



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 面向节能的单/多列车优化决策问题

摘 要：

本文针对面向节能列车的优化决策问题，首先分析列车动力学原理，然后分别对单列车节能优化问题、多列车节能优化问题、多列车延误运行优化问题建立模型，依次采用迭代搜索算法、遗传算法和蒙特卡洛模拟仿真对模型求解，最终利用 MATLAB 编程实现算法，得到了列车固定运行时间的最优速度距离关系、最优发车时间间隔并分析了列车高峰与非高峰时间段，延误运行等情况下的节能列车的优化问题。

针对问题 1：对于单列车节能优化，仅考虑列车运行耗能情况，属于单目标优化问题。分别建立模型一：双站间节能优化模型和模型二：三站间节能优化模型，运用迭代搜索算法，当运行时间为 110s 时，得到列车从 A_6 到 A_7 的最优速度距离曲线及相关曲线数据，全程共耗能 $E_{\min} = 3.571 \times 10^7 J$ ；当运行时间为 220s 时，同理得到列车从 A_6 到 A_8 的最优速度距离曲线及相关曲线数据，全程共耗能 $E_{\min} = 6.682 \times 10^7 J$ 。

针对问题 2：对于多列车节能优化，需考虑列车运行耗能和再生能量利用情况，属于双目标优化问题。分别建立基于不同决策变量的模型三和模型四：多站间节能优化模型和模型五：高峰与非高峰时段优化模型。运用遗传算法，得到：（1）全程非高峰时段，所有列车运行总能耗最低的间隔 H ，速度距离曲线以及相应的列车运行方案；（2）全程

高峰时段与非高峰时段混合，所有列车运行总能耗最低的间隔 H' 、速度距离曲线以及相应的列车运行方案。

针对问题 3：对于列车延误运行优化，在问题 2 的基础上，还需考虑全程延误时间最少情况，属于多目标优化问题。建立延误控制优化模型，考虑到延误时间是随机变量，根据问题 2 的统计数据，利用蒙特卡洛模拟仿真，得到延误时的列车运行方案，并对比第二问的运行方案，做了适当调整。

本文特色是根据问题 1 至问题 3 的要求，层层拓展，分别建立的单目标优化模型、双目标优化模型和多目标优化模型，模型的灵活性和可靠性较高；对于 NP 难问题优化模型，采用迭代搜索算法能够较为准确的得到列车运行的最优耗能值及其对应的速度值。

关键词：动力学原理；多目标优化；迭代禁忌搜索；遗传算法；蒙特卡洛模拟仿真

1 问题背景及重述

1.1 问题背景

轨道交通系统的能耗是指列车牵引、通风空调、电梯、照明、给排水、弱电等设备产生的能耗。根据统计数据，列车牵引能耗占轨道交通系统总能耗 40% 以上。在低碳环保、节能减排日益受到关注的情况下，针对减少列车牵引能耗的列车运行优化控制近年来成为轨道交通领域的重要研究方向。

(1) 列车运行过程

列车在站间运行时会根据线路条件、自身列车特性、前方线路状况计算出一个限制速度。列车运行过程中不允许超过此限制速度。限制速度会周期性更新。在限制速度的约束下列车通常包含四种运行工况：牵引、巡航、惰行和制动。

(2) 列车动力学模型

列车在运行过程中，实际受力状态非常复杂。采用单质点模型是一种常见的简化方法。单质点模型将列车视为单质点，列车运动符合牛顿运动学定律。其受力可分为四类：重力 G 在轨道垂直方向上的分力与受到轨道的托力抵消，列车牵引力 F ，列车制动力 B 和列车运行总阻力 W 。

(3) 运行时间与运行能耗的关系

当列车在站间运行时，存在着多条速度距离曲线供选择。不同速度距离曲线对应不同的站间运行时间和不同的能耗。列车可以走完相同的距离，但运行时间和能耗并不相同。此外，即便站间运行时间相同时，也存在多条速度距离曲线可供列车选择。

(4) 再生能量利用原理

随着制动技术的进步，目前城市轨道交通普遍采用再生制动。再生制动时，牵引电动机转变为发电机工况，将列车运行的动能转换为电能，发电机产生的制动力使列车减速，此时列车向接触网反馈电能，此部分能量即为再生制动能。

1.2 问题重述

根据列车动力学原理和相关信息，研究以下问题：

一、单列车节能运行优化控制问题

(1) 分析单列车两站间的运行情况，建立计算速度距离曲线的数学模型，计算一条列车从 A6 站出发到达 A7 站的最节能运行的速度距离曲线。其中 A6 与 A7 两车站间的运行时间为 110 秒，具体的列车参数和线路参数详见文件“列车参数.xlsx”和“线路参数.xlsx”。

(2) 分析单列车三站间的运行情况，建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算一条列车从 A6 站出发到达 A8 站的最节能运行的速度距离曲线，其中列车在 A7 车站停站 45 秒，A6 站和 A8 站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间），具体的列车参

数和线路参数详见文件“列车参数.xlsx”和“线路参数.xlsx”。

注：问题（1）和（2）中得到的曲线数据按每秒钟一行填写到文件“数据格式.xlsx”中红色表头那几列，并且该文件和论文一并提交。（其中计算公里标（m）是到起点的距离，计算距离（m）是到刚通过的一站的距离）

二、多列车节能运行优化控制问题

（1）分析多列车多站间的运行情况，当 100 列列车以间隔 $H=\{h_1, \dots, h_{99}\}$ 从 A1 站出发，追踪运行，依次经过 A2, A3, 到达 A14 站，中间在各个车站停站最少 D_{min} 秒，最多 D_{max} 秒。间隔 H 各分量的变化范围是 H_{min} 秒至 H_{max} 秒。以此建立优化模型并使所有列车运行总能耗最低的间隔 H ，从而得到列车发车的控制方案。其中，第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 $T_0=63900$ 秒，且从 A1 站到 A14 站的总运行时间不变，均为 2086s（包括停站时间）。假设所有列车处于同一供电区段，各个车站间线路参数详见文件“列车参数.xlsx”和“线路参数.xlsx”。

补充说明：列车追踪运行时，为保证安全，跟踪列车（后车）速度不能超过限制速度 V_{limit} ，以免后车无法及时制动停车，发生追尾事故。其计算方式可简化如下：

$$V_{limit} = \min (V_{line}, \sqrt{2LB_e})$$

其中 V_{line} 是列车当前位置的线路限速（km/h）， L 是当前时刻前后车之间的距离(m)， B_e 是列车制动的最大减速度(m/s²)

（2）在上述问题的基础上，继续分析列车高峰时间段和非高峰时间段对发车间隔时间的影响。如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。结合上题中的列车间隔时间，重新为列车制定高峰时间段和非高峰时间段的运行图和相应的速度距离曲线。

三、列车延误后运行优化控制问题

以上述问题为基础，分析列车延误后运行优化控制问题。若列车 i 在车站 A_j 延误 DT_j^i （10 秒）发车，建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。

假设 DT_j^i 为随机变量，普通延误（ $0 < DT_j^i < 10s$ ）概率为 20%，严重延误（ $DT_j^i > 10s$ ）概率为 10%（超过 120s，接近下一班，不考虑调整），无延误（ $DT_j^i = 0$ ）概率为 70%。如果允许列车在各站到达和发车时间与原时间相比提前不能超过 10 秒，根据上述问题的统计数据，对第二问的控制方案进行调整。

2 问题分析

问题 1 分析：问题要求寻找单列列车运行两站间或三站间最节能速度、加速度、公里标和运行距离等序列，从而描绘速度距离曲线。该问题归结为单列车节能优化问题，核心在于建立单列车单目标优化模型，拟采用迭代搜索算法，进而可以计算出列车运行车站间最节能的速度，从而完成速度距离曲线。在建立单列车单目标优化模型前，需要分析建立列车动力学模型，对数据进行预处理，计算站间的距离，坡度变化、限速变化以及曲率变化等。

问题 2 分析：本问题可以归结为多列车节能优化问题，核心在于建立多列车双目标优化模型。在问题 1 的基础上，增加再生能量利用最大的目标函数，寻找使所有列车运行总耗能最低的时间间隔，针对高峰时期和非高峰时期时段，列车发车间隔时期的约束条件，建立高峰期和非高峰期列车节能优化模型。采用遗传算法，优化列车在车站间的运行时间，得到不分人流量的最优列车运行图，再结合高峰期和非高峰列车发车间隔的变化情况，调整发车时间，重新制定列车运行图。

问题 3 分析：本问题可以归结为多列车协同控制节能优化问题，核心在于建立基于列车延误后列车运行的多列车多目标优化问题。在问题 2 的基础上，增加所有列车运行过程中延误时间最少的目标函数，设置延误时间为随机变量，通过上述问题的统计数据，进行仿真，从而调整问题 2 的控制方案。

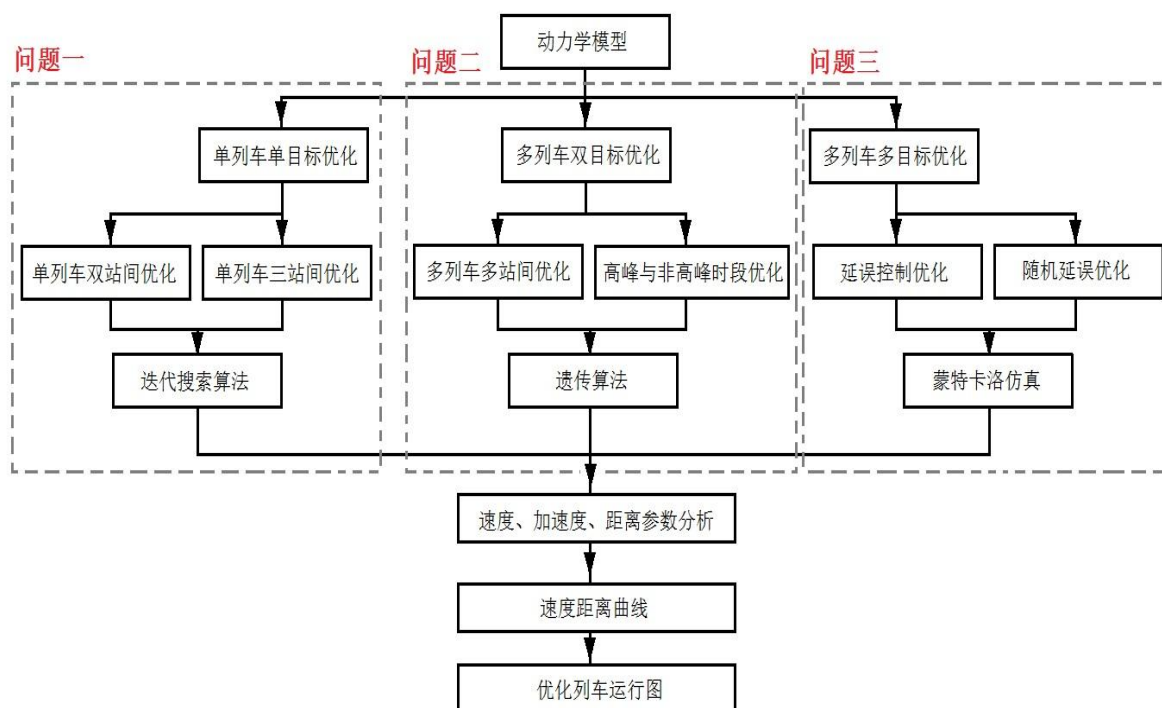


图 1 研究技术路线图

3 符号说明

符号	符号说明
E	列车能量消耗 (kJ)
F	列车牵引力 (kN)
F_{\max}	列车最大牵引力 (kN)
B_{\max}	列车最大制动力 (kN)
v_0	列车初速度 (km/h)
v_t	列车末速度 (km/h)
v	列车速度 (km/h)
a	列车加速度 (km/h ²)
V_{\max}	列车运行最大速度 (km/h)
W	列车运行总阻力 (kN)
w_0	列车单位基本阻力系数 (N/kN)
w_1	列车单位附加阻力系数 (N/kN)
w_i	列车单位坡道阻力系数 (N/kN)
w_c	列车单位曲线阻力系数 (N/kN)
R	曲率半径 (km)
S	列车运行距离 (km)
T	列车运行时间 (s)
T_j	列车第 j 站停站时间 (s)
h_i	第 i 辆列车与第 $i+1$ 辆列车的间隔发车时间 (s)
μ	实际输出的牵引力加速度与最大加速百分比
c	综合反映影响曲线阻力的经验常数

4 基本假设

- (1) 假设附件中的数据真实有效;
- (2) 假设所有列车属于同一供电区段;
- (2) 假设列车交通系统是一个能以固定航行速度操纵列车运行的信号系统;
- (3) 假设所有列车在同时同地都采用相同的驾驶状况;
- (4) 根据操作经验将列车各站停驻时间设为定值;
- (5) 忽略不计列车中空调等耗能较小的用电设备消耗能量;
- (6) 不考虑列车会车和越行的情况。

5 模型建立与求解

5.1 列车动力学原理

列车在运行过程中，实际受力状态非常复杂。采用单质点模型，将列车视为单质点，列车运动符合牛顿运动学定律。列车受力可分为四类：重力 G 在轨道垂直方向上的分力与受到轨道的托力抵消，列车牵引力 F ，列车制动力 B 和列车运行总阻力 W 。根据列车通常包含的四种运行工况：牵引、巡航、惰行和制动，建立四种形式的动力学模型。根据动力学原理，列车的消耗能量关系为：

$$E = \int F(t)v(t)dt \quad (5.1)$$

其中，列车的牵引力 F 是由动力传动装置产生的、与列车运行方向相同、驱动列车运行并可由司机根据需要调节的外力。牵引力 F 在不同速度下存在不同的最大值 $F_{\max} = f_F(v)$ ，列车实际输出牵引力为 $F = \mu F_{\max}$ ， μ 为实际输出的牵引加速度与最大加速的百分比， F_{\max} 为牵引力最大值。同时，列车的牵引力等于列车运行的总阻力和合外力之和：

$$F = F_{\text{合}} + W$$

其中，合外力的表达式为： $F_{\text{合}} = m \frac{dv}{dt}$ ，列车运行总阻力是指列车与外界相互作用引起与列车运行方向相反、一般是阻碍列车运行的、不能被司机控制的外力。按其形成原因可分为基本阻力和附加阻力。阻力表达式为：

$$W = Mg(w_0 + w_1)/1000$$

式中： w_0 ——单位基本阻力系数（kN）； w_1 ——单位附加阻力系数（N/kN）； M 为列车质量（kg）， g 为重力加速度常数。列车的基本阻力是列车在空旷地段沿平、直轨道运行时所受到的阻力。实际应用中很难用理论公式进行准确计算，通常采用以下经验公式进行计算：

$$w_0 = A + Bv + Cv^2$$

式中： A 、 B 、 C 为阻力多项式系数，通常取经验值， v 为列车速度（km/h）。列车由于在附加条件下（通过坡道、曲线、隧道）运行所增加的阻力叫做附加阻力。附加阻力主要考虑坡道附加阻力和曲线附加阻力：

$$w_1 = w_i + w_c。$$

列车的坡道附加阻力是列车上下坡时重力在列车运行方向上的一个分力。通常采用如下公式计算： $w_i = i$ 。其中 w_i 为单位坡道阻力系数 (N/kN)， i 为线路坡度 (‰)。 i 为正表示上坡， i 为负表示下坡。列车的曲线阻力主要源自取决于轨道线路的曲率半径，列车在曲线上运行时，轮轨间纵向和横向的滑动摩擦力增加，转向架等各部分摩擦力也有所增加。通常采用如下公式计算：

$$w_c = c / R$$

其中 w_c 为单位曲线阻力系数 (N/kN)， R 为曲率半径 (m)； c 为综合反映影响曲线阻力许多因素的经验常数，我国轨道交通一般取 600。

制动力 B 是由制动装置引起的、与列车运行方向相反的、司机可根据需要控制其大小的外力。制动力 B 存在与制动时列车速度有关的最大值：

$$B_{\max} = f_B(v)$$

列车实际输出制动力基于以下公式进行计算

$$B = \mu B_{\max}$$

其中， μ 为实际输出的制动加速度与最大加速的百分比， B_{\max} 为制动力最大值。

将四种列车运行工况所消耗的能量带入式子 (5.1)，得到牵引阶段、巡航阶段、惰性阶段和制动阶段的能量消耗关系。

(1) 牵引阶段

列车加速，发动机处于耗能状态，其牵引力、加速度和耗能关系式如下：

$$\begin{aligned} F &= Mg \left(\frac{dv}{gdt} + \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) \\ a &= g \left(\frac{dv}{gdt} + \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) \\ E &= \int Mg \left(\frac{dv}{gdt} + \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) v dt \end{aligned}$$

(2) 巡航阶段

列车匀速，列车所受合力为 0，其牵引力、加速度和耗能关系式如下：

$$\begin{aligned} F &= Mg \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \\ a &= g \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \end{aligned}$$

$$E = \int \left(Mg \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) v dt$$

此时：

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

(3) 惰行阶段

列车减速，列车所受合力为列车运行的总阻力，列车不需要牵引力，此过程列车发动机不耗能，因此：

$$dE = 0$$

此时有加速度：

$$a = \frac{dv}{dt} = (A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R})g / 1000$$

(4) 制动阶段

列车减速，列车所受合力即为列车运行的总阻力，列车不需要牵引，此过程列车发动机不耗能。

$$dE = 0$$

此时有加速度：

$$a = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{B(v)}{Mg} + \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right] g$$

式中：

$B(v)$ ——列车制动力 (N/kN)。

5.2 问题 1 单列车节能优化模型

5.2.1 双站间节能优化模型的建立与求解

(1) 模型建立

根据列车动力学模型和能量转换关系，在指定时间 T 所消耗的能量为：

$$E(T) = \int_0^T F[v(t)]v(t)dt$$

列车运行距离及速度要求为：

$$S = \int_0^T v(t)dt, v(t) \leq V_{\max}$$

列车运行过程中的加速度、牵引力和制动力要求为：

$$|a| \leq 1; F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0, 1]; B(v) \leq B_{\max}$$

列车运行边界条件为：

$$v(0) = v(T) = 0$$

因此，给定列车运行时间和运行距离，建立单列车双站间节能运行优化控制模型。

模型一：
$$\min E(T) = \int_0^T F[v(t)] dt$$

$$s.t. \begin{cases} S = \int_0^T v(t) dt \\ F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0,1] \\ B[v(t)] \leq B_{\max} \\ v(t) \leq V_{\max} \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ v(0) = v(T) = 0 \end{cases}$$

其中，

$E(T)$ —列车运行时间为 T 的耗能

S —列车运行的总距离

T —列车两站间运行时间

μ —实际输出的牵引加速度与最大加速度的百分比

$F[v(t)]$ — t 时刻的牵引力， F_{\max} 表示最大牵引力

$B[v(t)]$ — t 时刻的制动力， B_{\max} 表示最大制动力

$v(t)$ — t 时刻的速度， V_{\max} 表示限速，初始时刻速度 $v(0)=0$ ，终止时刻速度 $v(T)=0$

$a(t)$ — t 时刻的加速度， a_{\max} 为正时表示最大加速度， a_{\max} 为负时表示最大减速度

(2) 模型求解

由模型一可知，目标函数是关于列车行驶过程中 t 时刻速度 $v(t)$ 及其对应牵引力 $F[v(t)]$ 消耗能量的关系。因此，单列车节能优化模型属于非线性优化^[2]，很难直接运用软件对模型一求解。查找文献^[1]得知，列车站间运行时间和能耗存在近似的反比关系，列车站间运行时间与能耗变化的趋势影响能耗的减少，并且不同的时间对应唯一相应的耗能最低值。

因此，为了得到耗能最优的速度距离曲线，建立单列车节能优化迭代搜索算法。通过列车运动牵引、巡航、惰性和制动的速度规律，将列车运行过程离散化，划分为 l 个部分，其速度 $v_i (i=1,2,\dots,l)$ 与列车位置 $s_i (i=1,2,\dots,l)$ 一一对应，依据各个时刻都有唯一的耗能最低值原理，以及 μ 与牵引力的关系，离散化加速权重 μ ，在一定的运行时间

T 下, 不同的 μ 值获取相应的最少能耗值, 最终对所有不同加速权重 μ 下的最少能耗值取最小, 从而获得最优能耗值 E 。算法步骤具体如下:

算法 5.1: 列车双站间节能优化迭代搜索算法

Step1: 设置初速度 v_0 、末速度 v_l 和运行时间 T

Step2: 离散化加速权重 μ , 将其分为 N 个区间: $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N] \in (0, 1]$

Step 3: 令 $m = 1$, $\mu = \mu_m$

Step 4: 设置能量损耗常数 E

Step 5: 令 $i = 0$, $v_i = v_0$, $i = i + 1$, 计算对应时刻的加速度、速度和能量:

$$\begin{aligned} a &= (\mu F(v_{i-1}) - w_0(v_{i-1}) - w_1(v_{i-1})) / M \\ v_i^2 &= v_{i-1}^2 + 2a(s_i - s_{i-1}) \\ E &= E - (F(v_{i-1})(s_i - s_{i-1})) / M \end{aligned}$$

Step 6: 若 $v_i < V(s_i)_{\max}$ 且 $E > 0$, 返回 Step5

Step7: 若 $E > 0$, 令 $v_{i+1} = v_i$ 且 $E = E - (w_0(v_i) + w_1(s_i))(s_{i+1} - s_i)$, 令 $i = i + 1$, 返回 Step6

Step 8: 令 $k = i$, $p_k = v_k$

Step9: 若 $k \leq l$, 计算 $p_{k+1}^2 = p_k^2 - 2(s_{k+1} - s_k)(w_0(p_k) + w_1(s_k))$, 令 $k = k + 1$, 返回 Step8

Step10: 令 $j = l$, $q_j = v_l$

Step11: 若 $j > i$, 计算 $q_{j+1}^2 = q_j^2 + 2(s_j - s_{j-1})(\mu B(q_j) + w_0(q_j) + w_1(s_j))$, 令 $j = j - 1$,

返回 Step10

Step 12: 令 $i = i + 1$, $v_i = \min\{q_i, p_i\}$, 若 $i \leq l$, 返回 step11

Step 13: 返回单次最少耗能对应的时间 $t = \sum_{i=1}^l \frac{s_{i+1} - s_i}{v_i}$

Step14: 若 $t \neq T$, $E = E + \Delta E$, 返回 Step4; 若 $t = T$, 输出最优速度序列 $\{v_i^m, 0 \leq i \leq l\}$ 和能量 E_m , 令 $m = m + 1$, 若 $m \leq N$, 返回 Step3

Step15: 返回最终最少耗能 $E_{\min} = \min(E_1, E_2, \dots, E_m)$, 对应加速权重 μ , 以及相应的速度序列 $\{v_i, 0 \leq i \leq l\}$

算法流程图如图 2 所示。

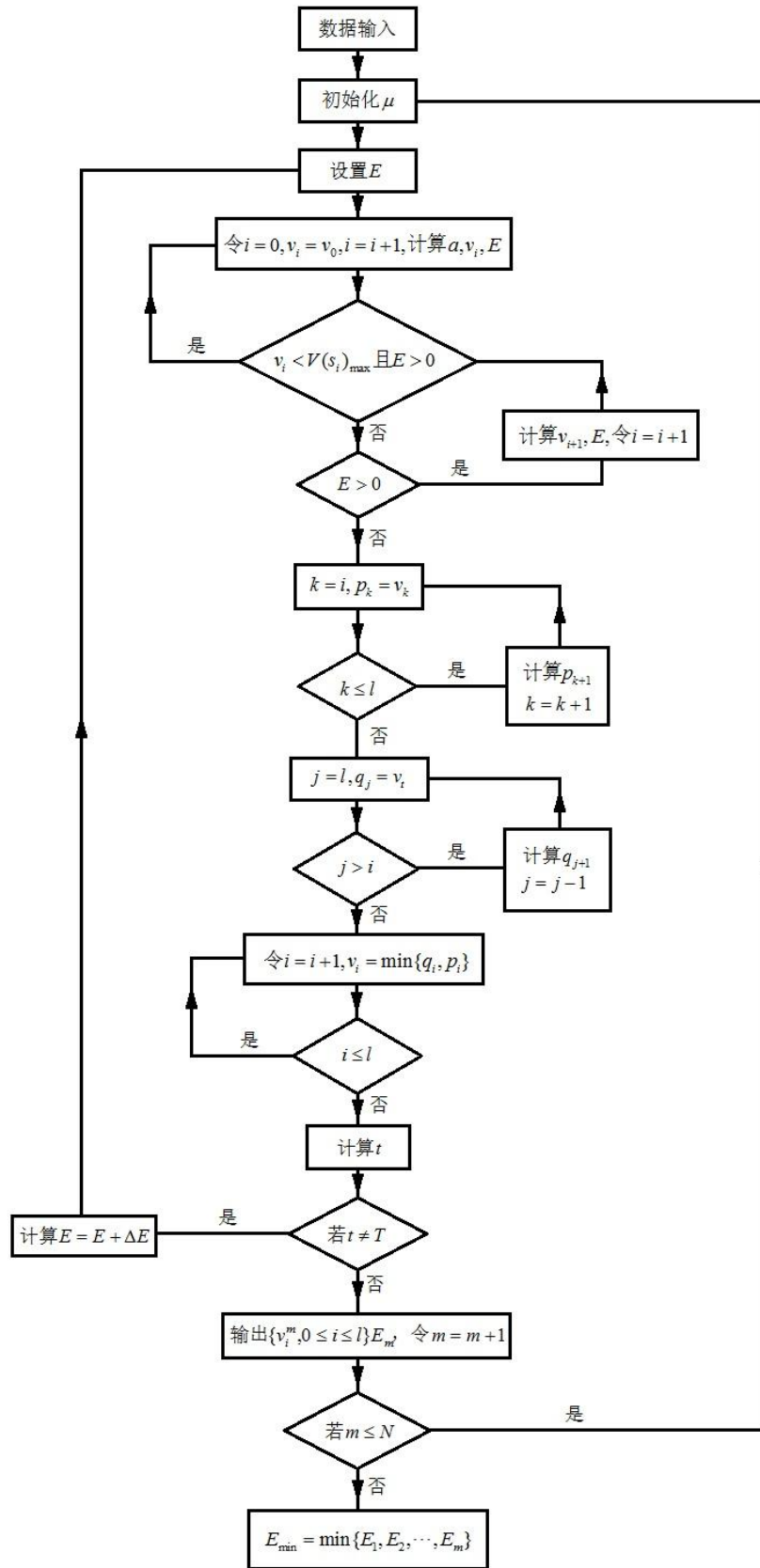


图 2 列车双站间节能优化迭代搜索算法流程图

(3) 模型结果

计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_7 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求两车站间的运行时间 $T=110$ 秒。由附件可知， A_6 到 A_7 的公里标度、坡度、限速和曲率如表 1 所示。

表 1 A_6 到 A_7 的公里标度、坡度、限速和曲率参数表

$A_6 - A_7$ (公里标度起止: 13594-12240)					
公里标度	13594-13474	13474-13290	13290-12910	12910-12290	12290-12240
坡度	0	0	-1.8	3.5	0
限速	55	80	80	80	80
曲率	0	0	0	0	0

由表可知，列车从 A_6 到 A_7 共行驶 1354m，其行驶路况是平地出站，然后分别平地行驶，下坡和上坡，最后平地进站；全程曲率均为 0，说明没有转向情况。由附件可知，列车的最大牵引力和最大制动力特征表达式如下所示：

最大牵引力 (kN)

$$F_{\max} = \begin{cases} 203 & 0 \leq v \leq 51.5 \text{ km/h} \\ -0.002032v^3 + 0.4928v^2 - 42.13v + 1343 & 51.5 < v \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

最大制动力 (kN)

$$B_{\max} = \begin{cases} 166 & 0 < v \leq 77 \text{ km/h} \\ 0.1343v^2 - 25.07v + 1300 & 77 < v \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

其中， v 为列车速度 (km/h)。对应的最大牵引力和最大制动力的特征曲线如图 3 所示。

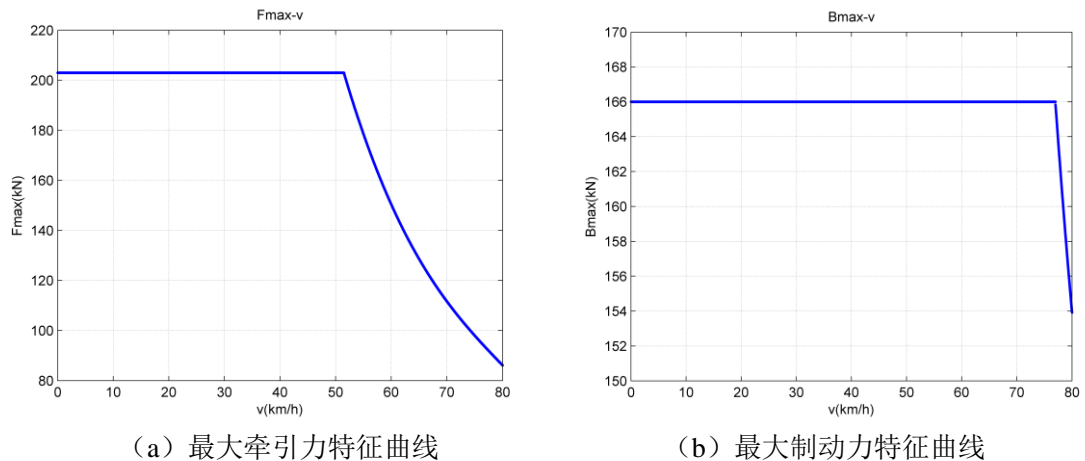


图 3 最大牵引力和最大制动力的特征曲线

图 3 (a) 中可清晰的看出，最大牵引力当速度小于等于 51.5 km/h 时，保持最大牵引力，当 $v > 51.5 \text{ km/h}$ ，最大牵引力呈逐渐下降趋势；图 3 (b) 中可清晰的看出，最大

制动力当速度小于等于 77 km/h 时，保持最大制动力，当 $v > 77\text{ km/h}$ ，最大制动力呈快速下降趋势。求解模型一所需的其他列车各参数如下表 2 所示：

表 2 列车参数信息表

两站间运行时间 T (秒)	110
列车重量 M (吨)	194.295
列车基本阻力参数 A	2.031
列车基本阻力参数 B	0.0622
列车基本阻力参数 C	0.001807
最大加速度 a_1 (米/秒 ²)	1
最大减速度 a_2 (米/秒 ²)	1
经验常数 c	600

运用 MATLAB 编程实现算法 5.1，得到最优的速度距离的曲线和速度时间曲线，如图 4 所示。

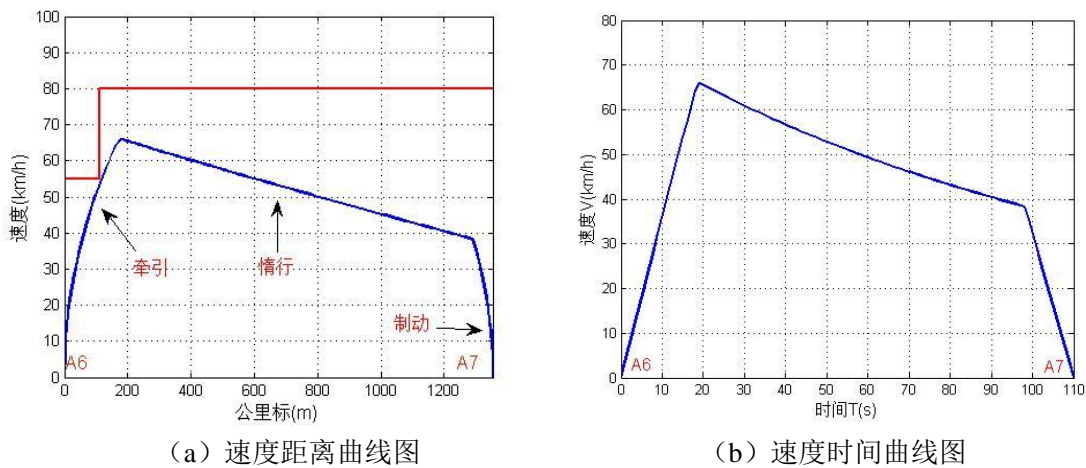


图 4 A_6 到 A_7 的速度距离曲线与速度时间曲线图

由图 4 (a) 可知，红色曲线表示不同位置的最大限速，蓝色曲线表示不同位置的优化速度。列车从 A_6 到 A_7 的运动状况是先牵引加速，接着惰行，最后制动使其在终点的速度为 0。期间共有 3 个阶段，分别是牵引加速，惰行减速和制动减速，没有巡航阶段，说明该车站间的距离较短。由图 4 (b) 可知，随着时间的变化，列车由静止开始快速加速，然后缓慢减速，最后快速减速直至列车停止。整个过程满足列车牵引、惰行以及制动的速度变化规律。列车站间运行时间和能量消耗关系以及权重 μ 对耗能影响的变化情况如图 5 所示。

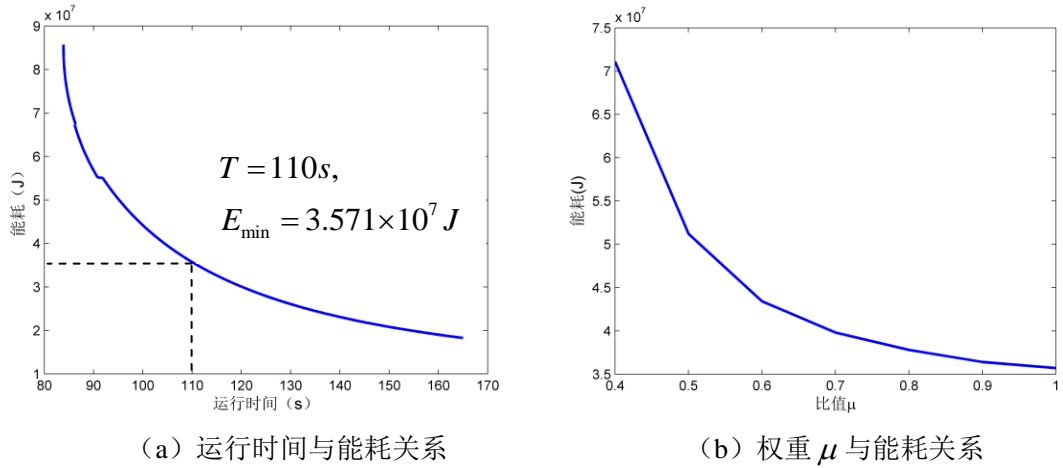


图 3 站间运行时间及权重 μ 与能耗关系变化图

由图 5 (a) 可知, 列车站间运行时间和能耗关系近似为反比关系, 当站间运行时间 $T=110s$, 对应的最少耗能 $E_{\min}=3.571\times10^7 J$ 。由图 5 (b) 可知, 随着权重 μ 的增大, 能耗呈递减趋势, 说明当 $\mu=1$ 时, 即牵引加速或制动减速均已达到最大加速度和最大减速度, 此时能耗最低。列车在运行时间 $T=110s$ 下, 记录以 10s 间隔期相关的曲线参数变化数据如表 2 所示, 记录以 1s 间隔期的相关数据详见附录 1。

表 2 10s 间隔期的相关曲线参数数据(A_6 到 A_7)

时刻	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速 度 (m/s ²)	计算距离 (m)	计算公里标 (m)	当前坡度 (‰)	计算牵引力 (N)	计算牵引功 率 (Kw)
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	198162.2088	0.0000
10	999.9997	36.0000	1.0000	50.0000	50.0000	0.0000	206884.9829	2068.8492
20	1818.8880	65.4800	-0.1357	198.0880	198.0880	0.0000	0.0000	0.0000
30	1689.9263	60.8373	-0.1225	373.4186	373.4186	1.8000	0.0000	0.0000
40	1573.1909	56.6349	-0.1112	536.4804	536.4804	1.8000	0.0000	0.0000
50	1466.9538	52.8103	-0.1015	688.4064	688.4064	-3.5000	0.0000	0.0000
60	1369.7969	49.3127	-0.0930	830.1735	830.1735	-3.5000	0.0000	0.0000
70	1280.5464	46.0997	-0.0856	962.6291	962.6291	-3.5000	0.0000	0.0000
80	1198.2216	43.1360	-0.0791	1086.5135	1086.5135	-3.5000	0.0000	0.0000
90	1121.9971	40.3919	-0.9758	1202.4767	1202.4767	-3.5000	0.0000	0.0000
100	892.1603	32.1178	-0.9121	1309.6006	1309.6006	0.0000	0.0000	0.0000
110	0.0000	0.0000	-0.8743	1353.9997	1353.9997	0.0000	0.0000	0.0000

5.2.2 三站间节能优化模型的建立与求解

(1) 模型建立

针对三站间的列车行驶, 要使列车总耗能最低, 那么列车经过的每个站所消耗的能量都是最优的, 即

$$\min E_1 = \int_0^{T_1} F[v(t)]v(t)dt$$

$$\min E_2 = \int_{T_1+T_b}^{T_2} F[v(t)]v(t)dt$$

其中, T_1 是列车经过前两站的运行时间, $T_2 - (T_1 + T_b)$ 是列车经过后两站的运行时间, 且满足 $T_2 - T_b = T$ 。因此, 目标函数为:

$$\min E(T) = \int_0^{T_1} F[v(t)]v(t)dt + \int_{T_1+T_b}^{T_2} F[v(t)]v(t)dt$$

当列车在站台时, 列车的速度为 0, 即边界条件为

$$v(0) = v(T_1) = v(T_1 + T_b) = v(T_2) = 0$$

因此, 在模型一的基础上加以修正, 给定列车运行总时间 T , 停站时间 T_b 和运行距离 S , 建立单列车三车间节能运行优化控制模型。

模型二 $\min E(T) = \int_0^{T_1} F[v(t)]v(t)dt + \int_{T_1+T_b}^{T_2} F[v(t)]v(t)dt$

$$s.t. \begin{cases} S = \int_0^{T_1} v(t)dt + \int_{T_1+T_b}^{T_2} v(t)dt \\ F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0, 1] \\ T_2 - T_b = T \\ B[v(t)] \leq B_{\max} \\ v(t) \leq V_{\max} \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ v(0) = v(T_1) = v(T_1 + T_b) = v(T_2) = 0 \end{cases}$$

其中,

T_1 —表示到达中间站的时刻

T_2 —表示到达末尾站的时刻

T_b —表示停站时间

$v(t)$ — t 时刻的速度, V_{\max} 表示限速, 初始时刻速度 $v(0) = 0$, $v(T_1 + T_b) = 0$, 终止时刻速度 $v(T_1) = 0$, $v(T_2) = 0$

其余变量的含义与模型一中相应变量一致。

(2) 模型求解

模型二在模型一的基础上加以推广, 因此同样是非线性优化, 难以直接运用软件进行求解。根据模型二中变化的约束条件, 列车行驶从 A_6 到 A_8 增加了停站时间, 以及两站运行总时间一定的要求, 在算法 5.1 的基础上, 离散化前两站运行时间 T_1 , 根据总运行时间不变的要求, 间接得到后两站运行时间为 $T - T_1$, 通过不同的 T_1 值, 获取相应的

最少耗能，最终对所有不同 T_1 的最少能耗值取最小，从而获得最优能耗值 E 。改进的三站间节能优化迭代搜索算法^[3]具体步骤如下。

算法 5.2： 列车三站间节能优化迭代搜索算法

- Step1: 设置初速度 v_0 、末速度 v_l 和运行总时间 T
- Step2: 离散化前两站运行时间 T_1 ，将其分为 L 个区间： $T_1 = [T_1^1, T_1^2, \dots, T_1^L] \in (0, T]$
- Step3: 令 $k = 1$ ， $T_1 = T_1^k$
- Step4: 重复算法 5.1 中的 Step2-Step15，得到最少耗能 E^{T_1}
- Step5: 令后两站运行时间为 $T - T_1$
- Step6: 重复算法 5.1 中的 Step2-Step15，得到最少耗能 E^{T_2}
- Step7: 得到单次最少总耗能 $E_1 = E^{T_1} + E^{T_2}$
- Step8: 令 $k = k + 1$ ，若 $k \leq L$ ，返回 Step3
- Step9: 得到最终最少耗能 $E_{\min} = \min(E_1, E_2, \dots, E_m)$ ，对应加速权重 μ ，以及相应的速度序列 $\{v_i, 0 \leq i \leq l\}$
-

(3) 模型结果

计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_8 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在 A_7 车站停站时间 $T_b = 45$ 秒， A_6 站和 A_8 站的总运行时间 $T = 220s$ （不包括停站时间）。由附件可知， A_6 到 A_8 的公里标度、坡度、限速和曲率如表 3 所示。

表 3 A_6 到 A_8 的公里标度、坡度、限速和曲率参数表

$A_6 - A_8$ （公里标度起止：13594-10960）					
公里标度	13594-13474	13474-13290	13290-12910	12910-12290	12290-12240
坡度	0	0	-1.8	3.5	0
限速	55	80	80	80	80
曲率	0	0	0	0	0
公里标度	12240-12120	12120-12000	12000-11600	11600-11040	11040-10960
坡度	0	0	-3	2	0
限速	55	80	80	80	80
曲率	0	0	0	0	0

由表可知，列车从 A_6 到 A_8 共行驶 2634m，其中 A_6 到 A_7 的距离为 1354m， A_7 到 A_8 的距离为 1280m，其行驶路况是平地出 A_6 站，然后分别平地行驶，下坡和上坡，平地入 A_7 站，再平地出 A_7 站，然后分别平地行驶，下坡和上坡，平地入 A_8 站；全程曲率均为 0，说明没有转向情况。

同样运用 MATLAB 编程实现算法 5.2, 得到最优的速度与距离曲线和速度与时间曲线, 如图 6 所示。

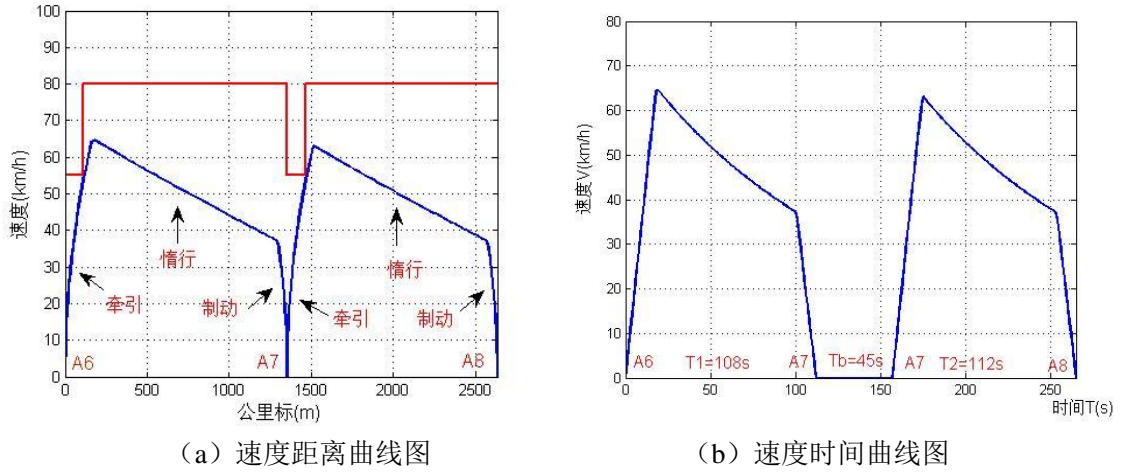


图 6 A_6 到 A_8 的速度距离曲线与速度时间曲线图

由图 6 (a) 可知, 红色曲线依然表示不同位置的最大限速, 蓝色曲线表示不同位置的优化速度。列车从 A_6 到 A_7 的运动状况是先牵引, 然后惰行, 最后制动使其在 A_7 站的速度为 0。从 A_7 到 A_8 的运动状况同样是上述情况。站台间共有 3 个阶段, 分别是牵引加速, 惰行减速和制动减速, 没有巡航阶段, 说明 A_6 到 A_8 两两车站间的距离较短。从图 6 (b) 可看出, 在总运行时间 $T = 220s$ 时, 列车从 A_6 到 A_7 的运行时间 $T_1 = 108s$, 列车从 A_7 到 A_8 的运行时间 $T_2 = 112s$ 。期间有 45s 的停站时间, 因此在 108s 至 153s 间, 速度为 0。 A_6 到 A_7 车站间和 A_7 到 A_8 车站间运行时间和消耗关系如图 7 所示。

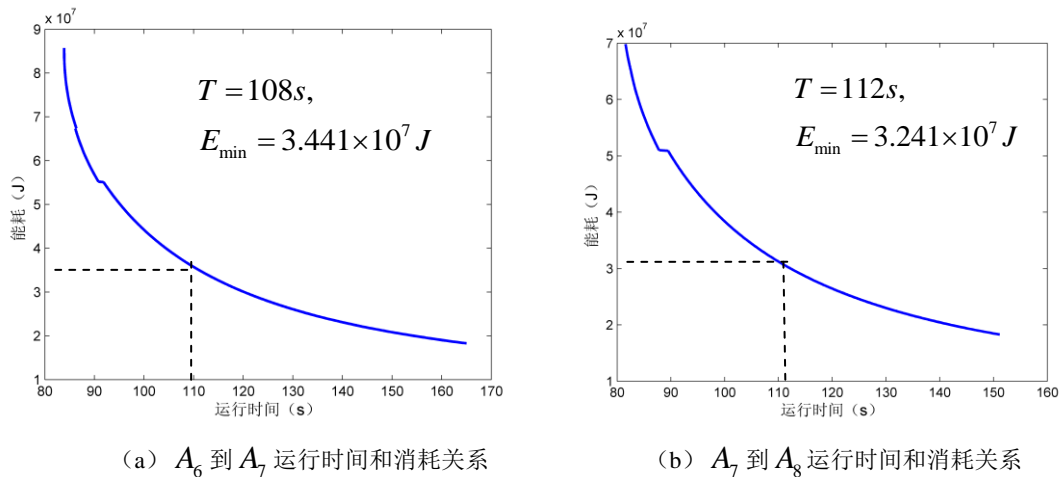


图 7 A_6 到 A_7 车站间和 A_7 到 A_8 车站间运行时间和消耗关系

由图可知, 列车在 A_6 到 A_7 车站间和 A_7 到 A_8 车站间运行时间和能耗关系同样近似为反比关系, 列车从 A_6 到 A_7 的运行时间 $T_1 = 108s$ 所对应的能量 $E_1 = 3.441 \times 10^7 J$, 列车从 A_7 到 A_8 的运行时间所对应的能量 $E_2 = 3.241 \times 10^7 J$ 。因此, 列车从 A_6 到 A_8 的运行时间 $T = 220s$ 所对应的最少耗能 $E_{min} = E_1 + E_2 = 6.682 \times 10^7 J$ 。列车在运行时间 $T = 220s$, 停站

时间 $T_b = 45s$ 下，记录以 20s 间隔期相关的曲线参数变化数据如表 4 所示，记录以 1s 间隔期的相关数据详见附录 2。

表 4 20s 间隔期的相关曲线参数数据(A_6 到 A_8)

时刻	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加 速度 (m/s ²)	计算距离 (m)	计算公里标 (m)	当前坡 度(‰)	计算牵引力 (N)	计算牵引 功率(Kw)
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	198162.2088	0.0000
20	1782.8011	64.1808	-0.1320	197.4974	197.4974	0.0000	0.0000	0.0000
40	1543.5778	55.5688	-0.1085	529.3532	529.3532	1.8000	0.0000	0.0000
60	1344.9988	48.4200	-0.0909	817.6279	817.6279	-3.5000	0.0000	0.0000
80	1177.1006	42.3756	-0.0775	1069.3916	1069.3916	-3.5000	0.0000	0.0000
100	1032.9227	37.1852	-0.9244	1290.0452	1290.0452	-3.5000	0.0000	0.0000
120	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1353.9997	0.0000	0.0000	0.0000
140	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1353.9997	0.0000	0.0000	0.0000
160	299.9989	10.8000	1.0000	4.5000	1358.5000	0.0000	199842.6160	599.5257
180	1689.1442	60.8092	-0.1225	247.4186	1601.4186	3.0000	0.0000	0.0000
200	1466.3060	52.7870	-0.1014	562.2641	1916.2641	3.0000	0.0000	0.0000
220	1279.9998	46.0800	-0.0856	836.3677	2190.3677	-2.0000	0.0000	0.0000
240	1121.5286	40.3750	-0.0734	1076.1140	2430.1140	-2.0000	0.0000	0.0000
260	443.6642	15.9719	-0.8885	1268.8541	2622.8541	0.0000	0.0000	0.0000

5.3 问题 2 多列车节能优化模型

5.3.1 多站间节能优化模型的建立与求解

(1) 模型建立

对于多列车节能运行的优化控制问题，要求寻找使列车数为 n 的所有列车运行总能耗最低的间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ 。设第 i 辆列车从第 j 个站台出发的时刻为 d_i^j ，第 i 辆列车达到第 $j+1$ 个站台的时刻为 a_i^j ，那么第 i 辆列车与第 $i+1$ 辆列车在起点站台的发车间隔为 $h_i = d_{i+1}^1 - d_i^1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)。

设站台数为 m ，第 i 列车从第 j 站到第 $j+1$ 站的运行时间为 $T_i^j = a_i^{j+1} - d_i^j$ 。为了到达列车节能的目的，首先要求列车经过的所有站台的耗能最低，即

$$\min E_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_i^{j+1}} F[v(t)]v(t)dt \quad (5.2)$$

其中， n 表示列车数， m 表示站台数。根据再生能量利用原理，当多列车交替运行时，若相邻列车在车站同时分别进行制动和加速时，可以利用列车 $i+1$ 制动列车产生的能量 E_{reg} ，减少列车 i 加速从变电站获得的能量。如图 8 所示。

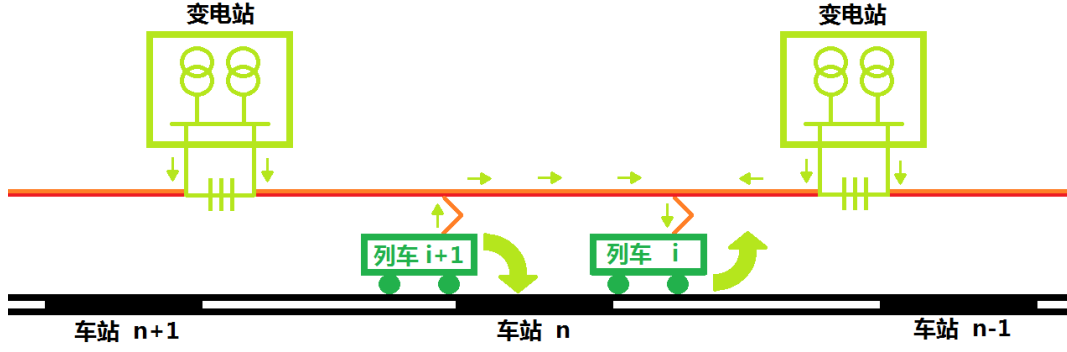


图 8 再生能量利用示意图

此过程中机械能的损失量为：

$$E_{\text{mech}} = \int \left[\frac{B[v(t)]}{Mg} + \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right] Mg v \, dt$$

式中：\$E_{\text{mech}}\$——列车机械能的损失量（J/kJ）。制动过程中为克服基本阻力和附加阻力所做的功为：

$$E_f = \int \left(Mg \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) v \, dt$$

式中：\$E_f\$——制动过程中为克服基本阻力和附加阻力所做的功（J/kJ）。此过程中产生的再生能量为：

$$E_{\text{reg}} = \int B[v(t)] v \cdot 95\% \, dt$$

式中：\$E_{\text{reg}}\$——再生能量（J/kJ）。被利用了的再生能量 \$E_{\text{used}}\$ 可按照以下假设的公式计算

$$E_{\text{used}} = \int B[v(t)] v \times 95\% \times t_{i \text{ overlap}}^j / t_{i+1 \text{ break}}^j \, dt$$

其中，\$t_{i \text{ overlap}}^j\$ 表示第 \$i+1\$ 辆列车制动时间与第 \$i\$ 辆列车加速时间在第 \$j\$ 站的重叠时间，\$t_{i \text{ break}}^j\$ 表示第 \$i\$ 辆列车在第 \$j\$ 站的制动时间。即：

$$E_{\text{used}} = \int \left(\frac{dv}{gdt} - \left(A + Bv + Cv^2 + i + \frac{c}{R} \right) / 1000 \right) Mg v \times 95\% \times t_{i \text{ overlap}}^j / t_{i+1 \text{ break}}^j \, dt$$

因此，为了让列车在运行过程中最节能，那么在此期间需产生最多的再生能量，即

$$\max E_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{m-1} E_{i \text{ used}}^j \quad (5.3)$$

其中 \$E_i^j\$ 表示第 \$i\$ 辆列车在第 \$j\$ 站得到的再生能量。

为了更好地表示重叠时间 \$t_{i \text{ overlap}}^j\$，设 \$d_i^{(j)+}\$ 表示第 \$i\$ 辆列车在第 \$j\$ 站的加速末端时

刻， ta_i^j 表示第 i 辆列车从第 j 站到第 $j+1$ 站的加速时间，则为 $d_i^{(j)+} = d_i^j + ta_i^j$ ；

设 $a_i^{(j)-}$ 表示第 i 辆列车在第 j 站的制动初始时刻， tb_i^j 表示第 i 辆列车从第 j 站到第 $j+1$ 站的制动时间，则为 $a_i^{(j)-} = a_i^j - tb_i^j$ ，如图 9 所示。

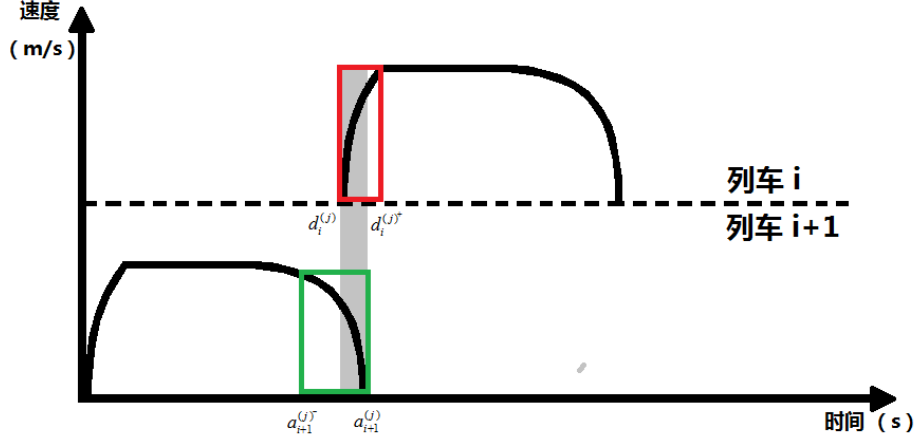


图 9^[4] 相邻列车时刻表

上图中绿色部分是第 $i+1$ 辆列车制动时间段 $tb_i^j = a_i^j - a_i^{(j)-}$ ，红色部分是第 i 辆列车加速时间段 $ta_i^j = d_i^{(j)+} - d_i^j$ ，灰色部分是第 $i+1$ 辆列车制动时间与第 i 辆列车加速时间在第 j 站的重叠时间段 $t_{i overlap}^j$ 满足下列分段形式：

$$t_{i overlap}^j = \begin{cases} 0, & a_{i+1}^j < d_i^j \\ \min(tb_{i+1}^j, a_{i+1}^j - d_i^j), & a_{i+1}^{(j)-} \leq d_i^j \leq a_{i+1}^j \leq d_i^{(j)+} \end{cases}$$

则第 i 辆列车在第 j 车站的制动时间 $t_{i break}^j$ 表示为

$$t_{i break}^j = a_i^j - a_i^{(j)-}$$

因此，式子 (5.2) 可写成

$$\begin{aligned} \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{m-1} E_{i used}^j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{a_{i+1}^{(j)-}}^{a_{i+1}^j} B[v(t)] v \times 95\% \times t_{i overlap}^j / t_{i+1 break}^j dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

结合式子 (5.1) 和 (5.3)，建立双目标优化模型的目标函数：

$$\begin{aligned} \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_{i+1}^{j+1}} F[v(t)] v(t) dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{a_{i+1}^{(j)-}}^{a_{i+1}^j} B[v(t)] v \times 95\% \times t_{i overlap}^j / t_{i+1 break}^j dt \end{aligned}$$

设每辆列车从起点站到终点站的总运行公里数为 S ，则

$$S = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_i^{j+1}} v(t) dt \quad (i=1,2,\dots,n)$$

设第 i 辆列车在第 j 个车站的停站时间为 $D_i^j = d_i^j - a_i^j$ ，列车在中间各个车站停站最少 D_{\min} 秒，最多 D_{\max} 秒，则

$$D_{\min} \leq D_i^j \leq D_{\max}, \quad \text{即 } D_{\min} \leq d_i^j - a_i^j \leq D_{\max} \quad (i=1,3,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1)$$

设第 i 辆列车与第 $i+1$ 辆列车在起点站台的发车间隔为 $h_i = d_{i+1}^1 - d_i^1$ ，第一辆列车发车时间和最后一辆列车的发车时间间隔为 T_0 ，则

$$\sum_{i=1}^{m-1} h_i = T_0, \quad \text{即 } \sum_{i=1}^{m-1} d_{i+1}^1 - d_i^1 = T_0$$

设 n 辆列车的间隔为 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ ，要求间隔 H 各分量的变化范围为 H_{\min} 秒至 H_{\max} 秒，则

$$H_{\min} \leq h_i \leq H_{\max}, \quad \text{即 } H_{\min} \leq d_{i+1}^1 - d_i^1 \leq H_{\max}$$

设每辆列车从起点站到终点站的总运行时间均为 T （包括停站时间），则

$$\sum_{j=1}^{m-1} (D_i^j + T_i^j) = T, \quad \text{即 } \sum_{j=1}^{m-1} (d_i^j - a_i^j + a_i^{j+1} - d_i^j) = \sum_{j=1}^{m-1} (a_i^{j+1} - a_i^j) = T$$

列车追踪运行时，为保证安全，跟踪列车（后车）速度不能超过限制速度 V_{limit} ，以免后车无法及时制动停车，发生追尾事故。其计算方式为 $V_{\text{limit}} = \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e})$ ，其中， V_{\max} 是列车当前位置的线路限速（km/h）， L 是当前时刻前后车之间的距离（m）， B_e 是列车制动的最大减速度（m/s²）。则列车的速度要求为

$$v \leq \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e})$$

由于列车从站台出发或到达站台的速度均为 0。因此，边界条件为

$$v(0) = v(d_i^j) = v(a_i^j) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

结合模型二的中加速度、牵引力和制动力的约束条件^[5]，建立多列车多站台的节能控制双目标优化模型。

模型三

$$\min E_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_i^{j+1}} F[v(t)] v(t) dt$$

$$\max E_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{a_{i+1}^{(j)-}}^{a_i^j} B[v(t)] v \times 95\% \times t_{i \text{ overlap}}^j / t_{i+1 \text{ break}}^j dt$$

$$s.t. \begin{cases} S = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_i^{j+1}} v(t) dt \quad (i=1,2,\dots,n) \\ D_{\min} \leq d_i^j - a_i^j \leq D_{\max} \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1) \\ \sum_{i=1}^{m-1} d_{i+1}^1 - d_i^1 = T_0 \\ H_{\min} \leq d_{i+1}^1 - d_i^1 \leq H_{\max} \\ \sum_{j=1}^{m-1} (a_i^{j+1} - a_i^j) = T \\ v(t) \leq \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e}) \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0,1] \\ B[v(t)] \leq B_{\max} \\ v(0) = v(d_i^j) = v(a_i^j) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

其中,

E_1 —列车在运行时间的总耗能

E_2 —列车在运行时间中再生能量利用的总能量

T_0 —第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间间隔

B_e —列车制动的最大减速度

L —当前时刻前后车之间的距离

d_i^j —第 i 辆列车从第 j 个站台出发的时刻

a_i^j —第 i 辆列车达到第 $j+1$ 个站台的时刻

$d_i^{(j)+}$ —第 i 辆列车在第 j 站的加速终止时刻

$a_i^{(j)-}$ —第 i 辆列车在第 j 站的制动初始时刻

$t_{i \text{ break}}^j$ —第 i 辆列车在第 j 车站的制动时间段

$t_{i \text{ overlap}}^j$ —第 $i+1$ 辆列车制动时间与第 i 辆列车加速时间在第 j 站的重叠时间段

D_i^j —第 i 辆列车在 j 车站的停站时间, D_{\min} 为最小停站时间, D_{\max} 为最大停站时间

h_i —第 i 辆与 $i+1$ 辆列车的间隔时间, H_{\min} 为最小间隔时间, H_{\max} 为最大间隔时间

$v(t)$ — t 时刻的速度, V_{\max} 表示限速, 初始时刻速度 $v(0)=0$, $v(d_i^j)=0$, 终止时刻

速度 $v(a_i^j)=0$

其余变量的含义与模型一中相应变量一致。

根据问题要求, 寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ 。因此, 将以 h_i 为间接变量的模型三等价转换为以 h_i 为决策变量的**模型四**。

模型四

$$\begin{aligned}
 \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_0^{T_i^j} F[v(t)]v(t)dt \\
 \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_0^{t_{i+1}^{jbreak}} B[v(t)]v \times 95\% \times t_{i \text{ overlap}}^j / t_{i+1}^{jbreak} dt \\
 s.t. &\begin{cases}
 S = \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^{T_i^j} v(t)dt \quad (i=1,2,\dots,n) \\
 D_{\min} \leq D_i^j \leq D_{\max} \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1) \\
 \sum_{i=1}^{m-1} h_i = T_0 \\
 H_{\min} \leq h_i \leq H_{\max} \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\
 \sum_{j=1}^{m-1} (D_i^j + T_i^j) = T \\
 v(t) \leq \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e}) \\
 |a(t)| \leq a_{\max} \\
 F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0,1] \\
 B[v(t)] \leq B(v)_{\max} \\
 v(0) = v(T_i^j) = v(D_i^j + T_i^j) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1)
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

其中,

T_i^j —第*i*辆列车从第*j*车站到第*j+1*车站运行的总时间

h_i —第*i*辆与*i+1*辆列车的间隔时间, H_{\min} 为最小间隔时间, H_{\max} 为最大间隔时间

$v(t)$ —*t*时刻的速度, V_{\max} 表示限速, 初始时刻速度 $v(0)=0$, $v(D_i^j + T_i^j)=0$, 终止时刻速度 $v(T_i^j)=0$

其余变量的含义与模型三中相应变量一致。

(2) 模型求解

对于问题一中的单目标非线性优化模型, 尚且不易直接求得最优解, 基于模型二的双目标非线性优化模型已经被证明属于 NP 难问题^[8], 因此, 需要采用启发式算法获取最优解。针对模型三, 主要优化对象是列车的发车间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$, 间接地优化对象有站台间的运行时间 T_i^j , 站台的停歇时间 D_i^j 等。本文采用遗传算法^[6], 对变量站台间的运行时间 T_i^j , 站台的停歇时间 D_i^j 进行优化, 达到最终优化的列车发车时间间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$, 使得所有运行列车的总耗能最低。多站间节能优化遗传算法具体步骤如下:

算法 5.3 多站间节能优化遗传算法

Step 1: 初始化操作, 设定个体长度 T_i^j , D_i^j , h_i 的种群大小 N

Step 2: 初始化最大遗传代数 $MAXGEN$, 设置参数: 令遗传代数追踪量 $i=0$, 交叉概率为 px , 变异概率为 pm

Step 3: 计算适应度。以目标函数作为适应度函数, 计算每个个体的适应度, 确定个体的优劣

Step 4: 令 $i=i+1$, 若 $f_i > MAXGEN$, 那么跳出并输出最优个体 T_i^j , D_i^j , h_i

Step 5: 遗传, 采用有轮赌盘法, 以概率 $p_j = F_j / \sum_{j=1}^N F_j$ 选择偶数个亲代个体并随机配对

Step 6: 交叉, 随机交叉亲代每对个体的基因, 使之成为两个子代个体, 形成新种群

Step 7: 变异, 在新种群中随机选择第 k 个个体, 按公式进行对该个体的第 j 位基因的变异操作。

$$a = \begin{cases} a_{kj} + (a_{kj} - a_{\max}) \times f(i), & r \geq 0.5 \\ a_{kj} + (a_{\min} - a_{kj}) \times f(i), & r < 0.5 \end{cases}$$

其中 a_{\max} 是基因 a_{kj} 的上界, a_{\min} 是基因 a_{kj} 的下界; $f(g) = r_2(1 - g / MAXGEN)^2$, r_2 是一个随机数, r 为 $[0,1]$ 区间的随机数。转 Step3。

(3) 模型结果

针对双目标优化模型四, 相关参数信息如表 5 所示。

表 5 模型四参数信息表

列车数 n	100
车站数 m	14
列车基本阻力参数 A	2.031
列车基本阻力参数 B	0.0622
列车基本阻力参数 C	0.001807
最大加速度 (米/秒 ²)	1
最大减速度 (米/秒 ²)	1
最小停站时间 D_{\min} (秒)	30
最大停站时间 D_{\max} (秒)	45
第一列列车和最后一列列车的发车间隔 T_0 (秒)	63900
从起始站到终点站的总运行时间 T (秒)	2086

首先统计 A_1 到 A_{14} 两两站间的距离，坡度，限速及曲率等信息，距离结果如表 6 所示。

表 6 A_1 到 A_{14} 两两站间的距离参数

站台间	A1-A2	A2-A3	A3-A4	A4-A5	A5-A6	A6-A7	A7-A8
距离 (m)	1334	1286	2086	2265	2338	1354	1280
站台间	A8-A9	A9-A10	A10-A11	A11-A12	A12-A13	A13-A14	
距离 (m)	1538	993	1982	2366	1275	2631	

由表可知，站台间的距离并非均匀分布，结合整理的坡度信息，得到 A_1 到 A_{14} 站间的道路情况，如图 10 所示。

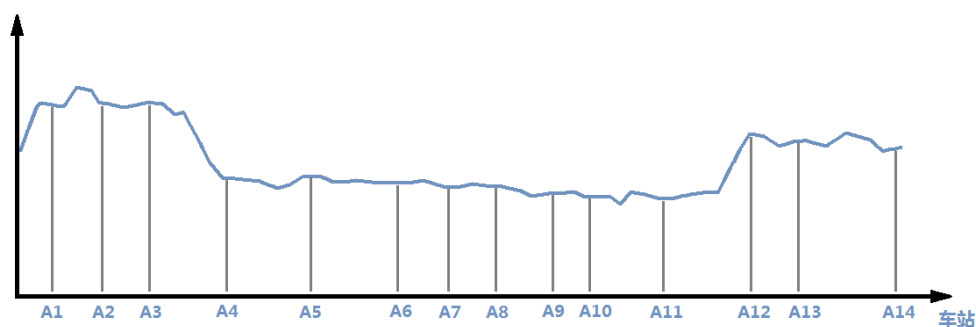
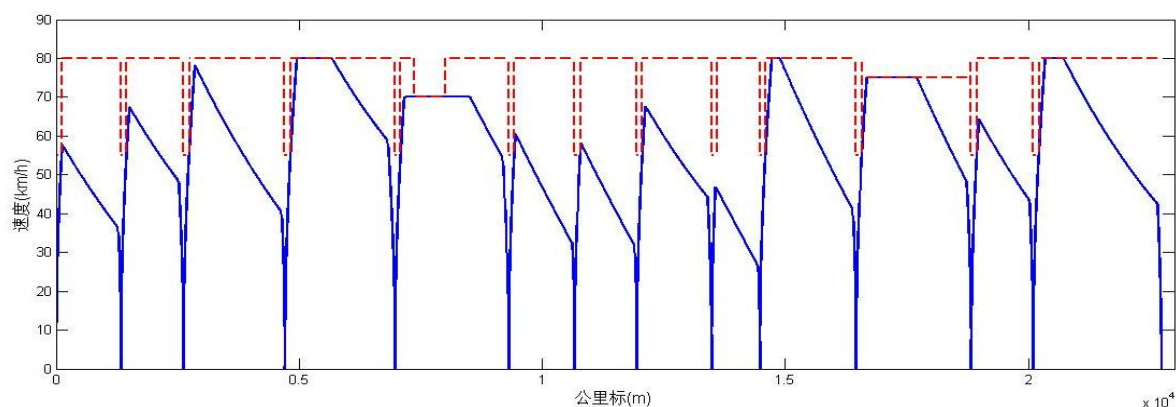
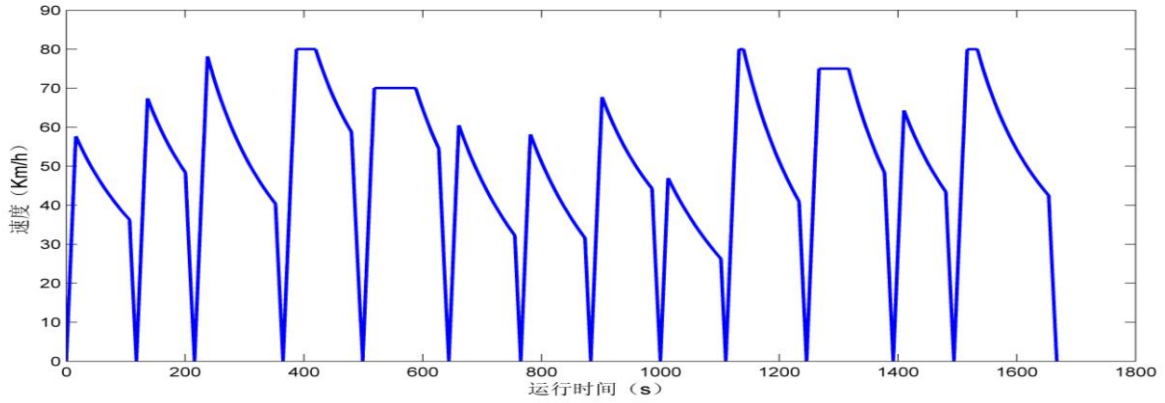


图 10 A_1 到 A_{14} 站间的道路情况

由上图可知，列车从 A_1 到 A_{14} 道路平稳度不一。运用 MATLAB 优化工具箱编程实现算法 5.3，得到单辆列车经过 14 个站的速度距离曲线图和速度时间曲线图，如图 11 所示。



(a) 速度距离曲线图



(b) 速度时间曲线图

图 11 单辆列车经过 14 个站的速度距离曲线图和速度时间曲线图

从图 11 中可知，优化后的列车经过每一站，其速度距离图大部分共经历 3 个阶段，即牵引、惰行和制动。只有少数车站间会因为距离较长，坡度较大或曲率较大，会经历 4 个阶段，即牵引、巡航、惰行和制动。进一步得到 100 列列车的发车间隔时间如表 7 所示。

表 7 100 列列车的发车间隔时间（分）

列车	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}
间隔	11.77	9.44	12.24	10.05	8.97	9.81	11.36	11.48	10.58	10.71	11.06
列车	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}	h_{17}	h_{18}	h_{19}	h_{20}	h_{21}	h_{22}
间隔	8.96	9.84	8.59	9.97	11.37	11.14	12.71	10.59	8.27	12.11	11.71
列车	h_{23}	h_{24}	h_{25}	h_{26}	h_{27}	h_{28}	h_{29}	h_{30}	h_{31}	h_{32}	h_{33}
间隔	9.84	10.65	11.20	10.81	11.12	10.31	10.39	10.51	9.63	11.85	10.43
列车	h_{34}	h_{35}	h_{36}	h_{37}	h_{38}	h_{39}	h_{40}	h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}
间隔	11.11	9.57	9.35	10.33	10.17	11.62	11.03	10.96	8.98	9.46	10.63
列车	h_{45}	h_{46}	h_{47}	h_{48}	h_{49}	h_{50}	h_{51}	h_{52}	h_{53}	h_{54}	h_{55}
间隔	10.08	11.71	11.76	9.84	11.30	11.82	10.74	12.05	11.49	10.64	11.30
列车	h_{56}	h_{57}	h_{58}	h_{59}	h_{60}	h_{61}	h_{62}	h_{63}	h_{64}	h_{65}	h_{66}
间隔	10.62	10.01	10.78	10.46	10.06	12.19	10.65	13.15	10.13	10.99	12.01
列车	h_{67}	h_{68}	h_{69}	h_{70}	h_{71}	h_{72}	h_{73}	h_{74}	h_{75}	h_{76}	h_{77}
间隔	13.15	10.73	9.63	11.23	9.10	10.15	10.70	11.91	11.86	10.40	11.35
列车	h_{78}	h_{79}	h_{80}	h_{81}	h_{82}	h_{83}	h_{84}	h_{85}	h_{86}	h_{87}	h_{88}
间隔	10.10	11.08	12.34	10.58	10.12	9.92	11.14	11.76	12.55	10.48	10.59
列车	h_{89}	h_{90}	h_{91}	h_{92}	h_{93}	h_{94}	h_{95}	h_{96}	h_{97}	h_{98}	h_{99}
间隔	9.79	12.04	10.35	9.95	12.61	11.23	11.14	9.42	10.86	10.94	9.33

由表可知，最短发车间隔时间为 $h = 8.27$ 分，最长发车间隔时间为 $h = 13.15$ 分，总耗能 $E_{\min} = 1.6963 \times 10^8 J$ 。根据每辆列车的发车时间和优化的站台停歇时间 D_i^j 和站台间运行时间 T_i^j ，可得到 100 列列车的发车时间表。此处，列举第 1 辆列车的发车时间及关键时间节点，如表 8 所示。

表 8 第 1 辆列车的发车时间及关键时间节点

站台	A1 站	A2 站	A3 站	A4 站	A5 站	A6 站	A7 站
第 1 辆车到站时刻 (s)	0	220	358	545	710	835	979
第 1 辆车停留时间 (s)	30	30	30	30	35	30	30
第 1 辆车离站时刻 (s)	30	250	388	575	745	865	1009
站台	A8 站	A9 站	A10 站	A11 站	A12 站	A13 站	A14 站
第 1 辆车到站时刻 (s)	1112	1246	1440	1620	1790	1927	2086
第 1 辆车停留时间 (s)	30	30	30	30	35	45	—
第 1 辆车离站时刻 (s)	1142	1276	1470	1650	1825	1972	—

5.3.2 高峰与非高峰时段优化模型建立与求解

(1) 模型建立

同样是建立优化模型寻找使所有列车运行总耗能最低的间隔 H ，从而制定列车运行图。因此，依然以列车运行节能控制优化和再生能量优化建立双目标优化函数，如下所示。

$$\begin{aligned} \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_{d_i^j}^{a_i^{j+1}} F[v(t)]v(t)dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{a_{i+1}^{(j)-}}^{a_{i+1}^j} B[v(t)]v \times 95\% \times t_{i \text{ overlap}}^j / t_{i+1 \text{ break}}^j dt \end{aligned}$$

应市场要求和乘客需求，高峰期和非高峰期的发车间隔有所不同^[9]，第 i 辆列车与第 $i+1$ 辆列车在起点站台的发车间隔为 $h_i = d_{i+1}^1 - d_i^1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)。假设早高峰时间段从 tm_1 至 tm_2 ，晚高峰时间段从 tn_1 至 tn_2 。在 n 列火车中，设第 l_1 辆列车是进入早高峰段的第一辆列车；第 l_2 辆列车是进入早高峰段的最后一辆列车；第 l_3 辆列车是进入晚高峰段的第一辆列车；第 l_4 辆列车是进入晚高峰段的最后一辆列车，则 l_1, l_2, l_3 和 l_4 满足下列式子：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l_1-2} (d_{i+1}^1 - d_i^1) < tm_1 \leq \sum_{i=1}^{l_1-1} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \\ \sum_{i=1}^{l_2-1} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \leq tm_2 < \sum_{i=1}^{l_2} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \\ \sum_{i=1}^{l_3-2} (d_{i+1}^1 - d_i^1) < tn_1 \leq \sum_{i=1}^{l_3-1} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \\ \sum_{i=1}^{l_4-1} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \leq tn_2 < \sum_{i=1}^{l_4} (d_{i+1}^1 - d_i^1) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

设在高峰期时间的发车间隔变化范围是 H_{\min}^1 秒至 H_{\max}^1 秒，则

$$H_{\min}^1 \leq d_{i+1}^1 - d_i^1 \leq H_{\max}^1 \quad (i = l_1, l_1 + 1, \dots, l_2, l_3, l_3 + 1, \dots, l_4)$$

设在非高峰时间的发车间隔变化范围是 H_{\min}^2 秒至 H_{\max}^2 秒，则

$$H_{\min}^2 \leq d_{i+1}^1 - d_i^1 \leq H_{\max}^2 \quad (i=1,2,\dots,l_1,l_4,l_4+1,\dots,n-1)$$

结合模型四中的约束条件，加以改进，以 h_i 为决策变量，建立多列车多站台高峰与非高峰时段的节能控制双目标优化模型。

$$\begin{aligned} \text{模型五} \quad \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_0^{T_i^j} F[v(t)]v(t)dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_0^{t_{i+1}^{j\text{break}}} B[v(t)]v \times 95\% \times t_{i\text{overlap}}^j / t_{i+1}^{j\text{break}} dt \\ s.t. \quad &\begin{cases} S = \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^{T_i^j} v(t)dt \quad (i=1,2,\dots,n) \\ D_{\min} \leq D_i^j \leq D_{\max} \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1) \\ \sum_{i=1}^{m-1} h_i = T_0 \\ H_{\min}^1 \leq h_i \leq H_{\max}^1 \quad (i=l_1,l_1+1,\dots,l_2,l_3,l_3+1,\dots,l_4) \\ H_{\min}^2 \leq h_i \leq H_{\max}^2 \quad (i=1,2,\dots,l_1,l_4,l_4+1,\dots,n-1) \\ \sum_{j=1}^{m-1} (D_i^j + T_i^j) = T \\ v(t) \leq \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e}) \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ F[v(t)] = \mu F_{\max}, \mu \in [0,1] \\ B[v(t)] \leq B_{\max} \\ v(0) = v(T_i^j) = v(D_i^j + T_i^j) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n; j=2,3,\dots,m-1) \end{cases} \end{aligned}$$

其中，

h_i —第 i 辆与第 $i+1$ 辆列车的间隔时间， H_{\min}^1 为早高峰最小间隔时间， H_{\max}^1 为早高峰最大间隔时间， H_{\min}^2 为晚高峰最小间隔时间， H_{\max}^2 为晚高峰最大间隔时间

l_1 —表示第 l_1 辆列车是进入早高峰段的第一辆列车

l_2 —表示第 l_2 辆列车是进入早高峰段的最后一辆列车

l_3 —表示第 l_3 辆列车是进入晚高峰段的第一辆列车

l_4 —表示第 l_4 辆列车是进入晚高峰段的最后一辆列车

其余变量的含义与模型四中相应变量一致。

(2) 模型求解

在模型四的基础上，同样采用启发式算法获取最优解。针对模型五，主要是根据高

峰时间段与非高峰时间段，对列车的发车间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ 进行优化，间接地优化对象有站台间的运行时间 T_i^j ，站台的停歇时间 D_i^j 等。模型五继续采用遗传算法，首先对四个参数 l_1 至 l_4 进行离散优化，然后再对变量站台间的运行时间 T_i^j ，站台的停歇时间 D_i^j 进行优化，达到最终优化的列车发车间隔 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ ，使得所有运行列车的总耗能最低。高峰时段与非高峰时段优化遗传算法^[12]具体步骤如下：

算法 5.4 高峰时段与非高峰时段优化遗传算法

- Step 1: 初始化操作，设定个体长度 T_i^j ， D_i^j ， h_i 的种群大小 N
- Step 2: 离散化参数 l_1 、 l_2 、 l_3 和 l_4 ，将其分为 L 个区间
- Step 3: 令 $k = 1$ ， $l_1 = l_1^k$
- Step 4: 重复算法 5.3 中的 Step2-Step7，得到最少耗能 E_1^l
- Step 5: 令 $k = k + 1$ ，若 $k \leq L$ ，返回 Step3
- Step 6: 得到最终最少耗能 $E_{\min} = \min(E_1^l, E_2^l, \dots, E_L^l)$
-

(3) 模型结果

针对双目标优化模型五，相关参数信息由表 9 所示。

表 9 双目标优化模型参数信息表

列车数 n	240
车站数 m	14
列车基本阻力参数 A	2.031
列车基本阻力参数 B	0.0622
列车基本阻力参数 C	0.001807
最大加速度 (米/秒 ²)	1
最大减速度 (米/秒 ²)	1
最小停站时间 D_{\min} (秒)	30
最大停站时间 D_{\max} (秒)	45
第一列列车和最后一列列车的发车间隔 T_0 (秒)	63900
从起始站到终点站的总运行时间 T (秒)	2086
早高峰时间起点 tm_1 (秒)	7200
早高峰时间末点 tm_2 (秒)	12600
晚高峰时间起点 tn_1 (秒)	43200
晚高峰时间末点 tn_2 (秒)	50400
高峰时间发车间隔下限 H_{\min}^1 (分钟)	2
高峰时间发车间隔上限 H_{\max}^1 (分钟)	2.5
非高峰时间发车间隔下限 H_{\min}^1 (分钟)	5
非高峰时间发车间隔上限 H_{\max}^1 (分钟)	INF

运用 MATLAB 优化工具箱编程实现算法 5.4, 得到 240 列列车中前 100 列列车的发车间隔时间如表 10 所示。

表 10 100 列列车的发车间隔时间 (分)

列车 间隔	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}
	11.77	2.46	2.24	2.27	2.13	2.20	2.23	2.45	2.35	2.50	2.34
列车 间隔	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}	h_{17}	h_{18}	h_{19}	h_{20}	h_{21}	h_{22}
	2.43	2.14	2.09	2.17	2.22	2.47	2.33	10.59	8.27	12.11	11.71
列车 间隔	h_{23}	h_{24}	h_{25}	h_{26}	h_{27}	h_{28}	h_{29}	h_{30}	h_{31}	h_{32}	h_{33}
	9.84	10.65	11.20	10.81	11.12	10.31	10.39	10.51	9.63	11.85	10.43
列车 间隔	h_{34}	h_{35}	h_{36}	h_{37}	h_{38}	h_{39}	h_{40}	h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}
	11.11	9.57	9.35	10.33	10.17	11.62	11.03	10.96	8.98	9.46	10.63
列车 间隔	h_{45}	h_{46}	h_{47}	h_{48}	h_{49}	h_{50}	h_{51}	h_{52}	h_{53}	h_{54}	h_{55}
	10.08	11.71	11.76	9.84	11.30	11.82	10.74	12.05	11.49	10.64	11.30
列车 间隔	h_{56}	h_{57}	h_{58}	h_{59}	h_{60}	h_{61}	h_{62}	h_{63}	h_{64}	h_{65}	h_{66}
	10.62	10.01	10.78	10.46	10.06	12.19	10.65	13.15	10.13	10.99	12.01
列车 间隔	h_{67}	h_{68}	h_{69}	h_{70}	h_{71}	h_{72}	h_{73}	h_{74}	h_{75}	h_{76}	h_{77}
	2.30	2.41	2.31	2.33	2.49	2.34	2.06	2.45	2.38	2.41	2.21
列车 间隔	h_{78}	h_{79}	h_{80}	h_{81}	h_{82}	h_{83}	h_{84}	h_{85}	h_{86}	h_{87}	h_{88}
	2.26	11.08	12.34	10.58	10.12	9.92	11.14	11.76	12.55	10.48	10.59
列车 间隔	h_{89}	h_{90}	h_{91}	h_{92}	h_{93}	h_{94}	h_{95}	h_{96}	h_{97}	h_{98}	h_{99}
	9.79	12.04	10.35	9.95	12.61	11.23	11.14	9.42	10.86	10.94	9.33

由表可知, 最短发车间隔时间为 $h=2.06$ 分, 最长发车间隔时间为 $h=11.82$ 分, 总耗能 $E_{\min}=1.7983 \times 10^8 J$ 。根据每辆列车的发车时间和优化的站台停歇时间 D_i^j 和站台间运行时间 T_i^j , 可得到 240 列列车的发车时间表。此处, 列举第 10 辆列车的发车时间及关键时间节点, 如表 11 所示。

表 11 第 10 辆列车的发车时间及关键时间节点

站台	A1 站	A2 站	A3 站	A4 站	A5 站	A6 站	A7 站
第 1 辆车到站时刻 (s)	0	220	358	545	710	835	979
第 1 辆车停留时间 (s)	30	30	30	30	35	30	30
第 1 辆车离站时刻 (s)	30	250	388	575	745	865	1009
站台	A8 站	A9 站	A10 站	A11 站	A12 站	A13 站	A14 站
第 1 辆车到站时刻 (s)	1112	1246	1440	1620	1790	1927	2086
第 1 辆车停留时间 (s)	30	30	30	30	35	45	—
第 1 辆车离站时刻 (s)	1142	1276	1470	1650	1825	1972	—

相应的速度距离曲线为如图 13 所示。

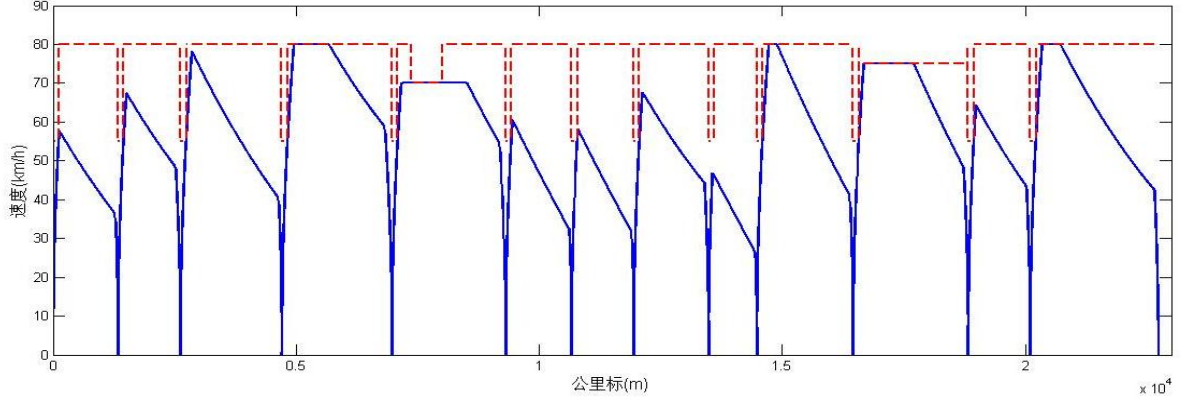


图 13 高峰期速度距离曲线图

5.4 问题 3 列车延误运行优化模型建立与求解

5.4.1 延误控制优化模型的建立与求解

(1) 模型建立

设 DT_i^j 是第 i 辆列车在第 j 站的延误时间， d_i^j 第 i 辆列车在第 j 站的计划出发时间，则第 i 辆列车在第 j 站的实际出发时间为

$$Dr_i^j = d_i^j + DT_i^j$$

设 A_i^j 表示第 i 辆列车在第 j 站的实际到达时间， $A_i^{(j)-}$ 表示第 i 辆列车在第 j 站的实际制动初始时刻， $D_i^{(j)+}$ 表示第 i 辆列车在第 j 站的实际加速末端时刻， Ta_i^j 表示第 i 辆列车从第 j 站到第 $j+1$ 站的实际加速时间，则为 $D_i^{(j)+} = D_i^j + Ta_i^j$ ， Tb_i^j 表示第 i 辆列车从第 j 站到第 $j+1$ 站的实际制动时间，则为 $A_i^{(j)-} = A_i^j - Tb_i^j$ 。

首先在确保安全的前提下，使所有后续列车尽快恢复正点运行，即

$$\min DT_{sum} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m DT_i^j \quad (5.4)$$

其次使得恢复期间耗能最少，即列车运行耗能最少以及再生能量利用最多，则

$$\begin{aligned} \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_{D_i^j}^{A_{i+1}^{j+1}} F[v(t)]v(t)dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{A_{i+1}^{(j)-}}^{A_{i+1}^j} B[v(t)]v \times 95\% \times T_{i \text{ overlap}}^j / T_{i+1 \text{ break}}^j dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中， $T_{i \text{ overlap}}^j$ 满足下列分段形式：

$$T_{i \text{ overlap}}^j = \begin{cases} 0, A_{i+1}^j < Dr_i^j \\ \min(Tb_{i+1}^j, A_{i+1}^j - Dr_i^j), A_{i+1}^{(j)-} \leq Dr_i^j \leq A_{i+1}^j \leq D_i^{(j)+} \end{cases}$$

第 i 辆列车在第 j 车站的制动时间 $T_{i \text{ break}}^j$ 表示为

$$T_{i\ break}^j = A_i^j - A_i^{(j)-}$$

由式子 (5.4) 和式子 (5.5), 可以得到列车延误多目标函数如下:

$$\begin{aligned}\min DT_{sum} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m DT_i^j \\ \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_{Dr_i^j}^{A_i^{j+1}} F[v(t)]v(t) dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_{A_{i+1}^{(j)-}}^{A_{i+1}^j} B[v(t)]v \times 95\% \times T_{i\ overlap}^j / T_{i+1\ break}^j dt\end{aligned}$$

结合模型五中的约束条件, 加以改进, 以 h_i 为直接变量, 得到列车延误运行控制多目标优化模型。

模型六

$$\begin{aligned}\min DT_{sum} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m DT_i^j \\ \min E_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{m-1} \int_0^{Tr_i^j} F[v(t)]v(t) dt \\ \max E_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^m \int_0^{T_{i+1\ break}^j} B[v(t)]v \times 95\% \times T_{i\ overlap}^j / T_{i+1\ break}^j dt \\ s.t. \left\{ \begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^{Tr_i^j} v(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ H_{\min}^1 &\leq h_i + DT_{i+1}^1 - DT_i^1 \leq H_{\max}^1 \quad (i=l_1, l_1+1, \dots, l_2, l_3, l_3+1, \dots, l_4) \\ H_{\min}^2 &\leq h_i + DT_{i+1}^1 - DT_i^1 \leq H_{\max}^2 \quad (i=1, 2, \dots, l_1, l_4, l_4+1, \dots, n-1) \\ D_{\min} &\leq D_i^j \leq D_{\max} \quad (i=1, 3, \dots, n; j=2, 3, \dots, m-1) \\ \sum_{i=1}^{m-1} (h_i + DT_{i+1}^1 - DT_i^1) &= T_0 \\ \sum_{j=1}^{m-1} (D_i^j + Tr_i^j) &= T \\ v(t) &\leq \min(V_{\max}, \sqrt{2LB_e}) \\ |a| &\leq a_{\max} \\ F[v(t)] &= \mu F_{\max}, \mu \in [0, 1] \\ B &\leq B_{\max} \\ v(0) &= v(Tr_i^j) = v(Tr_i^j + D_i^j) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ P\{0 < DT_i^j < 10\} &= 0.2 \\ P\{10 < DT_i^j < 120\} &= 0.1 \\ P\{DT_i^j = 0\} &= 0.7 \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

其中,

Tr_i^j —第 i 辆列车从第 j 站到第 $j+1$ 站运行的实际时间

$T_{i\ break}^j$ —第 i 辆列车在第 j 车站的实际制动时间段

$T_{i\ overlap}^j$ —第 $i+1$ 辆列车制动时间与第 i 辆列车加速时间在第 j 站的实际重叠时间段

$v(t)$ — t 时刻的速度, V_{\max} 表示限速, 初始时刻速度 $v(0)=0$, $v(Tr_i^j + D_i^j)=0$, 终止时刻速度 $v(Tr_i^j)=0$

其余变量的含义与模型五中相应变量一致。

(2) 模型求解

基于模型六, 在模型五的基础上再次拓展为多目标非线性优化, 且延误时间 DT_i^j 是随机变量。因此, 需要借助于问题 2 中的数据仿真, 求解出在恢复期间耗能最少的列车运行曲线, 从而建立列车延误优化模型的蒙特卡罗仿真算法, 具体算法步骤如下。

算法 5.5 列车延误优化模型蒙特卡罗仿真

Step 1: 针对问题 2 中的数据构造或描述统计过程

Step 2: 实现从已知概率分布抽样

Step 3: 建立统计量, 采用遗传算法 5.4 对模型六进行求解。

Step 4: 对模拟结果进行考察验证

Step 5: 依据仿真初结果, 设置相关参数, 或惩罚函数, 返回 Step2

Step 6: 得到最终最少耗能 $E_{\min} = \min(E_1^l, E_2^l, \dots, E_L^l)$

(3) 模型结果

运用 MATLAB 工具箱, 对问题 2 的数据进行蒙特卡罗模拟仿真, 得到 100 辆列车无延迟运行图如图 14 所示。

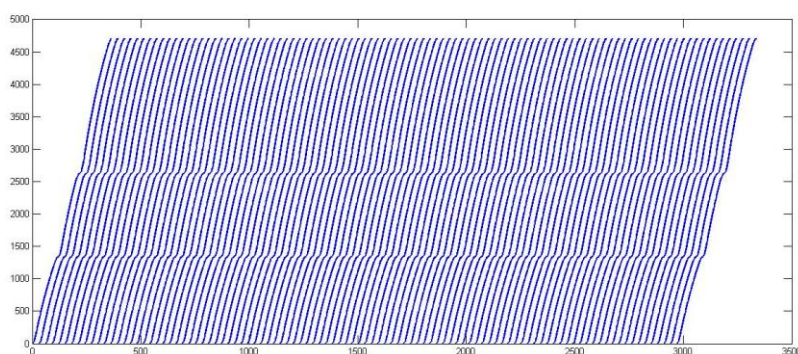


图 14 100 辆列车无延迟列车运行图

由图可知, 五、无延迟的列车按时发车, 呈现良好的列车秩序, 有利于方便和管理列车能源。

6 模型优缺点及其拓展

(1) 模型优点:

问题一中,我们首先根据列车动力学原理建立**模型一:单列车单目标双站间优化模型**,在此基础上,进一步拓展,针对总运行时间一定的情况下建立**模型二:单列车单目标三站间优化模型**。得到了各自最优耗能的速度距离曲线,通过分析运动过程各参数的变化,优化结果非常理想。

问题二中,在问题 1 的基础上,针对多列车追踪运行耗能优化建立基于不同决策变量的**模型三和模型四:多列车双目标节能优化模型**。分析相关的速度距离曲线和速度时间曲线,得到最优的发车时间间隔。针对列车高峰时间段和非高峰时间段,在模型三的基础上,对发车时间间隔进一步优化,建立列车高峰时间段和非高峰时间段优化**模型五:高峰与非高峰时段优化模型**。分析比较模型三和模型四的发车时间间隔和能耗值,侧面验证了模型的可靠性。

问题三中,在问题 2 的基础上,增加了延误时间随机变量 DT_i^j 。因此,在模型四的基础上,增加了总延误时间最少的目标函数,从而建立了**模型六:列车延误运行优化模型**。并根据问题 2 中的数据,运用蒙特卡洛方法进行方法,得到相应的列车运行图。

三个问题均是建立在同一基本目标约束的前提下,层层拓展,从单目标优化到双目标优化,最后到多目标优化,模型可靠且灵活性较高。

(2) 模型缺点:

由于建立的模型均是非线性优化模型,部分甚至属于 NP 难问题,我们针对不同的问题采用不同的算法进行求解,如迭代搜索算法、遗传算法,模拟仿真等等,但对于启发式算法,如遗传算法,毕竟达不到全局最优,因此,还是会有稍许误差。

(3) 模型拓展:

虽然问题中的模型都是优化模型,但是决策变量的选择好坏直接会影响模型的求解,甚至误差。因此,修正模型可以采用类似模型三中的 4 个间接变量进行求解,从而使模型的可行性更好,求解结果误差更低。

7 参考文献

- [1] PHIL, HOWLETT. AN OPTIMAL STRATEGY FOR THE CONTROL OF A TRAIN[J]. Austral. Math, 1990, (31): 454-471
- [2]Rongfang, (Rachel), Liu, Iakov, M, Golovitcher. Energy-efficient operation of rail vehicles[J]. Transportation Research, 2003, (37): 917-923
- [3]Eugene, Khmelnitsky. On an Optimal Control Problem of Train Operation[J]. TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 2000, 45(7): 1257-1265
- [4]Xin, Yang, Xiang, Li, Ziyou, Gao, Hongwei, Wang, and, Tao, Tang. A Cooperative Scheduling Model for Timetable Optimization in Subway Systems[J]. TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS, 2013, 14(1): 438-447
- [5]Shuai, Su, Tao, Tang, Xiang, Li, and, Ziyou, Gao. Optimization of Multitrain Operations in a Subway System[J]. TRANSACTIONS ON INTELLIGENT TRANSPORTATION SYSTEMS, 2014, 15(2): 673-684
- [6]Ning Zhao, Clive Roberts, Stuart Hillmansen, Paul Western, Lei Chen, Zhongbei Tian, Tingyu Xin, Shuai Su. Train Trajectory Optimisation of ATO Systems for Metro Lines. IEEE 17th International Conference on Intelligent Transportation Systems. Qingdao, China. 2014:1796-1801
- [7]杨建荣,李建中,范立础. 车桥耦合振动分析的两种常用插值方法比较. 力学季刊, 2007,28(4):625-630
- [8]周剑斌, 苏浚, 何泳斌. 地铁列车运行再生能利用的研究[J]. 学术专论, 2004, (4): 33-35
- [9]李坤妃, 多列车协同控制节能优化方法的研究[D], 北京交通大学. 2014
- [10]卢启衡, 冯晓云, 王青元. 基于遗传算法的追踪列车节能优化[J]. 西南交通大学学报, 2012, 47(2): 266-27
- [11]栾晓洁, 考虑运输主体公平性的列车运行调整优化模型[D]. 北京交通大学. 2015.
- [12]丁勇, 毛保华, 刘海, 张鑫, 王铁城. 列车节能运行模拟系统的研究[J]. 北方交通大学学报, 2004, 28(2): 46-81
- [13]金炜东, 靳蕃, 李崇维, 胡飞, 苟先太. 列车优化操纵速度模式曲线 生成的智能计算研究[J]. 铁道学报, 1998, 20(5): 47-52
- [14]方宇, 尧辉明, 杨俭. 上海城市轨道交通 2 号线车辆电阻制动能耗计算[R]. 2010. 25-28
- [15]霍建维. 突发事件下的列车运行调整模型与算法[D]. 北京交通大学, 2014.

附录：

附录 1：问题一（1）记录以 1s 间隔期的相关数据

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速度 (m/s ²)	计算距离(m)	计算公里标(m)	当前坡度(‰)	计算牵引力(N)	计算牵引功率(Kw)
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	198162	0.00
1.00	100.00	3.60	1.00	0.50	0.50	0.00	198633	198.64
2.00	200.00	7.20	1.00	2.00	2.00	0.00	199193	398.39
3.00	300.00	10.80	1.00	4.50	4.50	0.00	199842.	599.53
4.00	400.00	14.40	1.00	8.00	8.00	0.00	200581.	802.32
5.00	500.00	18.00	1.00	12.50	12.50	0.00	201408	1007.04
6.00	600.00	21.60	1.00	18.00	18.00	0.00	202325	1213.95
7.00	700.00	25.20	1.00	24.50	24.50	0.00	203331	1423.32
8.00	800.00	28.80	1.00	32.00	32.00	0.00	204426	1635.42
9.00	900.00	32.40	1.00	40.50	40.50	0.00	205611	1850.50
10.00	1000.00	36.00	1.00	50.00	50.00	0.00	206884	2068.85
11.00	1100.00	39.60	1.00	60.50	60.50	0.00	208247	2290.72
12.00	1200.00	43.20	1.00	72.00	72.00	0.00	209699	2516.40
13.00	1300.00	46.80	1.00	84.50	84.50	0.00	211240	2746.13
14.00	1400.00	50.40	1.00	98.00	98.00	0.00	212871	2980.20
15.00	1499.98	54.00	1.00	112.50	112.50	0.00	214590	3218.81
16.00	1584.98	57.06	1.00	127.90	127.90	0.00	216122	3425.49
17.00	1684.98	60.66	1.00	144.25	144.25	0.00	218006	3673.36
18.00	1784.98	64.26	1.00	161.60	161.60	0.00	219980	3926.60
19.00	1832.53	65.97	-0.14	179.83	179.83	0.00	0.00	0.00
20.00	1818.89	65.48	-0.14	198.09	198.09	0.00	0.00	0.00
21.00	1805.38	64.99	-0.13	216.21	216.21	0.00	0.00	0.00
22.00	1792.02	64.51	-0.13	234.20	234.20	0.00	0.00	0.00
23.00	1778.80	64.04	-0.13	252.05	252.05	0.00	0.00	0.00
24.00	1765.71	63.57	-0.13	269.77	269.77	0.00	0.00	0.00
25.00	1752.76	63.10	-0.13	287.36	287.36	0.00	0.00	0.00
26.00	1739.93	62.64	-0.13	304.83	304.83	1.80	0.00	0.00
27.00	1727.24	62.18	-0.13	322.16	322.16	1.80	0.00	0.00
28.00	1714.68	61.73	-0.13	339.37	339.37	1.80	0.00	0.00
29.00	1702.24	61.28	-0.12	356.46	356.46	1.80	0.00	0.00
30.00	1689.93	60.84	-0.12	373.42	373.42	1.80	0.00	0.00
31.00	1677.73	60.40	-0.12	390.26	390.26	1.80	0.00	0.00
32.00	1665.66	59.96	-0.12	406.97	406.97	1.80	0.00	0.00
33.00	1653.71	59.53	-0.12	423.57	423.57	1.80	0.00	0.00
34.00	1641.87	59.11	-0.12	440.05	440.05	1.80	0.00	0.00

35.00	1630.15	58.69	-0.12	456.41	456.41	1.80	0.00	0.00
36.00	1618.54	58.27	-0.12	472.65	472.65	1.80	0.00	0.00
37.00	1607.04	57.85	-0.11	488.78	488.78	1.80	0.00	0.00
38.00	1595.65	57.44	-0.11	504.79	504.79	1.80	0.00	0.00
39.00	1584.37	57.04	-0.11	520.69	520.69	1.80	0.00	0.00
40.00	1573.19	56.63	-0.11	536.48	536.48	1.80	0.00	0.00
41.00	1562.12	56.24	-0.11	552.16	552.16	1.80	0.00	0.00
42.00	1551.15	55.84	-0.11	567.72	567.72	1.80	0.00	0.00
43.00	1540.29	55.45	-0.11	583.18	583.18	1.80	0.00	0.00
44.00	1529.52	55.06	-0.11	598.53	598.53	1.80	0.00	0.00
45.00	1518.86	54.68	-0.11	613.77	613.77	1.80	0.00	0.00
46.00	1508.29	54.30	-0.11	628.91	628.91	1.80	0.00	0.00
47.00	1497.81	53.92	-0.10	643.94	643.94	1.80	0.00	0.00
48.00	1487.43	53.55	-0.10	658.86	658.86	1.80	0.00	0.00
49.00	1477.15	53.18	-0.10	673.69	673.69	1.80	0.00	0.00
50.00	1466.95	52.81	-0.10	688.41	688.41	-3.50	0.00	0.00
51.00	1456.85	52.45	-0.10	703.03	703.03	-3.50	0.00	0.00
52.00	1446.84	52.09	-0.10	717.54	717.54	-3.50	0.00	0.00
53.00	1436.91	51.73	-0.10	731.96	731.96	-3.50	0.00	0.00
54.00	1427.07	51.37	-0.10	746.28	746.28	-3.50	0.00	0.00
55.00	1417.32	51.02	-0.10	760.50	760.50	-3.50	0.00	0.00
56.00	1407.65	50.68	-0.10	774.63	774.63	-3.50	0.00	0.00
57.00	1398.06	50.33	-0.10	788.66	788.66	-3.50	0.00	0.00
58.00	1388.56	49.99	-0.09	802.59	802.59	-3.50	0.00	0.00
59.00	1379.14	49.65	-0.09	816.43	816.43	-3.50	0.00	0.00
60.00	1369.80	49.31	-0.09	830.17	830.17	-3.50	0.00	0.00
61.00	1360.53	48.98	-0.09	843.83	843.83	-3.50	0.00	0.00
62.00	1351.35	48.65	-0.09	857.38	857.38	-3.50	0.00	0.00
63.00	1342.24	48.32	-0.09	870.85	870.85	-3.50	0.00	0.00
64.00	1333.21	48.00	-0.09	884.23	884.23	-3.50	0.00	0.00
65.00	1324.25	47.67	-0.09	897.52	897.52	-3.50	0.00	0.00
66.00	1315.36	47.35	-0.09	910.71	910.71	-3.50	0.00	0.00
67.00	1306.55	47.04	-0.09	923.82	923.82	-3.50	0.00	0.00
68.00	1297.81	46.72	-0.09	936.85	936.85	-3.50	0.00	0.00
69.00	1289.14	46.41	-0.09	949.78	949.78	-3.50	0.00	0.00
70.00	1280.55	46.10	-0.09	962.63	962.63	-3.50	0.00	0.00
71.00	1272.02	45.79	-0.08	975.39	975.39	-3.50	0.00	0.00
72.00	1263.56	45.49	-0.08	988.07	988.07	-3.50	0.00	0.00
73.00	1255.16	45.19	-0.08	1000.66	1000.66	-3.50	0.00	0.00
74.00	1246.83	44.89	-0.08	1013.17	1013.17	-3.50	0.00	0.00

75.00	1238.57	44.59	-0.08	1025.60	1025.60	-3.50	0.00	0.00
76.00	1230.38	44.29	-0.08	1037.94	1037.94	-3.50	0.00	0.00
77.00	1222.24	44.00	-0.08	1050.21	1050.21	-3.50	0.00	0.00
78.00	1214.17	43.71	-0.08	1062.39	1062.39	-3.50	0.00	0.00
79.00	1206.17	43.42	-0.08	1074.49	1074.49	-3.50	0.00	0.00
80.00	1198.22	43.14	-0.08	1086.51	1086.51	-3.50	0.00	0.00
81.00	1190.34	42.85	-0.08	1098.46	1098.46	-3.50	0.00	0.00
82.00	1182.51	42.57	-0.08	1110.32	1110.32	-3.50	0.00	0.00
83.00	1174.75	42.29	-0.08	1122.11	1122.11	-3.50	0.00	0.00
84.00	1167.04	42.01	-0.08	1133.82	1133.82	-3.50	0.00	0.00
85.00	1159.39	41.74	-0.08	1145.45	1145.45	-3.50	0.00	0.00
86.00	1151.80	41.46	-0.08	1157.00	1157.00	-3.50	0.00	0.00
87.00	1144.27	41.19	-0.08	1168.48	1168.48	-3.50	0.00	0.00
88.00	1136.79	40.92	-0.99	1179.89	1179.89	-3.50	0.00	0.00
89.00	1129.37	40.66	-0.98	1191.22	1191.22	-3.50	0.00	0.00
90.00	1122.00	40.39	-0.98	1202.48	1202.48	-3.50	0.00	0.00
91.00	1114.68	40.13	-0.97	1213.66	1213.66	-3.50	0.00	0.00
92.00	1107.42	39.87	-0.96	1224.77	1224.77	-3.50	0.00	0.00
93.00	1100.21	39.61	-0.96	1235.81	1235.81	-3.50	0.00	0.00
94.00	1093.06	39.35	-0.95	1246.77	1246.77	-3.50	0.00	0.00
95.00	1085.95	39.09	-0.94	1257.67	1257.67	-3.50	0.00	0.00
96.00	1078.90	38.84	-0.94	1268.49	1268.49	-3.50	0.00	0.00
97.00	1071.89	38.59	-0.93	1279.25	1279.25	-3.50	0.00	0.00
98.00	1064.94	38.34	-0.92	1289.93	1289.93	-3.50	0.00	0.00
99.00	983.67	35.41	-0.92	1300.22	1300.22	-3.50	0.00	0.00
100.00	892.16	32.12	-0.91	1309.60	1309.60	0.00	0.00	0.00
101.00	801.23	28.84	-0.91	1318.07	1318.07	0.00	0.00	0.00
102.00	710.83	25.59	-0.90	1325.63	1325.63	0.00	0.00	0.00
103.00	620.92	22.35	-0.90	1332.29	1332.29	0.00	0.00	0.00
104.00	531.47	19.13	-0.89	1338.05	1338.05	0.00	0.00	0.00
105.00	442.43	15.93	-0.89	1342.92	1342.92	0.00	0.00	0.00
106.00	353.76	12.74	-0.88	1346.90	1346.90	0.00	0.00	0.00
107.00	265.43	9.56	-0.88	1349.99	1349.99	0.00	0.00	0.00
108.00	177.40	6.39	-0.88	1352.21	1352.21	0.00	0.00	0.00
109.00	89.65	3.23	-0.88	1353.54	1353.54	0.00	0.00	0.00
110.00	0.00	0.00	-0.87	1354.00	1354.00	0.00	0.00	0.00

附录 2：问题一（2）记录以 1s 间隔期的相关数据

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速度 (m/s ²)	计算距离(m)	计算公里标(m)	当前坡度(‰)	计算牵引力(N)	计算牵引功率(Kw)
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	198162	0.00
1.00	100.00	3.60	1.00	0.50	0.50	0.00	198633	198.64
2.00	200.00	7.20	1.00	2.00	2.00	0.00	199193	398.39
3.00	300.00	10.80	1.00	4.50	4.50	0.00	199843	599.53
4.00	400.00	14.40	1.00	8.00	8.00	0.00	200581	802.32
5.00	500.00	18.00	1.00	12.50	12.50	0.00	201409	1007.04
6.00	600.00	21.60	1.00	18.00	18.00	0.00	202326	1213.95
7.00	700.00	25.20	1.00	24.50	24.50	0.00	203332	1423.32
8.00	800.00	28.80	1.00	32.00	32.00	0.00	204427	1635.42
9.00	900.00	32.40	1.00	40.50	40.50	0.00	205611	1850.50
10.00	1000.00	36.00	1.00	50.00	50.00	0.00	206885	2068.85
11.00	1100.00	39.60	1.00	60.50	60.50	0.00	208248	2290.72
12.00	1200.00	43.20	1.00	72.00	72.00	0.00	209700	2516.40
13.00	1300.00	46.80	1.00	84.50	84.50	0.00	211241	2746.13
14.00	1400.00	50.40	1.00	98.00	98.00	0.00	212871	2980.20
15.00	1499.98	54.00	1.00	112.50	112.50	0.00	214590	3218.81
16.00	1584.98	57.06	1.00	127.90	127.90	0.00	216122	3425.49
17.00	1684.98	60.66	1.00	144.25	144.25	0.00	218007	3673.36
18.00	1784.98	64.26	1.00	161.60	161.60	0.00	219980	3926.60
19.00	1796.07	64.66	-0.13	179.60	179.60	0.00	0	0.00
20.00	1782.80	64.18	-0.13	197.50	197.50	0.00	0	0.00
21.00	1769.67	63.71	-0.13	215.26	215.26	0.00	0	0.00
22.00	1756.68	63.24	-0.13	232.89	232.89	0.00	0	0.00
23.00	1743.82	62.78	-0.13	250.39	250.39	0.00	0	0.00
24.00	1731.09	62.32	-0.13	267.77	267.77	0.00	0	0.00
25.00	1718.48	61.87	-0.13	285.02	285.02	0.00	0	0.00
26.00	1706.01	61.42	-0.12	302.14	302.14	0.00	0	0.00
27.00	1693.65	60.97	-0.12	319.14	319.14	1.80	0	0.00
28.00	1681.43	60.53	-0.12	336.01	336.01	1.80	0	0.00
29.00	1669.32	60.10	-0.12	352.77	352.77	1.80	0	0.00
30.00	1657.33	59.66	-0.12	369.40	369.40	1.80	0	0.00
31.00	1645.45	59.24	-0.12	385.91	385.91	1.80	0	0.00
32.00	1633.70	58.81	-0.12	402.31	402.31	1.80	0	0.00
33.00	1622.05	58.39	-0.12	418.59	418.59	1.80	0	0.00
34.00	1610.52	57.98	-0.11	434.75	434.75	1.80	0	0.00
35.00	1599.10	57.57	-0.11	450.80	450.80	1.80	0	0.00

36.00	1587.78	57.16	-0.11	466.73	466.73	1.80	0	0.00
37.00	1576.57	56.76	-0.11	482.55	482.55	1.80	0	0.00
38.00	1565.47	56.36	-0.11	498.26	498.26	1.80	0	0.00
39.00	1554.47	55.96	-0.11	513.86	513.86	1.80	0	0.00
40.00	1543.58	55.57	-0.11	529.35	529.35	1.80	0	0.00
41.00	1532.78	55.18	-0.11	544.74	544.74	1.80	0	0.00
42.00	1522.09	54.80	-0.11	560.01	560.01	1.80	0	0.00
43.00	1511.49	54.41	-0.11	575.18	575.18	1.80	0	0.00
44.00	1500.98	54.04	-0.10	590.24	590.24	1.80	0	0.00
45.00	1490.58	53.66	-0.10	605.20	605.20	1.80	0	0.00
46.00	1480.26	53.29	-0.10	620.05	620.05	1.80	0	0.00
47.00	1470.04	52.92	-0.10	634.80	634.80	1.80	0	0.00
48.00	1459.91	52.56	-0.10	649.45	649.45	1.80	0	0.00
49.00	1449.87	52.20	-0.10	664.00	664.00	1.80	0	0.00
50.00	1439.92	51.84	-0.10	678.45	678.45	1.80	0	0.00
51.00	1430.05	51.48	-0.10	692.80	692.80	-3.50	0	0.00
52.00	1420.27	51.13	-0.10	707.05	707.05	-3.50	0	0.00
53.00	1410.58	50.78	-0.10	721.21	721.21	-3.50	0	0.00
54.00	1400.97	50.43	-0.10	735.26	735.26	-3.50	0	0.00
55.00	1391.44	50.09	-0.09	749.23	749.23	-3.50	0	0.00
56.00	1381.99	49.75	-0.09	763.09	763.09	-3.50	0	0.00
57.00	1372.63	49.41	-0.09	776.87	776.87	-3.50	0	0.00
58.00	1363.34	49.08	-0.09	790.54	790.54	-3.50	0	0.00
59.00	1354.13	48.75	-0.09	804.13	804.13	-3.50	0	0.00
60.00	1345.00	48.42	-0.09	817.63	817.63	-3.50	0	0.00
61.00	1335.94	48.09	-0.09	831.03	831.03	-3.50	0	0.00
62.00	1326.96	47.77	-0.09	844.35	844.35	-3.50	0	0.00
63.00	1318.06	47.45	-0.09	857.57	857.57	-3.50	0	0.00
64.00	1309.22	47.13	-0.09	870.71	870.71	-3.50	0	0.00
65.00	1300.46	46.82	-0.09	883.76	883.76	-3.50	0	0.00
66.00	1291.77	46.50	-0.09	896.72	896.72	-3.50	0	0.00
67.00	1283.15	46.19	-0.09	909.59	909.59	-3.50	0	0.00
68.00	1274.60	45.89	-0.09	922.38	922.38	-3.50	0	0.00
69.00	1266.12	45.58	-0.08	935.08	935.08	-3.50	0	0.00
70.00	1257.71	45.28	-0.08	947.70	947.70	-3.50	0	0.00
71.00	1249.36	44.98	-0.08	960.24	960.24	-3.50	0	0.00
72.00	1241.08	44.68	-0.08	972.69	972.69	-3.50	0	0.00
73.00	1232.86	44.38	-0.08	985.06	985.06	-3.50	0	0.00
74.00	1224.71	44.09	-0.08	997.35	997.35	-3.50	0	0.00
75.00	1216.62	43.80	-0.08	1009.55	1009.55	-3.50	0	0.00

76.00	1208.59	43.51	-0.08	1021.68	1021.68	-3.50	0	0.00
77.00	1200.63	43.22	-0.08	1033.73	1033.73	-3.50	0	0.00
78.00	1192.73	42.94	-0.08	1045.69	1045.69	-3.50	0	0.00
79.00	1184.88	42.66	-0.08	1057.58	1057.58	-3.50	0	0.00
80.00	1177.10	42.38	-0.08	1069.39	1069.39	-3.50	0	0.00
81.00	1169.38	42.10	-0.08	1081.12	1081.12	-3.50	0	0.00
82.00	1161.71	41.82	-0.08	1092.78	1092.78	-3.50	0	0.00
83.00	1154.10	41.55	-0.08	1104.36	1104.36	-3.50	0	0.00
84.00	1146.55	41.28	-0.08	1115.86	1115.86	-3.50	0	0.00
85.00	1139.06	41.01	-0.07	1127.29	1127.29	-3.50	0	0.00
86.00	1131.62	40.74	-0.07	1138.64	1138.64	-3.50	0	0.00
87.00	1124.23	40.47	-0.07	1149.92	1149.92	-3.50	0	0.00
88.00	1116.90	40.21	-0.07	1161.13	1161.13	-3.50	0	0.00
89.00	1109.62	39.95	-0.07	1172.26	1172.26	-3.50	0	0.00
90.00	1102.40	39.69	-0.99	1183.32	1183.32	-3.50	0	0.00
91.00	1095.22	39.43	-0.98	1194.31	1194.31	-3.50	0	0.00
92.00	1088.10	39.17	-0.97	1205.22	1205.22	-3.50	0	0.00
93.00	1081.03	38.92	-0.97	1216.07	1216.07	-3.50	0	0.00
94.00	1074.01	38.66	-0.96	1226.85	1226.85	-3.50	0	0.00
95.00	1067.04	38.41	-0.96	1237.55	1237.55	-3.50	0	0.00
96.00	1060.12	38.16	-0.95	1248.19	1248.19	-3.50	0	0.00
97.00	1053.25	37.92	-0.94	1258.75	1258.75	-3.50	0	0.00
98.00	1046.43	37.67	-0.94	1269.25	1269.25	-3.50	0	0.00
99.00	1039.65	37.43	-0.93	1279.68	1279.68	-3.50	0	0.00
100.00	1032.92	37.19	-0.92	1290.05	1290.05	-3.50	0	0.00
101.00	983.55	35.41	-0.92	1300.23	1300.23	-3.50	0	0.00
102.00	892.05	32.11	-0.91	1309.61	1309.61	0.00	0	0.00
103.00	801.12	28.84	-0.91	1318.08	1318.08	0.00	0	0.00
104.00	710.72	25.59	-0.90	1325.64	1325.64	0.00	0	0.00
105.00	620.81	22.35	-0.90	1332.29	1332.29	0.00	0	0.00
106.00	531.36	19.13	-0.89	1338.05	1338.05	0.00	0	0.00
107.00	442.31	15.92	-0.89	1342.92	1342.92	0.00	0	0.00
108.00	353.65	12.73	-0.88	1346.90	1346.90	0.00	0	0.00
109.00	265.32	9.55	-0.88	1350.00	1350.00	0.00	0	0.00
110.00	177.29	6.38	-0.88	1352.21	1352.21	0.00	0	0.00
111.00	89.53	3.22	-0.88	1353.54	1353.54	0.00	0	0.00
112.00	0.00	0.00	-0.87	1354.00	1354.00	0.00	0	0.00
113.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1354.00	0.00	0	0.00
114.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1354.00	0.00	0	0.00
115.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1354.00	0.00	0	0.00

156.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1354.00	0.00	0	0.00
157.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1354.00	0.00	198162	0.00
158.00	100.00	3.60	1.00	0.50	1354.50	0.00	198633	198.63
159.00	200.00	7.20	1.00	2.00	1356.00	0.00	199193	398.39
160.00	300.00	10.80	1.00	4.50	1358.50	0.00	199843	599.53
161.00	400.00	14.40	1.00	8.00	1362.00	0.00	200581	802.32
162.00	500.00	18.00	1.00	12.50	1366.50	0.00	201409	1007.04
163.00	600.00	21.60	1.00	18.00	1372.00	0.00	202326	1213.95
164.00	700.00	25.20	1.00	24.50	1378.50	0.00	203332	1423.32
165.00	800.00	28.80	1.00	32.00	1386.00	0.00	204427	1635.42
166.00	900.00	32.40	1.00	40.50	1394.50	0.00	205611	1850.50
167.00	1000.00	36.00	1.00	50.00	1404.00	0.00	206885	2068.85
168.00	1100.00	39.60	1.00	60.50	1414.50	0.00	208248	2290.72
169.00	1200.00	43.20	1.00	72.00	1426.00	0.00	209700	2516.40
170.00	1300.00	46.80	1.00	84.50	1438.50	0.00	211241	2746.13
171.00	1400.00	50.40	1.00	98.00	1452.00	0.00	212871	2980.20
172.00	1499.98	54.00	1.00	112.50	1466.50	0.00	214590	3218.81
173.00	1578.43	56.82	1.00	127.87	1481.87	0.00	216002	3409.44
174.00	1678.43	60.42	1.00	144.15	1498.15	0.00	217880	3656.98
175.00	1751.93	63.07	-0.13	161.40	1515.40	0.00	0	0.00
176.00	1739.12	62.61	-0.13	178.86	1532.86	0.00	0	0.00
177.00	1726.44	62.15	-0.13	196.19	1550.19	0.00	0	0.00
178.00	1713.88	61.70	-0.12	213.39	1567.39	0.00	0	0.00
179.00	1701.45	61.25	-0.12	230.47	1584.47	0.00	0	0.00
180.00	1689.14	60.81	-0.12	247.42	1601.42	3.00	0	0.00
181.00	1676.96	60.37	-0.12	264.25	1618.25	3.00	0	0.00
182.00	1664.89	59.94	-0.12	280.96	1634.96	3.00	0	0.00
183.00	1652.95	59.51	-0.12	297.55	1651.55	3.00	0	0.00
184.00	1641.12	59.08	-0.12	314.02	1668.02	3.00	0	0.00
185.00	1629.40	58.66	-0.12	330.37	1684.37	3.00	0	0.00
186.00	1617.80	58.24	-0.12	346.61	1700.61	3.00	0	0.00
187.00	1606.31	57.83	-0.11	362.73	1716.73	3.00	0	0.00
188.00	1594.92	57.42	-0.11	378.73	1732.73	3.00	0	0.00
189.00	1583.65	57.01	-0.11	394.63	1748.63	3.00	0	0.00
190.00	1572.48	56.61	-0.11	410.41	1764.41	3.00	0	0.00
191.00	1561.42	56.21	-0.11	426.08	1780.08	3.00	0	0.00
192.00	1550.46	55.82	-0.11	441.63	1795.63	3.00	0	0.00
193.00	1539.60	55.43	-0.11	457.08	1811.08	3.00	0	0.00
194.00	1528.84	55.04	-0.11	472.43	1826.43	3.00	0	0.00
195.00	1518.18	54.65	-0.11	487.66	1841.66	3.00	0	0.00

196.00	1507.61	54.27	-0.11	502.79	1856.79	3.00	0	0.00
197.00	1497.15	53.90	-0.10	517.81	1871.81	3.00	0	0.00
198.00	1486.77	53.52	-0.10	532.73	1886.73	3.00	0	0.00
199.00	1476.49	53.15	-0.10	547.55	1901.55	3.00	0	0.00
200.00	1466.31	52.79	-0.10	562.26	1916.26	3.00	0	0.00
201.00	1456.21	52.42	-0.10	576.88	1930.88	3.00	0	0.00
202.00	1446.20	52.06	-0.10	591.39	1945.39	3.00	0	0.00
203.00	1436.28	51.71	-0.10	605.80	1959.80	3.00	0	0.00
204.00	1426.45	51.35	-0.10	620.11	1974.11	3.00	0	0.00
205.00	1416.70	51.00	-0.10	634.33	1988.33	3.00	0	0.00
206.00	1407.04	50.65	-0.10	648.45	2002.45	-2.00	0	0.00
207.00	1397.46	50.31	-0.10	662.47	2016.47	-2.00	0	0.00
208.00	1387.96	49.97	-0.09	676.40	2030.40	-2.00	0	0.00
209.00	1378.54	49.63	-0.09	690.23	2044.23	-2.00	0	0.00
210.00	1369.20	49.29	-0.09	703.97	2057.97	-2.00	0	0.00
211.00	1359.94	48.96	-0.09	717.61	2071.61	-2.00	0	0.00
212.00	1350.76	48.63	-0.09	731.17	2085.17	-2.00	0	0.00
213.00	1341.66	48.30	-0.09	744.63	2098.63	-2.00	0	0.00
214.00	1332.63	47.97	-0.09	758.00	2112.00	-2.00	0	0.00
215.00	1323.68	47.65	-0.09	771.28	2125.28	-2.00	0	0.00
216.00	1314.80	47.33	-0.09	784.48	2138.48	-2.00	0	0.00
217.00	1305.99	47.02	-0.09	797.58	2151.58	-2.00	0	0.00
218.00	1297.26	46.70	-0.09	810.60	2164.60	-2.00	0	0.00
219.00	1288.59	46.39	-0.09	823.52	2177.52	-2.00	0	0.00
220.00	1280.00	46.08	-0.09	836.37	2190.37	-2.00	0	0.00
221.00	1271.47	45.77	-0.08	849.13	2203.13	-2.00	0	0.00
222.00	1263.02	45.47	-0.08	861.80	2215.80	-2.00	0	0.00
223.00	1254.63	45.17	-0.08	874.39	2228.39	-2.00	0	0.00
224.00	1246.31	44.87	-0.08	886.89	2240.89	-2.00	0	0.00
225.00	1238.05	44.57	-0.08	899.31	2253.31	-2.00	0	0.00
226.00	1229.86	44.27	-0.08	911.65	2265.65	-2.00	0	0.00
227.00	1221.73	43.98	-0.08	923.91	2277.91	-2.00	0	0.00
228.00	1213.66	43.69	-0.08	936.09	2290.09	-2.00	0	0.00
229.00	1205.66	43.40	-0.08	948.18	2302.18	-2.00	0	0.00
230.00	1197.72	43.12	-0.08	960.20	2314.20	-2.00	0	0.00
231.00	1189.84	42.83	-0.08	972.14	2326.14	-2.00	0	0.00
232.00	1182.02	42.55	-0.08	984.00	2338.00	-2.00	0	0.00
233.00	1174.25	42.27	-0.08	995.78	2349.78	-2.00	0	0.00
234.00	1166.55	42.00	-0.08	1007.48	2361.48	-2.00	0	0.00
235.00	1158.91	41.72	-0.08	1019.11	2373.11	-2.00	0	0.00

236.00	1151.32	41.45	-0.08	1030.66	2384.66	-2.00	0	0.00
237.00	1143.79	41.18	-0.08	1042.14	2396.14	-2.00	0	0.00
238.00	1136.31	40.91	-0.07	1053.54	2407.54	-2.00	0	0.00
239.00	1128.89	40.64	-0.07	1064.86	2418.86	-2.00	0	0.00
240.00	1121.53	40.38	-0.07	1076.11	2430.11	-2.00	0	0.00
241.00	1114.22	40.11	-0.07	1087.29	2441.29	-2.00	0	0.00
242.00	1106.96	39.85	-0.07	1098.40	2452.40	-2.00	0	0.00
243.00	1099.75	39.59	-0.07	1109.43	2463.43	-2.00	0	0.00
244.00	1092.60	39.33	-0.98	1120.39	2474.39	-2.00	0	0.00
245.00	1085.50	39.08	-0.97	1131.28	2485.28	-2.00	0	0.00
246.00	1078.45	38.82	-0.97	1142.10	2496.10	-2.00	0	0.00
247.00	1071.45	38.57	-0.96	1152.85	2506.85	-2.00	0	0.00
248.00	1064.49	38.32	-0.96	1163.53	2517.53	-2.00	0	0.00
249.00	1057.59	38.07	-0.95	1174.14	2528.14	-2.00	0	0.00
250.00	1050.74	37.83	-0.94	1184.69	2538.69	-2.00	0	0.00
251.00	1043.93	37.58	-0.94	1195.16	2549.16	-2.00	0	0.00
252.00	1037.17	37.34	-0.93	1205.56	2559.56	0.00	0	0.00
253.00	1030.46	37.10	-0.92	1215.90	2569.90	0.00	0	0.00
254.00	984.95	35.46	-0.92	1226.08	2580.08	0.00	0	0.00
255.00	893.43	32.16	-0.91	1235.48	2589.48	0.00	0	0.00
256.00	802.49	28.89	-0.91	1243.96	2597.96	0.00	0	0.00
257.00	712.09	25.64	-0.90	1251.53	2605.53	0.00	0	0.00
258.00	622.17	22.40	-0.90	1258.20	2612.20	0.00	0	0.00
259.00	532.71	19.18	-0.89	1263.97	2617.97	0.00	0	0.00
260.00	443.66	15.97	-0.89	1268.85	2622.85	0.00	0	0.00
261.00	354.99	12.78	-0.88	1272.85	2626.85	0.00	0	0.00
262.00	266.66	9.60	-0.88	1275.96	2629.96	0.00	0	0.00
263.00	178.63	6.43	-0.88	1278.18	2632.18	0.00	0	0.00
264.00	90.87	3.27	-0.88	1279.53	2633.53	0.00	0	0.00
265.00	0.00	0.00	-0.87	1280.00	2634.00	0.00	0	0.00

附录 3：迭代搜索算法

```

clear,clc
% 参数赋值
M=194.295*10^3;L_train=115;v_max=80*10^3/3600;A=2.031;B=0.0622;C=0.001807;
ac_max=1;de_max=1;g=9.8;s6=13594;s7=12240;cc=600;vt=0;u=0.7;t_train=110;
% 初值
z=0;
u=1;
    z=z+1;
n=10000000;% 整个过程分成 n 段
v=zeros(n+1,1);s_all=ones(n+1,1)*13594;Di=zeros(n+1,1);F=zeros(n+1,1);

```

```

deta_s=(s6-s7)/n;v1=zeros(n+1,1);v2=zeros(n+1,1);Rc=zeros(n+1,1);ac=zeros(n+1,1);
% v(1,1)=56*1000/3600;
for i=1:n
    s_all(i+1)= s_all(i)-deta_s;
end
%读入坡度信息
for i=1:n+1;
    if s_all(i)<=12290
        Di(i)=0;
    elseif s_all(i)>12290 & s_all(i)<=12910
        Di(i)=-3.5;
    elseif s_all(i)>12910 & s_all(i)<=13290
        Di(i)=1.8;
    elseif s_all(i)>13290
        Di(i)=-0;
    end
end
%读入曲率信息
for i=1:n+1;
    Rc(i)=0;
end

r=0;
E=34410000;

r=r+1;
i=0;j=1;
while E>0
    %牵引阶段
    i=i+1;
    if v(i)<51.5*1000/3600
        F(i)=u*213*10^3;
        ac(i)=F(i)/M-(A+B*v(i)*3.6+C*(v(i)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
        if ac(i)>1
            F(i)=F(i)-(ac(i)-1)*M;
            ac(i)=1;
        end
        v(i+1)=(2*ac(i)*deta_s+v(i)^2)^0.5;
        E=E-F(i)*deta_s;
    elseif (v(i)>51.5*1000/3600) & (v(i)<=80*1000/3600) & (s_all(i)<13475)
        F(i)=u*(-0.002032*v(i)^3+0.4928*v(i)^2-42.13*v(i)+1343)*10^3;
        ac(i)=F(i)/M-(A+B*v(i)*3.6+C*(v(i)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
        if ac(i)>1
            F(i)=F(i)-(ac(i)-1)*M;
            ac(i)=1;
        end
    end
end

```

```

        end
        v(i+1)=(2*ac(i)*deta_s+v(i)^2)^0.5;
        E=E-F(i)*deta_s;
    elseif v(i)>51.5*1000/3600 & v(i)<=55*1000/3600 & s_all(i)>13475
        F(i)=u*(-0.002032*v(i)^3+0.4928*v(i)^2-42.13*v(i)+1343)*10^3;
        ac(i)=F(i)/M-(A+B*v(i)*3.6+C*(v(i)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
        if ac(i)>1
            F(i)=F(i)-(ac(i)-1)*M;
            ac(i)=1;
        end
        v(i+1)=(2*ac(i)*deta_s+v(i)^2)^0.5;
        E=E-F(i)*deta_s;
    elseif (v(i)>80*1000/3600 & s_all(i)<13474) | (v(i)>55*1000/3600 & s_all(i)>13475)
        %巡航阶段
        v(i+1)=v(i);
        E=E-(A+B*v(i)*3.6+C*(v(i)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*M*g*deta_s;
    end
end
j=i;v1(j)=v(j);
%惰性阶段
while j<n+1 & v1(j)>0
    ac(j)=-(A+B*v1(j)*3.6+C*(v1(j)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
    if ac(j)<-1
        ac(j)=-1;
    end
    v1(j+1)=(2*ac(j)*deta_s+v1(j)^2)^0.5;
    a=v1(j+1);
    j=j+1;
end
%制动阶段
k=n+1;
v2(n+1)=vt;
while v2(k)<v(i)
    if v2(k)<77*10^3/3600
        FB=u*166*10^3;
        ac(k)=FB/M+(A+B*v2(k)*3.6+C*(v2(k)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
        if ac(k)>1
            ac(k)=1;
        end
        v2(k-1)=(2*ac(k)*deta_s+v2(k)^2)^0.5;
        k=k-1;
    else
        FB=u*(0.1343*v2(k)^2-25.07*v2(k)+1300)*10^3;
        ac(k)=FB/M+(A+B*v2(k)*3.6+C*(v2(k)*3.6)^2+Di(i)+Rc(i))/1000*g;
    end
end

```



```

        v2(k-1)=(2*ac(k)*deta_s+v2(k)^2)^0.5;
        k=k-1;
    end
    a=v2(k);
end
w=0;
for w=i+1:n+1
    v(w)=v1(w);
end
for w=k:n+1
    v(w)=min([v(w);v2(w)]);
end
t(1)=0;
for p=1:n
    t(p+1)=t(p)+2*deta_s/(v(p)+v(p+1));
end
v=v*3.6;
figure(2)
plot(s_all,v,'linewidth',2)
ylabel('速度(km/h)','fontsize',12);
xlabel('公里标(m)','fontsize',12);
grid on
% ttt=tt-t_train;
% [minx, ind] =min(abs(ttt));
% minxx(z)=minx;
for i=1:111
    [min5 ind5]=min(abs(t-i+1));
    t5(i,1)=t(ind5);
    v5(i,1)=v(ind5);
    F5(i,1)=F(ind5);
    a5(i,1)=ac(ind5);
    s5(i,1)=s_all(ind5);
    Di5(i,1)=Di(ind5);
end

```

附录 4：遗传算法

```

function f=fun1(x)
a=[ 0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
    16  19  22  23  20  17  16  19  13  22  21  18  22
    106 84  136 115 128 111 108 103 102 123 131 88  159
    118 99  149 134 145 121 118 119 110 136 146 102 173];
b=[12  15  13  19  17  10  10  16  8  13  15  14  14];
c=[118  99  149 134 145 121 118 119 110 136 146 102 173];
d=[102  80  127 111 125 104 102 100 97  114 125 84  151];
tj=0;
for i=2:100

```

[illegible]

[illegible]

[illegible]

