

# 全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目

特殊工件磨削加工的数学建模

摘

要：

本文介绍了一种利用 3 组步进电机协调工作，以较短的时间加工具有复杂母线旋转体的工件的算法与过程。为了描述工件的平动、旋转运动方便和计算工件位置，文中使用了两个坐标系。

问题 1 使用了一种最优化思想，通过控制三组步进电机的脉冲频率使各个瞬时砂轮与加工工件的切点始终通过坐标系中的一个点（实际上为一个点的邻域），该点随砂轮旋转形成一个圆周，而且加工工件使用的时间最短。并对该方案存在的误差进行了分析。

问题 2 研究了使用轮式砂轮对曲线进行磨削加工的过程。本题同样使用点磨法，通过控制三组步进电机的脉冲频率与数目，使曲线的切点始终通过坐标系中的一个点，该点随砂轮旋转形成一个圆周。文中对所使用的砂轮的厚度和宽度进行了分析。并对该方案存在的误差进行了分析。

问题 3 针对问题 1 存在的问题进行了修正。使曲线的切点尽量均匀的经过砂轮各点，保证了砂轮表面的磨损尽量均匀。

问题 4 针对问题 2 存在的问题进行了修正。使曲线的切点尽量均匀的经过砂轮各点，保证了砂轮表面的磨损尽量均匀。

最后对结果进行了分析以及对所建模型与求解策略进行了评价。

**关键词：**砂轮、最优化、点磨法、误差分析、磨损均匀

## 一、问题重述

某科研单位和工厂研制了一种大型精密内外圆曲线磨床，用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件，如导弹天线罩等，这些工件具有硬度高、尺度大、加工精度高和母线为连续光滑曲线等特点。该磨床主要由机床底座、下工作台、中工作台、上工作台（简称下台、中台和上台）、工件工作箱和砂轮机箱等组成（见图 1，其中仅画出砂轮而未显示砂轮机箱）。下台、中台可分别沿着设在底座和下台上的直导轨作直线运动，这两组导轨相互垂直；上台能沿中台上的圆导轨作转动。驱动砂轮高速旋转的砂轮机箱安装在机床底座上，砂轮的旋转轴线与底座导轨方向保持平行，且与工件工作箱的旋转主轴等高（即两旋转轴线位于同一水平面）。各工作台的移动量均可在机床控制面板上自动显示。

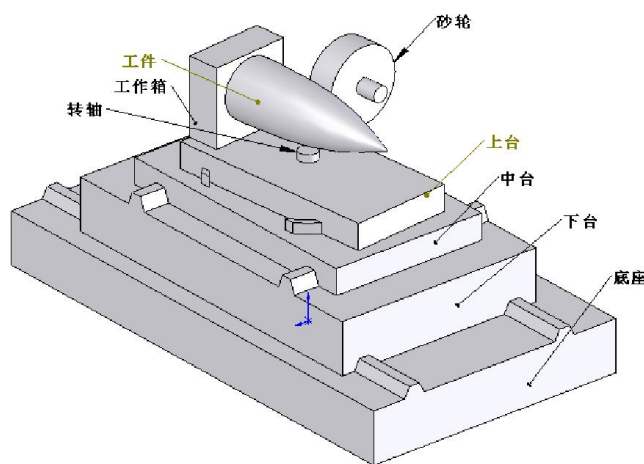


图 1 大型数控精密内外圆磨床的结构示意图

工件工作箱固装在上台上，它通过专用夹具装夹工件，使工件绕工件工作箱主轴以较慢的转速旋转，同时随三个工作台的复合运动改变待加工工件与砂轮的相对位置。三个台的运动必须相互配合，使工件与砂轮相切磨削，加工出满足要求的旋转体。三个工作台的运动分别由三组步进电机控制。通过控制步进电机的脉冲频率实现调速，步进电机的输入脉冲是根据本题所研究的加工方案由机床主计算机控制分配。

控制下台、中台运动的步进电机和相应的传动系统分别安装在机床底座、下台上，控制上台的步进电机和相应的传动系统安装在中台上，因为上台作旋转，其传动链路需增加环节。中台的几何中心有一个垂直转轴，上台能绕以该转轴中心为圆心、固定在中台上的圆导轨转动；螺母通过上台的精密滑槽带动上台转动。

磨床的磨削工具是能磨削高硬度材质的金刚砂轮（指磨削表面含有超高硬度的金刚砂粒），磨外圆时根据工件母线的形状，砂轮可采用圆柱体式或轮式，作内圆磨削的砂轮为轮式。合理的砂轮几何参数是加工能否实现的关键因素之一。在整个加工过程中工件与砂轮不应脱离接触。

请依次研究下列 4 个问题（单位：mm）：

问题 1: 加工外表面母线为  $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$ ,  $x \in [0, 600]$  的某旋转体工件, 采用圆柱型砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析。

问题 2: 加工外表面母线为  $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$ ,  $x \in [0, 600]$  的某旋转体工件, 采用轮式砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析。

问题 3: 在整个加工过程中, 若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点 (实际是点的一个邻域), 随砂轮旋转形成一个圆周, 那么砂轮在该圆周上的磨损会加大, 从而影响加工质量。为此, 希望在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀, 请结合上述第 1 问题, 提出一个修整策略, 给出一个合理的加工方案, 作相应的误差分析。

问题 4: 请结合上述第 2 问题, 提出一个修整策略, 给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案, 作相应的误差分析。

## 二、模型假设

- (1) 不考虑各组步进电机、变速器, 功放伺服机构和精密丝杠—螺母的各种误差;
- (2) 三工作台的可移动范围足够大, 能保证被加工工件的加工;
- (3) 工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形, 砂轮尺寸可任意选择;
- (4) 砂轮与工件开始接触磨削前, 工作台应有一小段预运动, 以便与后续的磨加工运动平稳衔接, 称这一小段运动为预动。题目要求的加工方案从预动后开始;
- (5) 假设在一个非常小且固定的时间间隔  $\Delta t$  内, 工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上以速度  $v$  做匀速运动。

## 三、符号说明

模型中定义的符号如下:

- $a$  砂轮厚度
- $r$  轮式砂轮端面圆弧的半径
- $\theta$  上台相对中台转动的角度
- $R$  中台转轴到上工作台的控制丝杠—螺母中心线的距离
- $b$  工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离
- $m$  工件工具箱的转速
- $d$  丝杆的螺距
- $\phi$  砂轮直径

- $v$  工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动速度
- $v_x$  下台的移动速度
- $v_y$  中台的移动速度
- $v_c$  上台螺母的移动速度

## 四、问题分析

通过题目分析可以得知本题的研究内容，即运用最优化的方法，根据旋转体工件的光滑母线方程  $y = f(x)$ ，给出一个合理的加工方案，机床在  $X$ 、 $Y$ 、 $C$  三轴方向上运动，切点的轨迹要形成母线方程的形状（即与母线方程  $y = f(x)$  保持一致），并要求在尽可能短的时间内完成工件的磨削，并作加工误差分析。因此本题属于最优化问题——在满足磨削出符合题目要求的光滑旋转体的前提下，使所用的时间最短，误差最小。本题的关键在于建立合理的坐标系，进而求出三组步进电机在各自时间段中各自应发的脉冲数以及这些脉冲在该时间段的分布。

### 4.1 问题一分析

问题一所要研究的内容是采用圆柱体式砂轮加工给定母线方程的旋转体，可以采用点磨法，所谓点磨，即是在磨削工件外圆时，砂轮与工件是以点接触方式进行磨削，砂轮对工件的磨削加工类似于一个微小的刀尖对工件的车削加工，磨削力和磨削热都非常小，并且砂轮总是保持同一吃进状态。点磨法可以实现任意复杂曲线或曲面轮廓的精密磨削加工。

在操作中，可以通过控制三组步进电机的脉冲，从而控制工件在  $X$ 、 $Y$ 、 $C$  三轴方向上运动，使得工件被打磨的轨迹与外轮廓母线的轨迹始终一致。工件外轮廓曲线与圆柱体砂轮端面的切点始终位于机床坐标系中的一个点（实际上为一个点的邻域），该点随砂轮旋转形成一个圆周。问题一的关键是如何建立坐标系，从而清晰表示工件在给定轨迹上平动与转动的关系。

### 4.2 问题二分析

问题二所要研究的内容是采用轮式砂轮加工给定母线方程的旋转体，本问题与问题一的区别是，砂轮改为轮式砂轮，圆柱体砂轮的端面轮廓为一段直线，而轮式砂轮的端面轮廓为一段圆弧。

分析本问题时，同样可以采用点磨法，通过控制三组步进电机的脉冲使曲线的切点始终通过坐标系中的一个点（实际上为一个点的邻域），该点随砂轮旋转形成一个圆周（垂直于砂轮转轴半径最大的圆周）。在问题一中，母线是一个上凸函数，但是在本问题中，母线函数既有上凸部分也有下凸部分，所以，若是轮式砂轮的规格设计不当，就有可能有部分位置无法磨到，如图 2 所示，所以必须保证轮式砂轮外轮廓圆弧的曲率不小于给定曲线的曲率。

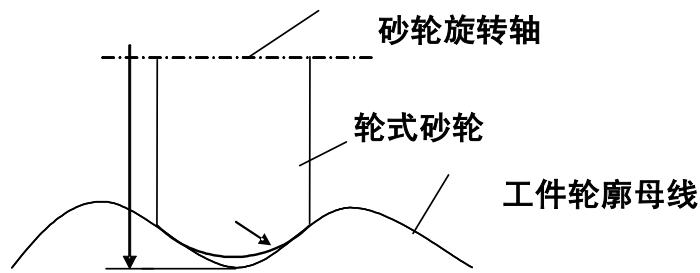


图 2 轮式砂轮无法磨到工件大曲率凹面示意图

### 4.3 问题三分析

问题三指出，由于在问题一中是采用点磨法，会使得砂轮在外圈各点磨损不均匀，容易造成工件磨削质量的下降，要求给出修正策略，这个问题实质上是要对问题一磨削方法与建立的模型进行修正与补充。

为了修正问题一所采用方法的缺陷，在加工过程中，应该保证圆柱体式砂轮端面轮廓上的每一个点都参与磨削，即在点磨时，砂轮磨点不应该仅仅是轮廓上的某一点，而各点都以等概率参与工件的加工磨削；此外，还要保证较短的加工时间与较高的加工精度。

### 4.4 问题四分析

问题四同样是因为问题二模型中的点磨位置保持在端面轮廓线上的同一点（或者说是砂轮外端面上的一个圈），容易造成工件质量的下降，为此也要求给出修正策略。

问题四的基本思路和问题三相同，是为了修正问题二方法中的缺陷，在加工过程中，应该保证轮式砂轮端面轮廓上的每一个点都参与磨削，而且各点参与工件加工的机会应该尽量保证相同。但是，由于轮式砂轮的端面轮廓不是一条直线而是一个圆弧，且还要考虑曲率对磨削的影响，所以比问题三要复杂。

## 五、模型建立与求解

### 5.1 坐标系建立

本文中建立两个坐标系，如图 3 和图 4 所示分别为机床坐标系和工件坐标系。其中，机床坐标系是以砂轮转轴中心为坐标原点，X 轴与设在底座的导轨平行，Y 轴与设在下台的导轨平行。工件坐标系是以上台旋转轴中心与工件工作箱转轴中心的交点为坐标原点，X 轴沿工件工作箱旋转轴，Y 轴与上台面平行且与 X 轴垂直。在工件加工过程中，机床坐标系在磨削过程中是静止的，砂轮与工件的切点在机床坐标系中的位置始终不变，工件的位置在机床坐标系中是在不断变化的。而相对于工件坐标系，在磨削过程中，工件的位置和母线方程等都是不变的。工件坐标系相对于机床坐标系进行平移旋转。

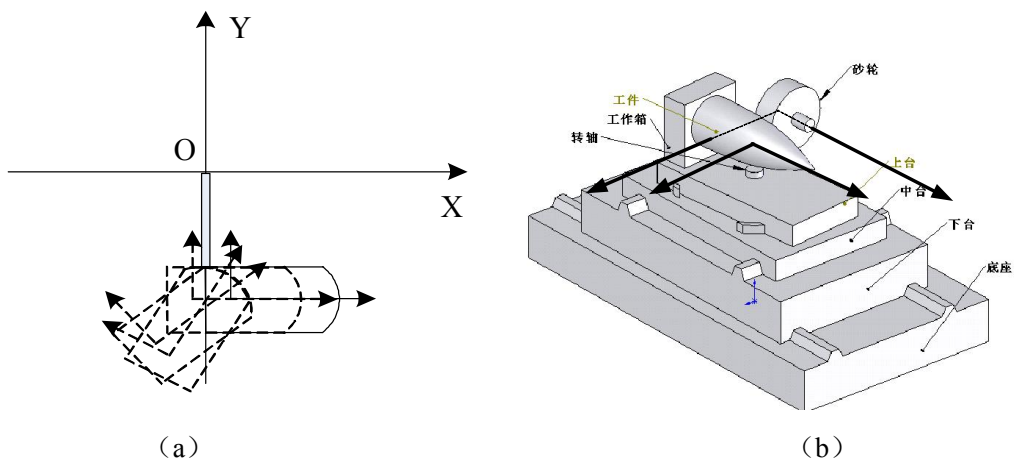


图 3 机床坐标系

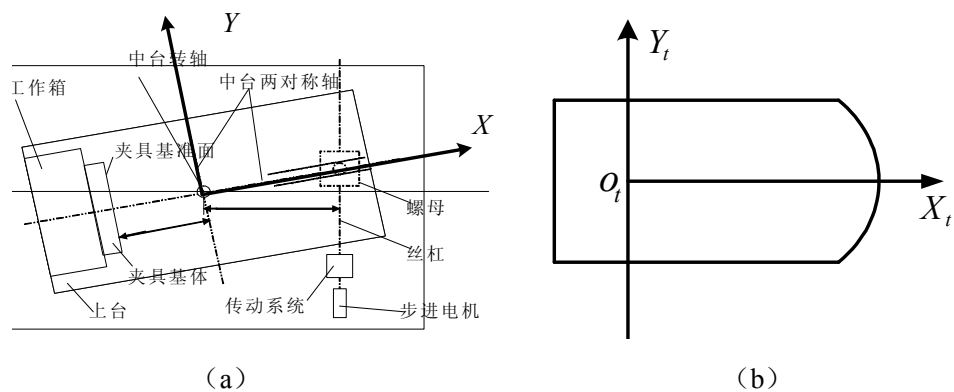


图 4 工件坐标系

## 5.2 问题一建模

问题 1 的母线函数表达式为  $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$ ,  $x \in [0, 600]$  (后面称为 S 曲线), 该工件的仿真图和轮廓母线如图 5 所示:

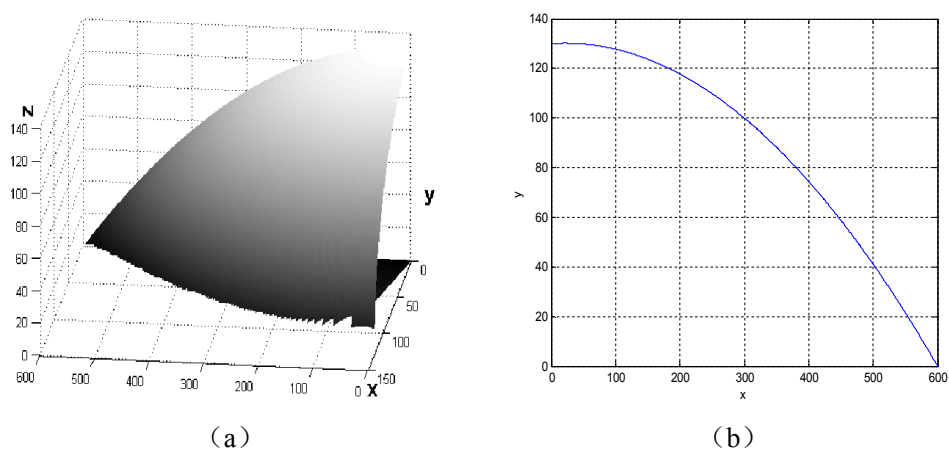


图 5 加工工件及轮廓母线示意图 (仅在第一象限)

重画机床坐标系和工件坐标系, 如图 6 所示。通过三组步进电机的组合, 使

工件母线所在的曲线始终在机床坐标系  $(0, -\phi/2)$  点与圆柱体式砂轮相切。为保证表面的加工质量，要求工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4mm。工件沿  $x_t$  方向的速度为  $v$ ，工件工具箱的转速为  $m$ ，工件每转 100 转所需的时间为  $t$ ，则可以得到  $v$  的取值范围： $vt \leq 4\text{mm}$ ， $m = 300\text{r/min}$ ， $t = 100/m = 20\text{s}$ ，则可以得到：

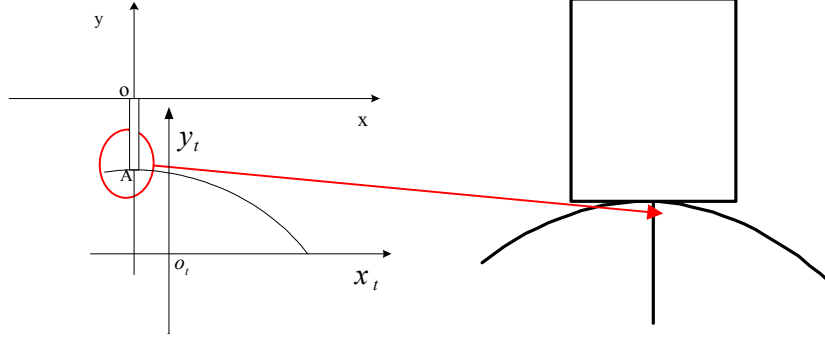


图 6 机床坐标系和工件坐标系的关系图

$$v \leq 0.2\text{mm/s} \quad (1)$$

初始状态下，加工工件的母线在机床坐标系下的关系为  $y = f(x)$ ，其上任意一点  $P$  坐标可用  $(x_t, y_t)$  表示。工件坐标系经平移  $(x, y)$ 、旋转  $\theta$  角后，点  $P$  在机床坐标系下的坐标为  $(x_0, y_0)$ 。坐标转化矩阵为：

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

曲线  $S$  在机床坐标系下的方程为：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

展开得：

$$\begin{cases} x_0 = x_t \cos \theta - y_t \sin \theta + x \\ y_0 = x_t \sin \theta + y_t \cos \theta + y \end{cases} \quad (4)$$

前面已经做出过说明，曲线  $S$  在机床坐标系下的  $(0, -\phi/2)$  点始终是与圆柱式

砂轮相切，即斜率  $k = \frac{dy_0}{dx_0} = 0$ ，得

$$\tan \theta = -\frac{dy_t}{dx_t} \quad (5)$$

令  $(x_0, y_0) = (0, -\phi/2)$ ，对固定的  $(x_t, y_t)$  经平移  $(x, y)$ ，旋转  $\theta$  到  $(x_0, y_0)$ 。由

第二节的模型假设得知在较小的固定  $\Delta t$  内，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上以速度  $v$  做匀速运动。则切点沿工件坐标系方向上的移动距离：

$$x_1 = L_{n-1} + (t - (n-1)\Delta t)v \quad (6)$$

其中  $L_{n-1}$  为  $(n-1)\Delta t$  内切点沿工件坐标系方向上的移动距离，初始值  $L_0 = 0$ 。

上述关系转化如图 7 所示：

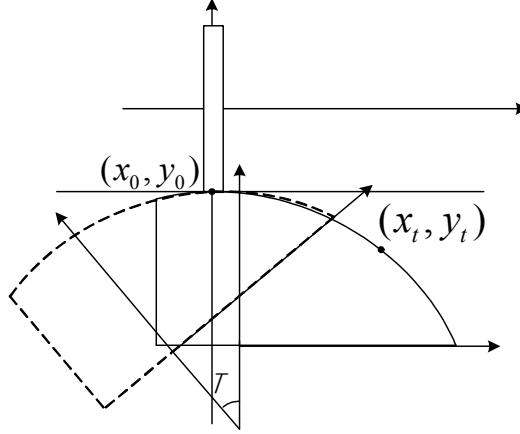


图 7 坐标关系转化图

如果我们建立起  $P$  点在工件坐标系中的坐标  $(x_1, y_1)$  和  $P$  点在机床坐标系中的坐标  $(x_t, y_t)$  之间的关系。联立方程 (4)、(5)、(6) 可得到平移量  $x$ 、 $y$ 、 $\theta$  分别与  $t$  的关系即：

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(y_t \sin \theta - x_t \cos \theta)}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-x_t \sin \theta - y_t \cos \theta - \varphi/2)}{dt} \\ v_c = \frac{dL}{dt} \\ L = -R \frac{dy_t}{dx_t} \end{cases} \quad (7)$$

其中  $L$  为控制上台的步进电机螺母前进的距离。

问题一最后可以转化为有约束最优化问题，因为由式 (7) 可得  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_c$  与时间  $t$  的关系， $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_c$  决定了步进电机的控制频率  $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_c$ 。题目中的一系列约束条件给出了步进电机的控制频率的取值范围，继而给出了  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_c$  的取值范围，从而问题转化为在有约束条件下的时间  $t$  的最优化问题（最短）。

(1) 对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲：

$$\begin{cases} f_x \leq 100 \text{ Hz} \\ f_y \leq 100 \text{ Hz} \\ f_c \leq 100 \text{ Hz} \end{cases} \quad (8)$$



(2) 各组步进电机的步进角度为  $1^\circ$ ，对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲；各组变速器的传动比为 10:1，丝杆的螺距为 12mm；工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4mm；工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250—300 转，因此转轴方向速度满足：

$$v \leq 0.2 \text{ mm/s} \quad (9)$$

(3) 相邻两时间段的脉冲频率  $f_q$  和  $f_h$  ( $f_q$ ,  $f_h$  分别指前后时段中的脉冲频率)相差大，是造成工作台运动的不平稳、加工表面的质量下降的重要原因。可以采取的措施，要求  $|f_q - f_h|/f_q \leq \delta$  (一般取  $\delta \leq 0.10$ )。

综上所述约束条件为：

$$\begin{cases} f_x \leq 100 \text{ Hz} \\ f_y \leq 100 \text{ Hz} \\ f_c \leq 100 \text{ Hz}_c \\ |f_q - f_h|/f_q \leq \delta \\ v \leq 0.2 \text{ mm/s} \end{cases} \quad (10)$$

由题意可知步进电机螺杆的螺距为  $d = 12 \text{ mm}$ ，步进电机变速器的变速比为 10:1。由这些条件可以得知  $vT = v/f = 12/3600$ ，可以得到速度与脉冲频率之间的关系为： $f = 300v$ 。则各组步进电机具体的控制方案，即问题一解决方案的具体流程如图 8 所示。

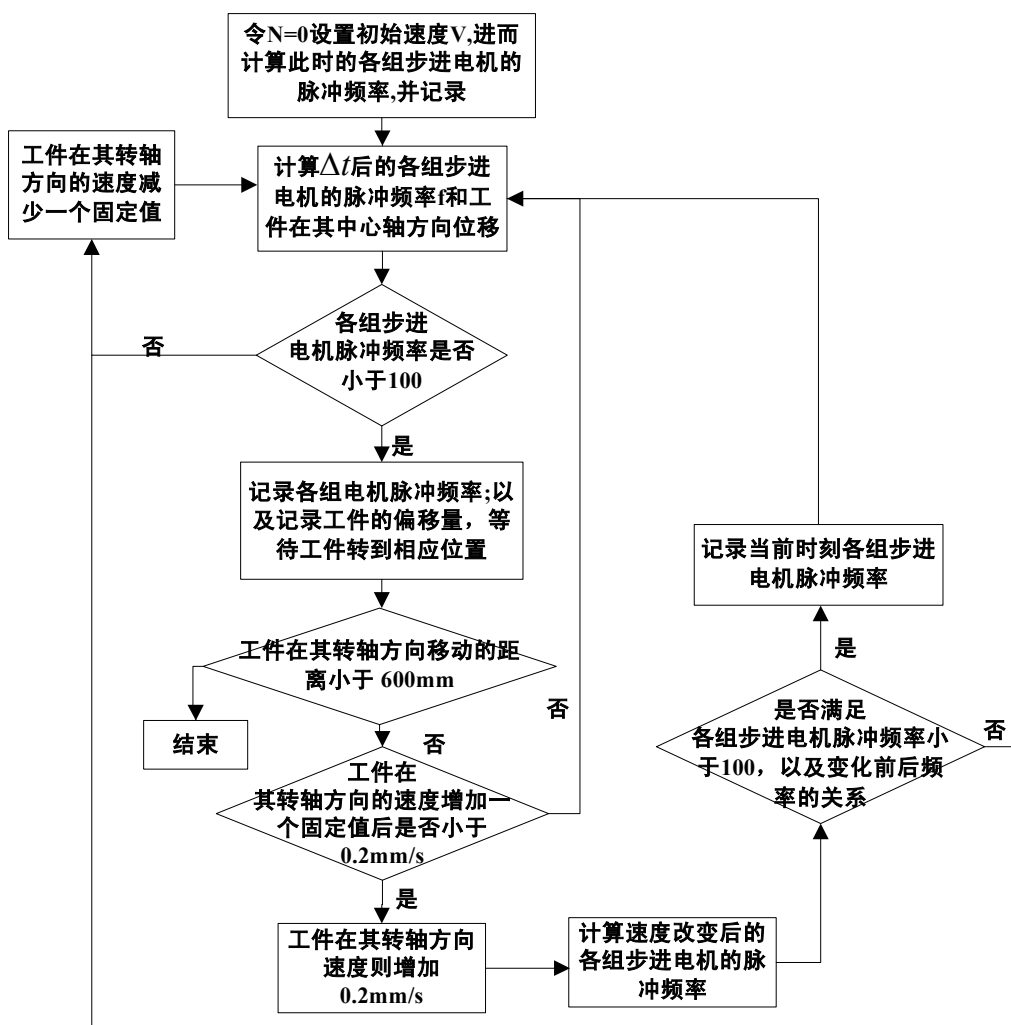


图 8 各组步进电机的控制方案

### 5.3 问题二建模

问题 2 是要解决加工外表面母线为  $y = 30e^{\frac{x}{400}} \sin(0.01 \times (x + 25\pi)) + 130$ ,  $x \in [0, 600]$  的加工方案, 仿真出的加工工件 (仅绘制出第一象限坐标系的示意图) 如图 9 所示:

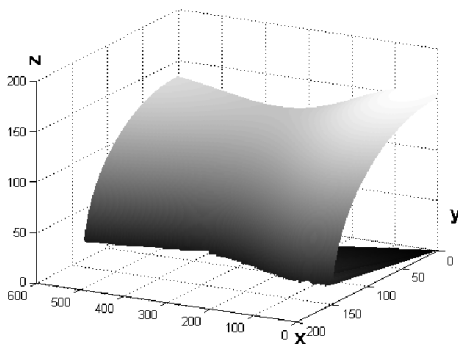


图 9 加工工件示意图

加工工件的母线为  $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$ ,  $x \in [0, 600]$ , 此函数曲线及其一阶导函数曲线分别如图 10 (a) 和 (b) 所示:

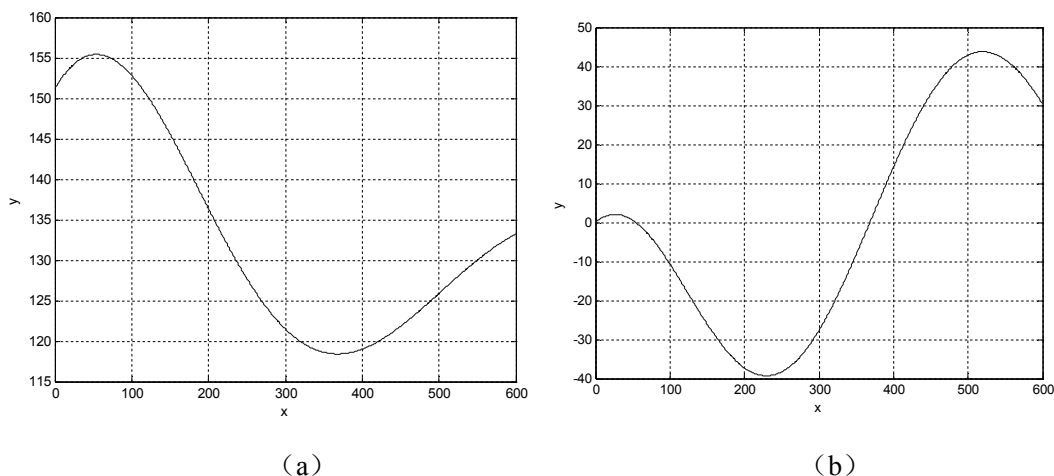


图 10 母线函数及一阶导函数曲线

模型坐标建立及分析过程类似于问题一的分析,但是额外需要考虑的一个问题是砂轮头尺寸的选择。为了磨削的加工精度和任意复杂曲线轮廓的磨削加工,在加工过程中,砂轮的回转平面始终和曲线轮廓磨削点处的法线方向一致,保证砂轮与工件始终处于恒定点接触的状态,从而提高加工精度和实现任意复杂曲线轮廓的磨削加工,但是当加工工件上某点的曲率比砂轮与工件接触的曲面的曲率要大时,则工件表面会有砂轮无法磨削到的部分,所以,在加工方案中额外要确定砂轮外端轮廓曲线的半径。

母线函数的曲率表示为式 (11):

$$\rho = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{3}{2000} e^{-\frac{x}{400}} \cos\left(\frac{x}{100} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{3200} e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{x}{100} + \frac{\pi}{4}\right) \right|}{\left( 1 + \left( \frac{3}{10} e^{-\frac{x}{400}} \cos\left(\frac{x}{100} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{40} e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{x}{100} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (11)$$

若砂轮的外端与母线的每一点都能接触到,则砂轮外端的曲率要大于母线函数上任意一点的曲率。易证在母线函数的极值点处曲线的曲率最大,母线函数的极值点为 (54.0420, 155.4262)、(368.2012, 119.6190)。则由公式(11)得 (54.0420, 155.4262) 处的曲率为 0.0027, (368.2012, 119.6190) 的曲率为 0.0012, 则由  $\rho \leq 1/r$  得  $r \leq 370.3704$  mm。则砂轮的外端轮廓线半径要不大于 370.3704mm。

## 5.4 问题三建模

在问题 1 和问题 2 中,由于对砂轮面与磨削面都是在中心切点处接触并磨削,所以各个瞬时砂轮与加工工件的相切点始终是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点,随砂轮旋转形成一个圆周,那么砂轮在该圆周上的磨损会加大,

从而影响加工质量，如图 11 (a)。解决这一问题的思路是各个瞬时砂轮与加工工件的相切点不再固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点，而是平均分布在砂轮的端面各个位置，从而保证砂轮的磨损均匀。

在问题 3 中，由于选用的是圆柱体式砂轮，那么砂轮的与工件的相切点的分布位置应该如图 11 (b) 所示，在线段  $l$  上各点的机会相等。其中线段  $l$  的表达式为：

$$y = -\varphi/2, \quad x \in [-a/2, a/2] \quad (12)$$

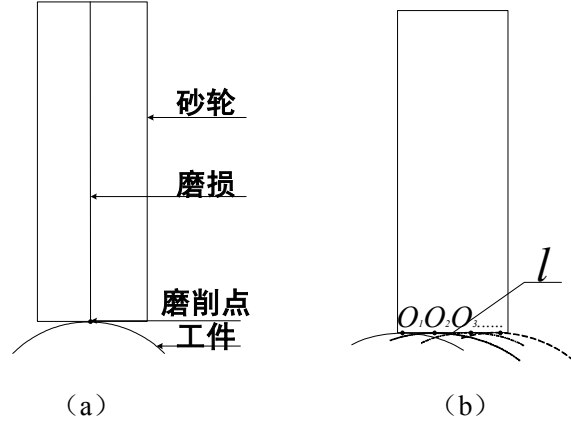


图 11 圆柱形砂轮磨削面磨点示意图

在磨削过程中，如图 12 所示，磨削点在线段  $l$  上作匀速往复移动，速度为  $v_0$ 。则磨削点早砂轮端面上一个来回的时间为：

$$T = 2a/v_0 \quad (13)$$

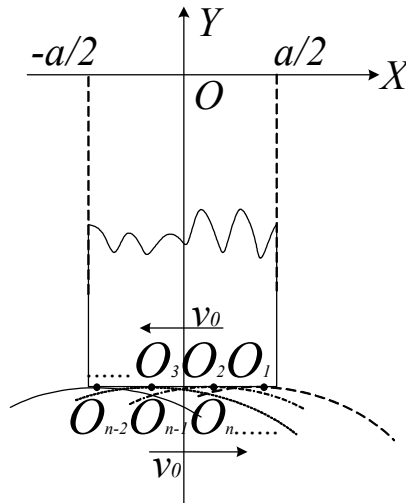


图 12 圆柱形砂轮磨削面坐标图

则对  $t$  时刻，磨削面磨点的坐标为  $(x_0, -\varphi/2)$ ， $x_0$  表达式如公式 (14) 所示：

$$x_0 = ka/2 - kv_0(t \bmod T/2) \quad (14)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} k=1 & (t \bmod T) \leq T/2 \\ k=-1 & (t \bmod T) > T/2 \end{cases}$$

因此, 对问题 1 中建立的模型进行修正, 如图 13 所示,  $(x_0, y_0)$  的坐标由  $(0, -\varphi/2)$  变为  $(x_0, -\varphi/2)$ , 其中  $x \in [-a/2, a/2]$ , 问题 1 中的公式 (2) 的矩阵为改公式 (15) 所示。

$$\begin{bmatrix} ka/2 - kv_0(t \bmod T/2) \\ -\varphi/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

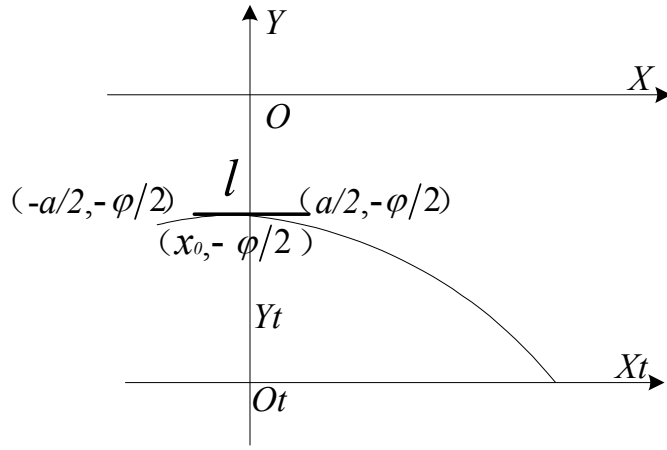


图 13 磨削点坐标图

代入式 (16):

$$\begin{cases} ka/2 - kv_0(t \bmod T/2) = x_t \cos \theta - y_t \sin \theta + x \\ -\varphi/2 = x_t \sin \theta + y_t \cos \theta + y \end{cases} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y_t \sin \theta - x_t \cos \theta + ka/2 - kv_0(t \bmod T/2) \\ y = -x_t \sin \theta - y_t \cos \theta - \varphi/2 \end{cases}$$

由  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $\tan \theta = \frac{L}{R}$ ,  $v_c = \frac{d_L}{d_t}$  得可将  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_c$ 、 $\theta$  用  $t$  的函数

表示出来, 记作:

$$\begin{cases} v_x = V_x(t) \\ v_y = V_y(t) \\ v_c = V_c(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (17)$$

通过式 (18) 可以得到

$$f_x = 300v_x, \quad f_y = 300v_y, \quad f_c = 300v_c \quad (18)$$

又由题意，为保证工件表面的加工质量，要求工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4mm；在 5.2 节中已经推导出工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动速度为：

$$v \leq 0.2 \text{ mm/s} \quad (19)$$

经上面的分析，可以得到使磨削工件所需的时间  $t$  最短的约束条件为

$$\begin{cases} f_x \leq 100 \text{ Hz} \\ f_y \leq 100 \text{ Hz} \\ f_c \leq 100 \text{ Hz}_c \\ |f_q - f_h|/f_q \leq \delta \\ v \leq 0.2 \text{ mm/s} \end{cases} \quad (20)$$

### 5.5 问题四建模

在问题 4 中，由于选用的是轮式砂轮，那么砂轮与工件的相切点的分布位置应该如图 14 所示，使其都是沿弧线  $\hat{l}$  分布的。

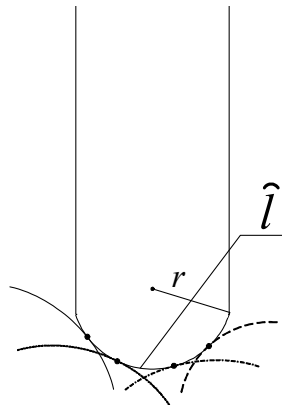
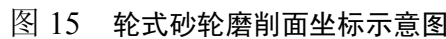


图 14 轮式砂轮磨削面示意图

在磨削过程中，如图 14 所示，磨削点在弧线  $\hat{l}$  上作匀速往复移动，弧线  $\hat{l}$  的

$$\hat{l} = 2\pi r \frac{\alpha}{2\pi} = 2\pi r \frac{2\arcsin(a/2r)}{2\pi} = 2r \arcsin(a/2r) \quad (21)$$
$$T = 4r \arcsin(a/2r)/v_0 \quad (22)$$
$$\begin{cases} x_0 = kr \sin(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \\ y_0 = -\varphi/2 + r - r \cos(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \end{cases} \quad (23)$$


因此,对问题 2 中建立的模型进行修正,如图 16 所示,磨点的坐标由  $(0,-r)$  变为  $(x_0,y_0)$ ,其中  $x \in [-a/2,a/2]$ ,问题 2 中公式 (2) 所示转化矩阵为公式 (24)。

$$\begin{bmatrix} kr \sin(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \\ -\varphi/2 + r - r \cos(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

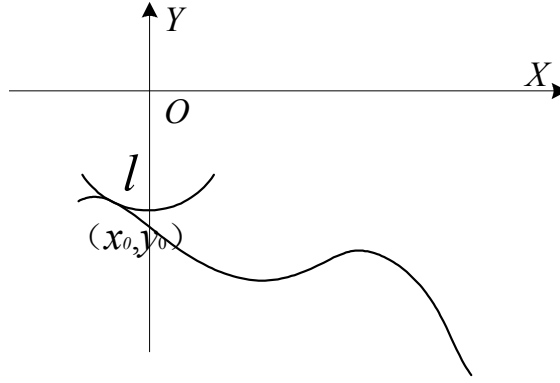


图 16 磨点的坐标图

代入得：

$$\begin{cases} kr \sin(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) = x_t \cos \theta - y_t \sin \theta + x \\ -\varphi/2 + r - r \cos(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) = x_t \sin \theta + y_t \cos \theta + y \end{cases} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y_t \sin \theta - x_t \cos \theta + kr \sin(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \\ y = -x_t \sin \theta - y_t \cos \theta - \varphi/2 + r - r \cos(\alpha/2 - v_0(t \bmod T/2)/r) \end{cases}$$

由  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_c = \frac{d_L}{d_t}$ , 但是此时需要注意的是, 此时曲线 S 在机床

坐标系下的  $(x_0, y_0)$  点并非始终与轮式砂轮相切, 切点切线斜率也就不会恒为 0,

斜率与  $(x_0, y_0)$  点的位置有关而且是可以根据  $(x_0, y_0)$  点的位置求出来

由  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $\tan \theta = \frac{L}{R}$ ,  $v_c = \frac{d_L}{d_t}$  得可将  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_c$ 、 $\theta$  用  $t$  的函数

表示出来, 记作:

$$\begin{cases} v_x = V_x(t) \\ v_y = V_y(t) \\ v_c = V_c(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \quad (26)$$

且  $f_x = 300v_x$ ,  $f_y = 300v_y$ ,  $f_c = 300v_c$ , 经上面的分析, 可以得到使磨削工件所需的时间  $t$  最短的约束条件如式 (27) 所示:



$$\left\{ \begin{array}{l} f_x \leq 100Hz \\ f_y \leq 100Hz \\ f_c \leq 100Hz_c \\ |f_q - f_h|/f_q \leq \delta \\ v \leq 0.2mm/s \end{array} \right. \quad (27)$$

## 六、计算结果与误差分析

在本文所述模型中，理论模型上X轴、Y轴、C轴的运动是连续的，因此可以实现轨迹的一致，但是实际上，工件的加工过程是在步进电机的控制下实现的，由于步进电机是将电脉冲信号转换为相应的角位移或直线位移的一种特殊电机，当步进驱动器接收到一个脉冲信号，它就驱动步进电机按设定的方向转动一个固定的角度，这个角度称为步进电机的“步距角”，它的旋转是以固定的角度一步一步运行的。所以在步进电机的控制下，三轴的运动不一定能同时达到预定的方位点，如理论上达到的坐标应为(x, y)，但实际上由于是步进电机的控制运动，很可能达到的坐标位置为(x, y+△y)、(x+△x, y)、(x+△x, y+△y)，这样通过步进电机控制所得的母线轮廓与理论上应得的曲线轮廓就不可避免的有了误差，通过合理的分段以及调整三轴的速度，即步进电机的脉冲频率，可以尽可能的降低误差，提高磨削的精度。

因此点磨法只有在理想情况下才是成立的，即只有当工件坐标系在X, Y, C轴上的移动量都是连续时才是完全没有误差的。曲线上的每一个点才能以相切的形式经过圆柱体式砂轮的中心点，在机床坐标系上表示为 $(-\phi/2, 0)$ 。但是步进电机的特性决定了工件坐标系在各轴的转动量并非是连续的，而是间断的。当转动的夹角 $\theta$ 恰为C轴步进电机可以转动的离散值时，而在X轴上却还达到其可以达到的离散值，则可能会造成砂轮不能对该点进行磨削。为了避免这一点，必须要满足砂轮厚度 $a$ 必须大于X轴上的最小移动量，即 $a \geq 1/300mm$

综上所述，通过编程仿真得到各问题的加工方案、计算结果以及误差：

表1 各个问题的加工方案、计算结果以及误差表

加工方案	砂轮尺寸	所需时间	平均误差
问题1	$a \geq 1/300mm$	56 分钟	0.002mm
问题2	$a \geq 1/300mm$ , $r < 370.3704 mm$	59 分钟	0.003mm

图17 (a) 和 (b) 为问题1最终的仿真结果与误差曲线。

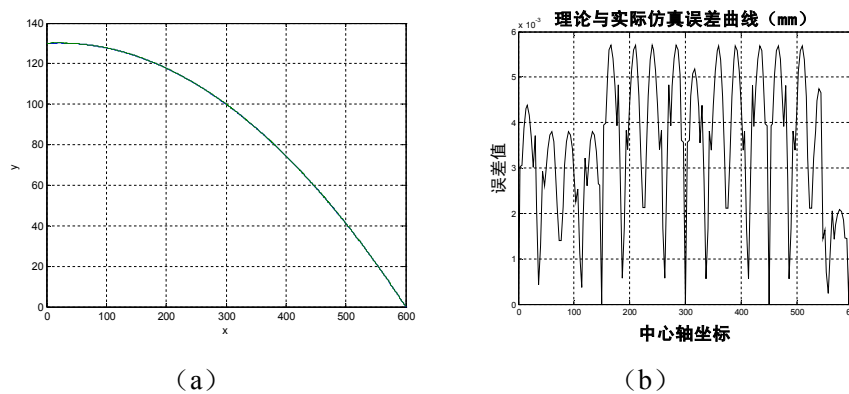


图17 问题2最终的仿真结果与误差曲线

图18 (a) 和 (b) 为问题2最终的仿真结果与误差曲线。

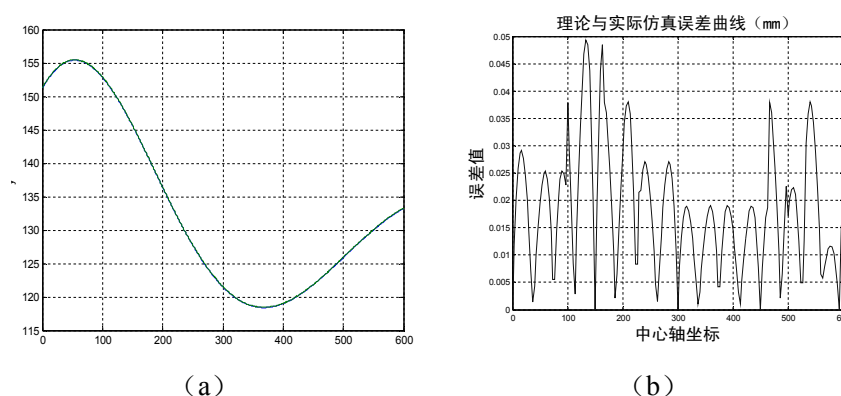


图18 问题2最终的仿真结果与误差曲线

## 七、模型评价

在本文的问题中，关键在于建立合理的坐标系，在坐标系下将母线轮廓线上点的位置变化与三个平台的运动变化联系起来。可以建立的坐标系有很多，计算复杂度与用于描述其的坐标系有莫大关系。在所有的位置关系中，我们注意到当仅仅是单点磨削时（如问题 1），磨削点在机床坐标系中的位置是始终不变的，这样就给运动和位置关系的计算带来一个很好的参考；但是由于磨削时工件相对于机床的位置是实时在变化的，而且由于  $X$ 、 $Y$ 、 $C$  轴方向的合成运动，母线函数在机床坐标系里解析式的变化也是实时的，因此如果仅仅在机床坐标系里描述磨削加工时工件上所有点及位置的变化和相互关系就是非常复杂的，因此，又对工件自身建立了一个工件坐标系，工件相对于工件坐标系而言是永远静止的，母线函数在这个坐标系里也是不会变化的，而且由于坐标原点是在转轴中心点的位置，因此可以将转台旋转的角度与工件坐标系旋转的角度联系起来。

本文在实际计算的过程中，通过运用坐标转换，找到通过三个平台在  $X$ 、 $Y$ 、 $C$  轴方向的运动来合成母线轮廓，并且在计算过程中通过最优化方法来实现的所需时间的最小化的方法确实很好，在问题 2 和问题 3 中，我们利用上台的转动，

实现定点磨，但是又造成问题 4 和问题 5 的产生，对问题 4 和问题 5 模型的改进是对磨削点由静止到动态的改变，但是这样以来，提高了运算复杂度，且磨削点的来回移动也造成了磨削时间的增加。

但是就误差来说这种方法要比工业磨削加工常用的插补法有所降低，但是不足的是，通过坐标变换，计算坐标变换关系并实施优化的过程在计算和仿真中还是较为复杂，不如插补法简单明了。此外，由于许多磨削加工的工件都具有凹凸不平的表面，在一些文献中提出了在插补法的基础上对砂轮法向跟踪方法的运用，从而可以大大提高磨削的精度。

## 参考文献

- [1] ZHAO Chang- ming, LIU Wan-ju. CNC quick point grinding process and its application [J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2004, 54(7): 67- 68.
- [2] Chris K. What is single point OD grinding [J]. Modern Machine Shop, 1997, 70 (7): 62-69.
- [3] 贾振元, 郭东明, 傅南红. 摇摆式凸轮轴数控磨削插补算法及控制策略研究 [J]. 机械工程学报, 2001, 37 (2): 70- 73. JIA Zhen- yuan, GUO Dong- ming, FU Nan- hong. Study on interpolation algorithm and controlling strate- gy of the swinging type camshaft CNC grinding [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37 (2): 70-73.
- [4] 吴琦, 胡德金, 张永宏. 精密数控曲线磨削中的砂轮法向跟踪建模及实验[J]. 上海交通大学学报, 2006(10): 1708-1709.
- [5] 王宇晗, 肖凌剑, 曾水生, 吴祖育, 钟胜波. 小线段高速加工速度衔接数学模型 [J]. 上海交通大学学报. 2004. 6(38)
- [6] 杨科人. 凸轮数控磨床的磨削点位置的计算[J]. 机械, 1997 (4)
- [7] 何旭初, 孙麟平. 约束最优化方法 [M] . 南京: 南京大学出版社.
- [8] 吴长富, 刘志方, 杨科人. 凸轮数控磨床速度计算与分析[j]. 机械设计与制造工程. 1999. 11(28): 57-58.
- [9] 苏步青. 微分几何学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [10]Schuler. Metal forming handbook [M]. New York: Springer Verlag, 1998.
- [11]Yoshihara S, Manabe K, Nishimura H. Effect of blank holder force control in deep-drawing process of magnesium alloy sheet [J].Journal of Materials Processing Technology, 2005, 170:579-585

## 附录 (matlab): 部分源程序

```
clear;
c=1;
v_delta=0.2/100;
R=300;
t=5;
L=0;
v=0.2;
i=1;
for n=0:1:10;
    if(n==0)
        fx_old=1;
        fy_old=1;
        fz_old=1;
        fx=0;
        fy=0;
        fz=0;
    else
        end
    tt=n*t;
    L=(L+(tt-(n-1)*t)*v);
    while(c==1||abs(fx)>100||abs(fy)>100||abs(fz)>100||(abs(fx-fx_old))/fx_old>=0.01||(abs(fy-fy_old))/fy_old>=0.01||(abs(fz-fz_old))/fz_old>=0.01)
        v=v-v_delta;
        syms T;

        vxx=diff((30*exp(-(L+(T-(n-1)*t)*v)/400)*sin(0.01*((L+(T-(n-1)*t)*v)+25*pi))+130
        )*sin(atan(-(-3/40*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v)))*sin(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*
        pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi))))-(L
```

```

+(T-(n-1)*t)*v))*cos(atan(-(3/40*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)))));

```

```

vyy=diff(-(L+(T-(n-1)*t)*v)*sin(atan(-(3/40*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi))))-(30*exp(-(L+(T-(n-1)*t)*v)/400)*sin(0.01*((L+(T-(n-1)*t)*v)+25*pi))+130)*cos(atan(-(3/40*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)))));

```

```

vzz=diff(-R*(-3/40*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(T-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(T-(n-1)*t)*v)+1/4*pi));

```

```

vx=subs(vxx, T, tt);

```

```

vy=subs(vyy, T, tt);

```

```

vz=subs(vzz, T, tt);

```

```

fx=300*vz;

```

```

fy=300*vy;

```

```

fz=300*vz;

```

```

fx_old=fx;

```

```

fy_old=fy;

```

```

fz_old=fz;

```

```

c=0;

```

```

end

```

```

v=v+v_delta;

```

```

c=1;

```

```

X(i)=(30*exp(-(L+(tt-(n-1)*t)*v)/400)*sin(0.01*((L+(tt-(n-1)*t)*v)+25*pi))+130)*sin(atan(-(3/40*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(tt-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+

```

```

3/10*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(tt-(n-1)*t)*v)+1/4*pi))))-(L+(tt-
(n-1)*t)*v)*cos(atan((-3/40*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(tt-(n-1)*t
)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(tt-(n-1)*t)*v)+1/4
*pi)))));
Y(i)=-(L+(tt-(n-1)*t)*v)*sin(atan((-3/40*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(
L+(tt-(n-1)*t)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(tt-(n-
1)*t)*v)+1/4*pi))))-(30*exp(-(L+(tt-(n-1)*t)*v)/400)*sin(0.01*((L+(tt-(n-1)*t)*v)+25
*pi))+130)*cos(atan((-3/40*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*sin(1/100*(L+(tt-(n-1)*t
)*v)+1/4*pi)+3/10*exp(-1/400*(L+(tt-(n-1)*t)*v))*cos(1/100*(L+(tt-(n-1)*t)*v)+1/4
*pi)))));
i=i+1;
end

```