

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题目 基于卫星无源探测的空间飞行器主动段的 轨道估计与误差分析

摘 要

本文通过坐标转换、力学分析、拟合、最小二乘、微分方程的数值解法、误差分析等方法，建立了基于卫星无源探测的空间飞行器在主动段的交汇定轨优化模型和运动方程模型，对卫星的系统误差、飞行器轨道进行了估计。

针对问题一：直接通过卫星的初始状态和运动方程，应用微分方程的数值解法估计了卫星的轨道，并探讨了进行迭代时时间步长的稳定域。

针对问题二：首先对 06 号和 09 号卫星进行了时间配准，根据坐标转换，建立了双星交汇定位的优化模型，得到了飞行器的初步轨道；其次通过力学分析，建立了飞行器的质量模型，通过交汇定轨结果，对飞行器质量进行了多项式和指数拟合；然后结合质量模型、喷气速率的假定和飞行器运动方程建立了微分方程模型；最后通过数值求解，得到了所求的采样点的轨道和速率，并作了误差分析。

针对问题三：首先根据误差分析理论对系统误差的存在性进行了判定；其次借助系统误差含义，建立了 α, β 的真值和观测值的转换公式；然后将问题二中得到飞行器计算轨道视为基准轨道，通过坐标转换，得出它在测试坐标系下的坐标；最后通过系统误差的转换公式，建立了最小二乘优化模型，用 Matlab 求解得到了 06 号和 09 号卫星的系统误差，并通过误差修正了原基础坐标，对轨道重新估计，误差平方和达到 7.5821 米。

针对问题四：对单星、单飞行器定轨情况，提出了一个合理的假定，建立了优化模型，并对 01 号飞行器的轨道进行了估计，得到了相应结果；对多星、单飞行器定轨情况，提出了一个定轨的最小二乘优化模型；对多星、多飞行器的定轨情况提出了首先要研究的两个难点，才能联合进行系统误差估计。

关键词：卫星 飞行器 轨道 系统误差 参数估计

1、问题重述

对具有敌意的空间飞行器实施监控对于维护国家安全具有重要的战略意义。卫星是当今探测空间飞行器发射与轨道参数的重要平台。

采用红外光学无源探测器的观测卫星，只接收目标的红外辐射信息，可定向但不能测距。红外技术对火箭尾部喷焰的高度敏感性，但易受气候影响与云层干扰。观测误差会影响对空间飞行器轨道参数的估计，进而影响对飞行器类型、飞行意图的判断。分析观测误差（包括随机误差和系统误差）如何影响飞行器轨道估计精度具有重要意义。

本文拟解决以下问题：

- (1) 根据附件数据和观测卫星的简化运动方程，计算出观测卫星在任意时刻的位置。
- (2) 建立观测坐标系与基础坐标系之间的坐标转换关系，选取适当的喷气速度与火箭质量模型，根据逐点交汇定位思路，实现对飞行器运行轨道估计。
- (3) 实现对飞行器轨道和系统误差的估计。
- (4) 利用单星或者多星观测数据进行飞行器轨道估计和误差分析。

2、问题假设与符号说明

2.1 问题假设

1. 问题 1、2 中只考虑随机误差，认为测试数据不含系统误差；但在问题 3 和 4 中认为同样的测试数据含有系统误差。
2. 在重力斜飞段后期，视重力加速度为定值；
3. 在重力斜飞段后期，空间飞行器所受外力仅为重力和推力，不考虑空气阻力；
4. 作用于空间飞行器上的外力都通过质心，即不考虑飞行器在飞行过程中绕其质心的转动；
5. 不考虑空间飞行器的质心因燃料消耗而产生的偏移；
6. 假设测试数据的随机误差是零均值的正态分布。

2.2 符号说明

给出用到的部分符号说明，其余见正文：

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$	空间飞行器在 t 时刻基础坐标系下的位置矢量
$\vec{v}_r(t)$	燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度的逆矢量
$m(t)$	飞行器瞬时质量
(x_s, y_s, z_s)	空间飞行器在观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 中的坐标
(x_c, y_c, z_c)	空间飞行器在基础坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 中的坐标
(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})	i 号观测卫星在基础坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 中的坐标
$(x_{js}^{(i)}, y_{js}^{(i)}, z_{js}^{(i)})$	i 号观测卫星对 j 号空间飞行器在观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 中的坐标
$d\alpha, d\beta$	观测值 α, β 的平移系统误差
$d\theta$	观测值 α, β 的旋转系统误差

3、问题分析

题目要求对基于卫星无源探测的空间飞行器主动段轨道进行轨道参数估计与误差分析。

问题一要求计算特定时刻观测卫星的位置。由于观测卫星在基础坐标系下的简化运动方程和初始条件已给出，可直接通过微分方程的数值解法计算出观测卫星在任意时刻的位置。因数值计算的迭代步长会影响计算精度，故需给出较优步长或步长区间。

问题二要求在仅考虑随机误差情况下对 0 号空间飞行器的轨道进行估计，给出各采样点的位置、速度和估计残差，以及飞行器的位置和速度对时间的函数曲线。首先，在所给数据中，两颗卫星的观测时刻不同步，因此建模前需对观测数据进行同步处理。其次，由于飞行器运动方程是以基础坐标系为参照，而所给观测数据在卫星观测坐标系下测量所得，故首先要建立观测坐标系与基础坐标系之间的转换关系。然后，将 06 号和 09 号卫星在同一时刻对 0 号飞行器的观测值转换成基础坐标系下的坐标值，两组坐标值理应相等，此即交汇定位原理，据此列出方程组，获得观测数据 α, β 与飞行器在基础坐标系下的坐标关系，估计出大致轨道曲线。在飞行器运动方程中，喷气速度 \vec{v}_j 与火箭质量 $m(t)$ 未知，需要建立它们的表示模型。喷气速度大小一般较稳定，可视为定值。因燃料消耗，火箭质量递减，可选用单调递减的质量函数，函数参数由大致的轨道进行估计。至此，可根据飞行器运动方程与初始参数，进行数值计算，从而计算出飞行器的较精确的轨道。由估计轨道与计算轨道误差较小时，实现对火箭质量模型参数与喷气速度值的优选。至此，即可完成题目所有要求。

问题三要求在同时考虑系统误差的条件下，实现对空间飞行器轨道和系统误差估计。依题意，只考虑由各种系统误差最终折合而成的三轴指向误差。在二维观测数据平面上，三轴指向误差表现为两个平移误差和一个旋转误差。根据假设 1 认为在该问题中卫星观测数据中包含系统误差，将问题二中由飞行器运动方程得到估计轨道视为其基准轨道，通过空间坐标转换关系，将其轨道空间坐标转换成卫星观测坐标，作为基准观测坐标。通过比较基准观测坐标和实际观测坐标，可获得三轴指向误差的三个常值，即系统误差。

问题四要求利用单颗卫星观测数据进行飞行器轨道估计和误差分析。在同一时刻只有两个观测值，要估计空间的三维轨道，这在一般情况下是行不通的，因此必须补充条件，比如假设在极短时间内，把空间飞行器认为在基础坐标系下是不动的，没有位置变化等，建立等式。对于多颗卫星对飞行器进行轨道估计，只要卫星没有太大的系统误差，测量数据可靠，在同一时刻，空间飞行器的轨道是固定的，可以联立不同卫星对空间飞行器同一空间的点进行联立求解。对于多个空间飞行器的观测，存在时间配准和轨道配准问题，涉及到更多的数据融合算法。

4、模型准备

4.1 数据分析

问题给出了 28 个观测卫星在零时刻基础坐标系下的位置坐标和速率分量，但所求问题中只需要 6 号和 9 号卫星数据，见下表 1。

表 1 6 号和 9 号卫星在零时刻的状态参数

序号	横坐标	纵坐标	竖坐标	横坐标速度	纵坐标速度	竖坐标速度
6 号	7345767.764738	5627233.486330	-1215187.241963	-2264.234366	4147.452231	4533.747072
9 号	9092044.771852	1732113.220573	1732113.220573	-1566.513180	4453.807606	4453.807606

它们到地心距离分别为 9332.885 千米和 9416.247 千米，速度大小为 6548.51m/s 和 6490.514m/s，属于近地轨卫星。

6 号卫星和 9 号卫星对 0 号飞行器有 600 个观测点，时间跨度为[50, 170]秒之间，观测值 (t, α, β) 的散点图为

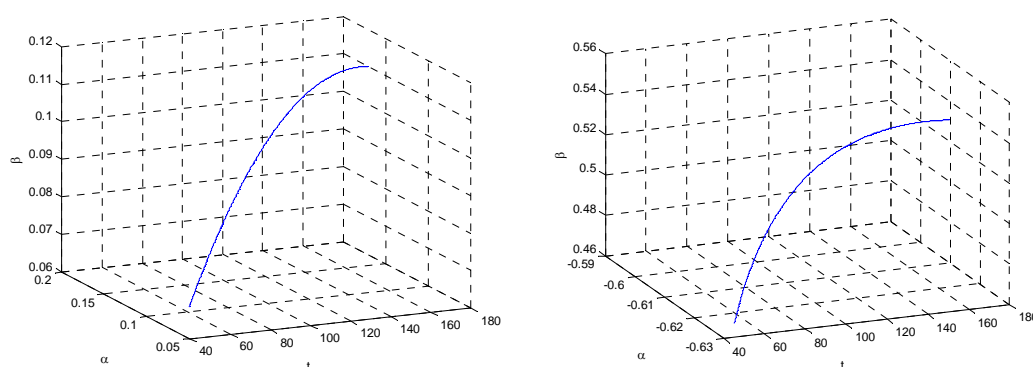


图 1 6 号和 9 号卫星对 0 号飞行器的观测值

显见，散点基本连成一条光滑曲线，未有异常数据，说明测试数据基本是可靠的。9 号卫星对 1 号飞行器所测观测值也有同样的结果。

4.2 坐标转换

不同空间直角坐标系之间的坐标转换，要求出坐标系之间的转换参数。空间坐标转换的方法很多，如布尔萨模型等[1]，考虑到本题观测坐标系与基础坐标系的特殊关系，本文根据两坐标系的空间几何关系，用基础坐标系的基向量表示参考坐标系的基向量，从而得到两坐标系之间的转换矩阵。

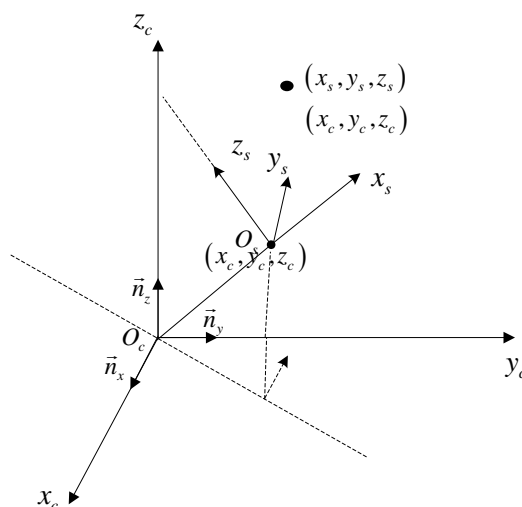


图 2 坐标转换示意图

如图 2 所示， $O_c - X_c Y_c Z_c$ 是基础坐标系， $O_s - X_s Y_s Z_s$ 为观测坐标系。根据题意，

观测坐标系原点 O_s 是卫星坐标， X_s 轴沿 $O_c O_s$ 连线，离开地球方向为正， Z_s 轴与 X_s 垂直指向正北， Y_s 轴按右手系确定，从而 X_s, Z_s, Z_c 共面。

设基础坐标系下的卫星坐标为 (x_0, y_0, z_0) ，基础坐标系的基向量为 $(\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ ，观测坐标系的一组过原点 O_s ，且相互垂直的基向量为 $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ ，则可取 $\vec{x}_s = (x_0, y_0, z_0)$ 。由 X_s, Z_s, Z_c 共面， \vec{y}_s 垂直该平面，所以 \vec{y}_s 可取为该面的法向量 $(-y_0, x_0, 0)$ ，因此令 $\vec{y}_s = (-y_0, x_0, 0)$ 。又因 $\vec{z}_s \perp \vec{x}_s, \vec{z}_s \perp \vec{y}_s$ ，可取 $\vec{z}_s = (-x_0, -y_0, \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0})$ 。

在三维空间中，有两组坐标基 $(\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ 和 $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ ，根据线性代数的基变换知识，可得变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ -y_0 & x_0 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0} \end{bmatrix}$$

标准化后为坐标变换矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} & \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\ -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & 0 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} & -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} & \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{z_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \end{bmatrix}$$

设转换矩阵 $R = P^{-1}$ ，则坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 (x_c, y_c, z_c) 为 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 下的坐标， (x_s, y_s, z_s) 为 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 的坐标。

4.3 误差平方和

对任意两个空间点列，设坐标分别为 $(x_i, y_i, z_i) i=1, 2, \dots, n$ 和 $(x'_i, y'_i, z'_i) i=1, 2, \dots, n$ 。定义它们的误差平方和为

$$Q = \frac{\sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2}}{n}$$

5、模型建立与求解

5.1 问题一：观测卫星在任意时刻的位置计算

观测卫星的位置矢量是估计空间飞行器运动轨道的前提，因此，需首先计算出观测卫星在任意时刻位置。题目要求计算 09 号观测卫星在特定时刻的三维位置，且已给出观测卫星的简化运动方程，以及基础坐标系下观测卫星的位置和速度初值，因此可直接利用常微分方程组数值解方法，对观测卫星的位置进行计算。

5.1.1 观测卫星运动方程

根据题意，观测卫星一般没有火箭推力，其运动方程可以简化为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (2)$$

其中 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 为观测卫星在基础坐标系下的位置向量。由矢量分解，得各坐标轴上的运动方程

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{G_m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y}(t) = -\frac{G_m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z}(t) = -\frac{G_m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (3)$$

降阶处理：求高阶常微分方程组的数值解时，通常需经变量代换进行降阶处理。为便于计算，现将观测卫星的二阶微分运动方程转化为一阶方程。记 $x = z_1$ ， $\dot{x} = z_2$ ， $y = z_3$ ， $\dot{y} = z_4$ ， $z = z_5$ ， $\dot{z} = z_6$ ，则方程（3）转化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{G_m z_1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = -\frac{G_m z_3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{z}_5 = z_6 \\ \dot{z}_6 = -\frac{G_m z_5}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (4)$$

5.1.2 数值求解

对式 (4) 进行数值求解, 根据表 1 中 09 号观测卫星的位置和速度为初始条件, 利用 Matlab 编程, 采用 od45 算法, 取步长 0.1s, 在 [0,250] 秒内进行数值计算, 得到 09 号观测卫星轨道的散点图见图 3。

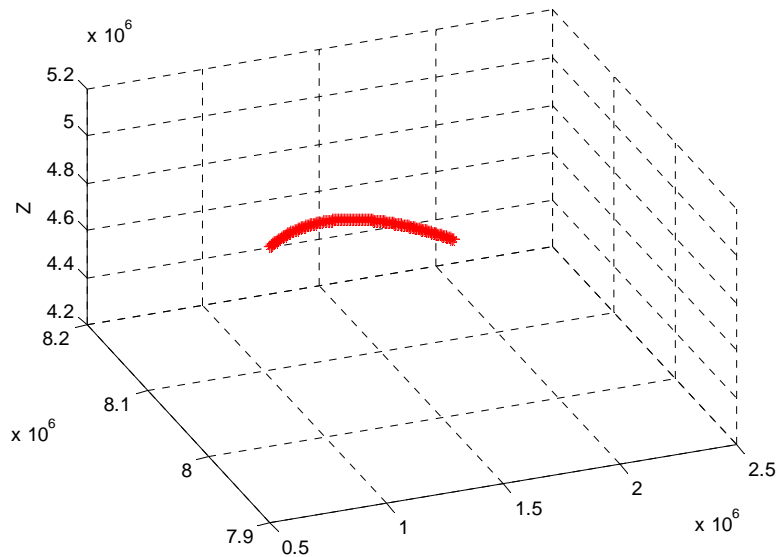


图 3 [0,250] 秒内 09 号观测卫星运动轨道

从数值解中抽取 5 个特定时刻的观测卫星三维坐标如表 2。

表 2 09 号观测卫星在 5 个特定时刻的三维位置

	50.0s	100.0s	150.0s	200.0s	250.0s
x	1.773806E+06	1.501626E+06	1.227700E+06	9.523491E+05	6.758945E+05
y	8.161384E+06	8.126764E+06	8.082699E+06	8.029253E+06	7.966502E+06
z	4.516700E+06	4.684680E+06	4.847216E+06	5.004127E+06	5.155238E+06
v_x	-5.424026E+03	-5.462132E+03	-5.493837E+03	-5.519125E+03	-5.537987E+03
v_y	-5.975671E+02	-7.870537E+02	-9.753467E+02	-1.162240E+03	-1.347531E+03
v_z	3.412822E+03	3.305779E+03	3.195055E+03	3.080783E+03	2.963100E+03

若延长观测时间, 即扩大时间的计算区间, 可得 09 号观测卫星的完整运动轨道, 如图 4 所示, 为一绕基础坐标系原点的椭圆。

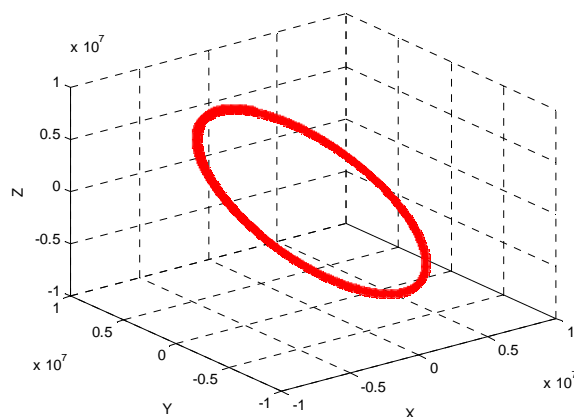


图 4 09 号观测卫星的完整运动轨道

5.1.3 步长稳定域分析

在进行微分方程的数值求解时，迭代步长对计算精度影响较大，因此需要分析迭代步长的稳定域。

以步长取 0.01 时的估计轨道为基准轨道，在一定区间内以较小间隔对迭代步长进行搜索，分别计算不同步长的估计轨道与基准轨道的差异程度，依次判断步长的稳定域。定义描述轨道间的差异程度为

$$S_i = \frac{1}{T^2} \left[(x_i(t) - x_0(t))^2 + (y_i(t) - y_0(t))^2 + (z_i(t) - z_0(t))^2 \right]$$

其中 $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ 是 t 时刻观测卫星在第 i 个步长计算出的轨道上的坐标， T 为观测时间。

当 S_i 变化较小时，认为在该步长下，估计轨道与基准轨道相似，即观测卫星运动方程对该步长是稳定的；反之，则认为不稳定。

在间隔 0.2s 内，依次增加 0.01s，计算出各步长下观测卫星运动轨道。根据 S_i 的定义，在 $[0, 250]s$ 内，计算出各步长间的轨道均方和如图 5 所示

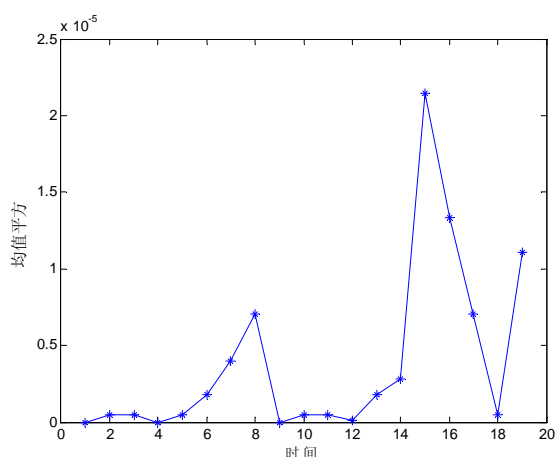


图 5 轨道间均方和

其中横轴为间隔时间，总计为 0.2 秒。由图可知，步长间隔在 $[0, 0.04]$ 秒范围内变化时，观测卫星轨道变化较小，可认为观测卫星运动方程的步长稳定域，以此间隔内数值计算时，卫星的轨道变化非常小。

5.2 问题二：空间飞行器的轨道估计

要估计飞行器轨道，首先要建立观测坐标系与基础坐标系之间的转换关系，并对两颗卫星的观测数据进行时间配准。然后，根据逐点交汇定位原理，在同一时刻，飞行器在不同卫星观测下的基础坐标系的坐标相同，可建立方程组，解得飞行器在基础坐标系下的坐标。然后，根据空间飞行器的轨道，建立喷气速度 \vec{v}_r 与火箭质量 $m(t)$ 的表示模型，其中由估计轨道与实际观测坐标的残差最小，实现对火箭质量模型参数与喷气速度值的优选。最后，根据飞行器运动方程与初始参数，通过数值计算得到飞行器的轨道估计。建模流程如下：

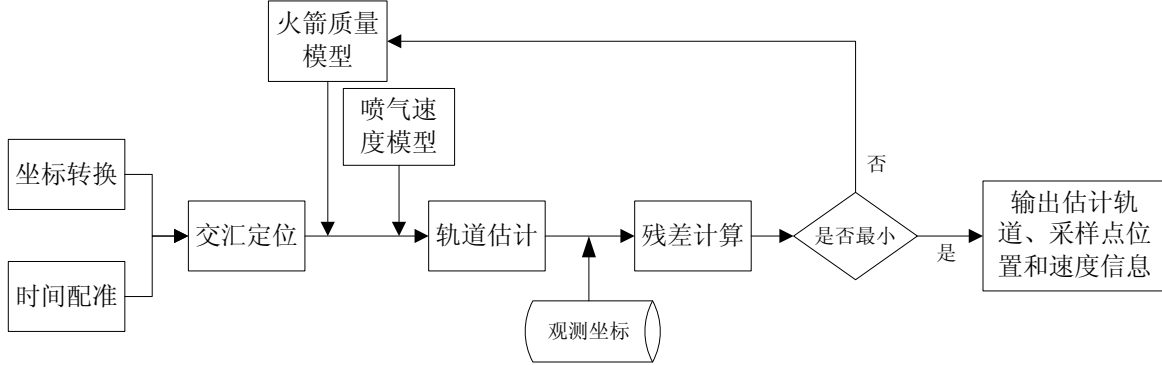


图 6 问题二建模流程

5.2.1 时间配准

观察给定的仿真数据可以发现，06 号和 09 号卫星对 0 号飞行器的观测时间不一致，而采用逐点交汇定位思路进行轨道估计，需要知道同一时刻两颗卫星对同一目标飞行器的观测值。由于空间飞行器和观测卫星均处于高速运动状态，尽管有较小的时间差异，也可能带来较大的位置差异。因此，在交汇定位前，需先对观测时间进行配准。

时间配准最简单有效的方法是以时间为变量对观测值 α, β 进行插值或者拟合，如果采用拟合，根据拟合的 α, β 对时间 t 的函数关系，就可以提取两卫星在同一时刻的观测值。

在显著性水平为 0.05 的条件下，对 α, β 进行多项式拟合结果见图 7、图 8 所示。对于 06 号卫星

$$\begin{cases} \alpha^{(6)}(t) = -2.5622 \times 10^{-6} t^2 + 0.0012t + 0.02177 \\ \beta^{(6)}(t) = -3.4716 \times 10^{-6} t^2 + 0.00118t + 0.0136 \end{cases}$$

两个拟合方程的可决系数分别为 $\rho_{\alpha}^{(6)} = 0.9999$ ， $\rho_{\beta}^{(6)} = 0.9997$ ，误差平方和分别为 $8.52E-6$ ，和 $1.1E-5$ ，说明拟合效果非常好。

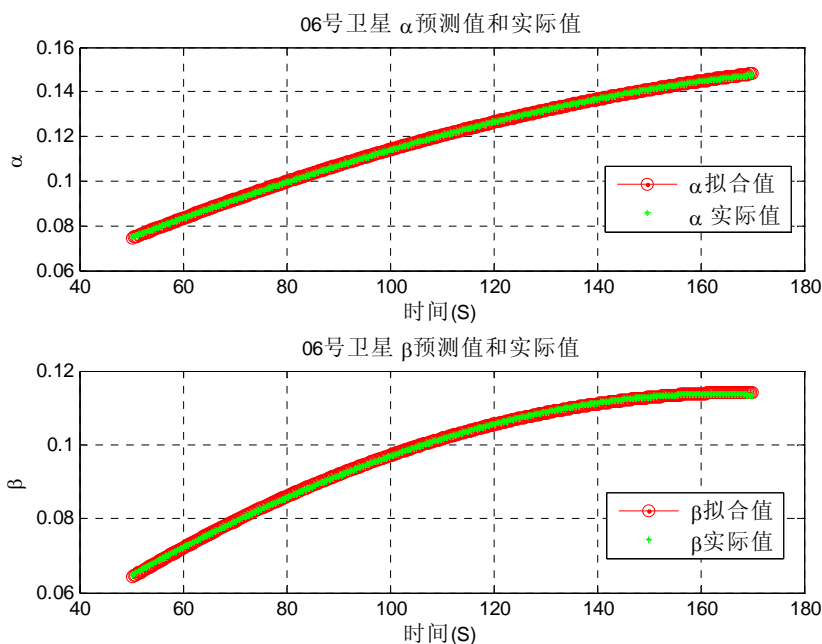


图 7 06 号观测卫星的观测值 α, β 对时间的拟合曲线
对于 09 号卫星

$$\begin{cases} \alpha^{(9)}(t) = -3.7513 \times 10^{-6} t^2 + 9.2572 \times 10^{-4} t - 0.6645 \\ \beta^{(9)}(t) = -1.6610 \times 10^{-6} t^2 + 0.0010 t + 0.4163 \end{cases}$$

可决系数分别为 $\rho_{\alpha}^{(9)} = 0.9951$, $\rho_{\beta}^{(9)} = 0.9999$, 误差平方和分别为 $1.52E-5$, 和 $4.96E-6$, 误差也非常小。

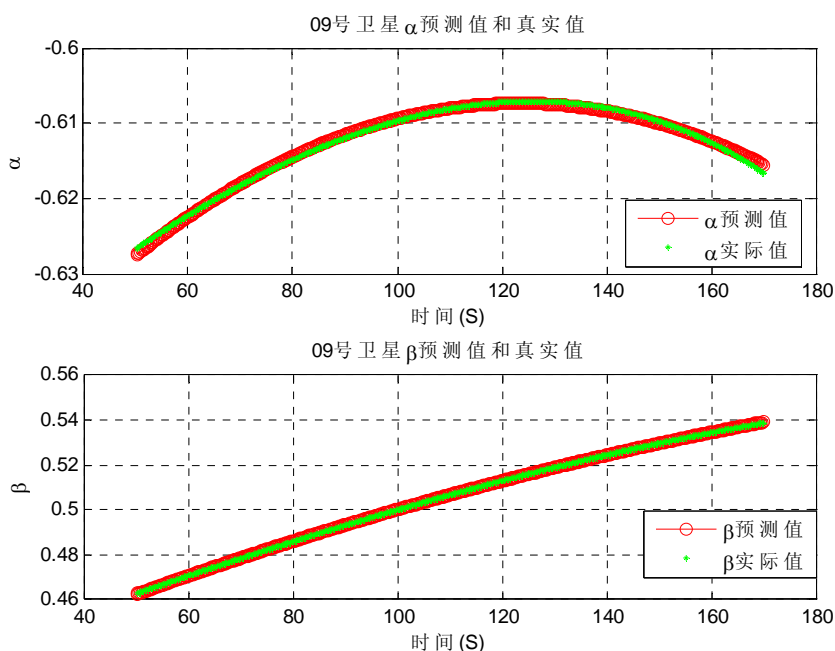


图 8 09 号观测卫星的观测值 α, β 对时间的拟合曲线

5.2.2 交汇定位

利用两颗卫星对空间飞行器进行定位, 可采用交汇定位法, 其基本思想是利用

空间坐标变换, 将两颗卫星在各自观测坐标系下对空间飞行器的观测数据, 转换成基础坐标系下的飞行器坐标, 由于某时刻同一飞行器的空间位置是固定的, 因此两组坐标为同一值, 从而通过解方程组可计算出飞行器坐标, 实现交汇定位。

根据题意, 观测卫星对于空间飞行器的观测数据定义为

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s} \quad (5)$$

其中 x_s, y_s, z_s 为空间飞行器在观测坐标系中的坐标。由式(5)有, $y_s = \alpha x_s$, $z_s = \beta x_s$, 则空间飞行器在观测坐标系中的坐标为 $(x_s, y_s, z_s) = x_s(1, \alpha, \beta)$ 。

设 $x_s^{(i)}$ 为第 i 颗观测卫星对 0 号空间飞行器的观测坐标参数, 则在同一时刻, 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测坐标分别为:

$$x_s^{(6)}(1, \alpha^{(6)}, \beta^{(6)}), \quad x_s^{(9)}(1, \alpha^{(9)}, \beta^{(9)})$$

对 06 号观测卫星, 根据空间坐标转换, 有

$$\begin{bmatrix} x_c^{(6)} \\ y_c^{(6)} \\ z_c^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(6)} \\ y_0^{(6)} \\ z_0^{(6)} \end{bmatrix} + R^{(6)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(6)} \\ \beta^{(6)} \end{bmatrix} x_s^{(6)} \quad (6)$$

同理, 对 09 号观测卫星有

$$\begin{bmatrix} x_c^{(9)} \\ y_c^{(9)} \\ z_c^{(9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(9)} \\ y_0^{(9)} \\ z_0^{(9)} \end{bmatrix} + R^{(9)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(9)} \\ \beta^{(9)} \end{bmatrix} x_s^{(9)} \quad (7)$$

因为 $(x_c^{(6)}, y_c^{(6)}, z_c^{(6)})$ 和 $(x_c^{(9)}, y_c^{(9)}, z_c^{(9)})$ 均为 0 号空间飞行器在基础坐标系下的坐标, 故两者相等。由式 (7) 减去式 (6) 得

$$\begin{bmatrix} x_0^{(9)} - x_0^{(6)} \\ y_0^{(9)} - y_0^{(6)} \\ z_0^{(9)} - z_0^{(6)} \end{bmatrix} = R^{(6)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(6)} \\ \beta^{(6)} \end{bmatrix} x_s^{(6)} - R^{(9)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(9)} \\ \beta^{(9)} \end{bmatrix} x_s^{(9)}$$

该方程组是含 3 个方程, 两个未知数 $x_s^{(6)}, x_s^{(9)}$ 的超定方程, 利用最小二乘建立优化模型

$$\text{模型 1:} \quad \min \left[\sum_{i=1}^3 (z_i - x_i x_s^{(6)} - y_i x_s^{(9)})^2 \right]$$

$$\text{其中} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(9)} - x_0^{(6)} \\ y_0^{(9)} - y_0^{(6)} \\ z_0^{(9)} - z_0^{(6)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(6)} \\ \beta^{(6)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = R^{(9)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(9)} \\ \beta^{(9)} \end{bmatrix}。通过该模型可得最$$

优解 $x_s^{(6)}, x_s^{(9)}$ ，代入 $x_s^{(6)}(1, \alpha^{(6)}, \beta^{(6)})$ 或者 $x_s^{(9)}(1, \alpha^{(9)}, \beta^{(9)})$ ，得到飞行器的两条轨道见图 9，两条轨道的平均误差平方和为 88.71 米，总的来说，两个轨道非常接近，可以将坐标分量取平均后作为飞行器的最终坐标，从而实现空间飞行器的定位。

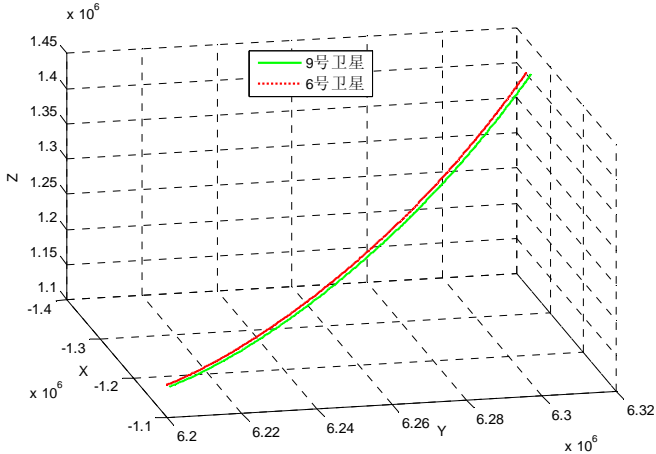


图 9 0 号飞行器在 6 号和 9 号卫星交汇对接的轨道误差
取 0 号飞行器的轨道部分采样坐标见表 3。

表 3 逐点交汇求解计算得到的轨迹采样点

时间（秒）	X 坐标	Y 坐标	Z 坐标
50	-1.114000E+06	6.201300E+06	1.135600E+06
60	-1.121000E+06	6.208100E+06	1.143800E+06
70	-1.130200E+06	6.215700E+06	1.154800E+06
80	-1.141700E+06	6.224100E+06	1.168400E+06
90	-1.155400E+06	6.233100E+06	1.184900E+06
100	-1.171300E+06	6.242800E+06	1.204100E+06
110	-1.189600E+06	6.252900E+06	1.226000E+06
120	-1.210100E+06	6.263400E+06	1.250700E+06
130	-1.232800E+06	6.274100E+06	1.278200E+06
140	-1.257800E+06	6.285100E+06	1.308300E+06
150	-1.285000E+06	6.296200E+06	1.341200E+06
160	-1.314400E+06	6.307300E+06	1.376600E+06
170	-1.345900E+06	6.318300E+06	1.414700E+06

5.2.3 飞行器质量模型

空间飞行器依靠火箭推进，需要消耗大量燃料，从而其质量不断随时间不断变化物体。其质量相对于时间的变化规律，与空间飞行器载荷、推进火箭类型等因素有关。

根据工程实践和题意，火箭尾部喷口的燃气喷射速度大小一般较为稳定，其数量大概在 2000m/s~3000m/s 之间，本文认为火箭燃气喷射速度大小为一常数，通过建立搜索算法来确定常数。

(1) 模型建立

根据题意和模型假设 3，在重力斜飞段后期，空间飞行器所受空气阻力远小于

重力，可忽略不计。在任意时刻空间飞行器受力情况如图 10 所示。 F_T 为飞行器燃料燃烧产生的推力，其大小设为定值，方向与飞行器运动轨道的切线方向一致， θ 为 F_T 与 x_s 的夹角，显然 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 始终成立。

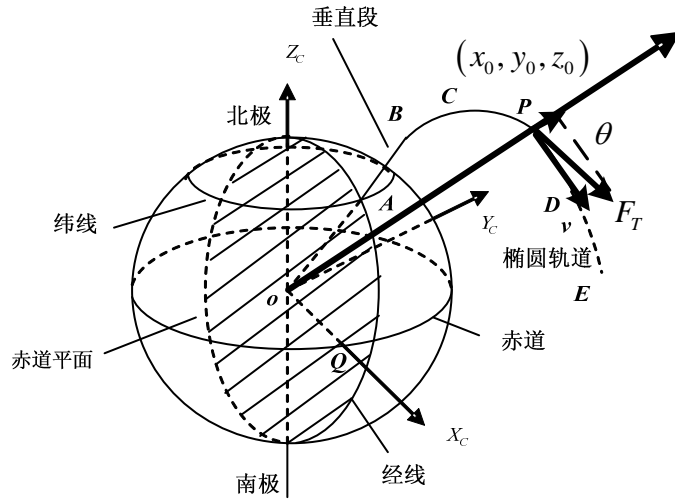


图 10 空间飞行器受力图

设飞行器坐标 $P = (x_0, y_0, z_0)$ ，将 F_T 沿重力方向与垂直于重力方向分解，得 $F_T \cos \theta$ 和 $F_T \sin \theta$ 。根据牛顿第二定律和力的合成原理，有

$$\sqrt{(F_T \cos \theta - mg)^2 + (F_T \sin \theta)^2} = ma \quad (8)$$

其中 a 为空间飞行器合成加速度， m, θ, a 均为随时间变化的变量。

整理式 (8)，并进行化简，可得 m 的一元二次方程：

$$(g^2 - a^2) \cdot m^2 - 2gF_T \cos \theta \cdot m + F_T^2 = 0$$

若 $(2gF_T \cos \theta)^2 - 4 \cdot (g^2 - a^2) \cdot F_T^2 = 4F_T^2 (a^2 - g^2 \sin^2 \theta) \geq 0$ ，即 $a \geq g \sin \theta$ ，则该方程具有两个非零解，分别为

$$m = F_T \frac{\cos \theta \pm \sqrt{a^2 - g^2 \sin^2 \theta}}{g^2 - a^2}$$

由于 m 一般而言应为严格单调递减的非负函数，且 $a \geq g \sin \theta$ ，因此飞行器质量模型为

$$\text{模型 2} \quad m(t) = F_T \frac{\cos(\theta(t)) - \sqrt{a^2(t) - g^2 \sin^2(\theta(t))}}{g^2 - a^2(t)}$$

其中 g 为重力加速度， $\theta(t)$ 为 F_T 与 x_s 的夹角，由向量余弦可知

$$\theta(t) = \frac{\vec{O_c P} \cdot \vec{v}}{|\vec{O_c P}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}}$$

$a(t)$ 为合成加速度，其值等于位移的二阶导数，即

$$a(t) = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}$$

在模型中推力 F_T 是一个未知参数。在设计飞行器时，推力和质量存在一定的关系，只要推力足够提供加速度，它的大小并不影响飞行器轨道的设计，通过后面搜索发现，本文取 $F_T = 10^6 N$ 。

(2) 模型求解

根据 06 号和 09 号卫星观测数据计算出的飞行器坐标，代入上述质量模型，得到观测时间内飞行器的质量变化曲线如图 11、图 12 所示。

由图 11 和图 12 可见，空间飞行器质量是严格单调递减，这是由于在飞行过程中不断消耗燃料导致质量减少；一定时间后，飞行器质量趋于稳定，质量变化曲线收敛于一定值，这是因为一定时间后燃料耗尽，空间飞行器质量仅为有效负载，如发射的卫星质量、弹道导弹的弹头质量等。为得到空间飞行器的一般表示模型，可根据已知的质量变化数据进行拟合。本文分别采用多项式模型和指数模型描述空间飞行器质量变化情况。

采用多项式模型拟合，根据多项式拟合结果，发现用 3 次多项式效果最好，拟合效果见图 11，拟合方程为

$$m(t) = -0.0033t^3 + 1.4450t^2 + 227.2288t + 1.7916 \times 10^4$$

其误差平方和为 1.4332。

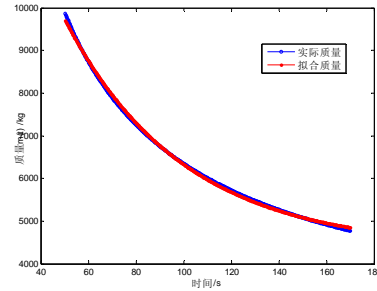
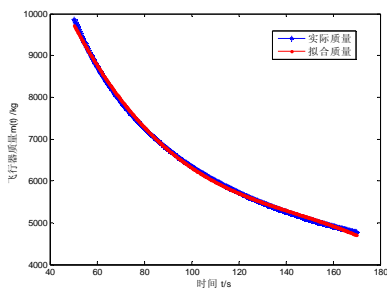


图 11 多项式模型拟合的质量变化曲线 图 12 指数模型拟合的质量变化曲线

采用指数模型拟合，若用指数拟合，拟合方程为

$$m(t) = 14694e^{-0.020153t} + 4372.6$$

其误差平方和为 1.7292，拟合效果也很好。

5.2.4 轨道估计

由题意，根据变质量的质点动力学，空间飞行器在基础坐标系下的主动段简化运动方程如下：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (9)$$

其中向量 \vec{F}_e 表示飞行器所受的外力加速度之和， \vec{F}_T 表示火箭产生的推力加速度， $\vec{r}(t)$ 为空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量， $\ddot{\vec{r}}(t)$ 表示 $\vec{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数，即加速度， $\vec{v}_r(t)$ 为燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度矢量，由题意，它可以表示为

$$\vec{v}_r(t) = |\vec{v}_r(t)| \left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \quad \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \right)$$

若飞行器质量按三次多项式模型变化, 则

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3}{k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4}$$

则按式 (9) 进行矢量分解, 空间飞行器在基础坐标系下各轴的主动段运动轨道方程为

模型 3:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{G_m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3}{k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4} \\ \ddot{y}(t) = -\frac{G_m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3}{k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4} \\ \ddot{z}(t) = -\frac{G_m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3}{k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4} \end{cases}$$

若飞行器质量按指数模型变化, 则

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{k_2 k_1 e^{k_2 t}}{k_1 e^{k_2 t} + k_3} = \frac{k_2}{1 + k_4 e^{-k_2 t}}$$

其中 $k_4 = \frac{k_3}{k_1}$ 。此时, 空间飞行器在基础坐标系下的主动段运动轨道方程为:

模型 4:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{G_m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{k_2}{1 + k_3 e^{-k_2 t}} \\ \ddot{y}(t) = -\frac{G_m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{k_2}{1 + k_3 e^{-k_2 t}} \\ \ddot{z}(t) = -\frac{G_m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + |\vec{v}_r(t)| \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{k_2}{1 + k_3 e^{-k_2 t}} \end{cases}$$

对于上述空间飞行器轨道方程，只需初始飞行器的坐标和速率，便可进行数值求解，得到估计的运动轨道。

5.2.5 模型求解

首先依据飞行器质量按多项式模型或指数模型变化，分别进行数值求解，得到两条估计轨道。然后，提取各采样点的位置和速度值，以交汇定位所求得轨道作为基准轨道，计算两条估计轨道的残差，同时给出位置和速度相对于时间的函数曲线。

(1) 飞行器质量按多项式模型变化时的计算轨道

以第 50 秒的观测值作为初始条件，对轨道模型进行数值求解，得到计算轨道如图 13 所示。由图可见，在短时间内，计算轨道与基准轨道吻合较好，误差在 1km 以内，这是由于数值求解的初始值取自基准轨道。但随着时间的增加，估计误差增大，这是因为数值求解过程是通过迭代运算完成的，迭代运算导致了误差累积。在最后第 600 个观测点时，计算轨道与基准轨道的空间距离为 46285.4188 米，约为轨道长度 9485627.7781 米的 0.49%，即估计误差是轨道长度的 0.49%，因此可认为计算结果是有效的。

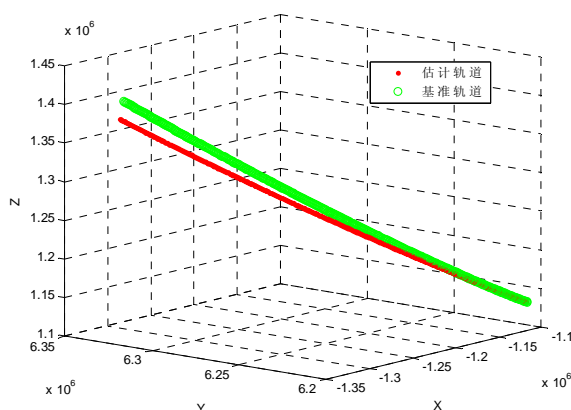


图 13 在模型 3 下 0 号空间飞行器的计算轨道

(2) 飞行器质量按指数模型变化时的计算轨道

类似可得在模型 4 下 0 号空间飞行器的估计轨道

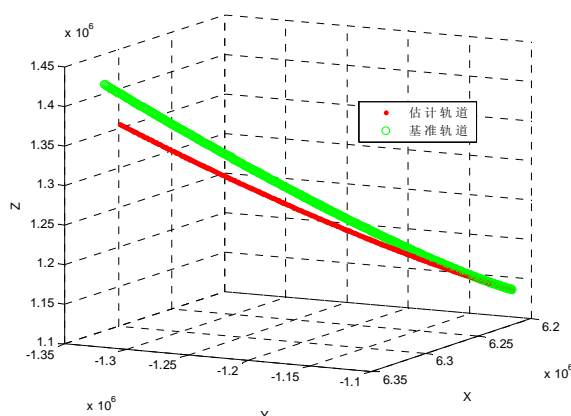


图 14 在模型 4 下 0 号空间飞行器的计算轨道

(3) 各采样点的位置、速度

间隔 10.0s 对观测数据进行采样，采样范围[50.0,170.0]s，各采样点的位置和

速度，可直接根据计算轨道直接抽取，结果见表 4 和表 5。

表 4 多项式质量模型下计算轨道在各采样点的位置和速度

时间	X (m)	X 速度 (m/s)	Y (m)	Y 速度 (m/s)	Z (m)	Z 速度 (m/s)
50	-1.114100E+06	-5.890000E+02	6.201300E+06	6.276400E+02	1.135600E+06	6.870500E+02
60	-1.121300E+06	-8.558900E+02	6.208600E+06	8.199600E+02	1.144100E+06	1.001400E+03
70	-1.131100E+06	-1.106100E+03	6.217600E+06	9.713100E+02	1.155600E+06	1.297100E+03
80	-1.143300E+06	-1.333300E+03	6.227900E+06	1.084500E+03	1.169900E+06	1.566300E+03
90	-1.157700E+06	-1.533300E+03	6.239200E+06	1.162400E+03	1.186800E+06	1.803900E+03
100	-1.173900E+06	-1.704100E+03	6.251100E+06	1.208200E+03	1.205900E+06	2.007700E+03
110	-1.191700E+06	-1.846700E+03	6.263200E+06	1.226500E+03	1.226900E+06	2.178400E+03
120	-1.210700E+06	-1.964300E+03	6.275500E+06	1.222500E+03	1.249400E+06	2.319800E+03
130	-1.230900E+06	-2.062900E+03	6.287600E+06	1.202300E+03	1.273200E+06	2.438900E+03
140	-1.252000E+06	-2.150500E+03	6.299500E+06	1.172100E+03	1.298100E+06	2.545100E+03
150	-1.273900E+06	-2.237000E+03	6.311100E+06	1.138100E+03	1.324100E+06	2.650100E+03
160	-1.296700E+06	-2.334200E+03	6.322300E+06	1.106400E+03	1.351100E+06	2.767900E+03
170	-1.320700E+06	-2.456000E+03	6.333200E+06	1.082700E+03	1.379500E+06	2.915100E+03

表 5 指数质量模型下计算轨道在各采样点的位置和速度

时间/s	X (m)	X 速度 (m/s)	Y (m)	Y 速度 (m/s)	Z (m)	Z 速度 (m/s)
50	-1.114100E+06	-5.890300E+02	6.201400E+06	6.273400E+02	1.135600E+06	6.869900E+02
60	-1.121300E+06	-8.543200E+02	6.208600E+06	8.184300E+02	1.144100E+06	9.993500E+02
70	-1.131100E+06	-1.099400E+03	6.217600E+06	9.649800E+02	1.155500E+06	1.288900E+03
80	-1.143200E+06	-1.321500E+03	6.227800E+06	1.073800E+03	1.169800E+06	1.552100E+03
90	-1.157400E+06	-1.519700E+03	6.238900E+06	1.149900E+03	1.186500E+06	1.787600E+03
100	-1.173500E+06	-1.693900E+03	6.250700E+06	1.197900E+03	1.205400E+06	1.995300E+03
110	-1.191200E+06	-1.845100E+03	6.262800E+06	1.221700E+03	1.226300E+06	2.176100E+03
120	-1.210300E+06	-1.974400E+03	6.275100E+06	1.225000E+03	1.248900E+06	2.331300E+03
130	-1.230700E+06	-2.083600E+03	6.287300E+06	1.210900E+03	1.272800E+06	2.463000E+03
140	-1.252000E+06	-2.174600E+03	6.299200E+06	1.182500E+03	1.298000E+06	2.573200E+03
150	-1.274100E+06	-2.249300E+03	6.310900E+06	1.142200E+03	1.324200E+06	2.664200E+03
160	-1.296900E+06	-2.309600E+03	6.322000E+06	1.092400E+03	1.351300E+06	2.738300E+03
170	-1.320200E+06	-2.357400E+03	6.332700E+06	1.034900E+03	1.379000E+06	2.797500E+03

(4) 计算轨道的误差分析

根据计算轨道，以交汇定位轨道为基准，进行误差分析，得到结果见表 6

表 6 计算轨道与定位轨道的残差分析

时间/s	多项式质量模型			指数质量模型		
	Δx	Δy	Δz	Δx	Δy	Δz
50	0.54418	-0.4241	-0.63987	-25.666	9.2976	-2.8733
60	265.5897	-545.784	-257.773	-287.17	551.09	248.36
70	898.8939	-1944.8	-846.717	-878.21	1910	785.44
80	1673.276	-3892.9	-1513.09	-1556	3769.3	1335.7
90	2317.136	-6114.97	-1947.61	-2068.2	5871.8	1612.4
100	2536.675	-8368.06	-1812.73	-2165.3	8008.8	1330.1
110	2040.812	-10449.7	-772.399	-1609.7	10015	215.98
120	567.4067	-12207.4	1476.737	-181.8	11763	-1983.1

130	-2091.21	-13545.7	5174.838	2315.8	13162	-5495
140	-6065.22	-14430.9	10471.31	6055.5	14148	-10519
150	-11387.2	-14891.2	17400.75	11184	14686	-17224
160	-17974.2	-15015.2	25860.98	17822	14765	-25750
170	-25286.5	-14952.6	35181.02	25703	14415	-35750

通过误差平方和的计算，指数模型和多项式模型的计算轨道与交汇定位轨道的误差平方和分别为 718.06 和 725.09，说明指数模型相对较优，飞行器轨道与基准轨道更接近，即指数质量模型相对于多项式质量模型更好。

实际上，空间飞行器质量随燃料燃烧逐渐减小，当燃料燃尽时，飞行器质量即为有效载荷质量，此后飞行器质量稳定。负指数函数相对于多项式函数来说，随着自变量增加，末端更加平缓，因此指数质量模型从一般经验来说会更好。而我们的计算结果与此相吻合，从另一方面说明了前文建模与计算的正确性。

(5) 飞行器的位置—时间曲线和速度—时间曲线

依照问题要求，提取指数模型的计算轨道数据，依照坐标轴分别画出坐标分量与时间的变化曲线见图 15 和速度变化曲线见图 16。

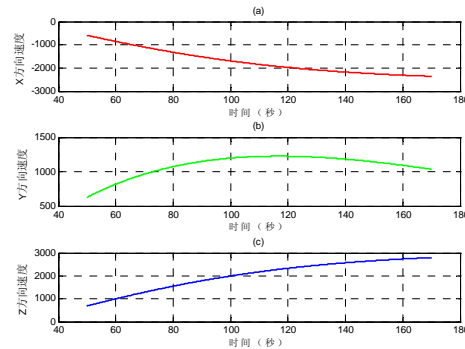
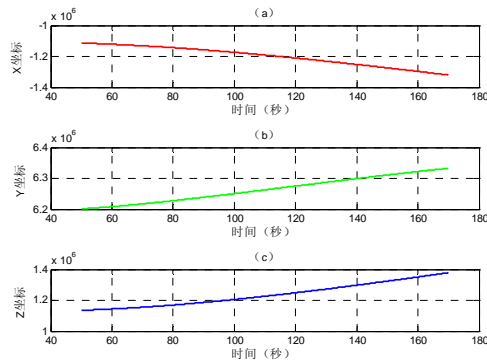


图 15 0 号飞行器的速度—时间曲线 图 16 0 号飞行器的位置—时间曲线图

5.3 问题三：观测卫星系统误差估计

第二问中 0 号飞行器按指数模型下的计算轨道是在仅考虑正态随机误差条件下经过计算得到的，可视为不存在系统误差的基准轨道。根据此基准轨道坐标值，利用空间坐标转换方程可以反推出观测卫星对空间飞行器的观测值的估计值。然后，通过与实际观测值的比较分析和计算，实现系统误差的估计。

5.3.1 系统误差存在性判定

在理论上，将 06 号和 09 号卫星在同一时刻对同一飞行器的观测值，转换到基础坐标系后应相等。然而由图 9 可知，实际中两颗卫星的观测值在基础坐标系下并不相等，这是因为观测数据存在误差。由于观测误差直接影响到对空间飞行器的观测定位、预警、拦截等一系列后续动作，因此必须予以考虑。而不同类型的误差有不同的特征和修正方式，因此首先要对观测数据是否存在误差以及误差类型进行判定。

根据误差分析与处理理论，可通过参与误差观测法判定观测数据是否存在系统误差。计算 06 号和 09 号卫星观测数据在基础坐标系下的差值向量，即残余误差向量。根据各个残余误差的大小和符号变化规律，观察残余误差曲线图形来判断有无

系统误差。该方法主要适用于发现有规律变化的系统误差。

作出 06 号和 09 号卫星观测数据在基础坐标系下的差值向量随时间变化关系（见图 17）可知，每个分量都有规律波动，说明 06 号观测卫星和 09 号观测卫星组成的观测网存在系统误差。

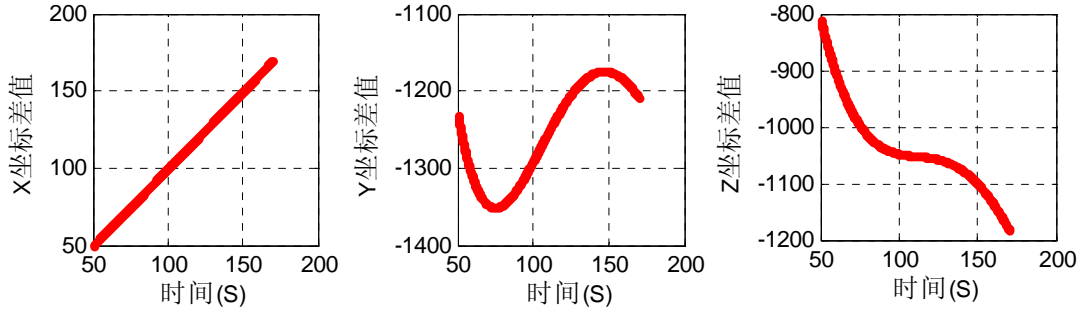


图 17 三个坐标分量差值向量随时间变化关系

5.3.2 观测值与其估计值的转换关系

依题意，可将各种系统误差折合为三轴指向误差。在 α, β 二维观测数据平面上，三轴指向误差表现为两个平移误差 $d\alpha, d\beta$ 和一个旋转误差 $d\theta$ ，如图 18 所示。记 $A(\alpha, \beta)$ 是根据基准轨道计算所得理论位置， $A'(\alpha', \beta')$ 为实际观测位置，包含系统误差 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 。

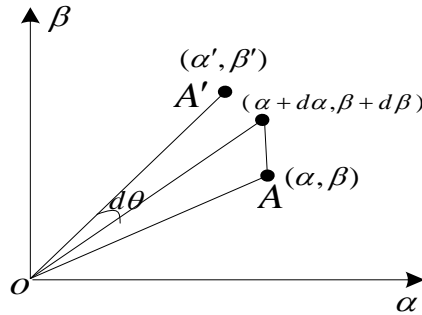


图 18 系统误差的转换关系

通过空间几何关系可知，在二维平面 α, β 内，根据坐标旋转，有

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos d\theta & -\sin d\theta \\ \sin d\theta & \cos d\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + d\alpha \\ \beta + d\beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

即可得方程组

$$\begin{cases} \alpha' = (\alpha + d\alpha) \cos d\theta - (\beta + d\beta) \sin d\theta \\ \beta' = (\alpha + d\alpha) \sin d\theta + (\beta + d\beta) \cos d\theta \end{cases} \quad (11)$$

高次超定非线性方程组通常很难得到确切解，可先进行简化。由于旋转误差 $d\theta$ 的值通常较小，因此可作如下近似： $\cos d\theta \approx 1$ ， $\sin d\theta \approx d\theta$ 。对式（11）进行化简，整理得：

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - \beta d\theta + d\alpha - d\beta d\theta \\ \beta' = \beta + \alpha d\theta + d\beta + d\alpha d\theta \end{cases} \quad (12)$$

若已知 (α, β) 向量和它的观测值向量 (α', β') ，式（12）只有 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 三个未知量，可以通过最小二乘求得最优解，即得系统误差。

5.3.3 基准 (α, β) 向量的计算

将第二问的计算轨道视为基准轨道，取任意时刻的坐标值，利用空间坐标转换方程，反演计算观测值的真值 α ， β 。

对 i ($i=6,9$) 号观测卫星有

$$\begin{bmatrix} x_c^{(i)} \\ y_c^{(i)} \\ z_c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(i)} \\ y_0^{(i)} \\ z_0^{(i)} \end{bmatrix} + R^{(i)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{(i)} \\ \beta^{(i)} \end{bmatrix} x_s^{(i)} \quad (13)$$

将计算轨道上各点坐标值与观测卫星坐标代入上述方程组，对每一空间坐标点可列出 3 个方程，每个方程有 3 个未知数 α, β 及 x_s ，因此，可解得卫星观测轨道上所有点对应的真值 α ， β 。

5.3.4 系统误差估计

模型一：非线性规划模型

由于系统误差 $d\alpha, d\beta, d\theta$ 通常为定值，又 (α, β) ， (α', β') 已知，则可建立非线性规划模型，利用 Lingo 软件求解。设目标函数为

$$Q = \min \left(\sum_{i=1}^{600} (\alpha' - \alpha + \beta d\theta - d\alpha + d\beta d\theta)^2 + \sum_{i=1}^{600} (\beta' - \beta - \alpha d\theta - d\beta - d\alpha d\theta)^2 \right)$$

模型二：线性回归模型

根据式 (10) 和 $\cos d\theta \approx 1$ ， $\sin d\theta \approx d\theta$ 得

$$\begin{bmatrix} \alpha + d\alpha \\ \beta + d\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta \\ d\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} \alpha + d\alpha = \alpha' - \beta' d\theta \\ \beta + d\beta = \alpha' d\theta + \beta' \end{cases} \text{。令} \begin{cases} x = d\alpha \\ y = d\beta \\ z = d\theta \end{cases} \text{得} \begin{cases} \alpha + x = \alpha' - \beta' z \\ \beta + y = \alpha' z + \beta' \end{cases} \text{，利用 } i \text{ 号观测卫星的 } (\alpha, \beta)，$$

(α', β') 进行回归可得系统误差。

经过计算，两种模型得到的结果近似。

由模型二得到的结果为

卫星编号	系统误差 $d\alpha$	系统误差 $d\beta$	系统误差 $d\theta$
06	-0.015	0.008	0.133
09	1.36E-4	1.39E-4	1.4E-4

5.3.4 修正系统误差后的飞行器轨道估计

根据二维平面 α, β 内的坐标旋转公式 (12)，可得卫星观测数据的修正公式：

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos d\theta & -\sin d\theta \\ \sin d\theta & \cos d\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix}$$

对卫星观测数据的系统误差进行修正后，飞行器的轨道估计与第二问方法一致。得到的 06 号和 09 号卫星对 0 号飞行器的轨道如下图 19 所示。

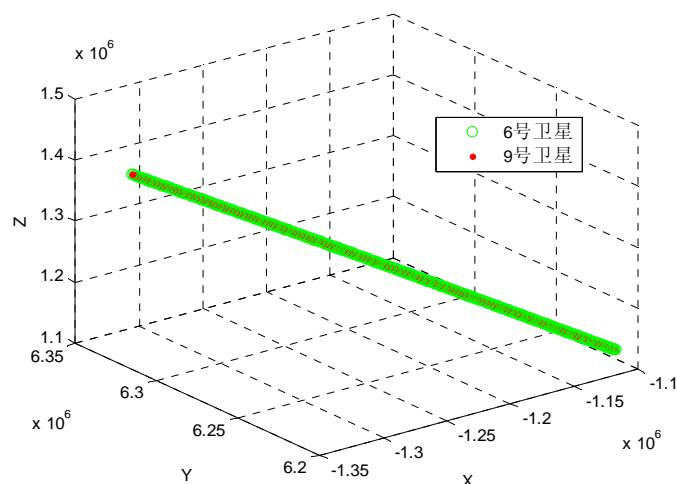


图 19 经过系统误差修正后两个卫星对 0 号飞行器的估计轨道

从上图可以得出结论，经过系统误差修正后，两个卫星对 0 号飞行器估计的轨道基本完全一致，其误差平方和为 7.5821 米。提出相应抽样点的坐标见下表 7。

表 7 修正误差后 0 号飞行器轨道坐标

时间(s)	06 号卫星			09 号卫星		
	X(m)	Y(m)	Z(m)	X(m)	Y(m)	Z(m)
50	-1113879	6201761	1136275	-1113797	6201817	1136170
60	-1121063	6208412	1144347	-1120906	6208522	1144153
70	-1130424	6215935	1155116	-1130239	6216068	1154890
80	-1141993	6224237	1168616	-1141815	6224371	1168400
90	-1155795	6233223	1184872	-1155644	6233341	1184690
100	-1171844	6242798	1203897	-1171732	6242889	1203762
110	-1190148	6252865	1225697	-1190077	6252924	1225612
120	-1210705	6263325	1250266	-1210673	6263353	1250227
130	-1233507	6274081	1277590	-1233505	6274083	1277588
140	-1258538	6285036	1307647	-1258555	6285020	1307667
150	-1285773	6296094	1340405	-1285797	6296071	1340433
160	-1315182	6307161	1375824	-1315199	6307144	1375845
170	-1346726	6318144	1413856	-1346726	6318145	1413856

分别绘出 06 号和 09 号卫星的位置—时间曲线，见图 20。

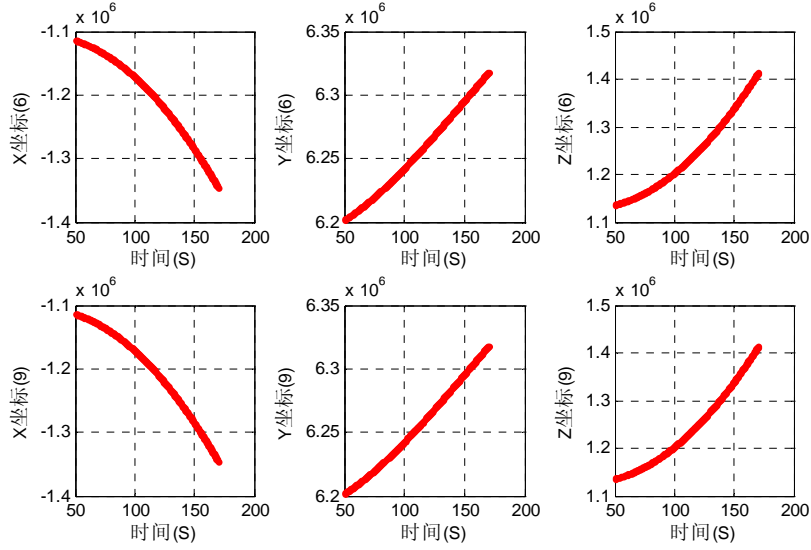


图 20 系统误差修正后 0 号飞行器的位置—时间曲线

5.4 问题四：单星或者多星定轨模型与误差分析

5.4.1 单星对一个飞行器的定轨

如果仅有 09 号卫星对 01 号空间飞行器进行轨道估计，一般情况下，由于测量值仅有 α', β' 和 09 号卫星的系统误差 $d\alpha, d\beta, d\theta$ ，利用转换公式

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos d\theta & -\sin d\theta \\ \sin d\theta & \cos d\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

可以得到真值 α, β 。

根据基础坐标 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 与观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 的转换方程

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x_s \quad (15)$$

如果仅有 09 号卫星的坐标 (x_0, y_0, z_0) 和它的转换矩阵 R ，但未给出 x_s ，无法确定 01 号空间飞行器的基础坐标 (x_c, y_c, z_c) 。因此必须知道 01 号空间飞行器的一些先验信息，如它的轨道特殊性、本身质量等参数，或者对它进行较强的轨道假定。

一般来说，飞行器在极短时间内，如远小于 $0.2s$ 内，飞行距离并不大，相对地面来说，可以假定它的空间位置没有变化。于是在这个较强的假定下，建模流程见图 21。

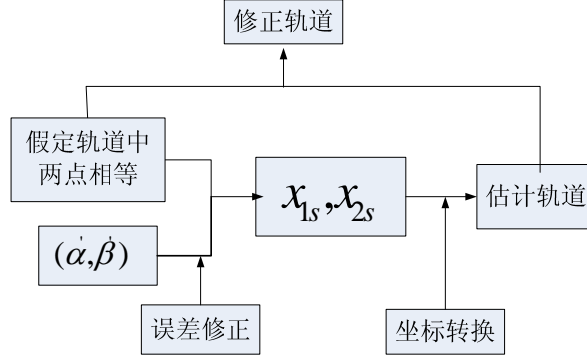


图 21 单星定轨建模流程

设 09 号观测卫星在极短时间内测得 01 号空间飞行器的两个观测值为 $(\alpha'_i, \beta'_i), i=1,2$ ，由 (14) 可得 $(\alpha_i, \beta_i), i=1,2$ ，则在 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 坐标下它的两个坐标为 $(1, \alpha_i, \beta_i) x_{is}, i=1,2$ ，另外已知 09 号观测卫星的对应的基础坐标分别为 $(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}), i=1,2$ 。于是，01 号空间飞行器在 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 下的两个坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{ic} \\ y_{ic} \\ z_{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{bmatrix} + R_i \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} x_{is}, i=1,2 \quad (16)$$

假定 $(x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}) = (x_{2c}, y_{2c}, z_{2c})$ ，得

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} x_{1s} = \begin{bmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{bmatrix} + R_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} x_{2s}$$

该三个方程中仅有两个未知量 $x_{is}, i=1,2$ ，如同问题 2 中两个观测卫星对同一空间飞行器测得坐标方程组联立求解一样，通过最小二乘求解得到 x_{1s} 和 x_{2s} ，通过 (16) 式得到观测卫星在 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 的初始时刻的两个坐标坐标，取平均进行修正。

同理，可以联立下两个观测点得到空间飞行器在基础坐标中的下一个坐标，以此类推。根据所给 meadata_9_1.txt 数据得到 01 空间分析器的估计轨道，如图 22 所示。

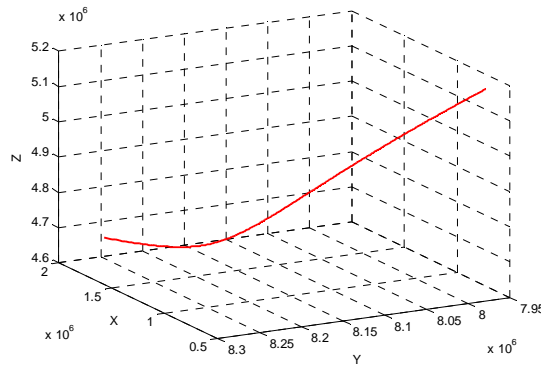


图 22 09 号卫星对 01 号飞行器轨道估计

抽取部分抽样点的的坐标见表 8。

表 8 09 号卫星对 01 号飞行器的轨道估计坐标

时间(s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
-------	-------	-------	-------

70.2	1639514	8292144	4720203
80	1600530	8192584	4667351
90	1549417	8163687	4680717
100	1496353	8146576	4705108
110	1442573	8133260	4733140
120	1388428	8121485	4762727
130	1334054	8110374	4793058
140	1279518	8099517	4823752
150	1224857	8088689	4854599
160	1170094	8077766	4885482
170	1115243	8066666	4916323
180	1060316	8055339	4947074
190	1005319	8043750	4977700
200	950261.3	8031873	5008177

位置—时间曲线，见图 23。

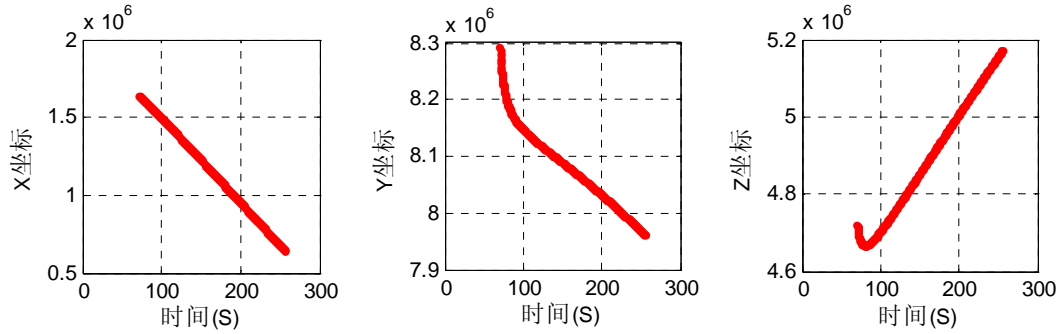


图 23 09 号卫星对 01 号飞行器估计轨道位置—时间曲线

结合空间飞行器在 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 坐标下的简化方程

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{m'(t)}{m(t)}$$

类似问题 2 的解法，选取适当的质量模型，可以得到 01 空间分析器的更精确的轨道。

5.4.2 多星对一个飞行器的定轨

对于 $n(n \geq 3)$ 个观测卫星，已知它们的系统误差为 $d\alpha^{(i)}, d\beta^{(i)}, d\theta^{(i)}$ ，首先可以通过测得 n 组数据 $(\alpha'_i, \beta'_i), i=1, 2, \dots, n$ 和式 (14) 得到 $(\alpha_i, \beta_i), i=1, 2, \dots, n$ 。

设空间飞行器在 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 观测坐标下的坐标为 $(1, \alpha_i, \beta_i)x_{is}$ ，则在 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 坐标系下的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{ic} \\ y_{ic} \\ z_{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{bmatrix} + R_i \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} x_{is}, i=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

由于空间飞行器在同一时刻下的基础坐标 (x_{ic}, y_{ic}, z_{ic}) 总相同，因此可以建立 $3 \times C_n^2$ 个方程的方程组，但却只有 $n(n < 3 \times C_n^2)$ 个未知数 $x_{is}, i=1, 2, \dots, n$ ，因此根据最小二乘法可以得到 $x_{is}, i=1, 2, \dots, n$ ，从而可以确定空间飞行器在该时刻下在这 n 个观测卫星下的基础坐标。

由于采用最小二乘法近似计算，在不同观测卫星下，空间飞行器的坐标可能略有不同。但是，如果观测卫星数越多，样本点越大，求得的飞行器的基础坐标差别会越小，会更精确。另外，如果 n 个观测卫星在多个时刻同时测得数据，通过数据融合方法，可以得到更精确的飞行器轨道曲线。

显然，多星共同轨道测试时不需要单星轨道测试那样强的假设条件，测得效果应该会更准确。另外，不管是单星还是多星轨道测试，可以根据上一刻测试结果，通过卡尔曼滤波等方法预测飞行器下一时刻的轨道。

5.4.3 多星对多个飞行器的定轨

多星对多个飞行器的定轨估计可以归结到多星对一个飞行器的定轨问题，但是这涉及到两个难点。

难点一：时间配对，即现实情况是多个卫星是在不同时刻对不同飞行器进行测试的，需要筛选在同一时刻，有几个测试卫星在对同一飞行器进行测试。

难点二：轨道配对，如果有多个飞行器，不易分清多个测试卫星测得的数据是否是同一个飞行器的，需要数据融合，确定测的是同一个飞行器的状态参数。

6、模型评价

6.1 模型的优点

(1) 在建立模型过程中思路清楚，计算方法得当，计算过程详实，计算结果可信。

(2) 在编程过程中，对参数的选取不断优化，模型的推导严谨。

(3) 对不同的情况能有针对性建模。

(4) 从误差分析上看，不管是拟合误差，还是轨道的误差都比较小，说明我们的模型是可靠的。

6.2 模型的缺点

(1) 由于问题 1,2 中没有考虑系统误差，问题 3,4 考虑了系统误差，但是解决问题 3,4 时用到了问题 1,2 中相关结果，难免使得系统误差的估计不够准确。题目本身使得使用所给数据在求解过程中犯了逻辑错误。

(2) 由于卫星实际测轨时情况多样，不同过程参数估计不够精确，简化假设太多，造成模型的实用性降低。

7、模型进一步推广

为了保证多个卫星对多个空间飞行器测量数据的精度，通过信息融合可以有效提高短时信号的频率估计精度，从而提高测距精度。如在雷达非线性度校正等过程中，采样所得信号中往往包含大量的噪声和干扰信号，并且其中一些干扰信号的频率往往与被测频率相近（将这类干扰信号简称为“邻近频率信号”）。当信噪比较低时，邻近频率信号和冲击噪声等对频率估计精度有严重影响。例如，为测量图 24 中物体 α 的 X 坐标 c_1 ，雷达 A_1 重复测量了 5 次，得到的采样信号如图 25 所示，其中包括频率为 f_x 、幅度为 2 的回波信号（如图 25 中的灰色直线）、幅度分别为 4 和 3 的两个邻近频率信号（如图 25 中的两条黑色直线）、幅度为 10、分别出现于第 1 “伪平稳”时间

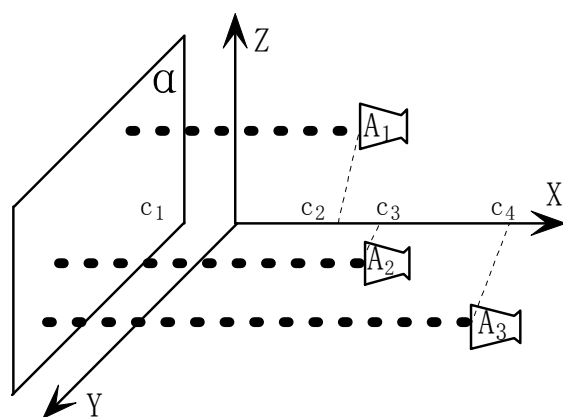


图 24 多段采样信号示例

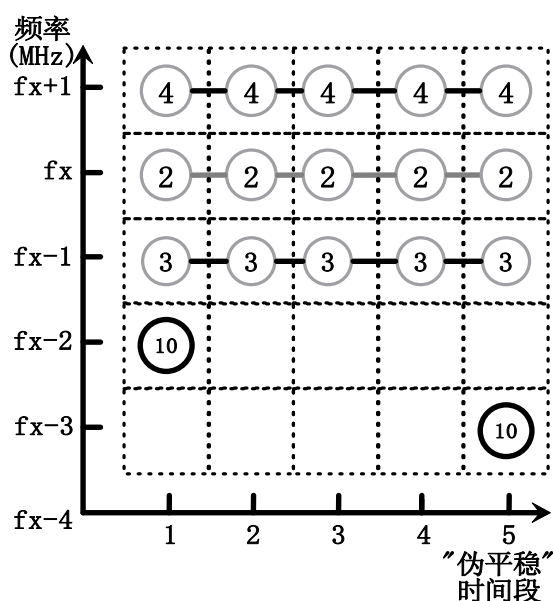


图 25 包含邻近频率信号的采样信号示例图表

段和第 5 “伪平稳”时间段的两段冲击噪声（如图 25 中的两个黑色圆圈）。此时，使用现有频率估计方法较难检测出被测频率 f_x 。例如，基于 DFT 的频谱校正类方法均不能反映局部时域信息，所以不能区分出冲击噪声。再例如，短时傅立叶变换 (STFT) 因为多段正弦信号具有数倍于单段信号的信息量，从信息论观点来看，对多段正弦信号进行信息融合能有效提高信号处理精度。例如图 26 所示，在相同采样频率和相同信噪比条件下对同一被测频率信号分别进行五次采样，得到五段采样信号，对应的幅频响应依次如曲线 1~5 所示。其中，前四次采样过程的持续时间相同，而第五次采样过程的持续时间为前四次之和。可以看出，由于前四段采样信号的持续时间短，所以各段采样信号中包含的信息量较少，导致曲线 1~4 的主瓣较宽，抗噪性差。将此四段采样信号构成一个多段同频等长信号并进行信息融合处理之后，则得到的功率谱将类似于曲线 6 所示，其主瓣宽度应比曲线 1~4 都窄，甚至接近于曲线 5 的主瓣宽度（注：由于第五段采样信号和多段同频等长信号长度相等，所以曲线 6 的主瓣宽度不可能小于曲线 5）。

多段信号融合方法研究具有必要性。由于被测频率持续时间短，即使采用频谱校正等方法也难以克服单段信号长度不足对频率估计精度的限制。而多段信号十分

易于获取，包含信息量大，能够从源头上为频率估计精度的改善提供良好的条件。

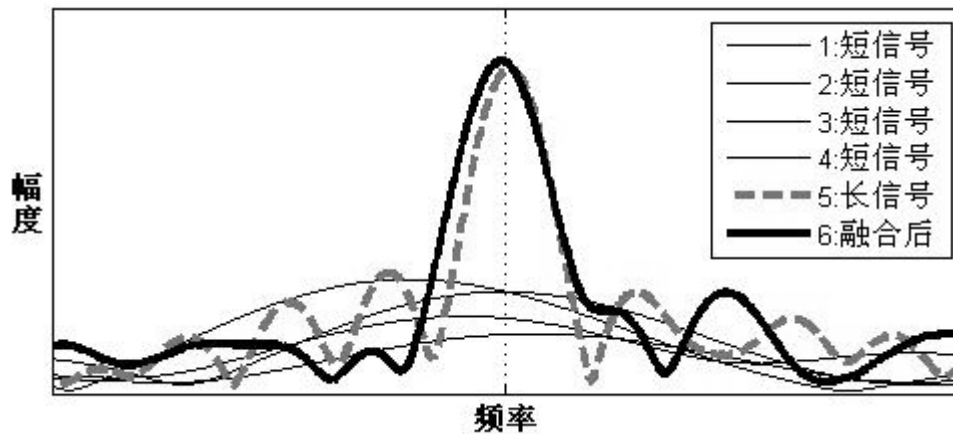


图 26 频率持续时间对功率谱主瓣宽度的影响

参考文献

- [1] 杨开伟,李娟娟等,基于布尔萨模型的大旋转角坐标转换参数算法[J],全球定位系统,NO6:45-48,2011.
- [2] 张毅,肖龙旭,王顺宏.弹道导弹弹道学[M].国防科技大学出版社,2005.
- [3] 任玉杰,数值分析及其 MATLAB 实现[M].高等教育出版社,2004.
- [4] 司守奎,孙玺菁,数学建模算法与应用[M].国防工业出版社,2011.
- [5] 陈磊,韩蕾等,空间目标轨道力学与误差分析[M].国防工业出版社,2010.
- [6] 王志刚,施志佳.远程火箭与卫星轨道力学基础[M].西北工业大学出版社, 2006.
- [7] 曹志高,高源,程洪玮,单星只测角对低轨卫星的 EKF 跟踪分析[J],飞行器测控学报,第 26 卷第 6 期,70-75,2007 年.
- [8] 斯文辉,鲜勇,一种基于弹道导弹导航信息的单星探测 EKV 技术[J],测控技术,39-43,第 29 卷第 2 期,2010 年.
- [9] 秦显平,贾晓林,宋晓勇,霍立业,导航卫星的单星定轨[J], 测绘科学与工程, 第 27 卷第 3 期,9-12, 2007 年
- [10] 陈盈果,刘晓路,陈英武,贺仁杰,优化多星协同观测的改进广义模式搜索算法[J],国防科技大学学报, 第 34 卷第 1 期,89-94, 2012 年