

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 数控加工刀具运动的优化控制

摘 要：

数控加工在机械制造领域具有举足轻重的作用，如何在满足加工误差的条件下提高加工速度是数控加工中的一个关键问题。研究开发数控加工刀具运动满足高速、高精度要求的、有效柔性加减速控制方法，已成为现代高性能数控系统研究的重点。本文针对数控加工刀具运动的轨迹位置与速度控制模型进行了研究，对于不同的问题建立了相应得数学模型并进行了求解。

对于问题一，建立一种实时加工优化控制算法，在满足指定加工误差且加工型线为折线条件下，使得数控刀具能够在最短的时间内完成整个加工过程。刀具运动速度降为零之前即到达拐点之前，使刀具运动方向发生改变，可以缩短加工时间。本题提出了一种算法，通过该算法可以求出在满足加工误差的条件下允许的最大转接速度。通过该最大转接速度，可以求得刀具运动到折线交点时对应各坐标运动速度的变化。

对于问题二，本题采用数控系统中常用的插补算法，将圆弧进行分解成为若干段微小的曲线，当每段小到一定程度时，可以近似看作式一条直线，可以利用与相应微小曲线相类似的直线段代替，通过控制刀具按直线段行走进行加工，完成为整个曲线的插补运算加工。本题建立了直线段和圆弧相连的曲线模型，对于直线与圆弧相切的模型，求得最优的加工策略，既要满足误差要求又要求时间最短，则必须考虑减速距离和曲率半径对优化策略的影响，本题针对建立的模型做了数据采集插补算法和逐点比较插补算法的 MATLAB 仿真，由仿真得出以下结论，算法效率随着圆弧半径的增大而降低，最后对建立的模型用附件中的示例进行了检验。

对于问题三，在问题二中建立的模型的基础考虑了瞬时启动加速度及瞬时启动速度，即考虑伺服电机或步进电机的实际运行情况，由此对问题二中建立的模型进行了修改，对刀具在直线段上运行时的速度控制模型进行了修改。最后对建立的模型用附件中的示例进行了检验。

对于问题四，通过深入分析问题一、问题二和问题三建立的数学模型，发现了模型间的相同点和不同点，优点和缺点，进而总结出了 S 型曲线加减速控制方法的优缺点，最后在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型。

目录

摘要:	1
目录.....	3
一、问题重述.....	4
二、问题分析.....	6
三、模型建立与求解.....	6
3.1 问题一模型建立与求解.....	6
3.1.1 误差允许范围内最大转接速度求取.....	6
3.1.2 模型的建立与求解.....	8
3.2 问题二模型建立与求解.....	11
3.2.1 插补算法.....	11
3.2.2 模型的建立与求解.....	13
3.2.3 示例求解.....	14
3.3 问题三模型建立与求解.....	18
3.3.1 模型的建立与求解.....	18
3.3.2 示例求解.....	19
3.4 问题四模型建立与求解.....	22
3.4.1 模型分析.....	22
3.4.2 模型的建立.....	22
四、总结.....	23

一、问题重述

数控加工技术正朝着高速高效高精度方向发展，高速加工要求机床各运动轴都能在极短的时间内达到高速运行状态并实现高速准停，研究开发数控加工刀具运动满足高速、高精度要求的、有效柔性加减速控制方法，已成为现代高性能数控系统研究的重点。

基于计算机的数控系统的工作原理是：首先通过计算机组成的数控编程系统对读入的零件信息进行存储和译码等处理后通过输入装置将它们传输给加工控制系统，然后由数控系统对输入的指令进行信息处理和轨迹插补计算出数控机床各坐标轴方向上刀具运动的控制信息（这个环节就是题目要求完成的任务），进而通过机床驱动以及机床运动将刀具在各坐标轴方向上的运动合成为刀具实际加工轨迹和速度控制，加工出所需的工件。

上述环节的难点在于数控机床对加工刀具在三个坐标轴方向的运动（本题不考虑更复杂的五轴控制等，）实行的是分别控制，但显然它们之间必须相互协调；加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，因此加工刀具的运动轨迹一般与工件几何形状之间肯定存在误差；每一机床都有对应的分辨率，上述任一直线段对应的坐标增量记为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ，则 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的长度一定都是分辨率的整数倍，故加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具在三个坐标轴方向上的速度、加速度；要求机床运动平稳，速度光滑、加速度连续等。

加工刀具运动的优化控制则是在数控机床所提供的精度、速度、加速度等限制条件下，寻求对机床刀具在各坐标轴方向上的运动进行合理控制，进而优化其加工效率。类似方程式赛车，有经验的车手可根据赛道特点及赛车的性能（如速度、加速度等）对赛车的行进路线及过程进行优化。而对于一般曲线加工，加工控制算法就是在满足误差要求的条件下，通过插补的方法，找出若干小直线段组成加工刀具的运动轨迹，同时计算出刀具对应的运动速度、加速度。

目前，数控加工对单个坐标运动的控制方法有多种，其中较有代表性的是基于 S 型曲线的加减速控制方法。其特点是将加减速过程分为 7 个阶段（每一阶段对应的加加速度为常量）：加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段，从而渐变地控制各段的加速度使机床运动速度按 S 型曲线形式平滑变化，以保证速度光滑，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性。S 型加减速控制曲线如图 1 所示。

在基于 S 型曲线的运动过程中，对于速度和加速度都有一定的限制性要求，速度 V 不大于机床最大速度 V_{\max} ，加速度 a 不大于机床最大加速度 a_{\max} ，加加速度为常量 J_{const} 。图 1 中各个阶段的速度、加速度、加加速度随时间的变化规律如附录所示。

在目前采用的 S 型速度控制曲线中，加速度每次都是从 0 增加，最后又降为 0，而在实际运动过程中电机启动时允许有一个瞬时启动加速度 a_0 ，即认为加速度可以从 0 瞬间提高到瞬时加速度 a_0 ，或瞬间从 a_0 下降到 0，速度也有类似功能，这样整个加速过程及速度的变化规律有一些改变。

假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点。希望同学们在深入研究数控加工优化控制的基础上，完成以下工作：

一. 设加工型线为折线，在指定加工误差（指在加工型线的法线方向上加工型线与刀具实际轨迹的差值的最大值）的条件下，建立实时加工优化控制算法，当相邻两折线

段夹角为 90° 和 135° 时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化；

二. 设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

三. 在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

四. 结合前 3 问，分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型（如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等）。

表 1-1 参数说明

	符号	取值范围	单位
进给速度	V	$[0.13, 6]$	m/min
加速度	a	$[0.02, 0.6]$	m/s^2
加加速度	J_{const}	300	mm/s^3
瞬时启动速度	V_0	0.13	m/s^2
瞬时启动加速度	a_0	0.02	m/s^2
误差	ϵ	1	μm
分辨率		$\frac{1}{1280}$	mm

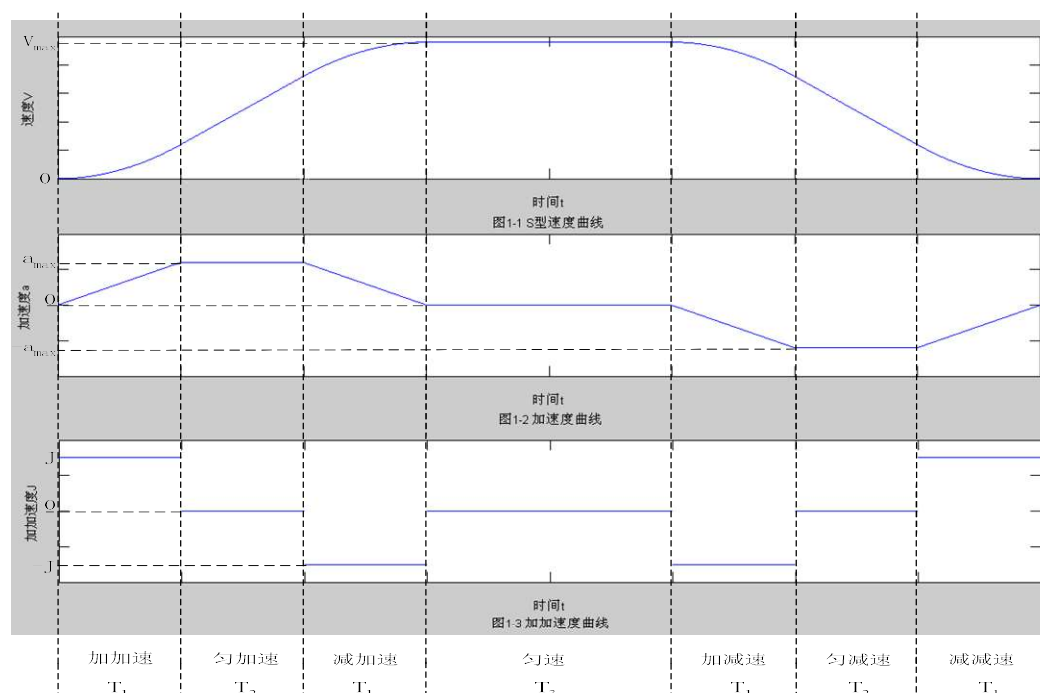


图 1 S 型加减速控制曲线的速度、加速度、加加速度随时间变化规律

二、问题分析

问题一的关键之处是建立一种实时加工优化控制算法，在满足指定加工误差且加工型线为折线条件下，使得数控刀具能够在最短的时间内完成整个加工过程。通过查阅大量相关文献，了解到要使误差为零，刀具运动方向必须在刀具运动到拐点速度降为零后，才能发生改变，但是此种情况，数控加工效率低，加工时间长。如果在刀具运动速度降为零之前即到达拐点之前，使刀具运动方向发生改变，则加工时间可以缩短，而且转接速度（刀具运动方向发生改变时刀具的运动速度）越大，加工时间越短。

问题二的关键之处是建立一种实时加工优化控制算法，在满足指定加工误差且加工型线为直线段和圆弧组成的连续曲线时，使得数控刀具能够在最短的时间内完成整个加工过程。本题采用数控系统中常用的插补算法，将圆弧进行分解成为若干段微小的曲线，当每段小到一定程度时，可以近似看作是一条直线，可以利用与相应微小曲线类似的直线段代替，通过控制刀具按直线段行走进行加工，完成为整个曲线的插补运算加工，然而，实际问题中不可能对任意曲线的分解达到无穷，因此总是存在相应的误差，不过只要加工误差在最大允许误差范围内即可。

问题三是在问题二的基础上，考虑了瞬时启动加速度及瞬时启动速度后建立了一种实时加工优化控制算法，在满足指定加工误差且加工型线为直线段和圆弧组成的连续曲线时，使得数控刀具能够在最短的时间内完成整个加工过程。本题用圆弧段采用的算法与问题二相同，只有直线段刀具的速度控制才有了不同，考虑了瞬时加速度和瞬时启动速度后，需要重新计算直线段刀具的速度与时间之间关系表达式。

问题四的关键之处是分析前三问建立的数学模型，发现模型间的相同点和不同点，优点和缺点，进而总结出 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，进而能够在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型。

三、模型建立与求解

3.1 问题一模型建立与求解

3.1.1 误差允许范围内最大转接速度求取

基于 S 曲线加减速规律，通过控制转角处的轮廓误差 e_{\max} 来超前计算转接所需的最大距离 d ，以确定转接方法执行的总时间 $2t$ ，进而可求出转角转接开始时的最大允许速度 V_{begin} 。

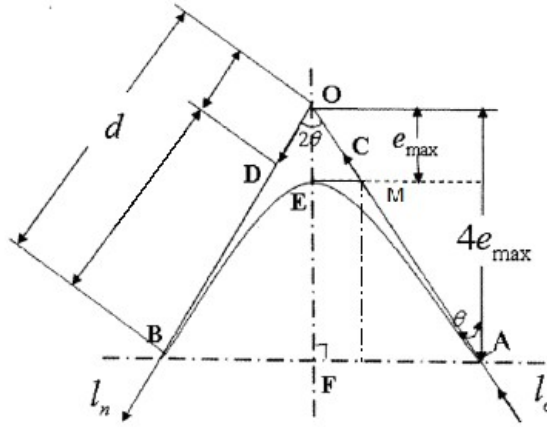


图 3-1 最大转接速度与误差关系

如图 3-1 所示, 设 J 为加工时机床的最大加加速度, 机床允许最大加工误差为 e_{max} , 两折线段为 l_c 和 l_n , 它们之间夹角为 2θ , 满足误差允许范围内的最大转接速度为 V_{beigin} 。设在没有发生转接时, 按照 S 曲线加减速规律, 从速度为 V_{beigin} 的加工点 A 经过时间 $2t$ 减速运动到速度为 0 的加工点 O , 设 $AO=d$, 则在没有发生转接时, OB 加速运动时间为 $2t$, 且 $OB=d$ 。设 l_c 在不发生转接时, 依据 S 曲线加减速规律, 经过时间 t 到达加工点 C , 而在不发生转接时, 经过时间 t , l_n 段依据 S 曲线加减速规律从点 O 到达加工点 D 。所谓转接, 就是让 AO 和 OB 的方向同时开始运动, 运动轨迹为两个方向上位移的矢量和, 所以发生转接时, 从 A 到 B 的时间为 $2t$, 从 A 到 E 的时间为 t 。

依据 S 曲线在第 7 阶段的加减速规律可得:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{6}J(2t)^3 \\ |OD| = |OC| = \frac{1}{6}Jt^3 \end{cases} \quad (1)$$

由图 3-1 和(1)、(2)式可知:

$$|AC| = |BD| = d - |OC| = \frac{7}{6}Jt^3 \quad (2)$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \therefore AC + CE = AE \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ AC + OD = AE \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ \therefore CE = OD \end{matrix}$$

$$|CE| = |OD| = |OC|$$

由直角三角形的性质知: 点 C 是斜边 OM 的中点

$$\therefore |OM| = 2|OC|$$

$$\therefore |AM| = |AO| - |OM| = |OA| - 2 \times |OC| = Jt^3$$

$$\therefore |EF| = |AM| \cos \theta = Jt^3 \cos \theta \quad (3)$$

由图 3-1 和式(1)、(4)可知:

$$\frac{|OE|}{|OF|} = \frac{|OF| - |EF|}{|OF|} = \frac{\frac{4}{3}Jt^3 \cos \theta - Jt^3 \cos \theta}{\frac{4}{3}Jt^3 \cos \theta} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

最大加工误差由图图 3-1 知：

$$|OE| = e_{\max} \quad (6)$$

由图 3-1 和式(1)、(5)知

$$|OF| = 4e_{\max} \quad (7)$$

$$d = \frac{|OF|}{\cos \theta} = \frac{4e_{\max}}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{6}J(2t)^3 = \frac{4e_{\max}}{\cos \theta}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{3e_{\max}}{J\cos \theta}} \quad (8)$$

由假设在 $2t$ 时间内， lc 从转接开始速度 V_{beigin} 减小到速度 0 ，因相邻两段的运行是对称的，此时 ln 从初始速度 0 增加到转接开始速度 V_{beigin} ，由 S 曲线加减速在第 1 阶段的运行规律可知：

$$V_{\text{beigin}} = \frac{1}{2}J(2t)^2 \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)中得：

$$V_{\text{beigin}} = \sqrt[3]{\frac{72Je^2_{\max}}{\cos^2 \theta}} \quad (10)$$

3.1.2 模型的建立与求解

加工型线为折线时，设相邻两线段分别为线段 1 和线段 2，线段 1 长度与线段 2 长度均为 $L=0.3\text{m}$ ，两线段间夹角为 2θ ，由 3.1.1 知，为了让加工时间最短，刀具在线段 1 和线段 2 上运动时的速度随时间的变化曲线如图 3-2 所示。刀具在每个线段上运动时，速度均按照 S 曲线规律加减，两条曲线的交点处表示进入转接，即线段 2 方向上的速度开始依据 S 曲线的第 1 阶段开始加速。

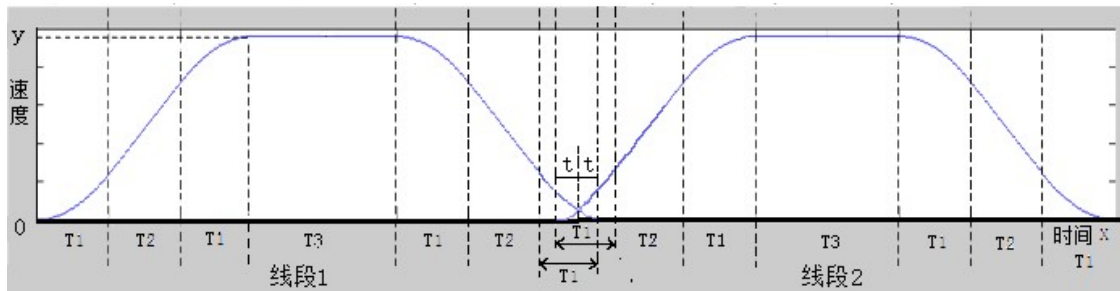


图 3-2 刀具在相邻两线段运动时速度变化曲线

由图 3-2 知，整个折线加工时间为：

$$T = 8T_1 + 4T_2 + 2T_3 - t \quad (11)$$

由式(8)知，当最大允许误差和线段夹角固定时， t 是一个固定值，所以本题的目标优化函数可以简化为

$$T = 4T_1 + 2T_2 + T_3 \quad (12)$$

依照 S 曲线规律知：

在 $2T_1+T_2$ 时刻，速度达到最大

$$V_{\max} = JT_1T_2 + JT_1^2 = 0.3T_1T_2 + 0.3T_1^2 \quad (13)$$

在 T_1 时刻，加速度达到最大

$$a_{\max} = JT_1 = 0.3T_1 \quad (14)$$

一个 S 曲线的路程 L 与 T_1 、 T_2 、 T_3 之间存在以下关系式:

$$(2T_1 + T_2 + T_3)V_{\max} = (2T_1 + T_2 + T_3)(0.3T_1T_2 + 0.3T_1^2) = L = 0.3 \quad (15)$$

由题知 $V_{\max} \leq 0.1\text{m/s}$, $a_{\max} \leq 0.6\text{m/s}^2$

所以由式(13)、(14)知

$$V_{\max} = JT_1T_2 + JT_1^2 = 0.3T_1T_2 + 0.3T_1^2 \leq 0.1\text{m/s} \quad (16)$$

$$a_{\max} = 0.3T_1 \leq 0.6\text{m/s}^2 \quad (17)$$

由题可知:

$$T_1 \geq 0 \quad (18)$$

$$T_2 \geq 0 \quad (19)$$

$$T_3 \geq 0 \quad (20)$$

以式 (15)、(16)、(17) 、(18)、(19) 、(20)为约束条件, 以式(12)为目标优化函数, 进行最小解寻优, 在 Lingo 计算得:

$$\begin{cases} T_1=0.57735\text{s} \\ T_2=0.00000\text{s} \\ T_3=1.84530\text{s} \end{cases} \quad (21)$$

1.当两线段间夹角为 90° , 即 $2\theta=90^\circ$ 时, 设两线段与坐标轴关系如图 3-3 所示。

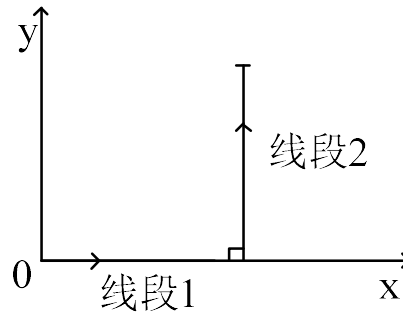


图 3-3 两线段与坐标轴关系 1

由式(8)和图 3-2 可知:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3e_{\max}}{J\cos\theta}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 0.000001}{0.3 \times \cos 45^\circ}} = 0.02418\text{s} \quad (22)$$

由式 (11)可知整个折线加工时间为:

$$T = 8T_1 + 4T_2 + 2T_3 - t = 8 \times 0.57735 + 2 \times 1.84530 - 2 \times 0.02418 = 8.26104\text{s} \quad (23)$$

由图 3-2 知:

$$\text{拐角转接开始时刻: } T_{\text{start}} = 4T_1 + 2T_2 + T_3 - t = 4.13052\text{s} \quad (24)$$

$$\text{拐角转接经过的时间: } T_m = 2t = 0.04836\text{s} \quad (25)$$

依照 S 曲线加减速在第 7 阶段的运行规律可知:

拐角转接过程中,线段 1 方向上的分速度 V_1 与时间 t 的关系如下:

$$V_1 = V_{\max} - \frac{1}{2}JT_1^2 - a_{\max}T_2 - a_{\max}(t - T_{\text{start}} - 3T_1 - 2T_2 - T_3) + \frac{1}{2}J(t - T_{\text{start}} - 3T_1 - 2T_2 - T_3)^2$$

$$V_1 = 0.15(t - 7.71)^2 - 0.6(t - 7.71) + 0.05 \quad t \in [4.13052, 4.17888] \quad (26)$$

依照 S 曲线加减速在第 1 阶段的运行规律可知:

拐角转接过程中,线段 2 方向上的分速度 V_2 与时间 t 的关系如下:

$$V_2 = \frac{1}{2}J(t - T_{\text{start}})^2$$

$$V_2 = 0.15(t - 4.13052)^2 \quad t \in [4.13052, 4.17888] \quad (27)$$

由图 3-3 可知：

通过折线交点时 X 坐标运动速度随时间的变化关系：

$$V_x = V_1 = 0.15(t - 7.71)^2 - 0.6(t - 7.71) + 0.05 \quad t \in [4.13052, 4.17888] \quad (28)$$

通过折线交点时 Y 坐标运动速度随时间的变化关系：

$$V_y = V_2 = 0.15(t - 4.13052)^2 \quad t \in [4.13052, 4.17888] \quad (29)$$

2. 当两线段间夹角为 135° ，即 $2\theta = 135^\circ$ 时，设两线段与坐标轴关系如图 3-3 所示。

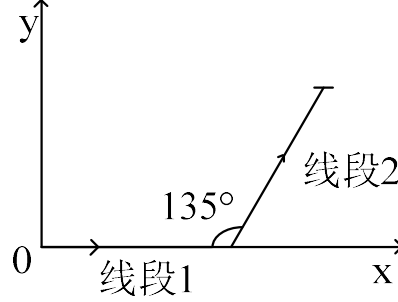


图 3-4 两线段与坐标轴关系 2

由式(8)和图 3-2 可知：

$$t = \sqrt[3]{\frac{3e_{\max}}{J \cos \theta}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 0.000001}{0.3 \times \cos 67.5^\circ}} = 0.02967s \quad (30)$$

由式 (11)可知整个折线加工时间为：

$$T = 8T_1 + 4T_2 + 2T_3 - t = 8 \times 0.57735 + 2 \times 1.84530 - 2 \times 0.02967 = 8.25006s \quad (31)$$

由图 3-2 知：

$$\text{拐角转接开始时刻: } T_{\text{start}} = 4T_1 + 2T_2 + T_3 - t = 4.12503s \quad (32)$$

$$\text{拐角转接经过的时间: } T_m = 2t = 0.05934s \quad (33)$$

依照 S 曲线加减速在第 7 阶段的运行规律可知：

拐角转接过程中,线段 1 方向上的分速度 V_1 与时间 t 的关系如下：

$$V_1 = V_{\max} - \frac{1}{2}JT_1^2 - a_{\max}T_2 - a_{\max}(t - T_{\text{start}} - 3T_1 - 2T_2 - T_3) + \frac{1}{2}J(t - T_{\text{start}} - 3T_1 - 2T_2 - T_3)^2$$

$$V_1 = 0.15(t - 7.70)^2 - 0.6(t - 7.70) + 0.05 \quad t \in [4.12503, 4.18437] \quad (34)$$

依照 S 曲线加减速在第 1 阶段的运行规律可知：

拐角转接过程中,线段 2 方向上的分速度 V_2 与时间 t 的关系如下：

$$V_2 = \frac{1}{2}J(t - T_{\text{start}})^2$$

$$V_2 = 0.15(t - 4.12503)^2 \quad t \in [4.12503, 4.18437] \quad (35)$$

由图 3-4 可知：

通过折线交点时 X 坐标运动速度随时间的变化关系：

$$V_x = V_1 = 0.15(t - 7.71)^2 - 0.6(t - 7.71) + 0.05 \quad t \in [4.13052, 4.17888] \quad (36)$$

通过折线交点时 Y 坐标运动速度随时间的变化关系：

$$V_y = V_2 \sin(180^\circ - 135^\circ) = 0.15(t - 4.13052)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.11(t - 4.13052)^2$$

$$t \in [4.13052, 4.17888] \quad (37)$$

3.2 问题二模型建立与求解

3.2.1 插补算法

插补算法一直以来就是数控系统中的核心技术。从数控系统的原理来说,插补的本质问题就是将任意曲线分解成若干段微小的曲线,当对曲线的分解达到无穷级时,每一段曲线便可近似的认为是微小的直线段。然后利用与相应微小曲线类似的直线段代替,通过控制刀具按直线段行走进行加工,完成整个曲线的插补运算加工。然后,实际问题中对任意曲线的分解不可能达到无穷级,因此总是存在相应的误差,不过在实际运用中,产生的误差只要在系统允许的最大误差范围内即可。因此只需在满足精度和最大允许误差的条件下对曲线进行分解,分解过程即是对坐标点进行密化,不但要保证精度,还需要在极短的时间内完成。

插补算法包括脉冲增量插补算法、数据采样插补算法和逐点比较法,下面对这几种算法分别进行介绍。

I.脉冲增量插补算法:通过向各个运动轴分配驱动脉冲来控制机床坐标轴相互协调运动,从而加工出一定轮廓形状的算法。每次插补运算后,在一个坐标轴方向(X、Y或Z),最多产生一个单位脉冲形式的步进电机控制信号,使该坐标轴最多产生一个单位的行程增量。

II.逐点比较插补算法:在刀具运动过程中,不断比较刀具与零件轮廓之间的相对位置,并根据比较结果使刀具平行于坐标轴向减小偏差的方向进给。逐点比较插补算法可以实现直线插补和圆弧插补;每次插补运算后,只有一个坐标轴方向有进给;插补误差不超过一个脉冲当量;运算简单直观,输出脉冲均匀。逐点比较插补算法获得的插补点与加工型线之间的关系如图3-5和3-6所示。

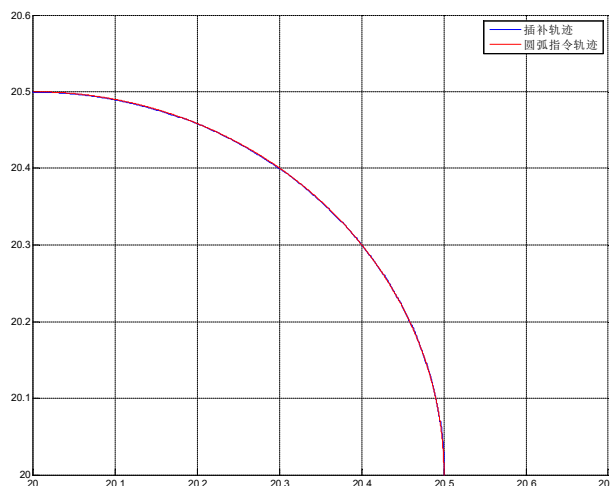


图 3-5 逐点比较插补算法示意图

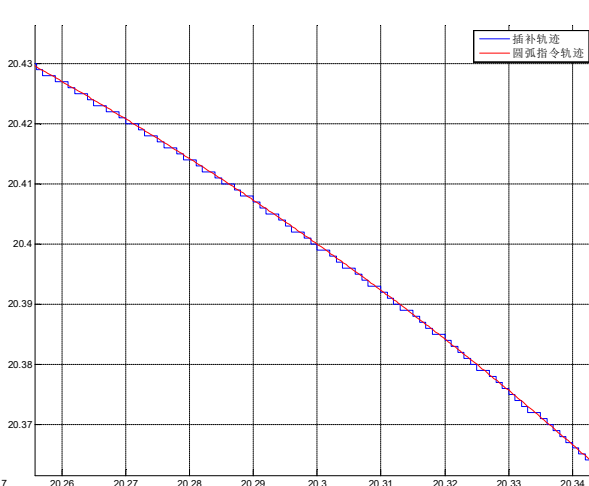


图 3-6 逐点比较插补算法局部放大图

III.数据采样插补算法:根据数控加工程序所需要的进给速度,按照插补周期的大小,先将零件轮廓曲线分割为一系列首尾连接的微小直线段,然后输出这些微小直线段所对应的位置增量数据,控制伺服系统实现坐标给进,其中每调用一次插补程序,计算出本插补周期内各个坐标轴的目标位置,随后把求得的坐标轴位置与采样获得的坐标轴实际位置进行比较求得位置跟踪误差,然后根据当前位置误差计算出坐标轴进给速度并输出给驱动装置,从而驱动刀具向减小误差的方向运动。数据采样插补算法获得的插补点与加工型线之间的关系如图3-7和3-8所示。

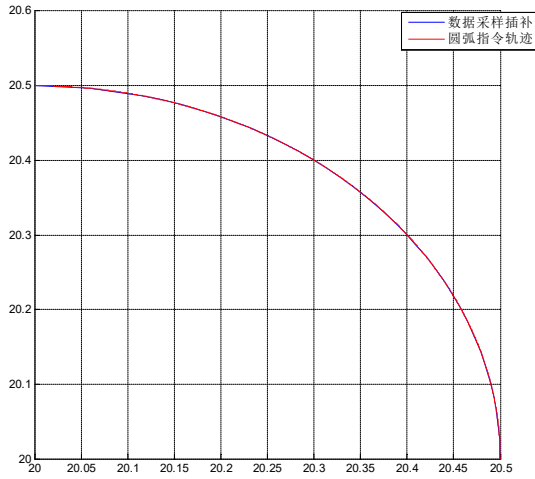


图 3-7 数据采样插补算法示意图

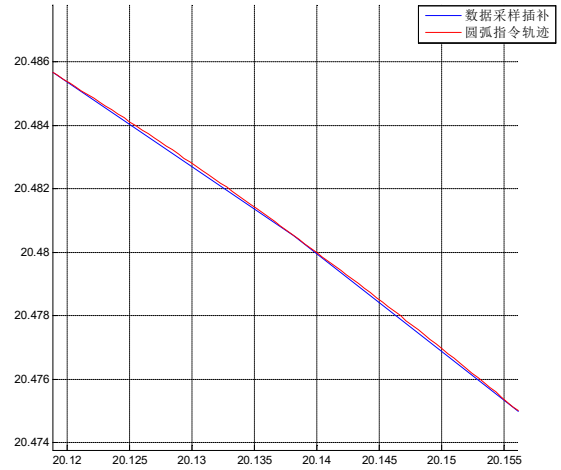


图 3-8 数据采样插补算法局部放大图

本题对圆弧采用数据采样插补算法，基于 PC 技术，利用 MATLAB 软件编写相应插补程序，实现对插补轨迹的模拟与分析。由于在圆弧插补过程中，用小段直线逼近圆弧，所以加工轨迹存在误差 ε 。假设进给速度为 V ，插补步长为 $AB=V\Delta T$ ，圆弧半径为 R ，如图 3-9 所示。

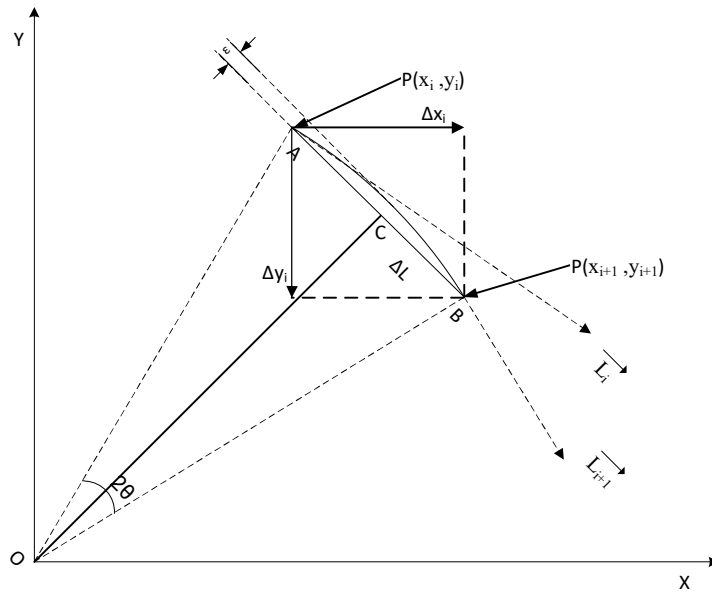


图 3-9 圆弧插补分析

由图 3-9 可知两相邻插补点对应的位置角有以下关系：

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta_i \quad (38)$$

式中 $\Delta\theta_i$ 为步距角(插补直线段 ΔL_i 对应的圆心角)。

如果对步距角进行控制，使其满足

$$\Delta\theta_i \approx \frac{\Delta L_i}{R} = \frac{F_i \Delta T}{60000R} \quad (39)$$

式中 F_i 为进给速度(mm/min)； ΔT 为插补周期(ms)。

则可使插补的运动速度满足给定的进给速度 F_i 。

由图 3-5 可知最大步距角为：

$$\Delta\theta_{\max} = 2\theta \approx 2\sin\theta = 2 \times \frac{\sqrt{R^2 - (R-\varepsilon)^2}}{R} = \frac{2\sqrt{\varepsilon(2R-\varepsilon)}}{R} \quad (40)$$

实际运行过程中若 $\Delta\theta_i < \Delta\theta_{\max}$ ，则按式(39)求出的 $\Delta\theta_i$ 进行插补运算，否则按式(40)进行插补运算。因为式(40)的计算可在预处理阶段完成，所以上述误差控制不会影响插补的实时性。

3.2.2 模型的建立与求解

加工型线为直线段与圆弧段组成的连续曲线时，如图 3-8 所示，直线段方向与坐标轴平行，直线段与圆弧段相切，所以直线段上允许的最大速度为单轴能达到的最大速度，直线段上允许的最大加速度为单轴上能达到的最大加速度。设单轴的最大加速度为 a_{\max} ，最大速度位 V_{\max} 。

依照 S 型加减速运动规律可以知道，在误差允许范围内，步距角越大，加工时间越短，加工效率越高，所以本题直接将最大步距角作为圆弧进行插补运算时的步距角。由式(40)和加工时允许的最大加工误差 ε ，可以确定分割圆弧时允许的最大步距角，由最大步距角，则可以进一步确定将圆弧进行插补分割后的相邻两条微小的弦之间的夹角。根据 3.1.1 中提出的算法，进一步可以确定刀具在圆弧的每个微小弦段运动时允许的最大速度，将此最大速度与单轴上允许的最大速度进行比较，选取其中较小的速度作为刀具在圆弧弦段上运动时的速度。

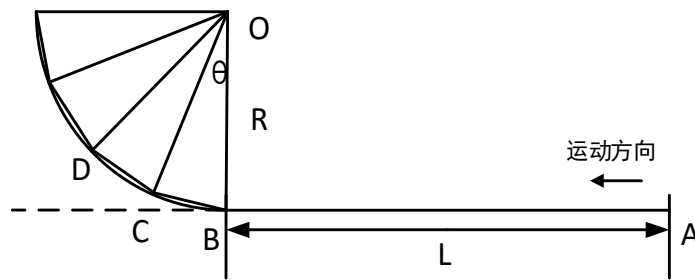


图 3-10 加工型线为圆弧段与直线段相连示意图

由图 3-10 知：

$$\begin{cases} \angle BCD = 2\angle BCO = 2\angle CBO \\ \angle ABC = \angle CBO + \frac{\pi}{2} \\ \angle CBO < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

所以 $\angle ABC > \angle BCD$

由 3.1.1 中的式(10)可以知道，两个首尾相连的线段之间夹角越大，在其拐角处进行转接时，被允许的转接速度越大，所以刀具在圆弧上运动时，刀具被允许的最大转接速度应该按照 $\angle BCD$ 来计算。所以刀具由 B 点进入弧段的速度为

$$V_B = \min\{\text{最大转接速度, 单轴最大允许速度}\} \quad (41)$$

刀具在线段 AB 上运动时，按照 S 曲线规律进行加减速运动，如图 3-11 所示，设刀具在 S 曲线第 7 段某个时刻到达圆弧与线段的交点处，其中在该时刻刀具的运动速度降到式(41)中要求的大小，刀具加速度降为零。

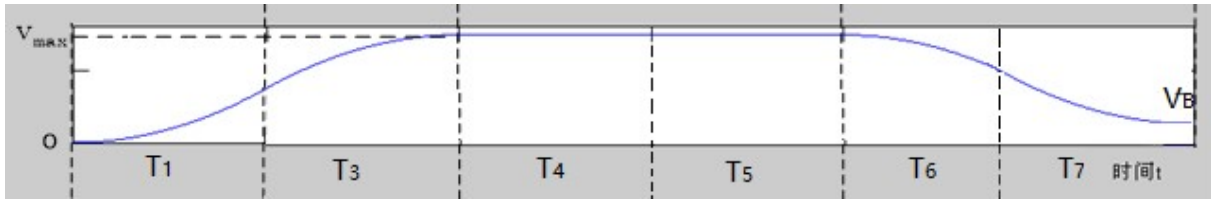


图 3-11 AB 段刀具速度变化

设刀具在 AB 段能够达到的最大速度为 V_{AB} ，则 $V_{AB} \leq V_{\max}$ ，要使刀具在最短的时间通过圆弧，则需要刀具运动速度在最短时间内达到最大速度 V_{AB} ，所以，加速距离中只能有加加速过程和加减速过程，减速距离中只能有加减速过程和减减速过程，为了保证速度减为 V_B 时加速度为零，则在减速过程中加减速过程与减减速过程所用时间相等，即有下式：

$$T_6 = T_7 \quad (42)$$

假设刀具最大速度能够达到 V_{\max} ，则允许的最短直线距离可以按以下公式计算：

在 T_1 、 T_2 和 T_3 的加速过程中，因为要求时间最短，所以没有匀加速阶段。

依照 S 曲线加减速运动规律和图 3-11 和可知：

$$T_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}JT_1^2 + \frac{1}{2}JT_3^2 = V_{\max} \quad (43)$$

$$T_1 = T_3 \quad (44)$$

由式 (43)、(44) 可解：

$$T_1 = T_3 = \sqrt{\frac{V_{\max}}{J}} \quad (45)$$

同样因为要求加工时间最短，所以没有 S 曲线中的匀减速阶段。依照 S 曲线加减速运动规律可知：

$$V_B + \frac{1}{2}JT_6^2 + \frac{1}{2}JT_7^2 = V_{\max} \quad (46)$$

由 S 曲线加减速运动规律和式 (45)、(46)、(47) 可得：

能达到最大允许速度 V_{\max} 的最小直线距离为

$$L = V_{\max} \sqrt{\frac{V_{\max}}{J}} + (V_{\max} + V_B) \sqrt{\frac{V_{\max} - V_B}{J}}$$

如果直线距离大于 L ，则会有以 V_{\max} 匀速切割的过程；如果直线距离小于 L ，则最大速度达到最大速度 $V_{AB} \leq V_{\max}$ 。

由以上的最小距离公式可以判断，某段直线距离能达到的最大速度。

依据 S 曲线加减速运动规律知道运动速度由 V_{\max} 将为 V_B 所需要的时间为：

$$t = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = \sqrt{\frac{4(V_{\max} - V_B)}{J}}$$

$$\text{这段时间运动的位移为：} S_{451} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_B t \quad (47)$$

由式 (47) 可以求得当刀具由直线段进入圆弧时所需要减速距离。

3.2.3 示例求解

一个圆角矩形切割路径的示意图，路径的四个角是半径为 0.5 的整圆的 1/4 圆弧。矩形外围大小是：41×41（单位：cm²）。在实际加工过程中，从坐标为 (-20.500, -20.000,

0.000) 的节点 1 位置开始下刀, 该点处的瞬时速度为 0; 从节点 1 到节点 2 (-20.500, -17.708, 0.000)的过程中, 要求最大速度为 0.19。从节点 2 (-20.500, -17.708, 0.000) 出发, 顺时针加工, 回到该点(-20.500, -17.708, 0.000) (记为节点 11), 期间要求最大速度为 1.26, 节点 11 处的终止速度为 0。

表 3-1 圆角矩形切割路径加工中速度要求

路径节点	节点坐标(X、Y、Z)	用户设定的最大频率 F	最大频率 F 转换后对应的速度
1	(-20.500,-20.000,0.000)	2773	0.13
2	(-20.500,-17.708,0.000)	4029	0.19
3	(-20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
4	(-20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
5	(20.000,20.500,0.000)	26865	1.26
6	(20.500,20.000,0.000)	26865	1.26
7	(20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26
8	(20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
9	(-20.000,-20.500,0.000)	26865	1.26
10	(-20.500,-20.000,0.000)	26865	1.26
11	(-20.500,-17.708,0.000)	2773	0.13

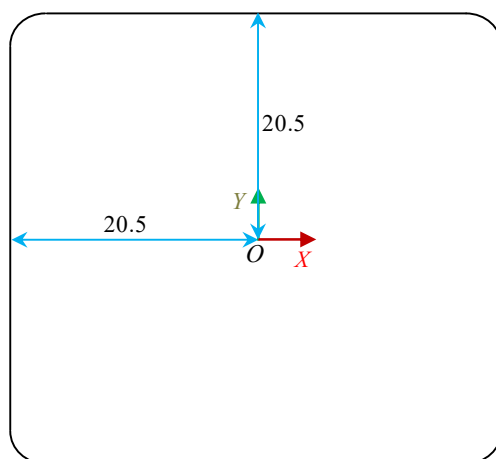


图 2 圆角矩形切割路径

由式(40)可以知道, 刀具在圆弧上运动时的最大步距角为:

$$\Delta\theta_{\max} = 2\theta = \frac{2\sqrt{\varepsilon(2R - \varepsilon)}}{R} = 0.04 \quad (48)$$

由式(10)知, 进入圆弧段允许的最大速度为:

$$V_{\text{begin}} = \sqrt[3]{\frac{72J\epsilon_{\max}^2}{\cos^2(\pi - \theta)}} = 0.002786\text{m/s} \quad (49)$$

由式(41)可以知道:

$$V_{\text{B}} = V_{\text{begin}} = 0.002786\text{m/s} \quad (50)$$

由图 3-1 知,圆弧采用插补算法时的微小弦段长度为:

$$\Delta L = 2R\sin\theta = 0.0001999\text{m}$$

插补次数为:

$$N = \frac{\pi}{2} / \Delta\theta_{\max} + 1 = 40$$

圆弧采用插补时的总共微小弦段长度为：

$$L_M = (N-1) \times \Delta L + 2R \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \Delta\theta_{\max} \times (N-1) \right] = 0.007908m \quad (51)$$

所以刀具在四段圆弧段上运动的时间为：

$$T_M = 4 \times \frac{L_M}{V_B} = 11.3539s \quad (52)$$

①在节点 1 和节点 2 之间运动时，节点 1 和节点 2 之间距离：

$$L_{12} = 0.02292m$$

速度从零加速到 0.19m/min,所需的时间：

$$t_{121} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.20548s$$

t_{121} 时间内运动的路程为：

$$S_{121} = \frac{1}{6} J t^3 = 0.000434m$$

距离节点 2 还剩下的距离为：

$$L_{122} = L_{12} - S_{121} = 0.022486m$$

这段时间按要求得最大速度匀速运动，运动时间为：

$$t_{122} = 60L_{122} / 0.19 = 7.10084s$$

所以刀具在节点 1 到节点 2 之间的运动时间为：

$$T_{12} = t_{121} + t_{122} = 7.3063s \quad (53)$$

②在节点 2 和节点 3 之间运动时，节点 2 和节点 3 之间距离：

$$L_{23} = 0.37708m$$

速度从 0.19m/min 达到到 1.26m/min 所需时间为：

$$t_{231} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.07}{0.3 \times 60}} = 0.48762s$$

t_{231} 时间内运动的路程为：

$$S_{231} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.09844m$$

距离节点 3 还剩距离：

$$L_{232} = 0.27864m$$

速度从 1.26m/min 降到 V_B 所需时间为：

$$t_{232} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928s$$

降速需要行驶的距离为

$$S_{232} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.007357m$$

以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{233} = \frac{L_{232} - S_{232}}{1.26 / 60} = 12.9182s$$

所以刀具在节点 2 到节点 3 之间的运动时间为：

$$T_{23} = t_{231} + t_{232} + t_{233} = 13.89862s \quad (54)$$

③刀具在从节点 4 到节点 5 之间运动时

$$L_{45} = 0.4\text{m}$$

刀具运动速度从 V_B 加速到 1.26m/min 所需时间

$$t_{451} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928\text{s}$$

加速行驶的距离为

$$S_{451} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.007357\text{m}$$

刀具运动速度从 1.26m/min 减速到 V_B 所需时间

$$t_{452} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928\text{s}$$

减速行驶的距离为

$$S_{451} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.007357\text{m}$$

所以刀具以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{453} = \frac{L_{45} - S_{451} - S_{452}}{1.26/60} = 18.3469\text{s}$$

所以刀具在节点 4 到节点 5 之间的运动时间为：

$$T_{45} = t_{451} + t_{452} + t_{453} = 19.33325\text{s} \quad (55)$$

④刀具在节点 6 到节点 7 之间运动和在节点 8 到节点 9 之间运动的情况与在节点 4 和节点 5 之间情况类似。

⑤在节点 10 和节点 11 之间运动时：

$$L_{1011} = 0.02292\text{m}$$

刀具运动速度从 V_B 加速到 1.26m/min 所需时间

$$t_{10111} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928\text{s}$$

加速行驶的距离为

$$S_{10111} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.007357\text{m}$$

刀具运动速度从 1.26m/min 减速 0 时所需时间为：

$$t_{10112} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.52915\text{s}$$

加速行驶的距离为

$$S_{10112} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.01234\text{m}$$

所以刀具以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{10113} = \frac{L_{1011} - S_{10111} - S_{10112}}{1.26/60} = 0.1534\text{s}$$

所以刀具在节点 10 到节点 11 之间的运动时间为：

$$T_{1011} = t_{10111} + t_{10112} + t_{10113} = 1.17535\text{s} \quad (56)$$

由式(52)、(53)、(54)、(55)、(56)可以知道：

总共加工时间为：

$$T_{\text{总}} = T_m + T_{12} + T_{23} + T_{45} \times 3 + T_{1011} = 91.73392s$$

3.3 问题三模型建立与求解

3.3.1 模型的建立与求解

加工型线为直线段与圆弧段组成的连续曲线时，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度时，刀具在线段 AB 上运动时，按照 S 曲线规律进行加减速运动，如图 3-11 所示，设刀具在 S 曲线第 7 段某个时刻到达圆弧与线段的交点处，其中在该时刻刀具的运动速度降到式(41)中要求的大小，刀具加速度降为零。

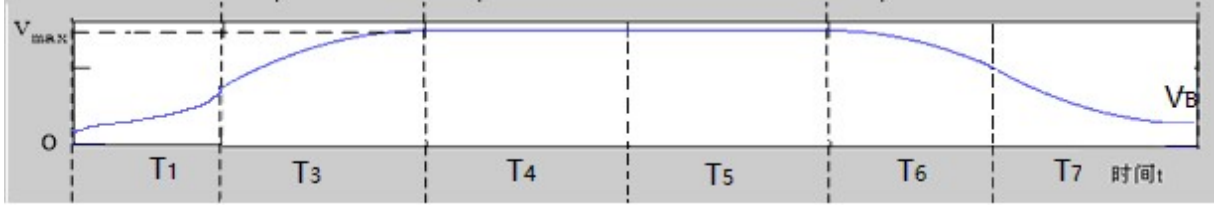


图 3-11 AB 段刀具速度变化

设刀具在 AB 段能够达到的最大速度为 V_{AB} ，则 $V_{AB} \leq V_{\max}$ ，要使刀具在最短的时间通过圆弧，则需要刀具运动速度在最短时间内达到最大速度 V_{AB} ，所以，加速距离中只能有加加速过程和加减速过程，减速距离中只能有加减速过程和减减速过程，为了保证速度减为 V_B 时加速度为零，则在减速过程中加减速过程与减减速过程所用时间相等，即有下式：

$$T_6 = T_7 \quad (57)$$

假设刀具最大速度能够达到 V_{\max} ，则允许的最短直线距离可以按以下公式计算：

在 T_1 、 T_2 和 T_3 的加速过程中，因为要求时间最短，所以没有匀加速阶段。

依照 S 曲线加减速运动规律和图 3-11 和可知：

$$T_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}JT_1^2 + \frac{1}{2}JT_3^2 = V_{\max} \quad (58)$$

$$T_1 = T_3 \quad (59)$$

由式(43)、(44)可解：

$$T_1 = T_3 = \sqrt{\frac{V_{\max}}{J}} \quad (60)$$

同样因为要求加工时间最短，所以没有 S 曲线中的匀减速阶段。依照 S 曲线加减速运动规律可知：

$$V_B + \frac{1}{2}JT_6^2 + \frac{1}{2}JT_7^2 = V_{\max} \quad (61)$$

由 S 曲线加减速运动规律和式(45)、(46)、(47)可得：

能达到最大允许速度 V_{\max} 的最小直线距离为

$$L = V_{\max} \sqrt{\frac{V_{\max}}{J}} + (V_{\max} + V_B) \sqrt{\frac{V_{\max} - V_B}{J}}$$

如果直线距离大于 L，则会有以 V_{\max} 匀速切割的过程；如果直线距离小于 L，则最大速度达到最大速度 $V_{AB} \leq V_{\max}$ 。

由以上的最小距离公式可以判断，某段直线距离能达到的最大速度。

依据 S 曲线加减速运动规律知道运动速度由 V_{\max} 将为 V_B 所需要的时间为:

$$t = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = \sqrt{\frac{4(V_{\max} - V_B)}{J}}$$

$$\text{这段时间运动的位移为: } S_{451} = \frac{1}{6} J t^3 + V_B t \quad (62)$$

由式(47)可以求得当刀具由直线段进入圆弧时所需要减速距离。

3.3.2 示例求解

一个圆角矩形切割路径的示意图, 路径的四个角是半径为 0.5 的整圆的 1/4 圆弧。矩形外围大小是: 41×41 (单位: cm^2)。在实际加工过程中, 从坐标为 $(-20.500, -20.000, 0.000)$ 的节点 1 位置开始下刀, 该点处的瞬时速度为 0.13; 从节点 1 到节点 2 $(-20.500, -17.708, 0.000)$ 的过程中, 要求最大速度为 0.19。从节点 2 $(-20.500, -17.708, 0.000)$ 出发, 顺时针加工, 回到该点 $(-20.500, -17.708, 0.000)$ (记为节点 11), 期间要求最大速度为 1.26, 节点 11 处的终止速度为 0.13。

表 3-1 圆角矩形切割路径加工中速度要求

路径节点	节点坐标(X、Y、Z)	用户设定的最大频率 F	最大频率 F 转换后对应的速度
1	$(-20.500, -20.000, 0.000)$	2773	0.13
2	$(-20.500, -17.708, 0.000)$	4029	0.19
3	$(-20.500, 20.000, 0.000)$	26865	1.26
4	$(-20.000, 20.500, 0.000)$	26865	1.26
5	$(20.000, 20.500, 0.000)$	26865	1.26
6	$(20.500, 20.000, 0.000)$	26865	1.26
7	$(20.500, -20.000, 0.000)$	26865	1.26
8	$(20.000, -20.500, 0.000)$	26865	1.26
9	$(-20.000, -20.500, 0.000)$	26865	1.26
10	$(-20.500, -20.000, 0.000)$	26865	1.26
11	$(-20.500, -17.708, 0.000)$	2773	0.13

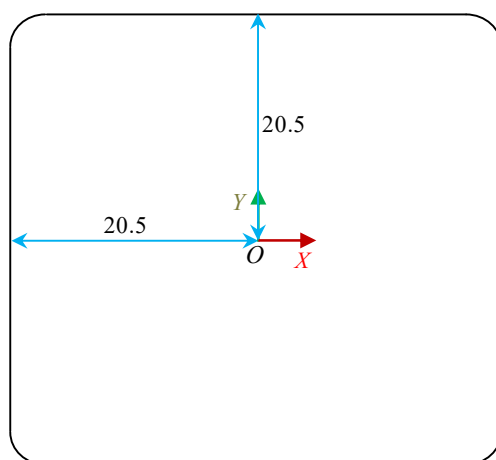


图 2 圆角矩形切割路径

由式(40)可以知道, 刀具在圆弧上运动时的最大步距角为:

$$\Delta\theta_{\max} = 2\theta = \frac{2\sqrt{\varepsilon(2R-\varepsilon)}}{R} = 0.04 \quad (63)$$

由式(10)知, 进入圆弧段允许的最大速度为:

$$V_{\text{beigin}} = \sqrt[3]{\frac{72Je_{\max}^2}{\cos^2(\pi-\theta)}} = 0.002786\text{m/s} \quad (64)$$

由式(41)可以知道:

$$V_B = V_{\text{beigin}} = 0.002786\text{m/s} \quad (65)$$

由图 3-1 知,圆弧采用插补算法时的微小弦段长度为:

$$\Delta L = 2R\sin\theta = 0.0001999\text{m}$$

插补次数为:

$$N = \frac{\pi}{2} / \Delta\theta_{\max} + 1 = 40$$

圆弧采用插补时的总共微小弦段长度为:

$$L_M = (N-1) \times \Delta L + 2R\sin\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2} - \Delta\theta_{\max} \times (N-1)] = 0.007908\text{m} \quad (66)$$

所以刀具在四段圆弧段上运动的时间为:

$$T_M = 4 \times \frac{L_M}{V_B} = 11.3539\text{s} \quad (67)$$

①在节点 1 和节点 2 之间运动时, 节点 1 和节点 2 之间距离:

$$L_{12} = 0.02292\text{m}$$

速度从 0.13m/min 加速到 0.19m/min,所需的时间:

$$t_{121} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.11546\text{s}$$

t_{121} 时间内运动的路程为:

$$S_{121} = \frac{1}{6}Jt^3 = 0.000182\text{m}$$

距离节点 2 还剩下的距离为:

$$L_{122} = L_{12} - S_{121} = 0.022737\text{m}$$

这段时间按要求得最大速度匀速运动, 运动时间为:

$$t_{122} = 60L_{122} / 0.19 = 7.18\text{s}$$

所以刀具在节点 1 到节点 2 之间的运动时间为:

$$T_{12} = t_{121} + t_{122} = 7.29\text{s} \quad (68)$$

②在节点 2 和节点 3 之间运动时, 节点 2 和节点 3 之间距离:

$$L_{23} = 0.37708\text{m}$$

速度从 0.19m/min 达到到 1.26m/min 所需时间为:

$$t_{231} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.07}{0.3 \times 60}} = 0.48762\text{s}$$

t_{231} 时间内运动的路程为:

$$S_{231} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_0 t = 0.09844\text{m}$$

距离节点 3 还剩距离:

$$L_{232} = 0.27864\text{m}$$

速度从 1.26m/min 降到 V_B 所需时间为：

$$t_{232} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928s$$

降速需要行驶的距离为

$$S_{232} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_0t = 0.007357m$$

以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{233} = \frac{L_{232} - S_{232}}{1.26/60} = 12.9182s$$

所以刀具在节点 2 到节点 3 之间的运动时间为：

$$T_{23} = t_{231} + t_{232} + t_{233} = 13.89862s \quad (69)$$

③刀具在从节点 4 到节点 5 之间运动时

$$L_{45} = 0.4m$$

刀具运动速度从 V_B 加速到 1.26m/min 所需时间

$$t_{451} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928s$$

加速行驶的距离为

$$S_{451} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_0t = 0.007357m$$

刀具运动速度从 1.26m/min 减速到 V_B 所需时间

$$t_{452} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928s$$

加速行驶的距离为

$$S_{451} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_0t = 0.007357m$$

所以刀具以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{453} = \frac{L_{45} - S_{451} - S_{452}}{1.26/60} = 18.3469s$$

所以刀具在节点 4 到节点 5 之间的运动时间为：

$$T_{45} = t_{451} + t_{452} + t_{453} = 19.33325s \quad (70)$$

④刀具在节点 6 到节点 7 之间运动和在节点 8 到节点 9 之间运动的情况与在节点 4 和节点 5 之间情况类似。

⑤在节点 10 和节点 11 之间运动时：

$$L_{1011} = 0.02292m$$

刀具运动速度从 V_B 加速到 1.26m/min 所需时间

$$t_{10111} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.4928s$$

加速行驶的距离为

$$S_{10111} = \frac{1}{6}Jt^3 + V_0t = 0.007357m$$

刀具运动速度从 1.26m/min 减速 0.13m/min 时所需时间为：

$$t_{10112} = \sqrt{\frac{4\Delta V}{J}} = 0.501109s$$

减速行驶的距离为

$$S_{10112} = \frac{1}{6} J t^3 + V_0 t = 0.007377m$$

所以刀具以速度 1.26m/min 运动的时间为：

$$t_{10113} = \frac{L_{1011} - S_{10111} - S_{10112}}{1.26 / 60} = 0.38981s$$

所以刀具在节点 10 到节点 11 之间的运动时间为：

$$T_{1011} = t_{10111} + t_{10112} + t_{10113} = 1.38372s \quad (71)$$

由式(67)、(68)、(69)、(70)、(71)可以知道：

总共加工时间为：

$$T_{总} = T_m + T_{12} + T_{23} + T_{45} \times 3 + T_{1011} = 91.52598s$$

3.4 问题四模型建立与求解

3.4.1 模型分析

S 曲线加减速控制的特点如下：S 形速度曲线可以划分为加加速、匀加速、减加速、匀速、加减速、匀减速、减减速这 7 个过程。在加加速、减加速、加减速、减减速这四个过程加速度变化率 J 的绝对值恒定；匀加速和匀减速过程的加速度恒定，为数控系统的最大加速度；匀速过程加速度为 0。

分析针对前三个问题所建立的数学模型，发现：

S 曲线加减速控制具有以下优点：

- (1) 由于在任意位置的加速度都是连续变化的，可以避免柔性冲击，速度曲线平滑。
- (2) S 曲线加减速通过对加速阶段以及减速阶段进行平滑处理来减少机床的冲击，通过对启动阶段加速度衰减，来减小启动冲击，充分发挥电机的性能。

S 曲线加减速控制具有以下缺点：

- (1) 由于 S 曲线加减速控制算法单一路径加工过程中存在初速度和末速度相等的限制，这种限制在加工中造成时间增加，电机变速频繁，影响效率，加减速阶段存在突变以及加加速度并不连续，从而使机床柔性受到限制，在加工过程中会对机床造成一定的柔性冲击。

- (2) S 形曲线加减速算法虽然可实现平滑的运动，但算法相对比较复杂，计算量较大，对系统的硬件要求高，且需要经历 7 个阶段的分析，每个阶段都需要进行条件判断，并且判断关系繁琐。

3.4.2 模型的建立

针对 S 曲线控制的不足，我们可以采用指数加减速控制。

V_c V_s V_e ：分别代表指令速度，起点速度，终点速度；

τ ：调节系统时间常数；

T ：采样周期；

l ：进给距离。

按指数规律变化的速度控制方程为：

$$V(t) = v_e + (v_s - v_e)e^{-t/\tau} \quad (72)$$

加速段:

$$v_s = 0, v_e = v_c$$

故:

$$v(t) = v_c (1 - e^{-t/\tau}) \quad (73)$$

当 $t \ll \tau$ 时, $v(t) \approx 0$;

当 $t \gg \tau$ 时, $v(t) \approx v_c$ 。

匀速段:

$$v_s = v_e = v_c \quad (74)$$

故:

$$v(t) = v_c$$

减速段:

$$v_s = v_c, v_e = 0$$

故:

$$v(t) = v_c e^{-t/\tau} \quad (75)$$

当 $t \ll \tau$ 时, $v(t) \approx v_c$;

当 $t \gg \tau$ 时, $v(t) \approx 0$ 。

四、总结

随着相关技术的发展,数控系统正发生着革命性的变革,高速高精加工已经成为新的趋势。数控加工的效率与质量极大地取决于加工方案与加工参数的合理选择,包括合适的机床、刀具形状与尺寸、走刀路线、主轴速度、切削深度和进给速度等。对于加工方案与参数的自动选择与优化是数控加工走向智能化与自动化的重要标志。

轨迹间转角处的加工严重制约着机床的加工效率和精度的提高,本文提出了一种算法,通过该算法可以求出在满足加工误差的条件下允许的最大转接速度,可以使刀具在运动速度降为零之前即到达拐点之前,使其运动方向发生改变,可以缩短加工时间。本文还深入研究了数控机床运动控制算法,包括速度控制算法和插补算法,针对当前轨迹段与直线连接、与圆弧连接的两种转接处理方法进行了分析,基于 S 曲线加减速,实现了一个矢量转接方法。该方法采用相邻轨迹段同之间段之间同时进行速度规划,合成位移作为机床的进给位移的方式处理轨迹间的速度平滑转接,并针对此方法建立了相关数学模型进行了验证。

参考文献

- [1] 潘海鸿,杨微,陈琳等. 全程 S 曲线加减速控制的自适应分段 NURBS 曲线插补算法. 中国机械工程学报. 2010,21(2):190-195.
- [2] 张振华. 数控系统加减速算法及定位技术研究[硕士学位论文]. 大连:大连理工大学.2007.
- [3] 张立先,孙瑞勇,李洪波,高小山. 数控插补中基于运动曲线的局部优化和基于前瞻控制的整体优化. 系统科学与数学. 2010,30(11):1548-1561.
- [4] 余建群. 数控切绘系统曲线拟合及轨迹优化研究与应用[硕士学位论文]. 武汉:湖北工业大学.2011.
- [5] 刘清建. 数控系统运动控制及运行优化[博士学位论文]. 天津:天津大学.2010.
- [6] 付云忠,王永章,富宏亚,路华. 多轴联动线性插补及其“S 加减速”规划算法. 设计与研究.2001,9:9-11.
- [7] 何均,游友鹏,陈浩,王化明. S 加减速的嵌套式前瞻快速算法. 航空学报. 2010,31(4):842-851.
- [8] 张翼,李文,孙玉敏,罗学科. NURBS 曲线插补算法的研究. 机械研究与应用. 2007,20(3):21-23.
- [9] He Jun, You You-peng, Chen Hao, et al. A fast nested look-ahead algorithm with S-shape acceleration and deceleration [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2010,31(4): 842-851.
- [10] 陈铮杰,赵东标,李国强. 一种自适应前瞻的微线段速度平滑插补算法. 机械设计与制造工程. 2014,43(3):41-44.
- [11] 李晓辉,鄢义杰,冷洪滨. S 曲线加减速控制新方法的研究. 控制与检测. 2007,10:50-53.
- [12] 王禾玲. 数控加工刀具运动轨迹的研究[硕士学位论文].西安:西北农林科技大学.2006.
- [13] 郝双晖,宋芳,郝明晖,宋宝玉. 参数限制快速求解 S 曲线加减速控制算法研究. 工艺与检测.2008,07:84-86.
- [14] 陈友东,魏洪兴,王琦魁. 数控系统的直线和 S 形加减速离散算法. 中国机械工程学报.2010,5:567-570.