rightarrow M \rightarrow C$  替代不平滑的型线  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ，从而减少对机床的进给系统的损害。其中拐点  $B$  到点  $M$  的直线距离为  $\delta$ ，其必须满足

$$\delta < \varepsilon_{\max} \quad (1)$$

其中  $\varepsilon_{\max}$  为加工所能接受的最大误差。

实际工件加工中，由于采用多条过渡直线可使刀具实际轨迹更加平滑，从而可减少机床的进给系统的损害。当加工型线之间使用尽可能多的过渡直线时，刀具实际轨迹可近似为圆弧。加工型线间圆弧过渡示意图见图 3(a)。

设图 3(a)和图 3(b)中的加工最大误差分别为  $\delta_1, \delta_2$ ，由于加工型线之间使用尽可能多的过渡直线时，刀具实际轨迹可近似为圆弧，且都小于工件加工所能接受的最大误差，所以  $\delta_1 \approx \delta_2 < \varepsilon_{\max}$ 。其中图 3(a)中的虚线  $ac$  代表尽可能多的过渡直线。

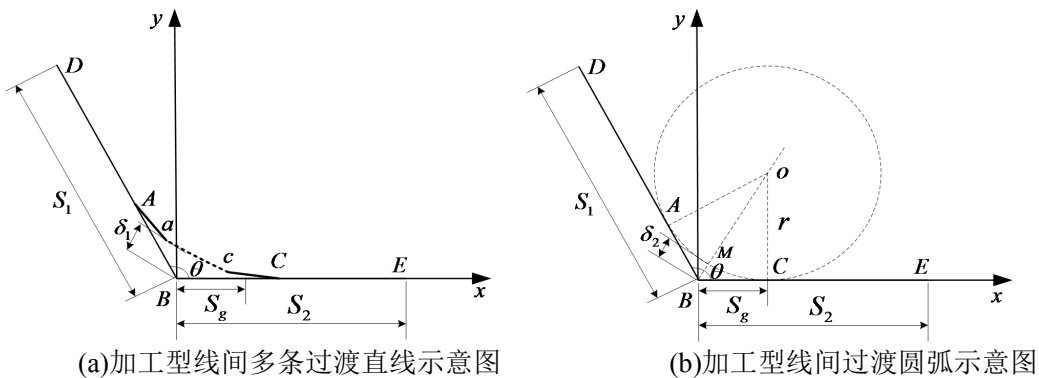


图 3 加工型线间过渡直线和圆弧对比示意图

### 5.1.3 实时加工优化控制模型建立

在加工型线  $D \rightarrow B \rightarrow E$  过程中, 根据实际加工轨线可分为三个阶段, 分别为加工型线过渡段  $AMC$ 、过渡段之前的加工段  $DA$ 、过渡段之后的加工段  $CE$ 。三个阶段都要满足(1)、(2)、(3)约束条件。

(1)进给速度约束条件: 由于每种机床的进给速度有一定的上下界, 所以假设机床的进给速度的上下界分别为  $V_{\max}$  和  $V_{\min}$ 。所以进给速度满足式(1)的约束条件。

$$V_{\min} \leq V \leq V_{\max} \quad (2)$$

(2)加速度约束: 由于每种机床的进给加速度存在一定上下界, 所以假设机床的进给加速度的上下界分别为  $a_{\max}$  和  $a_{\min}$ 。所以进给加速度满足式(2)的约束条件。

$$a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \quad (3)$$

(3)误差约束: 在机床加工过程中, 每点的实际的加工路径与其对应期望的轨线都存在偏差  $\varepsilon_i$ , 但是其必须满足加工的精度要求, 即满足

$$\max(\varepsilon_i) \leq \varepsilon_{\max}, i = 1, 2, \dots, L \quad (4)$$

其中,  $L$  为加工轨线上的点的个数, 其趋于无穷大。

由于在该文中使用数字积分插补(DDA)算法。在图 4 中, 点  $A$  到点  $C$  之间的折线段代表在 DDA 插补算法下刀具实际走过的路径。当在  $M$  点时, 插补点  $N$  相对于  $M$  点的最大偏差为  $l$ , 其中  $l$  为机床分辨率。所以此时加工的最大偏差为  $\delta + l$ 。在  $Rt\triangle OAB$  中, 得

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{r + \delta} \quad (5)$$

结合式(3)和式(4)得到误差约束条件满足

$$\frac{(1 - \sin \frac{\theta}{2})r}{\sin \frac{\theta}{2}} + l < \varepsilon_{\max} \quad (6)$$

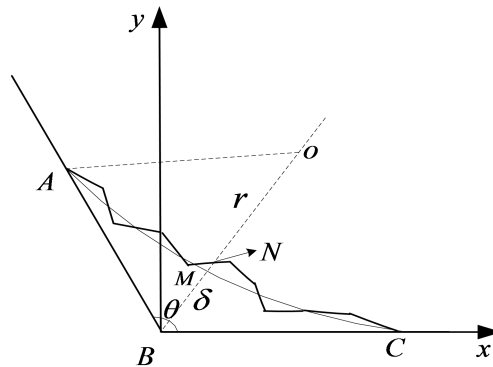


图 4 DDA 插补算法的误差分析图

上面三个约束条件在下面的三个模型的建立过程中都存在, 所以在下面不再一一叙述。

#### 5.1.3.1 圆弧过渡段模型建立

由上述分析已知，加工型线为任意角度的折线时，都可以使用圆弧来代替。又因为半径一定的圆弧在法向加速度不变的情况下，沿圆弧切线方向的速率不变，即满足：

$$a_N = \frac{v^2}{r} \quad (7)$$

式(7)中， $v$ 代表圆弧过渡段的速度大小，且其必须满足  $v \leq v_{\max}$ ； $r$ 代表圆弧的曲率半径。

在图 3(b)中，直线  $BO$  为加工型线  $D \rightarrow B \rightarrow E$  夹角的角平分线，在三角形  $OBC$  中满足

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{r + \delta} \quad (8)$$

其中， $\delta$  为折线交点处误差。

将式(8)整理得

$$r = \frac{\delta \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \sin \frac{\theta}{2}} \quad (9)$$

$S_g$  为期望的轨线的转折点和过渡圆弧之间的距离，其与圆弧半径和相邻两折线段夹角之间的关系满足

$$S_g = r \cot \frac{\theta}{2} \quad (10)$$

如果  $S_g > S_1$  或者  $S_g > S_2$  时，其中  $S_1$  和  $S_2$  分别为加工起始点到折线夹角的距离和折线夹角点到另一条折线的终端距离，即图 3(b)中的  $DB$  段和  $BE$  段的长度。取

$$S_g = \min(S_1, S_2) \quad (11)$$

由式(10)反求得

$$r = S_g \tan \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

根据式(12)得，当加工型线夹角确定且满足式(2)到式(3)的约束条件时，可以确定出加工圆弧的半径  $r$ 。

由于在圆弧运行过程中，速率不变，一直为  $v$ ，因此图 3(b)中  $A$  点速率为  $v$ ，由此得出圆弧段段  $AMC$  间的加加速度、加速度、速度的关系见式(13)

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = 0 \\ V = v \end{cases} \quad t \in (2T_1 + T_2, 2T_1 + T_2 + T_3] \quad (13)$$

这个过程中加速度为 0，速度保持  $v$  不变， $T_3$  的长短由路径长度决定。

#### 5.1.3.2 过渡段前直线加工段模型建立

数控加工对单个坐标运动的控制方法有多种，其中较有代表性的是基于 S 型曲线的加减速控制方法。其特点是将加减速过程分为 7 个阶段（每一阶段对应的加加速度为常量）：加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段，从而渐变地控制各段的加速度使机床运动速度按 S 型曲线



形式平滑变化，以保证速度光顺，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性。

在过渡段之前的加工段  $DA$  段之间，刀具的运行可能通过两种方式到达圆弧过渡区。第一种方式：经过加加速段、匀加速、减加速度到达圆弧过渡段起始处；第二种方式：经过加加速段、匀加速、减加速度、匀速到达圆弧过渡段起始处。加加速段、匀加速、减加速度、匀速段的数学模型依次见式(14)到式(17)。

(1)加加速段运动模型

$$\begin{cases} J = J_{const} \\ a = Jt \\ V = \frac{1}{2}Jt^2 \quad t \in (0, T_1] \end{cases} \quad (14)$$

其中  $T_1 = a_{\max}/J_{const}$ ，这个过程中加速度达到最大  $a_{\max}$ ，加速度和速度都在增加。

(2)匀加速段运动模型

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = a_{\max} \\ V = \frac{1}{2}J_{const}T_1^2 + a_{\max}(t - T_1) \quad t \in (T_1, T_1 + T_2] \end{cases} \quad (15)$$

其中  $T_2 = (v - J_{const}T_1^2)/a_{\max}$ ，这个过程中加速度不变，速度在增加。

(3)减加速段运动模型

$$\begin{cases} J = J_{const} \\ a = a_{\max} - J(t - T_1 - T_2) \\ V = \frac{1}{2}J_{const}T_1^2 + a_{\max}T_2 + a_{\max}(t - T_1 - T_2) - \frac{1}{2}J(t - T_1 - T_2)^2 \quad t \in (T_1 + T_2, 2T_1 + T_2] \end{cases} \quad (16)$$

这个过程中加速度在减小，速度在增加，一直增加到  $v$ ，当  $t = 2T_1 + T_2$  时， $V = v$ 。

(4)匀速段运动模型

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = 0 \\ V = v \quad t \in (2T_1 + T_2, 2T_1 + T_2 + T_3] \end{cases} \quad (17)$$

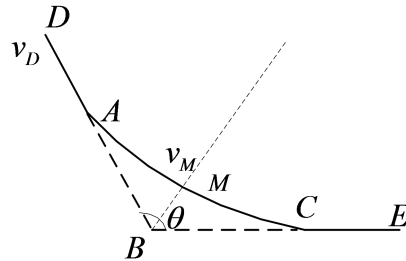


图 5 加工段轨迹速度分析图

图 5 中的  $D$  点速度大小为  $V_D$ ， $M$  点的速度大小为  $V_M$ 。  $DM$  段加减速有 3

中可能的情况：①只有加速度或者减速区；②同时有加速和减速区；③同时有加速、减速区和匀速区。三种可能情况取决于加工段的长度  $S_1$  决定。

在  $D$  点和  $M$  点之间使用最大的加速度运行时，有

$$S_{\min} = \left| \frac{v_M^2 - v_D^2}{2a_{\max}} \right| \quad (18)$$

当  $S_1 \leq S_{\min}$  且  $v_D < v_M$  时，在加工轨迹  $DM$  过程中，只有加速区；当  $S_1 < S_{\min}$  且  $v_D > v_M$  时，在加工轨迹  $DM$  过程中，只有减速区；当  $S_1 > S_{\min}$  时，该区段可能同时有加速和减速区和同时有加速、减速区和匀速区这两种情况。所以在加工轨迹  $DM$  过程中，可能是①、②、③中的一种情况，但是三种情况都在圆弧段  $AC$  的速率是常值。

#### 5.1.3.3 过渡段后直线加工段模型建立

在过渡段之后的加工段  $CE$ ，刀具的运行可能通过两种方式到达  $E$  点。第一种方式：经过加减速段、匀减速段、减减速段到达  $E$  点；第二种方式：经过匀速、加减速段、匀减速段、减减速段到达  $E$  点。加减速段、匀减速段、减减速段的运动模型依次见式(19)到式(21)。

##### (1)加减速段运动模型

$$\begin{cases} J = J_{\text{const}} \\ a = -J(t - 2T_1 - T_2 - T_3) \\ V = v - \frac{1}{2}J(t - 2T_1 - T_2 - T_3)^2 \quad t \in (2T_1 + T_2 + T_3, 3T_1 + T_2 + T_3] \end{cases} \quad (19)$$

这个过程中加速度在增加，速度在减小，这段其实与减加速段是对称的。

##### (2)匀减速段运动模型

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = -a_{\max} \\ V = v - \frac{1}{2}J_{\text{const}}T_1^2 - a_{\max}(t - 3T_1 - T_2 - T_3) \\ t \in (3T_1 + T_2 + T_3, 3T_1 + 2T_2 + T_3] \end{cases} \quad (20)$$

这个过程中加速度保持  $-a_{\max}$  不变，速度在减小，这段其实与匀加速段是对称的。

##### (3)减减速段运动模型

$$\begin{cases} J = J_{\text{const}} \\ a = -a_{\max} + J(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3) \\ V = V_{\max} - \frac{1}{2}J_{\text{const}}T_1^2 - a_{\max}T_2 - a_{\max}(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3) + \frac{1}{2}J(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3)^2 \quad t \in (3T_1 + 2T_2 + T_3, 4T_1 + 2T_2 + T_3] \end{cases} \quad (21)$$

这个过程中加速度在减小直到为 0，速度也在减小直到为 0，当  $t = 4T_1 + 2T_2 + T_3$  时， $V = 0$ 。

#### 5.1.4 实时加工优化控制模型求解

##### (1)加工型线为折线且两相邻线段间夹角 $\theta = 90^\circ$ 情况

当加工型线为折线且两相邻线段之间的夹角  $\theta = 90^\circ$ ，采用圆弧作为过渡曲线。圆弧的半径  $r$  一定且在圆弧段上的刀具给定速率  $v$  为定值，建立如图 6 所示的坐标系  $xBy$ 。

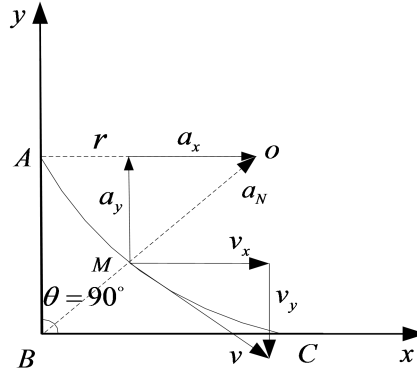


图 6 加工型线为折线且两相邻线段间夹角  $\theta = 90^\circ$  示意图

由于在圆弧段  $AMC$  上，道具做匀速率的圆周运动，所以此时在点  $M$  处的沿速度方向的加速度为 0，法向加速度为  $a_N$ ，在向量  $a_x$ ， $a_y$ ， $a_z$  构成的三角形中，存在  $\angle(\vec{a}_y, \vec{a}_N) = 90^\circ - \frac{\theta}{2} = 45^\circ$ ，所以得到

$$a_x = a_N \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = \frac{v^2}{r} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2r} v^2 \quad (22)$$

$$a_y = a_N \cos(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = \frac{v^2}{r} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2r} v^2 \quad (23)$$

其中， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的方向见图 5。当坐标系  $xBy$  建立不同时， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的大小和方向也会发生变化。

在向量  $v_x$ ， $v_y$ ， $v_z$  构成的三角形中，存在  $\angle(\vec{v}_x, \vec{v}) = 90^\circ - \frac{\theta}{2} = 45^\circ$ ，所以得到

$$v_x = v \cos(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = v \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v \quad (24)$$

$$v_y = v \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = v \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v \quad (25)$$

其中， $\vec{v}_x$  和  $\vec{v}_y$  的方向见图 6。当坐标系  $xBy$  建立不同时， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的大小和方向也会发生变化。

结果说明：当加工型线为折线且两相邻线段间夹角  $\theta = 90^\circ$  时，沿  $x$  和  $y$  轴方向的加速度与圆弧速率的平方成正比，与圆弧半径成反比，且大小相等。

(2) 加工型线为折线且两相邻线段之间的夹角  $\theta = 135^\circ$

当加工型线为折线且两相邻线段之间的夹角  $\theta = 135^\circ$ ，采用圆弧作为过渡曲线。圆弧的半径  $r$  一定且在圆弧段上的刀具给定速率  $v$  为定值，建立如图 7 所示的坐标系  $xBy$ 。

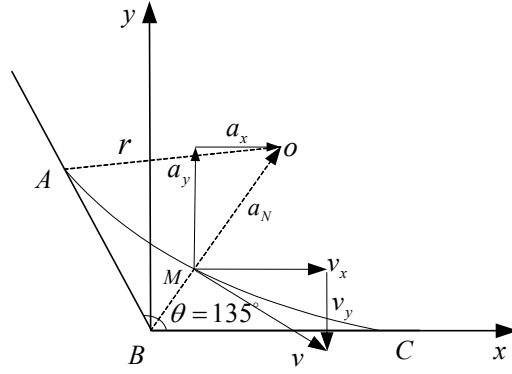


图 7 加工型线为折线且两相邻线段间夹角  $\theta = 135^\circ$  示意图

由于在圆弧段  $AMC$  上，道具做匀速率的圆周运动，所以此时在点  $M$  处的沿速度方向的加速度为 0，法向加速度为  $a_N$ ，在向量  $a_x$ ， $a_y$ ， $a_z$  构成的三角形

中，存在  $\angle(\vec{a}_y, \vec{a}_N) = 90^\circ - \frac{\theta}{2} = 22.5^\circ$ ，所以得到

$$a_x = a_N \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = \frac{v^2}{r} \cos \frac{\theta}{2} = 0.3827 \frac{v^2}{r} \quad (26)$$

$$a_y = a_N \cos(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = \frac{v^2}{r} \sin \frac{\theta}{2} = 0.9239 \frac{v^2}{r} \quad (27)$$

其中， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的方向见图 7。当坐标系  $xBy$  建立不同时， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的大小和方向也会发生变化。

在向量  $v_x$ ， $v_y$ ， $v_z$  构成的三角形中，存在  $\angle(\vec{v}_x, \vec{v}) = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ ，所以得到

$$v_x = v \cos(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = v \sin \frac{\theta}{2} = 0.9239v \quad (28)$$

$$v_y = v \sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) = v \cos \frac{\theta}{2} = 0.3827v \quad (29)$$

其中， $\vec{v}_x$  和  $\vec{v}_y$  的方向见图 7。当坐标系  $xBy$  建立不同时， $\vec{a}_x$  和  $\vec{a}_y$  的大小和方向也会发生变化。

结果说明：当加工型线为折线且两相邻线段间夹角  $\theta = 135^\circ$  时，沿  $x$  和  $y$  轴方向的加速度与圆弧速率的平方成正比，与圆弧半径成反比，且  $y$  轴方向的速度变化大于  $x$  轴方向的速度变化。

## 5.2 问题二模型建立与求解

已知加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在满足指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；其中算法效率通过待加工工件的时间来体现，当工件加工时间越小，算法的效率越高。并应用所建立的模型对给出的加工路径示例进行检验。该问题的求解方法是加工型线为折线情况下的一种延伸，在建立该问题实时加工优化控制算法之后，由实际的应用例子可以进行验证。除此之外，直线段与圆弧段之间可以分为相切与不相切两种情况，我们应该分别进行分析和建模。

### 5.2.1 直线段与圆弧段相切情况分析

对于直线段与圆弧段间相切情况，其实质是加工型线为折线时过渡段平滑处

理的一个特例。直线段与圆弧段之间相切情况示意图见图 8。

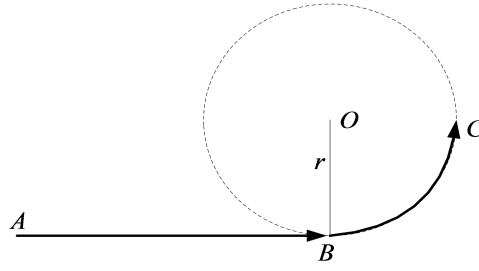


图 8 直线段与圆弧段之间相切情况示意图

在图 8 中，由于直线段与圆弧段之间相切，所以在相交处可以用插补法进行插补。通过查阅资料，得知对于圆弧的插补，用时间分割法圆弧插补比较好。

时间分割法插补是数控加工过程中常用且典型的数据采样插补方法，其工作原理为：首先根据加工程序中的进给速度  $F$ ，计算得到经过一个插补周期时对应的轮廓步长  $L$ 。圆弧插补计算，是以轮廓步长为圆弧上相邻两个插补点之间的弦长，由前一个插补点的坐标和圆弧半径计算前一插补点到后一个插补点两个坐标轴的进给量<sup>[3]</sup>。图 9 为时间分割法圆弧插补的示意图。

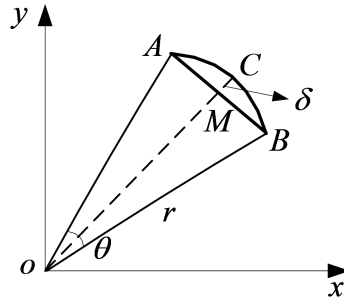


图 9 时间分割法圆弧插补示意图

在图 8 所示的刀具行进路径过程中，由于刀具近似为点，所以在直线段  $AB$  可认为误差为 0，所以整个行进路线中，加工的最大误差体现在圆弧段。在图 9 中，用小直线  $AB$  插补期望圆弧轨迹为  $\widehat{ACB}$ ，机床的加工精度为  $l$ ，即  $AB = l$ 。所以在  $\triangle AMO$  中，由勾股定理得

$$OM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad (30)$$

所以加工误差  $\delta$  为

$$\delta = r - OM = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad (31)$$

在直线段与圆弧段相切情况下，此时的  $\delta$  为这一过程中的最大误差，即

$$\delta_{\max} = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} < \varepsilon_{\max} \quad (32)$$

并且加工过程中的最大加工误差必须满足小于或者等于为加工所能接受的最大误差  $\varepsilon_{\max}$ 。

### 5.2.2 直线段与圆弧段之间不相切情况分析

图 10 为圆弧段与直线段相交接并且不相切情况的示意图。在该图中由于精确的计算两运动矢量相切的过度圆弧比较繁琐，故可利用圆弧段上的微段弦长  $S_g$  来近似的求过渡圆弧。此时，求得的两有向加工段的夹角  $\theta_l$  比实际的夹角  $\theta$  小。

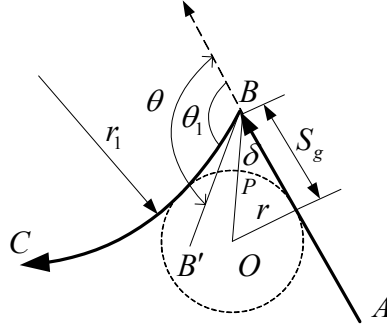


图 10 直线段与圆弧段之间不相切情况示意图

在半径为  $r_1$  的圆弧上,弦长  $S_g$  对应的弦切角为  $\arcsin(\frac{S_g}{2r_1})$ , 所以当直线段与圆弧段交接时  $\theta_1 = \theta - \arcsin(\frac{S_g}{2r_1})$ 。由时间分割插补理论可知, 当  $S_g \rightarrow 0$ , 存在  $\theta_1 = \theta$ 。所以当  $S_g$  微小时,  $\theta_1$  和  $\theta$  的差值远小于  $\theta$ , 所以这对速度处理无影响。

直线段与圆弧段之间不相切情况下, 最大误差为

$$\delta_{\max} = \frac{r}{\cos \frac{\theta_1}{2}} - r \quad (33)$$

当  $r$  足够小时, 可以满足  $\delta_{\max} < \varepsilon_{\max}$ 。

圆弧的具体求取方法同直线段与直线段间的过渡圆弧的求取方法相同<sup>[4]</sup>。

综上所述, 圆弧段与直线段相交并且不相切时相当于在直线与圆弧之间在插补一个圆弧来加工, 其解决方法与直线段与圆弧段相切情况解决思路一致。所以可将圆弧段与直线段相交且不相切的情况按照按照直线段与圆弧段相切的情况来理解。

### 5.2.3 实时加工优化控制算法

将直线段与圆弧段之间相切的这种情况过程分为直线运动阶段与曲线运动阶段 (即圆弧段阶段)。

(1) 在圆弧段, 机床一般插补时速率是恒定的, 所以第  $i$  段圆弧经过的时间为

$$t_{\text{弧}} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i \cdot \theta_i}{v_i} \quad (34)$$

其中,  $r_i, \theta_i, v_i$  分别为第  $i$  段圆弧的半径、弧度和速率。

(2) 直线阶段时间: 包括加速阶段、匀速阶段和减速阶段。

1) 加速阶段时间

$$t_{\text{加}} = \sum_{i=1}^n (t_{1i} + t_{2i} + t_{3i}) \quad (35)$$

其中,  $t_{1i}$  代表加加速阶段的时间,  $t_{2i}$  代表匀加速阶段的时间,  $t_{3i}$  代表减加速阶段的时间。

2) 匀速阶段时间

$$t_{\text{匀}} = \sum_{i=1}^n t_{4i} \quad (36)$$

其中,  $t_{4i}$  代表匀速阶段的时间。

### 3) 减速阶段时间

$$t_{\text{减}} = \sum_{i=1}^n (t_{5i} + t_{6i} + t_{7i}) \quad (37)$$

其中,  $t_{5i}$  代表加减速阶段的时间,  $t_{6i}$  代表匀减速阶段的时间,  $t_{7i}$  代表减减速阶段的时间。

$n$  段直线以及圆弧的总时间:

$$t_{\text{总}} = t_{\text{加}} + t_{\text{匀}} + t_{\text{减}} + t_{\text{弧}} = \sum_{i=1}^n (t_{1i} + t_{2i} + t_{3i} + t_{4i} + t_{5i} + t_{6i} + t_{7i} + \frac{r_i \cdot \theta_i}{v_i}) \quad (38)$$

除起始直线外, 每条加工直线都可以分为一个速度下降阶段和一个速度上升阶段, 并且上升阶段与下降阶段时间距离均相等, 所以可以将上述问题分解为两条相等直线连接一条圆弧的问题。

#### 5.2.4 只有两段加工直线的实时加工优化控制算法

两条相等直线 (匀速除外) 连接一条圆弧运动示意图如下所示:

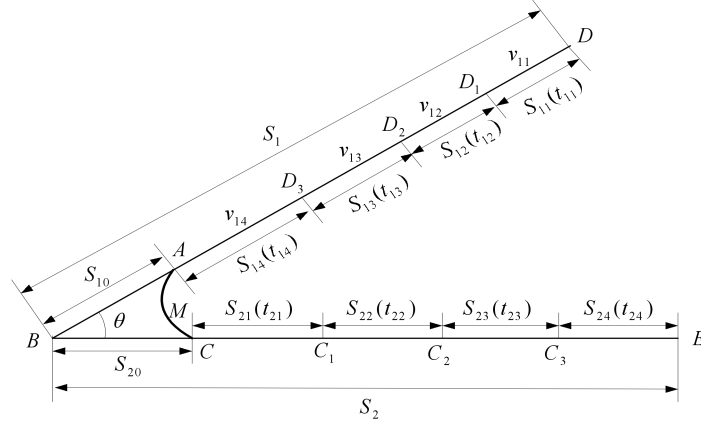


图 11 两条相等直线 (匀速除外) 连接一条圆弧运动示意图

将直线段与圆弧段之间相切的情况过程分为直线运动阶段与曲线运动阶段 (即圆弧段阶段)。

(1) 在圆弧段, 机床一般插补时速率是恒定的, 所以圆弧经过的时间为

$$t'_{\text{弧}} = \frac{r \cdot \theta}{v} \quad (39)$$

其中,  $r, \theta, v$  分别为图 11 圆弧的半径、弧度和速率。

(2) 直线阶段时间: 包括加速阶段、匀速阶段和减速阶段。

1) 加速阶段时间

$$t'_{\text{加}} = t_{11} + t_{12} + t_{13} \quad (40)$$

其中,  $t_{11}$  代表加加速阶段的时间,  $t_{12}$  代表匀加速阶段的时间,  $t_{13}$  代表减加速阶段的时间。

2) 匀速阶段时间

$$t'_{\text{匀}} = t_{14} + t_{21} \quad (41)$$

其中,  $t_{14}$  和  $t_{21}$  代表匀速阶段的时间。

3) 减速阶段时间

$$t'_{\text{减}} = t_{22} + t_{23} + t_{24} \quad (42)$$

其中,  $t_{22}$  代表加减速阶段的时间,  $t_{23}$  代表匀减速阶段的时间,  $t_{24}$  代表减减速阶段的时间。

$n$  段直线以及圆弧的总时间:

$$t'_{\text{总}} = t'_{\text{加}} + t'_{\text{匀}} + t'_{\text{减}} + t'_{\text{弧}} = t_{11} + t_{12} + t_{13} + t_{14} + t_{21} + t_{22} + t_{23} + t_{24} + \frac{r \cdot \theta}{v} \quad (43)$$

除起始直线外, 每条加工直线都可以分为一个速度下降阶段和一个速度上升阶段, 并且上升阶段与下降阶段时间距离均相等, 所以可以将上述问题分解为两条相等直线连接一条圆弧的问题。

图 11 中, 相等两条直线长度为  $S_1$  和  $S_2$ , 并且  $S_1 = S_2$ 。所以在两条相等直线连接一条圆弧轨迹路径下刀具运行总时间为  $2T_{\text{总}}$ 。实际中由于该过程复杂, 并且对刀具的  $S$  型速度曲线方程求积分相当麻烦, 所以要对其进行优化。基于此, 可用梯形加减速来代替  $S$  型曲线来分析和计算段与段件的速度、段内的加减速区和每个段内加减速区的时间<sup>[4]</sup>。梯形加减速曲线与  $S$  型加减速曲线示意图见图 12。

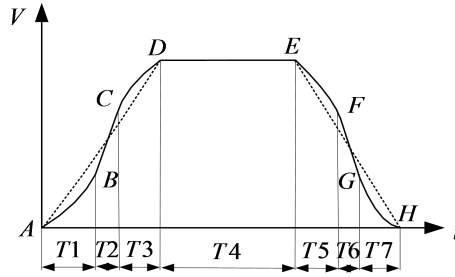


图 12  $S$  型曲线与加减速运动描述示意图

梯形加减速代替  $S$  型加减速的原因: 因为梯形加减速曲线与  $S$  型曲线与  $t$  轴围成的面积相等, 所以每个  $S$  型曲线都可以整体用梯形来代替。当存在不完整  $S$  型曲线的上升阶段或下降阶段过程时, 再用  $S$  型曲线来分析或用梯形近似。由于  $S$  型曲线采用降速与升速段对称的曲线来实现升降速控制, 在加、减速区, 其平均加速度大小都为直线  $AD$  的斜率的绝对值, 这表明梯形和  $S$  型曲线加减速在加速、匀速和减速区所用的时间和所走的距离是一样的, 因此对于  $S$  型曲线加减速可用等效的梯形加减速来进行段与段间的速度调节、段内的加减速区计算。

设车床系统的最大加速度为  $A_{\text{max}}$ , 最大加加速度为  $J_{\text{const}}$ , 最大进给速度为  $V_{\text{max}}$ , 则等效梯形加速度  $a_t$  满足

$$\frac{V_{\text{max}}}{a_t} \geq \frac{2A_{\text{max}}}{J_{\text{const}}} \quad (44)$$

即:  $a_t \leq \frac{J_{\text{const}} V_{\text{max}}}{2A_{\text{max}}}$ 。其中等效梯形加速度  $a_t$  超过系统的最大加速度  $A_{\text{max}}$ , 是不允许的。

### 5.2.5 梯形加减速对 $S$ 型加减速简化并建模

(1) 加速阶段时间: 设刀具到达圆弧的匀速速度为  $V_t$ , 开始加工时的初始速度为  $V_0$ , 因为在本问中, 初始速度为 0, 因此  $V_0 = 0$ 。对于图 11 而言,  $S$  型加减速加速阶段(包括加加速阶段、匀加速阶段、加减速阶段)时间等效为

$$t_1 = \frac{V_t - V_0}{a_t} \quad (45)$$

(2)  $S$  型加减速匀速阶段(不考虑圆弧段)的时间



$$t_2 = \frac{S_{14}}{V_t} + \frac{S_{21}}{V_t} \quad (46)$$

(3)经过圆弧  $AM$  时间为

$$t_3 = \frac{r^* \theta}{2V_t} \quad (47)$$

所以总时间为

$$t = 2t_1 + t_2 + 2t_3 = 2 \frac{V_t - V_0}{a_t} + \frac{S_{14}}{V_t} + \frac{S_{21}}{V_t} + \frac{r^* \theta}{V_t} \quad (48)$$

式(48)为运行时间  $t$  (即加工效率) 与半径  $r$  之间的关系。

其约束条件有 1)~4)四条:

1)刀具初始速度

$$V_0 = 0 \quad (49)$$

2)匀速速度  $V_t$  满足系统要求的给定速度, 即  $V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max}$  ;

3)直线段等效加速度满足

$$a_t \leq \frac{J_{\text{const}} V_{\max}}{2A_{\max}} \quad (50)$$

4)路径长度满足①和②两个条件:

①在加速阶段和减速阶段刀具经过的路径长度是相等的, 且加速阶段和减速阶段可分别认为是匀加速运动和匀减速运动, 且加速度的大小相等, 方向相反, 即满足

$$\frac{V_t^2 - V_0^2}{2a_t} = S_{11} + S_{12} + S_{13} = S_{22} + S_{23} + S_{24}$$

②对于圆弧段  $AC$  而言, 以  $M$  点为中心的两段圆弧是相等的且与致电段的夹角满足下面的等式

$$S_{10} = r^* \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = S_{20}$$

### 5.2.6 圆弧半径的变化对算法效率的影响

(1)当  $r$  增大, 有

$$r \uparrow \Rightarrow (\text{弧长 } L = r\theta) \uparrow \Rightarrow \text{直线长度}(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \downarrow$$

$$\Rightarrow \text{圆弧长度变化 } \Delta L < \text{直线长度变化 } \Delta(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \Rightarrow t \downarrow$$

其中,  $A \uparrow$  代表参数  $A$  增大;  $A \downarrow$  代表参数  $A$  减小;  $A \Rightarrow B$  代表由  $A$  可推导出  $B$ ;  $A \uparrow \Rightarrow B$  代表  $A$  的增大可推出条件  $B$ 。

从以上分析可得出: 当  $r$  增大时, 总时间会减小, 加工效率会增大; 因此时间变小, 而匀速阶段的长度变长, 速度减小非常小, 因此总时间会减小, 加工效率会增大。

(2)当  $r$  减小时, 有

$$r \downarrow \Rightarrow (\text{弧长 } L = r\theta) \downarrow \Rightarrow \text{直线长度}(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \uparrow$$

$$\Rightarrow \text{圆弧长度变化 } \Delta L < \text{直线长度变化 } \Delta(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \Rightarrow t \uparrow$$

从以上分析可得出: 在  $r$  减小时, 圆弧减小的长度小于直线增大的长度, 因此, 匀速阶段的总长度增大, 匀速阶段的时间增大, 得到结果为: 当  $r$  减小时, 总时间会增大, 加工效率会降低。

综上所述, 当  $r$  增大时, 总时间会减小, 加工效率增大; 当  $r$  减小时, 总时

### 5.2.7 实时加工优化控制算法验证

Figure 1 illustrates a vehicle trajectory in a rectangular environment. The trajectory is a closed loop with various segments labeled with state variables  $(S, a, t)$  and velocity  $V$ . The segments are categorized into '匀速阶段' (Uniform Motion Stage) and '加速/减速阶段' (Acceleration/Deceleration Stage). The trajectory starts at a '运行起点' (Starting Point) and ends at a '运行终点' (Ending Point). The diagram shows a sequence of segments:  $(S_1, a_1, t_1)$  acceleration,  $(S_2, 0, t_2)$  uniform,  $(S_3, 0, t_3)$  uniform,  $(S_4, 0, t_4)$  uniform,  $(S_5, a_5, t_5)$  deceleration,  $(S_6, a_6, t_6)$  acceleration,  $(S_7, 0, t_7)$  uniform,  $(S_8, 0, t_8)$  uniform,  $(S_9, 0, t_9)$  uniform,  $(S_{10}, a_{10}, t_{10})$  deceleration,  $(S_{11}, a_{11}, t_{11})$  acceleration,  $(S_{12}, 0, t_{12})$  uniform,  $(S_{13}, 0, t_{13})$  uniform,  $(S_{14}, 0, t_{14})$  uniform,  $(S_{15}, a_{15}, t_{15})$  deceleration,  $(S_{16}, a_{16}, t_{16})$  acceleration,  $(S_{17}, 0, t_{17})$  uniform,  $(S_{18}, 0, t_{18})$  uniform,  $(S_{19}, 0, t_{19})$  uniform,  $(S_{20}, a_{20}, t_{20})$  deceleration, and  $(S_1, a_1, t_1)$  acceleration. Velocities  $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4$  are indicated at various points along the trajectory.

图 13 指定加工路径示例图

如上图所示，节点 1 到节点 3 对应的直线包括加速和匀速两个阶段，其对应的加速度，速度与时间在图中已经标出。其余三条直线均包括减速，加速和匀速阶段。

为验证圆弧半径的变化对算法效率的影响,我们用上面建立的模型来建立实际过程的模型。

该模型的目标函数为加工效率最大, 即 20 个阶段刀具运行总时间最小, 即

$$\min \quad t = \sum_{i=1}^{20} t_i$$

加工工件对指定点速度要求的约束条件 (以 $V$ 表示节点 $i$ 的速度):

$$\begin{cases} 0 \leq V_i \leq 0.13/60, i = 1, 11 \\ 0 \leq V_i \leq 0.19/60, i = 2 \\ 0 \leq V_i \leq 1.26/60, i = 3, 4, \dots, 10 \end{cases}$$

运动过程中, 机床系统本身对于速度、加速度、加加速度、误差的限制条件为: 进给速度  $V$  范围:  $\frac{0.13}{60} \leq V \leq \frac{6}{60}$ ; 加速度  $a$  范围:  $0.02 \leq a \leq 0.6$ ; 加加速度

$$J_{const}: J_{const}=0.3; \text{ 误差: } \varepsilon=1\mu m; \text{ 分辨率: } \delta=\frac{1}{1280}mm。$$

运动过程中, 用梯形加减速求解的加速度约束条件如下:

$$0 \leq a_i \leq \frac{J_{const} V_{\max}}{2A_{\max}}$$

运动过程中，运动路径约束条件为：

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + 2r = 0.41 \\ S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + 2r = 0.41 \\ S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} + 2r = 0.41 \\ S_{14} + S_{15} + S_{16} + S_{17} + 2r = 0.41 \end{cases}$$

以上为加工型线是由直线段和圆弧段组成的连续曲线的实时加工优化控制算法，我们首先将  $r=0.5$  代入上式，求解出给定的加工路径示例的最小时间，再在此基础上改变半径，得出圆弧半径的变化对算法效率的影响。

给定加工实例算法效率模型总结如下：

$$\begin{aligned} \min t &= \sum_{i=1}^{20} t_i & (51) \\ s.t. \begin{cases} 0 \leq V_i \leq 0.13/60, i=1,11 \\ 0 \leq V_i \leq 0.19/60, i=2 \\ 0 \leq V_i \leq 1.26/60, i=3,4,\dots,10 \\ \frac{0.13}{60} \leq V \leq \frac{6}{60} \\ 0.02 \leq a \leq 0.6 \\ J_{const} = 0.3 \\ \varepsilon = 1\mu m \\ \delta = \frac{1}{1280} mm \\ 0 \leq a_i \leq \frac{J_{const} V_{\max}}{2A_{\max}} \\ S_1 + S_2 + 2r = 0.41 \\ S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + 2r = 0.41 \\ S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} + 2r = 0.41 \\ S_{14} + S_{15} + S_{16} + S_{17} + 2r = 0.41 \end{cases} \end{aligned}$$

使用 lingo 软件对优化模型进行求解，结果运行不出来，因此对题中给出的数据进行检验：

初始速度  $V_0=0$ ，在节点 2 处  $V_{2\max} = \frac{0.19}{60} m/s$ ，又因为在从节点 1 到节点 2 的过程中，速度不能超过  $V_{2\max}$ ，因此这是一个加速过程。最小加速度为  $0.02 m/s^2$ ，以此加速度做匀加速运动时，得出在节点 2 处的速度远大于  $V_{2\max} = \frac{0.19}{60} m/s$ 。因此，节点 2 的情况不能满足速度要求，因此将节点 2 位置的速度要求舍弃，在此基础上再次建立数学模型进行验证。

最终得到  $r=0.5cm$  时，加工该工件的最短时间  $t=79.4857s$ 。表 2 和表 3 分别为各阶段的时间和经过的长度，特定点速度值。

表 2 指定加工路径各阶段的刀具的运行时间和经过的路径长度

各阶段经过时间(s)	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
	0.4	18.84762	0.3738095	18.64762	0.4
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
	0.420	39.580	0.785	39.160	0.420
各阶段经过时间(s)	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
	0.4	0	0.3738095	0	0.4
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
	0.420	0	0.785	0	0.420
各阶段经过时间(s)	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$t_{15}$
	0.4	18.64762	0.3738095	18.67161	0.3752466
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{14}$	$S_{15}$
	0.420	39.160	0.785	39.210	0.420
各阶段经过时间(s)	$t_{16}$	$t_{17}$	$t_{18}$	$t_{19}$	$t_{20}$
	0.3752466	0	0.3984682	0	0.4
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_{16}$	$S_{17}$	$S_{18}$	$S_{19}$	$S_{20}$
	0.370	0	0.785	0	0.370

注：表中某阶段出现刀具经过长度和其对应时间均为 0，说明实际加工中该阶段不存在。

表 3 特定点的速度

速度(m/s)	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
	0.021	0.021	0.021	0.021

为了验证圆弧半径的变化对算法效率的影响，通过改变  $r$  值，得到圆弧半径的变化对算法效率的影响，其变化趋势如图 14 所示。

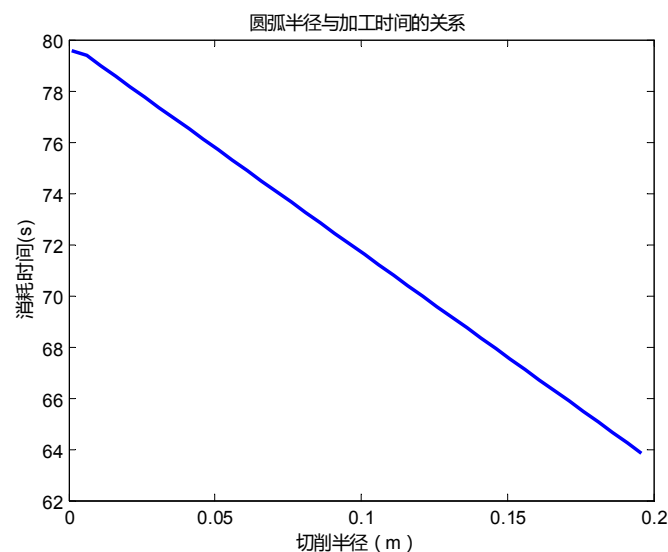


图 14 圆弧半径与加工时间关系图

根据图 14 分析可知，当  $r$  增大时，总时间会较小，加工效率会增大；当  $r$  减

小时，总时间会较小，加工效率会增大。这个结果与建立的模型分析结果一致，所以通过加工路径实例验证了我们建立的模型的正确性。

### 5.3 问题三模型建立与求解

#### 5.3.1 实时加工优化控制模型建立

考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法这一问题是在第二问的基础之上的扩展。

对于瞬时启动加速度和瞬时启动速度考虑，其实质就是将初始速度为 0 的 S 型加减速曲线的起点和终点向上平移得到如图 15 的速度示意图。在一个 S 型速度周期内允许初始时刻和结束时刻速度和加速度突变。

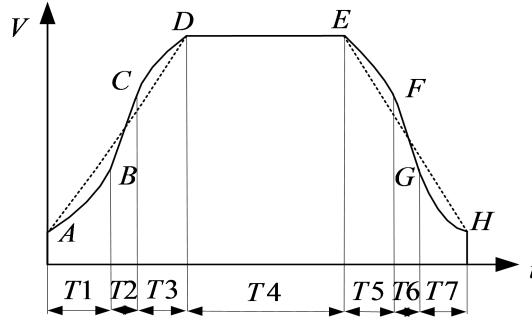


图 15 S 型曲线与加减速运动描述示意图（考虑瞬时启动加速度和瞬时启动速度）

在该问题中依然用梯形加减速方法来对 S 型加减速问题进行简化并建模。

(1)加速阶段时间：设刀具到达圆弧的匀速速度为  $V_t$ ，开始加工时的初始速度为  $V_0$  ( $V_0 \neq 0$ )，因为在本问中，允许速度和加速度突变。对于图 11 而言，S 型加减速加速阶段(包括加加速阶段、匀加速阶段、加减速阶段)时间等效为

$$t_1 = \frac{V_t - V_0}{a_t} \quad (52)$$

其中， $a_t$  为梯形加速阶段和减速阶段的等效加速度。

(2) S 型加减速曲线中的匀速阶段(不考虑圆弧段)的时间

$$t_2 = \frac{S_{14}}{V_t} + \frac{S_{21}}{V_t} \quad (53)$$

(3)经过与直线连接圆弧时间为

$$t_3 = \frac{r * \theta}{2V_t} \quad (54)$$

所以总时间为

$$t = 2t_1 + t_2 + 2t_3 = 2 \frac{V_t - V_0}{a_t} + \frac{S_{14}}{V_t} + \frac{S_{21}}{V_t} + \frac{r * \theta}{V_t} \quad (55)$$

式(55)为运行时间  $t$ （即加工效率）与半径  $r$  之间的关系。

(4)约束条件有 1)~4)四条：

1)考虑刀具的速度突变，所以刀具初始速度

$$V_0 = \frac{0.13}{60} \neq 0 \quad (56)$$

此式与第二问中的约束条件式(49)不相同。

2)匀速速度  $V_t$  满足系统要求的给定速度，即  $V_{\min} \leq V_t \leq V_{\max}$ ；

3)直线段等效加速度满足

$$a_i \leq \frac{J_{const}(V_{\max} - V_0)}{2A_{\max}} \quad (57)$$

此式与第二问中的约束条件(50)不相同。

4)路径长度满足①和②两个条件：

①在加速阶段和减速阶段刀具经过的路径长度是相等的，且加速阶段和减速阶段可分别认为是匀加速运动和匀减速运动，且加速度的大小相等，方向相反，即满足

$$\frac{V_t^2 - V_0^2}{2a_i} = S_{11} + S_{12} + S_{13} = S_{22} + S_{23} + S_{24}$$

②对于圆弧段  $AC$  而言，以  $M$  点为中心的两段圆弧是相等的且与致电段的夹角满足下面的等式。

$$S_{10} = r * \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = S_{20}$$

### 5.3.2 圆弧半径的变化对算法效率的影响

(1)当  $r$  增大，有

$$\begin{aligned} r \uparrow &\Rightarrow (\text{弧长 } L = r\theta) \uparrow \Rightarrow \text{直线长度}(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \downarrow \\ &\Rightarrow \text{圆弧长度变化 } \Delta L < \text{直线长度变化 } \Delta(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \Rightarrow t \downarrow \end{aligned}$$

其中， $A \uparrow$  代表参数  $A$  增大； $A \downarrow$  代表参数  $A$  减小； $A \Rightarrow B$  代表由  $A$  可推导出  $B$ ； $A \uparrow \Rightarrow B$  代表  $A$  的增大可推出条件  $B$ 。

从以上分析可得出：当  $r$  增大时，总时间会减小，加工效率会增大；因此时间变小，而匀速阶段的长度变长，速度减小非常小，因此总时间会减小，加工效率会增大。

(2)当  $r$  减小时，有

$$\begin{aligned} r \downarrow &\Rightarrow (\text{弧长 } L = r\theta) \downarrow \Rightarrow \text{直线长度}(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \uparrow \\ &\Rightarrow \text{圆弧长度变化 } \Delta L < \text{直线长度变化 } \Delta(S_1 + S_2 - S_{10} - S_{20}) \Rightarrow t \uparrow \end{aligned}$$

从以上分析可得出：在  $r$  减小时，圆弧减小的长度小于直线增大的长度，因此，匀速阶段的总长度增大，匀速阶段的时间增大，得到结果为：当  $r$  减小时，总时间会增大，加工效率会降低。

综上所述，当  $r$  增大时，总时间会减小，加工效率增大；当  $r$  减小时，总时间会增大，加工效率会减小。

### 5.3.3 实时加工优化控制模型求解

图 13 为给定的加工路径示例图，以此对建立的模型和模型结果进行检验。节点 1 到节点 3 对应的直线包括加速和匀速两个阶段，其对应的加速度，速度与时间在图中已经标出。其余三条直线均包括减速，加速和匀速阶段。

为验证圆弧半径的变化对算法效率的影响，我们用已建立的实时加工优化控制模型来建立实际工件运动过程的模型。

该模型的目标函数为加工效率最大，即 20 个阶段刀具运行总时间  $t$  最小，即

$$t = \sum_{i=1}^{20} t_i \quad (58)$$

加工工件对指定点速度要求的约束条件（以  $V_i$  表示节点  $i$  的速度）：

$$\begin{cases} 0 \leq V_i \leq 0.13/60, i = 1, 11 \\ 0 \leq V_i \leq 0.19/60, i = 2 \\ 0 \leq V_i \leq 1.26/60, i = 3, 4, \dots, 10 \\ V_0 = 0.13/60 \end{cases} \quad (59)$$

运动过程中，机床系统本身对于速度、加速度、加加速度、误差的限制条件为：进给速度  $V$  范围：  $\frac{0.13}{60} \leq V \leq \frac{6}{60}$ ；加速度  $a$  范围：  $0.02 \leq a \leq 0.6$ ；加加速度

$J_{const}$ ：  $J_{const} = 0.3$ ；误差：  $\varepsilon = 1\mu m$ ；分辨率：  $\delta = \frac{1}{1280} mm$ 。

运动过程中，用梯形加减速求解的加速度约束条件如下：

$$0 \leq a_t \leq \frac{J_{const} V_{\max}}{2A_{\max}} \quad (60)$$

运动过程中，运动路径约束条件为：

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + 2r = 0.41 \\ S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + 2r = 0.41 \\ S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} + 2r = 0.41 \\ S_{14} + S_{15} + S_{16} + S_{17} + 2r = 0.41 \end{cases} \quad (61)$$

以上为加工型线是由直线段和圆弧段组成的连续曲线的实时加工优化控制算法，我们首先将  $r = 0.5$  代入上式，求解出给定的加工路径示例的最小时间，再在此基础上改变半径，得出圆弧半径的变化对算法效率的影响。

给定加工实例算法效率模型总结如下：

$$\begin{aligned} \min t &= \sum_{i=1}^{20} t_i \quad (62) \\ s.t. \begin{cases} V_0 = 0.13/60 \\ 0 \leq V_i \leq 0.13/60, i = 1, 11 \\ 0 \leq V_i \leq 0.19/60, i = 2 \\ 0 \leq V_i \leq 1.26/60, i = 3, 4, \dots, 10 \\ \frac{0.13}{60} \leq V \leq \frac{6}{60} \\ 0.02 \leq a \leq 0.6 \\ J_{const} = 0.3 \\ \varepsilon = 1\mu m \\ \delta = \frac{1}{1280} mm \\ 0 \leq a_t \leq \frac{J_{const} V_{\max}}{2A_{\max}} \\ S_1 + S_2 + 2r = 0.41 \\ S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + 2r = 0.41 \\ S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} + 2r = 0.41 \\ S_{14} + S_{15} + S_{16} + S_{17} + 2r = 0.41 \end{cases} \end{aligned}$$

初始速度  $V_0 = \frac{0.13}{60} m/s$ ，在节点 2 处  $V_{2\max} = \frac{0.19}{60} m/s$ ，又因为在从节点 1 到节点 2 的过程中，速度不能超过  $V_{2\max}$ ，因此这是一个加速过程。最小加速度为  $0.02 m/s^2$ ，以此加速度做匀加速运动时，得出在节点 2 处的速度远大于  $V_{2\max} = \frac{0.19}{60} m/s$ 。因此，节点 2 的情况不能满足速度要求，因此将节点 2 位置的速度要求舍弃，在此基础上再次建立数学模型进行验证。

当  $r = 0.5cm$  时，对式(52)求解得到加工该工件的最短时间  $t = 79.16955s$ 。表 4 和表 5 分别为各阶段的时间和经过的路径长度，特定点速度值。

表 4 各阶段的刀具的运行时间和经过的路径长度（考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度）

各阶段经过时间(s)	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
	0.3587302	18.84975	0.3738095	18.65188	0.3587302
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
	0.416	39.584	0.785	39.169	0.416
各阶段经过时间(s)	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$
	0.3587302	0	0.3738095	11.99086	0.3587302
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
	0.416	0	0.785	25.181	0.416
各阶段经过时间(s)	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$t_{15}$
	0.3587302	6.661014	0.3738095	18.67586	0.3587302
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{14}$	$S_{15}$
	0.416	13.988	0.785	39.219	0.416
各阶段经过时间(s)	$t_{16}$	$t_{17}$	$t_{18}$	$t_{19}$	$t_{20}$
	0.3339767	0	0.3984682	0	0.3339767
各阶段刀具经过长度(cm)	$S_{16}$	$S_{17}$	$S_{18}$	$S_{19}$	$S_{20}$
	0.365	0	0.785	0	0.365

注：表中某阶段出现刀具经过长度和其对应时间均为 0，说明实际加工中该阶段不存在。

表 5 特定点的速度（考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度）

速度(m/s)	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
	0.021	0.021	0.021	0.01970

考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，圆弧半径与加工时间关系图见图 16。



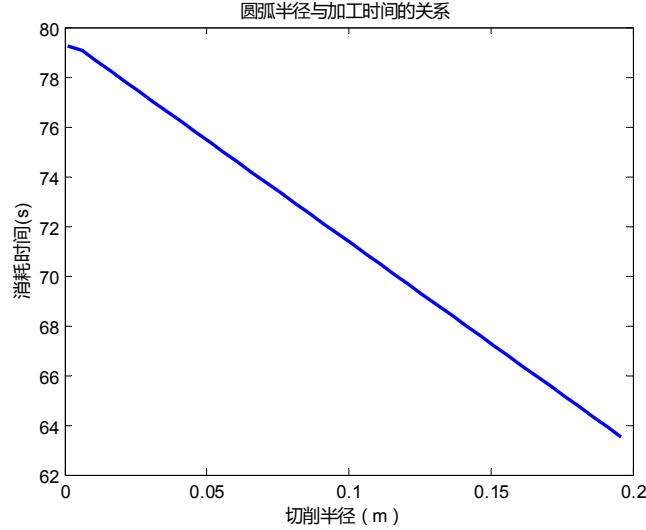


图 16 圆弧半径与加工时间关系图

根据图 16 分析可知，当  $r$  增大时，总时间会较小，加工效率会增大。这个结果与建立的模型分析结果一致，所以通过加工路径实例验证了我们建立的模型的正确性。

## 5.4 问题四模型建立与求解

### 5.4.1 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点分析

#### (1) S 型曲线的加减速控制方法优点

S 型曲线的加减速控制与梯形加减速相比，S 型曲线的加速、匀速和减速过程可以光滑过渡，而梯形加减速控制的加速、匀速和减速过程是不光滑过渡的，即加速度对时间的函数  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$  不是连续函数，存在阶跃现象，这将影响电机和机械系统的使用寿命，所以此种升降速控制方法在高速高精度数控系统中一般不用。而常采用的 S 型曲线加减速控制方法虽然 S 型曲线的加加速度  $J$  不是连续函数，但速度  $v(t)$  和加速度  $a(t)$  都是时间  $t$  的连续函数，从启动到加速过程的光滑过渡以及到恒速运动的过渡使这种运动比梯形曲线描述的运动产生更少的磨损，这种平滑的特性提高了马达和机械系统的使用寿命。这是 S 型曲线运动与梯形曲线运动相比最突出的特点，且加减速过程只涉及简单的加、乘运算，易于随加工过程状态变化而进行柔性调整<sup>[4]</sup>。

#### (2) S 型曲线的加减速控制方法缺点

数控机床伺服电机驱动力  $F$ 、切削力  $F_c$  和进给加速度  $a$  的关系为

$$F - F_c \approx ma \quad (63)$$

式(63)中， $m$  为各轴运动部件质量。

上式两边对时间  $t$  求导可得

$$\frac{d(F - F_c)}{dt} \approx \frac{da}{dt} = mJ \quad (64)$$

式(54)中， $J$  为加加速度。

加加速度反映了机床响应速度与运行平稳性之间的关系，因此瞬时  $J$  反映  $F - F_c$  的瞬时变化量。常用加减速方法中， $J$  是阶跃变化的（图 17），引起  $F - F_c$  的瞬时变化量也是阶跃变化（突变）的，这将在阶跃变化的上升沿和下降沿导致机床系统受到较大震动和冲击，从而影响加工质量，降低加工效率<sup>[5]</sup>。

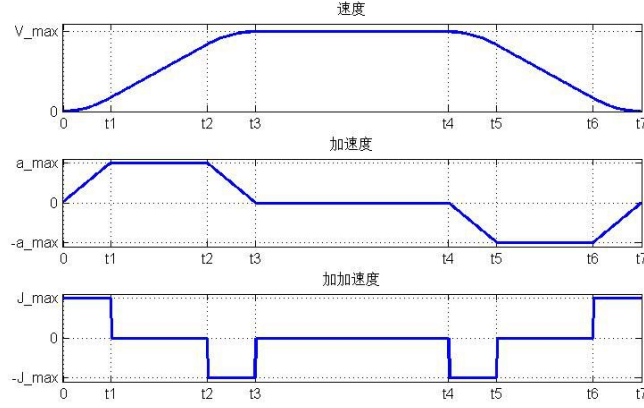


图 17 S 型曲线加减速控制速度、加速度、加加速度的示意图

#### 5.4.2 建立提高机床运行平稳性的优化控制运动模型

提高机床运行平稳性，就是避免加加速度产生  $J$  阶跃。我们参考文献[5]和文献[6]，对速度的三次样条曲线平滑运动的控制方法、速度的分段三角函数曲线进行了实现。在此基础上我们提出了加加速度的傅里叶级数和加加速度的 *sigmoid* 函数控制方法来提高机床的平稳性。

(1) 采用分段三次样条曲线来实现机床的平滑运动控制

对于速度的分段三次样条曲线其满足

$$v(t) = m_0 t^3 + m_1 t^2 + m_2 t + m_3 \quad (65)$$

其中， $m_0$ 、 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  为常数。

对式(55)关于时间  $t$  求一阶导数得到加速度满足

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 3m_0 t^2 + 2m_1 t + m_2 \quad (66)$$

对刀具的加速度关于时间  $t$  求一阶导数得到刀具的加加速度的关系式

$$J(t) = 6m_0 t + 2m_1 \quad (67)$$

在运动轮廓的不同阶段，常数  $m_0$ 、 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  取值是不同的。

1) 当  $t \in [0, t_1]$  时间段内，刀具做加加速运动，其速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = k_m t \\ a(t) = \frac{1}{2} k_m t^2 \\ v(t) = \frac{1}{6} k_m t^3 \end{cases} \quad (68)$$

假设  $t_1 = 1, k_m = 2, m_1 = 1$ ，由速度、加速度、加加速度函数的连续性及将式(65)~(67)和式(68)联立得

$$\begin{cases} k_m t_1 = 6m_0 t_1 + 2m_1 \\ \frac{1}{2} k_m t_1^2 = 3m_0 t_1^2 + 2m_1 t_1 + m_2 \\ \frac{1}{6} k_m t_1^3 = m_0 t_1^3 + m_1 t_1^2 + m_2 t_1 + m_3 \end{cases} \quad (69)$$

在这一阶段  $m_0 = 0, m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = \frac{1}{3}$ 。

2) 当  $t \in [t_1, t_2]$  时间段内, 刀具做加加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = J_{\max} \\ a(t) = J_{\max}(t - t_1) \\ v(t) = \frac{1}{2} J_{\max}(t - t_1)^2 \end{cases} \quad (70)$$

在  $t_2 = 2$  时刻, 由速度、加速度、加加速度函数的连续性并将式(65)~(67)和式(70)联立得

$$\begin{cases} J_{\max} = 6m_0t_2 + 2m_1 \\ J_{\max}(t_2 - t_1) = 3m_0t_2^2 + 2m_1t_2 + m_2 \\ \frac{1}{2} J_{\max}(t_2 - t_1)^2 = m_0t_2^3 + m_1t_2^2 + m_2t_2 + m_3 \end{cases} \quad (71)$$

在这一阶段  $m_0 = \frac{1}{9}, m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = -2$ 。

3) 当  $t \in [t_2, t_3]$  时间段内, 刀具做加加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = J_{\max} - k_m(t - t_2) \\ a(t) = \frac{1}{2} J_{\max}(t - t_2)^2 \\ v(t) = \frac{1}{2} J_{\max}(t - t_2)^2 - \frac{1}{6} k_m(t - t_2)^3 \end{cases} \quad (72)$$

在  $t_3 = 4$  时刻, 由速度、加速度、加加速度函数的连续性并将式(65)~(67)和式(72)联立得

$$\begin{cases} J_{\max} - k_m(t_3 - t_2) = 6m_0t_3 + 2m_1 \\ \frac{1}{2} J_{\max}(t_3 - t_2)^2 = 3m_0t_3^2 + 2m_1t_3 + m_2 \\ \frac{1}{2} J_{\max}(t_3 - t_2)^2 - \frac{1}{6} k_m(t_3 - t_2)^3 = m_0t_3^3 + m_1t_3^2 + m_2t_3 + m_3 \end{cases} \quad (73)$$

在这一阶段  $m_0 = 0, m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = -\frac{10}{3}$

4) 当  $t \in [t_3, t_4]$  时间段内, 刀具做匀加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 0 \\ a(t) = a_{\max} \\ v(t) = a_{\max}(t - t_3) \end{cases} \quad (74)$$

在  $t_4 = 8$  时刻, 由速度、加速度、加加速度函数的连续性并将式(65)~(67)和式(74)联立得

$$\begin{cases} 0 = 6m_0t_4 + 2m_1 \\ a_{\max} = 3m_0t_4^2 + 2m_1t_4 + m_2 \\ a_{\max}(t_4 - t_3) = m_0t_4^3 + m_1t_4^2 + m_2t_4 + m_3 \end{cases} \quad (75)$$

在这一阶段  $m_0 = 0, m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = -4$ 。

上式  $J_{\max}$  为最大允许加加速度,  $a_{\max}$  为最大允许加速度。其他时间段的情况与上面时间段的情况类似。

为了保证加加速度的连续性,通过上面的求解得到  $J_{\max} = 2, a_{\max} = 1, v_{\max} = 4$ , 之后的阶段中减加速阶段和加加速阶段相对应而得到。利用得到的数据绘图得到图 18 的速度、加速度、加加速度随时间的运动关系。

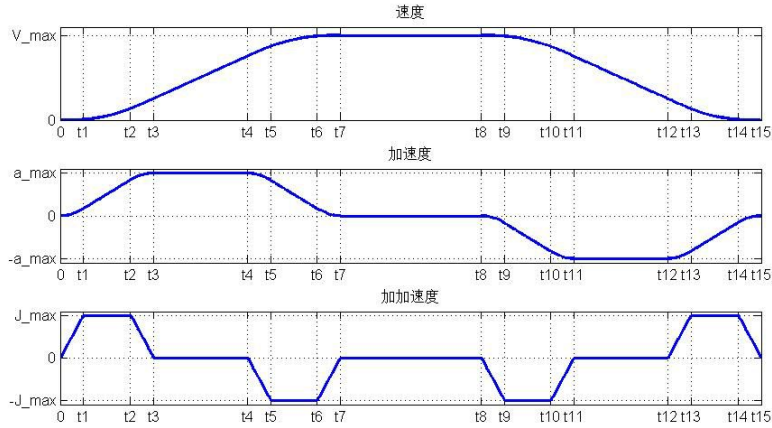


图 18 分段三次样条曲线

相对加加速度  $J$  为阶跃的  $S$  加减速方法中, 分段三次样条曲线中  $J$  是线性变化的, 这样就避免  $J$  的阶跃脉冲造成机床的震动, 可以实现平滑运动, 提高了零件加工的轮廓精度和表面质量。

## (2) 采用分段三角函数曲线来实现机床的平滑运动控制

为了避免产生  $J$  阶跃, 并能够自适应调节进给速度, 提出采用分段三角函数曲线<sup>[6]</sup>来实现对机床运动的平滑控制。以下表达式描述了其运动过程。

1)  $t \in [0, t_1]$  时, 刀具做加加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = \frac{J_{\max}}{2}(1 - \cos n\pi t) \\ a(t) = \frac{J_{\max}}{2}\left(t - \frac{1}{n\pi}\right)\sin n\pi t \\ v(t) = \frac{J_{\max}}{2} = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\right)\cos n\pi t \end{cases} \quad (76)$$

设在这个过程中  $J_{\max} = 2, n = 1, t_1 = 1$ , 则  $t \in [0, t_1]$  对应的速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 1 - \cos(\pi t) \\ a(t) = \left(t - \frac{1}{\pi}\right)\sin(\pi t) \\ v(t) = 1 = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{\pi^2}\right)\cos(\pi t) \end{cases} \quad (77)$$

2)  $t \in [t_1, t_2]$  时, 刀具做加加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = J_{\max} \\ a(t) = J_{\max} (t - t_1) \\ v(t) = J_{\max} \frac{(t - t_1)^2}{2} \end{cases} \quad (78)$$

设在这个过程中  $J_{\max} = 2, t_2 = 3, t_1 = 1$ , 则  $t \in [t_1, t_2]$  对应的速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 2 \\ a(t) = 2(t - t_1) \\ v(t) = (t - t_1)^2 \end{cases} \quad (79)$$

3)  $t \in [t_2, t_3]$  时, 刀具做加加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = \frac{J_{\max}}{2} [1 - \cos n\pi(t - t_2)] \\ a(t) = J_{\max} \left[ (t - t_2) - \frac{1}{n\pi} \sin n\pi(t - t_2) \right] \\ v(t) = \frac{J_{\max}}{2} \left[ \frac{(t - t_2)^2}{2} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi(t - t_2) \right] \end{cases} \quad (80)$$

设在这个过程中  $J_{\max} = 2, t_2 = 3, t_3 = 4, n = 1$ , 则  $t \in [t_2, t_3]$  对应的速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 1 - \cos(\pi(t - 3)) \\ a(t) = 2((t - 3) - \frac{1}{\pi} \sin(\pi(t - 3))) \\ v(t) = (t - 3)^2 / 2 + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi(t - 3)) \end{cases} \quad (81)$$

从而得出  $a_{\max} = 2$

4)  $t \in [t_3, t_4]$  时, 刀具做匀加速运动, 速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 0 \\ a(t) = a_{\max} \\ v(t) = a_{\max} (t - t_3) \end{cases} \quad (82)$$

设在这个过程中  $t_3 = 4$ , 则  $t \in [t_2, t_3]$  对应的速度、加速度、加加速度随时间的运动关系为

$$\begin{cases} J(t) = 0 \\ a(t) = 2 \\ v(t) = 2(t - 4) \end{cases} \quad (83)$$

通过以上各阶段的运动表达式, 绘制出当  $n = 1$  时的分段三角函数曲线见图 19。

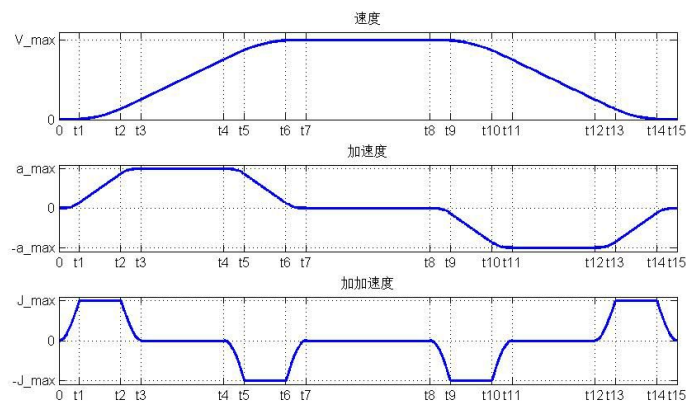


图 19  $n=1$  时分段三角函数曲线

相对于  $S$  加减速方法，分段三角函数曲线中  $J$  不是阶跃变化的，这样就可减小刀具和机床的震动从而可以实现平滑运动，提高了零件加工的轮廓精度和表面质量。

### (3) 采用傅里叶级数来实现机床的平滑运动控制

本问中要求提高速度平稳性，其中一个方法即要求加加速度连续，而原本的  $S$  型曲线对应的加加速度是方波形式的，不连续。因此我们要考虑将加加速曲线变为连续的函数形式。任何周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示，因此我们考虑将方波形式的加加速度通过使用傅立叶级数使其变为连续的，并且这种方法与前面提出的方法相比有更好的优点，即加加速度不仅连续，并且平滑可导。下面分别作出方波的一次谐波图形，一次谐波和三次谐波叠加图形与一次谐波、三次谐波和五次谐波叠加的图形，图形见图 20 到 22。

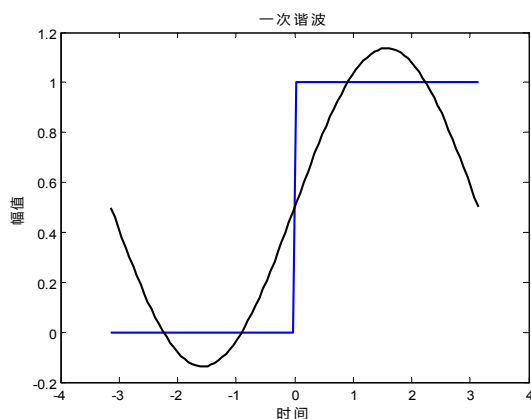


图 20 方波的一次谐波图形

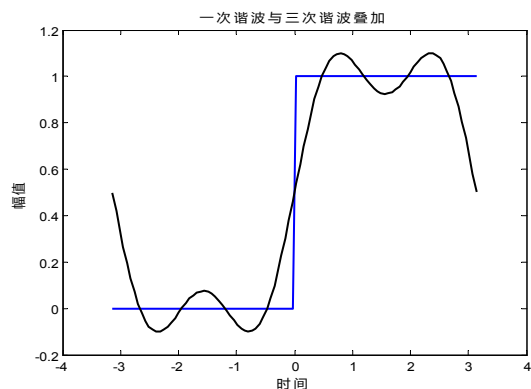


图 21 一次谐波和三次谐波叠加图形

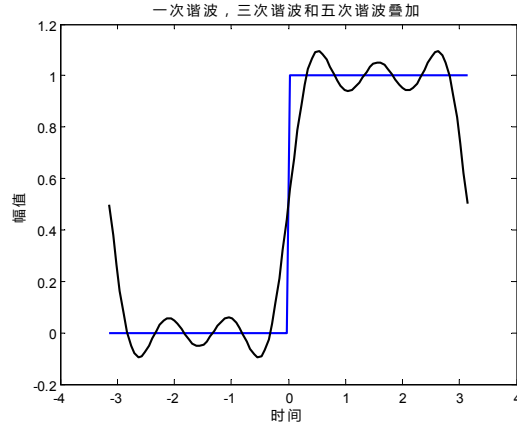


图 22 一次谐波、三次谐波和五次谐波叠加的图形

由上面的分析可以得出一次谐波、三次谐波和五次谐波叠加已经可以很好地逼近方波，所以我们使用这三种谐波的合成来逼近  $S$  加减速的加加速度曲线。周期为  $2l$  的傅立叶形式如下：

$$J(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t) \quad (84)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l J(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l J(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt \end{aligned} \quad (85)$$

在此基础上，我们将方波形式的加加速度用进行傅立叶级数的前 1, 3, 5 次谐波逼近，即

$$J(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^5 (a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t) \quad (86)$$

对式(82)的加加速度信号求积分，得到速度、加速度和加加速度的示意图(见图 23)。

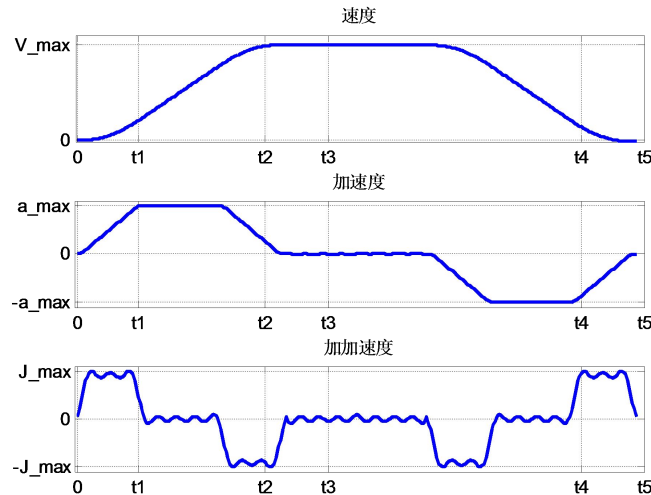


图 23 傅里叶级数方法的速度，加速度和加加速度

从图中可以看出，加加速度连续且可导，速度稳定，图 23 中只是给出了一次谐波，三次谐波与五次谐波之和，精度不够高，但是平滑性较好，当叠加足够多的谐波之后，精度高，但转折点会因此变得更加尖锐。综合考虑，选择了一次

谐波，三次谐波与五次谐波之和为加加速度。

(4)采用 *sigmoid* 函数来实现机床的平滑运动控制

*sigmoid* 函数是一个中心对称的归一化函数，它可以将不连续的数据形成一个平滑的曲线。其逼近方波信号的效果图见图 24。

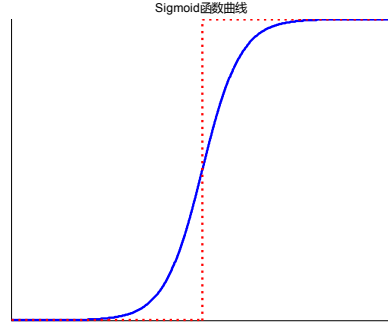


图 24 *sigmoid* 函数逼近方波示意图

本问中要求提高速度平稳性，即要求加加速度连续，而原本的 S 型曲线对应的加加速度是方波形式的，不连续。因此我们要考虑将加加速度变为连续的函数形式。*sigmoid* 函数见式(83)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}} \quad (87)$$

由于在数控系统中，最大加加速度的幅值是常数，假设其为  $J_{\max}$ ，所以数控系统的加加速度为

$$J(t) = \frac{J_{\max}}{1 + e^{-ax}} \quad (88)$$

其中，参数  $a$  为正数，且  $a$  越大，其上升沿的坡度越陡。

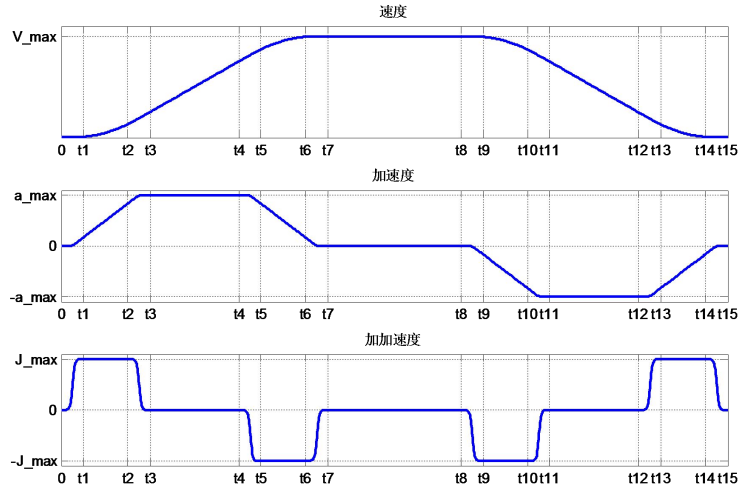


图 25 *sigmoid* 函数方法的速度，加速度和加加速度

从图 25 中可以看出，加加速度连续且可导，速度稳定，所以 *sigmoid* 函数很好地提高了速度平稳性。

#### 5.4.3 平滑控制算法平稳性对比

本问题中要求提高速度平稳性，我们首先用参考文献[5]和[6]中的三次样条曲线平滑运动的控制方法和速度的分段三角函数曲线方法进行分析，实现了加加速度的连续条件，从而提高了速度平稳性。在此基础上，我们提出了傅里叶级数



和加加速度的 *sigmoid* 函数控制方法，最终发现也可以提高速度平稳性。因此，将其对比分析可以很好的发现算法的优缺点。*S* 型曲线和提高平稳性的四种方法的对比图如图 26 所示。

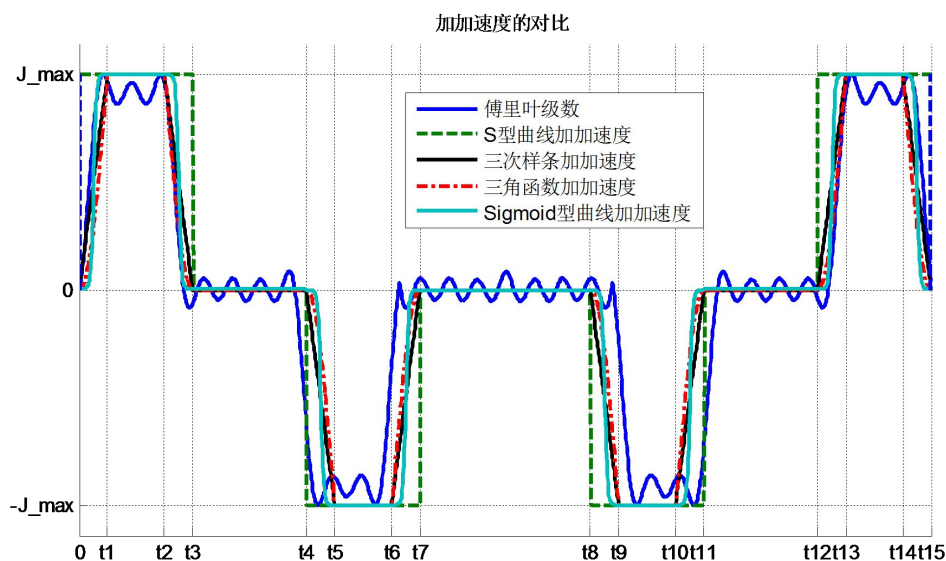


图 26 *S* 型曲线和提高平稳性的四种方法的对比图

由图 26 可以看出：与 *S* 型曲线加减速控制算法相比，三次样条曲线平滑运动的控制方法、速度的分段三角函数曲线、加加速度的傅里叶级数和加加速度的 *sigmoid* 函数控制方法都可以提高速度平稳性，即加加速度均连续，其中 *sigmoid* 函数控制方法和傅里叶级数的加加速度在转折点处较为平滑，而三次样条曲线平滑运动的控制方法和速度的分段三角函数曲线方法转折点处会出现折线情况。其中 *sigmoid* 函数的加加速度的平滑性最好，最能提高速度的平稳性。

## 六、模型的评价与推广

### 6.1 模型的评价

#### 6.1.1 模型优点

(1) 第一问中当加工型线为折线时，采用阈值分析法对加工过程中的误差情况进行了详细分析；

(2) 第二问和第三问中建立了基于常规模型的简化实时加工优化模型，在之后的圆弧半径的变化对算法效率问题分析中将其逐步等效简化，将复杂问题简单化，减少了计算量，同时确保了计算精度不变；

(3) 第二问和第三问中采用时间分割插补法解决了相切与不相切中的误差问题分析，对加工误差有一定的准确性判断；

(4) 对于第四问我们对加加速度连续情况建立了多种模型，其中 *sigmoid* 型加加速度模型不仅连续，平滑性亦好，在加加速度过渡中响应快速，能够很好地改进数控机床速度控制系统的快速性与平稳性。

#### 6.1.2 模型缺点

(1) 没有对机床的插补周期进行优化，存在的误差可能较大；

(2) 在插补过程中，认为机床在到达圆弧段前已进入匀速阶段，但实际情况可能会更复杂；

(3) 由于模型中存在多种参数会对圆弧半径造成影响，导致无法直接定量分

析圆弧半径的变化对算法效率的影响，只是定性分析得出结论；

(4)只考虑加加速度连续对速度控制的影响，而忽略了其他因素的影响。

## 6.2 模型推广

第二问中我们简单化考虑，使得每一条  $S$  型曲线都要对称，而在实际情况中，随着加工过程中可能存在的影响，不一定要使  $S$  型曲线完全运行完成，在此基础上，可以将问题考虑更加精细，从而得到更加精确结果。

第四问中我们只考虑了加加速度连续性对速度平稳性的影响，在此基础上，可以加入其他影响速度平稳性的性能指标，这样可以使速度的平稳性得到进一步的提高。

## 参考文献

- [1] 韩至骏,陈虎,数控系统快速响应技术[J],世界制造技术与装备市场,3:63-65, 2001。
- [2] Erkorkmaz K, Altintas Y. High speed CNC system design.Part II: modeling and identification of feed drives[J].International Journal of Machine Tools and Manufacture, 41(8):1487-1509, 2001。
- [3] 杨继昌,李金伴,数控技术基础[M],北京:化学工业出版社,2005。
- [4] 张得礼,周来水.,数控加工运动的平滑处理[J],航空学报,27(1):125-130, 2006。
- [5] 赵国勇,徐志祥,赵福令,高速高精度数控加工中 NURBS 曲线插补的研究[J],中国机械工程,17(3):291-293, 2006。
- [6] 李思益,罗为,NURBS 曲线高速高精度插补及加减速控制方法研究[J],计算机集成制造系统,14(6):1142-1147, 2008。
- [7] 同济大学数学系,高等数学第六版下册[M],北京:高等教育出版社,2007。
- [8] Mark Humphrys, Continuous Output-The sigmoid function, <http://computing.dcu.ie/~humphrys/Notes/Neural/sigmoid.html>, 2015.9.20。

## 附录

### 1、模型第 2 问的 lingo 优化程序

submodel M:

min = 2\*t1 + t2 + t3 + t4 + 2\*t6 + t7 + t8 + t9 + 2\*t11 + t12 + t13 + t14 + 2\*t16 + t17 + t18 + t19;

!R = 0.005;

v0 = 0.13 / 60;

s1 = (v0 + v1)\* t1 / 2;

s2 = v1 \* t2;

t3 = R \* 3.14 / 2 / v1;

s4 = v1 \* t4;

s5 = s1;

s6 = (v0 + v2) \* t6 / 2;

s7 = v2 \* t7;

s3 = v1 \* t3;

s8 = v2 \* t8;

s13 = v3 \* t13;

s18 = v4 \* t18;

s1 + s2 = 0.41 - 2 \* R;

s4 + s5 + s6 + s7 = 0.41 - 2 \* R;

t8 = R \* 3.14 / 2 / v2;

s9 = v2 \* t9;

s10 = s6;

s11 = (v0 + v3) \* t11 / 2;

s12 = v3 \* t12;

t13 = R \* 3.14 / 2 / v3;

s14 = v3 \* t14;

s15 = s11;

s16 = (v0 + v4) \* t16 / 2;

s17 = v4 \* t17;

t18 = R \* 3.14 / 2 / v4;

s19 = v4 \* t19;

s9 + s10 + s11 + s12 = 0.41 - 2 \* R;

s14 + s15 + s16 + s17 = 0.41 - 2 \* R;

s20 = s16;

(v4 \* v4 - (0.13 / 60)^2) / 2 / (v4 - v0) \* t16 + s19 <= 0.02792;

t10 = t6; t20 = t16; t15 = t11; t5 = t1;

t1 > 0; t2 >= 0; t3 >= 0; t4 >= 0; t5 >= 0; t6 >= 0; t7 >= 0; t8 >= 0; t9 >= 0; t10 >= 0;

t11 >= 0; t12 >= 0; t13 >= 0; t14 >= 0; t15 >= 0; t16 >= 0; t17 > 0; t18 >= 0; t19 >= 0;

v1 >= 0.38 / 60;

v1 <= 0.021;

v2 >= 0.13 / 60;

v2 <= 0.021;

v3 >= 0.13 / 60;

v3 <= 0.021;

v4 >= 0.13 / 60;

v4 <= 0.021;

(v1 - v0) / t1 >= 0.0;

(v1 - v0) / t1 <= 0.0525;

(v2 - v0) / t6 >= 0.0;

```

(v2 - v0) / t6 <= 0.0525;
(v3 - v0) / t11 >= 0.0;
(v3 - v0) / t11 <= 0.0525;
(v4 - v0) / t16 >= 0.0;
(v4 - v0) / t16 <= 0.0525;
v1 > v0;
v2 > v0;
v3 > v0;
v4 > v0;
endsubmodel
calc:
R = 0.001;
@divert('D:\output.txt');
@while(R#1t#0.205:
@release(t1); @release(t2); @release(t3); @release(t4); @release(t6);
@release(t7); @release(t8); @release(t9); @release(t11);
@release(t12); @release(t13); @release(t14); @release(t16); @release(t17);
@release(t18); @release(t19);
@write('R:',@format(R,'.3f'),@newline(1));
@solve(M);
@ifc(@status()#eq#0:
@write('t:',@format(2*t1 + t2 + t3 + t4 + 2*t6 + t7 + t8 + t9 + 2*t11 + t12 + t13 + t14
+ 2*t16 + t17 + t18 + t19,'.4f'),' ',@newline(2));
@else
@write('No optimal solution',@newline(2));
);
R= R + 0.005;
);
@divert();
endcalc

```

## 2、第四问中的 S 加减速曲线绘图程序

### 2.1 画图主函数

```

x = zeros(1,50);
x(1:50) = 1;
y = zaoxing(x,50);
y = duicheng(y,100);
% y = zaoxing(y,200);
sum(y)
aa = jifen(y);
a = jifen(aa);
% v = jifen(a);
t = 1 : length(y);
subplot(3,1,3);
grid on;
T1 = y;
plot(t,T1,'linewidth',2.0);ylim([min(T1)*1.1 max(T1)*1.1]);title('加加速度');
grid on;
set(gca,'xtick',[1 50 100 150 250 300 350 400 600 650 700 750 850 900 950
1000],'ytick',[min(T1),0,max(T1)]);
set(gca,'xticklabel',{'T1','T2','T3','T4','T5','T6','T7','T8','T9','T10','T11','T12','T13','T14',

```

```

'T15'});
    set(gca,'yticklabel',{'-J_max','0','J_max'});
    subplot(3,1,2);
    T2 = aa;
    plot(t,T2,'linewidth',2.0);ylim([min(T2)*1.1 max(T2)*1.1]);title('加速度');grid on;
    set(gca,'xtick',[1 50 100 150 250 300 350 400 600 650 700 750 850 900 950
1000],'ytick',[min(T2),0,max(T2)]);
    set(gca,'xticklabel',{'T1','T2','T3','T4','T5','T6','T7','T8','T9','T10','T11','T12','T13','T14',
'T15'});
    set(gca,'yticklabel',{'-a_max','0','a_max'});
    subplot(3,1,1);
    T3 = a;
    plot(t,T3,'linewidth',2.0);ylim([min(T3)*1.1 max(T3)*1.1]);title('速度');grid on;
    set(gca,'xtick',[1 50 100 150 250 300 350 400 600 650 700 750 850 900 950
1000],'ytick',[0,max(T3)]);
    set(gca,'xticklabel',{'T1','T2','T3','T4','T5','T6','T7','T8','T9','T10','T11','T12','T13','T14',
'T15'});
    set(gca,'yticklabel',{'0','V_max'});

```

## 2.2 zaoxing.m

```

function[y] = zaoxing(x,n)
y = x;
tmp = y(end :-1:1);
tmp = -1 * tmp;
h = zeros(1,n);
y = [x,h,tmp];

```

## 2.3 duicheng.m

```

function[y] = duicheng(x,n)
tmp = x(end:-1:1);
y = [x,zeros(1,n),tmp];

```

## 2.4 Jifen.m

```

function [y] = jifen(x)
y = zeros(size(x));
y(1) = x(1);
for i = 2 : length(x)
    y(i) = y(i-1) + x(i);
end

```