

# 全国第七届研究生数学建模竞赛



## 题 目 与封堵溃口有关的封堵物落水后运动过程的 数学模型研究

### 摘 要：

本文针对落水后的封堵物，从受力角度出发，利用小型试验数据和系统辨识理论，建立了封堵物落水后运动过程的数学模型。并据此模型和相似准则对封堵物的投放位置进行了预测以确保封堵物沉底到预定位置。

对于问题一，通过查阅文献和物理书籍，确定了影响封堵物在水中运动过程的因素，并对所有的小型试验数据进行统计分析、校正获得有效数据。然后依据牛顿运动定律和流体力学知识建立系统的模型结构；根据大实心方砖小型试验的有效数据，利用参数辨识获得最优参数值，最终建立了大实心方砖落水后运动过程的数学模型。

对于问题二，首先对问题一中的数学模型进行分析，确定所要求解的部分隐性影响因素，通过数据分析得到这些影响因素与物体运动模型参数见的关系，从而建立具有普适性的、描述封堵物水下运动过程的数学模型。

对于问题三，将建立模型的运动轨迹与小型试验所得轨迹进行比较，所得误差较小，验证了模型的合理性、有效性。在水深、水流速、投放高度已知的前提下，基于模型猜想封堵物恰好在最有效位置触底与投掷点与溃口的水平距离有关。

对于问题四，1、小型试验满足重力相似准则。根据试验与实际情况确定长度比尺，然后根据对流动受力情况，满足对流动的主要作用力相似，选择重力相似准则。通过选定的长度比尺和相似准则，确定各物理量的比尺，这样小型试验的结果就可以推广到真实情况。2、水深 3m 和 4m,流速 4m/s 和 5m/s 时，分别提前 0.244m 和 1.06m 投放。

**关键词：**封堵物落水运动过程模型 二分法 参数识别 相似准则

## 一. 问题的重述

溃坝溃堤以及引发的泥石流灾害造成国家和人民生命财产的严重损失。历年来的洪灾，尤其是最近的溃坝、泥石流险情给了我们深刻的教训：必须有效地开展封堵溃口的研究。由于溃口水流的流量和速度会比较大，在通常情况下很难在短时间之内将溃口彻底封堵，但如果通过投放重物对尚存的坝体产生一定的保护作用，就可以延缓溃坝溃堤的过程，为人民群众的撤离争取更多的时间。

利用直升飞机投放堵口组件，不仅能显著提高溃口抢险的快速反应能力，而且容易解决溃口交通不便、堵口物资缺乏等问题。显然，投入溃口的重物落水后受到溃口水流的作用会向下游漂移。为了使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置，尽可能减少无效投放，必须掌握重物落水后的运动过程，在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积和重量的重物。

虽然溃口的具体情况和封堵用重物的形状、材质都影响重物落水后的运动过程和沉底后状况，但研究前期，应当在简单情况下，通过固定大多数因素、条件，只让少数因素发挥作用，发现事物内部的规律，揭示问题的本质。故，暂不考虑重物沉底后的稳定性，只探索重物落水后的运动规律。

请根据题意、相关附件及其说明回答如下问题并完成相关数学建模。

1、以附录 1 中各单件试件为例，利用所学知识及相关参考资料分析影响重物在水中运动过程的因素，并建立大实心方砖落水后运动过程的数学模型。

2、利用小型试验数据或相关数学、物理方法，建立包含上述各种因素，从而能够适应不同情况的、描述重物水中运动过程的数学模型。

3、对所建立的数学模型进行误差分析，利用相关的数学、物理概念、小型试验数据，验证所建立模型的合理性，并根据该数学模型提出让堵口重物恰好在最有效位置触底的猜想和应该进行哪些新试验来验证这一猜想。

4、水力学理论研究的结论是：小型试验的流动与真实情况的流动具有一定的相似性时，小型试验的结果方可用到原型中去。请根据介绍信息，查阅相关资料，并根据前面你们建立的数学模型，简要回答以下两个问题。

(1) 本题所提及的小型试验满足了什么相似准则？如何依据相似准则将本试验及建立的数学模型成果加以推广，对未来需要进行的试验和研究工作提出建议。

(2) 假定溃口几何形状及水流速度与小型试验相似，溃口水深分别为 3m 和 4m，溃口流速为 4m/s 和 5m/s，若重物重量为 1.5t，根据建立的数学模型求解距离水面 2m 投放重物时，应分别提前多远投放才能使重物沉底到预定位置？

## 二. 问题的假设

1. 假设在封堵用重物落水过程中，水流状况和溃口情况不发生突然的变化。
2. 假设所给出的试验数据经过处理后可用于本试验模型建立和分析。

3. 假设水流方向与地面平行，且忽略封堵物落入水中后形成的湍流。
4. 假设实际溃口和封堵用重物的具体情况满足本研究中的设定条件。

### 三. 符号说明

符号	说明
$m$	封堵物的质量
$V$	封堵物的体积
$h_0$	封堵物的投放高度
$v_0$	封堵物的入水速度
$\rho_w$ 、 $\rho_g$	水的密度、封堵物的密度
$c_{x1}$ 、 $c_{x2}$	封堵物在水平方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数
$c_{y1}$ 、 $c_{y2}$	封堵物在竖直方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数
$A_{x1}$ 、 $A_{x1}$	封堵物水平分运动的平行表面面积、纵截面面积
$A_{y1}$ 、 $A_{y2}$	封堵物竖直分运动的平行表面面积、纵截面面积
$(x, y)$ ( $s_x, s_y$ )	物体的读取坐标、校正坐标
$(S_x, S_y)$	物体仿真分析中获得的坐标

### 四. 问题的分析及模型的建立与求解

#### 4.1 问题分析

本题主要是对具有高度危害性、不可重复性和经济损失过大的溃坝溃堤问题进行研究，确定系统落水后的数学模型，属于运动系统辨识和参数估计的问题。试验在多种模拟工况下，对多种封堵物、以多种投放条件和投放方式分别进行了试验观察，并给出了较为丰富的试验数据。但封堵用重物进入水中后，受到水流运动、投放方式和不同溃口情况等各种因素的影响，其运动过程复杂不可控。本题正是要建立封堵物在水中运动过程的数学模型，以期对未来的溃口溃坝封堵问题提供一定的帮助。

该题要求参赛者分析、确定影响重物在水中运动过程的因素，建立大实心方砖这一特定的封堵物在水中运动过程的数学模型；利用相关知识建立，建立包含各种影响因素的、具有普适性的运动过程数学模型；对模型进行误差分析，证实模型的合理性，并提出封堵溃口的合理猜想；最终将所建立的模型应用于实际溃口问题。

研究中存在的主要问题有：如何选取影响重物在水中运动过程的因素；如何建立封堵物在水中运动的数学模型；选取何种方法对所建模型进行误差分析和合理性验证；选用何种相似准则将所建模型用于实际应用中。

以上问题的解决需要运用相关的力学和数学知识，并结合给出的小型试验数据进行分析、求解。首先，查阅相关资料、分析小型试验数据，确定影响重物在水中运动过程的主要因素；其次，运用牛顿运动定律和流体力学知

识，确定模型的结构；利用胞映射理论和参数优化算法，确定系统模型的参数，并利用流体力学的知识，确定各影响因素和模型参数间的关系；再次，运用误差分析方法对模型进行误差分析，证实模型的合理性；通过对运动模型中常微分方程的求解，提出在特定工况下，确定物体投放位置的猜想；最后，利用水力学中的重力相似准则将研究成果用于实际溃口问题，并对未来研究工作提出一些意见和建议。

#### 4.2 试验数据处理

本试验给出了大量的试验数据，均是在钢化玻璃上读取的，而这一平面并不是物体的实际运动平面，其距物体运动平面约为 20cm。因此，试验中观察到的物体运动位置并非封堵物运动过程中的实际位置，两者之间存在一个偏差，故试验数据需要先校正再使用。摄像机拍摄的示意图如图 1 所示，其中镜头中心在钢化玻璃上的坐标为  $P(25\text{cm}, 20\text{cm})$ 。

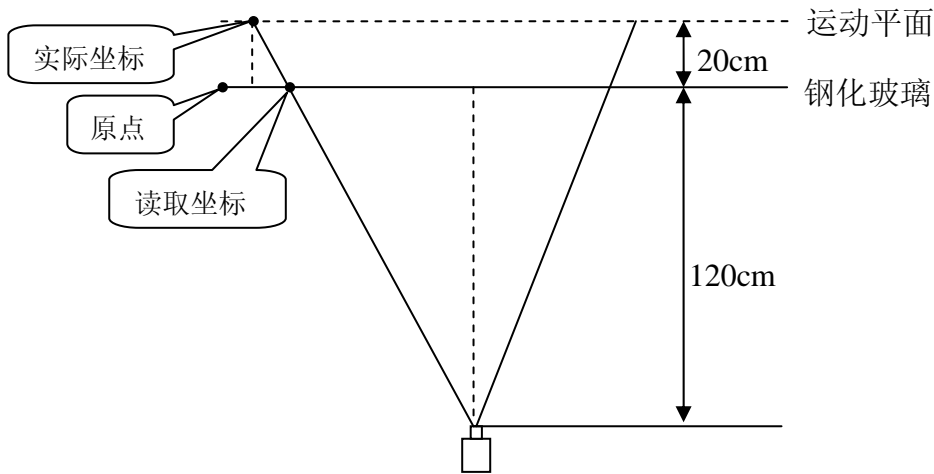


图 1 摄像机拍摄示意图

表 1 大实心方体的一组试验数据及其校正结果

时间/s	读取坐标 $(x, y)$		校正坐标 $(s_x, s_y)$	
	横坐标/cm	纵坐标/cm	横坐标/cm	纵坐标/cm
0.04	2	26	-1.833	27
0.08	2.2	25	-1.6	25.833
0.12	2.5	24.5	-1.25	25.25
0.16	3	22.5	-0.667	22.917
0.2	3.7	20	0.15	20
0.24	4.3	18.4	0.85	18.133
0.28	5.9	16.4	2.717	15.8
0.32	7	14.5	4	13.583
0.36	8.4	12.1	5.633	10.783
0.4	11	9	8.667	7.167
0.44	12.9	5.2	10.883	2.733
0.48	14	3	12.167	0.167
0.52	14.8	2.5	13.1	-0.417

则有：

$$S_x = \begin{cases} x - \frac{1}{6}(25 - x), & \text{当 } x \leq 25 \text{ 时} \\ x + \frac{1}{6}(x - 25), & \text{当 } x > 25 \text{ 时} \end{cases}, \quad S_y = \begin{cases} y - \frac{1}{6}(20 - y), & \text{当 } y \leq 20 \text{ 时} \\ y + \frac{1}{6}(y - 20), & \text{当 } y > 20 \text{ 时} \end{cases}$$

以大实心方砖为例，校正其在水速为 0.55m/s、以平放方式在水面处进行投放的试验数据，如表 1 所示，运动过程曲线如图 2 所示。

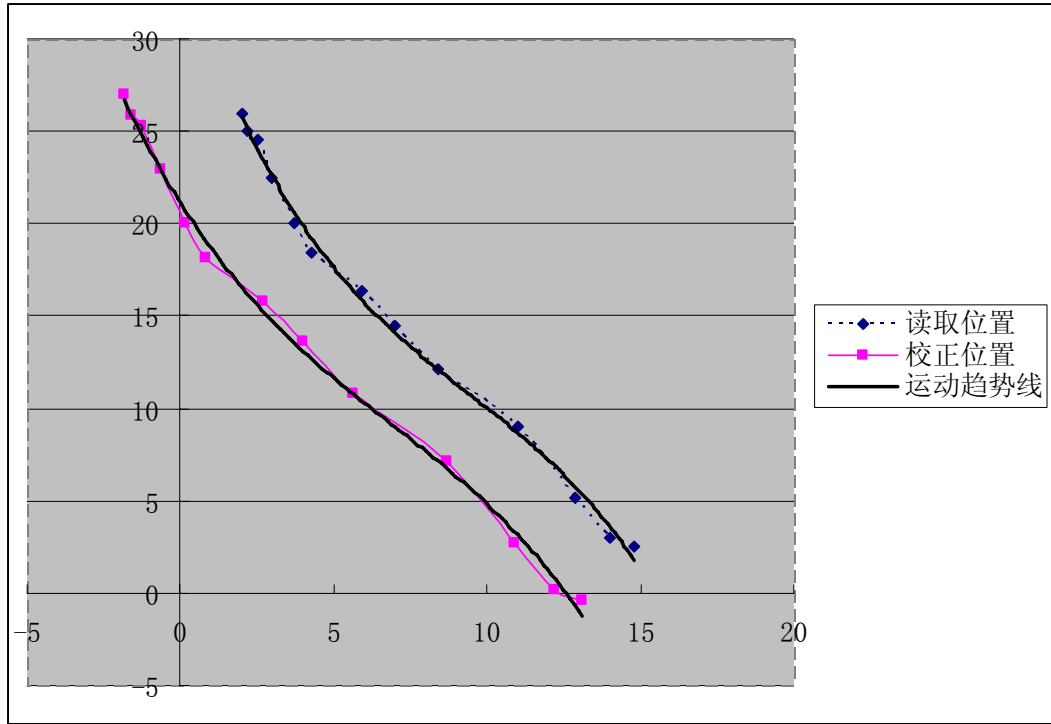


图 2 大实心方砖的运动过程曲线

### 4.3 问题一的求解

#### 4.3.1 问题一的分析

问题一属于运动系统辨识问题，即在已知输入和输出数据的基础上，从一类模型中确定一个与所测系统等价的模型。

本试验通过单变量控制法获得了多组试验数据，而通过试验数据的分析和阅读相关资料，我们可以确定影响封堵物在水中运动过程的影响因素。但影响因素的增加将使系统模型的复杂程度呈指数增长。因此，我们首先要筛选出主要的影响因素，并通过牛顿运动定律和流体力学知识建立系统的模型结构，然后对大实心方砖试验数据进行整理、分析，通过胞映射理论确定模型的参数，最终求得大实心方砖落水后运动过程的数学模型。

##### 4.3.1.1 运动模型辨识

迄今为止，已经有许多不同的辨识方法。这些辨识方法就其涉及的模型形式来说，可以分成两类：一类是非参数模型辨识方法，另一类是参数模型辨识方法。非参数模型辨识方法不必事先确定模型的具体结构，其获得的模型是非参数模型。参数模型辨识方法则必须假定一种模型结构，通过极小化

模型与过程之间的误差准则函数来确定模型的参数。如果模型的结构无法事先确定，则必须利用结构辨识方法先确定模型的结构参数(比如，阶次、纯迟延等)，再进一步确定模型参数。图 3 为模型辨识过程的示意图。

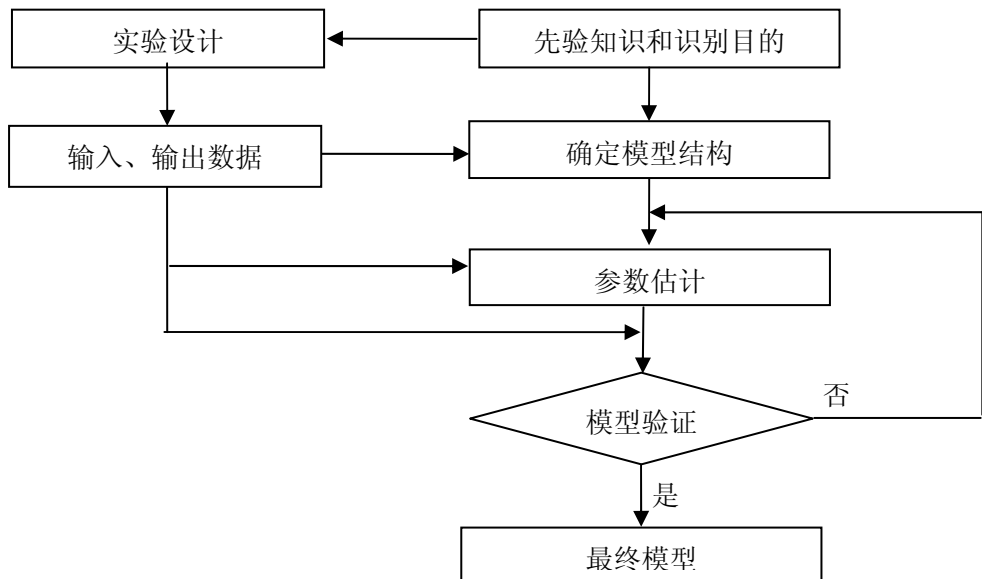


图 3 模型辨识过程示意图

#### 4.3.1.2 基于胞映射的二分法

对分法是求解非线性方程  $f(x)=0$  的单实根的一种简便、高效算法，亦可用于求解生活中、工程中的实际问题，例如最优参数的确定。其原理为：当确定函数  $f(x)=0$  在区间  $[a, b]$  内只存在一个零点后，通过取研究区间中点  $(a+b)/2$ ，检验对分点处函数值  $f(x)$  的符号，来决定如何将原有区间  $[a, b]$  丢掉一半，从而使研究区间缩小。经过多次迭代求解之后，不断把求解区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到函数的零点或零点的近似值。图 4 为对分法原理的示意图。

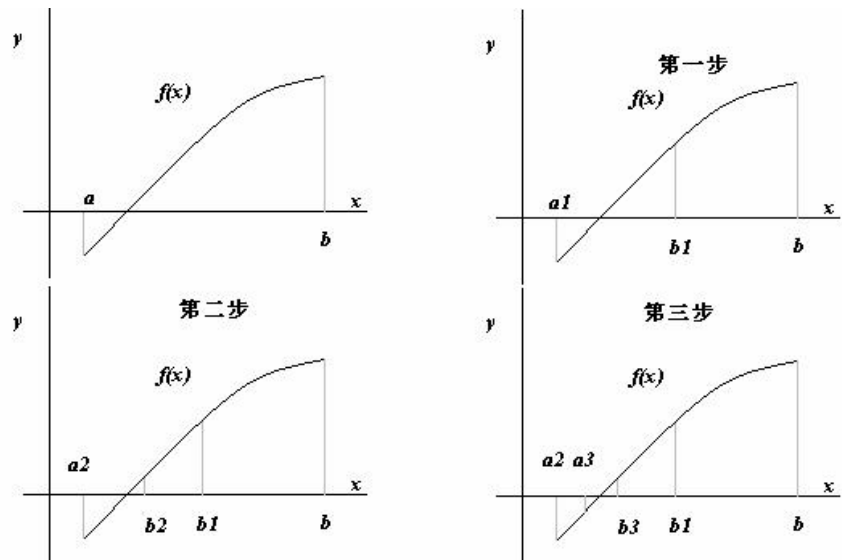


图 4 对分法原理示意图

#### 4.3.2 问题一的参数选取

通过查阅相关资料和已有实验结果的分析，可知影响重物在水中运动过程的因素很多，有溃坝的形状，水流速度，水深，水的密度，填充物的体积、质量、密度、形状及其投掷方式。

合理选择影响因素，就可以使所建模型在误差允许范围内反应出物体在水中的运动规律。但若考虑过多的影响因素，则只能使建模过程复杂化，甚至无法求得精确的模型。因此，建模过程中应考虑对物体运动过程影响较大的因素，而忽略影响较小的因素。在此，我们已经假设水流速度为恒定的，忽略溃坝形状对水分布和水流速的影响，且不考虑重物进入水中所形成的湍流和层流。

根据试验工况介绍和试验数据的分析，可知：当其他条件相同，只有流速变化时，物体水中运动的水平位移随流速的增大而增大；当其他条件相同，只有投放高度变化时，物体水中运动的水平位移随投放高度的增大而减小；同理，水平位移随投掷方式的不同而不同，竖放时水平位移最小，平放次之，立放时的水平位移最大；物体的运动过程除了与物体的投放方式有关外，还与物体的形状和大小有关，如相同条件下，形状、大小相同的物体，空心物体比实心物体水平位移大，又如相同形状的物体，水平位移随物体尺寸的增大而减小。此外，当水深变化时，物体的运动过程也必然不同。

因此，选取影响物体在水中的运动过程的主要因素有水流速度 $v$ ，投放高度 $h_0$ （入水初速度 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ ），投放方式，物体的形状、大小、质量和水深。

#### 4.3.3 问题一模型的建立

我们利用牛顿第二定律和流体力学相关知识分析封堵物在水中的运动过程。但是，由于物体在水中的运动过程受到的影响因素较多、运动过程较复杂，因此我们将封堵物在水中的运动过程看做是水平方向分运动和竖直方向分运动的合成，并在水平和竖直方向上分别对物体进行受力分析。水平方向上，封堵物只受到水流动作用下产生的阻力（其在物体水平运动过程中提供动力）；竖直方向上，封堵物与流体有相对运动，因此，物体除了自身重力外，还受到流体的浮力和阻力作用。则有：

$$\begin{cases} ma_x = f_{x\text{阻}} \\ ma_y = mg - F_{\text{浮}} - f_{y\text{阻}} \end{cases} \quad (1)$$

其中， $f_{x\text{阻}}$ 和 $f_{y\text{阻}}$ 分别为封堵物在水平方向和竖直方向上受到的水的阻力，均包括粘滞阻力和压差阻力。压差阻力的大小与封堵物相对于水流的运动速度的平方成正比，粘滞阻力与封堵物相对于水流的运动速度成线性关系。即：

$$\begin{cases} f_{x\text{阻}} = c_{x1}A_{x1}(v - v_x) + c_{x2}\rho_w A_{x2}(v - v_x)^2 \\ f_{y\text{阻}} = c_{y1}A_{y1}v_y + c_{y2}\rho_w A_{y2}v_y^2 \end{cases} \quad (2)$$

带入(1)式，有：

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = c_{x1} A_{x1} (v - v_x) + c_{x2} \rho_w A_{x2} (v - v_x)^2 \\ m \frac{dv_y}{dt} = mg - F_{\text{浮}} - c_{y1} A_{y1} v_y - c_{y2} \rho_w A_{y2} v_y^2 \end{cases} \quad (3)$$

系统初状态为  $v_{x0} = 0, v_{y0} = \sqrt{2gh_0}$ ，末状态由  $S_y = h$  确定。

#### 4.3.4 问题一模型的求解

针对大实心方体求解上述模型时，首先要根据大实方体的物理参数确定模型的部分参数。由大实心方砖的物理参数，可以求得物体质量  $m$ 、封堵物水平分运动的平行表面面积  $A_{x1}$ 、纵截面面积纵截面  $A_{x2}$ 、竖直分运动的平行表面面积  $A_{y1}$ 、纵截面面积  $A_{y2}$ 、及物体受到的浮力  $F_{\text{浮}}$ 。此时，模型方程 (3) 中，只有封堵物在水平方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数  $c_{x1}$ 、 $c_{x2}$  和竖直方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数  $c_{y1}$ 、 $c_{y2}$  未知，需要进一步求得，从而最终确定大实心方砖在水中运动过程的模型。

##### 1) 由物体的物理参数确定

大实心方砖的物理参数为： $\rho_g = 2300\text{kg/m}^3$ 、 $l_1 = l_2 = 0.08\text{m}$ 、 $l_3 = 0.04\text{m}$ ，则有

$$m = \rho_g V = 2300 \times (0.08 \times 0.08 \times 0.04) = 0.5888\text{kg}$$

$$F_{\text{浮}} = \rho_w g V = 1000 \times 9.8 \times (0.08 \times 0.08 \times 0.04) = 2.5088\text{N}$$

当物体平方状态下投入水中时，有

$$A_{x1} = 2(l_1 l_2) + 2(l_1 l_3) = 0.0192\text{m}^2$$

$$A_{x2} = l_2 l_3 = 0.0032\text{m}^2$$

$$A_{y1} = 2(l_1 l_3) + 2(l_2 l_3) = 0.0128\text{m}^2$$

$$A_{y2} = l_1 l_2 = 0.0064\text{m}^2$$

则系统运动过程的模型方程为：

$$\begin{cases} 0.5888 \frac{dv_x}{dt} = 0.0192 c_{x1} (v - v_x) + 3.2 c_{x2} (v - v_x)^2 \\ 0.5888 \frac{dv_y}{dt} = 5.7702 - 2.5088 - 0.0128 c_{y1} v_y - 6.4 c_{y2} v_y^2 \end{cases}$$

##### 2) 由试验数据进行参数寻优

根据大实心方体平放试验的修正数据  $(s_x, s_y)$ ，设置误差准则函数

$$J_x = \sum_{i=1}^n (S_{xi} - s_{xi})^2, J_y = \sum_{i=1}^n (S_{yi} - s_{yi})^2, \text{ 并利用二维对分法确定模型参数}$$

$c_{x1}$ 、 $c_{x2}$ 、 $c_{y1}$ 、 $c_{y2}$ ，使模型满足误差最小原则。

二维对分法是对分法原理在系统双参数求解过程中的扩展应用，示意图如图 5 所示。首先，估计系统双参数的取值范围  $(c_{11}, c_{12})$ 、 $(c_{21}, c_{22})$ ，将两个参数的取值范围均进行对分，则将双参数的范围划分为 1、2、3、4 四个区域；然后取四个区域的双参数中值，取其中的误差最小者继续分析（如区域 1），



则双参数的取值范围变为原取值范围的 1/4。重复上述分析过程，则可以不断缩小双参数的取值范围（如区域 5、区域 6），直至误差准则函数达到误差允许要求，则再进行一次迭代，所求得的双参数  $(c_1', c_2')$  即是系统的最优参数。

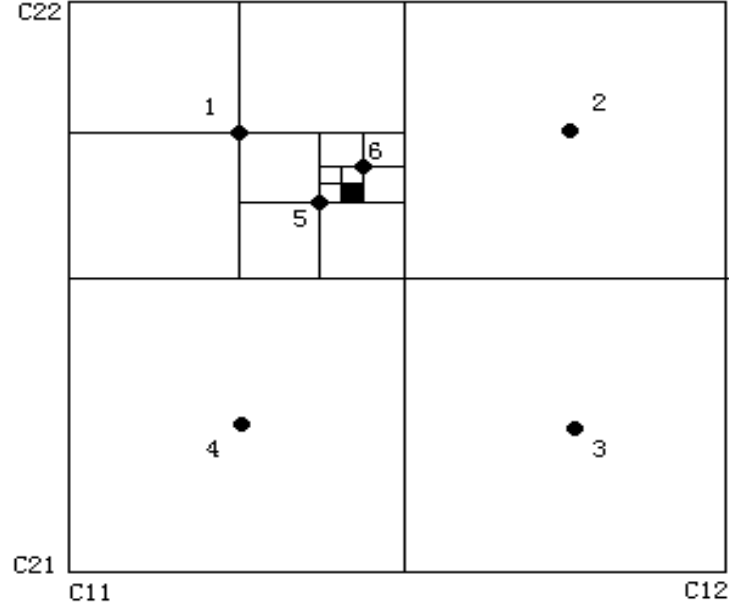


图 5 二维对分法示意图

解得水平方向运动模型的最优参数为  $c_{x1} = 0.0397$ ， $c_{x2} = 2.9207$ ， $c_{y1} = 0.0217$ ， $c_{y2} = 0.7813$ 。则系统运动过程的模型方程为：

$$\begin{cases} 0.5888 \frac{dv_x}{dt} = 0.0192c_{x1}(v - v_x) + 3.2c_{x2}(v - v_x)^2 \\ 0.5888 \frac{dv_y}{dt} = 5.7702 - 2.5088 - 0.0128c_{y1}v_y - 6.4c_{y2}v_y^2 \end{cases}$$

#### 4.4 问题二的求解

##### 4.4.1 问题二的分析

问题一中已确定影响物体在水中运动过程的主要因素，并建立了大实心方砖落水后运动过程的数学模型。由该模型可见，已确定的影响因素中，部分因素将对模型产生直观影响，因此我们只需要确定其他因素对模型的影响。

##### 4.4.2 问题二的求解

本文选取的影响因素有水流速度  $v$ ，投放高度  $h_0$ ，投放方式，物体的形状、大小、质量和水深。由问题一中建立的数学模型可知，模型自身包含水流速度  $v$ ，物体的质量、投放方式等影响参数，并且投放高度  $h_0$  决定系统的初始状态（ $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ ），水深决定了系统的终止状态。因此，还需通过试验中提供的多组试验数据，确定物体的形状及大小对系统模型的影响。

利用问题一中的求解算法，确定不同形状和大小的重物与封堵物在水平方向和竖直方向上的压差阻力系数的关系（设定水速为 0.34m/s）。试验数据如表 3 所示，关系曲线如图 6 所示（x 轴为物体的雷诺系数）。

表 3 不同物体的雷诺指数及其模型参数的影响

	物体特征长度	雷诺系数	$c_{x2}$	$c_{y2}$
小空心方体	0.02	6759.44334	12.5	7.0313
小空心蜂巢	0.025	8449.30417	18.2876	7.7835
小三角锥	0.026	8787.27634	467.9973	34.0909
大空心方体	0.04	13518.8867	2.5	1.25
小实心方体	0.04	13518.8867	14.3173	3.7835
大空心蜂巢	0.05	16898.6083	7.2435	1.75
小实心蜂巢	0.05	16898.6083	8.3994	5.8713
大三角锥	0.052	17574.5527	23.438	7.9528
大实心方体	0.08	27037.7734	3.1345	0.7813
大实心蜂巢	0.1	33797.2167	2.8314	1.3969

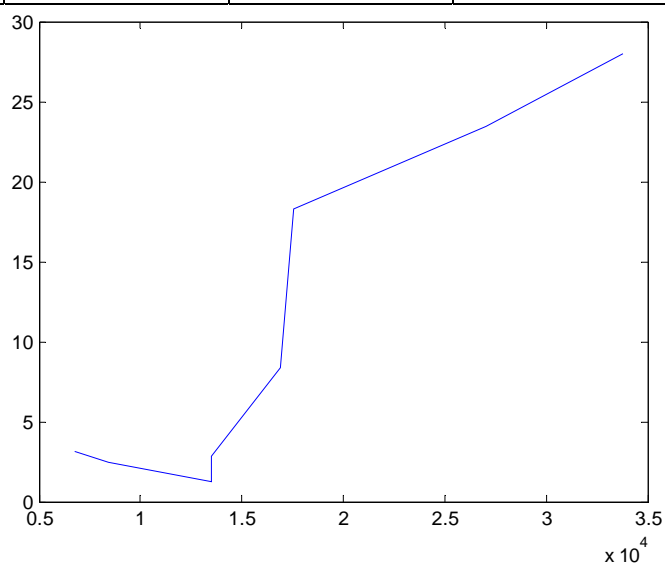


图 6—(a) 水平方向压差阻力系数  $c_{x2}$  曲线

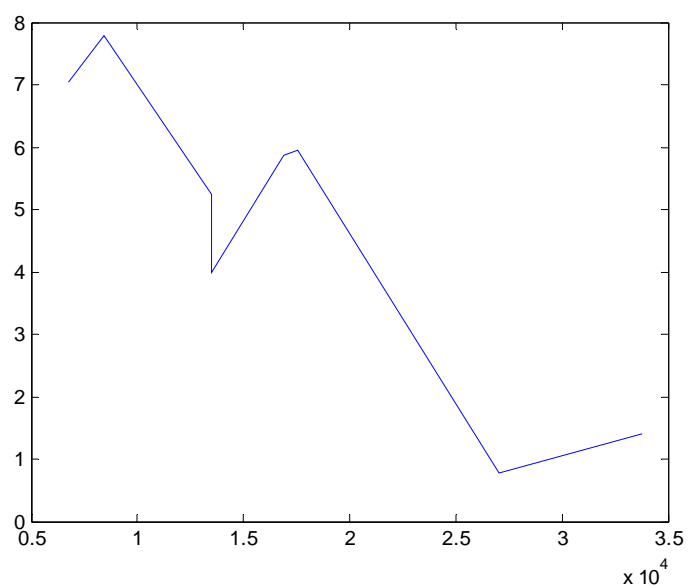


图 6—(b) 竖直方向压差阻力系数  $c_{y2}$  曲线

#### 4.5 问题三的求解

##### 4.5.1 问题三的分析

实际系统的模型是基于一定的理想假设和带有误差的试验数据分析得出的，因此该模型必定存在一定的误差。若当某个建模是设定的假设、推理条件不成立，或试验数据误差较大或出现错误数据时，所建立的系统模型是不能使用于实际应用的，甚至无法求解出系统模型。因此，在系统模型建立之后，要对模型进行误差分析，并利用相关的知识和已有的试验数据、实际现象验证所建模型的合理性、适用性。若不合理，则应寻找相关原因，加以改进后在重新建模并验证。因为本题主要研究封堵物的落水后的运动过程，所以主要对物体在水中运动的轨迹进行比较。

##### 4.5.2 问题三模型误差分析

本文根据所建立的数学模型，仅对大实心方砖在水速为  $v = 0.55m/s$ 、物体重心在水平面时，以竖放方式投入水中的情况进行误差分析。本题中建立的物体在水中运动的数学模型为：

$$\begin{cases} 0.5888 \frac{dv_x}{dt} = 0.0192c_{x1}(v - v_x) + 3.2c_{x2}(v - v_x)^2 \\ 0.5888 \frac{dv_y}{dt} = 5.7702 - 2.5088 - 0.0128c_{y1}v_y - 6.4c_{y2}v_y^2 \end{cases}$$

由问题一的求解可知，当大实心方砖以竖放方式投入水中时，其在水平方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数和竖直方向上的粘滞阻力系数、压差阻力系数分别为  $c_{x1} = 0.0397$ ， $c_{x2} = 2.9207$ ， $c_{y1} = 0.0217$ ， $c_{y2} = 0.7813$ ，则可确定此时的系统模型。

应用 matlab 解算，可得该模型的运动过程，相应坐标点的数据如表 2 中第 2、3 列数据所示，4、5 列数据为对应的校正后的试验数据。

表 2 误差分析数据表

时间	仿真坐标 ( $S_x, S_y$ )		校正坐标 ( $s_x, s_y$ )	
	横坐标/cm	纵坐标/cm	横坐标/cm	纵坐标/cm
0.04	-1.2919	26.1433	-1.25	26.41667
0.08	-0.7135	24.8620	-0.78333	24.66667
0.12	-0.1035	22.8281	-0.66667	22.56667
0.16	0.6771	20.1518	-0.43333	19.41667
0.2	1.5763	16.9190	0.266667	16.5
0.24	2.6361	13.3102	1.666667	13
0.28	3.7358	9.0847	2.6	8.333333
0.32	4.9312	5.3608	3.416667	5.416667
0.36	6.1965	1.3072	5.75	2.5

由表中数据可见，仿真坐标和校正坐标比较接近。其中，水平方向分运动轨迹和垂直方向分运动轨迹的方差为  $7.995 \times 10^{-4}$ ， $2.983877 \times 10^{-4}$ ，说明利用该模型求得的封堵物水中运动轨迹近似于实际试验所得到的运动轨迹，说明该模型较合理，可以用于进一步的研究工作。

#### 4.5.3 问题三的触底猜想与验证

##### 4.5.3.1 触底猜想

设投放点至水面的距离为变量  $H$ ，由系统模型

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = c_{x1} A_{x1} (v - v_x) + c_{x2} \rho_w A_{x2} (v - v_x)^2 \\ m \frac{dv_y}{dt} = mg - F_{\text{浮}} - c_{y1} A_{y1} v_y - c_{y2} \rho_w A_{y2} v_y^2 \end{cases},$$

$$\frac{ds_x}{dt} = v_x, \frac{ds_y}{dt} = v_y, F_{\text{浮}} = \rho_w g V, v_0 = \sqrt{2gH}, \text{终止状态 } s_y \text{ 为水深 } h$$

得到  $H = f(s_x)$ 。

即为投放点距水面的高度与物体水平运动位移之间的函数关系表达式。具体求解过程和表达形式见附录 A。则当水平运动位移  $s_x$  不同时，对应的投放高度亦不同。故在已知水深及水流速度的情况下，可根据投掷点到溃口的水平距离  $s_x$  来调节投放点的高度，让封堵物恰好在最有效位置触底。

##### 4.5.3.1 触底的试验验证

在特定水深及水流速度的情况下，对同一封堵物，在投放位置距溃口的水平距离  $s_x$  分别为 10cm、20cm、30cm、40cm 的情况下，由  $H = f(s_x)$  计算得到投放点距离水面的高度，在此高度投放物体，测试封堵物能否听罗在溃口的有效范围内。

#### 4.6 问题三的求解

##### 4.6.1 相似准则的选取

本题所提及的小型试验满足重力相似准则。本题所涉及的是重力起主要作用的流动，动力相似有  $Fr_p = Fr_m$  即  $\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_L} = 1$ ，满足重力相似准则。

由于水流运动非常复杂，小型试验的结论不能任意推广到真实情况。但是，可以通过模拟实际情况，使得小型试验的流动与真实情况的流动具有一定的相似性，这样就可以将小型试验的结果用到实际情况中。具体做法：根据本试验与实际情况确定长度比尺  $\lambda_L$ ，然后根据对流动受力情况，满足对流动其主要作用力相似，选择重力相似准则。通过选定的长度比尺和相似准则，确定各个物理量的比尺，这样小型试验的结果就可以推广到真实情况。

##### 4.6.2 数据求解

假定溃口几何形状及水流速与小型试验相似，根据选择的重力相似准则，由溃口水深  $H$  和小型试验的水槽深  $h$ ，长度比尺就可以确定，有：

$$\lambda_L = \frac{L_1}{L_2} = \frac{H}{h}$$

根据重力相似准则， $\frac{\lambda_v^2}{\lambda_g \lambda_L} = 1$ ，可以确定：

$$\lambda_v = \frac{v_1}{v_2} = \lambda_L^{1/2} \lambda_g^{1/2}$$

再由  $\lambda_g = 1$ ，所以， $\lambda_v = \lambda_L^{1/2}$ ， $v_2 = \frac{v_1}{\lambda_v}$ ，样就可以确定水的流速了。

对投放物块进行缩放，物块质量  $M = \rho g V$ ，因为  $\lambda_g = \lambda_\rho = 1$ ，有：

$$\lambda_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1^3}{L_2^3} = \lambda_L^3$$

这样就知道了模型的水深、水速、物块的质量，我们还要对入水的初状态  $v_0$  进行相似。假设投放重物距离水面的高度为  $h_0$ ，根据  $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$  ( $\lambda_g = 1$ )，可以得到：

$$\frac{H_0}{h_0} = \frac{V_0^2}{v_0^2} = \lambda_L$$

根据题目：

$$1) H = 3m, v_1 = 4m/s, m = 1.5t, h_0 = 2m;$$

$$2) H = 4m, v_1 = 5m/s, m = 1.5t, h_0 = 2m;$$

在 1) 情况下，模型取的水深为 27.5cm， $\lambda_L = \frac{H}{h} = \frac{3}{0.275} = 10.9$ ，所以：

$$\lambda_v = \lambda_L^{1/2} = 3.30, \lambda_v = \lambda_L^3 = 1295$$

$$\text{模型中水的流速：} v_2 = \frac{v_1}{\lambda_v} = \frac{4}{3.3} = 1.2m/s$$

$$\text{模型中投放重物的质量：} m = \frac{M}{\lambda_L^3} = \frac{1.5 \times 1000}{1295} = 1.16kg$$

投放重物与模型水面的距离： $h_0 = \frac{H_0}{\lambda_L} = \frac{2}{10.9} = 18.3cm$ 。将  $h, v_2, m, h_0$  带入所建模型中，求出模型中的水平位移  $s = 2.24cm$ ，而实际情况下的水平位移  $S, \frac{S}{s} = \lambda_L, S = \lambda_L s = 10.9 \times 2.24 \times 0.01 = 0.224m$ ，提前 0.224m 投放可以使重物沉底到预定位置。

在 2) 情况下，模型取的水深为 27.5cm， $\lambda_L = \frac{H}{h} = \frac{4}{0.275} = 14.54$ ，所以：

$$\lambda_v = \lambda_L^{1/2} = 3.8, \lambda_v = \lambda_L^3 = 3073.9$$

$$\text{模型中水的流速：} v_2 = \frac{v_1}{\lambda_v} = \frac{5}{3.8} = 1.3m/s$$

$$\text{模型中投放重物的质量：} m = \frac{M}{\lambda_L^3} = \frac{1.5 \times 1000}{3073.9} = 0.49kg$$

$$\text{投放重物与模型水面的距离：} h_0 = \frac{H_0}{\lambda_L} = \frac{2}{14.54} = 13.75cm$$

将  $h, v_2, m, h_0$  带入所建模型中，求出模型中的水平位移  $s = 7.3cm$ ，而实际情况下的水平位移  $S, \frac{S}{s} = \lambda_L, S = \lambda_L s = 7.3 \times 14.54 \times 0.01 = 1.06m$ ，提前

1.06m 投放可以使重物沉底到预定位置。

## 五、全文总结

本文通过对小型试验数据的分析、整理，结合相应的数学、物理知识，运用系统辨识理论建立了封堵物在水中运动轨迹的数学模型，并利用基于胞映射的二分法，对系统参数进行寻优，建立了具有普适性的、描述封物体运动过程的数学模型。利用误差分析理论，对所建的仿真结果进行误差分析，依据仿真结果判定本文所建立的数学模型合理，并根据模型提出了溃口有效封堵的设想方案，且设计了新的试验方案用以验证我们提出的猜想。最后，利用流体力学中的重力相似准则，将小型试验的结果用于解决实际溃口封堵问题。

本文主要有一下几方面创新：

1. 本文将影响系统数学模型的因素进行划分，以确定不同参数对系统模型的影响作用，在此基础上，利用相关知识和试验数据求得系统的普适性数学模型，使得该模型更符合实际系统。

2. 本文将胞映射的理论应用于参数寻优，以确定系统的最优模型，最终完成了运动系统的模型辨识问题。

3. 本文对所建立的封堵物水中运动过程的数学模型进行进一步的求解，确定试验条件个参数间的关系，从而可以直接根据试验数据确定系统的投放位置，并给出了具有针对性的试验验证方法。

## 参考文献

- [1] 陈长植，工程流体力学，中国武汉：华中科技大学出版社，2008 年。
- [2] 王晓娟，束一鸣，刘海笑，防治崩岸的土工包沉落轨迹试验，水利水电科技进展，第 29 卷增刊第 1 期：217-219，2009 年 9 月。
- [3] 庞启秀，水流作用下块体受力试验研究，硕士学位论文，2005 年 3 月。
- [4] 陈杰，MATLAB 宝典，北京：电子工业出版社，2010 年 3 月。