

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 数控加工刀具运动的优化控制问题研究

摘 要：

数控加工刀具运动的优化控制就是在满足误差要求的条件下，通过各种优化控制算法，对机床刀具在各坐标轴上的运动进行合理优化控制。本文对 S 型曲线加减速控制算法进行了改进和优化，并提出了改进后的 S 型曲线加减速控制算法，并对其进行了数学推导与验证，改进后的算法较之前的算法具有运动平稳、冲击小、柔性好等优点。

针对问题一，刀具的加工型线为折线的运动控制要求。首先，通过绘制刀具加工型线为折线的运动分析简图，结合题意和运动分析简图对刀具的运动过程进行了定性分析。在处理刀具的优化控制问题上，本文采用的控制方法是：在刀具经过加减速过程运行到距离 90°折线拐点为允许的加工误差 $\varepsilon = 1\mu\text{m}$ 时，刀具沿 Y 轴方向上的运动开启，X 轴方向上的运行速度逐渐减小，在两者的共同作用下实现 90°的加工型线任务；在处理 135°折线拐点的走刀问题上，通过机床两轴联动完成 135°折线段的加工任务。虽然刀具的实际加工轮廓为弧线，但是其误差满足加工误差要求，因此不仅缩短了运行时间，提高了加工效率，而且规避了刀具由于加速度不连续产生的柔性冲击；其次，在定性分析和 S 型曲线加减速控制算法的基础上，对其算法进行了改进和优化，提出了改进的 S 型曲线加减速控制算法；最后，利用给定的已知参数，对所建立的模型进行了验证。

针对问题二，刀具的加工型线为直线和圆弧段组成的连续曲线的运动控制。首先，通过绘制刀具加工型线为直线和圆弧段组成的连续曲线的运动和速度分析简图，结合题意和分析简图对刀具的运动过程进行定性分析；其次，基于解决问题一的优化控制算法，建立实时的加工优化控制算法；最后，利用给定的加工路径示例对模型进行了检验。

针对问题三，在问题二的基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度。运用矢量叠加基本原理对速度、加速度、加加速度进行分析，得出结论：由于机床可以获得瞬时速度和加速度，使机床的加速过程大大缩短，从而提高了加工效率。

针对问题四，结合前三问，首先对 S 型曲线加减速控制方法的优缺点进行了分析；其次，在满足精度和速度控制要求的条件下，基于五次位移曲线的加减速控制算法，建立了机床运行平稳性的优化控制运动模型；最后，对所建立的模型进行了验证。

通过对问题一、二、三、四问题的分析与解决，可以进一步构建提高机床运行平稳性的优化控制运动模型，深入分析并研究数控刀具在各个坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等的相关问题，对数控加工刀具运动优化控制模型的进一步的改进和推广具有非常重大的意义。

关键词：数控刀具；改进后的 S 型曲线加减速控制算法；加工型线；五次位移曲线

1 问题重述

研究具有高速、高精度、有效柔性的加减速数控加工刀具运动控制方法，是研发现代高性能数控系统的研究重点。对机床各坐标轴上的刀具运动进行控制，其难点在于数控机床对三个坐标轴方向上的刀具运动是分开控制的，而且各方向上的运动必须要相互协调；加工刀具的走刀路线是由一系列首尾相互连接的直线段构成，因此加工刀具的运动轨迹与工件几何形状之间肯定存在加工误差；轨迹路线直线段对应的坐标增量都是对应机床分辨率的整数倍，导致刀具的运动方向受到限制，影响到刀具在坐标轴上的速度、加速度，进而影响到机床的平稳性。对加工刀具的运动进行优化控制，即在机床的限制条件下，对刀具在机床各坐标轴上的运动进行合理控制，从而优化其加工效率。目前，在数控加工控制方法研究中，具有代表性的是 S 型曲线加减速控制方法，其特点是将加减速过程分为七个阶段，通过渐变地控制各段的加速度，使机床运动速度按 S 型曲线形式平滑变化，以保证速度光顺，加速度连续，因此在一定程度上增强了机床运行的平稳性。

在深入研究数控加工优化控制的基础上，本文完成以下工作：

1. 设加工型线为折线，在指定加工误差的条件下，建立实时加工优化控制算法，讨论当相邻两折线段夹角为 90° 和 135° 时，通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化；
2. 设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模型对给定的加工路径示例进行检验；
3. 在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对给定的加工路径示例进行检验。
4. 结合前 3 问，分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型。

2 问题假设

- 1) 只考虑机床在三个坐标轴上的运动情况，忽略更复杂的五轴控制等情况；
- 2) 假设加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度 a_0 ，或瞬间从 a_0 下降到 0，速度也有类似功能；
- 3) 假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点；
- 4) 假设在 X 轴和 Y 轴上的运动，采用相同的插补周期；
- 5) 只考虑本题所提供的精度、速度、加速度等限制条件，忽略其他条件对模型的影响；
- 6) 不考虑机床的‘爬行’现象对刀具运动的影响。

3 符号说明

符号	表示的含义
V_A, V_B	距 A 点为 $1\ \mu m$ 处的速度 (mm/s); 距 B 点为 $1\ \mu m$ 处的速度 (mm/s);
$t, T_1 \sim T_7$	t 运行时间 (s), $T_1 \sim T_7$ 各阶段运行时间 (s);
a, A_{\max}	a 加速度 (mm/s ²), A_{\max} 最大加速度 (mm/s ²);
$V_{\text{始}}, V_{\text{末}}$	系统初始速度 (mm/s), 系统末速度 (mm/s);
D_{\max}	系统可以达到的最大减速度 (mm/s ²);
F	进给速度 (mm/s);
J	加加速度 (mm/s ³);
s, S_1	s 实际位移, S_1 不包含匀速运行阶段的位移;
δ	加工误差 (um)
β	刀具行走微小直线段对应的圆心角(°)
ε	误差允许范围 (um)
$V_{\text{圆}}$	刀具过圆弧线速度 (mm/s)
γ	加工圆弧所对应的圆心角 (°)
N	微小直线段的数量 (个)
θ	每段微小直线段所对应的圆心角 (°)
R	加工圆弧半径 (mm)
$V_i, i=1,2,3\cdots$	加减速速度各阶段速度 (mm/s)
n	每个微小直线段对应的分辨率倍数

4 问题分析

(1) 对于问题 1, 加工型线为折线的刀具运动过程描述, 如图 1 所示。刀具从 O 点下刀沿 X 轴方向运动, 经历加减速过程到达 A 点, 速度为 V_x ($V_x \neq 0$), 当 A、B 两点的距离小于等于 $1\ \mu m$ 时, 机床 Y 轴方向的进给运动开始, 刀具沿 Y 轴方向运动, 速度从零开始增加到 V_y , V_x 则继续减小直至为零, 由于 V_x 没有直接到达 B 点后速度才降

到零，而是从 A→B 的运动过程中逐渐减为零，与此同时 V_y 在逐渐增大，在两者的共同作用下实现 90° 的加工型线任务，虽然直角 ABC 段的实际走刀路径为弧线 AC，但是误差满足加工误差要求，所以缩短了时间，提高了加工效率，规避了刀具在直角处 B 点的柔性冲击；刀具从 C 点继续沿 Y 轴运动，此时 V_x 减至为零，经历加减速过程到达 D 点，速度为 V_D ($V_D \neq 0$)，当 D、E 两点的距离小于等于 $1\mu m$ 时，机床 X 轴负方向的进给运动开始，刀具沿 GH 方向的速度逐渐由零加速到 V_{GH} ，与此同时刀具沿 DE 方向的速度由 V_D 进一步加或减速为 V_{GH} ，在刀具沿 DE 和 GH 方向运动的速度逐渐达到相等的过程中，刀具的实际加工轨迹为弧线 DEF，刀具到达 F 点，此时刀具的合速度为 $V_F = \sqrt{2}V_{GH}$ ，并沿 FH 方向经过加减速过程完成加工，从而实现 135° 的加工型线任务。虽然 DEF 折线段的实际走刀路径为弧线 DEF，但是误差满足加工误差要求，所以缩短了时间，提高了加工效率，规避了刀具在 E 点的柔性冲击。

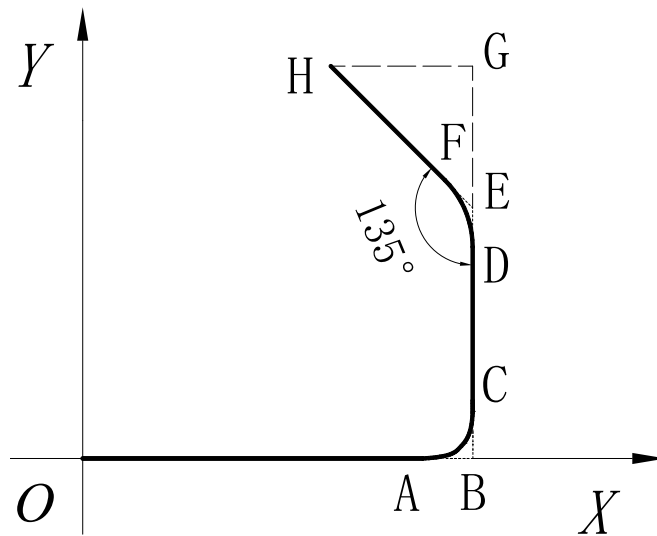
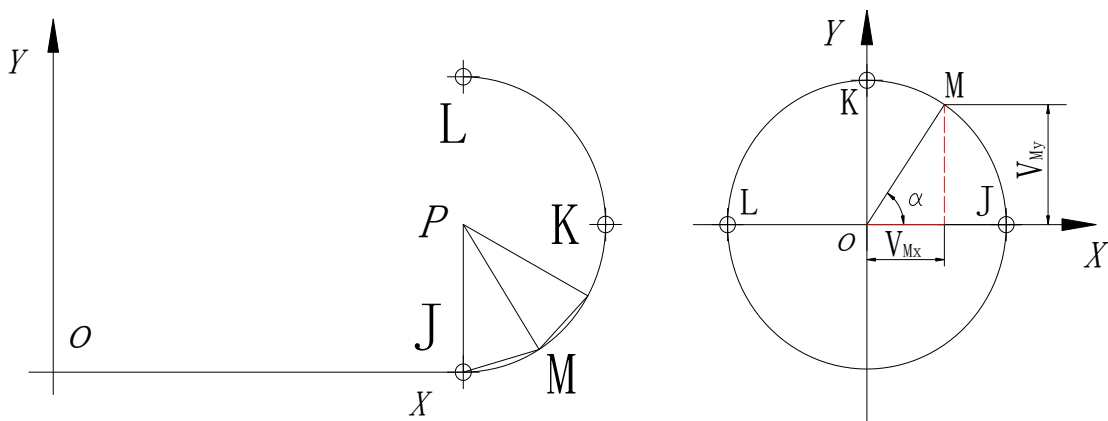


图 1 加工型线为折线的刀具运动过程描述

(2) 对于问题 2，刀具的加工型线为直线和圆弧段组成的连续曲线，其运动过程描述如图 2 (a) 所示，刀具在圆弧段的合速度变化规律情况，如图 2 (b) 所示。刀具从 O 点下刀沿 X 轴方向运动，经历加减速过程到达 J 点，该点的速度对应图 2 (b) 中的 J 点横坐标。此时 Y 轴方向上的分速度为零，机床 Y 轴方向的进给运动开始，刀具沿线段 JM 方向运动到达 M 点，Y 轴方向上的分速度从零开始增加到 V_{My} ，X 轴方向上的分速度从 V_x 减小直至 V_{Mx} ，此时合速度对应图 2 (b) 中的 M 点的坐标，刀具的实际加工轨迹为弧线 JM 段，直线段 JM 与弧线法线的垂直距离即为加工误差，但是满足加工误差的要求；之后刀具按照此规律继续运动，到达 K 点时，X 轴上的分速度由 V_{Mx} 减为零，Y 轴上的分速度由 V_{My} 增加到 K 点的纵坐标值。此外，在 KL 段的运动规律是 JK 段运动规律的相反过程。所以缩短了时间，提高了加工效率，规避了刀具在 K 点的柔性冲击。



(a) 刀具的加工型线及运动过程描述 (b) 刀具在加工圆弧段时, X 和 Y 轴上的速度变化情况

图 2 刀具运动过程及速度变化关系

(3) 对于问题 3, 在问题 2 的基础上, 考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度。刀具的运动过程与问题 2 中不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度因素的情况类似。但是速度的变化规律有所不同, 由于可以获得瞬时的启动速度和加速度, 使机床的加速过程大大缩短, 从而提高了加工效率。在处理问题上, 采用与问题 2 中的处理算法类似。

(4) 对于问题 4, 结合前三问, 在现有加减速控制方法的基础上, 对 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点进行了分析, 在 S 型曲线的加减速控制方法的基础上, 在满足精度和速度控制要求的条件下, 基于五次位移曲线的加减速控制算法, 建立了机床运行平稳性的优化控制运动模型。

5 模型建立与求解

5.1 问题 1 的模型建立与求解

5.1.1 改进的 S 型曲线加减速控制算法与验证

常规的加减速控制方法有直线加减速算法、指数加减速算法、抛物线加减速法等, 直线加减速法虽然简单, 但是存在柔性冲击; 指数加减速法和抛物线加减速法虽能充分利用步进电机的频距特性, 但是加速度存在突变^[1-5]。因此, 还有学者提出将直线与指数两种加减速方法相结合, 以避免速度突变, 但是由于运算的复杂性, 其具体操作较难。为此, 本文基于 S 型曲线加减速控制方法进行优化和改进, 提出了改进的 S 型曲线加减速控制算法。

(I) 周期模型的建立与验证

假设系统可以达到的最大进给速度为 F , 那么对于 S 型曲线加减速阶段运行时间、速度公式如下:

$$T_1 = T_3 = \begin{cases} \frac{A_{\max}}{J}, & F \geq V_{\text{始}} + \frac{A_{\max}}{J} \\ \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}}, & F < V_{\text{始}} + \frac{A_{\max}}{J} \end{cases} \quad (1)$$

$$T_2 = \begin{cases} \frac{F - V_{\text{始}}}{A_{\max}} - \frac{A_{\max}}{J}, & F \geq V_{\text{始}} + \frac{A_{\max}^2}{J} \\ 0, & F < V_{\text{始}} + \frac{A_{\max}^2}{J} \end{cases} \quad (2)$$

$$T_5 = T_7 = \begin{cases} \frac{D_{\max}}{J}, & F \geq V_{\text{始}} + \frac{D_{\max}}{J} \\ \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}}, & F < V_{\text{始}} + \frac{D_{\max}^2}{J} \end{cases} \quad (3)$$

$$T_6 = \begin{cases} \frac{F - V_{\text{末}}}{A_{\max}} - \frac{D_{\max}}{J}, & F \geq V_{\text{始}} + \frac{D_{\max}^2}{J} \\ 0, & F < V_{\text{始}} + \frac{D_{\max}^2}{J} \end{cases} \quad (4)$$

根据给定的已知参数： $V \in [0.13, 6]$ ， $a \in [0.02, 0.6]$ ，代入上式求得：

$$\text{因为 } F < V_{\text{始}} + \frac{D_{\max}^2}{J}, \text{ 所以 } T_1 = \sqrt{\frac{1260 - 130}{300}} = 1.94$$

同理得： $T_2 = 0s$ ， $T_3 = 1.94s$ ， $T_5 = 1.94s$ ， $T_6 = 0s$ ， $T_7 = 1.94s$

$T_1 = T_3 = 1.94s$ ，表示加加速和减加速阶段的时间为 1.94 秒；

$T_2 = T_6 = 0s$ ，表示匀加速和匀减速阶段的时间为 0 秒，即表示去掉匀加速和匀减速阶段，缩短时间，提高了系统的响应和加工效率。

$T_5 = T_7 = 1.94s$ ，表示加减速和减减速阶段的时间为 1.94 秒；

（II）速度的模型与验证

根据速度、加速度、加加速度之间的相互关系，可以得出速度的数学模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_{\text{始}} + \int_0^t Jtdt, \quad t \in [0, T_1] \\ V_2 = V_1 + \int_{T_1}^t JT_1 dt, \quad t \in \left[T_1, \sum_{i=1}^2 T_i \right] \\ V_3 = V_2 + \int_{\sum_{i=1}^2 T_i}^t JT_1 - Jtdt, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i \right] \\ V_4 = V_3, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i \right] \\ V_5 = V_4 - \int_{\sum_{i=1}^4 T_i}^t Jtdt, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i \right] \\ V_6 = V_5 - \int_{\sum_{i=1}^5 T_i}^t JT_5 dt, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i \right] \\ V_7 = V_6 - \int_{\sum_{i=1}^6 T_i}^t (JT_5 - Jt)dt, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i \right] \end{array} \right. \quad (5)$$

经化简整理得：

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = 2.17 + 150t^2, \quad t \in [0, T_1] \\ V_2 = 150t^2 + 582t - 1126.91, \quad t \in \left[T_1, \sum_{i=1}^2 T_i \right] \\ V_3 = 1164t - 1691.45, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i \right] \\ V_4 = 2824.87, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i \right] \\ V_5 = -150t^2 + 5083.03 + 1164T_4 + 150T_4^2, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i \right] \\ V_6 = -150t^2 - 582t + 8470.27 + 1164T_4 + 150T_4^2, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i \right] \\ V_7 = -1164t + 11822.59 + 1164T_4 + 150T_4^2, \quad t \in \left[\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i \right] \end{array} \right. \quad (6)$$

将周期时间 $T_1 \sim T_7$ 的值代入上述 $V_1 \sim V_7$ 中，得到各节点的速度值：

$$V_1 = 566.71 \text{ mm/s}, \quad V_2 = 2824.87 \text{ mm/s}, \quad V_4 = 2824.87 \text{ mm/s}, \quad V_5 = 566.71 \text{ mm/s}。$$

其中， J 是系统的加加速度， J 为常量， A_{max} 是系统可以达到的最大加速度， D_{max} 是系统可以达到的最大减速度。 T_i ($i=1,2, \dots, 6$) 表示各个阶段的运行时间（其中 T_4 为匀速阶段运行时间）， V_i ($i=1,2, \dots, 6$) 表示各个阶段 t 时刻的速度。可以推导出不包含匀速阶段的位移公式如下：

$$S_1 = \frac{F + V_{\text{始}}}{2} (2T_1 + T_2) + \frac{F + V_{\text{末}}}{2} (2T_5 + T_6) \quad (7)$$

如果实际位移 S 大于 S_1 , 则系统还存在匀速运行阶段。由公式可以求出: $T_4 = \frac{S - S_1}{F}$

5.1.2 改进算法的实现

根据给定的初始速度 $V_{\text{始}}$, 末速度 $V_{\text{末}}$, 最大加速度 A_{max} , 最大减速度 D_{max} , 进给速度 F , 代入公式 (1)、(2)、(3) 和 (4) 求出 T_1 、 T_2 、 T_5 、 T_6 。然后再把求解的时间代入公式 (6), 求出 S_1 。

如果 $S_1 < s$, 则系统有匀速阶段, T_4 可以根据公式 (7) 求出, 并且系统可以达到给定的进给速度 F , T_1 、 T_2 、 T_5 、 T_6 即为各个阶段的运行时间。

如果 $S_1 = s$, 则系统没有匀速阶段, $T_4 = 0$, 并且系统正好达到给定的进给速度 F , T_1 、 T_2 、 T_5 和 T_6 即为各个阶段的运行时间。

如果 $S_1 > s$, 则系统没有匀速阶段, $T_4 = 0$, 并且系统没有达到给定的进给速度 F , 给定的 F 不能直接用来计算各个阶段的运行时间。所以需要重新求解实际的最大速度和各个阶段的运行时间。

需要根据初始速度、末速度和位移重新求解实际的最大速度, 下面详细介绍如何求解实际最大速度。

如果只考虑基本的加速段和减速段, 则初始速度和末速度相等, 但实际给定是初末速度往往不相等, 利用这个特点可以快速判断 S 型曲线存在几个运行阶段。根据初始速度和末速度的大小可以分两种情况。

情况 1: $V_{\text{始}} < V_{\text{末}}$, 这说明加速度阶段时间大于减速阶段时间, 但达不到最大速度 F 。

假设不含匀减速阶段, 最大减速度刚好达到最大速度 $F_1 = V_{\text{末}} + D_{\text{max}}^2 / J$, 令 $F = F_1$, 把 F 代入方程 (6) 求出 S_1 , 如果 $S_1 < s$, 则表明系统存在匀减速, 实际 S 型曲线有 6 段, 并且实际最大速度大于 F_1 , 而小于给定的最大速度。设此时对应的实际最大速度为 F , 此时对应的时间分别如下:

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \frac{A_{\text{max}}}{J} \\ T_2 = \frac{F - V_{\text{始}}}{A_{\text{max}}} - \frac{A_{\text{max}}}{J} \\ T_5 = T_7 = \frac{D_{\text{max}}}{J} \\ T_6 = \frac{F - V_{\text{末}}}{D_{\text{max}}} - \frac{D_{\text{max}}}{J} \end{cases} \quad (8)$$

将 T_1 到 T_6 代入位移方程 (6)，可以得到关于 F 的一元二次方程 (9)：

$$2JF^2 + 2A_{\max}^2(V_{\text{始}} + V_{\text{末}}) - J(V_{\text{始}}^2 + V_{\text{末}}^2) - 2JA_{\max}S = 0 \quad (9)$$

求解此一元二次方程可以得到实际最大速度：

$$F = \sqrt{\frac{2JA_{\max}S + J(V_{\text{始}}^2 + V_{\text{末}}^2) - 2A_{\max}^2(V_{\text{始}} + V_{\text{末}})}{2J}}$$

把求得的 F 代入方程组，就可求解出对应的时间值。

如果 $S_1 = s$ ，则说明不含匀减速段， F_1 就是实际的最大速度。

如果 $S_1 > s$ ，则说明不含匀减速段，并且世纪最大速度小于 F_1 ，根据 S 曲线的特点，

此时假设不含匀加速阶段，并且可以达到最大加速度，则最大速度为 $F_2 = V_{\text{始}} + A_{\max}^2 / J$ 。

如果 $F_2 \leq V_{\text{末}}$ ，则系统存在匀加速阶段，实际 S 型曲线有 5 段，并且实际最大速度大于 F_2 ，而小于 F_1 。设此时对应的实际最大速度是 F ，对应的时间如下：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \frac{A_{\max}}{J} \\ T_2 = \frac{F - V_{\text{始}}}{A_{\max}} - \frac{A_{\max}}{J} \\ T_5 = T_7 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} \\ T_6 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

将 T_1 到 T_6 代入位移方程，可以得到关于 F 的方程：

$$\frac{F + V_{\text{始}}}{2} \left(\frac{A_{\max}}{J} + \frac{F - V_{\text{始}}}{A_{\max}} \right) + (F + V_{\text{末}}) \sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} = s \quad (11)$$

F 的取值范围是 $V_{\text{始}} + A_{\max}^2 / J < F < V_{\text{末}} + A_{\max}^2 / J$

如果 $F_2 > V_{\text{末}}$ ，令 $F = F_2$ ，把 F 代入方程求出 S_2 ，

$$S_2 = (V_{\text{始}} + F)T_1 + (V_{\text{末}} + F)T_5 \quad (12)$$

如果 $S_2 \geq s$ ，则表明系统不存在匀加速，设此时对应的实际最大速度是 F ，此时对应的时间如下：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} \\ T_2 = T_6 = 0 \\ T_5 = T_7 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} \end{cases} \quad (13)$$

将 T_1 到 T_6 代入位移方程，可推导出关于 F 的方程：

$$(F + V_{\text{始}})\sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} + (F + V_{\text{末}})\sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} = s \quad (14)$$

F 取值范围是： $V_{\text{末}} < F < V_{\text{始}} + A_{\text{max}}^2 / J$

如果 $S_2 < s$ ，则系统存在匀加速阶段。

情况 2: $V_{\text{始}} \geq V_{\text{末}}$ ，这说明加速阶段的时间小于减速阶段的时间，同样也达不到最大速度。

假设不含匀加速阶段，最大加速度可以刚好达到，则最大速度 $F_1 = V_{\text{始}} + A_{\text{max}}^2 / J$ ，

把 F_1 代入方程求出 S_1 ，如果 $S_1 < s$ ，则表明系统存在匀加速，又因为加速时间小于减速时间，所以一定也存在匀减速阶段，可推导出对应的方程为：

$$2JF^2 + 2A_{\text{max}}^2(V_{\text{始}} + V_{\text{末}}) - J(V_{\text{始}}^2 + V_{\text{末}}^2) - 2JA_{\text{max}}S = 0$$

如果 $S_1 > s$ ，则说明不含匀加速段，根据 S 曲线的特点，假设不含匀减速阶段，并且可达到最大减速度，此时 $F_2 = V_{\text{末}} + D_{\text{max}}^2 / J$ ，令 $F = F_2$ ，把 F 代入方程求出 S_2 ，如果 $S_2 \geq s$ ，则表明系统不存在匀减速，那么也就不存在匀加速阶段，设此时对应的实际最大速度是 F，此时对应的时间如下：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} \\ T_2 = T_6 = 0 \\ T_5 = T_7 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} \end{cases} \quad (15)$$

将 T_1 到 T_6 代入位移方程，可以推导出的方程：

$$(F + V_{\text{始}})\sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} + (F + V_{\text{末}})\sqrt{\frac{F - V_{\text{末}}}{J}} = s \quad (16)$$

F 的取值范围是 $V_{\text{始}} < F < V_{\text{末}} + D_{\text{max}}^2 / J$

如果 $S_2 < s$ ，则系统存在匀减速阶段，不存在匀加速阶段，设此时对应的时间如下：

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} \\ T_2 = 0 \\ T_5 = T_7 = \frac{D_{\text{max}}}{J} \\ T_6 = \frac{F - V_{\text{末}}}{D_{\text{max}}} - \frac{D_{\text{max}}}{J} \end{cases} \quad (17)$$

将 T_1 到 T_6 代入位移方程，可以推导出对应的方程：

$$(F + V_{\text{始}}) \sqrt{\frac{F - V_{\text{始}}}{J}} + \frac{F + V_{\text{末}}}{2} \left(\frac{D_{\text{max}}}{J} + \frac{F - V_{\text{末}}}{D_{\text{max}}} \right) = s \quad (18)$$

所以， F 的取值范围是 $V_{\text{末}} + D_{\text{max}}^2 / J < F < V_{\text{始}} + A_{\text{max}}^2 / J$

刀具通过 90° 和 135° 两交点处的速度、加速度、加加速度的变化曲线，如图 3 所示。

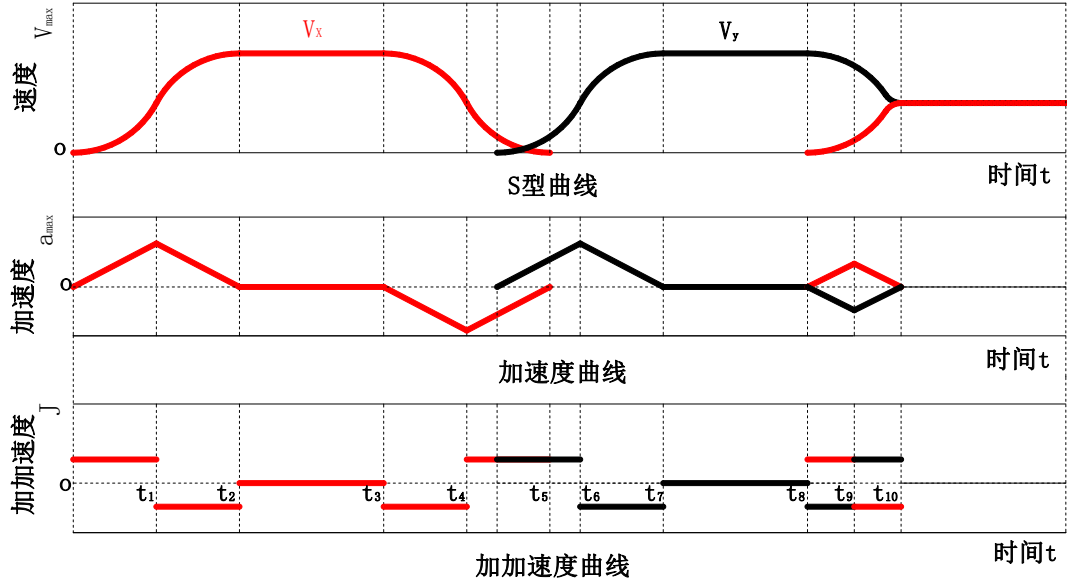


图 3 刀具通过折线交点处的运动参数变化曲线

5.2 问题 2 的模型建立与求解

5.2.1 模型的建立

数控机床在实际加工过程中，加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，这些直线段与工件实际几何尺寸之间必然存在误差，而机床刀具行走的每一条直线段都是机床分辨率的整数倍。在满足机床误差允许范围的情况下，机床刀具行走直线段的距离越小越好。借助这些限制条件，可对机床刀具在圆弧加工时的 X 轴速度和 Y 轴速度进行规划计算。刀具加工运动轨迹的描述，如图 4 所示。

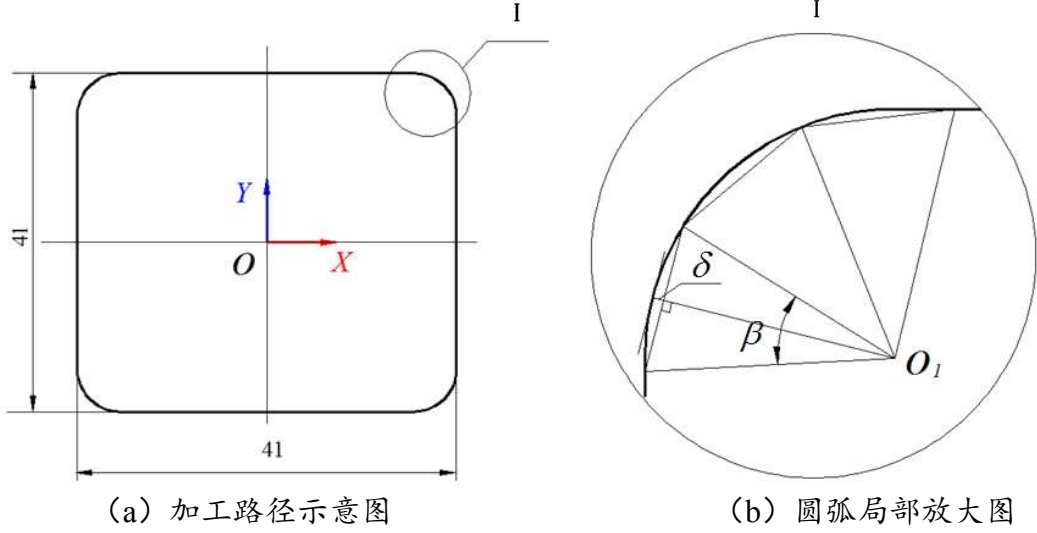


图4 刀具加工运动轨迹的描述

考虑到机床每次运动的距离都是分辨率的整数倍，则每段直径长度可设为： $n/1280$ ，圆弧半径为 R ，实际加工误差为 δ ，加工过程满足： $\delta \leq \varepsilon$ 。

$$\delta = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{n}{2 \times 1280}\right)^2} \quad (19)$$

由于 Δx , Δy , Δz 是分辨率的整数倍，在满足机床加工允许误差范围的条件下， n 的取值越大越有利于机床的运行操作和加工效率。

设刀具过圆弧时每个微小直线段对应的圆心角为 θ ，则有：

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{n}{2} \times \frac{1}{1280}}{R} = \frac{n}{2560R} \quad (20)$$

所以 $\theta = 2 \arcsin \frac{n}{2560R}$ 。

经过圆心角为 γ 时，需要经过 N 个微小直线段，则有：

$$N = \frac{\gamma}{\theta} = \frac{\gamma}{2 \arcsin \frac{n}{2560R}} \quad (21)$$

假设刀具过圆弧时以 $V_{\text{圆}}$ 速度进行加工，则有：

$$V_x = V_{\text{圆}} \cos(k\theta), \quad k=1, 2, 3\cdots, \quad V_y = V_{\text{圆}} \sin(k\theta), \quad k=1, 2, 3\cdots, N$$

所以 $V_x = V_{\text{圆}} \cos(2n \arcsin \frac{n}{2560R}), \quad n=1, 2, 3\cdots, N$

$$V_y = V_{\text{圆}} \sin(2n \arcsin \frac{n}{2560R}), \quad n=1, 2, 3\cdots, N \quad (22)$$

由 $\theta = 2 \arcsin \frac{n}{2560R}$, $N = \frac{\gamma}{\theta}$ 知，当 R 增大时， $\arcsin \frac{n}{2560R}$ 减小，即 θ 减小，此时 $N = \frac{\gamma}{\theta}$ 增大， N 增大表示同一段圆弧分割的微小直线段数增多，加工效率降低。

结合题意给定的加工实例，对模型进行检验，由题知： $R = 5\text{mm}$, $\gamma = 90^\circ$ 。此时：

$$\delta = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{n}{1280 \times 2}\right)^2} = 5 - \sqrt{25 - \left(\frac{n}{2560}\right)^2} \quad (23)$$

又因为加工误差必须在机床误差允许范围之内，所以要满足 $\Delta t \leq \varepsilon$ ，即：

$$5 - \sqrt{25 - \left(\frac{n}{2560}\right)^2} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow n \leq 80.95$$

在满足机床加工允许误差范围的条件下， n 的取值越大，机床加工效率越高。

$$\theta = 2\arcsin \frac{n}{2560R} = 2\arcsin \frac{n}{12800} \quad (24)$$

$$N = \frac{\gamma}{\theta} = \frac{90}{2\arcsin \frac{n}{12800}} = \frac{45}{\arcsin \frac{n}{12800}} \quad (25)$$

$$V_x = V_{\text{圆}} \cos(2k \arcsin \frac{n}{1280}) \quad (26)$$

$$V_y = V_{\text{圆}} \sin(2k \arcsin \frac{n}{1280}) \quad (27)$$

根据式 (6)、(24)、(26) 和 (27) 可得：

$$\begin{cases} V_{x1} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] \int_0^t J dt, t \in [0, T_1] \\ V_{x2} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{x1} + \int_{T_1}^t J T_1 dt], t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{x3} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{x2} + \int_{\sum_{i=1}^2 T_i}^t J T_1 - J t dt], t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{x4} = V_{x3\text{末}}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{x5} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{x4} - \int_{\sum_{i=1}^4 T_i}^t J t dt], t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{x6} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{x5} - \int_{\sum_{i=1}^5 T_i}^t J T_5 dt], t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{x7} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{x6} - \int_{\sum_{i=1}^6 T_i}^t J(T_5 - t) dt], t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{y1} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] \int_0^t J t dt, t \in [0, T_1] \\ V_{y2} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{y1} + \int_{T_1}^t J T_1 dt], t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{y3} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{y2} + \int_{\sum_{i=1}^2 T_i}^t J T_1 - J t dt], t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{y4} = V_{y3}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{y5} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{y4} - \int_{\sum_{i=1}^4 T_i}^t J t dt], t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{y6} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{y5} - \int_{\sum_{i=1}^5 T_i}^t J T_5 dt], t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{y7} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] [V_{y6} - \int_{\sum_{i=1}^6 T_i}^t J (T_5 - t) dt], t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{array} \right.$$

积分整理得：

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{x1} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (2.17 + 150t^2), t \in [0, T_1] \\ V_{x2} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (150t^2 + 582t - 1126.91), t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{x3} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (1164t - 1691.45), t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{x4} = 2824.87, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{x5} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (-150t^2 + 5083.03 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{x6} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (-150t^2 - 582t + 8470.27 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{x7} = \cos[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})] (-1164t + 11822.59 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{y1} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](2.17 + 150t^2), t \in [0, T_1] \\ V_{y2} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](150t^2 + 582t - 1126.91), t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{y3} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](1164t - 1691.45), t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{y4} = 2824.87, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{y5} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](-150t^2 + 5083.03 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{y6} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](-150t^2 - 582t + 8470.27 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{y7} = \sin[2k \arcsin(\frac{n}{2560R})](-1164t + 11822.59 + 1164T_4 + 150T_4^2), t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{array} \right.$$

5.2.2 模型的检验

结合题意给定的加工路径示例，对所建立的模型进行检验。由改进后的 S 型加减速控制算法中可知加加速时间与减加速时间相等，即有 $t_1 = t_3$

经历加加速过程之后，机床刀具进给速度为：

$$V_{\text{变加}} = 150t^2 + 2.17 = 150 \times 1.94^2 + 2.17 = 566.71 \text{ mm/s}$$

$$\Delta V_{\text{变加}} = 2V_{\text{变加}} = 566.71 \times 2 = 1133.42 \text{ mm/s}$$

$$\Delta V_{\text{匀加}} = V_{\text{进给}} - \Delta V_{\text{匀加}} = 1260 - 1133.42 = 126.58 \text{ mm/s}$$

匀加速度阶段速度与加加速度之间存在关系：

$$\Delta V_{\text{匀加}} = Jt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\Delta V_{\text{匀加}}}{J}} = 0.65 \text{ s}$$

加速过程中各阶段运行的位移：

$$S_{\text{加加}} = \int_0^{t_1} V_1 dt = \int_0^{t_1} (150t^2 + 2.17) dt = 25.63 \text{ mm}$$

$$S_{\text{匀加}} = \int_{t_1}^{t_1+t_2} V_2 dt = \int_{t_1}^{t_1+t_2} (150t^2 + 582t - 1126.91) dt = 17.34 \text{ mm}$$

$$S_{\text{减加}} = \int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+t_3} (1164t - 1691.45) dt = 37.52 \text{ mm}$$

$$S_{\text{变}} = S_{\text{加加}} + S_{\text{匀加}} + S_{\text{减加}} = 80.49 \text{ mm}$$

加工示例的总位移和时间：

$$S_{\text{总}} = 4l_{\text{直线}} + 4l_{\text{圆}} = 1725.6 \text{ mm}$$

$$S_{\text{匀}} = S_{\text{总}} - 2S_{\text{变}} = 1564.62 \text{ mm}$$

$$t_{\text{匀}} = \frac{S_{\text{匀}}}{V_{\text{匀}}} = 74.5 \text{ s}$$

$$t_{\text{总}} = t_{\text{匀}} + t_{\text{加}} + t_{\text{减}} = 82.27 \text{ s}$$

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 模型的建立

结合问题（2）中建立的数学模型，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法。

$$\begin{cases} V_1 = V_{\text{始}} + \int_0^t (a_0 + Jt)dt, t \in [0, T_1] \\ V_2 = V_1 + \int_{T_1}^t (a_0 + JT_1)dt, t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_3 = V_2 + \int_{\sum_{i=1}^2 T_i}^t (a_0 + JT_1 - Jt)dt, t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_4 = V_{\text{3末}}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_5 = V_4 + \int_{\sum_{i=1}^4 T_i}^t (a_0 - Jt)dt, t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_6 = V_5 + \int_{\sum_{i=1}^5 T_i}^t (a_0 - JT_5)dt, t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_7 = V_6 + \int_{\sum_{i=1}^6 T_i}^t (a_0 - JT_5 + Jt)dt, t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{cases}$$

经化简整理得：

$$\begin{cases} V_1 = 150t^2 + 20t + 2.17, t \in [0, T_1] \\ V_2 = 150t^2 + 622t - 1165.18, t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_3 = 1224t - 18.64, t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_4 = V_{\text{3末}}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_5 = -150t^2 + 1244t - 150T_4^2 - 1144T_4 - 2199.2, t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_6 = -150t^2 + 682t - 150T_4^2 + 580T_4 - 18.64, t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_7 = 20t - 300T_4^2 + 604T_4 + 1791.38, t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{cases} \quad (28)$$

由题意知：加工刀具行走的路线是由一系列首尾相连的直线段组成。

对于加工圆弧路径时只要满足：

$$R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{n}{2560}\right)^2} < \varepsilon$$

即可保证机床加工误差在机床误差范围内。刀具加工圆弧时每个直线段对应的圆心角为 θ ，由 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{n}{2560R}$ ，得 $\theta = 2 \arcsin \frac{n}{2560R}$ 。设加工圆弧对应的圆心角为 γ ，则加工该圆弧时对应走过的折线段数为：

$$N = \frac{\gamma}{\theta} = \frac{\gamma}{2 \arcsin \frac{n}{2560R}} \quad (29)$$

假设刀具过圆弧时以 $V_{\text{圆}}$ 匀速进行加工，则有：

$$V_x = V_{\text{圆}} \cos(k\theta), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

$$V_y = V_{\text{圆}} \sin(k\theta), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

根据式 (6)、(30) 和 (31)，可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{x1} = \cos(k\theta)(150t^2 + 20t + 2.17), t \in [0, T_1] \\ V_{x2} = \cos(k\theta)(150t^2 + 622t - 1165.18), t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{x3} = \cos(k\theta)(1224t - 18.64), t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{x4} = V_{x3\text{末}}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{x5} = \cos(k\theta)(-150t^2 + 1244t - 150T_4^2 - 1144T_4 - 2199.2), t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{x6} = \cos(k\theta)(-150t^2 + 682t - 150T_4^2 + 580T_4 - 18.64), t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{x7} = \cos(k\theta)(20t - 300T_4^2 + 604T_4 + 1791.38), t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \\ \\ V_{y1} = \sin(k\theta)(150t^2 + 20t + 2.17), t \in [0, T_1] \\ V_{y2} = \sin(k\theta)(150t^2 + 622t - 1165.18), t \in [T_1, \sum_{i=1}^2 T_i] \\ V_{y3} = \sin(k\theta)(1224t - 18.64), t \in [\sum_{i=1}^2 T_i, \sum_{i=1}^3 T_i] \\ V_{y4} = V_{y3\text{末}}, t \in [\sum_{i=1}^3 T_i, \sum_{i=1}^4 T_i] \\ V_{y5} = \sin(k\theta)(-150t^2 + 1244t - 150T_4^2 - 1144T_4 - 2199.2), t \in [\sum_{i=1}^4 T_i, \sum_{i=1}^5 T_i] \\ V_{y6} = \sin(k\theta)(-150t^2 + 682t - 150T_4^2 + 580T_4 - 18.64), t \in [\sum_{i=1}^5 T_i, \sum_{i=1}^6 T_i] \\ V_{y7} = \sin(k\theta)(20t - 300T_4^2 + 604T_4 + 1791.38), t \in [\sum_{i=1}^6 T_i, \sum_{i=1}^7 T_i] \end{array} \right.$$

5.3.2 模型的检验

运用加工路径示例，对控制算法进行检验：

$$\text{由 } V_1 = 150t^2 + 20t + 2.17, \quad V_{\text{目标}} = 21 \text{ mm/s}$$

$$\text{当 } V_1 = \frac{V_{\text{目标}}}{2} \text{ 时, } t = 1.72 < 1.94 \text{ s}。$$

故 S 型加工减速控制中不存在匀加速阶段。

因为 S 型加减速控制算法具有对称性，所以有：

$$V_1 = \frac{V_{\text{目标}}}{2}, \text{ 得: } t_1 = t_3 = 0.67 \text{ s}, \quad t_2 = 0 \text{ s}$$

$$S_{\text{加加}} = \int_0^{t_1} V_1 dt = \int_0^{0.67} (150t^2 + 20t + 2.17) dt = 30.98 \text{ mm}$$

$$S_{\text{减加}} = \int_{0.67}^{1.34} (150t^2 + 622t - 1165.18) dt = 37.43 \text{ mm}$$

$$S_{\text{变加}} = S_{\text{加加}} + S_{\text{减加}} = 68.41 \text{ mm}$$

$$S_{\text{总}} = 4(l_{\text{直线}} + l_{\text{圆}}) = 1725.6 \text{ mm}$$

$$S_{\text{匀}} = S_{\text{总}} - 2S_{\text{变加}} = 1588.78 \text{ mm}$$

$$t_{\text{匀}} = \frac{S_{\text{匀}}}{V_{\text{匀}}} = \frac{1588.78}{21} = 75.66 \text{ s}$$

$$t_{\text{总}} = t_{\text{匀}} + t_{\text{加}} + t_{\text{减}} = 78.34 \text{ s}$$

经过计算检验得出：考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度时，比不考虑上述两因素时加工效率要高。

5.4 问题 4 的分析与模型建立

5.4.1 S 型曲线加减速控制方法的优缺点分析

合适的加减速控制方法的选择对数控机床十分重要，因为它不仅能够提高数控系统的可靠性，而且可以延长计算机数控系统的使用寿命^[6-8]。目前，在高精度数控系统中应用最为广泛的加减速控制算法为 S 型曲线加减速控制方法。该方法的优缺点如下：

优点：S 型加减速控制算法，通过连续控制各阶段的加速度，使得其加减速过程按照 S 型曲线的形式平滑地连续变化，可以有效地避免加速度引起的突变问题，从而得到相对比较平滑且无冲击的加工过程。所以，S 曲线加减速控制方法不仅能有效地改善传统的加减速控制方法存在的问题，而且能有效地保证系统的柔性。如果其速度控制曲线为三次或三次以上的高级曲线，就可保证速度、加速度的连续性；在此基础上，若加减速控制规律能进一步满足数控机床机电系统的动力学要求，则就可以实现柔性、平稳的

加减速过程的过渡控制。

缺点：S 型加减速控制算法的程序分段多且复杂，其加加速度 J 不连续，会影响到加工过程的平滑性，不利于保证加工质量和加工精度，不适合高精度数控加工系统。四次曲线加减速控制中，位移曲线为四次，加加速度和加速度曲线基本保证连续变化，使得数控系统的柔性得到增强，但是加加速度无法恒定的保持连续性，使系统在运行轨迹中加加速产生突变，在一定程度上仍然无法满足加工的精度及保障加工的质量。

5.4.2 机床运行平稳性的优化控制运动模型

基于对 S 型加减速控制算法的分析，探索了一种新的曲线控制方法：五次位移曲线、四次速度曲线加减速原理，以求达到更好的加工效果^[4]。

五次位移加减速曲线的构造条件必须满足平稳的速度变化、比较短的过渡时间、进给过程中冲击小以及加减速的开始和结束的边界条件，这些构造条件和四次位移曲线有相似之处，但其改进之处就是必须满足加加速度的连续性。

五次位移加减速控制曲线可以写成：

$$S = m_1 x^5 + m_2 x^4 + m_3 x^3 + m_4 x^2 + m_5 \quad (32)$$

通过对位移进行求导可得速度 V、加速度 a 以及加加速度 J 的曲线方程：

$$\begin{cases} V = 5m_1 x^4 + 4m_2 x^3 + 3m_3 x^2 + 2m_4 x + m_5 \\ a = 20m_1 x^3 + 12m_2 x^2 + 6m_3 x + 2m_4 \\ J = 60m_1 x^2 + 24m_2 x + 6m_3 \end{cases} \quad (33)$$

其中 $x = t/t_m$, t_m 表示加速或减速过程的总时间， t 表示加速段或减速段时间。曲线满足的边界条件：

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(1) = S_1 \\ V(0) = V_1 \\ V(1) = V_2 \\ a(0) = 0 \\ a(1) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

其中 V_1, V_2 为加速减速过程的起始速度和终止速度， S_1 为加减速过程的总位移。将上面边界条件代入上式方程可得：

$$\begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = V_1 \\ m_3 = 0 \\ m_4 = 10S_1 + 6V_2 + 9V_1 \\ m_5 = -15S_1 + 6V_2 + 9V_1 \\ m_6 = 6S_1 - 3V_2 - 3V_1 \end{cases} \quad (35)$$

所得出的曲线方程为：

$$\begin{cases} S = V_1 t + \frac{6S_1 - 3V_2 - 3V_1}{t_m^4} t^5 - \frac{15S_1 - 6V_2 - 9V_1}{t_m^3} t^4 + \frac{10S_1 - 3V_2 - 7V_1}{t_m^2} t^3 \\ V = V_1 + \frac{5(6S_1 - 3V_2 - 3V_1)}{t_m^4} t^4 - \frac{4(15S_1 - 6V_2 - 9V_1)}{t_m^3} t^3 + \frac{3(10S_1 - 3V_2 - 7V_1)}{t_m^2} t^2 \\ a = \frac{20(6S_1 - 3V_2 - 3V_1)}{t_m^4} t^3 - \frac{12(15S_1 - 6V_2 - 9V_1)}{t_m^3} t^2 + \frac{6(10S_1 - 3V_2 - 7V_1)}{t_m^2} t \\ J = \frac{60(6S_1 - 3V_2 - 3V_1)}{t_m^4} t^2 - \frac{24(15S_1 - 6V_2 - 9V_1)}{t_m^3} t + \frac{6(10S_1 - 3V_2 - 7V_1)}{t_m^2} \end{cases} \quad (36)$$

其中 V , a , J 的关系如图所示:

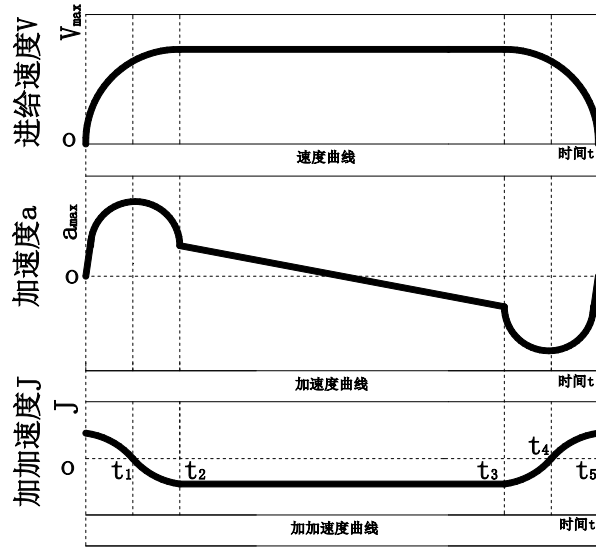


图 5 五次位移曲线的速度、加速度和加加速度曲线图

为保证其加工精度及加工质量，加速度和加加速度都有一定的最大值，一旦超限不但就会影响其加工精度和质量，而且还会影响数控机床的使用寿命，所以加速度和加加速度还要满足以下条件：

$$\begin{cases} |a| \leq A_{\max} \Rightarrow t \leq \frac{\sqrt{144m_5^2 - 180 \times 6m_6} - 12m_5}{180m_6} t_m \Rightarrow t_m \geq \frac{|6m_4 w + 12m_5 w^2 + 60m_6 w^3|}{A_{\max}} \\ |J| \leq J_{\max} \Rightarrow t_m \geq \sqrt{\frac{6m_4 - \frac{12m_5^2}{5m_6}}{J_{\max}}} \end{cases} \quad (37)$$

其中 $w = \frac{\sqrt{144m_5^2 - 180 \times 6m_6} - 12m_5}{180m_6}$

求不等式可得：

$$t_m = \max \left(\frac{|6m_4w + 12m_5w^2 + 60m_6w^3|}{A_{\max}}, \sqrt{\frac{6m_4 - \frac{12m_5^2}{5m_6}}{J_{\max}}} \right) \quad (38)$$

一般情况下，最大加加速度要远大于最大加速度，因此：

$$\frac{|6m_4w + 12m_5w^2 + 60m_6w^3|}{A_{\max}} > \sqrt{\frac{6m_4 - \frac{12m_5^2}{5m_6}}{J_{\max}}}$$

可以求得：

$$t_m = \frac{|6m_4w + 12m_5w^2 + 60m_6w^3|}{A_{\max}} \quad (39)$$

由速度公式可以求得最大速度，此最大速度对应的时间为：

$$t = \frac{t_m}{20f} (\sqrt{120m_4m_6 - 36m_5^2} - 6m_5) \quad (40)$$

将上式代入速度公式可得整段加工过程中达到的最大速度：

$$V_m = V_{\text{始}} + \frac{3m_4}{t_m^2} t^2 + \frac{4m_5}{t_m^3} t^2 + \frac{5m_6}{t_m^4} t^2 \quad (41)$$

通过最大速度可以求得加速段和减速段的加工长度，且可以得出：

$$S_1 = S_{\text{加}} + S_{\text{减}} \quad (42)$$

其中 $S_{\text{加}}$ 和 $S_{\text{减}}$ 分别为加速段和减速段加工长度。

为取得加工轨迹段的进给速度的最大允许值，假设 F 为加工轨迹段指令进给速度，则有：

$$V_{\max} = \min(V_m, F) \quad (43)$$

由式 (36) 可知，五次位移曲线的加减速控制算法的速度、加速度以及加加速度都是连续平滑的，且两段之间转接速度比较高，从而有效地避免了加工进给所产生的柔性冲击，同时也有效地克服了其他控制方法加工过程中产生的精度与质量的不足，加工轨迹产生的表面质量也大大提高，又可以有效提高加工效率，同时也可以延长数控系统的使用寿命。

6 模型评价与优化

在对数控加工刀具运动的优化控制中，本文通过对 S 型曲线加减速控制方法进行的研究和分析（各种加减速控制方法的优缺点分析见表 1）^[9-11]，并在此基础上对其进行

了优化和改进，提出了改进的 S 型曲线加减速控制算法，解决了传统直线加减速、指数加减速等控制算法存在的加速度不连续、速度曲线不平滑等问题，从而有效地避免了加工过程中对机床所产生的柔性冲击，克服了其他控制方法的不足，大大提高了加工质量和加工效率，同时也可以延长数控机床的使用寿命。

在保证加速度连续的条件下，对 S 型加减速控制方法进行了改进和优化，并对 S 型加减速控制方法的优缺点进行了分析，同时提出了一种加减速控制方法：五次位移曲线加减速原理。该方法的加加速度的连续性较好，使得数控系统在工作过程中不易发生冲击，机床的寿命更长。通过以上的分析得出，五次位移曲线的综合性能最佳，是一种非常值得推广的加减速控制方法。

表 1 各种加减速控制方法的优缺点分析

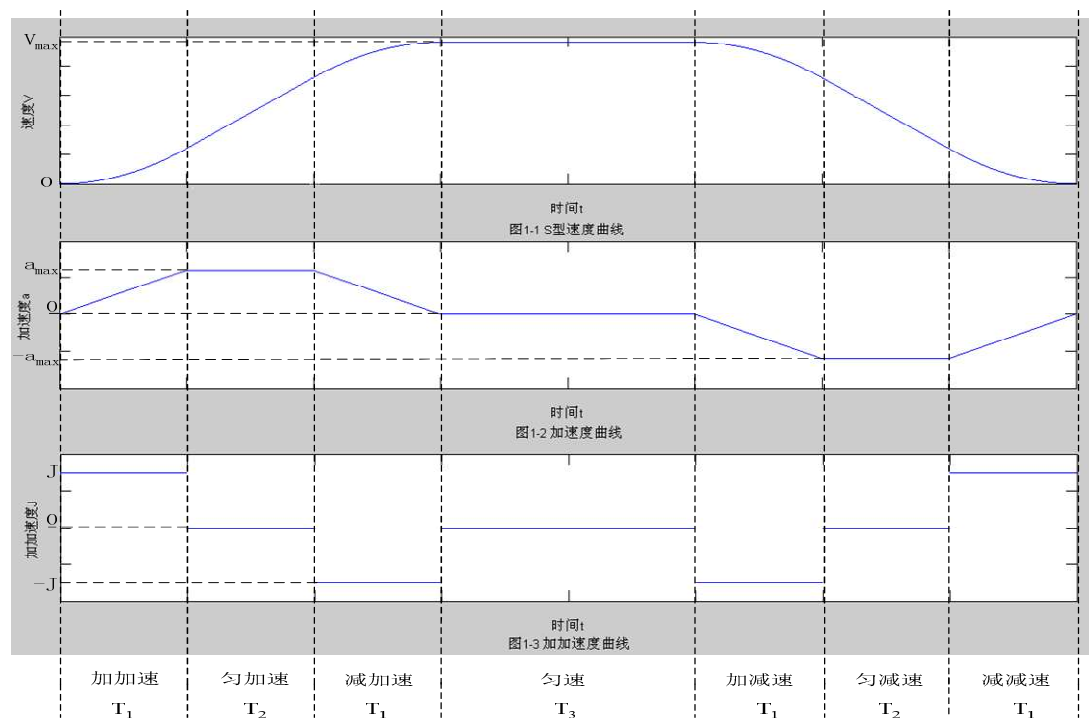
序号	加减速控制方法类型	优点	缺点
1	直线型	直线加减速实现简单	存在柔性冲击
2	三角函数型	算法简单	快速进给速度低，易产生突变
3	指数加减速型	能充分利用步进电机矩频特性	加速度存在突变
4	S 型曲线型	柔性较好	计算量大，实现复杂
5	四次位移曲线型	可得到三阶连续的速度曲线	加减速过程耗费时间较长
6	五次位移曲线型	柔性最好，无冲击	运行时间长

参考文献

- [1] 商允舜. CNC 数控系统加减速控制方法研究与实现[D]. 杭州：浙江大学，2006.
- [2] 于金刚. 高速高精加工中加减速控制方法的研究[D]. 沈阳：中国科学院研究生院(沈阳计算技术研究所)，2009.
- [3] 钟小倩. 开放式数控系统加减速控制方法研究[D]. 赣州：江西理工大学，2012.
- [4] 李晓辉. 数控系统柔性加减速控制方法研究及软件开发[D]. 杭州：浙江大学，2007.
- [5] 赵世田. 自由曲面加工刀具路径轨迹规划算法研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2011.
- [6] 田军锋，林浒，姚壮，等. 数控系统 S 型曲线加减速快速规划研究[J]. 小型微型计算机系统，2013，(1)：168-172.
- [7] 许良元. 数控加工中加减速控制曲线的研究[J]. 机械工程师，2006，(9)：65-67.
- [8] 朱晓春，屈波，孙来业，等. S 曲线加减速控制方法研究[J]. 中国制造业信息化，2006，(23)：38-40.
- [9] 李立斌，赵文龙，高健. 四次位移曲线加减速方法在 CNC 加工中的优势分析[J]. 机械设计与研究，2009，(3)：75-78.
- [10] 白清华，姜培刚，左玉虎. 数字积分法圆弧插补的 VC 实现[J]. 机床与液压，2006，(7)：219-220.
- [11] 赵巍. 数控系统的插补算法及加减速控制方法研究[D]. 天津：天津大学，2004.

附 录

附录一：S型加减速控制曲线如下图所示



附录二：圆角矩形切割路径加工中速度要求如表2所示

表 2 圆角矩形切割路径加工中速度要求

路径节点	节点坐标(X、Y、Z)	用户设定的 最大频率 F	最大频率 F 转换后 对应的速度
1	(-20.500,-20.000,0.000)	2773	0.13
2	(-20.500,-17.708,0.000)	4029	0.19
3	(-20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
4	(-20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
5	(20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
6	(20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
7	(20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26
8	(20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
9	(-20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
10	(-20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26
11	(-20.500,-17.708,0.000)	2773	0.13

表中最大频率指的是控制脉冲的最大频率，本题可以不予考虑，对应的速度指的是刀具的运动速度，单位是 m/min.

附录三：各个阶段速度、加速度、加加速度随时间的变化规律

(1) 加加速段

$$\begin{cases} J = J_{const} \\ a = Jt \\ V = \frac{1}{2}Jt^2 \quad t \in (0, T_1] \end{cases}$$

其中 $T_1 = a_{\max} / J_{const}$ ，这个过程中加速度达到最大 a_{\max} ，加速度和速度都在增加。

(2) 匀加速段

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = a_{\max} \\ V = \frac{1}{2}J_{const}T_1^2 + a_{\max}(t - T_1) \quad t \in (T_1, T_1 + T_2] \end{cases}$$

其中 $T_2 = (V_{\max} - J_{const}T_1^2) / a_{\max}$ ，这个过程中加速度不变，速度在增加。

(3) 减加速段

$$\begin{cases} J = J_{const} \\ a = a_{\max} - J(t - T_1 - T_2) \\ V = \frac{1}{2}J_{const}T_1^2 + a_{\max}T_2 + a_{\max}(t - T_1 - T_2) - \frac{1}{2}J(t - T_1 - T_2)^2 \quad t \in (T_1 + T_2, 2T_1 + T_2] \end{cases}$$

此过程中加速度在减小，速度在增加，一直增加到 V_{\max} ，当 $t = 2T_1 + T_2$ 时， $V = V_{\max}$ 。

(4) 匀速段

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = 0 \\ V = V_{\max} \quad t \in (2T_1 + T_2, 2T_1 + T_2 + T_3] \end{cases}$$

此过程中加速度为 0，速度保持 V_{\max} 不变， T_3 的长短由路径长度决定。

(5) 加减速段

$$\begin{cases} J = J_{const} \\ a = -J(t - 2T_1 - T_2 - T_3) \\ V = V_{\max} - \frac{1}{2}J(t - 2T_1 - T_2 - T_3)^2 \quad t \in (2T_1 + T_2 + T_3, 3T_1 + T_2 + T_3] \end{cases}$$

此过程中加速度在增加，速度在减小，这段其实与减加速段是对称的。

(6) 匀减速段

$$\begin{cases} J = 0 \\ a = -a_{\max} \\ V = V_{\max} - \frac{1}{2}J_{const}T_1^2 - a_{\max}(t - 3T_1 - T_2 - T_3) \\ t \in (3T_1 + T_2 + T_3, 3T_1 + 2T_2 + T_3] \end{cases}$$

此过程中加速度保持 $-a_{\max}$ 不变，速度在减小，这段其实与匀加速段是对称的。

(7) 减减速段

$$\begin{cases} J = J_{\text{const}} \\ a = -a_{\max} + J(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3) \\ V = V_{\max} - \frac{1}{2}JT_1^2 - a_{\max}T_2 - a_{\max}(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3) + \frac{1}{2}J(t - 3T_1 - 2T_2 - T_3)^2 \quad t \in (3T_1 + 2T_2 + T_3, 4T_1 + 2T_2 + T_3] \end{cases}$$

此过程中加速度在减小直到为0，速度也在减小直到为0，当 $t = 4T_1 + 2T_2 + T_3$ 时， $V = 0$ 。

这段其实与加加速段是对称的。