

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 变循环发动机部件法建模及优化

摘 要

本文在研究了变循环发动机工作原理的基础上, 建立了该类发动机两种工作模式(涡喷模式和涡扇模式)下的数学模型, 并研究模型求解的有效算法。具体研究内容如下:

针对问题一: 首先建立了风扇流量与压比函数之间的关系, 并用 Matlab 软件画出相应图形; 然后建立了风扇和 CDFS 出口总温、总压和流量的数学模型, 设计求解该模型的数值方法——逐维线性插值法; 该算法首先逐维寻找误差最小的两个离散点, 进行线性插值, 然后在每维上都采用简单的一维线性插值, 这种算法简单且有效避免了较大误差的产生(避免了对离散数据整体求算术平均的过程产生的误差); 最后, 将该数值方法与非线性方程数值求根法(逐步搜索法结合二分法)耦合实现对模型的数值求解, 并分析、讨论所得数值结果。

针对问题二: 结合变循环发动机的工作原理对已给定的 7 个平衡方程进行研究分析, 利用发动机各部件模型之间的匹配关系, 对平衡方程中的各个量进行推导计算, 最后将 7 个方程转化为关于 8 个未知量 n_{cor} 、 n_H 、 Z_{CL} 、 Z_{CDFS} 、 Z_{CH} 、 Z_{TH} 、 Z_{TL} 和 T_4^* 的非常复杂的非线性方程组, 为求解该方程组, 文中给出了另外一个平衡关系——低压涡轮出口流量、外涵道流量和尾喷管流量之间的平衡, 从而得到了封闭的包含 8 个方程的非线性方程组。最后采用改进的牛顿迭代法——阻尼牛顿迭代法对其进行数值求解, 并给出相应的数值结果。

针对问题三: 在问题二所得方程组的基础上进一步推导出了发动机性能参数的表达式, 并用非线性规划约束优化算法对其进行了求解, 得到了一定假设下使发动机性能最优的相关量。同时, 研究了一定飞行高度下, 发动机性能最优时, CDFS 导叶角度、低

压涡轮导叶角度和尾喷管喉道面积随马赫数的变化规律,并以Matlab软件画图分析了其特点。

关键词: 逐维线性插值; 逐步搜索法; 二分法; 阻尼牛顿法; 非线性规划约束优化算法; 变循环发动机; 涡喷模式; 涡扇模式; 双涵道; 单涵道

目录

| | |
|---|----|
| 一. 问题重述 | 5 |
| 二. 模型假设及符号说明 | 8 |
| 2.1 模型假设 | 8 |
| 2.2 符号说明 | 8 |
| 三. 问题一的模型建立与求解 | 10 |
| 3.1 问题分析 | 10 |
| 3.2 风扇流量随压比函数值变化的仿真研究 | 10 |
| 3.3 风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量 | 11 |
| 四. 问题二的模型建立与求解 | 22 |
| 4.1 共同工作方程的建立: | 23 |
| (1) 风扇消耗功率 N_{CL} 与低压涡轮发出功率 N_{TL} 之间的低压轴功率平衡 | 23 |
| 4.2 基于未知变量的平衡方程的表达 | 25 |
| 4.2.1 低压轴功率平衡 | 25 |
| 4.2.2 高压轴功率平衡 | 32 |
| 4.2.3 高压涡轮进口截面流量平衡 | 33 |
| 4.2.4 低压涡轮进口截面流量平衡 | 34 |
| 4.2.5 后混合器静压平衡 | 35 |
| 4.2.6 尾喷管面积平衡 | 35 |
| 4.2.7 风扇出口流量平衡 | 36 |
| 4.2.8 低压涡轮出口流量、外涵道流量和尾喷管流量平衡 | 37 |
| 4.3 非线性方程组求解 | 37 |
| 五. 问题三的模型建立与求解 | 40 |
| 5.1 问题分析 | 41 |
| 5.2 问题三的部件级模型建立与求解 | 41 |
| 5.2.1 根据已知条件计算进气道数学模型 | 41 |
| 5.2.2 压气机部件的气动热力学模型机及计算 | 42 |
| 5.2.3 主燃烧室部件的气动热力学模型及计算 | 46 |
| 5.2.4 涡轮部件的气动热力学数学模型及计算 | 46 |
| 5.2.5 后混合器部件的气动热力学数学模型及计算 | 49 |
| 5.2.6 尾喷管部件的气动热力学模型及计算 | 51 |

| | |
|-----------------------|-----------|
| 5.3 发动机的性能参数计算 | 53 |
| 5.4 仿真结果 | 54 |
| 六. 总结与展望 | 57 |
| 6.1 模型的评价与推广 | 57 |
| 6.2 模型存在的局限性 | 57 |
| 参考文献 | 58 |

变循环发动机部件法建模及优化

一. 问题重述

1.1 变循环发动机的研究背景

当前军事航空领域,传统的几何固定或少数几何可调的航空发动机已经越来越难以满足多任务战斗机对动力装置高单位推力、低巡航油耗的双重性能需求。近年来,一种集涡喷和涡扇发动机性能特点于一体的变循环发动机(variable cycle engine, VCE)逐渐引起研究人员的关注,国外许多国家已将变循环发动机列为下一代高推质比发动机的主要构型进行研究和工程设计,美国在变循环发动机技术领域更是走在了世界的前列,自 20 世纪 90 年代起,General Electric (GE)公司已经开始着手研制第 4 代变循环发动机。国外相关研究和试验充分表明:变循环发动机可以在更宽广的飞行包线内充分发挥发动机的性能潜力,兼具低速时燃油经济性好、高速时比推高的优点^[1,2,3,4]。

变循环发动机是指通过改变发动机某些部件的几何形状、尺寸或位置以改变其热力循环的燃气涡轮发动机^[5,6]。通过变循环调节来改变发动机的某些循环参数,如增压比、空气流量或涵道比,从而使发动机在各种工作状态下都具有良好的性能,在涡喷/涡扇发动机领域,VCE 研究的重点是改变涵道比:如在加速、爬升和超音速飞行时,减少涵道比,使发动机具有类似于涡喷的性能特点(高单位推力);在起飞和亚音速飞行时,加大涵道比,以涡扇循环形式工作,达到降低巡航耗油率和起飞噪声的目的。而在涡轴领域,变循环发动机重点研究的是通过改变压气机导叶角度、涡轮喉道面积来对发动机整机空气流量进行优化调节,同时结合变旋翼转速控制,以求降低部分功率状态下的耗油率。

变循环发动机的优点有很多,如当外界温度升高时,或从压气机中引气、引出功率,对发动机推力损失影响小;在某些状态下,应用变几何调节,可以提高进气道、压气机的气动稳定裕度,而不明显降低推力,这对于改善发动机的效率,以及防止发动机在干扰的大气条件下工作不稳定具有重要意义;另外变循环发动机可利用调节各部件来实现超声速巡航,无需开加力,这样不用开加力就可以超声速巡航,较大地提高了超音速飞行的经济性^[1]。

1.2 变循环发动机的基本构造

双涵道变循环发动机的基本构造^[1,5,6]见图 1、图 2,其主要部件有:进气道、风扇、副外涵道、CDFS 涵道、核心驱动风扇级(CDFS)、主外涵道、前混合器、高压压气机、主燃烧室、高压涡轮、低压涡轮、后混合器、加力燃烧室、尾喷管。双涵道变循环发动机可调部件很多,主要包括:模式选择活门(Forward Bypass Transition Valve)、前混合器(前 VABI)、后混合器(后 VABI)、可调面积低压涡轮导向器、环形声学塞式尾喷管,每个部件都有各自特有的功能,见表 1.1。双涵道模式下,选择活门和后混合器(后 VABI)全部打开;单涵道模式下,选择活门关闭,后混合器关小到一定位置。双涵道变循环发动机具有两种典型的工作模式:单涵模式和双涵模式,如图 1.2 所示:

(1) 双涵模式:当处于起飞或亚音速巡航时,发动机以此模式工作(见图 1.2 上部),增加低压转子转速,打开模式选择活门,开大前、后可调混合器,使前段风扇具有更大的空去流量,当核心机转速较低时,核心机不同吞下所有的空气流量,多余空气流量经 CDFS 涵道流入住外涵,与此同时,关小核心驱动风扇级可调导叶角度,进一步降低流

入 CDFS 的空气流量，使发动机具有最大的涵道比，降低耗油率，以适用于亚音速巡航；在亚音速巡航时，前风扇块可以被用来使进气道溢流和发动机内部性能达到最佳的匹配状态，通过调节后风扇块以获得所需的巡航推力，在发动机节流到巡航状态之前，发动机始终保持最大流量，这样就消除了常规混排涡扇发动机出现的巨大的溢流和后体阻力，改善了发动机性能。

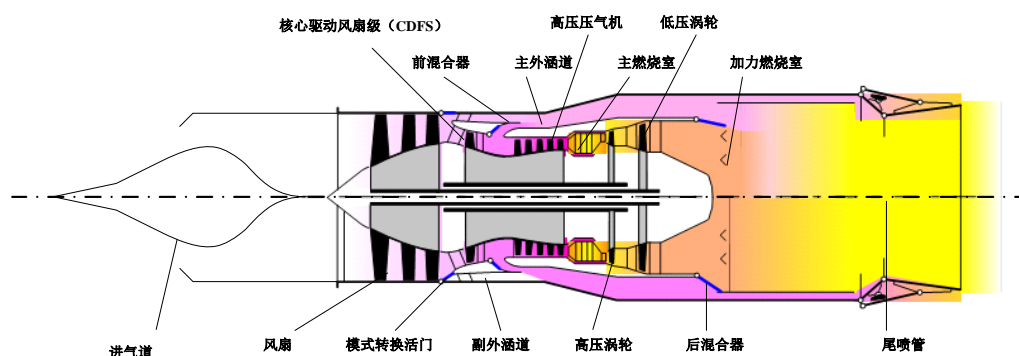


图 1.1 变循环发动机的基本构造

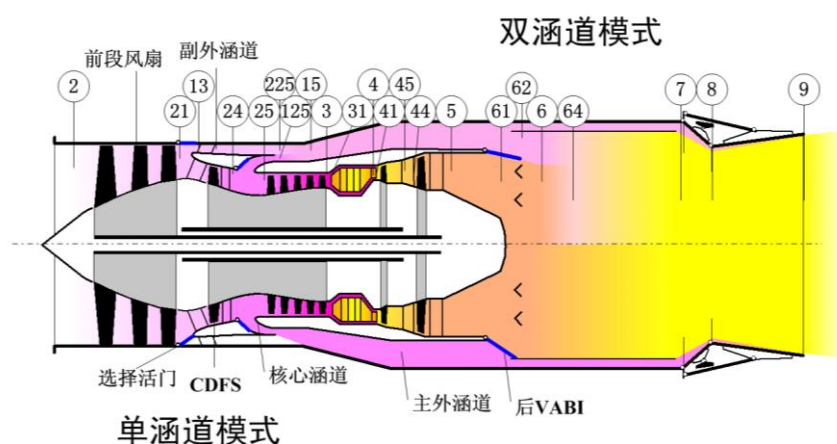


图 1.2 双涵道变循环发动机结构示意图，图中数字序号表示发动机各截面参数的下脚标

表 1.1 双涵道变循环发动机各部件功能

| | |
|--------------|--|
| 模式选择活门 | 确定发动机以单涵还是双涵模式工作 |
| 前混合器(前 VABI) | 控制流入压气机流量的活门，可在前后风扇之间放气，以控制前风扇的失速裕度 |
| 后混合器(后 VABI) | 用以改变混合室外涵出口气流马赫数，来保证主涵道出口气流与核心机出口气流掺混时静压平衡 |
| 可调面积低压涡轮导向器 | 用以单独控制高压转子转速，使发动机具有更大的灵活性 |
| 环形声学塞式尾喷管 | 有效地降低起飞时噪音 |

(2) 单涵模式：在飞机加速、爬升以及超音速飞行时，发动机将以此模式工作(见图 2.1 下部)，关闭模式选择活门，关小前、后 VABI 出口面积，使前段风扇出口空气几乎全部通过核心驱动风扇级和高压压气机，仅少量空气经外涵道流出以冷却尾喷管，这时

发动机以涡喷的工作方式工作，产生高单位推力，以满足上述状态对推力的需求。

各部件之间的联系如图 1.3 所示，变循环发动机为双转子发动机，风扇与低压涡轮相连，CDFS、高压压气机与高压涡轮相连，如图 1.3 下方褐色的线所示。蓝色的线表示有部件之间的气体流动连接（图 1.3 中高压压气机后不经主燃烧室的分流气流为冷却气流，在本题中忽略不计）。

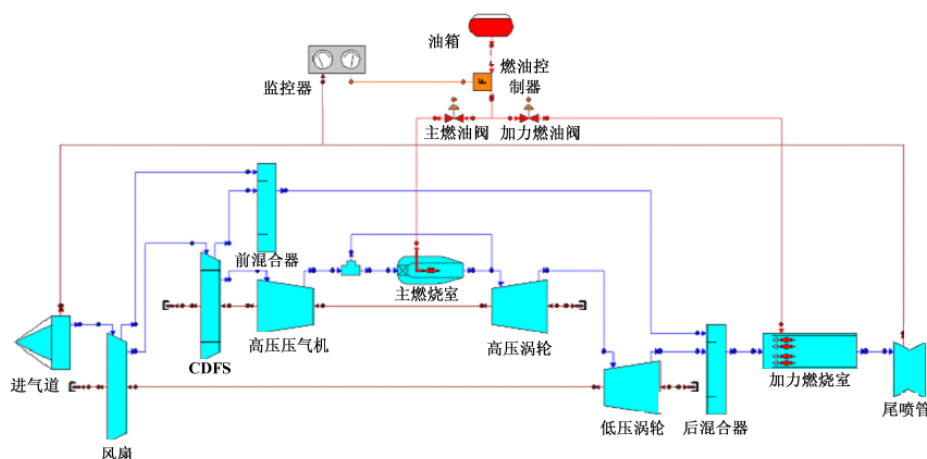


图 1.3 变循环发动机工作原理图

1.3 变循环发动机的工作原理

变循环发动机有两种工作模式，分别为涡喷模式和涡扇模式。

发动机在亚音速巡航的低功率工作状态，风扇后的模式转换活门因为副外涵与风扇后的压差打开，使更多空气进入副外涵，同时前混合器面积开大，打开后混合器，增大涵道比，降低油耗，此时为发动机的涡扇模式。

发动机在超音速巡航、加速、爬升状态时，前混合器面积关小，副外涵压力增大，选择活门关闭，迫使绝大部分气体进入核心机，产生高的推力，此时为发动机的涡喷模式。

1.4 研究问题重述

问题中采用变循环发动机部件建模方法，建立了双外涵变循环发动机整机部件级稳态及动态数学模型，来具体研究以下几个方面：

（一）、1) 画出附录 4 中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形。2) 设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点，导叶角度均设置为 0° ，风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95，风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5，求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

（二）、设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点，采用双涵道模式，导叶角度均设置为 0° ，选择活门完全打开，副外涵道面积、后混合器出口总面积、尾喷管喉道面积给定时，运用或设计适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程组成的非线性方程组。

（三）、1) 设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的超音速巡航点，发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ 。利用所建立的模型，通过稳态仿真分析单个部件几何调节，包括风扇、核心驱动风扇级、压气机、低压涡轮导叶角度变化，后混合器及喷管喉道面积变化等对发动机性能的影响；针对发动机单涵

道工作模式下，设计多个部件组合调节方案，并给出在给定条件下发动机达到性能最优时的 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量。2) 利用所建立的部件级动态数学模型，在单涵道模式下，研究发动机飞行高度 $H = 11km$ ，飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ ，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518e+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调。

二. 模型假设及符号说明

2.1 模型假设

- 假设 1：在本题中忽略不计高压压气机后不经主燃烧室的分流气流为冷却气流部分。
- 假设 2：为了简单，题中各量的单位不需要转换，直接运算认为是合理的；
- 假设 3：忽略燃油在燃烧室中燃烧延迟的影响；
- 假设 4：气流在各个部件的流动都按准一维流动处理，即各个截面气流参数平均处理；
- 假设 5：双涵道变循环发动机中三个压气机部件采用相同的部件数学模型；
- 假设 6：发动机采用单涵道模式，讨论特性最优时，后混合器给定的内、外涵道面积值不受附录 1 的约束。

2.2 符号说明

表 2.1： 符号说明表

| 符号 | 名称 |
|-------|------|
| H | 高度 |
| Ma | 马赫数 |
| n_L | 低压转速 |
| n_H | 高压转速 |
| P | 压力 |
| T | 温度 |
| W | 流量 |
| W_f | 燃油流量 |
| h | 焓 |
| A | 面积 |
| F | 推力 |

| | |
|-----------------|--------|
| N | 功率 |
| l | 功 |
| k | 修正系数 |
| r | 气体绝热指数 |
| η | 效率 |
| f | 油气比 |
| σ | 总压恢复系数 |
| pr | 增压比 |
| zz | 压比函数值 |
| α | 导叶角 |
| C | 参数 |
| \overline{CP} | 平均等压比热 |
| R | 气体常数 |
| V | 飞行速度 |

表 2.2: 下标说明表

| 符号 | 名称 |
|--------|----------|
| 0 | 标准大气压下 |
| in | 进口量 |
| c | 压气机 |
| cor | 换算参数 |
| map | 特性图上的量 |
| pr | 增压比对应的量 |
| w | 换算流量对应的量 |
| η | 效率对应的量 |
| out | 出口量 |
| ei | 理想量 |

表 2.3: 发动机各个截面数字下标说明:

| 数字 | 名称 |
|----|--------|
| 2 | 进气道出口 |
| 21 | 风扇出口 |
| 13 | 外涵进口 |
| 3 | 燃烧室进口 |
| 4 | 燃烧室出口 |
| 41 | 高压涡轮出口 |
| 5 | 低压涡轮出口 |
| 6 | 混合室进口 |
| 7 | 混合室出口 |
| 8 | 尾喷管喉部 |
| 9 | 尾喷管出口 |

三. 问题一的模型建立与求解

3.1 问题分析

问题一要求画出附录 4 中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形；及飞机在亚音速巡航点，导叶角度均设置为 0° ，风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95，风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5 时,求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

3.2 风扇流量随压比函数值变化的仿真研究

双涵道变循环发动机中三个压气机部件，分别是风扇、CDFS 和高压压气机，这三个压气机部件采用同一种计算方法。压气机增压比定义为该级出口气流的总压与进口气流的总压之比。附录 4 中给出了风扇 9 个不同换算转速对应的增压比、流量、效率。

风扇压比函数值：设压气机风扇换算转速所对应的增压比数据(见附录 4)的最大值为 pr_{\max} ，最小值为 pr_{\min} ，则定义该换算转速对应的压气机增压比 pr 的压比函数值 zz 为：

$$zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}}, \quad (1)$$

算法：

step1: 针对附录 4 给定的换算转速 n_{cor} 计算出对应增压比数据的最大值 pr_{\max} 及最小值 pr_{\min} ；

step2: 利用(1)式计算出换算转速 n_{cor} 对应的压气机增压比 pr 的压比函数值 zz 。

仿真结果图：

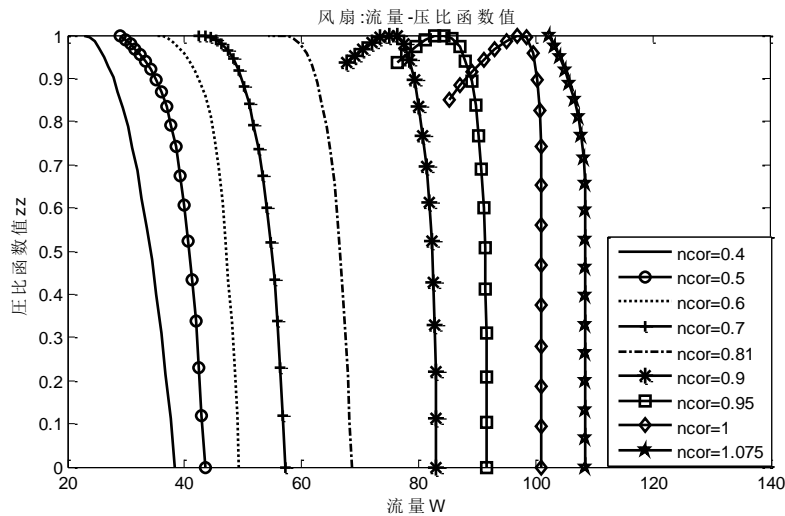


图 3.1 风扇的流量随增压比值变化图

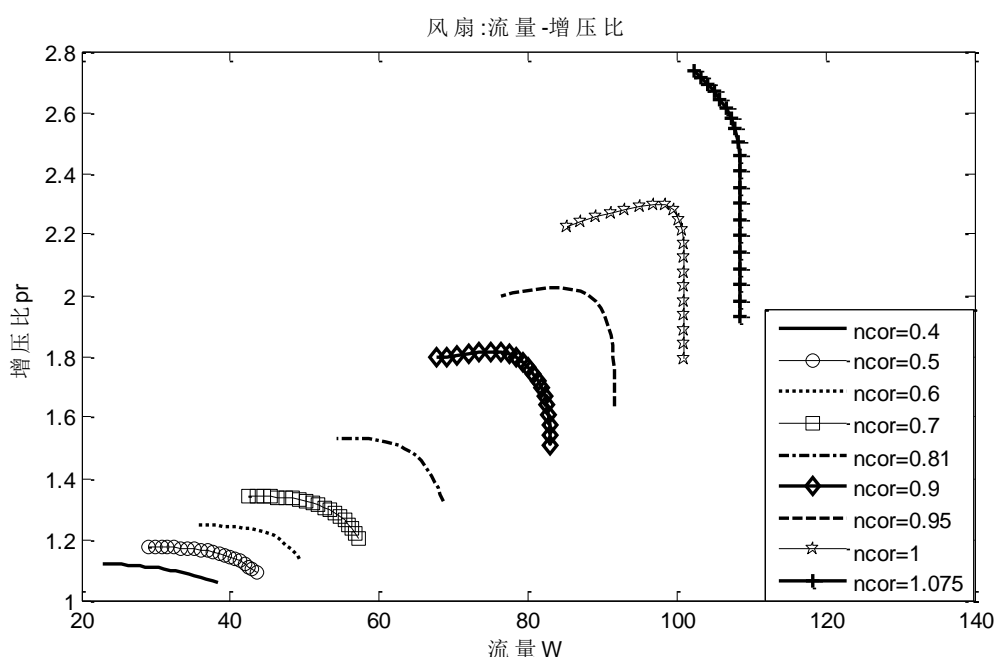


图 3.2 风扇的流量随压比函数值变化图

由上述结果图 3.1 我们可以直观观察得到：风扇的流量 W 随增压比 pr 的增大而减小。由上述结果图 3.2 我们可以得到：压比函数值变化将影响压气机部件-风扇的流量特性，流量 W 特性与换算转速 n_{cor} 、压比函数 zz 值有关。对于给定的换算转速 n_{cor} ，流量 W 随压比函数值 zz 的增大而单调减小；流量 W 随换算转速 n_{cor} 的增大而增大；即得：流量 W 特性与换算转速 n_{cor} 、压比函数值 zz 有关。

3.3 风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量

3.3.1 进气道部件模型的气动热力学数学模型

进气道的作用是向发动机提供流量匹配的气流。建模时，已知发动机飞行高度 H 、飞行马赫数 Ma 。

1) 总压恢复系数 σ 和标准大气条件下进口静压 P_0 、静温 T_0 及气流速度 V_0 ：

$$\begin{cases} \sigma = 1 & Ma \leq 1.1 \\ \sigma = 1 - 0.07(Ma - 1)^{1.35} & Ma > 1.1 \end{cases} \quad (2)$$

当高度 $H \leq 11km$ 时：

$$\begin{cases} P_0 = 1.01325 \times \left(1 - \frac{H}{44.308}\right)^{5.2553} \\ T_0 = 288.15 - 6.5 \times H \end{cases} \quad (3)$$

$$V_0 = Ma \sqrt{kRT_0} \quad (4)$$

2) 进气道进口的总温总压:

$$\begin{cases} T_0^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) \\ P_0^* = P_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (5)$$

纯空气 $\gamma = 1.4$ ，燃气 $\gamma = 1.33$ 。

3) 进气道出口总温总压:

$$\begin{cases} T_1^* = T_0^* \\ P_1^* = P_0^* \cdot \sigma_i \end{cases} \quad (6)$$

3.3.2 压气机部件的气动热力学数学模型

建模时，已知压气机进口总温 T_{in}^* 、总压 P_{in}^* 、压气机的压比函数值 zz 、物理转速 n 、压气机导叶角度 α 。双涵道变循环发动机中三个压气机部件，分别是风扇、CDFS 和高压压气机，这三个压气机部件采用同一种数学模型，如下：

1) 压气机换算转速:

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad (7)$$

其中，风扇： $T_{in,d}^* = 288.15$ ，CDFS： $T_{in,d}^* = 428.56862609$ ，高压压气机： $T_{in,d}^* = 473.603961$ 。

T_{in}^* 为压气机进口总温。

2) 压气机增压比、效率和换算流量

压气机的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c 分别是其换算转速和压比函数值及导叶角 α 的函数。

$$\begin{cases} pr_c = prc(n_{cor}, zz, \alpha) \\ \eta_c = \eta(n_{cor}, zz, \alpha) \\ W_c = W(n_{cor}, zz, \alpha) \end{cases} \quad (8)$$

压气机增压比、效率和换算流量的求法如下：

(1) 附录 4 分别给出了风扇、CDFS, 高压压气机的特性数据。利用线性插值法计算出压气机的换算转速为 n_{cor} 、压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

(2) 将(1)求的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入(9)修正后得到压气机的增压比、效率和换算流量：

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ W_c = C_W W_{c,map}(1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map}(1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \quad (9)$$

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇、CDFS、高压压气机 k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01； CDFS 导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 35^\circ$ ，风扇

和高压压气机的导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ； 风扇： $\begin{cases} C_{pr} = 2.3894 \\ C_W = 0.4950 \\ C_\eta = 1.0684 \end{cases}$ ， CDFS：

$$\begin{cases} C_{pr} = 0.3059 \\ C_W = 0.1500 \\ C_\eta = 1.0999 \end{cases}, \text{ 高压压气机: } \begin{cases} C_{pr} = 0.9119 \\ C_W = 0.38462 \\ C_\eta = 1.0719 \end{cases}。$$

3) 压气机出口总温

由压气机出口焓 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ 求压气机出口总温 T_{out}^* 数学模型如下：

$$T_{out}^* = h^{-1}(h_{out}); \quad (10)$$

其中，压气机出口焓：

$$h_{out} = \frac{h_{out,ei} - h_{in}}{\eta_c} + h_{in}; \quad (11)$$

压气机出口理想焓：

$$h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*); \quad (12)$$

由压气机出口理想熵 $\psi_{out,ei} = \psi(T_{out,ei}^*)$ ，计算压气机出口理想总温：

$$T_{out,ei}^* = \psi^{-1}(\psi_{out,ei}); \quad (13)$$

压气机出口理想熵：

$$\psi_{out,ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c, \quad (14)$$

这里 $M=1$ ， R 是气体常数；

进口熵：

$$\psi_{in} = \psi(T_{in}^*), \quad (15)$$

进口焓：

$$h_{in} = h(T_{in}^*). \quad (16)$$

4) 压气机出口总压

压气机出口总压数学模型为：

$$p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c. \quad (17)$$

5) 压气机流量

压气机流量数学模型为：

$$W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}, \quad (18)$$

其中，风扇：风扇： $p_{in,d}^*=1.01325$ ，CDFS： $p_{in,d}^*=3.5464$ ，高压压气机： $p_{in,d}^*=4.8860$ 。

6) 压气机功和功率

压气机功和功率数学模型为：

$$\begin{cases} l_c = h_{out} - h_i \\ N_c = W_a \cdot l_c \end{cases} \quad (19)$$

3.3.1 模型求解

模型中已知飞行高度 $H=11km$ ，飞行马赫数 $Ma=0.8$ 的亚音速巡航点，导叶角度均设置为 0° ，风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95，风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5。根据附录 4 给出的风扇、CDFS 的特性数据，通过线性插值计算它们在换算转速为 n_{cor} 、

压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ ，线性插值一般有二维线性插值、二维分段线性插值等，而本文为了降低常用二维线性插值方法的复杂难度，采用逐维进行一维线性插值的方法，并将该方法称为“逐维线性插值”。下面给出这三种插值方法的具体算法步骤。

1) 二维线性插值法的基本思想及算法步骤

二维线性插值的模型^[7]如下：

$$\begin{cases} y_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 \\ y_2 = k_1 x_2 + k_2 x_3 \\ y_3 = k_1 x_3 + k_2 x_1 \end{cases} \quad (20)$$

k_1, k_2, k_3 是三个待求系数, (x_{11}, z_{12}, y_1) 、 (x_{21}, z_{22}, y_2) 和 (x_{31}, z_{32}, y_3) 是三个离散点组。

对于插值计算 (x, z) 点处 y 的值, 具体方法如下

step1: 找到与 (x, z) 邻近的三组离散点 (x_{11}, z_{12}, y_1) 、 (x_{21}, z_{22}, y_2) 和 (x_{31}, z_{32}, y_3) , 或是将给出的数据进行恰当分组;

step2: 将得到的三组离散点相应的几个分量分别再次进行算术平均得到三个离散点;

step3: 将三个离散点代入上面的模型求出三个系数即可得到需要的二维插值函数。

2) 二维分段线性插值法的基本思想及算法步骤

二维分段线性插值是一维分段线性插值的直接推广, 其基本思想是: 将二维计算区域等距或者非等距剖分成若干个计算区域, 再在各个区域上进行二维线性插值。设 $z = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, 已知节点 $f(x_i, y_j) = z_{ij}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$),

现将插值区间 $[a, b] \times [c, d]$ 剖分为网格节点 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$,

$i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a, x_m = b, y_0 = c, y_n = d$, 然后在每个网格上对两个变量分别进行线性插值, 首先把其中的一个变量作为常量, 对另一个进行插值, 然后固定前一个变量对第二个变量进行插值, 最终得到在每个网格上的插值结果, 从而得到在整个插值区间上的分段插值函数 $\varphi_h(x)$ 为:

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} f^{(0)}(x), & (x, y) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \\ \vdots \\ f^{(m \times n)}(x), & (x, y) \in [x_{m-1}, x_m] \times [y_{n-1}, y_n] \end{cases} \quad (21)$$

其中 $h = \min \max(h_x, h_y)$ 。 $\varphi_h(x)$ 是整体插值区间上的连续函数, 随着子区间长度 h 变小, 不提高子区间上的插值幂次便可以满足给定的任意精度要求。

求解本模型的算法步骤:

step1: 网格剖分;

step2: 分别在各个网格上进行二维线性插值;

3) 逐维线性插值法的基本思想及算法步骤

顾名思义，逐维线性插值方法就是首先把其中的一个变量固定为某个常量，对另外一个进行插值，这样就得到了一组数据，然后固定前一个变量对第二个变量进行插值，这样得到最终的插值结果值。

针对此模型，利用我们的“逐维线性插值法”进行求解步骤如下：

步骤 1: 利用压比函数值定义公式(1)对附录 4 中风扇、CDFS 对应的增压比数据进行处理，求解出对应的压比函数值。

步骤 2: 由于模型的已知条件中已经给出求解风扇、CDFS 的出口总温、总压和流量是在它们的压比函数值 zz 为 0.5 的条件下，故我们在寻找线性插值点的时候需尽可能寻找与压比函数值 $zz = 0.5$ 误差^[8]

$\left| \frac{f^{(2)}(\zeta)}{2!} (0.5 - zz_1)(0.5 - zz_2) \right|$ 最小的两个离散点，也即寻找与 $zz = 0.5$ 最邻近的点。

步骤 3: 对上一步寻找到的压比函数值 zz 分别与增压比 pr 、效率 η 及换算流量 W 两组值进行拉格朗日线性插值并计算出 $zz = 0.5$ 时的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 及换算流量 $W_{c,map}$ 的值。

步骤 4: 将上一步求出的值代入到式子(9)中,计算出修正后得到风扇及 CDFS 的增压比、效率、换算流量。

步骤 5: 利用进气道模型中的(2-6)式子计算出进气道的出口总温总压，此即风扇的进口总温总压。

步骤 6: 利用压气机部件模型中的式子(17)，计算出风扇的出口总压。

步骤 7: 利用压气机部件模型中的式子(15)、(16)分别计算风扇的进口熵、进口焓。

步骤 8: 利用压气机部件模型中的式子(14)计算风扇的出口理想熵。

步骤 9: 利用压气机部件模型中的出口理想熵式子，变形为方程形式，首先采用逐步搜索法确定方程 $f(T_{out,ei}^*) = \psi(T_{out,ei}^*) - \psi_{out,ei} = 0$ 的根 $T_{out,ei}^*$ 的范围，算法步骤如下：

step1: 取含 $f(T_{out,ei}^*) = 0$ 根的区间 $[a, b]$ ，即 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ；

step2: 从 a 开始，对于风扇 $a = 258.139$ ，按固定的预设步长 $h = 0.01$ ，不断地向右跨步，每跨一步进行一次搜索，即检查节点 $(T_{out,ei}^*)_k = a + kh$ 上的函数 $f((T_{out,ei}^*)_k)$ 值的符号， $f((T_{out,ei}^*)_{k-1}) \cdot f((T_{out,ei}^*)_k) < 0$ ，则可以确定一个有根区间 $[(T_{out,ei}^*)_{k-1}, (T_{out,ei}^*)_k]$ ；

step3: 继续向右搜索，直到找出 $[a, b]$ 上的全部有根区间 $[(T_{out,ei}^*)_{k-1}, (T_{out,ei}^*)_k]$ ， $(k = 1, 2, \dots, n)$ 。

之后，用二分法计算出方程 $f(T_{out,ei}^*) = \psi(T_{out,ei}^*) - \psi_{out,ei} = 0$ 的根，二分法算法步骤如下：

step1: 若对于 $a < b$ ，有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则在 (a, b) 内 $f(x)$ 至少有一个根。

Step2: 取 (a,b) 的中点 $(T_{out,ei}^*)_1$, 计算 $f((T_{out,ei}^*)_1)$ 。

Step3: 若 $f((T_{out,ei}^*)_1)=0$, 则 $(T_{out,ei}^*)_1$ 是 $f(T_{out,ei}^*)=0$ 的根, 停止计算, 运行后输出结果 $(T_{out,ei}^*)_1$; 若 $f(a) \cdot f((T_{out,ei}^*)_1) < 0$, 则在 (a, x) 内 $f(T_{out,ei}^*)=0$ 至少有一个根, 取 $a_1=a, b_1=(T_{out,ei}^*)_1$; 若 $f(a) \cdot f((T_{out,ei}^*)_1) > 0$, 则取 $a_1=(T_{out,ei}^*)_1, b_1=b$ 。

Step4 若 $\frac{1}{2}|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ (ε 为预先给定的要求精度), 退出计算, 运行后输出结果

$T_{out,ei}^* \approx \frac{a_k + b_k}{2}$; 反之, 返回 Step1, 重复 Step1, Step2 及 Step3。

如上面所述, 我们便得到风扇的出口理想温度。

步骤 10: 利用压气机部件模型中的出口理想焓式子(12), 计算风扇出 $h_{out,ei}$ 。

步骤 11: 利用压气机部件模型中的出口焓式子(11), 计算出风扇 h_{out} 。

步骤 12: 利用压气机部件模型中的出口温度式子(10), 利用步骤 9 的方法求解出风扇出口总温 T_{out}^* 。

步骤 13: 利用压气机部件模型中的风扇流量式子(18), 计算出风扇出口流量

步骤 14: 此时, 得到了与附录 4 中的换算转速相对应的增压比 pr 、效率 η 及换算流量 W 四个量的 9 组数据, 而这由压气机部件模型中式子(7)计算得到的风扇换算转速为 $n_{cor}=1.03157075341760$; 然后利用误差最小的思想从这 9 组数据中选择出两组, 进行线性插值, 最终得到满足题目要求的风扇出口总温 $T_{out}^*=379.9623$ 、总压 $P_{out}^*=1.3057$ 与流量 $W_a=19.047722$ 。

步骤 15: 计算 CDFS 的出口总温、总压、流量。CDFS 的进口总温、总压为风扇的出口总温、总压, 然后利用压气机部件模型中的相关公式计算可得, 即重步骤 6 到步骤 14, 只需注意将公式中相关系数、 $T_{in,d}^*$ 、 $P_{in,d}^*$ 分别修正为 CDFS 的相应值。

步骤 16: 最终得到 CDFS 的出口总温 $T_{out}^*=422.084643$ 、总压 $P_{out}^*=1.807632$ 与流量 $W_a=17.253010$ 。

模型数值求解结果及结果对比图如下表 3.1-3.4:

表 3.1: 风扇：固定换算转速进行线性插值的出口总温、出口总压、流量

| 换算转速 n_{cor} | 总温 T_{out}^* | 总压 P_{out}^* | 流量 W_a |
|----------------|----------------|----------------|-----------|
| 0.4 | 259.782200 | 0.417222 | 6.246160 |
| 0.5 | 266.827200 | 0.454619 | 7.465153 |
| 0.6 | 274.828200 | 0.501505 | 8.624952 |
| 0.7 | 285.664200 | 0.569108 | 10.045341 |
| 0.81 | 303.758200 | 0.696261 | 12.181417 |
| 0.9 | 327.152200 | 0.889353 | 15.048055 |
| 0.95 | 343.395200 | 1.029105 | 16.703085 |
| 1 | 364.157200 | 1.206604 | 18.470372 |
| 1.075 | 401.704199 | 1.442114 | 19.841934 |

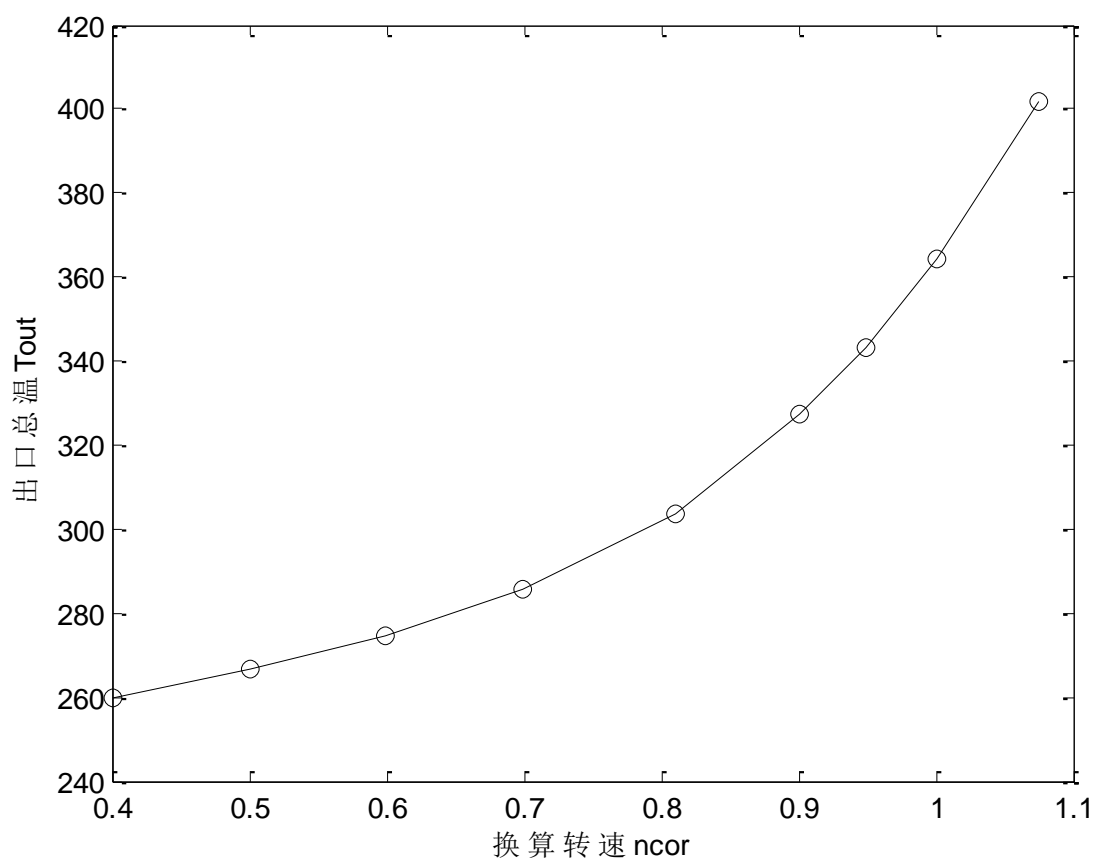


图 3.1 风扇换算转速与出口温度关系图

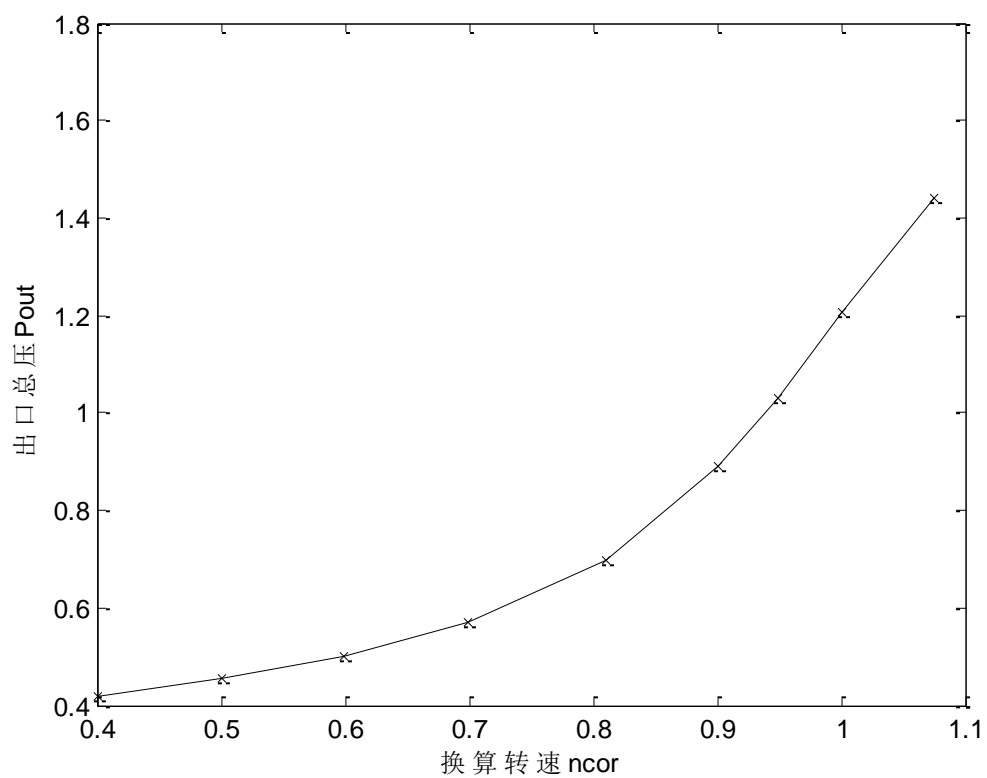


图 3.2 风扇换算转速与出口总压关系图

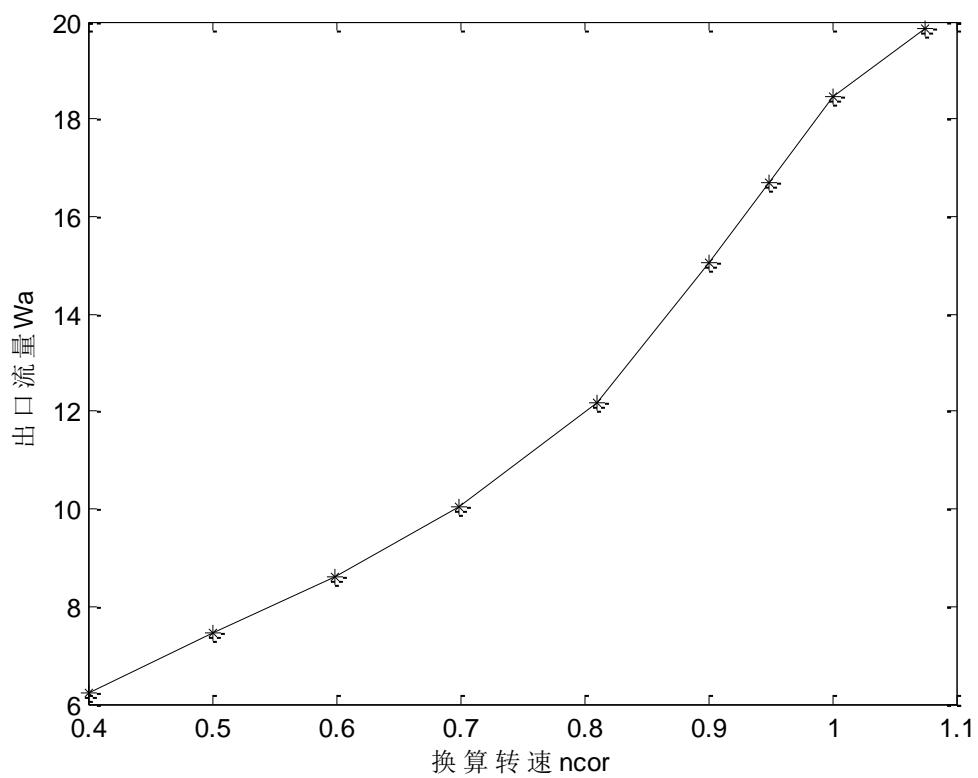


图 3.3 风扇换算转速与流量关系图

由压气机部件模型中式子(7)计算得到的风扇换算转速为 $n_{cor}=1.03157075341760$ ；
 再对表 3.1 的值进行上述步骤所述的线性插值得到的风扇换算转速为 $n_{cor}=1.031570753$ ，压比函数值 $zz=0.5$ 时的最终出口总温、出口总压、流量，如下表 3.2.

表 3.2: 风扇最终的换算转速、出口总温、出口总压、流量

| 换算转速 n_{cor} | 总温 T_{out}^* | 总压 P_{out}^* | 流量 W_a |
|------------------|----------------|----------------|-----------|
| 1.03157075341760 | 379.962361 | 1.305740 | 19.047722 |

表 3.3: CDFS: 固定换算转速进行线性插值的出口总温、出口总压、流量

| 换算转速 n_{cor} | 总温 T_{out}^* | 总压 P_{out}^* | 流量 W_a |
|----------------|----------------|----------------|-----------|
| 0.359 | 382.443361 | 1.318718 | 6.435830 |
| 0.528 | 387.016361 | 1.376934 | 8.651764 |
| 0.661 | 392.580361 | 1.447169 | 10.682380 |
| 0.791 | 400.335361 | 1.544144 | 12.953717 |
| 0.88 | 407.632361 | 1.637344 | 14.711235 |
| 0.952 | 414.947361 | 1.726584 | 16.111154 |
| 1 | 420.229361 | 1.788816 | 17.005675 |
| 1.028 | 422.621361 | 1.813075 | 17.324562 |
| 1.144 | 430.799361 | 1.892939 | 18.413333 |

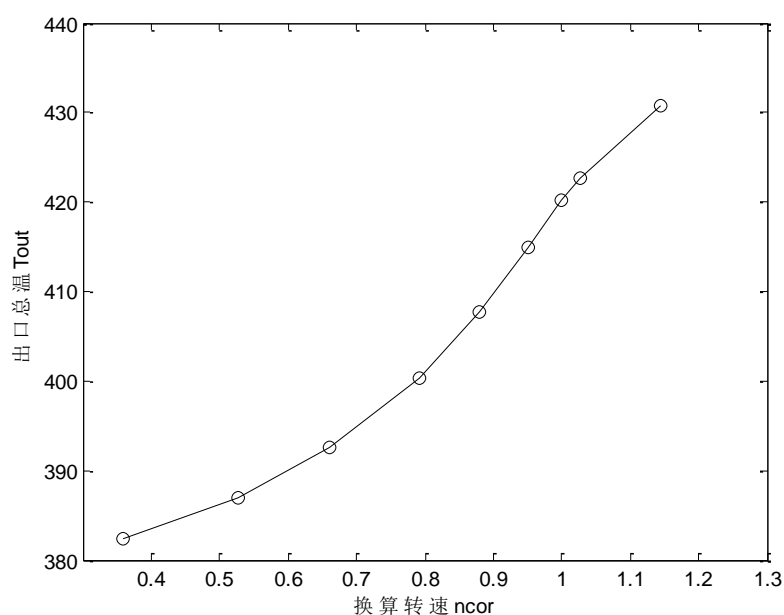


图 3.4 CDFS 换算转速与出口温度关系图

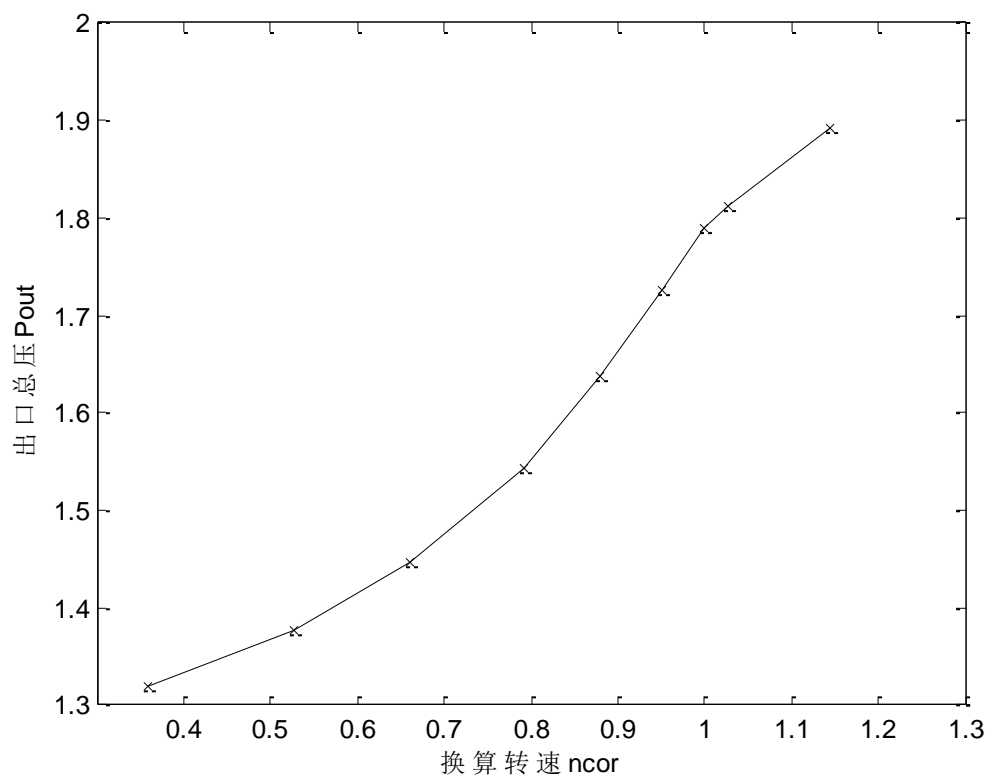


图 3.5 CDFS 换算转速与出口总压关系图

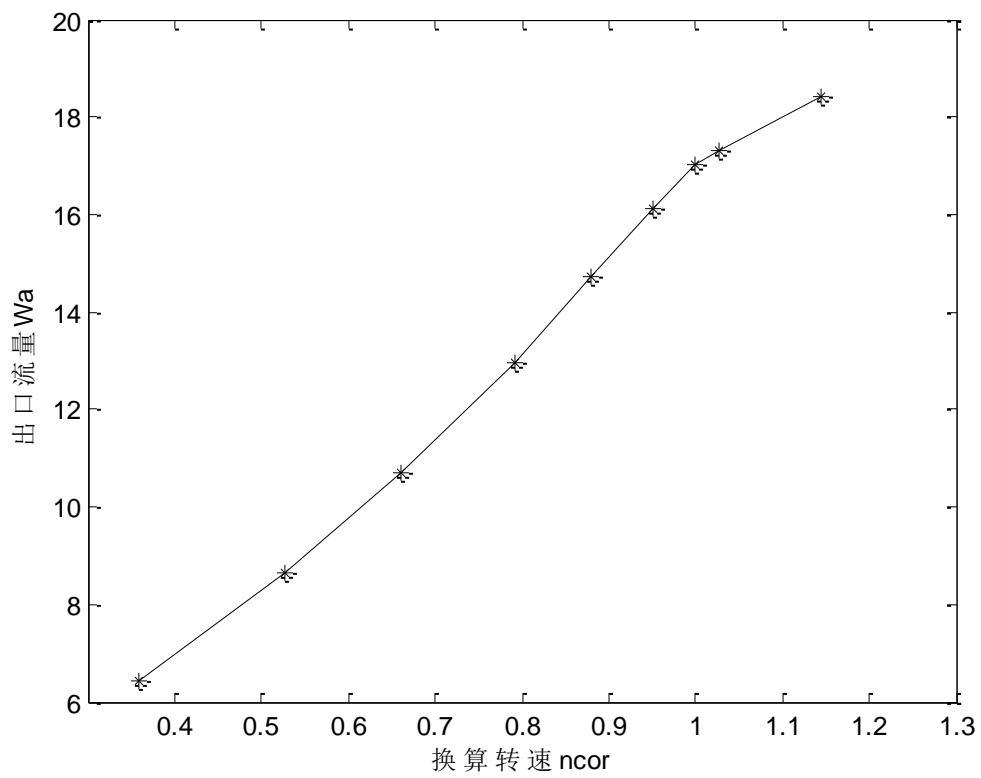


图 3.6 风扇换算转速与流量关系图

由压气机部件模型中式子(7)计算得到的 CDFS 换算转速 $n_{cor} = 1.00893573434669$ ；
 再对表 3.1 的值进行上述步骤所述的线性插值得到的 CDFS 换算转速 $n_{cor} = 1.00893573434669$ ，压比函数值 $zz = 0.5$ 时的最终出口总温、出口总压、流量，如下表 3.2.

表 3.4: CDFS 最终的换算转速、出口总温、出口总压、流量

| 换算转速 n_{cor} | 总温 T_{out}^* | 总压 P_{out}^* | 流量 W_a |
|------------------|----------------|----------------|-----------|
| 1.00893573434669 | 422.084643 | 1.807632 | 17.253010 |

四. 问题二的模型建立与求解

对该问题求解的参数设计见表 4.1

表 4.1: 变循环发动机双涵道模式设计点参数

| 设计点参数 | 数值 |
|------------|--------|
| 飞行高度/km | 11 |
| 马赫数 | 0.8 |
| 所有导叶角度 | 0 |
| 副外涵道面积 | 1839.5 |
| 后混合器出口总面积 | 28518 |
| 尾喷管喉道面积 | 9554.4 |
| 低压转速（物理转速） | 0.85 |

4.1 共同工作方程的建立:

对于该问题, 本文将进行稳态仿真^[9], 所以共同工作方程由各部件之间的匹配关系通过功率平衡、静压平衡和流量连续等关系来确定。选用的变量见表 4.2。

表 4.2: 变循环发动机双涵道模式的平衡方程所涉及的变量

| 变量 | 说明 |
|------------|----------------------------|
| n_H | 高压转速 (高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速) |
| Z_{CL} | 风扇压比函数值 |
| Z_{CDFS} | CDFS 压比函数值 |
| Z_{CH} | 高压压气机压比函数值 |
| T_4^* | 主燃烧室出口温度 |
| Z_{TH} | 高压涡轮压比函数值 |
| Z_{TL} | 低压涡轮压比函数值 |

对这 7 个未知量建立 7 个独立的方程来求解, 其共同工作方程分别为 (需要说明的是关于关于低高压轴功率平衡的方程中, 本文参考附录中的公式, 其轴的机械效率系数在附录公式中给出, 所以平衡方程中将省略, 这并不影响公式的推到):

(1) 风扇消耗功率 N_{CL} 与低压涡轮发出功率 N_{TL} 之间的低压轴功率平衡

$$N_{CL} - N_{TL} = 0 \quad (22)$$

其中 $\eta_{mL}=0.99$ 为中间轴机械效率。

(2) 高压压气机的消耗功率 N_{CH} 、CDFS 的消耗功率 N_{CDFS} 和高压涡轮发出功率 N_{TH} 之间的高压轴功率平衡

$$N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} = 0 \quad (23)$$

其中 $\eta_{mH}=0.99$ 是高速轴的机械效率。

(3) 高压涡轮进口截面气体流量 w_{g41} , 即主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量平衡

$$W_{g41} - W'_{g41} = 0 \quad (24)$$

其中 W'_{g41} 是通过高压涡轮特性数据线性插值得到的高压涡轮流量，这里忽略冷却的空气流量。

(4) 低压涡轮进口截面流量 W_{g45} 平衡

$$W_{g45} - W'_{g45} = 0 \quad (25)$$

低压涡轮进口截面流量由主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量计算得到， W'_{g45} 是通过低压涡轮特性数据线性插值得到的低压涡轮流量，这里忽略冷却的空气流量。

(5) 后混合器内涵道静压 p_{61} 和外涵道（主外涵道）静压 p_{62} 的平衡关系

$$p_{61} - p_{62} = 0 \quad (26)$$

后混合器见图2的6截面。

(6) 尾喷管面积平衡

$$A_8 - A'_8 = 0 \quad (27)$$

其中 A'_8 为给定的尾喷管8截面的面积，且 $A'_8 = 9.5544e+003$ ， A_8 也表示尾喷管8截面的面积，可按附录1的有关公式计算，二者相等。

(7) 风扇出口的流量 W_{a2} 、副外涵道流量 W_{a13} 和CDFS进口流量 W_{a21} ，三者之间存在平衡关系

$$W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} = 0 \quad (28)$$

其中副外涵道流量 W_{a13} 可按附录1中前混合器的有关公式计算。

由于这7个平衡方程中出现的量 N_{CL} , N_{TL} , N_{CH} , N_{CDFS} , N_{TH} , W_{g41} , W'_{g41} , W_{g45} , W'_{g45} , p_{61} , p_{62} , A_8 , W_{a2} , W_{a21} , W_{a13} ，都可以转化为进出口温度 T_{in}^* 和 T_{out}^* 、进出口压强 P_{in}^* 和 P_{out}^* 、出口流量 W_a 的函数表达式，而 T_{in}^* 、 T_{out}^* 、 P_{in}^* 、 P_{out}^* 和 W_a 又都可以转化为表4.2中的七个未知量 n_H 、 Z_{CL} 、 Z_{CDFS} 、 Z_{CH} 、 Z_{TH} 和 Z_{TL} 、 T_4^* 的函数表达式，所以通过各部件之间的匹配关系及其变量代换就可得到关于这七个未知量的非线性方程组。具体推导过程见下文。

4.2 基于未知变量的平衡方程的表达

4.2.1 低压轴功率平衡

$$N_{CL} - N_{TL} = 0$$

i 其中 N_{CL} 为风扇消耗功率，具体表达式如下

$$N_{CL} = W_a \cdot l_c,$$

又

$$l_c = h_{out} - h_{in}$$

所以

$$N_{CL} = W_a (h_{out} - h_{in})$$

再由

$$W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}$$

$$h_{out} = h(T_{out}^*)$$

$$h_{in} = h(T_{in}^*)$$

其中

$$\sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} = \frac{n_{cor}}{n_L}, \quad n_L = 0.85$$

$$T_{in}^* = \frac{T_{in,d}^* \cdot n_L^2}{n_{cor}^2}$$

$$W_c = C_W W_{c,map} \left(1 + \frac{k_w}{100} \alpha \right),$$

$$W_{c,map} = W(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha),$$

$$p_{in}^* = p_{out}^* / pr_c,$$

$$pr_c = C_{pr} (pr_{c,map} - 1) \left(1 + \frac{k_{pr}}{100} \alpha \right) + 1,$$

$$pr_{c,map} = prc(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha)$$

这些关系式中的 W 和 prc 是关于 n_{cor} 和 Z_{CL} 的二维插值函数， $k_w = 1$ ， $k_{pr} = 1$ ， $C_W = 0.4950$ ，

$C_{pr} = 2.3894$, $\alpha = 0$, $T_{in,d}^* = 288.15$, $p_{in,d}^* = 1.01325$, 且由第一个问题已经得到风扇的出口总压 $p_{out}^* = 1.305740$, 出口总温 $T_{out}^* = 370.515214$, 那么通过简单的关系式代换可以得到

$$\begin{aligned}
N_{CL} &= C_W W(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \left(1 + \frac{k_w}{100} \alpha \right) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{out}^*}{prc(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \cdot p_{in,d}^*} \cdot \left(h(T_{out}^*) - h\left(\frac{T_{in,d}^* \cdot n_L^2}{n_{cor}^2}\right) \right) \\
&= C_W W(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \cdot \frac{n_{cor}}{n_L} \cdot \frac{p_{out}^*}{prc(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \cdot p_{in,d}^*} \cdot \left(h(T_{out}^*) - h\left(\frac{T_{in,d}^* \cdot n_L^2}{n_{cor}^2}\right) \right) \\
&= 0.4950 \cdot W(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \cdot \frac{n_{cor}}{0.85} \cdot \frac{1.3057}{prc(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha) \cdot 1.0133} \cdot \left(h(370.5152) - h\left(\frac{288.15 \cdot 0.85^2}{n_{cor}^2}\right) \right) \\
&= 0.7505 \cdot \frac{W(n_{cor}, Z_{CL}) \cdot n_{cor}}{prc(n_{cor}, Z_{CL})} \cdot \left(h(370.5152) - h\left(\frac{208.1884}{n_{cor}^2}\right) \right)
\end{aligned}$$

通过焓 h 的关系式

$$\begin{aligned}
h_{air}(T) &= -0.30183674 \times 10^6 + 0.10489652 \times 10^4 \times T - 0.23284057 \times T^2 \\
&\quad + 0.45288431 \times 10^{-3} \times T^3 - 0.31308477 \times 10^{-6} \times T^4 + 0.11341362 \times 10^{-9} \times T^5 \\
&\quad - 0.21298087 \times 10^{-13} \times T^6 + 0.16363600 \times 10^{-17} \times T^7
\end{aligned}$$

可以得到

$$h_{air}(370.5152) = 3.5403 \times 10^{11}$$

$$\begin{aligned}
h_{air}\left(\frac{208.1884}{n_{cor}^2}\right) &= -0.30183674 \times 10^6 + 2.1838 \times 10^5 \times n_{cor}^{-2} - 1.0092 \times 10^4 \times n_{cor}^{-4} \\
&\quad + 4.0866 \times 10^3 \times n_{cor}^{-6} - 5.8815 \times 10^2 \times n_{cor}^{-8} + 4.4356 \times 10 \times n_{cor}^{-10} \\
&\quad - 1.7341 \times n_{cor}^{-12} + 0.0277 \times n_{cor}^{-14}
\end{aligned}$$

将焓的量及关系式代入 N_{CL} 可得到

$$\begin{aligned}
N_{CL} &= 0.7505 \cdot \frac{W(n_{cor}, Z_{CL}) \cdot n_{cor}}{prc(n_{cor}, Z_{CL})} \cdot (0.30183674 \times 10^6 - 2.1838 \times 10^5 \times n_{cor}^{-2} \\
&\quad + 1.0092 \times 10^4 \times n_{cor}^{-4} - 4.0866 \times 10^3 \times n_{cor}^{-6} + 5.8815 \times 10^2 \times n_{cor}^{-8} \\
&\quad - 4.4356 \times 10 \times n_{cor}^{-10} + 1.7341 \times n_{cor}^{-12} - 0.0277 \times n_{cor}^{-14} + 3.5403 \times 10^{11})
\end{aligned}$$

下面给出 W 和 prc 关于 n_{cor} 和 Z_{CL} 的二维插值函数（为简便，本文采用简单的线性插值，并采用附录4给出的数据进行插值），插值的模型如下：

$$\begin{cases} y_1 = k_1 x_{11} + k_2 x_{12} + k_3 \\ y_2 = k_1 x_{21} + k_2 x_{22} + k_3 \\ y_3 = k_1 x_{31} + k_2 x_{32} + k_3 \end{cases} \quad (29)$$

k_1, k_2, k_3 是三个待求系数, (x_{11}, x_{12}, y_1) 、 (x_{21}, x_{22}, y_2) 和 (x_{31}, x_{32}, y_3) 是三个离散点组。

对于本问题的具体方法如下

- (1) 把对应于每个换算转速的每组压比函数值进行算术平均得到相应的9个离散数据, 因为只需要三个离散点组, 所以将这9个离散点进行分组, 分组的方法就采用按顺序依次分 (前三个一组, 中间三个一组, 后三个一组);
- (2) 将得到的三组离散点相应的三个分量分别再次进行算术平均得到三个离散点;
- (3) 将三个离散点代入上面的模型(29)求出三个系数即可得到需要的二维插值函数。

下面表4.3分别给出求解函数关系 W 和 prc (风扇的换算流量和增压比) 的三个离散点组。

表4.3: 风扇的换算流量和增压比的的离散点

| (n_{cor}, Z_{CL}, W_c) | (n_{cor}, Z_{CL}, prc) |
|---------------------------|--------------------------|
| (0.500, 0.6865, 36.9465) | (0.500, 0.6865, 1.1537) |
| (0.8033, 0.7000, 63.9049) | (0.8033, 0.7000, 1.4972) |
| (1.0083, 0.6527, 97.2120) | (1.0083, 0.6527, 2.1463) |

在已知三个离散点之后, 可以采用很多求解线性方程组的方法进行求解 (如直接法和迭代法), 求解线性方程组的直接法有: 高斯消去法 (高斯顺序消去法、高斯主元消去法)、矩阵三角分解法、平方根法等; 求解线性方程组的迭代法有: 简单迭代法、高斯-赛德尔迭代法、雅克比迭代法、逐次超松弛 (SOR) 迭代法、最速下降法和共轭梯度法等。本问题遇到的三元线性方程组比较简单, 用高斯消去法就可以, 精度高且计算量也不大, 还可以避免迭代不收敛的情况发生。表4.4给出了求解得到的系数值 (分别是 prc 和 W 对应的系数)。

表4.4: 风扇的换算流量和增压比线性插值函数系数

| | k_1 | k_2 | k_3 |
|-------|-----------|----------|----------|
| prc | -7.3891 | 1.4614 | 5.4956 |
| W | -267.3648 | 100.7841 | 170.1004 |

由得到的 prc 和 W 的函数关系

$$prc(n_{cor}, Z_{CL}) = -7.3891Z_{CL} + 1.4614n_{cor} + 5.4956$$

$$W(n_{cor}, Z_{CL}) = -267.3648Z_{CL} + 100.7841n_{cor} + 170.1004$$

可以重新表示 N_{CL} 。

$$N_{CL} = 0.7505 \cdot \frac{-267.3648Z_{CL} \cdot n_{cor} + 100.7841n_{cor}^2 + 170.1004 \cdot n_{cor}}{-7.3891Z_{CL} + 1.4614n_{cor} + 5.4956} \cdot (0.30183674 \times 10^6 \\ - 2.1838 \times 10^5 \times n_{cor}^{-2} + 1.0092 \times 10^4 \times n_{cor}^{-4} - 4.0866 \times 10^3 \times n_{cor}^{-6} \\ + 5.8815 \times 10^2 \times n_{cor}^{-8} - 4.4356 \times 10 \times n_{cor}^{-10} + 1.7341 \times n_{cor}^{-12} - 0.0277 \times n_{cor}^{-14} \\ + 3.5403 \times 10^{11})$$

由于此表达式较繁杂，下面用一个抽象的符号函数表达此式，如下

$$N_{CL} = \phi_1(n_{cor}, Z_{CL})$$

ii 在有了风扇消耗功率 N_{CL} 的表达后，下面看与它形成平衡的低压涡轮发出功率 N_{TL} 的

表达。 N_{TL} 与 N_{CL} 具有类似的模型

$$\begin{cases} N_{TL} = W_g \cdot l_T \eta_m \\ l_T = h_{in} - h_{out} \end{cases} \quad \eta_m = 0.99$$

所以 N_{CL} 的表达所需量与 N_{TL} 的类似

$$W_g = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}$$

其中 $T_{in}^* = T_4^*$ ， $T_{in,d}^* = 1.5405e+003$ ， $p_{in,d}^* = 11.3371$ 。

$$W_c = C_W W_{c,map} (1 + \frac{k_w}{100} \alpha), \quad \alpha=0, \quad C_W = 0.3881$$

$$W_{c,map} = W(n_{cor}, Z_{TL}, \alpha)$$

又

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad n = n_L = 0.85$$

所以

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} = 0.85 * \sqrt{\frac{1.5405e+003}{T_4^*}} = \frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}} \\ W_{c,map} = W(n_{cor}, Z_{TL}, \alpha) = W(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL})$$

其中 W 为换算转速 n_{cor} 和涡轮压比函数值 Z_{TL} 的插值函数。 $p_{in}^* = p_4^* = p_{3in}^* \sigma_b$ ， $\sigma_b = 0.98$ ，

所以

$$p_{in}^* = 0.98 p_{3in}^*$$

而 p_{3in}^* 是高压压气机的出口压强，该值的计算可类似第一个问题的计算方法通过逐维线性插值或二维线性插值计算得到，具体算法，问题一已有陈述，在此不再赘述，为了此题的解答方便，下面在表（）中给出高压压气机的出口总温、总压和流量，而这些量恰好是燃烧室的进口量 T_{3in}^* 、 p_{3in}^* 和 W_{3a} 。

表4.5: 高压压气机的出口总温、总压和流量

| 换算转速 n_{cor} | 总温 T_{3out}^* | 总压 P_{3out}^* | 流量 W_{3a} |
|------------------|-----------------|-----------------|-------------|
| 1.00630931407541 | 730.315113 | 10.981790 | 15.140065 |

所以

$$p_{in}^* = 0.98 p_{3in}^* = 0.98 p_{3out}^* = 0.98 \times 10.981790 = 10.7622$$

又

$$l_T = h_{in} - h_{out} = h(T_{in}^*, f_b) - h(T_{out}^*, f_b) = h(T_4^*, f_b) - h(T_{out}^*, f_b)$$

$$pr_c = \left[1 - \left(1 - \frac{T_{out}^*}{T_{in}^*} \right) / \eta_c \right]^{-\overline{Cp}/R}$$

可得到

$$T_{out}^* = \left[1 - \left(1 - (pr_c)^{\frac{R}{\overline{Cp}}} \right) \cdot \eta_c \right] \cdot T_4^*$$

其中 $pr_c = C_{pr} (pr_{c,map} - 1) \left(\frac{k_{pr}}{100} \alpha + 1 \right)$ ， $\eta_c = C_\eta \eta_{c,map} \left(1 + \frac{k_\eta^2}{100} \alpha \right)$ ，且 $C_{pr} = 0.79$ ，

$C_\eta = 1.0061$ ，而落压比 $pr_{c,map}$ 和效率 $\eta_{c,map}$ 同上是换算转速 n_{cor} 和涡轮压比函数值 Z_{TL} 的插值函数，同样可以写成

$$pr_{c,map} = prc\left(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL}\right)$$

$$\eta_{c,map} = \eta\left(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL}\right)$$

在这里有 $\overline{Cp} = 1.2745e+003$ ， $R = 287.31$ 。关于 $W_{c,map}$ 、 $pr_{c,map}$ 和 $\eta_{c,map}$ 的关系式，本问题依然采用线性插值，方法同上述二维插值，由附录4中的数据可得到相应的三个关系 W 、

prc 和 η 的具体系数见表4.6

表4.6: 低压涡轮的换算流量、增压比和效率线性插值函数系数

| | k_1 | k_2 | k_3 |
|--------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| W | -4.477791×10^6 | 0.000003×10^6 | 2.238100×10^6 |
| prc | -3.794314×10^5 | 0.000010×10^5 | 1.897173×10^5 |
| η | -1.292902×10^4 | 0.000010×10^4 | 0.646531×10^4 |

所以

$$W_{c,map} = W\left(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL}\right) = -4.477791 \times 10^6 Z_{TL} - 3.132673 \cdot T_4^{*-1/2} + 213.1798$$

$$pr_{c,map} = prc\left(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL}\right) = -3.794314 \times 10^5 Z_{TL} + 19.6501 \cdot T_4^{*-1/2} - 2607.810$$

$$\eta_{c,map} = \eta\left(\frac{33.3618}{\sqrt{T_4^*}}, Z_{TL}\right) = -1.292902 \times 10^4 Z_{TL} + 7.339596 \cdot T_4^{*-1/2} - 2329.336$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} W_c &= C_W W_{c,map} = C_W \left(-420 Z_{TL} - 3.132673 \cdot T_4^{*-1/2} + 213.1798 \right) \\ &= -163.002 Z_{TL} - 1.2158 \cdot T_4^{*-1/2} + 82.7351 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pr_c &= C_{pr} (pr_{c,map} - 1) + 1 = C_{pr} (522 Z_{TL} + 19.6501 \cdot T_4^{*-1/2} - 2606.810) + 1 \\ &= 412.4844 Z_{TL} + 15.5275 \cdot T_4^{*-1/2} - 2058.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_c &= C_\eta \eta_{c,map} = C_\eta (4660 Z_{TL} + 7.339596 \cdot T_4^{*-1/2} - 2329.336) \\ &= 4688.4 Z_{TL} + 7.3844 \cdot T_4^{*-1/2} - 2343.5 \end{aligned}$$

自然有

$$\begin{aligned} W_g &= W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{P_{in}^*}{P_{in,d}^*} = W_c \cdot \sqrt{\frac{1540.5}{T_{in}^*}} \cdot \frac{10.7622}{11.3371} \\ &= 37.2593 \cdot W_c \cdot T_4^{*-1/2} \\ &= -6073.3 Z_{TL} T_4^{*-1/2} - 45.2999 \cdot T_4^{*-1} + 3082.7 \cdot T_4^{*-1/2} \end{aligned}$$

(30)

$$\begin{aligned}
T_{out}^* &= \left[1 - \left(1 - (pr_c)^{-\frac{R}{c_p}} \right) \cdot \eta_c \right] \cdot T_4^* \\
&= \left[1 - \left(1 - (pr_c)^{-0.2254} \right) \cdot \eta_c \right] \cdot T_4^* \\
&= [1 - (1 - (412.4844Z_{TL} + 15.5275 \cdot T_4^{*-1/2} - 2058.9)^{-0.2254}) \\
&\quad \cdot (4688.4Z_{TL} + 7.3844 \cdot T_4^{*-1/2} - 2343.5)] \cdot T_4^*
\end{aligned} \tag{31}$$

对于 $l_T = h_{in} - h_{out} = h(T_{in}^*, f_b) - h(T_{out}^*, f_b) = h(T_4^*, f_b) - h(T_{out}^*, f_b)$ 有

$$\begin{aligned}
h(T, f) &= h_{air}(T) + \frac{f}{1+f} \times h_{st}(T) \\
(32) \quad h_{air}(T) &= -0.30183674 \times 10^6 + 0.10489652 \times 10^4 \times T - 0.23284057 \times T^2 + 0.45288431 \times 10^{-3} \times T^3 \\
&\quad - 0.31308477 \times 10^{-6} \times T^4 + 0.11341362 \times 10^{-9} \times T^5 - 0.21298087 \times 10^{-13} \times T^6 \\
&\quad + 0.16363600 \times 10^{-17} \times T^7 \\
h_{st}(T) &= -0.11152575 \times 10^6 - 0.31020206 \times 10^3 \times T + 2.9961197 \times T^2 \\
&\quad - 0.27934788e - 2 \times T^3 + 0.18746407 \times 10^{-5} \times T^4 - 0.73499597 \times 10^{-9} \times T^5 \\
&\quad + 0.15062602 \times 10^{-12} \times T^6 - 0.12510984 \times 10^{-16} \times T^7
\end{aligned}$$

其中 f_b 为主燃室出口油气比，且有

$$f_b = \frac{h_4 - h_3}{\xi_b H_u + h_3}$$

h_3 和 h_4 分别主燃烧室进出口焓，燃烧效率 $\xi_b = 0.99$ ，燃油热值 $H_u = 42900000$ 。

$$h_3 = h_{air}(T_{3out}^*),$$

T_{3out}^* 为高压压气机的出口总温，也为主燃室的进口总温，其值上面已经求得为 730.315113，所以由空气焓的公式很容易求得主燃室的进口焓

$$h_3 = h_{air}(T_{3out}^*) = h_{air}(730.315113) = 4.4791 \times 10^5,$$

而主燃室的出口焓 $h_4 = h_{st}(T_4^*)$ ，其表达式可将 T_4^* 代入燃气焓的公式而得到，如下

$$\begin{aligned}
h_4 &= -0.11152575 \times 10^6 - 0.31020206 \times 10^3 \times T_4^* + 2.9961197 \times T_4^{*2} \\
&\quad - 0.27934788e - 2 \times T_4^{*3} + 0.18746407 \times 10^{-5} \times T_4^{*4} - 0.73499597 \times 10^{-9} \times T_4^{*5} \\
&\quad + 0.15062602 \times 10^{-12} \times T_4^{*6} - 0.12510984 \times 10^{-16} \times T_4^{*7}
\end{aligned}$$

所以有 f_b 的表达式

$$\begin{aligned}
f_b &= \frac{h_4 - h_3}{\xi_b H_u + h_3} = 2.33 \times 10^{-8} h_4 - 0.0104 \\
&= -0.013 - 7.2276 \times 10^{-6} T_4^* + 6.9809 \times 10^{-8} T_4^{*2} \\
&\quad - 6.5087 \times 10^{-11} T_4^{*3} + 4.3679 \times 10^{-14} T_4^{*4} - 1.7125 \times 10^{-17} T_4^{*5} \\
&\quad + 3.5095 \times 10^{-21} T_4^{*6} - 2.9150 \times 10^{-25} T_4^{*7}
\end{aligned}$$

可以看到将 f_b 和 T_4^* 代入 $h(T_4^*, f_b)$ 即可得到关于 T_4^* 的高次非线性表达式, 将 T_{out}^* 的表达式

(31) 和 f_b 代入 $h(T_{out}^*, f_b)$ 即可得到关于 T_4^* 和 Z_{TL} 的表达式, 从而由 $h(T, f)$ 的关系式(32)

可以得到 l_T 是关于 T_4^* 和 Z_{TL} 的表达式, 其具体形式可以由上面算出的各量进行简单的代入就可得到, 由于其形式很繁杂, 所以在此用一个抽象的符号函数对其表示, 如下

$$l_T = \phi_3(T_4^*, Z_{TL})$$

由 W_g 的表达式(30)可以看到其也是关于 T_4^* 和 Z_{TL} 的关系式, 本文用 $W_g = \phi_2(T_4^*, Z_{TL})$ 表示。

所以低压涡轮发出功率

$$N_{TL} = W_g \cdot l_T \eta_m = 0.99 W_g \cdot l_T = 0.99 \phi_2(T_4^*, Z_{TL}) \cdot \phi_3(T_4^*, Z_{TL})$$

也是 T_4^* 和 Z_{TL} 的函数。

最后由平衡关系式 $N_{CL} - N_{TL} = 0$, 可以得到

$$\phi_1(n_{cor}, Z_{CL}) - 0.99 \phi_2(T_4^*, Z_{TL}) \cdot \phi_3(T_4^*, Z_{TL}) = 0$$

为书写方便, 令

$$\Phi_1(n_{cor}, Z_{CL}, T_4^*, Z_{TL}) = \phi_1(n_{cor}, Z_{CL}) - 0.99 \phi_2(T_4^*, Z_{TL}) \cdot \phi_3(T_4^*, Z_{TL}) = 0 \quad (33)$$

由此我们得到了第一个平衡关系的表达式 (由于其具体形式很繁杂, 下文统一用下式表示)

$$\Phi_1(n_{cor}, Z_{CL}, T_4^*, Z_{TL}) = 0 \quad (34)$$

4.2.2 高压轴功率平衡

$$N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH} = 0$$

N_{CH} 和 N_{CDFS} 分别是高压压气机和CDFS的消耗功率, N_{TH} 是高压涡轮发出功率, $\eta_{mH} = 0.99$ 是高速轴的机械效率。其中 N_{CH} 和 N_{CDFS} 的推到与4.2.1节中风扇的消耗功率完全相同, 为简洁, 在此不做详细阐述, 而直接给出其抽象表达式如下

$$N_{CDFS} = \phi_4(n_H, Z_{CDFS})$$

$$N_{CH} = \phi_5(n_H, Z_{CH})$$

在高压涡轮发出功率 N_{TH} 的推到中用到了三个线性插值的函数

$$\begin{cases} pr_c = prc(n_{cor}, Z_{TH}, \alpha) \\ \eta_c = \eta(n_{cor}, Z_{TH}, \alpha) \\ W_c = W(n_{cor}, Z_{TH}, \alpha) \end{cases}$$

由于此问题假设 $\alpha = 0$ ，所以这三个线性插值函数是二元的，即

$$\begin{cases} pr_{c,map} = prc(n_{cor}, Z_{TH}) \\ \eta_{c,map} = \eta(n_{cor}, Z_{TH}) \\ W_{c,map} = W(n_{cor}, Z_{TH}) \end{cases}$$

采用与4.2.1节中相同的算法，得到的高压涡轮中线性插值函数的对应系数见表4.7。

表4.7: 低压涡轮的换算流量、增压比和效率线性插值函数系数

| | k_1 | k_2 | k_3 |
|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| W | -4.200000×10^2 | -0.000939×10^2 | 2.131798×10^2 |
| prc | 5.220000×10^3 | 0.000589×10^3 | -2.607810×10^3 |
| η | 4.660000×10^3 | 0.000220×10^3 | -2.329336×10^3 |

其他关系的推导与低压涡轮的完全相同，现给出 N_{TH} 的抽象函数关系式

$$N_{TH} = \phi_6(T_4^*, Z_{TH})$$

所以该平衡式可表达如下：

$$\Phi_2(n_H, Z_{CH}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}) = \phi_4(n_H, Z_{CDFS}) + \phi_5(n_H, Z_{CH}) - \phi_6(T_4^*, Z_{TH}) = 0$$

简记为

$$\Phi_2(n_H, Z_{CH}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}) = 0 \quad (35)$$

4.2.3 高压涡轮进口截面流量平衡

$$W_{g41} - W'_{g41} = 0$$

高压涡轮进口流量的表达式

$$W_{4g} = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}$$

其推到过程与4.2.1节中低压涡轮进口流量的表达完全相同（详见(30)式），所以该关系完全可以写成

$$W_{4g} = \phi_7(Z_{TH}, T_4^*)$$

而 W'_{g41} 可由附录4中的数据进行线性插值得到，该关系实际上已有表4.7给出了，即

$$W'_{g41} = -420Z_{TH} - 0.0939n_H + 213.1798$$

其实 W'_{g41} 也可以写成

$$W'_{g41} = \phi_8(Z_{TH}, n_H)$$

所以由平衡关系

$$W_{g41} = W'_{g41}$$

可以得到第三个非线性方程如下

$$\Phi_3(Z_{TH}, T_4^*, n_H) = 0 \quad (36)$$

4.2.4 低压涡轮进口截面流量平衡

$$W_{g45} - W'_{g45} = 0$$

该平衡关系与上面2.2.3节中的完全类似，其推到不再详述（可参见4.2.1节的ii），下面只给出结果。

$$\begin{aligned} W_{g45} &= W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} = W_c \cdot \sqrt{\frac{1540.5}{T_{in}^*}} \cdot \frac{10.7622}{11.3371} \\ &= 37.2593 \cdot W_c \cdot T_4^{*-1/2} \\ &= -6073.3Z_{TL}T_4^{*-1/2} - 45.2999 \cdot T_4^{*-1} + 3082.7 \cdot T_4^{*-1/2} \\ W'_{g45} &= -4.477791 \times 10^6 Z_{TH} + 2.238100 \times 10^6 \end{aligned}$$

令

$$W_{g45} = \phi_9(Z_{TL}, T_4^*)$$

$$W'_{g45} = \phi_{10}(Z_{TH})$$

得到第四个非线性方程如下

$$\Phi_4(Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*) = 0 \quad (37)$$

4.2.5 后混合器静压平衡

$$p_{61} - p_{62} = 0$$

p_{61} 和 p_{62} 分别是后混合器内、外涵道（主外涵道）的静压，二者平衡。

而这两个量的模型分别为
内涵道静压

$$p_{61} = p_{61}^* \cdot \pi(\lambda_{61})$$

外涵道静压

$$p_{62} = p_{62}^* \cdot \pi(\lambda_{62})$$

其中 p_{61}^* 为内涵出口总压， p_{62}^* 为外涵出口总压。可由公式

$$\begin{cases} W_{g61} + W_{g62} = W_{g6} \\ W_{g61}h_{61} + W_{g62}h_{62} = W_{g6}h_6 \\ p_{61}^*f(\lambda_{61})A_{61} + p_{62}^*f(\lambda_{62})A_{62} = p_6^*f(\lambda_6)(A_{61} + A_{62}) \\ W_{g6} = k_m \frac{p_6^*}{\sqrt{T_6^*}} A_6 q(\lambda_6) \end{cases}$$

求出混合器出口总温 T_6^* 、总压 p_6^* 、流量 W_{g6} 。

$$\pi(\lambda) = (1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$f(\lambda) = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} q(\lambda) z(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \lambda (1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

其流量的关系推到见以上各小节，对于该平衡关系的推到中用到的算法涉及问题一中提到的二分法，也涉及本问题以上各小节用的二元线性插值。最后通过关系式的代换可以得到第五个非线性方程（因其具体表达很繁杂，为简便，只给出抽象形式）：

$$\Phi_5(Z_{CL}, Z_{TH}, Z_{TL}, n_{cor}) = 0 \quad (38)$$

4.2.6 尾喷管面积平衡

$$A_8 - A'_8 = 0$$

其中 $A'_8 = 9.5544e+003$ ，而 A_8 可由流量公式

$$W_{g8} = k_m \frac{P_8^*}{\sqrt{T_8^*}} A_8 q(\lambda_8)$$

计算，即

$$A_8 = \frac{W_{g8} \sqrt{T_8^*}}{k_m P_8^* q(\lambda_8)}$$

其中尾喷管流量 W_{g8} 等于总进口流量与燃油量之和，可以通过计算得到 W_{g8} 函数关系用下式表示

$$W_{g8} = \phi_{11}(Z_{CDFS}, Z_{CH}, Z_{TH}, Z_{TL})$$

再由关系

$$W_{g9} = k_m \frac{P_9^*}{\sqrt{T_9^*}} A_9 q(\lambda_9)$$

$$\pi(\lambda_9) = P_9 / P_9^*$$

$$P_9 = P_0$$

$$\lambda_8 = 1$$

$$T_9 = T_7^* \tau(\lambda_9)$$

$$c_9 = \varphi_{nz} \sqrt{2(h_9^* - h_9)}$$

$$\varphi_{nz} = 0.98$$

结合前述的焓的公式，我们可以得到第 6 个非线性方程

$$\Phi_6(Z_{CL}, Z_{TL}) = 0 \quad (40)$$

4.2.7 风扇出口流量平衡

$$W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} = 0$$

其中风扇出口的流量 W_{a2} 分流为副外涵流量 W_{a13} 和 CDFS 进口流量 W_{a21} ，三者之间存在平衡关系。对于该平衡关系，可参考 2.2.1 节的流量推到过程，结合线性插值等算法能够得到第 7 个方程

$$\Phi_7(Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TL}, Z_{CH}, Z_{TH}, n_H, n_{cor}) = 0 \quad (41)$$

4.2.8 低压涡轮出口流量、外涵道流量和尾喷管流量平衡

低压涡轮出口流量、外涵道流量和尾喷管流量之间的平衡^[9]

$$W_9 - W_{16} - W_5 = 0$$

由于(34)-(41)这 7 个平衡关系中涉及到了 8 个未知量 n_{cor} 、 n_H 、 Z_{CL} 、 Z_{CDFS} 、 Z_{CH} 、 Z_{TH}

和 Z_{TL} 、 T_4^* ，所以这个方程并不封闭，为此需要寻找另一个平衡条件。本节给出的这个平衡关系式是文献[9, 10,11]中提到的，这个关系都是流量的关系，所以同样能参考 4.2.1 解的讨论来得到这些未知量之间的关系，下面给出它的抽象表达式

$$\Phi_8(Z_{CL}, Z_{TL}, Z_{CH}, n_{cor}) = 0$$

4.3 非线性方程组求解

在 2.2.1-2.2.7 节，结合变循环发动各部件的匹配关系对 7 个平衡方程模型的具体形式进行了推导，并得到了一个严重非线性性的方程组，其具体形式相当复杂，为简便我们只给出了第一个平衡方程的详细表达式，而其他的方程都可由此进行的简单的推导得到，下面我们给出这 7 个方程的抽象表达形式

$$\begin{cases} \Phi_1(n_{cor}, Z_{CL}, T_4^*, Z_{TL}) = 0 \\ \Phi_2(n_H, Z_{CH}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}) = 0 \\ \Phi_3(Z_{TH}, T_4^*, n_H) = 0 \\ \Phi_4(Z_{TH}, Z_{TL}, T_4^*) = 0 \\ \Phi_5(Z_{CL}, Z_{TH}, Z_{TL}) = 0 \\ \Phi_6(Z_{CL}, Z_{TL}) = 0 \\ \Phi_7(Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{TL}, Z_{CH}, Z_{TH}, n_H) = 0 \\ \Phi_8(Z_{CL}, Z_{TL}, Z_{CH}, n_{cor}) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

非线性方程组的数值求解一般采用迭代法，常用的迭代法有不动点迭代法和牛顿迭代法等多种迭代方法[8,12]，而其中牛顿迭代方法最为经典，下面给出这牛顿迭代法的具体步骤：

设含有 n 个方程的 n 元非线性方程组的一般形式如下：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

其中 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是定义在区域 $D \subset R^n$ 上的 n 元实值函数，且 f_i 中至少有一个是非线

性函数。令

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T,$$

则该方程组可表示成向量形式

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0.$$

其中 $\mathbf{F}: D \subset R^n \rightarrow R^n$ ，及 \mathbf{F} 是定义在区域 $D \subset R^n$ 上且是 n 维实向量值函数。若存在 $x^* \in D$ 使 $\mathbf{F}(x^*) = 0$ ，则称 x^* 是该方程组的解。

使用牛顿迭代法求解该非线性方程组的算法如下：

(1) 在 x^* 附近选取 $\mathbf{x}^{(0)} \in D$ ，给定允许误差 $\varepsilon > 0$ 和最大迭代次数 K_{\max} ；

(2) 对于 $k = 0, 1, 2, \dots, K_{\max}$ ，执行：

① 计算 $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ 和 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ ；

② 求解关于 $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ 的线性方程组

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)});$$

③ 计算 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$ ；

④ 若 $\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\| / \|\mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$ ，则 $\mathbf{x}^{(*)} \approx \mathbf{x}^{(k+1)}$ ，停止计算；否则，将 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 作为新的 $\mathbf{x}^{(k)}$ ，转⑤；

⑤ 若 $k < K_{\max}$ ，则继续；否则，输出 K_{\max} 次迭代不成功的信息，并停止计算。

其中 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ 为雅克比矩阵，即

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

该雅克比矩阵中包含偏导数的计算，在实际使用时，由于函数 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的梯度无法通过解析方式求得，所以只能采用离散方式的有限差分法，即将雅克比矩阵中的梯度（偏导数）用差分代替，所采用的差分方法一般有向前差分法和中心差分法（为方便，

下面本文用 $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ 表示雅克比矩阵)。

(1) 向前差分的偏导数近似为:

$$\mathbf{J}(i, j) = \frac{f_i(\mathbf{x}^{(k)})|_{x_j=x_j^{(k)}+\delta x_j^{(k)}} - f_i(\mathbf{x}^{(k)})|_{x_j=x_j^{(k)}}}{\delta x_j^{(k)}}$$

(2) 中心差分的偏导数近似为:

$$\mathbf{J}(i, j) = \frac{f_i(\mathbf{x}^{(k)})|_{x_j=x_j^{(k)}+\delta x_j^{(k)}} - f_i(\mathbf{x}^{(k)})|_{x_j=x_j^{(k)}-\delta x_j^{(k)}}}{2 \cdot \delta x_j^{(k)}}$$

其中 $\delta x_j^{(k)}$ 为扰动计算步长。虽然中心差分精度高，但其工作量是向前差分方法的两倍，

所以本文的计算中采用向前差分方法。

具体计算过程如下:

令:

$$f_i(\mathbf{x}_j^{(k)}) = f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)} + \delta x_{j+1}^{(k)}, x_j^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

将向前差分法代入非线性方程组进行相应计算，则有

$$\sum_{j=1}^n \frac{f_i(\mathbf{x}_j^{(k)})}{\delta x_j^{(k)}} \Delta x_j^{(k)} = \frac{1}{\delta x_j^{(k)}} \left(\delta x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^n \Delta x_s^{(k)} \right) f_i(\mathbf{x}^{(k)}) (i=1, 2, \dots, n)$$

经化简后得到

$$\sum_{j=1}^n f_i(\mathbf{x}_j^{(k)}) \frac{\Delta x_j^{(k)}}{\delta x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^n \Delta x_s^{(k)}} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}), i=1, 2, \dots, n$$

若令

$$t_j^{(k)} = \frac{\Delta x_j^{(k)}}{\delta x_j^{(k)} + \sum_{s=1}^n \Delta x_s^{(k)}}$$

则有

$$\sum_{j=1}^n f_i(\mathbf{x}_j^{(k)}) t_j^{(k)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}), i=1, 2, \dots, n$$

首先计算得 $f_i(\mathbf{x}_j^{(k)})$ 和 $f_i(\mathbf{x}^{(k)})$ ，再按照线性方程

$$\sum_{j=1}^n f_i(\mathbf{x}_j^{(k)}) t_j^{(k)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)})$$

求解得 $t_j^{(k)}$ ，然后计算 $\Delta x_j^{(k)}$ ，最后计算第 $k+1$ 次的迭代值 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 。

由于每个部件进口条件复杂多变，且各部件工作时相互之间耦合严重，因此得到的方程组的非线性性很严重。本文采用经典的牛顿迭代法求解它的根，其优点有:

- (1) 若雅克比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ 正定且初始点合适，算法将是二阶收敛的。
- (2) 对于正定二次函数，迭代一次就可以得到极小值点。
- 但是该牛顿方法也存在以下缺点：
- (1) 对多数问题算法不是整体收敛的；
- (2) 在每次迭代中需要计算雅克比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ ；
- (3) 每次迭代需要求解线性方程组 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ ，该方程组有可能是奇异或病态的， $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ 可能不是下降方向甚至无法计算。
- (4) 极有可能收敛于鞍点或极大值点。

针对缺点 (1) 和 (4) 进行改进，使用阻尼牛顿法。即在计算下一次的 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 时，用 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ 代替 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$ ，其中 λ 为步长调整因子，取值范围为 $0 < \lambda \leq 1$ ，在计算时只要选取的 λ 合适，可以明显改善计算结果不收敛的情况。

下面给出使用上述算法求解非线性方程组(42)得到的数值结果，见表 4.8。

表 4.8: 非线性方程组的未知量的数值结果

| 未知量 | 结果 | 未知量 | 结果 |
|------------|------------|----------|-------------|
| n_{cor} | 0.893721 | Z_{CH} | 0.638620 |
| n_H | 241.553682 | Z_{TH} | 0.689428 |
| Z_{CL} | 0.539500 | T_4^* | 1208.693557 |
| Z_{CDFS} | 0.668391 | Z_{TL} | 0.783599 |

五. 问题三的模型建立与求解

设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 1.5$ 的超音速巡航点，发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ 。问发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量为多少时，发动机的性能最优？当飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ ，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮

导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调（即不受附录 1 后混合器给定的内、外涵道面积值的约束）。

5.1 问题分析

计算发动机性能参数

1) 推力： $F = W_g c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9$ 。

其中 W_g 是发动机总燃气流量，包括进口空气流量和燃油流量之和， W_a 为总的空气流量， V 是飞行速度，可以根据 $V = Ma\sqrt{rRT}$ 求得，其中 T 是大气静温， p_9 是尾喷管出口静压， p_0 是大气环境静压， A_9 是尾喷管出口面积， r 为气体绝热指数， R 为气体常数。

2) 单位推力： $F_s = F / W_a$ 。

3) 耗油率： $sfc = \frac{3600W_f}{F}$ ，其中 W_f 是主燃烧室的燃油流量， F 是推力。

问题分析：为了让发动机达到性能最优，就是要在推力最大的情况下使得耗油率达到最小^[13,16]。问题中讨论当发动机 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_L 和喷管喉道面积 A_8 3 个量为多少时，发动机的性能最优，即就是将耗油量 sfc 表达成 α_{CDFS} 、 α_L 和的 A_8 函数，然后求函数 sfc 的最优值。按气体流动方向（图 1.3）开始计算，用已知量求解未知量，一步一步的求出 sfc 的表达式。

注：1) 空气、燃气的焓、熵公式见附录 1。

2) 气动函数 $q(\lambda)$ 、 $\pi(\lambda)$ 、 $\tau(\lambda)$ 、 $f(\lambda)$ 计算公式见附录 2。

5.2 问题三的部件级模型建立与求解

5.2.1 根据已知条件计算进气道数学模型

1) 计算标准大气条件下环境压力 p_0 （静压），环境温度 T_0 （静温）。

当高度 $H \leq 11\text{km}$ 时：

$$\begin{cases} p_0 = 1.01325 \times \left(1 - \frac{H}{44.308}\right)^{5.2553} \\ T_0 = 288.15 - 6.5 \times H \end{cases} \quad (43)$$

其中，高度 H 的单位为 km ，温度的单位为 K ，压力的单位为 bar 。

2) 进气道进口的总温总压：

$$\begin{cases} T_0^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) \\ p_0^* = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (44)$$

γ : 气体绝热指数，纯空气 $\gamma=1.4$ 。

3) 计算进气道总压恢复系数：

$$\begin{cases} Ma \leq 1: \sigma_i = 1.0 \\ Ma > 1: \sigma_i = 1.0 - 0.075(Ma - 1)^{1.35} \end{cases} \quad (45)$$

4) 计算进气道出口总温总压：

$$\begin{cases} T_1^* = T_0^* \\ p_1^* = p_0^* \cdot \sigma_i \end{cases} \quad (46)$$

将已知高度和马赫数带入(43)-(45)计算出出口总温总压(46)。

5.2.2 压气机部件的气动热力学模型机及计算

双涵道变循环发动机中三个压气机部件，分别是风扇、CDFS和高压压气机，这三个压气机部件采用同一种计算方法^[14,15]。

已知：

压气机进口总温 T_{in}^* 、总压 P_{in}^* 、压气机的压比函数值 zz 、物理转速 n 、压气机导叶角度 α 。

计算过程：

1) 计算压气机换算转速：

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad (47)$$

其中，风扇： $T_{in,d}^*=288.15$ ，CDFS： $T_{in,d}^*=428.56862609$ ，高压压气机： $T_{in,d}^* = 473.603961$ 。

T_{in}^* 为压气机进口总温。

2) 计算压气机增压比、效率和换算流量

压气机的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 w_c 分别是其换算转速和压比函数值及导叶角 α 的函数。

$$\begin{cases} pr_c = prc(n_{cor}, zz, \alpha) \\ \eta_c = \eta(n_{cor}, zz, \alpha) \\ W_c = W(n_{cor}, zz, \alpha) \end{cases} \quad (48)$$

压气机增压比、效率和换算流量的求法如下：

(1) 附录 4 分别给出了风扇、CDFS, 高压压气机的特性数据。利用线性插值法计算出压气机的换算转速为 n_{cor} 、压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

(2) 将 (1) 求的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入(49)修正后得到压气机的增压比、效率和换算流量：

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ W_c = C_W W_{c,map} (1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map} (1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \quad (49)$$

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇、CDFS、高压压气机

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01； CDFS 导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 35^\circ$ ，风扇

和高压压气机的导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ； 风扇： $\begin{cases} C_{pr} = 2.3894 \\ C_W = 0.4950 \\ C_\eta = 1.0684 \end{cases}$ ， CDFS：

$$\begin{cases} C_{pr} = 0.3059 \\ C_W = 0.1500 \\ C_\eta = 1.0999 \end{cases}, \text{ 高压压气机: } \begin{cases} C_{pr} = 0.9119 \\ C_W = 0.38462 \\ C_\eta = 1.0719 \end{cases}。$$

3) 计算压气机出口参数

$$\text{压气机出口总压: } p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c; \quad (50)$$

计算进口熵: $\psi_{in} = \psi(T_{in}^*)$, 进口焓: $h_{in} = h(T_{in}^*)$;

压气机出口理想熵: $\psi_{out,ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c$, 这里 $M=1$, R 是气体常数;

由压气机出口理想熵 $\psi_{out,ei} = \psi(T_{out,ei}^*)$, 计算压气机出口理想总温: $T_{out,ei}^*$;

计算压气机出口理想焓: $h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*)$;

根据公式 $\eta_c = \frac{h_{out,ei} - h_{in}}{h_{out} - h_{in}}$ 计算压气机出口焓 h_{out} ;

由压气机出口焓 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ 求压气机出口总温: T_{out}^* ; (51)

计算压气机流量:

$$W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \quad (52)$$

其中, 风扇: $p_{in,d}^* = 1.01325$, CDFS: $p_{in,d}^* = 3.5464$, 高压压气机: $p_{in,d}^* = 4.8860$;

1. **计算风扇:** 风扇的进口温度和压强就是进气道出口的总温总压, 即 $T_{in}^* = T_1^*$ 和 $p_{in}^* = p_1^*$ 。已知风扇导叶角度为 0, 根据(47)–(52)计算出风扇出口的总温总压及流量。

$$\text{风扇出口总压: } p_{out}^* = p_{21}^* = p_1^* \cdot pr_{c,FS} \quad (53)$$

$$\text{风扇出口总温: } T_{out}^* = T_{21}^* \quad (54)$$

$$\text{风扇出口流量: } W_a = W_{21} \quad (55)$$

2. **计算 CDFS:** 由题目已知, 采用单涵道模式, 选择活门面积设置为 0, 则 CDFS 的进口总温总压就是风扇的出口总温总压, 即 $T_{in}^* = T_{21}^*$ 和 $p_{in}^* = p_{21}^*$ 。设 CDFS 的导叶角度为 α_{CDFS} 则根据(2.2)进行线性插值得到关于 α_{CDFS} 的函数:

$$pr_{c,map,CDFS} = prc(n_{cor}, zz, \alpha_{CDFS})$$

$$\eta_{c,map,CDFS} = \eta(n_{cor}, zz, \alpha_{CDFS}) \quad W_{c,map,CDFS} = W(n_{cor}, zz, \alpha_{CDFS})$$

然后根据(49)得到:

$$pr_{c,CDFS} = C_{pr}(pr_{c,map,CDFS} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100} \alpha_{CDFS}) + 1 \quad (56)$$

$$W_{c,CDFS} = C_W W_{c,map,CDFS} (1 + \frac{k_W}{100} \alpha_{CDFS}) \quad (57)$$

$$\eta_{c,CDFS} = C_\eta \eta_{c,map,CDFS} (1 + \frac{k_\eta^2}{100} \alpha_{CDFS}) \quad (58)$$

1) 根据(50)得出口总压是关于 α_{CDFS} 的函数

$$p_{out}^* = p_{24}^* = p_{21}^* \cdot pr_{c,CDFS} \quad (59)$$

2) 出口温度是关于 α_{CDFS} 的函数 $T_{out}^* = T_{out}^*(\alpha_{CDFS}) = T_{24}^*$

进口熵: $\psi_{in} = \psi(T_{21}^*)$, 进口焓: $h_{in} = h(T_{21}^*)$

出口理想熵: $\psi_{out,ei} = \psi(T_{21}^*) + R \ln pr_{c,CDFS} = \psi(T_{out,ei}^*)$,

利用二分法解 $\psi(T_{21}^*) + R \ln pr_{c,CDFS} - \psi(T_{out,ei}^*) = 0$, 得:

$$T_{out,ei}^* = \psi_{CDFS}^{-1}(\psi(T_{21}^*) + R \ln pr_{c,CDFS}) \quad (60)$$

出口理想焓: $h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*)$

出口焓: $h_{out} = \frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{21}^*)}{\eta_{c,CDFS}} + h(T_{21}^*) = h(T_{out}^*)$,

利用二分法解 $\frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{21}^*)}{\eta_{c,CDFS}} + h(T_{21}^*) - h(T_{out}^*) = 0$, 得

$$T_{out}^* = h_{CDFS}^{-1}\left(\frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{21}^*)}{\eta_{c,CDFS}} + h(T_{21}^*)\right) = T_{24}^* \quad (61)$$

2) 出口流量是关于 α_{CDFS} 的函数

$$W_a = W_a(\alpha_{CDFS}) = W_{c,CDFS} \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{21}^*}} \cdot \frac{p_{21}^*}{p_{in,d}^*} = W_{24} \quad (62)$$

3. 计算高压压气机: 气体从 CDFS 出来分流进入高压压气机和主外涵道。设总涵道比为 f ,

总外涵道空气流量为 W_w , 内涵道空气流量为 W_n , 则 $f = \frac{W_w}{W_n}$ 。单涵道模式下, 总外涵道

空气流量就等于主外涵道空气流量, 而 CDFS 出口流量 $W_{24} = W_w + W_n$, 所以主外涵道的空气流量:

$$W_w = \frac{f \cdot W_{24}}{1 + f} = W_{15} \quad (63)$$

CDFS 出口的总温总压就是高压压气机和主外涵道的进口总温总压, 即高压压气机 $T_{in}^* = T_{25}^* = T_{24}^*$ 和 $p_{in}^* = p_{25}^* = p_{24}^*$, 主外涵道 $T_{in}^* = T_{15}^* = T_{24}^*$ 和 $p_{in}^* = p_{15}^* = p_{24}^*$ 。已知导叶角度为 0, 其计算方法与风扇相同, 根据 (49)–(55) 计算出高压压气机出口的总温总压及流量。

1) 高压压气机出口总压:

$$p_{out}^* = p_3^* = p_{25}^* \cdot pr_c = p_{24}^* \cdot pr_{c,YQJ} \quad (64)$$

2) 高压压气机出口总温: $T_{out}^* = T_3^*$

解法与 CDFS 相同:

$$T_{out,ei}^* = \psi_{YQJ}^{-1}(\psi(T_{24}^*) + R \ln pr_{c,YQJ}) \quad (65)$$

$$T_{out}^* = h_{YQJ}^{-1}\left(\frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{24}^*)}{\eta_{c,YQJ}} + h(T_{24}^*)\right) = T_3^* \quad (66)$$

3) 高压压气机出口流量:

$$W_a = W_{c,YQJ} \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{24}^*}} \cdot \frac{p_{24}^*}{p_{in,d}^*} = W_3 \quad (67)$$

5.2.3 主燃烧室部件的气动热力学模型及计算

已知: 主燃烧室进口总温总压及流量就是高压压气机出口总温总压及流量, 即 $T_{3in}^* = T_3^*$ 、

总压 $p_{3in}^* = p_3^*$ 、空气流量 $W_{a3} = W_3$ 、主燃烧室出口温度 T_4^* 。

计算过程:

$$1) \text{ 根据公式 } f_b = \frac{h_4 - h_3}{\xi_b H_u + h_3} = \frac{h(T_4^*) - h(T_3^*)}{\xi_b H_u + h(T_3^*)} \quad (68)$$

求出主燃烧室出口油气比, 其中, h_3 和 h_4 分别主燃烧室进出口焓, 燃烧效率 $\xi_b = 0.99$,

燃油热值 $H_u = 42900000$;

$$2) \text{ 燃油流量 } W_f = W_{a3} f_b = W_3 f_b \quad (69)$$

$$3) \text{ 出口总压 } p_4^* = p_{3in}^* \sigma_b = p_3^* \sigma_b, \quad (70)$$

主燃烧室总压恢复系数 $\sigma_b = 0.98$ 。

$$4) \text{ 出口流量 } W_4 = W_f + W_3 = W_3(1 + f_b) \quad (71)$$

5.2.4 涡轮部件的气动热力学数学模型及计算

对于涡轮部分, 我们根据气体流动方向先计算高压涡轮, 然后计算低压涡轮。已知: 涡轮进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、涡轮的压比函数值 zz 、物理转速 n 、涡轮导叶角度 α 。

计算过程

1) 求涡轮换算转速

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad (72)$$

其中，高压涡轮： $T_{in,d}^*=1850$ ，低压涡轮： $T_{in,d}^*=1.5405e+003$ 。

涡轮的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c 分别是其换算转速和压比函数值及导叶角 α 的函数。

$$\begin{cases} pr_c = pr_c(n_{cor}, zz, \alpha) \\ \eta_c = \eta_c(n_{cor}, zz, \alpha) \\ W_c = W_c(n_{cor}, zz, \alpha) \end{cases} \quad (73)$$

2) 涡轮的增压比、效率和换算流量的求法如下：

(1) 附录 4 分别给出了高压涡轮、低压涡轮的特性数据。利用线性插值法计算出涡轮的换算转速为 n_{cor} 、压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

(2) 将 (1) 求的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入 (74) 修正后得到涡轮的增压比、效率和换算流量：

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ W_c = C_W W_{c,map}(1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map}(1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \quad (74)$$

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是涡轮增压比、效率和换算流量的修正系数。高压涡轮、低压涡轮

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01；高、低压涡轮导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ；

$$\text{高压涡轮: } \begin{cases} C_{pr} = 1.5342 \\ C_W = 13.2121 \\ C_\eta = 1.0121 \end{cases}, \text{ 低压涡轮: } \begin{cases} C_{pr} = 0.7902 \\ C_W = 0.3881 \\ C_\eta = 1.0061 \end{cases}。$$

3) 根据涡轮换算流量计算涡轮流量：

$$W_g = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \quad (75)$$

其中，高压涡轮： $p_{in,d}^*=28.7297$ ，低压涡轮： $p_{in,d}^*=11.3371$ 。

$$4) \text{ 涡轮出口总压 } p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c; \quad (76)$$

5) 涡轮出口总温 T_{out}^* 根据下面公式 (77) 求出。

$$pr_c = \left[1 - \left(1 - \frac{T_{out}^*}{T_{in}^*} \right) / \eta_c \right]^{-\overline{CP}/R} \quad (77)$$

其中：高压涡轮平均等压比热 $\overline{CP}=1.2988\text{e}+003$ ，低压涡轮平均等压比热 $\overline{CP}=1.2745\text{e}+003$ ， R 为气体常数。

6) 求涡轮进口焓 $h_{in} = h(T_{in}^*, f_b)$ ，其中 f_b 为涡轮进口油气比；

7) 求涡轮出口焓 $h_{out} = h(T_{out}^*, f_b)$ ；

8) 涡轮功和功率：

$$\begin{cases} l_T = h_{in} - h_{out} \\ N_T = W_g \cdot l_T \eta_m \end{cases} \quad (78)$$

其中， $\eta_m=0.99$ 为涡轮机械效率。

1. 计算高压涡轮：高压涡轮的进口总温总压等于主燃烧室的出口总温总压，即 $T_{41}^* = T_4^*$ 和

$p_{41}^* = p_4^*$ ，由已知得高压涡轮导叶角度为 0。根据 (73) 利用线性插值得 $pr_{c,map,H}$ 、 $W_{c,map,H}$

和 $\eta_{c,map,H}$ 。代入 (74) 得 pr_{cH} 、 W_{cH} 和 η_{cH} ，再根据 (75)–(77) 计算出出口参数：

高压涡轮出口流量：

$$W_g = W_{45} = W_{c,H} \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_4^*}} \cdot \frac{p_4^*}{p_{in,d}^*} \quad (79)$$

高压涡轮出口总压：

$$p_{out}^* = p_{45}^* = p_{in}^* \cdot pr_{cH} = p_4^* \cdot pr_{cH} \quad (80)$$

高压涡轮出口总温：

$$T_{out}^* = T_{45}^* = T_4^* \left[1 - (1 - pr_{cH}^{-\frac{R}{\overline{CP}}}) \eta_{cH} \right] \quad (81)$$

2. 计算低压涡轮：低压涡轮的进口总温总压等于高压涡轮出口总温总压，即 $T_{44}^* = T_{45}^*$ 和

$p_{44}^* = p_{45}^*$ 。设低压涡轮导叶角度 α_L ，则根据 (73) 进行线性插值得到关于 α_L 的函数：

$$pr_{c,map,L} = prc(n_{cor}, \mathcal{Z}\mathcal{Z}, \alpha_L)$$

$$\eta_{c,map,L} = \eta(n_{cor}, \mathcal{Z}\mathcal{Z}, \alpha_L)$$

$$W_{c,map,L} = W(n_{cor}, \alpha_L)$$

然后根据 (74) 得到:

$$pr_{cL} = C_{pr}(pr_{c,map,L} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha_L) + 1 \quad (82)$$

$$W_{cL} = C_W W_{c,map,L}(1 + \frac{k_W}{100}\alpha_L) \quad (83)$$

$$\eta_{cL} = C_\eta \eta_{c,map,L}(1 + \frac{k_\eta}{100}\alpha_L) \quad (84)$$

再根据 (75)–(77) 计算出口参数:

低压涡轮出口流量是关于 α_L 的函数:

$$W_g = W_g(\alpha_L) = W_{cL} \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{45}^*}} \cdot \frac{p_{45}^*}{p_{in,d}^*} = W_5 \quad (85)$$

低压涡轮出口总压是 α_L 的函数:

$$p_{out}^* = p_5^* = p_{in}^* \cdot pr_{cH} = p_{45}^* \cdot pr_{cL} \quad (86)$$

低压涡轮出口总温是 α_L 的函数:

$$T_{out}^* = T_5^* = T_{45}^* \left[1 - (1 - pr_{cL}^{\frac{R}{CP}}) \eta_{cL} \right] \quad (87)$$

5.2.5 后混合器部件的气动热力学数学模型及计算

外涵气流是 CDFS 出口流量分流进入主外涵道的气流经过涵道到达的, 内涵气流是低压涡轮出口气流。

已知: 混合器两股参混气流参混前的总温、总压、流量、面积。

计算过程:

1) 内涵气流根据流量公式 $W_{g61} = k_m \frac{p_{61}^*}{\sqrt{T_{61}^*}} A_{61} q(\lambda_{61})$ 求出 $q(\lambda_{61})$ 和 λ_{61} , 其中内涵出口

面积 $A_{61} = 5.3061e+003$, p_{61}^* 为内涵出口总压, T_{61}^* 为内涵出口总温;

2) 外涵气流根据流量公式 $W_{g62} = k_m \frac{p_{62}^*}{\sqrt{T_{62}^*}} A_{62} q(\lambda_{62})$ 求出 $q(\lambda_{62})$ 和 λ_{62} , 其中外涵出口

面积 $A_{62} = 2.3212e+004$, p_{62}^* 为外涵出口总压, T_{62}^* 为外涵出口总温;

3) 计算内涵静压 $p_{61} = p_{61}^* \cdot \pi(\lambda_{61})$ ，计算外涵静压 $p_{62} = p_{62}^* \cdot \pi(\lambda_{62})$ ；

4) 由下列公式(88)求出混合器出口总温 T_6^* 、总压 p_6^* 、流量 W_{g6} 。 T_6^* 是由(88)的第二个公式求出的。

$$\begin{cases} W_{g61} + W_{g62} = W_{g6} \\ W_{g61}h_{61} + W_{g62}h_{62} = W_{g6}h_6 \\ p_{61}^*f(\lambda_{61})A_{61} + p_{62}^*f(\lambda_{62})A_{62} = p_6^*f(\lambda_6)(A_{61} + A_{62}) \\ W_{g6} = k_m \frac{p_6^*}{\sqrt{T_6^*}} A_6 q(\lambda_6) \end{cases} \quad (88)$$

其中： $A_6 = A_{61} + A_{62}$ ， h_6 为后混合器出口焓， h_{61} 为后混合器内涵出口焓， h_{62} 为后混合器外涵出口焓， W_{g61} 为后混合器内涵出口流量， W_{g62} 为后混合器外涵出口流量，气动函数 $f(\lambda)$ 、 $q(\lambda)$ 的定义见附录1。

1. 计算外涵气流： 外涵气流经过涵道，涵道进口总温总压等于 CDFS 出口总温总压，涵道进口总流量等于 CDFS 出口流量的主外涵道分流量，即 $T_{in}^* = T_{15}^*$ 、 $p_{in}^* = p_{15}^*$ 和 $W_{a,in} = W_{15}$ 。根据以下涵道计算公式计算涵道出口参数。

$$\begin{cases} T_{out}^* = T_{in}^* \\ p_{out}^* = p_{in}^* \sigma_{duct} \text{ , 其中总压恢复系数 } \sigma_{duct} = 0.98. \\ W_{a,out} = W_{a,in} \end{cases}$$

1) 外涵道出口总温： $T_{out}^* = T_{62}^* = T_{15}^* = T_{24}^*$

外涵道出口总压： $p_{out}^* = p_{62}^* = p_{in}^* \sigma_{duct} = p_{15}^* \sigma_{duct} = p_{24}^* \sigma_{duct}$

外涵道出口流量： $W_{a,out} = W_{62} = W_{a,in} = W_{15} = W_{24}$

2) 后混合器外涵气流根据流量公式求出 $q(\lambda_{62}) = \frac{W_{24} \sqrt{T_{24}^*}}{k_m p_{24}^* \sigma_{duct} A_{62}}$ ，

其中外涵出口面积 $A_{62} = 2.3212e+004$ ， p_{62}^* 为外涵出口总压， T_{62}^* 为外涵出口总温；

利用二分法解 $q(\lambda_{62}) - \frac{W_{24} \sqrt{T_{24}^*}}{k_m p_{24}^* \sigma_{duct} A_{62}} = 0$ ，得出

$$\lambda_{62} = q^{-1} \left(\frac{W_{24} \sqrt{T_{24}^*}}{k_m p_{24}^* \sigma_{duct} A_{62}} \right) \quad (89)$$

$$3) \text{ 计算外涵静压 } p_{62} = p_{62}^* \cdot \pi(\lambda_{62}) = p_{24}^* \cdot \sigma_{duct} \cdot \pi(\lambda_{62}) \quad (90)$$

2. 计算内涵气流：内涵气流进口总温总压及流量等于低压涡轮出口气流总温总压及流量，即 $T_{61}^* = T_5^*$ 、 $p_{61}^* = p_5^*$ 和 $W_{61} = W_5$ 。

$$1) \text{ 后混合器内涵气流根据流量公式求出 } q(\lambda_{61}) = \frac{W_5 \sqrt{T_5^*}}{k_m p_5^* A_{61}},$$

其中内涵出口面积 $A_{61} = 5.3061\text{e}+003$ ， p_{61}^* 为内涵出口总压， T_{61}^* 为内涵出口总温；

$$\text{利用二分法解 } q(\lambda_{61}) - \frac{W_5 \sqrt{T_{61}^*}}{k_m p_5^* A_{61}} = 0, \text{ 得出 } \lambda_{61} = q^{-1}\left(\frac{W_5 \sqrt{T_{61}^*}}{k_m p_5^* A_{61}}\right) \quad (90)$$

$$2) \text{ 计算内涵静压 } p_{61} = p_{61}^* \cdot \pi(\lambda_{61}) = p_5^* \cdot \pi(\lambda_{61}) \quad (91)$$

3. 计算后混合器出口参数：根据 (5.1) 求出

后混合器出口总温 T_6^* ：

$$h_6 = \frac{W_{61} h_{61} + W_{62} h_{62}}{W_6} = \frac{W_5 h(T_5^*) + W_{24} h(T_{24}^*)}{W_5 + W_{24}}$$

$$\text{利用二分法求解 } h(T_6^*) - \frac{W_5 h(T_5^*) + W_{24} h(T_{24}^*)}{W_5 + W_{24}} = 0, \text{ 得}$$

$$T_6^* = h_H^{-1}\left(\frac{W_5 h(T_5^*) + W_{24} h(T_{24}^*)}{W_5 + W_{24}}\right) \quad (92)$$

$$\text{后混合器总压: } p_6^* = \frac{p_{61}^* f(\lambda_{61}) + p_{62}^* f(\lambda_{62})}{f(\lambda_6)(A_{61} + A_{62})} = \frac{p_5^* f(\lambda_{61}) + p_{24}^* f(\lambda_{62})}{f(\lambda_6)(A_{61} + A_{62})} \quad (93)$$

$$\text{后混合器流量: } W_{g6} = W_6 = W_5 + W_{24} \quad (94)$$

5.2.6 尾喷管部件的气动热力学模型及计算

本文采用拉瓦尔（收敛-扩张）尾喷管（如图5.1所示）进行计算。

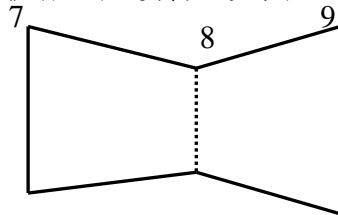


图5.1 拉瓦尔尾喷管示意图

提示：在拉瓦尔尾喷管中，任意截面总温、总压、流量均不变，则由流量公式可以得到：

$$q(\lambda)A = \text{const}$$

因此在已知任意截面的面积或者 λ ，就可以求出该截面的参数。

拉瓦尔尾喷管有三种工作状态：临界、亚临界和超临界。当处于临界时，尾喷管喉部 $Ma=1$ ，喉部之后气流变为超音速气流，尾喷管出口静压与大气压相等（完全膨胀）；处于超临界时，喉部 $Ma=1$ ，此时尾喷管出口面积会自动改变（增大）使尾喷管出口静压与大气压相等，使尾喷管变为临界状态，但尾喷管出口面积有最大限制，当到达最大限制值时，尾喷管出口静压不能与大气压相等，则通过 $q(\lambda)A = \text{const}$ 重新计算出口参数；处于亚临界时，喉部 $Ma < 1$ ，喉部之后不能加速到超音速。

后混合器出口总温总压及流量等于加力燃烧室的进口总温总压及流量，即 $T_{in}^* = T_6^*$ 、

$p_{in}^* = p_6^*$ 和 $W_{in} = W_6$ 。根据以下公式计算出加力燃烧室的出口参数

$$\begin{cases} P_{6out}^* = P_{6in}^* \cdot \sigma_6 \\ T_{6out}^* = T_{6in}^* \\ W_{g6out} = W_{g6in} \end{cases} \quad \sigma_6=1 \text{ 为总压恢复系数。}$$

加力燃烧室出口总温： $T_{out}^* = T_{64}^* = T_6^*$ ；

加力燃烧室出口总压： $p_{out}^* = p_{64}^* = p_6^*$ ；

加力燃烧室出口流量： $W_{out} = W_{64} = W_6$ ；

加力燃烧室出口的总温总压及流量就是尾喷管的进口总温总压及流量。即 $T_7^* = T_{64}^* = T_8^* = T_9^*$ 、 $p_7^* = p_{64}^* = p_8^* = p_9^*$ 和 $W_7 = W_{64} = W_8 = W_9$ 。

假设尾喷管始终处于临界或超临界状态，即速度系数 $\lambda_8=1$ 。

$$(1) \text{ 由流量公式 } W_{g8} = k_m \frac{p_8^*}{\sqrt{T_8^*}} A_8 q(\lambda_8) \text{ 计算出 } A_8 = \frac{W_{g8} \sqrt{T_8^*}}{k_m p_8^* q(\lambda_8)} = \frac{W_6 \sqrt{T_6^*}}{k_m p_6^* q(\lambda_8)}$$

$$(2) \quad p_9 = p_0, \text{ 计算出 } \pi(\lambda_9) = p_9 / p_9^*, \text{ 并求出 } \lambda_9 = \pi^{-1}(p_9 / p_9^*) = \pi^{-1}(p_0 / p_6^*)$$

$$(3) \text{ 由流量公式 } W_{g9} = k_m \frac{p_9^*}{\sqrt{T_9^*}} A_9 q(\lambda_9) \text{ 计算出 } A_9 = \frac{W_{g9} \sqrt{T_9^*}}{k_m p_9^* q(\lambda_9)} = \frac{W_6 \sqrt{T_6^*}}{k_m p_6^* q(\lambda_9)}$$

$$(4) \quad \frac{A_9}{A_8} > ar \text{ (这里 } ar=3 \text{)}, \text{ 则 } A_9 = 3A_8, \text{ 利用流量公式重新计算 } \lambda_9:$$

$$\text{由 } q(\lambda_9) = \frac{A_8 q(\lambda_8)}{A_9} = \frac{1}{3} q(\lambda_8), \text{ 解出 } \lambda_9 = q^{-1}\left(\frac{1}{3} q(\lambda_8)\right)$$

计算尾喷管出口静温 $T_9 = T_7^* \tau(\lambda_9) = T_6^* \tau(\lambda_9)$;

$$\text{尾喷管出口气流速度 } c_9 = \varphi_{nz} \sqrt{2(h_9^* - h_9)} = \varphi_{nz} \sqrt{2(h(T_6^*) - h(T_6^* \tau(\lambda_9)))}$$

其中: $\varphi_{nz} = 0.98$, 焓 h_9^* 和焓 h_9 分别由尾喷管出口总温和静温求出。

5.3 发动机的性能参数计算

由以上推导, 推力: $F = W_g c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9$ 可被表示成 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} , 低压涡轮导叶角度 α_L 和喷管喉道面积 A_8 的函数:

假设 $p_9 = p_0$ 则:

$$\begin{aligned} F &= W_g c_9 - W_a V = (W_f + W_a) c_9 - W_a V \\ &= W_3 (1 + f_b) c_9 - W_3 \cdot Ma \sqrt{rRT} \end{aligned}$$

其中: γ : 气体绝热指数 $\gamma=1.33$, R 为气体常数, $R=287.31 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, T 是大气静温。

$$c_9 = \varphi_{nz} \sqrt{2(h_9^* - h_9)} = \varphi_{nz} \sqrt{2(h(T_6^*) - h(T_6^* \tau(\lambda_9)))}$$

$$\lambda_9 = q^{-1} \left(\frac{A_8}{A_9} q(\lambda_8) \right) \quad \lambda_8 = 1$$

$$T_6^* = h_H^{-1} \left(\frac{W_5 h(T_5^*) + W_{24} h(T_{24}^*)}{W_5 + W_{24}} \right)$$

$$T_5^* = T_{45}^* \left[1 - (1 - pr_{cL}^{\frac{R}{CP}}) \eta_{cL} \right]$$

$$W_5 = W_5(\alpha_L) = W_{cL} \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{45}^*}} \cdot \frac{p_{45}^*}{p_{in,d}^*}$$

这里, $pr_{cL} = C_{pr} (pr_{c,map,L} - 1) (1 + \frac{k_{pr}}{100} \alpha_L) + 1$, $W_{cL} = C_W W_{c,map,L} (1 + \frac{k_W}{100} \alpha_L)$,

$\eta_{cL} = C_\eta \eta_{c,map,L} (1 + \frac{k_\eta^2}{100} \alpha_L)$ 是低压涡轮关于导叶角度 α_L 的线性插值函数, 并且 $\alpha_L \leq 1$ 。

$$p_{45}^* = p_{in}^* \cdot pr_{cH} = p_4^* \cdot pr_{cH}$$

$$T_{45}^* = T_4^* \left[1 - (1 - pr_{cH}^{\frac{-R}{CP}}) \eta_{cH} \right], \quad T_4^* \leq 2000$$

这里 pr_{cH} , η_{cH} 是高压涡轮线性插值得到的系数。

$$p_4^* = p_{3in}^* \sigma_b = p_3^* \sigma_b$$

$$f_b = \frac{h_4 - h_3}{\xi_b H_u + h_3} = \frac{h(T_4^*) - h(T_3^*)}{\xi_b H_u + h(T_3^*)}$$

$$p_3^* = p_{25}^* \cdot pr_c = p_{24}^* \cdot pr_{c,YQJ}$$

$$W_3 = W_{c,YQJ} \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{24}^*}} \cdot \frac{p_{24}^*}{p_{in,d}^*}$$

$$T_{out,ei}^* = \psi_{YQJ}^{-1}(\psi(T_{24}^*) + R \ln pr_{c,YQJ})$$

$$T_3^* = h_{YQJ}^{-1} \left(\frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{24}^*)}{\eta_{c,YQJ}} + h(T_{24}^*) \right)$$

这里 $W_{c,YQJ}$, $pr_{c,YQJ}$, $\eta_{c,YQJ}$ 是高压压气机线性插值得到的系数。

$$p_{24}^* = p_{21}^* \cdot pr_{c,CDFS}$$

$$T_{out,ei}^* = \psi_{CDFS}^{-1}(\psi(T_{21}^*) + R \ln pr_{c,CDFS})$$

$$T_{24}^* = h_{CDFS}^{-1} \left(\frac{h(T_{out,ei}^*) - h(T_{21}^*)}{\eta_{c,CDFS}} + h(T_{21}^*) \right)$$

这里 $pr_{c,CDFS}$, $\eta_{c,CDFS}$ 是 CDFS 关于导叶角度 α_{CDFS} 的线性插值函数, 并且 $\alpha_{CDFS} \leq 1$ 。

根据已知数据, 利用第一题程序计算得当飞行高度为 $H = 11km$, 马赫数为 $Ma = 1.5$ 时, 风扇的出口总温 T_{21}^* , 总压 p_{21}^* 。然后利用非线性规划约束优化方法编程计算得: 发动机性能最优时的 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量的值。具体结果见 5.4 节。

5.4 仿真结果

风扇的出口总温 T_{21}^* , 总压 p_{21}^* 根据已知数据, 利用第一题程序计算得:

| | | | |
|-----------|------------|-----------------------|-----------------------|
| 飞行高度 H=11 | 马赫数 Ma=1.5 | $T_{21}^* = 486.3799$ | $p_{21}^* = 3.052029$ |
|-----------|------------|-----------------------|-----------------------|

然后利用非线性规划约束优化问题编程解决（见附录程序）。

| | | | |
|---------------------------|----------------------|-----------------------|----------------|
| $\alpha_{CDFS} = 0^\circ$ | $\alpha_L = 0^\circ$ | $A_8 = 9.3522e + 003$ | $T_4^* = 1680$ |
|---------------------------|----------------------|-----------------------|----------------|

此时最优。

当发动机飞行高度 $H = 11km$ ，飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ ，发动机特性最优时，研究CDFS导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518e+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调。参考上题，将 Ma 离散，根据不同的 Ma 求出当发动机特性最优时，CDFS导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积的值，然后绘制曲线观察变化规律，如下图5.1-5.3。

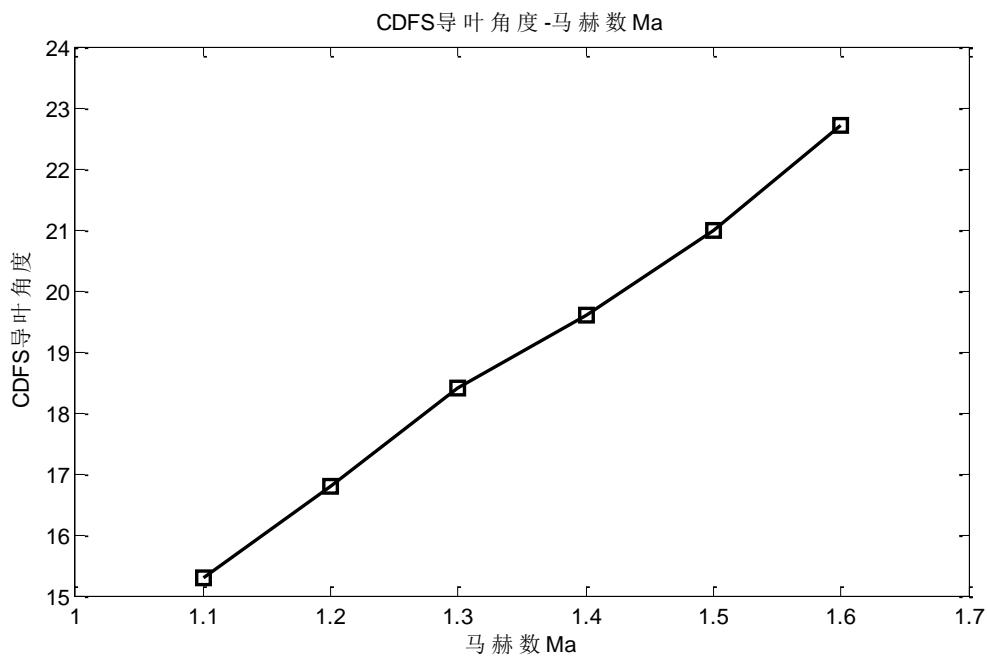


图5.1 CDFS导叶角度随马赫数的变化

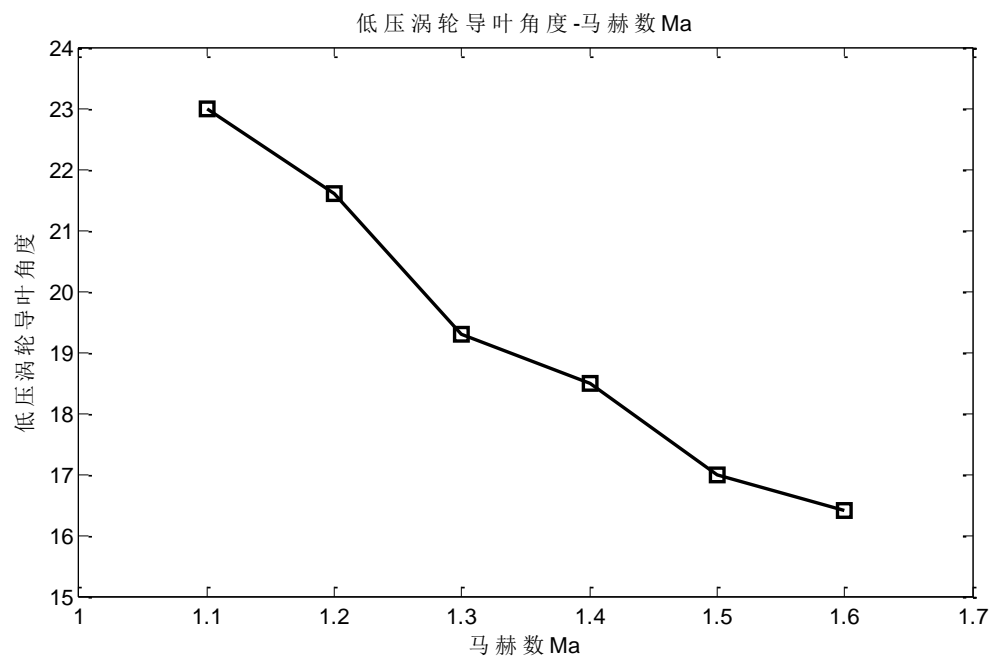


图5.2 低涡轮导叶角度随马赫数的变化

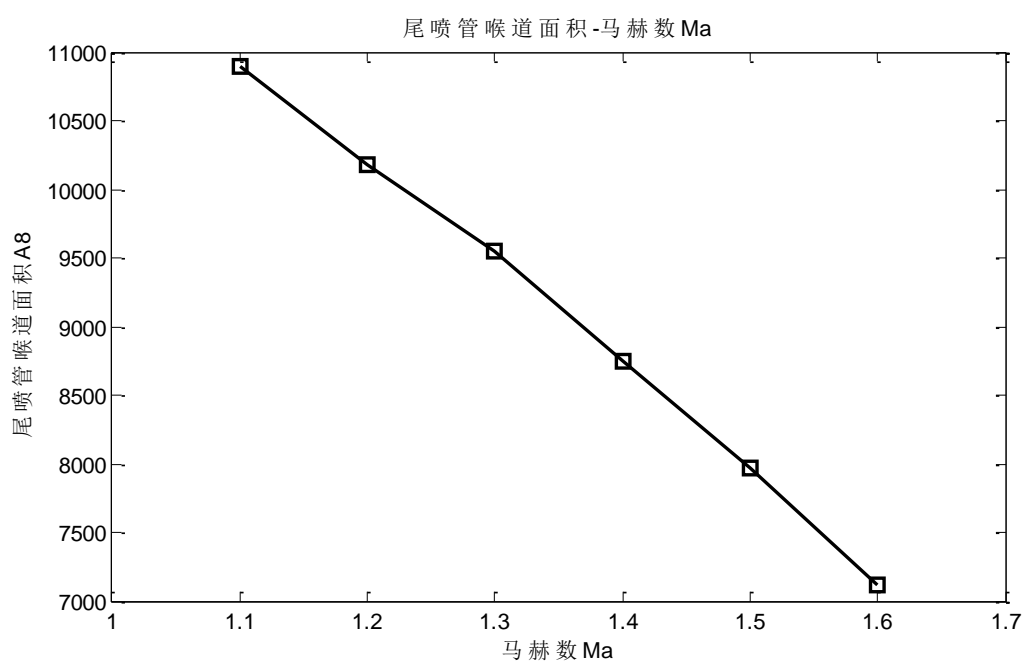


图5.3 尾喷管喉道面积随马赫数的变化

六. 总结与展望

6.1 模型的评价与推广

文中通过给出的各部件模型关系，建立了问题中所需的模型结构，并利用各种数值方法（如逐维线性插值、逐步搜索方法、二分法和非线性规划约束优化算法等）对模型进行数值求解，得到的数值结果基本符合实际规律，说明了所设计模型及其算法的实用性，从而可以假设这些数值方法对其他部件的模型或其他领域实际问题的计算同样有效，可以推广使用，这点留待以后验证。

6.2 模型存在的局限性

构造模型时进行了一定的条件假设，如假设在标准大气条件下，忽略高压压气机后的冷却气流等，所以在具体的实际问题中需要做更细致的考虑和推导，这些待以后进一步研究改进。

参考文献

- [1] 苟学中, 周文祥, 黄金泉. 变循环发动机部件级建模技术[J]. 航空动力学报, 2013, 28(1):104-111.
- [2] Laurence K, Loftin Jr. Toward a second generation supersonic transport[J]. Journal of Aircraft, 1974, 11(1): 3-9.
- [3] Czysz P, Glaser F C, LaFavor S A. Potential payoffs of variable geometry engines in fighter aircraft [J]. Journal of Aircraft, 1973, 10(6): 342-349.
- [4] Willis E A, Welliver A D. Variable cycle engines for supersonic cruising aircraft [R]. Palo Alto, California: AIAA/SAE 12th Joint Propulsion Conference, 1981.
- [5] 方昌德. 变循环发动机. 燃气涡轮试验与研究, 2004, 17(3): 1- 5.
- [6] 方昌德. 变循环发动机及其关键技术. 国际航空, 2004(7):49- 51.
- [7] 强文辉, 孟庆明, 郑铁军. 线性差值方法在某型航空发动机模型控制器设计中的应用[J]. 航空发动机, 2005, 31(4):44-45.
- [8] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] 姚祖明. 基于构件的航空发动机建模技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
- [10] 胡骏, 吴铁鹰, 曹人靖. 航空叶片机原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [11] 周文祥. 航空发动机及控制系统建模与面向对象的方针研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.
- [12] 袁亚湘, 孙文瑜著, 最优化理论与方法, 北京, 科学出版社, 1997: 94-128.
- [13] 刘增文, 王占学, 黄红超, 蔡元虎. 变循环发动机性能数值模拟[J]. 航空动力学报, 2010, 25(6):1310-1315.
- [14] 刘洪波, 王荣桥. 变循环发动机总体结构和模式转换机构研究[J]. 航空发动机, 2008, 34(3):1-5.
- [15] 王元, 李秋红, 黄向华. 变循环发动机建模技术研究[J]. 航空动力学报, 2013, 28(4):954-960.
- [16] 窦建平, 面向对象的航空发动机建模与仿真[D], 南京, 南京航空航天大学, 2005.

附录 1 工质热物理性质参数

空气、纯燃气、燃气的焓和熵（其中 T 为温度， f 为油气比）

空气的焓

$$\begin{aligned} Hair = & -0.30183674 \times 10^6 + 0.10489652 \times 10^4 \times T - 0.23284057 \times T^2 + 0.45288431 \times 10^{-3} \times T^3 \\ & - 0.31308477 \times 10^{-6} \times T^4 + 0.11341362 \times 10^{-9} \times T^5 - 0.21298087 \times 10^{-13} \times T^6 \\ & + 0.16363600 \times 10^{-17} \times T^7 \end{aligned}$$

纯燃气的焓

$$\begin{aligned} Hst = & -0.11152575 \times 10^6 - 0.31020206 \times 10^3 \times T + 2.9961197 \times T^2 - 0.27934788 \times 10^{-3} \times T^3 \\ & + 0.18746407 \times 10^{-5} \times T^4 - 0.73499597 \times 10^{-9} \times T^5 + 0.15062602 \times 10^{-12} \times T^6 - 0.12510984 \times 10^{-16} \times T^7 \end{aligned}$$

燃气的焓

$$Hgas = Hair + \frac{f}{1+f} \times Hst$$

其中 f 为油气比。

空气的熵

$$\begin{aligned} Sair = & (0.10489652 \times 10^4) \times \ln(T \times 10^{-3}) + 0.80558643 \times 10^4 + \\ & (-465.6811 \times T + 0.6793 \times T^2 - 4.1745 \times 10^{-4} \times T^3 + 1.4177 \times 10^{-7} \times T^4 \\ & - 2.5558 \times 10^{-11} \times T^5 + 2.2909 \times 10^{-15} \times T^6) \times 10^{-3} \end{aligned}$$

纯燃气的熵

$$\begin{aligned} Sst = & (-0.31020206 \times 10^3) \times \ln(T \times 10^{-3}) - 0.17800633 \times 10^4 + 10^{-3} \times (5.9922 \times 10^3 \times T \\ & - 4.1902 \times T^2 + 0.0025 \times T^3 - 9.1874 \times 10^{-7} \times T^4 \\ & + 1.8075 \times 10^{-10} \times T^5 - 1.4596 \times 10^{-14} \times T^6) \end{aligned}$$

燃气的熵

$$Sgas = Sair + \frac{f}{1+f} \times Sst$$

其中 f 为油气比。

附录2 气动函数及其他常用公式

1、气动函数

$$\tau(\lambda) = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$$

$$\pi(\lambda) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$q(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \lambda \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$f(\lambda) = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} q(\lambda) z(\lambda)$$

$$Z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

其中, λ 表示速度系数, $\lambda > 0$ 。

$$\lambda \text{ 与马赫数 } Ma \text{ 的关系为: } \lambda^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} Ma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2}。$$

γ : 气体绝热指数, 纯空气 $\gamma=1.4$, 燃气 $\gamma=1.33$ 。

2、气体常数 R

计算方法: R 与空气的湿度和油气比有关。

一般用如下方法计算湿燃气的 R :

$$bm = 28.9644(1 - 0.0308764f);$$

$$mg = (1 + f + d) / ((1 + f) / bm + d / 18.01534);$$

$$R = 8314.298 / mg ;$$

其中, f 为湿燃气的油气比, d 为湿度。

一般地, 取湿度为0, 油气比 f 为燃气中燃油流量和空气流量的比值。

简化计算: 在进气道、风扇、压气机、CDFS和各个涵道中, $f = 0$, 因此在这几个部件中, R

一般取 $287\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$; 在燃烧室之后的部件中, R 可以取 $287.31\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

3、流量系数 k_m

流量系数 k_m 在流量公式 $W_a = k_m \frac{P^*}{\sqrt{T^*}} A q(\lambda)$ 中用到, $k_m = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$, 简化计算 γ, R 取

定值。

空气:

$$\gamma = 1.4, R = 287$$

$$k_m = 0.0404$$

燃气:

$$\gamma = 1.33, R = 287.31$$

$$k_m = 0.0397$$

基本概念

压气机增压比定义为该级出口气流的总压与进口气流的总压之比。

压气机效率定义为在相同条件下, 达到同样的增压比时, 使气流经历等绝热压缩过程消耗的功与实际压缩过程所消耗的功之比。

压气机压比函数值 设压气机某换算转速所对应的增压比数据 (见附录 4) 的最大值为 pr_{\max} , 最小值为 pr_{\min} , 则定义该换算转速对应的压气机增压比 pr 的压比函数值 zz 为:

$$zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}}, \text{即压气机增压比的标准化变量。}$$

涡轮压比函数值 设涡轮某换算转速所对应的落压比数据 (见附录 4) 的最大值为 pr_{\max} , 最小值为 pr_{\min} , 则定义该换算转速对应的涡轮落压比 pr 的压比函数值 zz 为: $zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}}$, 即涡轮落压比的标准化变量。

$$\text{总涵道比} = \frac{\text{总外涵道空气流量}}{\text{内涵道空气流量}}$$

$$\text{前涵道比} = \frac{\text{副外涵道比空气流量}}{\text{CDFS空气流量}}$$

$$\text{静温} = \text{总温} \times \tau(\lambda)$$

$$\text{静压} = \text{总压} \times \pi(\lambda)$$

涡轮风扇发动机。涡轮风扇发动机简称为涡扇发动机。涡扇发动机的突出特点是气体在发动机中的流动部分地或全部地经历内, 外两个通道, 又称内涵和内涵。其中流过外涵的空气流量与流过内涵的空气流量之比称为涵道比。在涡扇发动机中, 空气经进气系统首先进入风扇 (又称为低压压气机) 增压, 而后分成内、外两股气流。外股气流进入外涵道; 内股气流进入内涵道, 经历与涡喷发动机类似的过程。

涡轮喷气发动机简称涡喷发动机。发动机工作时, 外界空气经进气系统引入发动机, 经压气机增压后进入燃烧室, 在燃烧室中与供给的燃料混合并燃烧, 形成高温高压的燃气, 燃气在涡轮中膨胀, 推动涡轮旋转, 从而驱动压气机工作。燃气发生器燃气的可用能量全部用于在排气系统中增加燃气的动能, 使燃气以很高的速度排出, 以产生推力。

在涡轮后带有复燃加力燃烧室的涡轮喷气发动机称为复燃加力式涡轮喷气式发动机, 简称加力涡喷发动机。