

---

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)



## 第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目      微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

---

### 摘      要

微蜂窝技术是提高移动通信量的重要手段，而传统的经验型传播模型无法对微蜂窝环境进行良好的模拟与仿真。射线追踪模型可依照光学方法辨识出多路径信道发射机和接收机之间的主要传播路径，进而分析每条传播路径信号的幅度和相位，由此获得接收点所有传播路径信号的相干合成结果。本文针对只考虑反射和绕射的二维城市微蜂窝环境，开展了进行如下工作。

基于镜像原理，建立了反向射线追踪模型，同时基于有效反射面的概念，给出了辨别有效像点的判据，由此解决发射点--接收点的纯反射传播路径计算。同时我们说明了此判据为有效像点的充要条件，此判据极大地提高了计算效率。

在包含绕射点路径的处理上，通过将绕射点虚拟为接收点（或发射点），将发射点--绕射点（--绕射点）--接收点路径的绕射传播问题分解为几个发射点--接收点的纯反射路径传播问题，绕射路径分解方法使得模型可以处理一次及多次绕射问题，并利用反向射线追踪模型求解。

问题一中，对发射机 Tx 和接收机 Rx，利用镜像反向射线追踪模型，利用 Python 软件编程求解得到 Tx 与 Rx 间传播路径共 99 条，其中包含 0 次绕射路径 0 条，1 次绕射路径 29 条，2 次绕射路径 70 条。路径长度主要落在[350 450]范围内，路径长度的均值和方差均满足 2 次绕射<1 次绕射。

问题二中，对于 25 种发射机-接收机组合，采用镜像法计算每种组合的传播路径。各组收发机间的传播路径条数见表 4.2，其中发射机(400,350)和接收机

---

(450,275)之间的传播路径(503 条)最多,发射机(500,350)和接收机(450,200)之间的传播路径(70 条)最少。

针对问题三,对比 25 种组合的传播路径,详细分类统计结果见表 4.3-4.4,讨论了发射机和接收机位置移动对应的各类传播路径数目的变化情况,并得到如下规律:传播路径数目 2 次绕射>1 次绕射>0 次绕射;传播路径长度均值和方差均为 2 次绕射<1 次绕射<0 次绕射;发射点由 A 移至 B,传播路径数目先增加后减少,在第 2 个位置最多;接收点由 C 移至 D,传播路径数目先增加后减少,在第 3 个位置最多。

本文证明了二维情形下能量与场强之间存在正比关系。通过分析视距传播中的反射情形和非视距传播中的绕射情形,给出计算给定传播途径上接收点处场强的方法。针对多波干涉问题,给出给定初相位分布规律求解合场强振幅概率密度的准确数学描述。

问题四中,对于单频多波干涉问题,建立了初始相位服从独立同均匀分布的随机性模型,模型刻画了接收点处场强的随机特性。随机性模型模拟问题规模与传播路径数目成指数关系,本文提出将合场强的幅值和相角分别进行离散叠加的数值模拟方法,使得问题规模仅与传播路径数目成正比。模拟得到 25 种情况振幅的一、二阶矩(见表 5.1-5.2)和概率密度函数。其中发射机(450,350)和接收机(450,300)组合对应振幅的一阶矩最大,发射机(300,350)和接收机(450,200)组合对应振幅的一阶矩最小。计算不同路径到达信号的相关性,结果表明:一阶矩或二阶矩与发射机位置的负相关特性随接收机向上移动而增强。根据概率密度函数曲线形状,本文采用 Rayleigh 分布进行近似,并对合理性进行分析验证。

问题五中,对于带宽多波干涉问题,建立了相位服从均匀分布半确定性模型。该模型考虑了各路径的相位差信息,可以分析不同频率波的包络统计特性。同一频率,不同信号之间相关性分析表明:合场强幅值与接收机位置的负相关特性随发射机向右移动而减弱,合场强幅值与发射机位置的正相关特性随接收机向上移动而减弱。同一路径,不同频率信号之间相关性分析中没有发现明显的相关性。

最后,本文通过分析入射角分布指出模型中忽略半波损失的合理性。对离散模拟方法同样适用于随机相位满足其它非均匀分布的情形进行了分析。利用单频问题中 Rayleigh 分布规律,提出通过半经验模型得到的合场强幅值估算合场强信号概率密度函数的方法。

**关键词:** 有效反射面 镜像法 绕射路径分解法 随机模拟 Rayleigh 分布

---

## 目 录

1	问题重述.....	4
1.1	研究背景.....	4
1.2	基本问题：射线跟踪法确定电波的主要传播路径.....	4
1.2.1	单组收发机间电波主要传播路径的确定.....	4
1.2.2	不同位置多组收发机间电波主要传播路径的确定及规律分析.....	5
1.3	宽带问题：多波干涉下的合成波特特性分析.....	5
1.3.1	单频多波干涉下的合成波特特性分析.....	5
1.3.2	宽带多波干涉下的合成波特特性分析.....	5
2	问题分析.....	6
3	基本假设及符号说明.....	7
3.1	基本假设.....	7
3.2	符号说明.....	7
4	传播问题模型建立与求解.....	7
4.1	反向射线追踪法模型建立与求解方法.....	8
4.1.1	仅包含反射的传播路径的确定：镜像法.....	8
4.1.2	含绕射传播路径的确定：绕射路径分解法.....	13
4.2	发射机-接收机主要传播路径求解.....	14
4.3	25 种发射机-接收机组合传播路径求解.....	17
4.4	25 种组合的路径对比分析.....	18
5	单频多波干涉现象.....	19
5.1	接收信号场强求解方法.....	20
5.2	随机性模型建立与空间离散求解方法.....	22
5.3	振幅统计学分析与概率密度特性.....	23
5.4	采用 Rayleigh 分布拟合概率密度函数.....	24
5.5	信号相关性分析.....	25
6	宽带多波干涉现象.....	27
6.1	半确定性模型建立.....	27
6.2	同频率不同路径信号相关性分析.....	27
6.3	同路径不同频率信号相关性分析.....	28
7	模型评价.....	29
8	进一步研究的问题.....	29

---

# 1 问题重述

## 1.1 研究背景

无线传播系统中目前常用传播模型有三类：经验模型、半经验模型和确定性模型。经验模型是通过对大量实测数据的统计分析得出的，不需要具体的环境信息；确定性模型是针对具体环境直接应用电磁理论进行计算；半经验模型是基于把确定性方法用于一般环境中导出的。

随着移动通信对系统容量的要求越来越高，频谱资源越来越紧缺，微蜂窝系统由于采用频谱复用技术而得到广泛应用。然而由于微蜂窝系统的小区半径小于一千米，微蜂窝之间的统计相似关系丢失，导致传统的经验模型无法应用，给运营商在初期规划划分小区、选择基站位置和高度等带来了困难。如果通过实际测量、反复测试的方法，则需要投入大量的时间、人力和财力。因此需要建立更加精确的传播预测模型，根据对无线传输信道的模拟和仿真，预测接收信号，链路预算小区半径，计算电波传播及干扰。

常用的确定性模型包括时域有限差分法（FDTD）和射线跟踪法。FDTD 方法运算准确性高但需要大量的存储空间，可以用作检查和验证其他建模激励的标准。因此射线跟踪模型更适于我们使用的确定性模型。由于移动通信中使用的是超高频微波，其波长和建筑物尺寸相比要小得多，此时电波传播可以用几何光学来近似，因此我们可以按光学方法辨认多路径信道中接收机和发射机间所有主要的传播路径，然后再根据电波传播理论可以计算每条传播路径信号的幅度、相位、延迟、和极化，再结合天线方向图和系统带宽就可得到到达接收点的所有传播路径的相干合成结果。

本文主要解决以下两个方面的问题：

## 1.2 基本问题：射线跟踪法确定电波的主要传播路径

### 1.2.1 单组收发机间电波主要传播路径的确定

根据实际情况，选择发射角量化的精细程度，然后跟踪确定图 1.1 中发射机  $T_x$ （坐标为(500,200)）和接收机  $R_x$ （坐标为(250,350)）间的主要传播路径，并可视化展示在图 1.1 中。

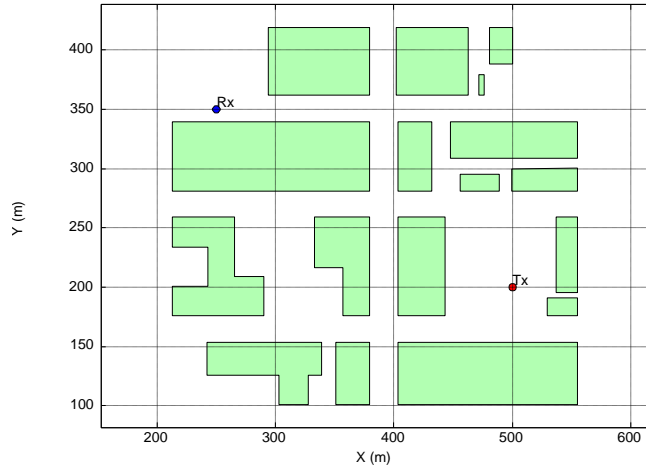


图 1.1 渥太华市区部分区域二维视图

### 1.2.2 不同位置多组收发机间电波主要传播路径的确定及规律分析

如图 1.1 所示，若在路径 AB 上以 50 m 为间隔取 5 个位置放置发射机，在路径 CD 上以 25 m 为间隔放置接收机，那么在 25 种发射机-接收机组合中，哪个组合间的传播路径最多，哪个最少？并对这 25 个收发机组合的传播路径进行对比，寻找更多的规律。

## 1.3 宽带问题：多波干涉下的合成波特特性分析

### 1.3.1 单频多波干涉下的合成波特特性分析

对于基本问题 II 中提到的 CD 路径上的所有接收点，多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i)} \quad (1)$$

其中， $Q$  为到达某接收点的传播途径总数； $A_i$  和  $r_i$  分别为到达接收点的第  $i$  条传播路径的信号电场强度和长度； $k r_i$  为长度为  $r_i$  的传播路径上的相位积累； $\omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$  ( $c$  为光速，值为  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )。

针对上述 25 种收发组合，对这种多波干涉的振幅  $|f(\omega, t)|$  进行统计学分析，包括其二阶矩特性（期望和方差），不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数。

### 1.3.2 宽带多波干涉下的合成波特特性分析

对于图 1.1 中，从发射机同时发射一组功率相同的电波，频率从 2000 MHz 到

---

2100  $Mhz$ ，间隔近似 1  $Mhz$ ，即总共发射 101 个单频信号。这样每个单频信号都会形成多波干涉，多个单频信号会形成宽带多波干涉，对这种宽带多波干涉现象进行数学建模，并分析合成波的包络统计特性，如同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性等。

## 2 问题分析

城市环境下的微蜂窝主要指高楼密集区，其覆盖范围仅为几百米甚至几十米。由于微蜂窝环境的特殊性，经验模型无法应用，给运营商在微蜂窝环境中的网络初期规划带来了困难[2][3]。为给运营商提供理论依据，需要利用传播模型对无线传输信道模拟仿真，计算电波传播及干扰，预测接收信号，预测的结果越精确越好。

射线跟踪是广泛用于微蜂窝环境中预测无线电波传播特性的确定性模型[4][11]。基于射线跟踪模型对微蜂窝环境中无线接收信号的特性进行分析，首先要做的就是确定接收机和发射机间的传播路径。利用射线跟踪法确定收发机间的传播路径包括两种思路：正向射线跟踪和反向射线跟踪[11]。正向射线跟踪是由源点出发，向周围空间均匀发出大量的射线束，分别跟踪每根射线束的路径。对于射线束[6][7]，在接收点用接收球判定该射线束对接收点的场强是否有贡献，而接收球的半径是由等划分的射线束决定的，因此正向跟踪在相位信息计算方面并不精确。反向射线跟踪是根据几何原理，由场点出发，反向追踪每一条能从原点到达场点的路径。

相对于正向跟踪来说，反向跟踪计算得到的相位信息精确[11][12]，因此本文采用反向射线追踪来确定题目中各组发射机和接收机之间的电波传播路径，并把这些传播路径可视化展示。进一步，对不同位置的收发机得到的传播路径规律进行总结。题目中给出了 4 种传播路径的约束，我们将进一步考虑其它情形，从而对截断误差进行分析，探讨约束的合理性。

有了各组收发机间的所有传播路径，就可根据电波传播理论来确定反射和绕射的损耗等，这样就可以得到每条传播路径到达接收点的场强，将到达同一接收点的所有路径的场强做相干叠加，就能得到每个接收点处总的接收场强。

由于发射角的量化过程，当我们把每条传播路径的初始相位看作独立同分布的随机变量时，那么接收点处的场强也是随机变量，我们采用离散幅值和相角的方法，对每条路径的幅值和相角（随机变量）依次叠加，得到合成场强极其概率，统计振幅的概率密度函数。有了概率密度函数，就能计算振幅的分布函数，期望和方差。有了这些信号的参数，我们就能分析发射机位置固定，接收机位置对信号的影响，以及接收机位置固定，发射机位置对信号的影响，即进行不同路径到达信号的相关性分析。

当发射机发射不同频率的信号时，为了考虑频率的影响，应当加入相位信息，我们采用半确定模型：各条射线初始相位相同且初相位服从均匀分布。模型考虑各路径的相位差信息，分析合成波的包络统计特性：同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性。

### 3 基本假设及符号说明

#### 3.1 基本假设

本文关于微蜂窝环境中无线接收信号的特性研究基于以下基本假设：

1. 微蜂窝环境下建筑物的高度高于基站天线的高度，电波经过屋顶绕射后到达地面接收点的射线路径场强贡献很小，本文将三维传播环境简化为二维问题进行分析；
2. 只考虑反射和绕射两种传播机制，反射在建筑物（二维简化多边形）的边上发生，绕射在建筑物（二维简化多边形）的顶点上发生；
3. 所有建筑物均为理想介质，即电磁波传播到建筑物表面时，80%的能量按照反射传播规律被反射出来，其余 20%能量进入建筑物继续传播，这一部分能量可以忽略；
4. 仅考虑下列传播路径，忽略其它传播路径对场强的贡献：
  - ①只存在反射，且反射次数不超过 7 次；
  - ②只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次；
  - ③一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合；
  - ④两次绕射和一次反射的任意组合。

#### 3.2 符号说明

常用符号如表 3.1 所示：

表 3.1 符号说明

符号	定义
$E$	电场强度
$D$	绕射系数
$k$	波数
$Q$	到达接收点的传播路径总数
$\omega$	信号角频率
$\alpha_1$	入射角
$\alpha_2$	绕射角
$c$	光速

### 4 传播问题模型建立与求解

为了预测微蜂窝环境中的发射点发射的电波到达接收点时的信号强度，对

无线接收信号的特性进行分析，为运营商在网络初期规划提供参考，首先应该确定信道中收发机间电波所有主要的传播路径[7][9]。

射线跟踪法就是根据超高频电波的传播可以用几何光学来近似的原理，按照光学方法辨认电波传播路径的典型传播预测模型。射线跟踪法包括正向射线跟踪和反向射线跟踪两种。本节就根据更为精确的反向射线跟踪法确定题目中规定的各对收发点间的主要传播路径，并对所得结果进行分析，得出更多规律。

#### 4.1 反向射线追踪法模型建立与求解方法

反向射线追踪法是根据几何光学原理,由场点出发,反向追踪每一条能从原点到达场点的路径[2][10]。因此反向射线追踪法是一种相对精确的算法，但是反向算法相对于正向算法来说效率低，复杂度大。

用反向射线追踪法确定发射机与接收机间的传播路径我们分两个步骤进行[5]：对于仅包含反射的传播路径，我们采用文献[5]提供的改进判据删除像点树中的无效像点的方法；有了反射路径的确定方法，对于包含绕射的传播路径，采用将绕射点作为新的发射源加入路径的方法。简单的说，就是从发射点和接收点用反射路径“凑”中间的绕射点。

##### 4.1.1 仅包含反射的传播路径的确定：镜像法

文献[5]为我们提供了两种判据来删除无效像点，判断有效反射线，我们使用第二种更为精确的改进判据：通过计算有效反射面来降低反向算法的复杂度，提高效率。

运用改进判据的关键是计算有效反射面。对于有效反射面的计算，我们分两步考虑：首先考虑没有遮挡物的情况下，有效照射范围的确定；然后考虑不同位置的遮挡物对于有效照射范围的哪些部分有遮挡，这样我们就最终确定出了有效反射面。

首先我们说明在不考虑遮挡物的情况下如何判断一个像点向另一个反射面反射时的有效照射范围。如图 4.4，设  $O'$  为某像点  $O$  关于  $PQ$  面产生新像点，由  $O$  点经过  $PQ$  面反射向  $AB$  面照射，其有效照射范围的确定按如下算法步骤进行：

- Step 1. 调整  $A$ 、 $B$  的顺序，使  $\overline{O'B}$  在  $\overline{O'A}$  的左侧，即  $\overline{O'A} \times \overline{O'B} > 0$ ，同时调整  $P$ 、 $Q$  和  $A$ 、 $B$ ；
- Step 2. 计算  $O'P$  在  $AB$  上的投影  $A'$  和  $O'Q$  在  $AB$  上的投影  $B'$ ；
- Step 3. 若  $A'$  在  $O'P$  的正向延长线上或者  $B'$  在  $O'Q$  的正向延长线上，则按 Step4 计算有效照射范围；否则照射范围为 0；
- Step 4. 若  $O'A'$  在  $O'A$  左侧，则  $AA'$  为无效照射范围，在  $AB$  线段上删去  $AA'$ ；若  $O'B'$  在  $O'B$  右侧，则  $BB'$  为无效照射范围，在  $AB$  线段上删去  $BB'$ ；否则（ $O'A'$  在  $O'A$  右侧且  $OB'$  在  $OB$  左侧）有效照射范围为整个  $AB$ 。



图 4.5-4.7 是对上述算法中各种情况的直观表示。

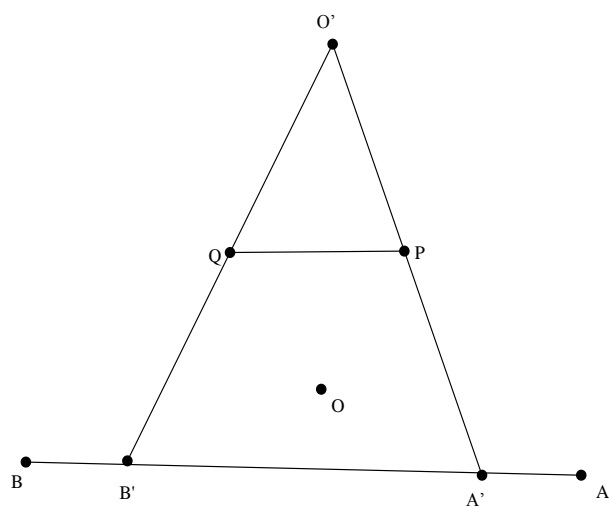


图 4.5 调整反向后两个投影点都在正向延长线上

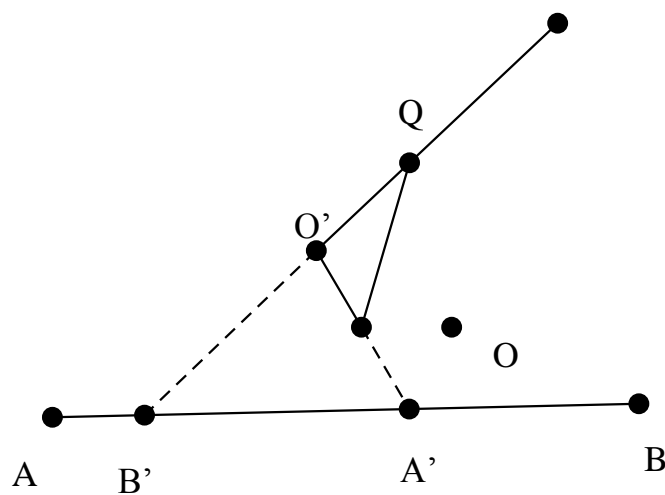


图 4.6 只有一个投影点在正向延长线上

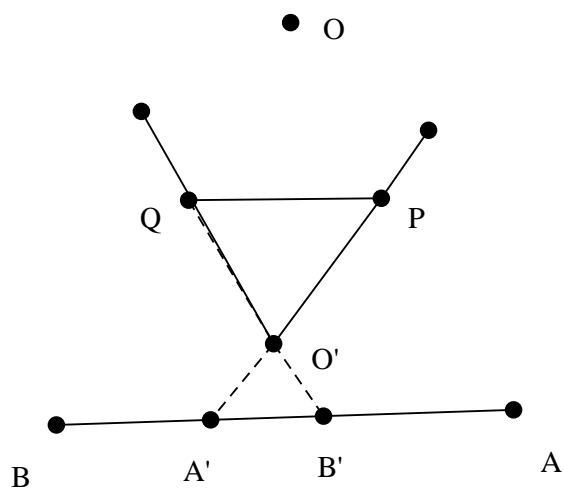


图 4.7 两个投影点都在反向延长线上

按 Step 1 到 Step 4 进行，便删掉了无效的照射范围，得到了一个像点按某个反射面投射到其它反射面的有效范围，记为  $MN$ 。

有了有效照射范围  $MN$ ，接下来我们说明针对不同的遮挡物的位置如何计算有效反射面。

如图 4.8 所示，假设  $XY$  为遮挡物，显然若  $XY$  在  $PQ$  上方或  $MN$  下方不能形成遮挡，所以我们假设  $XY$  在  $PQ$  与  $MN$  之间。并且由题目给出的微蜂窝环境（见图 1.1）， $XY$  不可能与  $PQ$  或  $MN$  相交。因此我们可以按如下的算法步骤计算  $MN$  上的有效反射面。

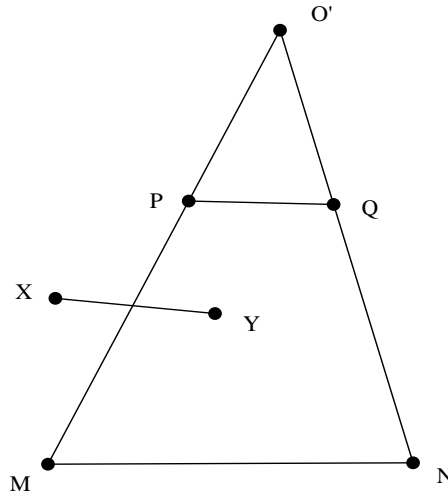


图 4.8 有效照射范围内出现遮挡物

- Step 1. 计算  $O'X$  在  $MN$  上的投影  $X'$  和  $O'Y$  在  $MN$  上的投影  $Y'$ ；
- Step 2. 若  $X$  和  $Y$  都在  $PQMN$  区域内，则  $X'Y'$  为无效反射面，在  $MN$  线段上删去；
- Step 3. 若  $X$  在  $PQMN$  区域内且  $Y$  不在  $PQMN$  区域内，则  $X'N$  为无效反射面，在  $MN$  线段上删去；若  $Y$  在  $PQMN$  区域内且  $X$  不在  $PQMN$  区域内，则  $MY'$  为无效反射面，在  $MN$  线段上删去；
- Step 4. 若  $X$  和  $Y$  都不在  $PQMN$  区域内，则判断  $XY$  是否与  $PM$ 、 $QN$  有交点：若有，则  $XY$  全部遮挡  $MN$ ，有效反射面为 0；若无，则  $XY$  不遮挡  $MN$ ，有效反射面为  $MN$ 。

图 4.9–4.11 是对上述算法中各种情况的直观表示。

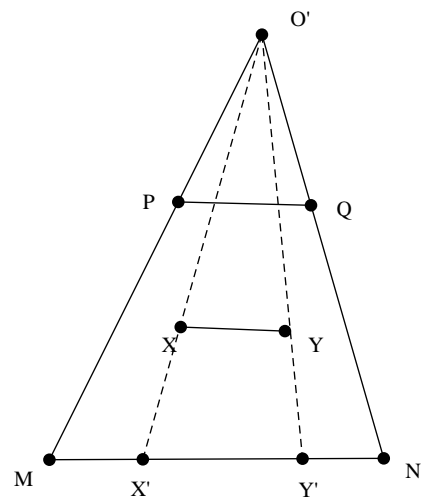


图 4.9 遮挡物的两端都在  $PQMN$  区域

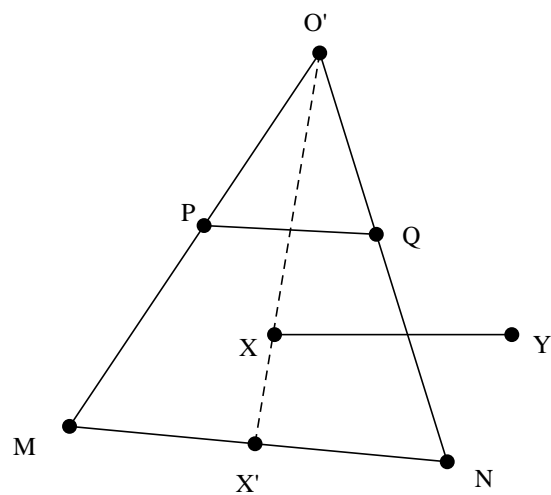


图 4.10 遮挡物只有一端在  $PQMN$  区域内

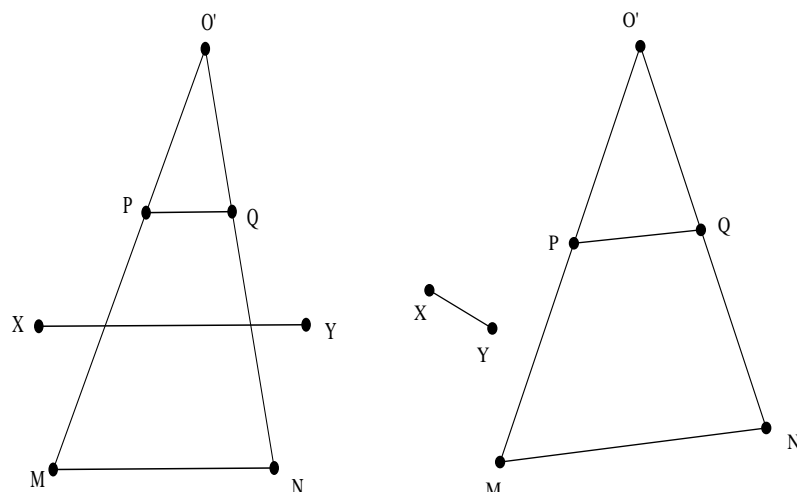


图 4.11 遮挡物两端都不在  $PQMN$  区域内的两种情况

按 Step 1 到 Step 4 进行, 便删掉了无效反射面, 得到了有效照射范围  $MN$  上的有效反射面。

有了有效反射面的计算方法, 下面我们介绍改进判据:

**判据 1:** 若按上面两种算法求得的有效反射面积为空等价于该像点是无效像点。

**判据 2:** 用改进判据 1 后仍保留在像点树上的点是有效像点, 接收天线处于某有效像点的照射区里等价于该像点一定存在有效反射线。

注: 一条射线为有效反射线等价于该射线在行进途中不被遮挡且所有反射点都存在于实际反射面上。对应于计算有效反射面计算过程中, 计算有效照射范围的部分保证了所有反射点都存在于实际反射面上; 而根据有效照射范围计算有效反射面的部分保证了射线在行进途中不会被遮挡。

根据改进判据可以删除像点树[5] (如图 4.12) 上所有的无效像点。

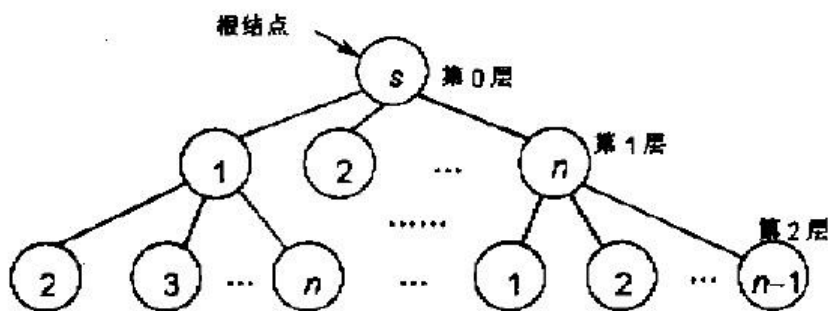


图 4.12 像点的树表示

因为由改进判据 1 是判定有效像点的充要条件, 因此我们只需再根据改进判据 2 判断接收点是否在每个有效像点的照射区里 (包括该有效像点与接收点之间是否有障碍以及这两点的连线是否与实际的反射面相交)。只要接收点在某个有效像点的照射区里, 就能由光学的反射原理确定一条从发射点到接收点的有效传播路径。之所以确认我们找到的传播路径是有效的, 是因为我们对有效

反射面的计算确保了射线在每一次反射过程中都不会被遮挡，且所有的反射点都在实际的反射面上。

我们用一个简单的例子说明怎样根据有效像点确定反射路径。如图 4.13，最终确定了两个有效像点， $T_x'$  和  $T_x''$ ，首先判定接收点是否在  $T_x'$  和  $T_x''$  的照射区域里，以  $T_x''$  点为例，连接  $R_x$  与  $T_x''$  交某个实际反射面于  $A_1$ ，并且  $R_x$  与  $A_1$  之间没有遮挡，因此判定  $R_x$  在  $T_x''$  的照射区域里。然后按照光的反射原理就找到了一条有效的传播路径  $T_x \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow R_x$ 。

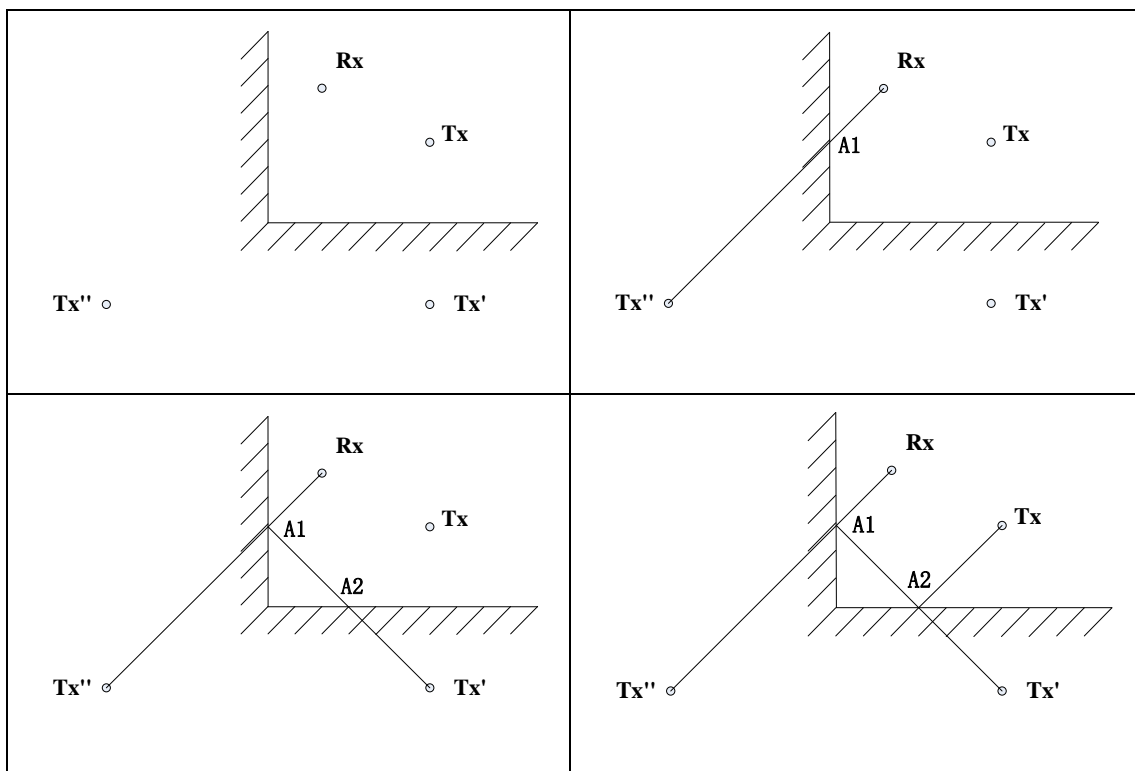


图 4.13 根据有效像点确定反射路径

#### 4.1.2 含绕射传播路径的确定：绕射路径分解法

无论入射线以任意角度入射到建筑物顶点上，绕射射线都会以任意出射角向没有建筑物覆盖的区域传播，因此直接跟踪绕射射线没有一定的规律可循，然而题目中只要求我们考虑不超过两次绕射的传播路径，因此对于包含绕射的传播路径我们分两种情况：包含一次绕射和包含两种绕射。因为在 4.1.1 中我们已经找出了如何确定仅有反射的传播路径的方法，所以对于包含一次（两次）绕射的传播路径，通过将绕射点虚拟为发射点或接收点，将发射点—绕射点（--绕射点）--接收点路径的绕射传播路径分为两（三）个纯反射路径传播问题，我们把这种方法叫做绕射分解法。

绕射分解法计算包含不超过两次绕射路径的算法：

**Step 1.** 找出从发射点出发的所有有效镜像点；找出所有从接收点出发的所有有效镜像点。

---

**Step 2.** 找出包含一次绕射且反射次数不超过 4 次的路径:

a 枚举所有的绕射点, 即图 1.1 中的角点, 共有 80 个, 把这些绕射点的集合记为  $M$ ;

b 对于  $M$  中的任意一个点  $m$ , 找出发射点到  $m$  点的仅通过反射且反射次数不超过 4 次的所有路径, 假设共有  $x$  条, 把这  $x$  条路径的集合记为  $P_m^1$ ; 找出接收点到  $m$  点的仅通过反射且反射次数不超过 4 次的所有路径, 假设共有  $y$  条, 把这  $y$  条路径的集合记为  $P_m^2$ ;

c 对于  $P_m^1$  与  $P_m^2$  中的路径进行组合 ( $P_m^2$  中的路径逆向), 共有  $xy$  种组合, 即从发射点到接收点仅通过一次  $m$  点绕射的路径数位  $xy$ , 对其它点也做同样的处理, 便得到了从发射点到接收点仅通过一次绕射的所有路径。

d 判定上一步中得到的所有路径是否满足总反射次数不大于 4, 即进行组合的两部分路径分别反射的次数之和要小于等于 4 才是满足题目要求的传播路径。

**Step 3.** 找出包含两次绕射和反射次数不超过一次的路径:

a 枚举  $M$  中所有的点对, 共有  $80^2$  对, 把这些点对的集合记为  $MM$ ;

b 对于  $MM$  中的任意一对  $(m_i, m_j)$ , 找出从  $m_i$  点出发的所有有效镜像点;

c 分别找出从发射点到  $m_i$ , 从  $m_i$  到  $m_j$  和从  $m_j$  到接收点的所有仅包含反射且反射次数不超过一次的路径;

d 对上一步得到的三种路径进行组合 (类比 Step 2 中步骤 c 的组合方法) 得到的路径就是从发射点到接收点仅通过两次绕射的所有路径;

e 从 d 中得到的所有路径中找出总反射次数不大于 1 的路径, 便是我们要找的绕射次数为 2, 反射次数不大于 1 的路径。

通过上述算法, 我们就可以精确地找到了所有满足题目要求的包含绕射的传播路径。

## 4.2 发射机-接收机主要传播路径求解

根据反向射线跟踪模型, 我们跟踪确定了发射点  $T_x$  到接收点  $R_x$  之间的所有满足条件的传播路径, 如图 4. 14 所示:

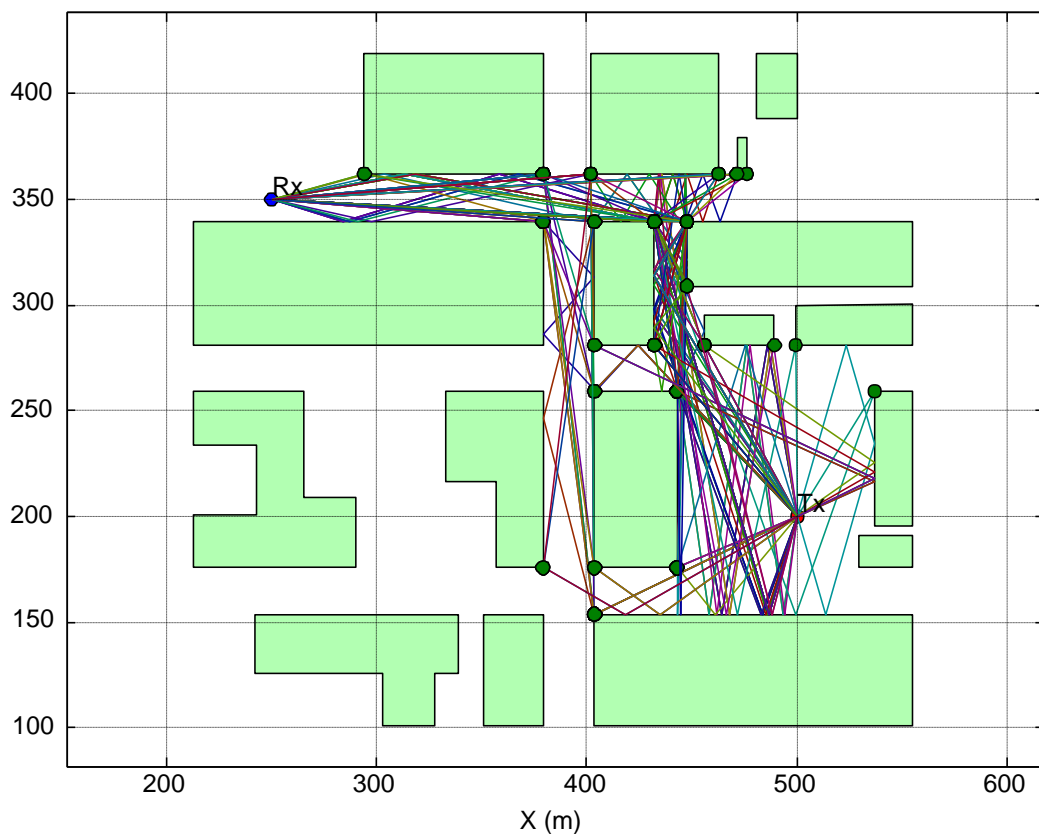


图 4.14 所有传播路径图（99 条）

Tx 与 Rx 之间不含绕射点的传播路径为 0 条，即仅靠 7 次以内反射无法到达 Rx 点。进一步计算发现，即使将反射次数提高到 12 次，仍然无法找到仅依靠反射到达的路径。

传播路径中含且仅含 1 个绕射点共有 29 条，如图 4.15 所示：

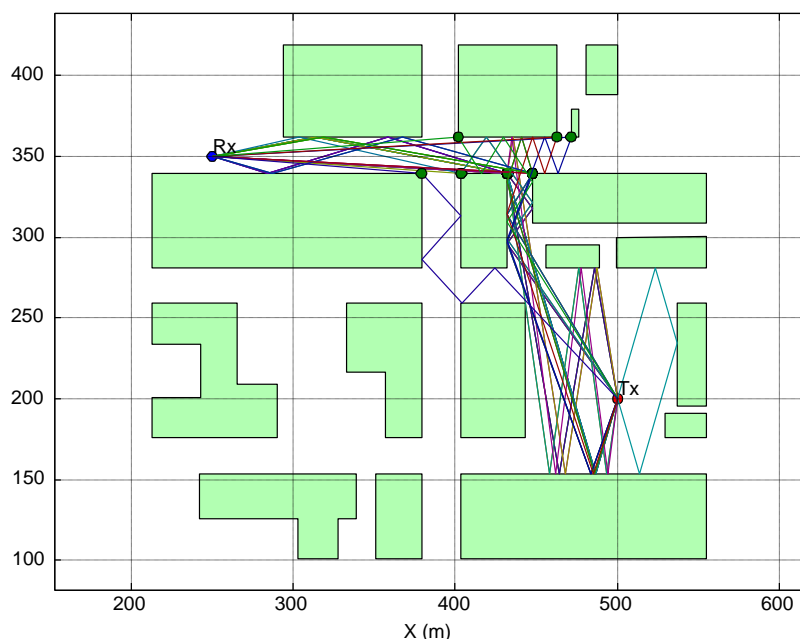


图 4.15 含且仅含 1 个绕射点路径图（29 条）

传播路径中含且仅含 2 个绕射点共有 70 条，如图 4.16 所示：

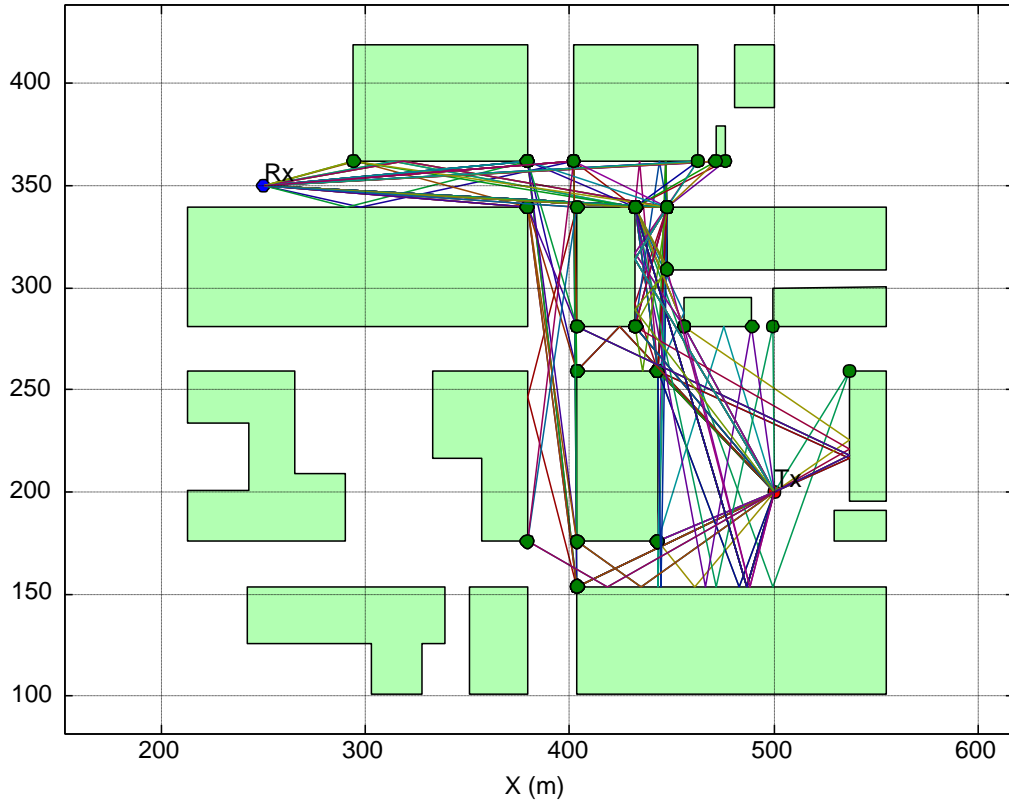


图 4.16 含且仅含 2 个绕射点路径图（70 条）

图 4.17-4.19 分别给出了全部路径、一次绕射路径、二次绕射路径长度分布直方图。可以看出，路径长度主要落在[350, 450]范围内，2 次绕射的路径长度小于 1 次绕射。

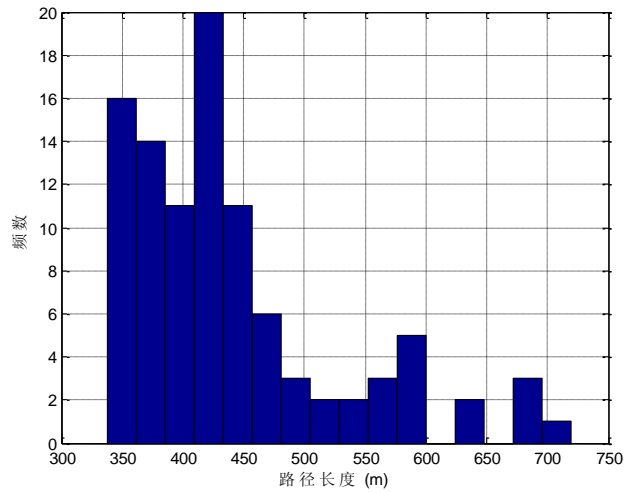


图 4.17 全部路径长度分布直方图



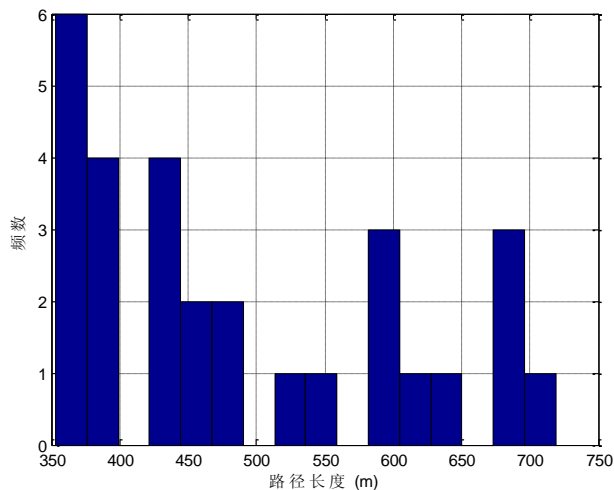


图 4.18 一次绕射路径长度分布直方图

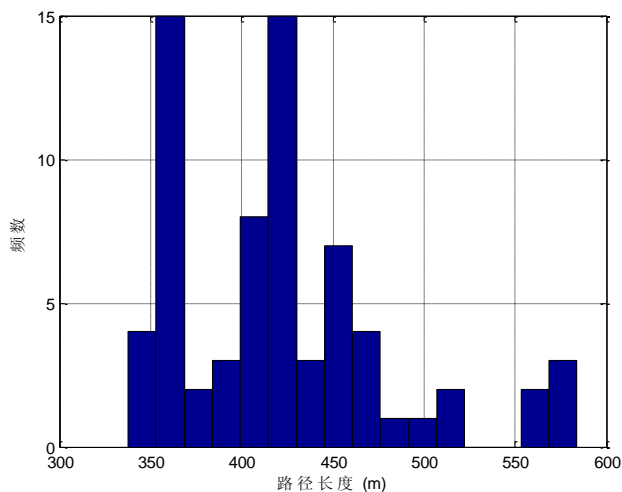


图 4.19 二次绕射路径长度分布直方图

进一步，表 4.1 给出了各绕射次数路径的统计特性，路径长度的均值和方差均为 2 次绕射小于 1 次绕射。

表 4.1 各绕射次数路径的统计特性

	全部路径	一次绕射	二次绕射
一阶矩	441.21	487.80	421.91
二阶矩	7423.06	14103.16	3529.55

### 4.3 25 种发射机-接收机组合传播路径求解

我们分别对图 1.1 中  $AB$  和  $CD$  之间 25 组收发机之间的传播路径进行了跟踪确定。

表 4.2 给出 25 种情况的路径数量统计，为清晰说明，在  $A$  与  $B$  之间标记

A1~A5，在 C 与 D 之间标记 C1~C5。观察发现：发射机 A3（400,350）和接收机 C2（450,275）之间的传播路径（503 条）最多，发射机 A5(B)（500,350）和接收机 C5(D)（450,200）之间的传播路径（70 条）最少。

表 4.2 25 种情况的路径数量统计表

	C1 (D)	C2	C3	C4	C5 (D)
A1 (A)	150	185	127	111	81
A2	132	184	111	106	83
A3	283	503	336	344	325
A4	370	471	406	398	376
A5 (B)	128	163	106	95	70

#### 4.4 25 种组合的路径对比分析

通过分析表 4.3 可知，对于 0 次绕射，A4 点对应的路径数目最多。结合地图可知，A4 下方对应开口，因此对应更多的直接反射路径。对于 1 次绕射，同样 A4 点对应的路径数目最多。对于 2 次绕射，A3 点与 A4 点对应的路径数目均较多，这是因为这两点下方均对应开口，而两次绕射方向的任意性使得射线条数较多。

表 4.3 25 种发射机/接收机组合各路径类型表

发 接	A1 C1	A1 C2	A1 C3	A1 C4	A1 C5	A2 C1	A2 C2	A2 C3	A2 C4	A2 C5	A3 C1	A3 C2	A3 C3	A3 C4	A3 C5	A4 C1	A4 C2	A4 C3	A4 C4	A4 C5	A5 C1	A5 C2	A5 C3	A5 C4	A5 C5
0 绕射	2	1	0	0	0	3	2	0	0	1	8	9	8	1	1	13	13	14	16	13	0	1	0	0	0
1 绕射	62	57	41	30	19	50	62	32	31	22	123	145	105	106	94	209	227	219	221	221	50	45	28	21	13
2 绕射	86	127	86	81	62	79	120	79	75	60	152	349	223	237	230	148	231	173	161	142	78	117	78	74	57

表 4.4 给出了所有路径数目和长度的统计数据，含 2 个绕射点的路径数目最多，路径长度均值和方差均为 2 个绕射点<1 个绕射点<0 个绕射点。

表 4.4 所有路径数目和长度的统计数据表

	含 2 个绕射点	含 1 个绕射点	含 0 个绕射点
路径数目	3305	2233	106
路径长度均值	280.35	316.12	330.02
路径长度方差	13847.54	20462.13	30373.02

图 4.20 给出发射机由 A 移动到 B 时，路径数目的变化情况，传播路径数目先增加后减少，在 A4 位置出现峰值最多。

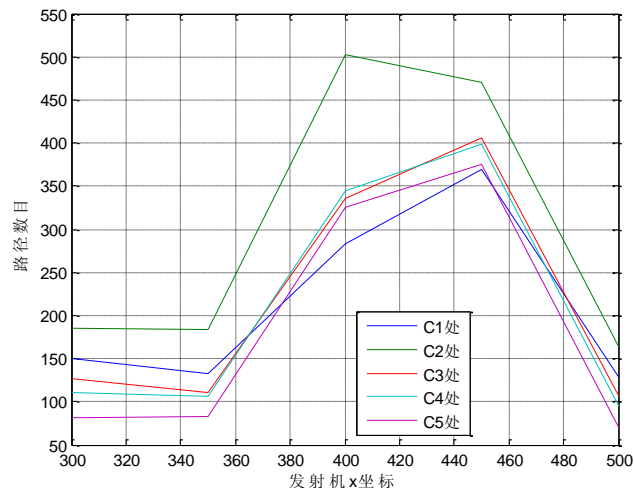


图 4.20 发射机由 A 移动到 B 时，路径数目变化曲线图

图 4.21 给出接收机由 C 变化到 D 时，路径数目变化情况，传播路径数目先增加后减少，在 C2 位置出现峰值最多。

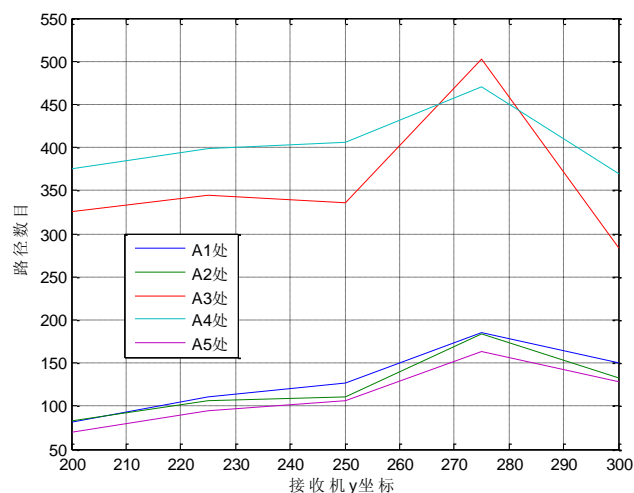


图 4.21 接收机由 C 变化到 D 时，路径数目变化曲线图

## 5 单频多波干涉现象

在移动通信系统中，发射机发出的电波会通过多种传播路径到达接收点，如果发射机只发射同一频率的电波，那么这些频率相同，振动方向相同，初相位相同的简谐波在各个接收点相遇叠加，出现某些接收点振动始终加强，某些接收点振动始终减弱的现象称为多波干涉现象。

本节我们就分别针对多波干涉现象分析合成波的特性（主要针对振幅），目的在于分析收发机位置的不同引起接收点信号强度的变化，为运营商的网络初

期规划提供理论依据。

## 5.1 接收信号场强求解方法

由于发射角量化实际是用一根光线代替一簇光线，那么一根光线所包含的相位是它代表的那簇射线的综合结果，因此我们这些综合的初相位看作联合概率分布的随机变量。假设从发射点到接收点更有  $Q$  条传播路径，为了简化计算，我们假设这些传播路径的初相位  $\varphi_{0i}$  ( $i=1,2,\dots,Q$ ) 为独立的  $[0,2\pi)$  上的均匀分布。因为一个周期上均匀分布的初相位再加上任意一个确定的累积相位还是  $[0,2\pi)$  上的均匀分布，这样在计算振幅时就无需再计算路径上的相位积累。

这样多波干涉在接收点形成的接收信号  $f(\omega, t)$  可以描述为以下公式：

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i + \varphi_{0i})}$$

为了统计多波干涉下合成信号的强弱（振幅  $|f(\omega, t)|$ ）随初始相位的随机变化而体现出的随机变化规律，我们首先计算公式中的参数  $A_i$ ，即到达接收点的第  $i$  条传播路径的信号电场强度。

若发射天线到达接收场点处是视距传播，则发射天线在场点处的辐射场，作为直射路径到达场点的场强为

$$\vec{E}_{Los} = \vec{E}_0 \frac{e^{jk r_0}}{r_0}$$

式中， $k$  为波数， $\vec{E}_0$  为发射电场强度， $r_0$  为直射波的传播路径长。

由题意，在理想导体表面将发生能量全反射，即射线经过理想导体表面的反射路径相当于直射路径，因此我们推断仅包含直射和反射的传播路径也是视距传播路径。

若是非视距传播的路径，则从发射天线出发，先利用上述公式计算出天线在第一结点处（在本文的模型中即为反射后的第一个绕射点）的辐射场，然后沿着射线路径推进计算，直至到达接收点，求得此条射线路径在接收点处对总场强的贡献。

下面我们考虑反射和绕射过程中的场强衰减程度。

基本假设中建筑物的高度高于基站天线电场高度，电波经过屋顶绕射后再达到地面接收点的场强可以忽略，从而可以将三维问题近似简化为二维问题。对于二维问题，电场强度与能量密度成正比。下面进行证明：由图 5.1 所示，假设波长为  $c$ ，能量密度为  $G$ ，考虑微元为  $dr$ ：

$$dr = c \cdot dt \quad (c \text{ 为波长})$$

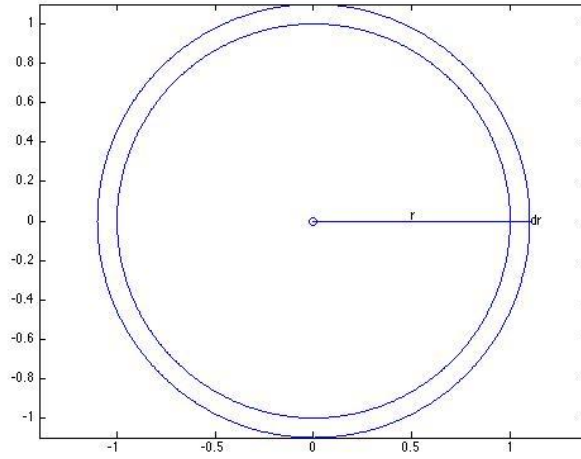


图 5.1 能量密度计算分析示意图

由能量守恒

$$G \cdot 2\pi r \cdot dr = \text{const} \quad (\text{常数})$$

即

$$G \propto \frac{1}{r}$$

因此，

$$G \propto E$$

即在二维问题中，能量与场强成正比，因此我们可以把能量损失与场强衰减的幅度等价。这样，由于我们假设图 中的所有建筑物为理想电介质，电磁波传播到理想电解质表面 80% 的能量被反射，20% 的能量进入建筑物继续传播（基本假设中忽略该部分能量），因此，每次反射场强衰减 20%。

绕射后绕射波强度  $E_d$  关于入射波场强  $E_i$  的衰减程度体现为绕射系数  $D$ ，即

$$|E_d| = |E_i| \times |D|$$

绕射系数  $D$  的计算公式为

$$D = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi + \beta^-}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^-)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^-}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^-)) - \right. \\ \left. \left[ \cot\left(\frac{\pi + \beta^+}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^+}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^+)) \right] \right\}$$

式中， $k$  为波常数，其计算公式为  $k = 2\pi / \lambda$  ( $\lambda$  为波长)， $L$  是绕射点到场点之间的距离， $n = 2 - a_3 / \pi$  ( $a_3$  的定义如图 5.2 所示，单位弧度)， $F(x)$  是用来修正 Keller 非一致性解的过渡函数，它是菲涅尔积分的一种变形，它的定义是

$$F(x) = 2j\sqrt{x} \exp(jx) \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \exp(-j\tau^2) d\tau$$

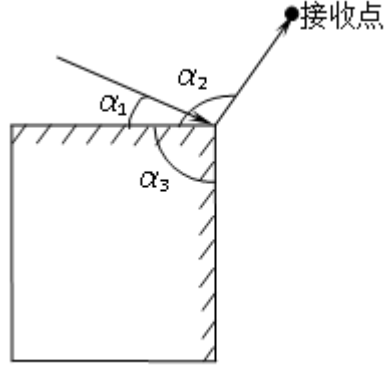


图 5.2 绕射示意图

在对过渡函数的具体计算过程中，可采用如下的计算区间划分

- ① 当  $0 \leq x < 0.001$  时，过渡函数可近似写成题目中公式 (3)；
- ② 当  $x > 10$  时，过渡函数可近似写成题目中公式 (4)；
- ③ 当  $0.001 \leq x < 10$  时，过渡函数可近似写成题目中变形公式 (6)。

这样，我们就分别得到反射点和绕射在传播过程中的场强衰减比例：反射点为 20%，绕射为  $1-D$ 。

有了视距传播（仅包含直射和反射）和非视距传播（包含绕射）路径接收点场强的计算方法以及反射和绕射过程中的场强衰减比例，我们就可以算出第  $i$  条传播路径到达接收点处的场强  $A_i$  了。

## 5.2 随机性模型建立与空间离散求解方法

首先我们给出计算幅值和相角一定的两列波叠加产生合成波的幅值和相角的方法，计算按照矢量求和方法进行。

因为我们假设  $Q$  条传播路径的初相位满足独立的  $[0, 2\pi)$  上的均匀分布，如果我们将  $[0, 2\pi)$  等分为  $m$  份，则按  $m$  种初相位叠加  $Q$  条传播路径的合场强，需要计算  $m^Q$  次，这种指数关系的计算量极其庞大，无法数值模拟求解。我们采用将幅值和相角同时离散的方法计算振幅的概率密度函数，从而使得该问题可实际求解。

用幅值相角离散方法计算振幅概率密度函数的主要思想是用幅值和相角的数对代表一条路径到达接收点时的信号，由于各个路径的波初始相位是随机的，到达接收点处的合成波的幅值和相角都是随机变量，但合成波幅值和相角的范围是确定的。我们把幅值和相角构成的有限坐标系离散成有限的点，每个点都带有两个信息：幅值和相角，将这些点与所有传播路径的场强和相角（有一定概率）依次叠加，合成后的矢量（即场强）所对应的幅值和相角就带有一定

的概率了，将这些矢量对应坐标系中的点近似成离该点最近的网格的顶点，把该矢量的概率近似为某个网格顶点的概率。这样把网格每条竖线上的概率值求和就得到了振幅的概率密度函数。

幅值相角离散方法计算振幅概率密度函数的算法步骤如下：

Step 1. 将接收点的合成波的相角范围  $[0, 2\pi)$  平均离散为  $p$  份，幅值范围

$\left(0, \sum_{i=1}^Q A_i\right)$  平均离散为  $q$  份，以幅值  $A$  为横坐标，相角  $\theta$  为纵坐标建立坐标系，并在均分点处打成网格。

Step 2. 对于网格上的每个点都进行如下操作：对某一点的幅值和相角与某一条传播路径的幅值（固定为  $A_i$ ）和相角（共有  $m$  种可能）分别进行  $m$  次合成，计算出  $m$  个合矢量的位置，即得到了  $m$  个合矢量的场强大小和相角，并在网格的相应的近似位置（最接近网格上的某个顶点的位置）更新该幅值和相角对应的概率；

Step 3. 对于网格上的每个点按照步骤 II 与其他路径进行合成，直到网格上的每个点和所有  $Q$  条路径都合成过；

Step 4. 对于每个固定的幅值，将对应该幅值的各个  $\theta$  上的概率求和，即对网格中每条竖线上的概率求和就得到了振幅的概率密度函数。

根据上述算法，我们可以得出用场强相角离散方法计算振幅概率密度函数只需计算  $pqmQ$  次，计算次数相对于直接用  $m$  种初相位叠加  $Q$  条传播路径的合场强大大减小，从而使得问题可以数值模拟求解。

### 5.3 振幅统计学分析与概率密度特性

对概率密度函数积分就得到了振幅的分布函数，一、二阶矩特性见表 5.1 与表 5.2。A4-C1 对应合场强幅值的一阶矩最大。

表 5.1 不同发射机/接收机位置组合时，接收机处合场强幅值的一阶矩

	C1 (C)	C2	C3	C4	C5 (D)
A1 (A)	0.001823	0.001211	0.000898	0.00075	0.000744
A2	0.021235	0.004359	0.002446	0.001976	0.001879
A3	0.147363	0.002382	0.007475	0.00171	0.004043
A4	0.37172	0.050804	0.227451	0.070409	0.07466
A5 (B)	0.016704	0.009655	0.008603	0.008614	0.008846

表 5.2 不同发射机/接收机位置组合时，接收机处合场强幅值的二阶矩

	C1 (C)	C2	C3	C4	C5 (D)
A1 (A)	1.35E-06	7.88E-07	2.78E-07	1.64E-07	1.19E-07
A2	3.51E-05	6.88E-06	1.52E-06	7.88E-07	6.45E-07
A3	0.000657	3.71E-05	6.67E-05	1.68E-06	1.58E-06
A4	0.004123	0.001364	0.005042	0.002291	0.001423
A5 (B)	9.71E-05	3.28E-05	7.24E-06	4.49E-06	4.66E-06

## 5.4 采用 Rayleigh 分布拟合概率密度函数

Rayleigh 分布是最常见的用于描述平坦衰落信号接收包络或独立多径分量接受包络统计时变特性的一种分布类型，例如两个正交高斯噪声信号之和的包络服从 Rayleigh 分布。Rayleigh 分布只需要一个参数  $\sigma$  即可确定，表达式为：

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

Rayleigh 分布的期望  $E(z) = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma$ ，方差  $\text{var}(z) = (4 - \pi) \cdot \sigma^2 / 2$ 。根据上述分析以及概率密度函数曲线形状，本文采用 Rayleigh 分布进行近似，并对合理性进行验证。图 5.3 为 Rayleigh 分布示意图，其中参数  $\sigma = 1$ 。

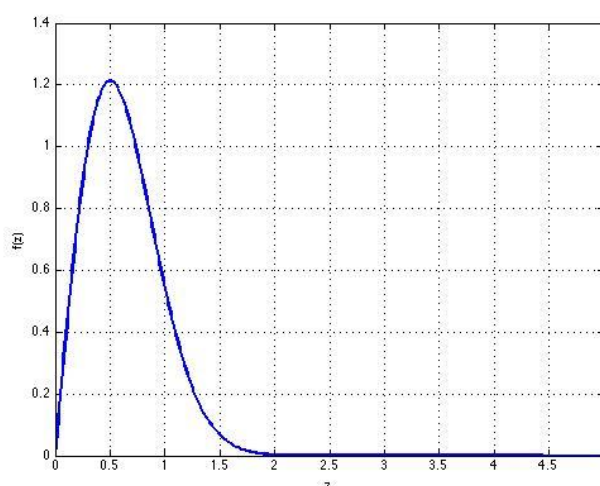


图 5.3 Rayleigh 分布示意图

为验证近似的有效性，对上面模拟仿真得到的数据进行分析。图 5.4 虚线为某个情形下计算所得的概率密度函数。计算可得该分布的期望  $E = 0.00171$ 。构造该期望对应的 Rayleigh 概率密度函数  $f(r)$ ，并使用实线在图中画出。可以看出，同期望的 Rayleigh 概率密度函数对原概率密度函数的近似效果很好。因此，



在问题五中,可以根据半经验模型得到的合场强幅值,结合本段验证的 Rayleigh 分布形态,估算合场强信号的概率密度函数。

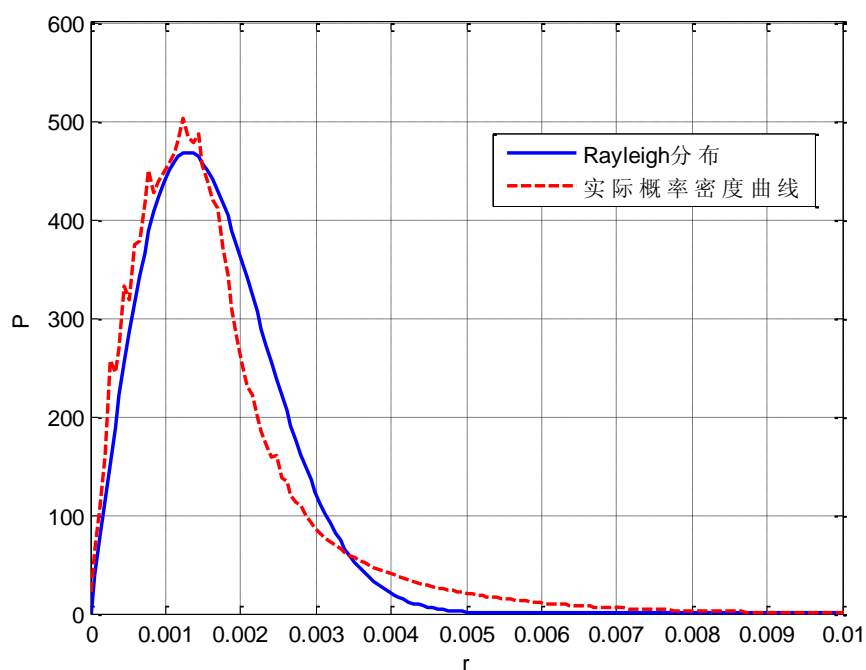


图 5.4 同期望 Rayleigh 概率密度函数与实际概率密度函数对比

## 5.5 信号相关性分析

计算不同路径到达信号的相关性,采用相关系数进行衡量。图 5.5 为一阶矩与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律,图 5.6 为一阶矩与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律。由图 5.6 知随接收机位置的变化一阶矩与发射机的位置呈负相关,在接收机位置为 300 时这种负相关表现的更明显。

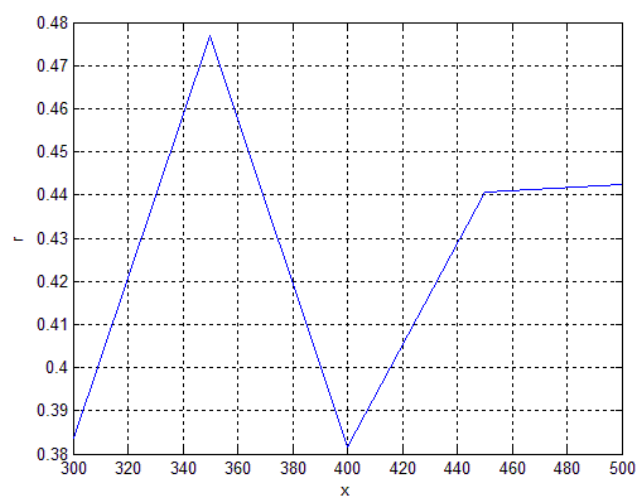


图 5.5 一阶矩与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律

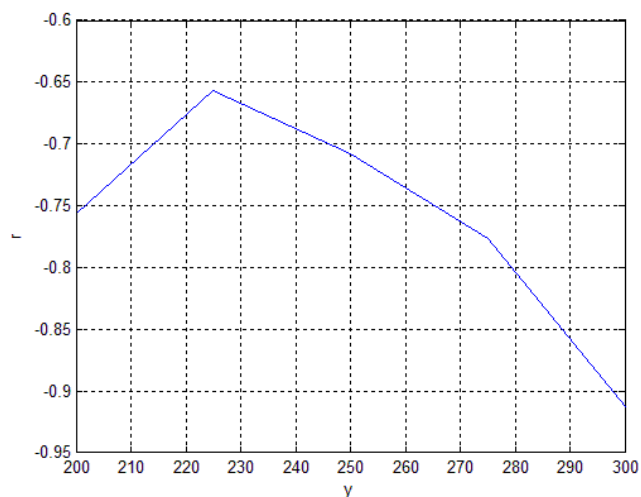


图 5.6 一阶矩与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律

图 5.7 为二阶矩与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律，图 5.8 为二阶矩与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律。由图 5.8 可知，随接收位置的变化，二阶矩与发射机的位置呈负相关，在接收机在 300 处，这种负相关表现的最明显。因此，我们得知一阶矩或二阶矩与发射机位置的负相关特性随接收机向上移动而增强。

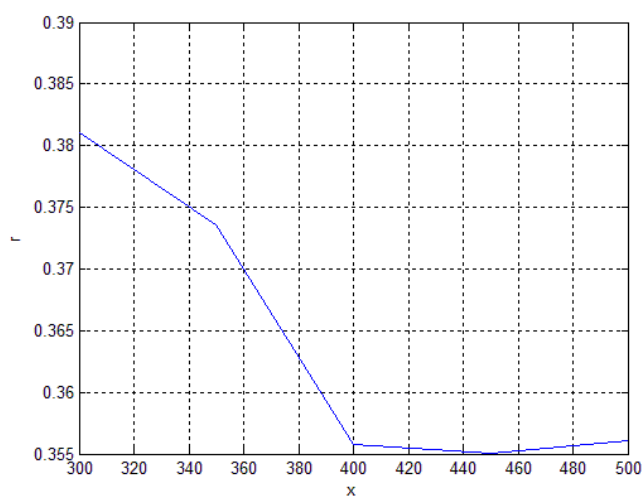


图 5.7 二阶矩与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律

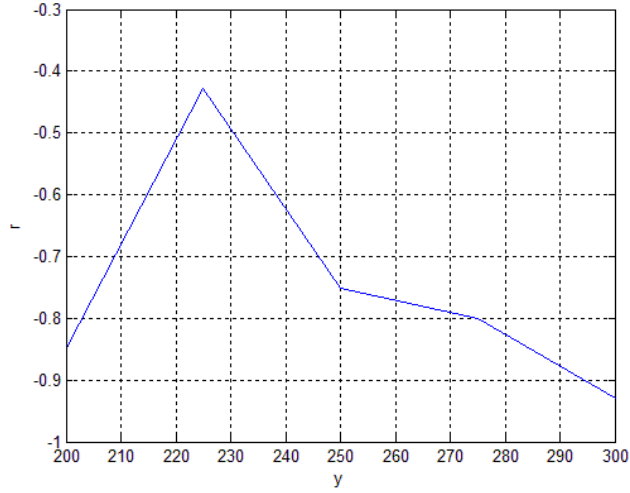


图 5.8 二阶矩与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律

## 6 宽带多波干涉现象

如果发射机发射多组频率不同的单频信号，那么每组单频信号都会形成多波干涉现象，多组单频信号之间就会形成宽带多波干涉现象。为了考虑不同频率对信号产生的影响，本节我们采用半确定模型：各条射线初始相位相同且初相位服从均匀分布。该模型考虑各路径的相位差信息，可以分析合成波的包络统计特性：同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性。

### 6.1 半确定性模型建立

宽带多波干涉现象包含不同频率的波之间的干涉现象，因为频率决定了周期，所以为了分析同一路径不同频率的信号之间的相关性，我们必须给每列波赋予相同的初始相位使得模型中可以考虑各路径的相位差。因此我们使用半确定性模型，即各条射线的初始相位相同为  $\varphi_0$ ， $\varphi_0$  服从均匀分布。因此，在每个接收点处多波干涉形成的接收信号为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i + \varphi_0)}$$

### 6.2 同频率不同路径信号相关性分析

计算不同路径到达信号的相关性，采用相关系数进行衡量。图 6.1 为合场强幅值与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律，图 6.2 为合场强幅值与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律。由图 6.1 知，随发射机位置的变化合场强幅值与接收机位置呈负相关，这种负相关性随发射机向上移动逐渐减弱。由图 6.2 知，随接收机位置的变化，合场强幅值与发射机位置的正相关性随接收机向上移动逐渐减弱。

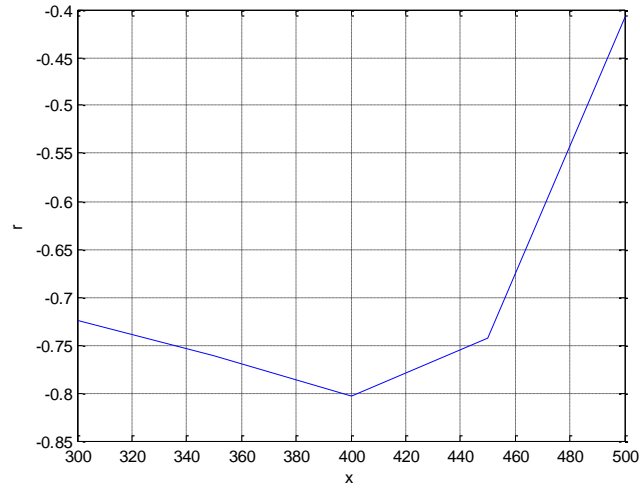


图 6.1 合场强幅值与接收机位置相关系数随发射机位置变化规律

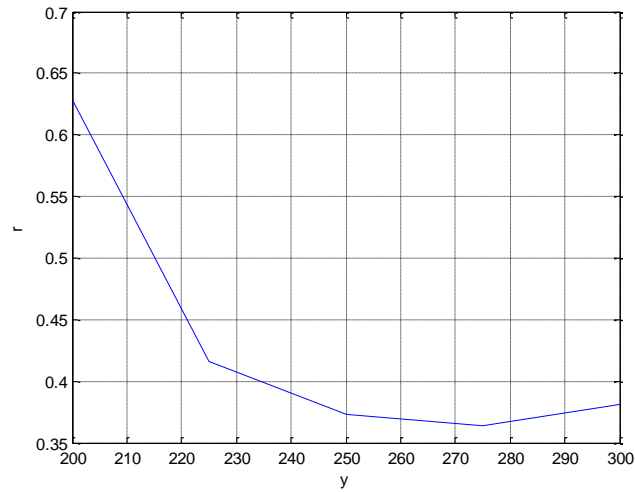


图 6.2 合场强幅值与发射机位置相关系数随接收机位置变化规律

### 6.3 同路径不同频率信号相关性分析

通过多波干涉接收信号的表达式，可以计算 2000MHz~2100MHz 频率下每个频率对应的场强，进而得到场强幅值与频率的相关系数。可以看出，各种组合下场强幅值与频率没有明显的相关关系。

不同发射机/接收机位置组合时，场强幅值与频率相关系数

	C1 (C)	C2	C3	C4	C5 (B)
A1 (A)	-0.00946	-0.06197	0.219281	-0.1628	0.037012
A2	0.0382	0.021023	-0.41489	-0.0854	0.003881
A3	0.068993	-0.06748	0.046728	0.212937	0.07974
A4	0.047605	-0.04306	0.109441	-0.09184	-0.07858
A5 (B)	0.284045	0.275716	-0.33801	0.049422	0.014189

---

## 7 模型评价

1. 反向射线追踪方法可以精确得到发射点和接收点之间的每一条路径。本文算法记录有效反射面区段信息，对于多次反射问题求解时间显著缩短。
2. 针对问题四与问题五，给出了给定初相位分布规律求解合场强振幅概率密度准确数学描述。
3. 对于单频多波干涉问题，建立了相位服从独立均匀分布的随机性模型。该模型可以体现接收点处信号的随机特性。
4. 针对随机性模型，提出了将空间区域按照极坐标进行离散的求解方法。空间的离散使得问题求解难度大大降低，规模仅与传播路径成正比。该离散模拟方法适用于随机相位满足其它非均匀分布的情形。
5. 根据振幅概率密度函数曲线形状，提出了采用 Rayleigh 分布进行拟合的思路，从而提供了一种对合场强信号概率密度进行估算的方法。
6. 对于带宽多波干涉问题，建立了相位服从均匀分布的半确定性模型。该模型考虑了传播途径上相位累积，可以分析不同频率波的包络统计特性。

## 8 进一步研究的问题

1. 半确定模型与随机模型结合。半确定性模型的求解迅速，如果可以建模分析进行参数估计，便可结合随机性模型中提出的 Rayleigh 分布函数。这样可以进一步提高精度，工程计算中更加实用。
2. 半波损失情形讨论。波从波疏介质射向波密介质的反射过程中，在掠射或垂直入射条件下，对于电场矢量强度，反射波在离开反射点时的振动方向相对于入射波到达反射点的振动相差半个周期。对于本题中发射机和接收机的情形，通过统计入射角可知，忽略半波损失的假设是合理的。

## 参考文献

- [1] R G. Kouyoumjian, P H Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface", IEEE Proceedings, vol. 62, No. 11, pp. 1448-1461, Jun. 1974
- [2] M. F. Catedra, J. Perez, F. Saez De Adana, and O. Gutierrez, "Efficient Ray-tracing Techniques for Three-dimensional Analyses of Propagation in Mobile Communications: Application to Picocell and Microcell Scenarios," IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 40, no. 2, pp. 15-28, Apr. 1998.
- [3] Georgia E. Athanasiadou, Andrew R. Nix, and Joseph. McGeehan. "A

- 
- Microcellular Ray-Tracing Propagation Model and Evaluation of its Narrow-Band and Wide-Band Predictions,” IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol.18, no. 3, pp. 322-334, Mar. 2000
- [4] C. E Yang, B. C. Wu, “A Ray-Tracing Method for Modeling Indoor Wave Propagation and Penetration,” IEEE Trans. On A. and P., Vol. 46, No. 6, PP. 907-919, June 1998.
- [5] 顾晓龙. “利用可见性概念改进基于镜像原理的射线追踪法”, 电波科学学报, Vol. 16, No, 4, pp. 16-19, 2001
- [6] George Liang, Henry L. Bertoni, ”A New Approach to 3D Ray Tracing for Site Specific Propagation Modeling,” IEEE VT. C., PP. 1113-1117, 1997.
- [7] D. N. Schettino, F. J. S. Moreira and C. G. Rego, “Efficient Ray Tracing for Radio Channel Characterization of Urban Scenarios,” IEEE Trans. Magn., vol. 43, no. 4, pp. 1305-1308, Apr. 2007.
- [8] 廖斌, 赵昵丽, 朱守正, ”基于虚拟源树的射线跟踪算法的研究,” 华东师范大学学报, 2008:103-108
- [9] Chiya Saeidi, Farrokh Hodjatkashani, and Azim Fard, “New Tube-Based Shooting and Bouncing Ray Tracing Method,” 2009 International Conference on Advanced Technologies for Communications, pp.269-273
- [10] 袁正午, 移动通信系统终端射线跟踪定位理论与方法, 2007, 北京: 电子工业出版社
- [11] 魏巍, 吕英华, “典型室内无线传播模型的研究与分析”, <http://www.paper.edu.cn>, 2013
- [12] 李彤, 娄媚, 王豪行, “利用射线跟踪方法进行微蜂窝电波传播预测”, 通信学报, 第 18 卷第 11 期, 1997
- [13] 百度百科, 瑞利分布, <http://baike.baidu.com/view/583359.htm>, 2013-09-22
- [14] 维基百科, 瑞利分布, <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%91%9E%E5%88%A9%E5%88%86%E5%B8%83>, 2013-09-22
- [15] 百度百科, 半波损失, <http://baike.baidu.com/view/952795.htm>, 2013-09-22