

# 全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目                      基于光的波粒二象性猜想的数学仿真

---

## 摘                      要：

本文旨在探讨光子的内在性质，在两种波粒二象性猜想的基础上，建立了相应的数学模型，编写仿真软件进行实验，回答了文中提出的三个问题。

问题一：为何光的前进方向发生改变，为何要通过很窄的细缝才会使前进方向改变的问题，我们首先利用龚院士的光微子模型解释如下：将光子看作阴电子围绕阳电子旋转的系统，它同时具有群速度和相速度，因此可以将衍射解释为碰撞过程：光子通过衍射缝时，与衍射缝内壁发生碰撞，又由于其旋转角动量的存在，在碰撞后前进方向发生改变；然后我们建立衍射发生概率模型，发现当衍射缝宽与光子半径的比很大时衍射发生概率几乎为零，这就解释了光必须通过很窄的细缝才会有前进方向发生改变的事实。因此，衍射缝宽足够小是衍射发生的必要条件。

问题二：若干个光子同时作用的最终效果的问题。我们在 Zu 教授的光电磁场模型的基础上，将若干光子的共同作用解释为光子电矢量的和，推导出单缝、双缝和多缝等模型的光强空间分布形式的公式，得出如下结论：

1. 若干光子共同作用的强度不仅取决于个数  $n$ ， 还取决于它们之间的相位差  $\delta$ ，自身频率  $\omega$  以及它们的电场强度  $E_p$ 。给定任意电场

强度、相位的一组光子，我们可以采用求取矢量和的方法计算出合成光强；

2. 利用若干光子共同作用的原理，建立了光电磁场单缝、双缝和多缝干涉模型，推导出相应的公式，并与玻恩理论中的强度近似公式进行了比较，它们形式上是近似的，但由于  $\omega\Delta t$  存在，使得在最终的光强分布上有一定的差异。双缝衍射模型合理地解释了光子的湮灭和增强现象；单缝衍射模型是光强空间分布的基础；最后将这三个模型统一起来，就是光子共同作用的定量表达式。

问题三：偏振的真实过程。我们在光电磁场猜想中关于偏振原理解释基础上，设计了蒙特卡洛验证算法，对自然光和线偏振光通过偏振片的过程进行了仿真，得出如下结论：

1. 偏振的真实过程是：当光线到达偏振片时，光线中的大量光子分为左旋与右旋两类，两类光子间随机配对，判断在某一时刻形成的线性极化光子对的极化方向是否与偏振方向平行或垂直。如果平行，该光子对将通过偏振片；如果垂直，则该光子对被偏振片吸收；若其方向与偏振方向既不平行也不垂直，则偏振片迫使该光子对分解，重新参与其它光子的配对；

2. 实验表明自然光通过偏振片时，通过偏振片的光子数与被偏振片吸收的光子数比值稳定在 1 附近，自然光通过偏振片后，强度约减为原来的一半，这说明猜想具有合理性；但线偏振光的实验结果并不能满足马吕斯定律，说明该猜想仍有一定的不足。

**关键词：**光微子模型，光电磁场模型，蒙特卡洛算法，衍射，偏振原理

# 目 录

1. 问题的重述 .....	4
2. 模型的假设与符号说明 .....	5
2.1 模型的假设 .....	5
2.2 符号的说明 .....	5
3. 模型的分析 .....	5
4. 问题一的求解：衍射的发生 .....	6
4.1 光微子衍射动量模型 .....	6
4.2 光微子衍射进动模型 .....	7
4.3 光微子衍射发生概率模型 .....	8
4.4 仿真实验 .....	11
4.5 问题一小结 .....	12
5. 问题二的求解：光子的共同作用 .....	13
5.1 若干光子的同时作用 .....	13
5.2 光电磁场双缝干涉模型 .....	14
5.3 单缝衍射模型 .....	17
5.4 多缝干涉模型 .....	17
5.5 衍射模型的统一解释 .....	19
5.6 仿真实验 .....	20
5.7 问题二小结 .....	23
6. 问题三的求解：偏振的过程 .....	24
6.1 光电磁场模型的偏振原理 .....	24
6.2 马吕斯定律检验 .....	25
6.3 仿真实验 .....	26
6.4 问题三小结 .....	27
7. 总 结 .....	27
8. 模型的讨论和评价 .....	29
9. 仿真软件的介绍 .....	29
参考文献 .....	30

# 基于光的波粒二象性猜想的数学仿真

## 1. 问题的重述

自从爱因斯坦 1905 年提出光子概念以来，光的波粒二象性始终困扰着绝大多数人，至今仍然无法令常人像对其他物理现象一样地信服。光与物质相互作用时象粒子一样服从力学定律，但光又有波的内在性质，如：衍射、双缝干涉、偏振以及光子湮灭。光既可以是粒子，又同时是波，但我们至今不能同时看到这两个方面，光究竟以粒子还是以波的形式出现，只决定于实验。通过分析可以发现，对光波的内在性质：衍射、双缝干涉、偏振及光子湮灭的解释需要解决三个问题。

- 1) 光通常是按直线前进的，为什么光经过细缝后前进方向会发生改变？为什么必须是光通过很窄的细缝才会使前进方向发生改变？
- 2) 若干个光子同时作用的最终效果如何确定？是否仅取决于光子的个数？
- 3) 光通过偏振片的真实过程是什么？

在爱因斯坦之后继续有许多物理学家致力于探索光子波粒二象性的奥秘，并且也取得一定的进展。如龚祖同院士猜想，光子并非仅是一个质点，其构造可能与氢原子类似，最简单的形式是由一个阴电子和一个与其等量的阳电子组成，阴电子在一个球形的轨道上围绕阳电子旋转，因此光线通过一个小孔或一条细缝时，如果其中一个电子与小孔或狭缝边沿发生弹性碰撞或非弹性碰撞或被边缘吸引，光子的运动方向就会改变（在微观情况下遮挡物也不再可以视为平面），由此产生衍射。如果缝比较宽，则与小孔或细缝边缘发生碰撞的光子比例就会大大减少，直至几乎看不出来衍射。最近，北京大学又有学者提出光子是一个按光速直线前进的电磁场的猜想，光子的速度都相等。这个电磁场按照由光的波长所决定的角速度围绕上述前进直线旋转，相位由电场在  $x$  方向的投影或磁场在  $y$  方向的投影所决定，其旋转方向也只有左旋、右旋两种，单个光子只有左旋光子、右旋光子两种，同时一个左旋光子与一个右旋光子可以组成一个线性偏振光子对。该猜想解释了光子湮灭现象，双缝干涉现象以及光子通过偏振片的现象。

上述关于光子波粒二象性的猜想在一定程度上能够自圆其说，但只是定性的，还应该经过定量计算的检验。如果经过数学模型的仿真，肯定无法得到和大量物理实验相吻合的结果，则可以否定该猜想，如果在一定条件下可以得到和大量物理实验相吻合的结果，则上述猜想就前进一步，至少目前不能轻易否定。当然既然是猜想就很可能有错误，尤其对这样难度空前的问题，能够完全解释倒是不正常的。本题的任务是建立仿真这些猜想的数学模型，仿真的内容包括以下几个方面：

- 1) 单缝衍射中衍射缝的尺寸以及光子模型中的尺度、频率等参数对衍射屏上光强的空间分布形式的影响；
- 2) 双缝干涉试验中两条缝之间的距离、缝的宽度与干涉光图样的光强空间分布形式的关系；
- 3) 将所建猜想的数学模型得到的结果与玻恩的著作《光学原理》中光的衍射、双缝干涉、多缝干涉的强度近似公式进行比较；
- 4) 提出对本题中数学模型的改进，或提出自己的猜想，并进行仿真。

## 2. 模型的假设与符号说明

### 2.1 模型的假设

- 1) 光微子衍射实验中的衍射缝有厚度，即不可视为简单的平面；
- 2) 模型满足动量守恒、角动量守恒以及能量守恒定律；
- 3) 只有旋转方向不同的光子才可以组成一个线性偏振光子对；
- 4) 在没有发生衍射时，认为光是直线传播的；
- 5) 光子在通过衍射缝的过程中最多只能碰一次，光子就会穿过狭缝；
- 6) 光的电磁场模型中将光子视作一个旋转的电磁场，满足电磁波的经典理论。

### 2.2 符号的说明

$m_e$ : 光子的电子质量；

$v_x$ : 光子运动速度的水平分量；

$D$ : 光源到衍射缝的距离；

$d$ : 衍射缝的宽度；

$\omega$ : 光子电磁场旋转角速度；

$\delta$ : 光子间的相位差；

$\vec{E}$ : 光子的电矢量；

$I$ : 光的强度；

$c$ : 光速；

$k$ :  $k = \frac{\omega}{c}$ ；

$p$ :  $p \equiv \sin \theta - \sin \theta_0$ ；

$\theta_0$ : 入射光束与衍射光栅面的法线的夹角；

$\theta$ : 衍射光线与衍射光栅面的法线的夹角。

## 3. 模型的分析

在龚祖同<sup>[1]</sup>建立的光微子模型中，光子可能是由一个阴电子和一个与其等量的阳电子组成，阴电子在一个球形的轨道上围绕阳电子旋转，因此光线通过一个小孔或一条细缝时，如果其中一个电子与小孔或狭缝边沿发生弹性碰撞或非弹性碰撞或被边缘吸引，光子的运动方向就会改变，由此产生衍射。在俎栋林<sup>[2]</sup>提出的光是一种按光速直线前进的电磁场猜想中，光子的速度都相等。这个电磁场按照由光的波长所决定的角速度围绕上述前进直线旋转，相位由电场在  $x$  方向的投影或磁场在  $y$  方向的投影所决定，其旋转方向也只有左旋、右旋两种，其中一个左旋光子与一个右旋光子可以组成一个线性偏振光子对。当一个左旋光子与一个运动方向完全相同的右旋光子相遇时，如果相位完全相反，则发生光子湮灭现象；如果相位完全相同，则增强。由于从两条细缝到达屏幕上同一点的距离不同，分

别通过两条缝来的光子就会有相位差，由此产生双缝干涉现象。我们分析得知：

1. 关于问题一，要解释为什么光在经过细缝后前进方向会发生改变以及为什么必须是很窄的细缝才会使前进方向发生改变，我们可以根据龚祖同的光微子假设建立模型，研究光子在碰撞过程中发生的行为，通过改变衍射缝宽来研究其对衍射发生率的影响，以此来回答以上问题。
2. 关于问题二，要解释若干个光子同时作用的最终效果，需要分析光子之间的作用机制，建立合理的数学公式来表达若干光子共同作用的效果。
3. 关于问题三，要说明光通过偏振片的真实过程，我们可以建立蒙特卡洛模型仿真大量光子通过偏振片的过程，以达到验证模型假设的目的。

#### 4. 问题一的求解：衍射的发生

**问题 1** 要求我们解释光经过细缝后前进方向会发生改变以及必须是光通过很窄的细缝才会使前进方向发生改变的原因。实际上就是要求我们解释衍射发生的原因。因此我们引入龚祖同院士的光微子模型，将衍射发生原因解释为光子与衍射缝的碰撞，通过研究碰撞发生的条件，建立衍射发生概率的模型，并进行仿真实验。

##### 4.1 光微子衍射动量模型

本文从简单的情形进行分析，如图 1 所示，光子平行入射至衍射缝，有些光子在旋转过程中与衍射缝内壁发生碰撞，光子半径与水平方向的夹角为  $\theta$ 。

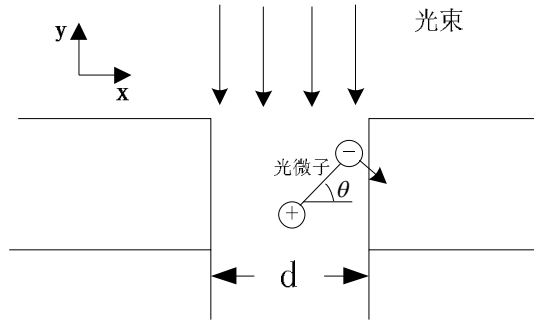


图 1 光子在穿过衍射缝时发生碰撞

设光子的水平方向初始动量为：

$$P_x = m_e v_{+x} + m_e v_{-x} \quad (1)$$

其中， $P_x$  为光子在水平方向上的动量， $m_e$  为光子的电子质量， $v_{+x}$  为阳电子水平速度， $v_{-x}$  为阴电子水平速度。由于阳电子成匀速直线运动，故  $v_{+x}=0$ ；阴电子水平速度为其旋转速度的水平分量，即  $u \sin \theta$ 。设光子受到内壁的冲量为  $I$ ，由于碰撞过程是弹性碰撞，光子阴电子水平方向上的速度大小不变，方向相反。因此，

$$-2m_e u \sin \theta = I \quad (2)$$

由于光子的固有结构在碰撞过程中不发生改变，所以在碰撞后，光子系统在水平方向上获得了速度，其速度可由动量守恒定理得出：

$$I = P'_x - P_x \quad (3)$$

设光子碰撞后水平方向上的速度为  $v'_x$ ，则满足下式：

$$-2m_e u \sin \theta = 2m_e v'_x - m_e u \sin \theta \quad (4)$$

所以，不同的光子在不同的碰撞过程中，在水平方向上获得了不同的速度，导致在到达屏幕的过程中有了水平方向的位移，产生了相位差导致光子在有些地方加强，有些地方减弱，从而发生衍射现象。

#### 4.2 光微子衍射进动模型

可以看出上节动量模型中，虽然能够明确解释出光微子衍射产生的原因、衍射发生的条件，但它对物理规律的考虑是不完备的，例如：在光微子穿过衍射缝时，我们假定前进速度为光速，并且碰撞后前进速度竖直分量不发生改变，这导致碰撞后的衍射光线的群速度超过了光速，并且由水平速度与光速的比值为一小量，导致衍射分布范围明显偏小，这些情况都是不合理的，使动量模型不能推广到一般情况。因此，考虑光微子在与衍射缝碰撞时发生进动效应，我们引入进动模型来分析光微子的衍射。

进动是指一个自转的物体受外力作用导致其自转轴绕某一中心旋转，这种现象称为进动，又可称作旋进。常见的例子为陀螺，当其自转速度下降时，自转轴的轴线不再呈铅直时，而自转轴会沿着铅直线作旋转，其旋转方向与自转方向相同，此即“旋进”现象。在此考虑光子与碰撞边缘碰撞后，瞬时的角动量变化。

按定义，弹力矩  $\vec{M}$  等于角动量  $\vec{J}$  的变化率，角动量的增量  $\Delta\vec{J}$  等于弹力矩的冲量

$\vec{M}\Delta t$ ，即  $\Delta\vec{J} = \vec{M}\Delta t$ 。此外，光微子看作是一个绕自转轴转动惯量  $I$  很大的轴对称刚体。我们可以近似的认为其角动量和角速度都沿自转轴方向，并可以写成

$\vec{J} = I\vec{\omega}$ ，设光微子绕自转轴高速旋转的角动量为  $\vec{J}_0 = I\vec{\omega}_0$ ，方向与铅直轴  $OO'$  成

$\theta$  角，在时间间隔  $\Delta t$  内，冲量矩  $\vec{M}\Delta t$  产生同一方向角动量增量  $\Delta\vec{J}$ ，方向沿  $OC$

方向，即与铅直轴垂直。在这段时间后角动量变为  $\vec{J} = \vec{J}_0 + \Delta\vec{J}$ ，根据矢量的平行

四边形合成法则， $\vec{J}$ 、 $\vec{J}_0$  与  $\Delta\vec{J}$  仍在同一平面内，且这个平面与纸面垂直，角动

量绕铅直轴  $OO'$  转过  $\varphi$  角度，这就是说，光子自转轴产生了沿此方向的进动。

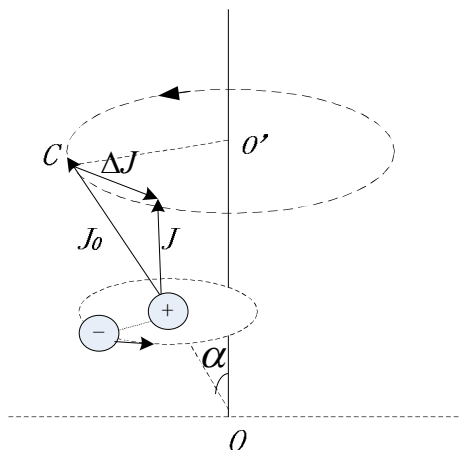


图2 光子进动示意图

- 1) 弹性碰撞边缘的作用是使旋转物体与边缘碰撞时，角动量的大小不变，方向相反，相当于边缘给物体的角冲量  $\Delta \vec{J} = -2\vec{J}_0$ ，因此，造成进动中自转轴的角速度最大，反映在衍射中就是使衍射的分布范围最大。
- 2) 非弹性碰撞边缘的作用是使旋转物体与边缘碰撞时，使得角动量方向改变，角动量的大小减小，即  $\Delta \vec{J} = -\varepsilon \vec{J}_0, 1 < \varepsilon < 2$ 。
- 3) 绝对吸引边缘的作用是使旋转物体与边缘碰撞时，使得旋转物体被吸引或沿平行于力矩的方向前进。

#### 4.3 光微子衍射发生概率模型

对于衍射的发生机制，在光微子模型中我们解释为“碰撞”，可以理解为当光子通过衍射孔时，其阴阳电子中任意一个与内壁发生碰撞，即产生衍射。由此我们可以推导出如下的概率验证公式，记衍射发生的概率为  $P$ 。

以  $O$  点为圆心，以光子半径为半径的圆，在通过内壁时与端点  $Q$  有三种关系，如图3所示：

- 1) 圆心在  $Q$  点左侧，即圆心的传播路径与内壁相交，此时无论阴电子处在何相位，光子都会与内壁发生碰撞，即  $P=1$ ；
- 2) 光线的左边界，即直线  $A'B'$  完全处在  $Q$  点的右侧，此时无论阴电子处在何相位，光子都不会与内壁发生碰撞，即  $P=0$ ；
- 3) 光线路径与内壁的矩形相交，此时衍射发生的概率为  $P$ ，需要进一步推导。



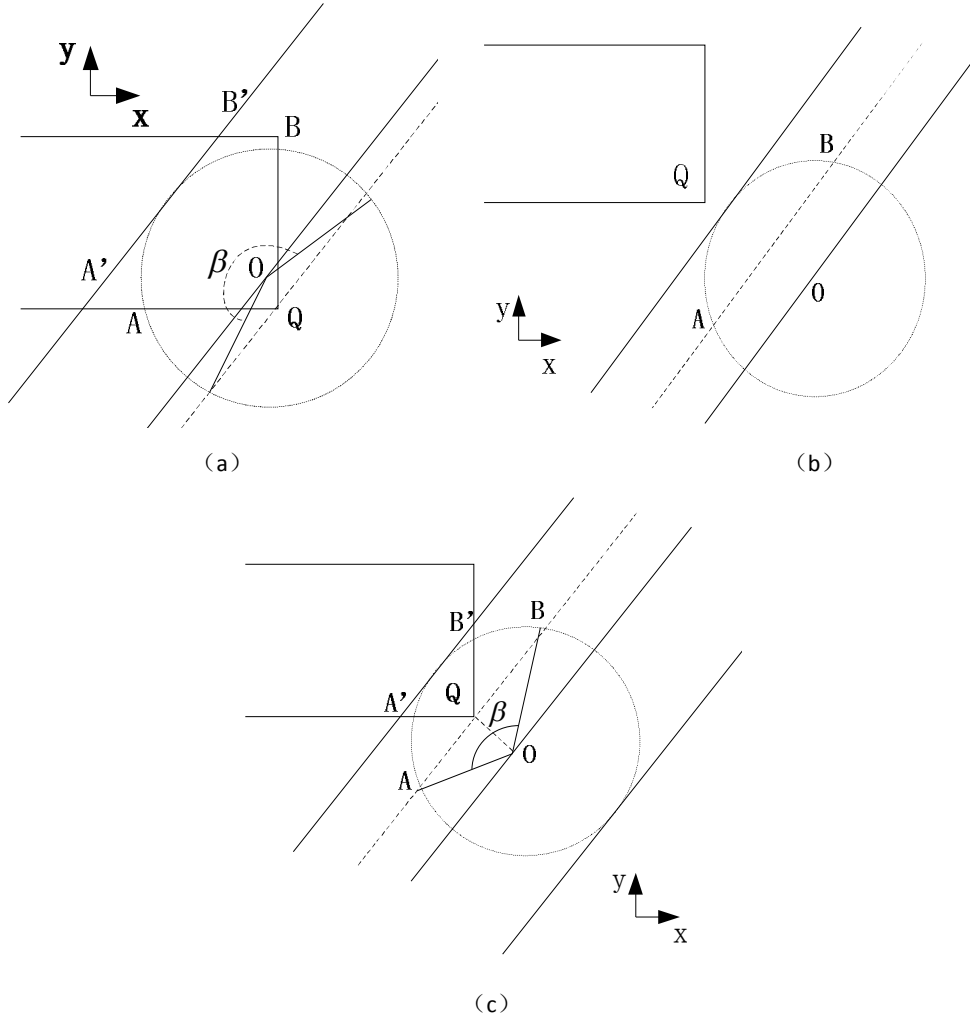


图3 光子路径与衍射内壁距离关系图

在光微子模型中，阴电子的旋转线速度  $u$  远小于光速  $c$ ，可以看作在通过衍射孔时阴电子与阳电子的相对位置没有发生改变，即相位保持不变。于是，可以将其看作小棒通过的路径形成的平行四边形与矩形相交的概率。在图 3 (c) 中，当阴电子处在  $\widehat{AB}$  上任意一个相位时，光子均会与内壁发生碰撞；处在其余的相位则不会发生碰撞。因此，要求得碰撞发生的概率，即要求光子处在  $\widehat{AB}$  上的相位的概率。在实际情况下，我们认为阴电子的相位角是在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  内随机取值，因此，碰撞发生概率可解释为：

$$P = \widehat{AB} / 2\pi r = \beta / 2\pi \quad (5)$$

由几何关系  $OQ \perp AB$ ，得

$$\left( \frac{1}{2}d - D \tan \theta \right) \cos \theta = OQ \quad (6)$$

又因为

$$OQ = r \cos \frac{\beta}{2} \quad (7)$$

所以,

$$\beta = 2 \arccos \left( \frac{\left( \frac{1}{2}d - D \tan \theta \right) \cos \theta}{r} \right) \quad (8)$$

由 (5) 和 (8) 可得:

$$P = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{\left( \frac{1}{2}d - D \tan \theta \right) \cos \theta}{r} \right) \quad (9)$$

这是我们考虑一面内壁时的情况, 当同时考虑两面内壁时, 公式还是不够完备的。我们要考虑一种情况, 光线左边缘与左内壁相交时, 右边缘同时与右内壁相交, 此时要考虑处在弧度  $\widehat{EF}$  时, 也应在算在概率  $P$  中。

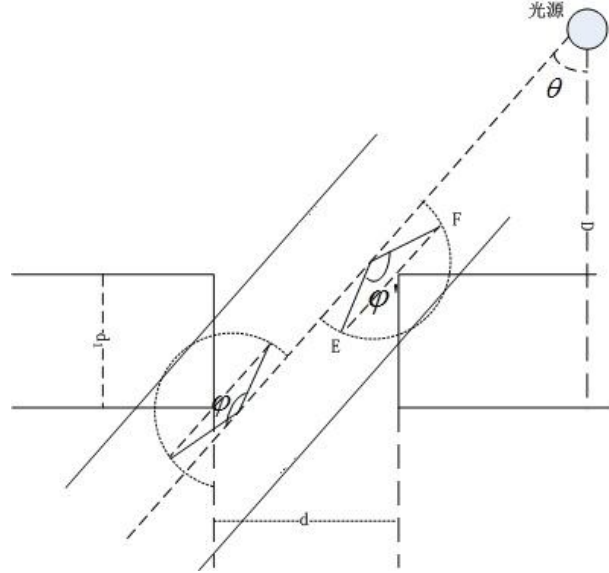


图 4 光子路径与衍射内壁距离关系图

于是, 由同样的方式可以求得:

$$P_2 = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{\left( \frac{1}{2}d + (D - d_1) \tan \theta \right) \cos \theta}{r} \right) \quad (10)$$

此时已将碰撞发生的所有情况都考虑在内, 由于衍射缝所在平面与水平面相平, 所以该公式关于竖直方向对称, 无论  $\theta$  角取正负时, 该公式形式不变。令

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2}d - D \tan \theta \\ l_2 &= \frac{1}{2}d + (D - d_1) \tan \theta \end{aligned} \quad (11)$$

于是得到：

$$P = \begin{cases} 1 & l_1 \leq 0 \\ 0 & l_1 \geq r \cos \theta \\ \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{l_1 \cos \theta}{r}\right) & 0 < l_1 < r \cos \theta, l_2 > r \cos \theta \\ \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{l_1 \cos \theta}{r}\right) + \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{l_2 \cos \theta}{r}\right) & 0 < l_1 < r \cos \theta, l_2 \leq r \cos \theta \end{cases} \quad (12)$$

根据上述公式可以建立蒙特卡洛仿真模型，用以验证光子尺寸  $r$ ，衍射缝宽度  $d$ ，衍射缝高度  $d_1$ ，光源与衍射缝距离  $D$  等参数和衍射发生概率之间的关系。

#### 4.4 仿真实验

依据我们建立的光微子衍射发生概率模型，为便于计算，将点光源的位置取在衍射缝的中垂线上，入射角范围取为  $\left(-\arctan\left(\frac{d}{2(D-d_1)}\right), \arctan\left(\frac{d}{2(D-d_1)}\right)\right)$ 。

在此范围内随机取值，采用蒙特卡洛算法并使用 **Matlab** 进行仿真，分别改变式 (12) 中参数  $D$ ， $d$ ， $d_1$  与  $r$  的相对大小，得到仿真结果如下：

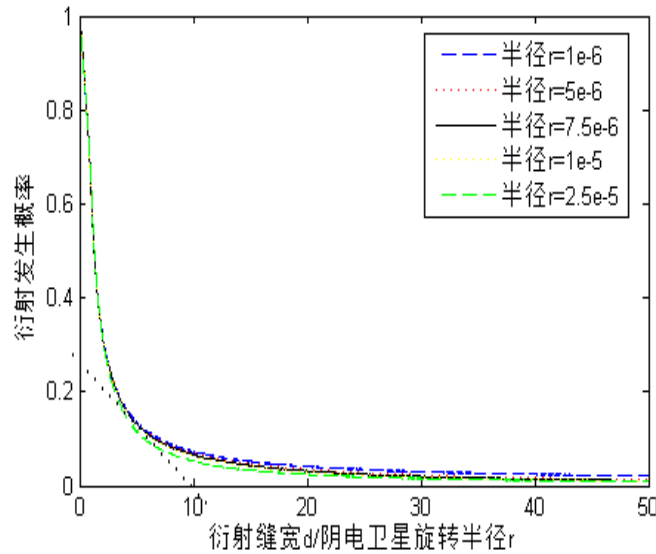


图 5  $d/r$  的大小与衍射发生概率的关系

如图 5 所示，随着  $d/r$  大小的增加，衍射发生概率先快速下降，然后缓慢趋近于零。从图中可以看出转折点发生在  $d/r=10$  附近的位置，这时衍射发生概率约等于 0.1，说明衍射缝宽与旋转半径的比值在一个数量级以内时，衍射发生的概率可以接受；随着比值的增大，衍射发生的概率趋近于零，可以视作衍射不发生。

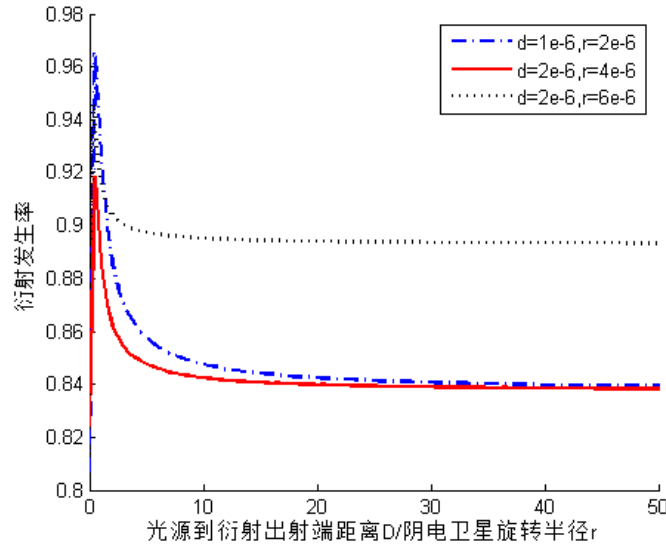


图6  $D/r$  的大小与衍射发生概率的关系

如图6所示,随着  $D/r$  大小的增加,衍射发生概率先快速下降,然后趋近于常数。这说明当光源与衍射缝距离很近时,衍射发生的概率较大;当  $D$  远大于  $d$  和  $r$  时,衍射发生的概率趋近于某一常数,此时  $D$  的大小与衍射发生概率无影响。

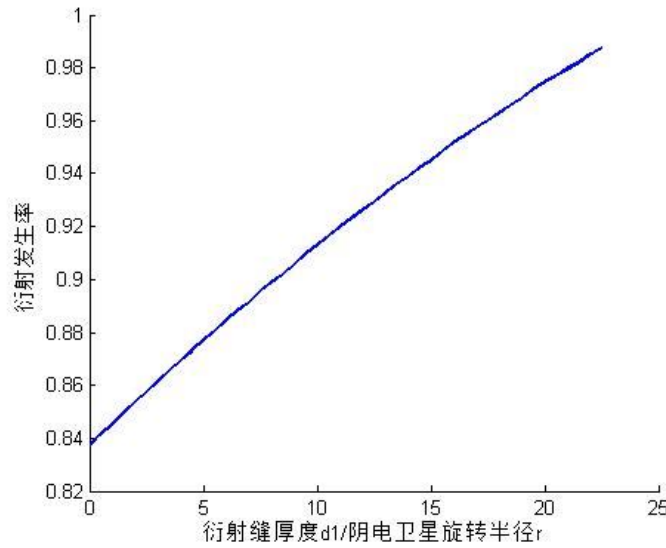


图7  $d_1/r$  的大小与衍射发生概率的关系

如图7所示,随着  $d_1/r$  大小的增加,衍射发生概率几乎是线性增加。这说明随着衍射缝厚度的增加,衍射发生的概率逐渐增大;在实际情况中,为了防止多次衍射的发生,衍射缝的厚度应当确定为一合理的值并保持不变,但在需要时也可在一定范围内进行调整

#### 4.5 问题一小结

在本节中,我们主要讨论了衍射产生的原因。通过引入光微子模型,我们将衍射的原因解释为光子与内壁的碰撞,分别建立了动量模型和进动模型,并讨论了三种碰撞边缘所导致的不同衍射情况,定性地分析了衍射可能的分布范围。为了研究衍射与缝宽、光子尺寸等参数的关系,同时考虑光子的相位特征,我们将衍射解释为这样一种概率行为:当光子传播路径通过衍射孔时,光子有一定概率发生衍射,这是由阴电子的相位及阳电子空间位置所决定的。基于此分析,建立

衍射发生概率模型，并通过仿真实验得出如下结论：

- 1) 在光微子模型中，由于光的粒子性使其通过衍射缝时，与衍射缝内壁发生碰撞，又由于其旋转角动量的存在，在碰撞后导致其前进方向发生改变，由此产生衍射；
- 2) 衍射缝宽与光子半径的比很大时衍射发生概率几乎为零，这就解释了光必须是通过很窄的细缝才会是前进方向发生改变。因此，衍射缝宽与光子半径的比在一个数量级以内，是衍射发生的必要条件；
- 3) 光源与衍射缝距离远大于光子尺寸及缝宽时，它对衍射发生概率无影响；
- 4) 衍射缝在一定厚度范围内时，衍射发生概率与其成正比关系，因此分析衍射过程时，不可将衍射缝简单的视为一个平面。

## 5. 问题二的求解：光子的共同作用

问题二要求我们解释若干个光子同时作用的最终效果如何确定，是否取决于光子的个数。我们引入光的电磁场模型，将光子解释为旋转的电磁场，它的能量包括电场能量和磁场能量，并且它们大小相等，因此在下面的分析中只计算电场能量；定量分析了光子共同作用时的强度大小，在此基础上建立了单缝衍射、双缝干涉和多缝干涉模型，并进行了模型的统一解释和仿真实验。

### 5.1 若干光子的同时作用

我们现在讨论一种较理想化的情况：考虑有这样的一组光子，个数为  $n$ ，它们的电场强度大小  $E_p$  相同，并且彼此间具有相同的相位差。如下图所示。

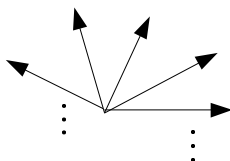


图 8 一组强度大小相同和相位差相同的光子

现在讨论它们共同作用时的光强。我们采用几何法<sup>[4]</sup>来作，第一个电场强度大小为  $E_p$ ，相位为零，下一个电场强度大小为  $E_p$ ，而相位等于  $\delta$ 。因此，我们正在围成一个  $n$  边的等角多边形。这些电场的顶点都在圆周上，于是只要求出这个圆的半径，就可以求出合成的电场强度大小。

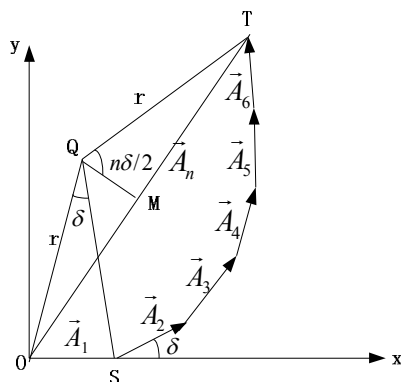


图 9  $n=6$  的等间距且相位差为  $\delta$  的合振幅

假定  $Q$  是此圆的圆心，可以得知  $OQS$  正好就是相位角  $\delta$ 。因为半径  $QS$  与  $E_{p2}$  和  $QO$  与  $E_{p1}$  构成相同的几何关系，所以它们之间构成的角也为  $\delta$ 。在这种情况下，半径  $r$  必须满足  $E_p = 2r \sin \frac{\delta}{2}$ ，这样  $r$  就可以确定下来。由于大角  $OQT$  等于  $n\delta$ ，因而可得  $E_R = 2r \sin \frac{n\delta}{2}$ 。联立这两式可消去  $r$ ，得到：

$$E_R = E_p \frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (13)$$

合成的光强就是：

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle = E_R^2 = E_p^2 \frac{\sin^2 \frac{n\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (14)$$

式中，

$$\delta = (kz_2 - \omega t_2) - (kz_1 - \omega t_1) \quad (15)$$

对于同一个观察点， $z_1 = z_2 = \dots = 0$ ，所以上式化为

$$\delta = \omega \Delta t \quad (16)$$

由此可见，一组理想光子共同作用的强度不仅取决于个数  $n$ ，还取决于它们之间的相位差  $\delta$ ，自身频率  $\omega$  以及它们的电场强度  $E_p$ 。推及到一般情况，给定任意电场强度、相位的一组光子，我们仍可采用求取矢量和的方法计算出合成光强。

## 5.2 光电磁场双缝干涉模型

光电磁场模型中，光子旋转方向只有左旋、右旋两种并且单个光子也只有左旋光子、右旋光子两种。当一个左旋光子与一个运动方向完全相同的右旋光子相遇时，如果相位完全相反，则发生光子湮灭现象；如果相位完全相同，则增强。由于从两条细缝到达屏幕上同一点的距离不同，分别通过两条缝来的光子就会有相位差，由此产生双缝干涉现象。

由参考文献 2 可得，不妨设  $E_1$  为左旋光子电场， $E_2$  为右旋光子电场，为了不与后面的分析发生混淆，电场矢量的表达式分别记为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{E}_1(0, 0, z, t) = E_{p1} (\vec{e}_{x1} + i\vec{e}_{y1}) \exp(i\phi_1) \quad (17)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{E}_2(0, 0, z, t) = E_{p2} (\vec{e}_{x2} - i\vec{e}_{y2}) \exp(i\phi_2) \quad (18)$$

式中，

$$\phi_1 = kz_1 - \omega t_1, \quad \phi_2 = kz_2 - \omega t_2$$

由于我们将主要讨论单色场，因而可把电矢量  $\vec{E}$  表示成如下形式<sup>[3]</sup>：

$$\vec{E}_A(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{A}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right\} = \frac{1}{2} \left[ \vec{A}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + \vec{A}^*(\vec{r}) \exp(i\omega t) \right] \quad (19)$$

同理可知， $\vec{E}_B(\vec{r}, t)$  具有相同形式。从式 (19) 可得

$$\vec{E}_A^2 = \frac{1}{4} \left[ \vec{A}^2 \exp(-2i\omega t) + \vec{A}^{*2} \exp(2i\omega t) + 2\vec{A} \cdot \vec{A}^* \right] \quad (20)$$

对比周期  $T = 2\pi / \omega$  大得多的时间间隔取平均，由而得到

$$\langle \vec{E}_A^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{A}^* = \frac{1}{2} E_{p1}^2 \left( |\vec{e}_x|^2 + |\vec{e}_y|^2 \right) = E_{p1}^2 \quad (21)$$

现在假定，两个单色波  $\vec{E}_A$  和  $\vec{E}_B$  在某一点  $P$  叠加在一起。 $P$  点的总电场为

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \quad (22)$$

因而

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_A^2 + \vec{E}_B^2 + 2\vec{E}_A \cdot \vec{E}_B \quad (23)$$

因此， $P$  点的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + J_{12} \quad (24)$$

式中

$$I_1 = \langle \vec{E}_A^2 \rangle, \quad I_2 = \langle \vec{E}_B^2 \rangle \quad (25)$$

是这两个波的强度，而

$$J_{12} = 2 \langle \vec{E}_A \cdot \vec{E}_B \rangle \quad (26)$$

是干涉项。

$$\begin{aligned} \vec{E}_A \cdot \vec{E}_B &= \frac{1}{4} \left[ \vec{A} \exp(-i\omega t) + \vec{A}^* \exp(i\omega t) \right] \cdot \left[ \vec{B} \exp(-i\omega t) + \vec{B}^* \exp(i\omega t) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \vec{A} \cdot \vec{B} \exp(-2i\omega t) + \vec{A}^* \cdot \vec{B}^* \exp(2i\omega t) + \vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

同样略去  $\exp(-2i\omega t)$  和  $\exp(2i\omega t)$  项，因此

$$\begin{aligned} J_{12} &= 2 \langle \vec{E}_A \cdot \vec{E}_B \rangle = \frac{1}{2} \left( \vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A}^* \cdot \vec{B} \right) \\ &= a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) \end{aligned} \quad (28)$$

其中， $a$  和  $b$ 、 $g$  和  $h$  都是实函数，分别表示振幅与相位。在本题中，

$$a_1 = a_2 = E_{p_1} \quad (29)$$

$$b_1 = b_2 = E_{p_2} \quad (30)$$

一般地讲，这两个波的（实）相位  $g_j$  和  $h_j$  是不同的，因为这两个波可以由不同的路径传到  $P$ ；但是，如果实验条件使得各个对应分量的位相差都一样，同等于  $\delta$ ，则

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = \phi_1 - \phi_2 = \delta \quad (31)$$

所以

$$J_{12} = 2E_{p_1} E_{p_2} \cos \delta \quad (32)$$

由（21）（24）（32）三式可得  $P$  点的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + J_{12} = E_{p_1}^2 + E_{p_2}^2 + 2E_{p_1} E_{p_2} \cos \delta \quad (33)$$

在点光源发射相同理想光线时， $I_1 = I_2$ ，（33）式化为：

$$I = 4E_{p_1}^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (34)$$

下面对  $\delta$  进行讨论。在杨氏双缝干涉试验中，由光的几何程差可得：

$$\Delta S = n\Delta s = \frac{nx d}{a} \quad (35)$$

其中， $n$  是实验所在媒质（假定是均匀的）的折射率， $d$  为两个小孔的间隔， $a$  为两孔连线到观察面的距离。如图 10 所示。光线到达  $P$  点，则

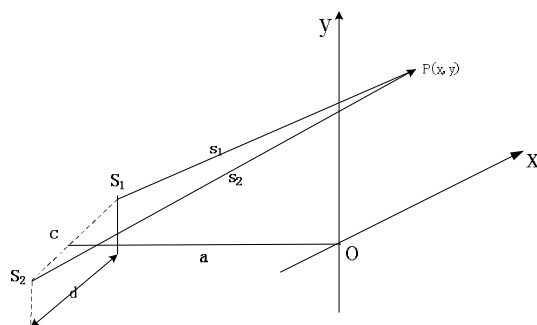


图 10 两个点光源产生干涉的几何图示

$$\delta = \phi_1 - \phi_2 = (kz_1 - \omega t_1) - (kz_2 - \omega t_2) = k\Delta S - \omega\Delta t = \frac{kx d}{a} - \omega\Delta t \quad (36)$$

将（36）代入（34），可得：



$$I = 4E_{p_1}^2 \cos^2 \left( \frac{kx d}{2a} - \omega \Delta t \right) \quad (37)$$

式 (37) 即为光电磁场模型在杨氏双缝干涉实验中光强公式。对 (37) 可做如下讨论，显然当  $\delta = (2N+1)\pi$  (其中  $N$  为整数) 时，光强  $I = 0$ ，即题中所述光子湮灭的状态；当  $\delta = 2N\pi$  ( $N$  同上) 时，光强  $I = 4E_{p_1}^2$ ，即题中所述光子加强的状态，相当于 4 个光子存在。

### 5.3 单缝衍射模型

由文献 2 可得，要计算单缝衍射光强在空间上的分布形式，即考虑入射点总能量在空间上的分布，在夫琅禾费衍射中我们将其所服从的积分写成如下形式：

$$U(P) = C \iint_A \exp(-ik(p\xi + q\eta)) d\xi d\eta \quad (38)$$

然后，我们讨论一个边长为  $2a$  和  $2b$  的矩孔。令原点  $O$  在矩孔中心， $O\xi$  轴和  $O\eta$  轴平行于孔边，则夫琅禾费衍射积分 (38) 式变成

$$\begin{aligned} U(P) &= C \int_{-a}^a \int_{-b}^b \exp(-ik(p\xi + q\eta)) d\xi d\eta \\ &= C \int_{-a}^a \exp(-ikp\xi) d\xi \int_{-b}^b \exp(-ikq\eta) d\eta \end{aligned} \quad (39)$$

化简得：

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin(kqb)}{kqb} \right)^2 I_0 \quad (40)$$

为了与后文中所讨论的情况一致，我们讨论更特殊的情况，即令  $b \rightarrow \infty$ ，将矩孔变为狭缝，所以：

$$I' = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 I_0' \quad (41)$$

式中

$$I_0' = \frac{2aE}{\lambda} \quad (42)$$

式中  $E$  表示入射孔的总能量。

### 5.4 多缝干涉模型

由双缝干涉实验以及上节对一组光子共同作用的讨论得到启发，考虑一组相同的衍射缝，它们之间的距离间隔相等，从衍射缝中发射的光线光强分布保持原来的形式，屏幕上光强的分布视为它们的共同作用。将衍射孔发射的光线看作一组平行光，假设有  $n$  条平行光线，它们的相互间距相等，如图 11 所示。

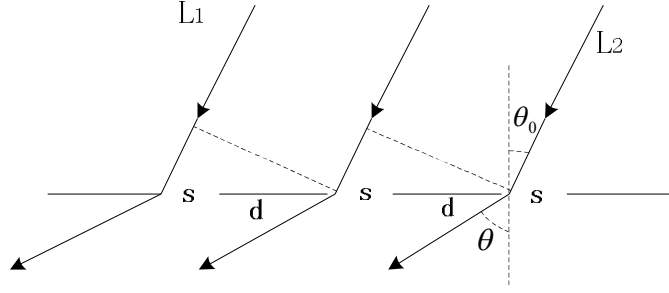


图 11 多缝衍射示意图

从几何关系可知， $L_1$  与  $L_2$  之间的光程差为  $\Delta s = d(\sin \theta - \sin \theta_0) = dp$ ，时间差为  $\Delta t$ ，由  $\phi = kz - \omega t$  可以求出  $L_1$  与  $L_2$  之间的相位差为：

$$\begin{aligned}\delta &= (kz_n - \omega t_n) - (kz_1 - \omega t_1) \\ &= k\Delta s - \omega\Delta t\end{aligned}\quad (43)$$

同时，每一条光线和它相邻的光线之间的光程差  $\Delta s_i$  和时间差  $\Delta t_i$  以及相位差  $\delta_i$  分别为：

$$\Delta s_i = dp/(n-1) \quad (44)$$

$$\Delta t_i = \Delta t/(n-1) \quad (45)$$

$$\delta_i = \frac{kdp - \omega\Delta t}{n-1} \quad (46)$$

将式 (46) 代入 (41)，可得

$$I = I' \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1)\right)} \right)^2 \quad (47)$$

$I'$  是由单缝衍射模型强度分布 (41) 决定的。将其带入 (47)，可得

$$I = I'_0 \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1)\right)} \right)^2 \quad (48)$$

由于振幅与光强的空间分布形式无关，所以可令  $I'_0 = 1$ ，即将上式简化为：

$$I = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1))} \right)^2 \quad (49)$$

此式即为多缝干涉模型的光强分布。

### 5.5 衍射模型的统一解释

将公式 (49) 与玻恩理论推导出的强度近似公式进行对比, 玻恩的光强度公式如下:

$$I_1(p) = \left[ \frac{\sin(nkdp/2)}{\sin(kdp/2)} \right]^2 \left[ \frac{\sin ksp/2}{ksp/2} \right]^2 \quad (50)$$

可以看出强度项  $\left[ \frac{\sin ksp/2}{ksp/2} \right]^2$  是完全相同的, 需要说明的是式中  $a=s/2$ , 因为我们的强度项是从单缝衍射模型中导入的, 其中  $a$  表示变长的  $1/2$ , 即  $s/2$ 。对

于分布项  $\left[ \frac{\sin(nkdp/2)}{\sin(kdp/2)} \right]^2$  和  $\left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1))} \right)^2$ , 假如我们令

$\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1) = kdp'$ , 则它们的形式又化为相同。但在  $\omega\Delta t \neq 0$  的情况下,

$p' \neq p$ , 因此在最终的光强分布形式上, 二者是有一定差异的。

考虑到各种衍射模型之间有共同的原理与近似的形式, 我们可以将三种模型统一进行解释。式 (49) 中,

1) 当  $n=2$  时,

$$\left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1))} \right)^2 = \left( \frac{\sin((kdp - \omega\Delta t))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t))} \right)^2 = 4 \cos^2(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)) \quad (51)$$

又因为

$$I^0(p) = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \quad (52)$$

所以

$$I = 4I^0(p) \cos^2(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)) \quad (53)$$

与双缝干涉中得到的公式具有一致的形式, 但  $I^0(p)$  是具有空间分布的, 与公式

(37)中的  $E_p^2$  并不完全相同,这是由于在双缝干涉公式推导中做了一定的近似,即假定入射光在空间均匀分布。因此,式(53)是更为精确的表达式。

2) 当  $n=1$  时,

$$\left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1))} \right)^2 = 1 \quad (54)$$

$I$  退化为  $I^0(p)$ , 即单缝衍射的光强分布函数, 与之前单独从单缝衍射中推导出的公式具有一致的形式, 至此光的电磁场衍射模型解释完毕。

## 5.6 仿真实验

我们引用文献 2 中  $\gamma$  射线数据进行计算, 此时  $E_p = 9.28 \times 10^{16} (V/m)$ , 利用公式:

$$E_p = \left( \frac{3}{2\sqrt{10}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\hbar\mu_0}{\pi^3 c}} \omega^2 \quad (55)$$

求出  $\omega = \pm 1.54 \times 10^{21} (rad/s)$ , 可以证明它们关于  $y$  轴对称, 为方便计算, 我们取正。  $k = 5.14 \times 10^{12} (m^{-1})$ 。令  $\theta_0 = 0$ ,  $a = 10(m)$ ,  $d = 10^{-9}(m)$ , 根据模型 5.2, 模型 5.3 和模型 5.4, 我们用 C# 编程软件分别进行仿真, 实验结果如下。

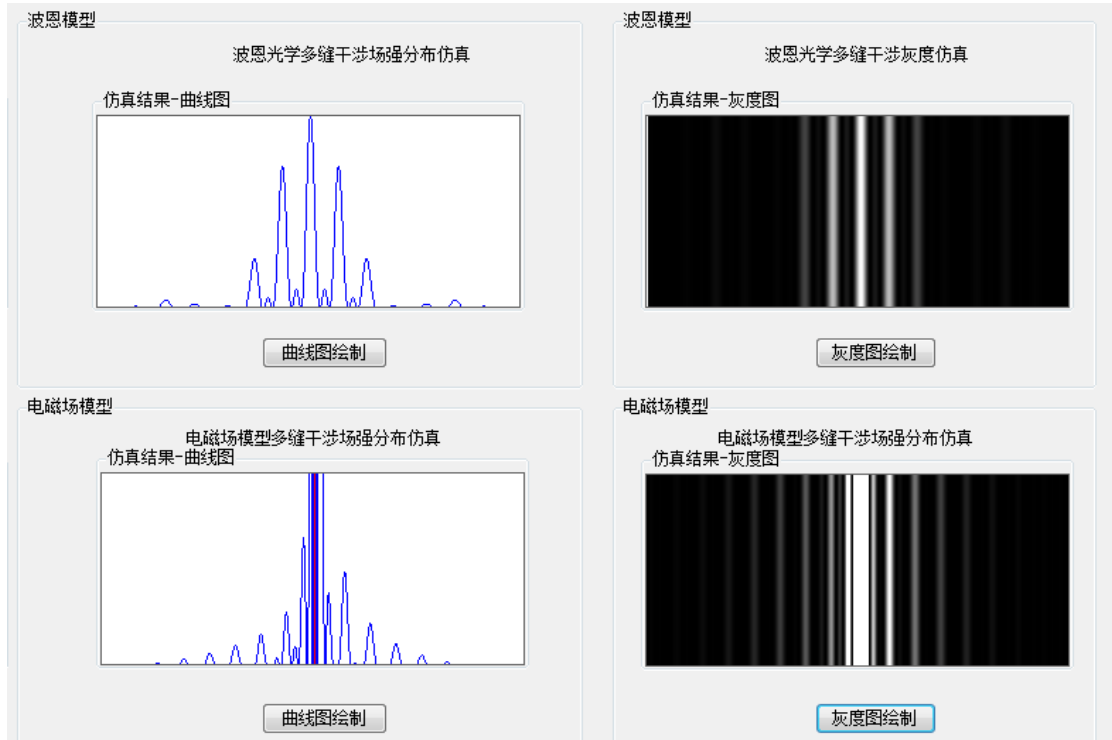


图 12 电磁场模型仿真实验结果

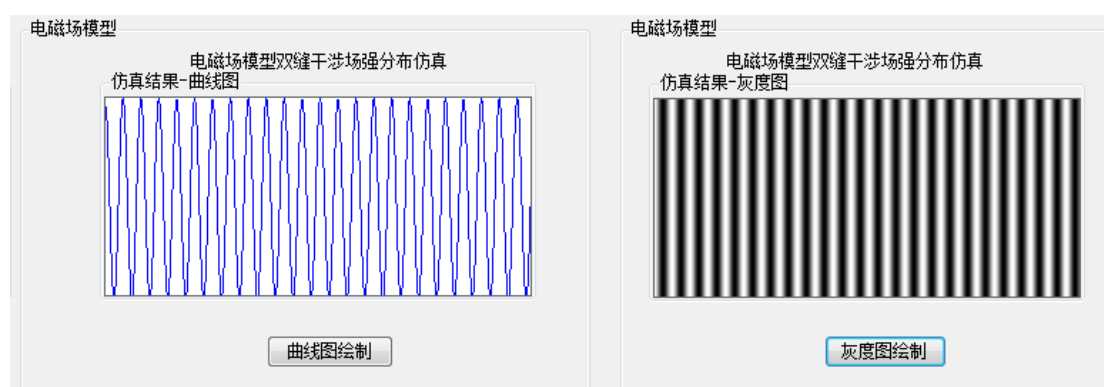
如图 12 所示，根据波恩模型绘制的曲线图与电磁场模型绘制的曲线图，形状上相似，具有一致的增减性，都有一个主极大，多个次级大，但值得注意的是它们图像的对称轴是不同的，比较了公式 (53) 与波恩理论给出的公式，发现它们具有极为相似的形式，但电磁场模型中多考虑了光子自身的相位差  $\omega\Delta t$ ，它导致了主极大位置的偏移和光强空间分布形式的不同。

下面我们分析不同参数对光强分布的影响。

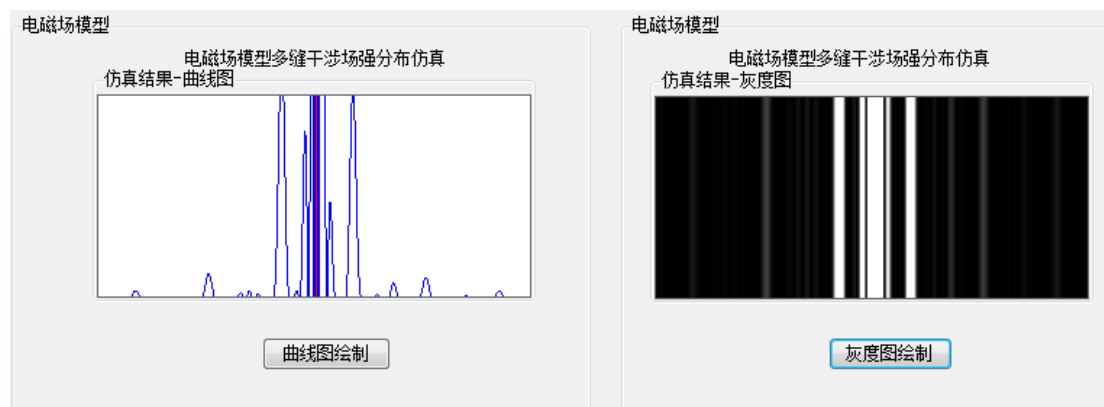
衍射缝个数  $N$ ：我们分别取  $N=1$ ， $N=2$ ， $N=4$  和  $N=6$  四种情况。仿真结果如图 13 所示。



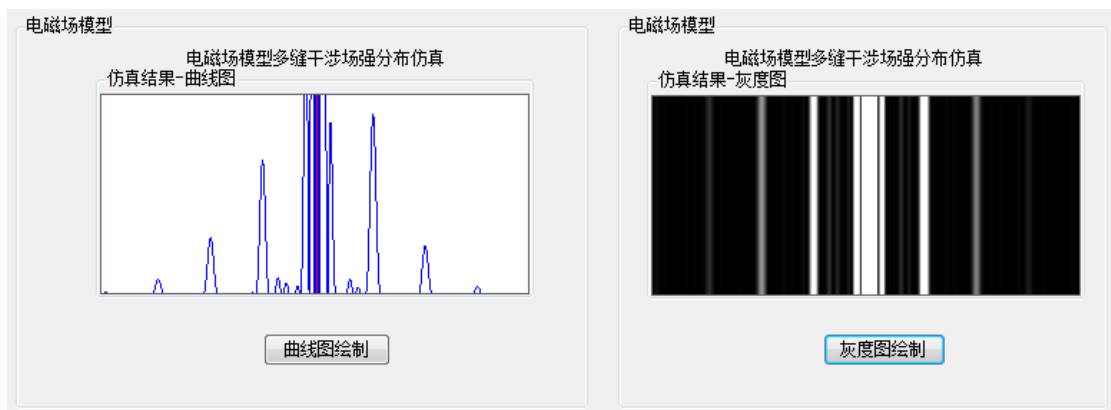
(a) 衍射缝个数  $N=1$



(b) 衍射缝个数  $N=2$



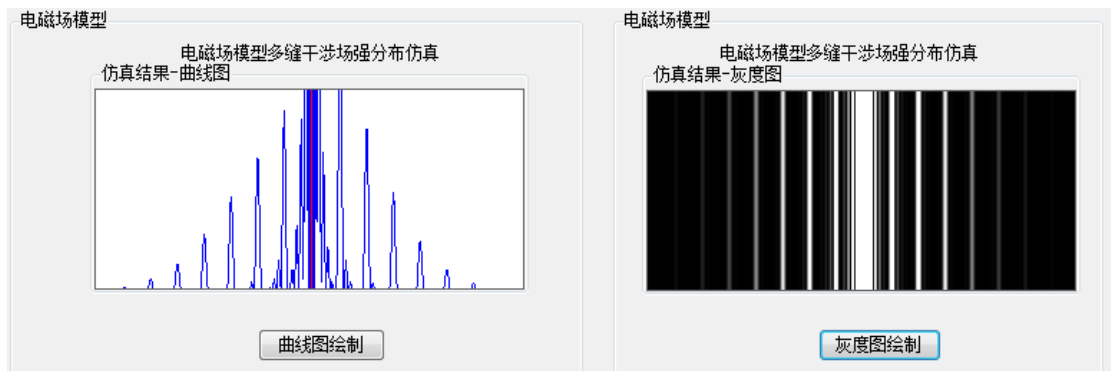
(c) 衍射缝个数  $N=4$



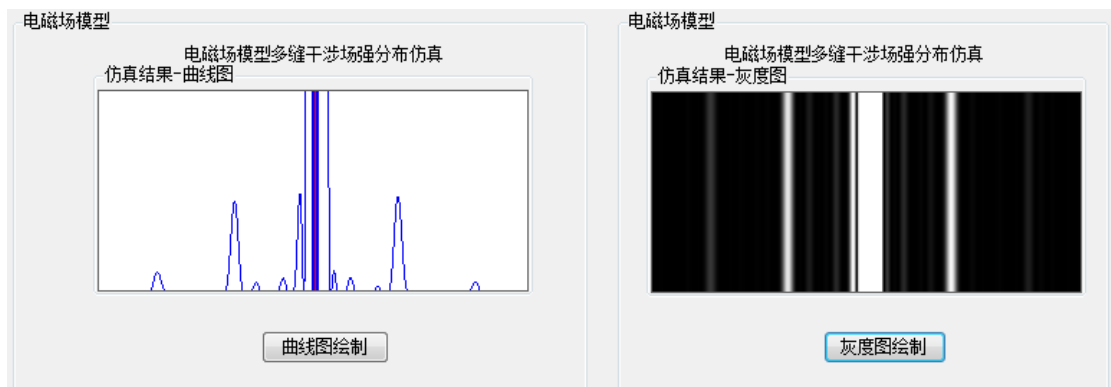
(d) 衍射缝个数  $N=6$

图 13 不同衍射缝个数的光强分布

衍射缝宽度  $d$ : 我们分别取  $d=6$  和  $d=2$  两种情况。仿真结果如下:



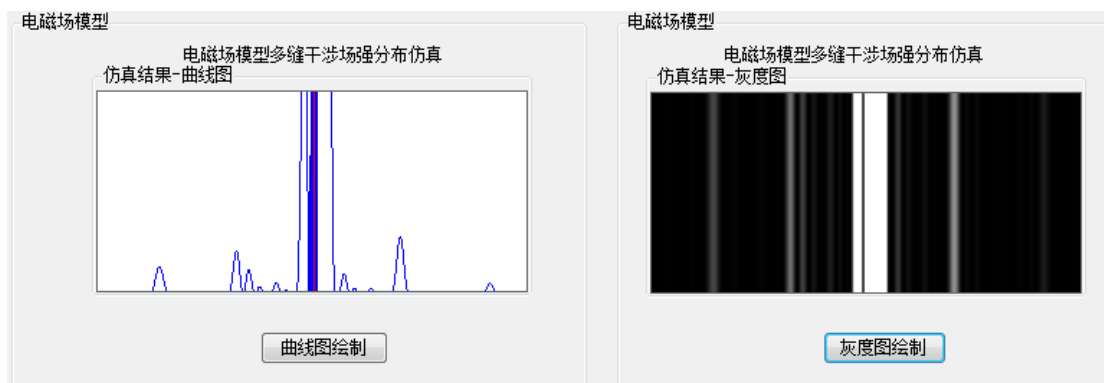
(a) 衍射缝宽度  $d=6$



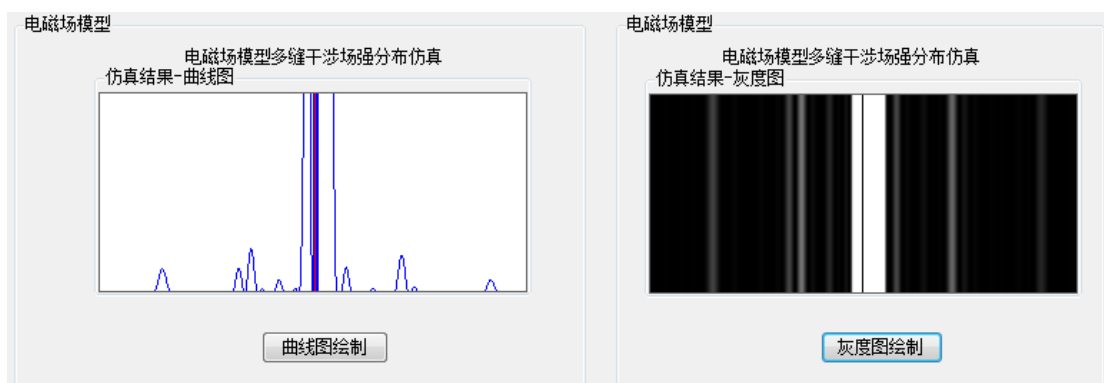
(b) 衍射缝宽度  $d=2$

图 14 不同衍射缝宽度的光强分布

圆频率  $\omega$ : 我们分别取圆频率  $\omega\Delta t=4$  和  $\omega\Delta t=5$ , 仿真结果如下:



(a)  $\omega\Delta t = 4$



(b)  $\omega\Delta t = 5$

图 15 不同圆频率的光强分布

对仿真结果讨论如下：

电磁场模型与玻恩理论得出光强空间分布形式从本质上来说是一致的。我们仿真了在衍射缝个数、缝宽和圆频率等参数不同的情况下，光强的分布形式。

- 1) 当衍射缝个数为 1 时，多缝衍射退化为单缝衍射；当衍射缝个数为 2 时，多缝衍射退化为双缝干涉；
- 2) 当衍射缝宽度增大时，中央条纹明纹中心位置不变，其他各级条纹相应向中央明纹靠近，条纹变密；当衍射缝宽度减小时，条纹变稀疏；
- 3) 当圆频率改变时，光强总体分布形式变化不明显，但其中一些极大值点的位置发生偏移，这说明圆频率不影响光强的强度大小，但会改变它们的相对位置，由此改变光强的总体分布形式。

## 5.7 问题二小结

在本节中，我们在光子电磁场模型的基础上，分析了若干光子的同时作用，建立了光电磁场单缝衍射模型、双缝干涉模型、多缝干涉模型。在此基础上，我们将若干光子的共同作用解释为光子电矢量的和，推导出单缝、双缝和多缝等模型的光强空间分布形式的公式。基于以上分析，得出如下结论并通过仿真实验进行了验证：

- 1) 若干光子共同作用的强度不仅取决于个数  $n$ ，还取决于它们之间的相位差  $\delta$ ，自身频率  $\omega$  以及它们的电场强度  $E_p$ 。给定任意电场强度、相位的一组光子，我们可以采用求取矢量和的方法计算出合成光强；
- 2) 依据光电磁场模型，对双缝干涉原理解释，并推导出光强分布与

相位差之间的公式：  $I = 4E_p^2 \cos^2 \left( \frac{kx d}{2a} - \omega \Delta t \right)$ ，通过公式解释并验证

了光子的湮灭和增强现象。

3) 在夫琅禾费衍射模型基础上，结合光电磁场理论，推导出了光电磁场单

缝衍射光强分布公式：  $I' = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 I_0$ ，这与经典理论是一致的。

4) 利用若干光子共同作用的原理，推导出了光电磁场多缝干涉模型，求得

公式：  $I = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega \Delta t)n/(n-1))}{\sin(\frac{1}{2}(kdp - \omega \Delta t)/(n-1))} \right)^2$ ，并与玻恩理论中的

强度近似公式进行了比较，它们形式上是近似的，但由于  $\omega \Delta t$  存在，使得在最终的光强分布上有一定的差异，最后分析比较这三个模型，将它们的公式统一起来。

## 6. 问题三的求解：偏振的过程

问题三要求我们解释光通过偏振片的真实过程。我们假定文献 2 中提出的偏振原理是合理的，即偏振片是通过检验左旋光子与右旋光子形成的线性偏振光子对于偏振片的夹角，来实现偏振过程的。基于此猜想，我们使用蒙特卡洛方法进行验证。

### 6.1 光电磁场模型的偏振原理

根据文献 2，我们将偏振片理解为如下机制。当光线到达偏振片时，光线中的大量光子分为左旋与右旋两类，两类光子间随即配对，判断在某一时刻形成的线性极化光子对的极化方向是否与偏振方向平行或垂直。如果平行，该光子对将通过偏振片；如果垂直，则该光子对被偏振片吸收。若其方向与偏振方向既不平行也不垂直，则偏振片迫使该光子对分解，重新参与其它光子的配对，直到它们通过或被吸收为止。如图 16 所示。

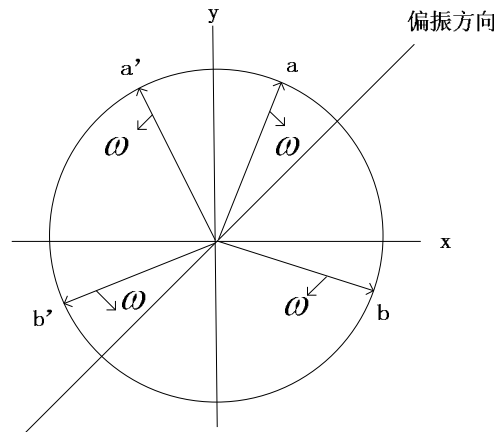


图 16 偏振方向为  $45^\circ$  时光电子分解示意图

在文献 2 中，考虑偏振方向为  $45^\circ$ ，由于在自然光条件下，光子数量巨大



时，光子的相位可视为平均分配在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  之间，因此在实际仿真中，我们可以将偏振方向定为  $y$  轴方向，以简化计算。于是建立蒙特卡罗算法检验偏振模型如下。

1. 实验开始时，随机生成数组 A 和数组 B 分别用于存放左旋光子的相位角和右旋光子的相位角。
2. 在 A 中随机取一个相位角  $\alpha$ ，在 B 中随机取一个相位角  $\beta$ ，判断这两个角是否关于  $y$  轴或  $x$  轴对称。如果关于  $y$  轴对称，则这两个光子组成的光子对将通过偏振片；如果关于  $x$  轴对称，则这两个光子组成的光子对将被偏振片吸收；如果不关于坐标轴对称，则将  $\alpha$  和  $\beta$  放回原来的数组中。
3. 大量重复步骤 2，记录下通过的光子对个数  $M$  和被吸收的光子对个数  $N$ ，计算  $M/N$  值是否接近于 1，以此验证模型的正确性。

算法流程图如下：

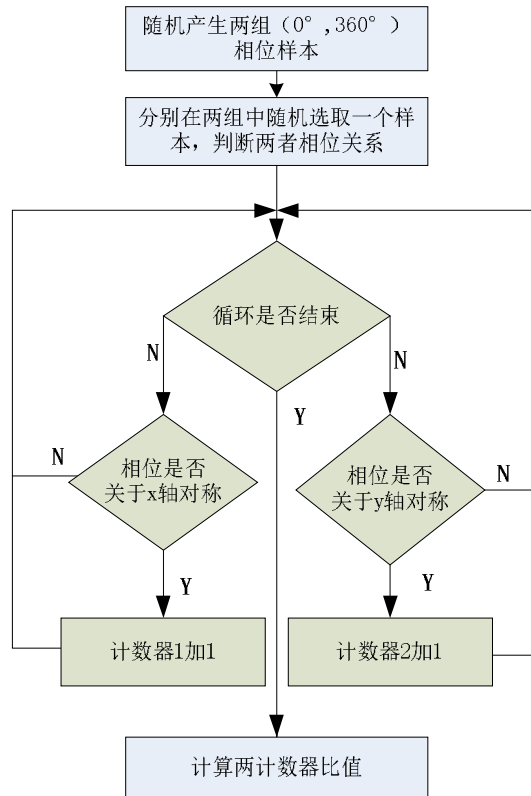


图 17 验证偏振原理流程图

## 6.2 马吕斯定律检验

在检验偏振原理的过程中，我们还要考虑到线性偏振光的情况，它遵循马吕斯定律<sup>[5]</sup>：强度为  $I_0$  的线偏振光，透过检偏片后，透射光的强度（不考虑吸收）

为  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ 。

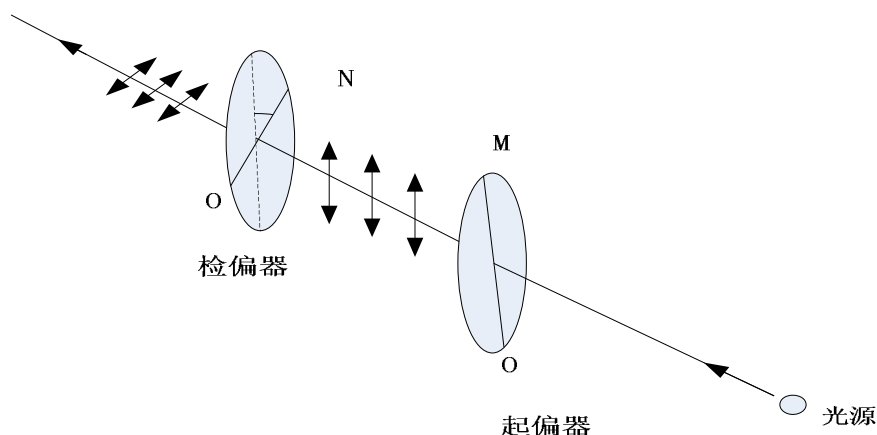


图 18 线性偏振示意图

由于自然界中不存在线性偏振光，线性偏振光是自然光通过偏振片后形成的。因此，要得到线性偏振光通过偏振片的光强变化，必须先使自然光变为线性偏振光，然后，让线性偏振光再次通过偏振方向与原偏振方向成一定夹角的偏振片，来验证线性偏振光通过偏振片的强度变化。

该实验是在上述自然光偏振试验基础上进行的，将通过偏振片的左旋、右旋光子样本记录下来，形成新的左旋、右旋光子样本，分别在新样本组中随即抽取一个，两者进行合成，判断其能否通过偏振方向与原偏振片偏振方向成一定夹角的偏振片，如此进行若干次试验，若通过，则计数，最后将通过两方向的样本数相除，即得到通过偏振片和被吸收光强之比。

### 6.3 仿真实验

为了验证自然光通过偏振片时光强减少一半的判断，我们采用上述算法，在 Matlab 上进行模拟仿真，实验总次数为 100 次，每次实验中样本总数定为 10 万，记录下每次实验后通过偏振片的光子对数  $M$  与被偏振片吸收的光子对数  $N$ 。实验结果如图 19 所示：

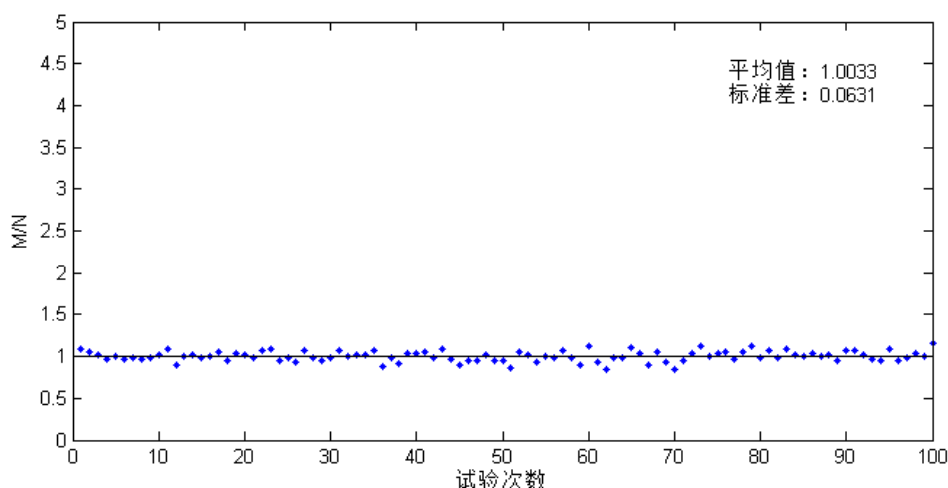


图 19 验证偏振原理实验结果图

可以看出  $M$  与  $N$  的比值的平均值为 1.0033，标准差为 0.0631。它们之间的比值一直稳定在 1 的附近。

为了验证线性偏振光通过偏振片的过程，在第一个实验的基础上，同样采用

蒙特卡洛算法进行实验，实验结果如下图所示。

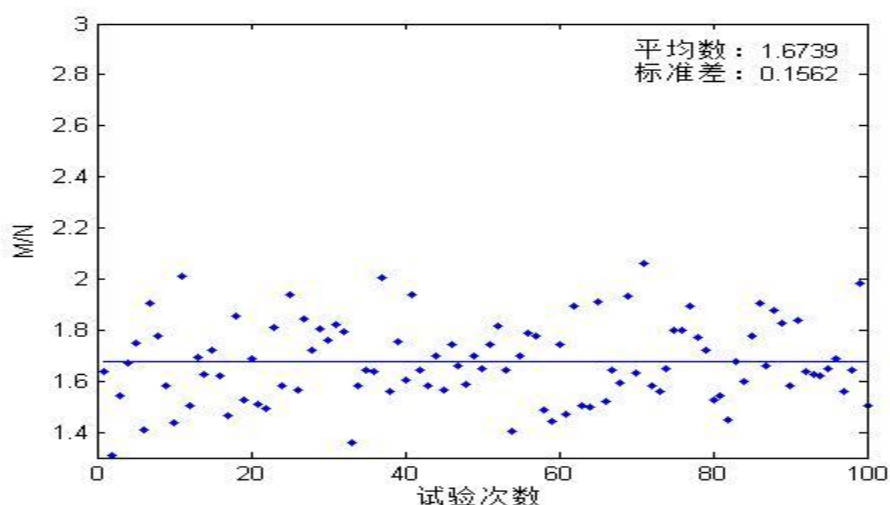


图 20 验证线偏振光偏振实验结果图

在实验中我们将两个偏振片的方向夹角设置为 $\pi/6$ ，按照马吕斯定律光强之比应为 0.75，对应于 M/N 应当是 3:1，但仿真结果的均值和标准差均不满足此假设，表明基于光电磁场模型的偏振解释存在不足。

#### 6.4 问题三小结

在本节中，我们假定光电磁场猜想中关于偏振原理解释成立，在此基础上设计蒙特卡洛验证算法对自然光通过偏振片的过程进行了仿真，得出如下结论：

- 1) **偏振片的原理是：**当光线到达偏振片时，光线中的大量光子分为左旋与右旋两类，两类光子间随即配对，判断在某一时刻形成的线性极化光子对的极化方向是否与偏振方向平行或垂直。如果平行，该光子对将通过偏振片；如果垂直，则该光子对被偏振片吸收。若其方向与偏振方向既不平行也不垂直，则偏振片迫使该光子对分解，重新参与其它光子的配对；
- 2) 自然光通过偏振片时，通过偏振片的光子数与被偏振片吸收的光子数比值稳定在 1 附近，而由偏振片的原理可知，通过偏振片时，形成的线性偏振光子对只有通过与被吸收两种状态，所以自然光通过偏振片后，强度约减为原来的一半。
- 1) 线性偏振光通过偏振片时，应当满足马吕斯定律，但我们的仿真结果表明基于光电磁场偏假设的偏振结果不满足该定律。这可能是由于该验证模型不能很好的解释偏振的真实过程；也有可能是光强不与通过偏振片的粒子数成线性比例关系。因此，还需要进一步讨论。

## 7. 总结

本文旨在探讨光波的内在性质，主要围绕着文章开头提出的三个问题（1. 光通常是按直线前进的，为什么光经过细缝后前进方向会发生改变？为什么必须是光通过很窄的细缝才会使前进方向发生改变？2. 若干个光子同时作用的最终效果如何确定？是否仅取决于光子的个数？3. 光通过偏振片的真实过程是什么？）进行研究，并且在文献中提到的两种波粒二象性猜想的基础上，分别针对相应的问题建立了模型，做出相应的仿真实验，得到的结果与解释如下：

**针对问题一：**为何光的前进方向发生改变，我们建立光微子模型解释如下：

将光子看做阴电子围绕阳电子旋转的系统，它同时具有群速度和相速度，因此将衍射解释为碰撞过程：光子通过衍射缝时，与衍射缝内壁发生碰撞，又由于其旋角动量的存在，在碰撞后前进方向发生改变，称之为衍射；

为何要通过很窄的细缝才会使前进方向改变的问题，可以视作对衍射与缝宽、光子尺寸等参数的关系的研究，我们建立衍射发生概率模型，并做了仿真实验，发现当衍射缝宽与光子半径的比很大时衍射发生概率几乎为零，这就解释了光必须是通过很窄的细缝才会是前进方向发生改变。因此，衍射缝宽与光子半径的比在一个数量级以内，是衍射发生的必要条件。

**针对问题二：**若干个光子同时作用的最终效果的问题，我们在光子电磁场模型的基础上，将若干光子的共同作用解释为光子电矢量的和，推导出单缝、双缝和多缝等模型的光强空间分布形式的公式。得出如下结论，并对这些结论进行了仿真验证：若干光子共同作用的强度不仅取决于个数  $n$ ，还取决于它们之间的相位差  $\delta$ ，自身频率  $\omega$  以及它们的电场强度  $E_p$ 。给定任意电场强度、相位的一组光子，我们可以采用求取矢量和的方法计算出合成光强；

利用若干光子共同作用的原理，推导出了光电磁场单缝、双缝和多缝干涉模

型，求得公式：
$$I = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)n/(n-1)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(kdp - \omega\Delta t)/(n-1)\right)} \right)^2$$
，并与玻恩理论中的

强度近似公式进行了比较，它们形式上是近似的，但由于  $\omega\Delta t$  存在，使得在最终

的光强分布上有一定的差异。当  $n=2$  时，公式可近似化简为

$$I = 4E_p^2 \cos^2\left(\frac{kx d}{2a} - \omega\Delta t\right)$$
，它可以用于解释光子的湮灭和增强的现象，当  $n=1$  时，

公式化简为  $I' = \left( \frac{\sin(kpa)}{kpa} \right)^2 I_0$ ，它是光强空间分布的基础。这与单缝衍射以及双

缝干涉推导出的公式是一致的，因此最终可以将这三个模型统一起来，这也就是光子共同作用的定量表达式。

**针对问题三：**要研究偏振的真实过程是什么，我们假定光电磁场猜想中关于偏振原理解释成立，在此基础上设计蒙特卡洛验证算法对自然光和线偏振光通过偏振片的过程进行了仿真，得出如下结论：

偏振片的原理是：当光线到达偏振片时，光线中的大量光子分为左旋与右旋两类，两类光子间随即配对，判断在某一时刻形成的线性极化光子对的极化方向是否与偏振方向平行或垂直。如果平行，该光子对将通过偏振片；如果垂直，则该光子对被偏振片吸收；若其方向与偏振方向既不平行也不垂直，则偏振片迫使该光子对分解，重新参与其它光子的配对；

自然光通过偏振片时，通过偏振片的光子数与被偏振片吸收的光子数比值稳定在 1 附近，由偏振片的原理可知，通过偏振片时，形成的线性偏振光子对只有

通过与被吸收两种状态，所以自然光通过偏振片后，强度约减为原来的一半。

线偏振光通过偏振片时，应当满足马吕斯定律，但我们的仿真结果表明基于光电磁场假设的偏振结果不满足该定律。这可能是由于该模型不能很好的解释偏振的真实过程；也有可能是光强不与通过偏振片的粒子数成线性比例关系。因此，还需要进一步讨论。

## 8. 模型的讨论和评价

光微子模型的讨论：

1. 基于光微子猜想，我们一共建立了三个模型，其中的动量模型和进动模型，简单明了地回答了由于其做了较多的简化和假设，因此无法直接应用到定量计算中，只能定性地判断衍射是否发生，是它的局限性。

2. 衍射发生概率模型，是前两个模型的深化应用，它通过研究衍射发生概率与光子尺寸、衍射缝尺寸之间的关系，解释了为什么只有在通过窄缝时才发生衍射的问题。但它是基于点光源为基础的，改进时应当给出其他光源情况时的公式。

光电磁场模型讨论：

1. 基于电磁场猜想，我们建立了四个模型，其中三个应用于第二个问题，通过定量解释衍射及干涉现象，并与波恩光学中的强度近似公式进行比较，用于验证并应用了光子共同作用原理。这是本文中比较重要的模型，应该说与实际情况符合得比较好，但在推导过程中省去了简化条件与适用条件，但本文更侧重于模型的应用，下一步的工作应当补充更完备的模型分析。

2. 偏振模型是对于文献中猜想的直接验证，具有信服力，它验证了自然光的偏振过程，但在验证线偏振光时出现理论与结果的冲突。这原因需要我们进一步研究。

## 9. 仿真软件的介绍

基于光的波粒二象性一种猜想的数学仿真软件是基于 .Net Framework 平台，使用 C# 语言开发的软件。软件包括模型的选择，衍射或干涉的选择，参数的设定以及仿真结果的演示窗口。软件的整体框架分为参数设定区和仿真演示区两大部分，如图 21 所示：

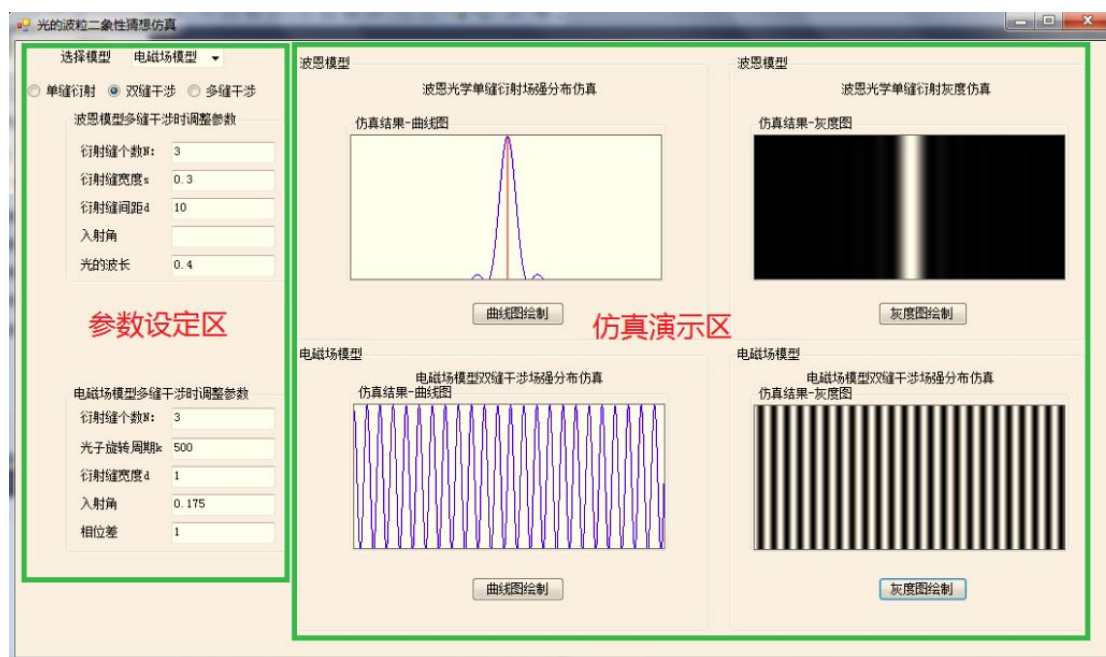


图 21 仿真软件界面

参数设定区：首先要选择模型，包括玻恩经典模型与光电磁场模型；其次选择单缝衍射、双缝干涉或多缝干涉；当选择多缝干涉时，可以对参数进行设定以调节仿真结果的绘制。

仿真演示区：该区包括光强分布曲线图的绘制和光强灰度图的绘制。在参数设定好以后，点击图中的绘制按钮，即可完成仿真的绘制。

## 参考文献

- [1] 龚祖同, 光子结构论, 光子学报, 28 (1): 1-17, 1999。
- [2] D. Zu, The Classical Structure Model of Single Photo and Classical Point of View With Regard to Wave-Particle Duality of Photon, Progress In Electromagnetics Research Letters, Vol.1, 109-118, 2008。
- [3] M. 玻恩, 光学原理, 北京: 科学出版社, 1978 年。
- [4] 费曼, 费曼物理学讲义, 上海: 上海科学技术出版公司, 2005 年。
- [5] 吴王杰, 大学物理学, 北京: 高等教育出版社, 2005 年。