



## 第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目

乘用车物流运输计划问题

### 摘 要:

本文主要解决的是乘用车整车物流的运输调度问题,通过对轿运车的空间利用率和运输成本进行优化,建立整数规划模型,设计了启发式算法,求解出了各种运输条件下的详细装载与运输方案。

针对前三问,由于不考虑目的地和轿运车的路径选择,将问题抽象为带装载组合约束的一维装车问题,优化目标是在保证完成运输任务的前提下尽可能满载,选择最优装载组合方案使得所使用的轿运车数量最少。对于满载的条件,将其简化为考虑轿运车的空间利用率最大,最终建立了空间利用率最大化和运输成本最小化的两阶段装载优化模型。该模型类似于双目标规划模型,很难求解。为此,将空间利用率最大转换为长度余量最少,并为其设定一个经验阈值,将问题转换为求解整数规划问题,利用分支定界法进行求解。由于分支定界法有时并不能求得最优解,设计了一种基于阈值的启发式调整优化算法。最后,设计了求解该类问题的通用算法程序,并对前三问的具体问题进行了求解和验证。通过求解得出,满足前三问运输任务的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量如下表所示(具体的乘用车装载方案见表 2、表 5、表 7):

	第一问	第二问	第三问
1-1	16	12	25
1-2	2	1	5

针对问题四,其是在问题一的基础上加入了整车目的地的条件,需要考虑最优路径的选择。在运输成本上,加入了行驶里程成本,因而可以建立所使用的轿运车数量最少和总里程最少的双目标整数规划模型。对于此种模型,可以采用前三问所设计的通用算法进行求解。此时,需要重新设计启发式调整优化算法。为此,根据路线距离的远近和轿运车数量需要满足的比例约束条件设计

了新的调整优化方案。最终求得的各目的地的轿运车使用数量如下表所示，此时的总路程为 6404，具体装载方案见表 9。

	A	B	C	D	总数
1-1 型	1	6	9	5	21
1-2 型	4	0	0	0	4
总量	5	6	9	5	25

针对问题五，作为问题四的扩展研究，类似于问题四建立了双目标规划模型。由于乘用车的种类达到了 45 种，导致轿运车的装载组合方案急剧增多。如果仍采用穷举法确定装载组合方案，将产生“组合爆炸”。为此，采用基于排样算法的装载优化算法，来避免这种现象。这种算法的基本流程是：首先按照乘用车的宽、高将乘用车分为“高”、“低窄”、“低宽”三种车型； 然后根据不同类型的乘用车在不同目的地的需求量，构建关系树；接着根据关系树和启发式调整优化算法来确立初步配载方案；最后验证配载方案是否满足约束条件以求得最终方案。其中，启发式调整优化算法仍然是基于经验的，这里主要考虑轿运车上层空间的利用率最大化和距离较远的点以尽可能地减少轿运车的数量，同时也要满足不同轿运车型之间的数量比例约束。最终求得的各目的地轿运车的详细使用量如下表所示，并且完成运输任务所需行驶的总里程为 35140。

序号	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D	目的地 E	余量
1	0	14	7	0	0	0
2	0	7	0	10	0	1
3	11	0	0	0	11	0
4	12	0	3	0	0	0
5	2	0	0	0	8	0
6	0	0	0	0	0	25
7	0	0	4	0	0	0
8	0	1	15	0	0	0
9	5	0	0	0	0	0
10	4	3	0	1	0	1
目的地总量	34	25	29	11	19	27
轿运车总量	118					

**关键词：**整车物流 整数规划 分支定界法 经验阈值 启发式调整优化 排样算法

## 一、 问题重述

### 1.1 问题背景

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。随着我国汽车工业的高速发展，整车物流量，特别是乘用车的整车物流量迅速增长。

乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以调用的“轿运车”中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。“轿运车”是通过公路来运输乘用车整车的专用运输车，根据型号的不同有单层和双层两种类型，而单层轿运车实际中很少使用，本题仅考虑双层轿运车。

在确保完成运输任务的前提下，物流公司追求降低运输成本。但由于轿运车、乘用车有多种规格等原因，当前很多物流公司在制定运输计划时主要依赖调度人员的经验，在面对复杂的运输任务时，往往效率低下，而且运输成本不尽理想。

### 1.2 已知信息

(1) 每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。

(2) 1-1 型及 2-2 型轿运车上、下层装载区域相同；第五问中 1-2 型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽 0.8 米。

(3) 受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层，2-2 型上、下层均不能装载高度超过 1.7 米的乘用车。

(4) 在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，但物流公司 1-2 型轿运车拥有量小，为方便后续任务安排，每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%。

(5) 在轿运车使用数量及型号均相同情况下，行驶里程短的成本低。

### 1.3 需要解决的问题

请为物流公司安排以下五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线。（前三问目的地只有一个，可提供一个通用程序；后两问也要给出启发式算法的程序，优化模型则更佳）：

(1) 物流公司要运输 I 车型的乘用车 100 辆及 II 车型的乘用车 68 辆。

(2) 物流公司要运输 II 车型的乘用车 72 辆及 III 车型的乘用车 52 辆。

(3) 物流公司要运输 I 车型的乘用车 156 辆、II 车型的乘用车 102 辆及 III 车型的乘用车 39 辆。

(4) 物流公司要运输 166 辆 I 车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆 II 车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的分别为 31、47 辆）。

(5) 根据附件表 1 给出的物流公司需要运输的乘用车类型（含序号）、尺寸大小、数量和目的地和附件表 2 给出的可以调用的轿运车类型（含序号）、数量和装载区域大小，采用启发式算法，求解装载、运输方案，并自行设计运输方案的表达形式。

## 二、 模型假设

- (1) 每辆轿运车装载乘用车的组合是独立的；
- (2) 轿运车装载乘用车时上下层部分是对称的，即数量一致；
- (3) 轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回；
- (4) 轿运车在运输过程中不存在往返情况；
- (5) 每次卸车成本可以忽略不计。

## 三、 基本符号说明

符号	符号说明	符号	符号说明
$v_n$	第 $v$ 辆车的装载组合数	$L$	轿运车的长度
$C_{vjk}$	第 $v$ 辆车第 $j$ 个装载组合装载第 $k$ 种类型物品的容量	$l_j$	第 $j$ 种乘用车的长度
$x_{ivj}$	物品 $i$ 装载在车辆 $v$ 的第 $j$ 个装载组合	$c$	安全距离
$y_{vj}$	车辆 $v$ 选择第 $j$ 个装载组合	$x_i$	第 $i$ 种方案的使用数量
$C_{ij}$	第 $i$ 种装载组合方案能承载第 $j$ 种乘用车的数目	$r$	长度余量
$N_j$	需要装载的第 $j$ 种乘用车的数量	$T$	经验阈值
$P_k$	O 到 A、B、C、D、E 的距离	$S$	轿运车的总路程
$b_{jk}$	第 $j$ 种乘用车运往第 $k$ 个目的地的数量	$y_{ik}$	第 $i$ 种方案去第 $k$ 个目的地

## 四、 问题分析

本文研究的是乘用车物流运输计划问题，通过对轿运车的空间利用率和运输成本进行优化，设计启发式算法，以求解各种运输条件下详细的装载与运输方案，能够使得轿运车的利用率达到最高、运输成本达到最低、行车路线最优。针对题中的五个问题，分析如下：

### 4.1 问题一分析

题目要求给出运输 I 车型的乘用车 100 辆及 II 车型的乘用车 68 辆时物流公司的运输方案。本问题即将给定数量的 I 车型和 II 车型乘用车装载到 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车上，并使得所用的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量之和最少，亦即成本最少。并在满足数量最少的前提下，求解 I 车型和 II 车型乘用车的最佳装载组合方案，以使得两种轿运车空间利用率达到最大。由于两种乘用车的高度均不超过 1.7 米，且其宽度小于轿运车的下层宽度、两倍宽度也不超过轿运车的上层宽度，即 I 车型和 II 车型乘用车可以装载在 1-1 型和 1-2 型轿运车的任意层上。所以，问题可以归结为一维组合装车问题，求解的目标是充分利用轿运车的长度，以使得轿运车的长度余量最少，则轿运车的空间利用率

也将达到最大。

#### 4.2 问题二分析

题目要求给出运输 II 车型的乘用车 72 辆及 III 车型的乘用车 52 辆时物流公司的运输方案。本问题即将给定数量的 II 车型和 III 车型乘用车装载到 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车上,并使得所用的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量之和最少,亦即成本最少。并在满足数量最少的情况下,求解 II 车型和 III 车型乘用车的最佳装载组合方案,以使得两种轿运车空间利用率达到最大。由于 III 车型乘用车的高度大于 1.7 米,根据题目中的要求,只能将其装载在 1-1 型和 1-2 型轿运车的下层上。而 II 车型的乘用车,仍然可以装载在 1-1 型和 1-2 型轿运车的任意层。问题仍为求解一维组合装车问题,求解的目标是充分利用轿运车的长度,以使得轿运车的长度余量最少。

#### 4.3 问题三分析

题目要求给出运输 I 车型的乘用车 156 辆、II 车型的乘用车 102 辆及 III 车型的乘用车 39 辆时物流公司的运输方案。本问题即将给定数量的 I 车型、II 车型和 III 车型乘用车装载到 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车上,并使得所用的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量之和最少,亦即成本最少。并在满足数量最少的情况下,求解 I 车型、II 车型和 III 车型乘用车的最佳装载组合方案,以使得两种轿运车空间利用率达到最大。此问题可以看作是前两问的延伸,此时 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车下层均可以装载三种乘用车,而上层只能装载 I 车型和 II 车型轿运车。

#### 4.4 问题四分析

题目要求给出运输 166 辆 I 车型的乘用车(其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆)和 78 辆 II 车型的乘用车(其中目的地是 A、C 的分别为 31、47 辆)时物流公司的运输方案。本问题可以看作是问题一的延伸,在问题一的基础上将路径加入到了考虑之列,目的地不再相同。问题变成将给定数量的 I 车型和 II 车型乘用车装载到 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车上,并运往相应的目的地,以满足各目的地的需求,使得运输成本最少。而影响运输成本的首要因素是轿运车使用数量,其次是行驶里程长短。因而问题转换为求解 I 车型和 II 车型乘用车的最佳装载组合方案,以使得两种轿运车的使用总数量最小且所需的路程最短。这是一个双目标规划问题,此时轿运车有可能不再满足满载的条件。

#### 4.5 问题五分析

题目要求利用 10 种不同规格轿运车,来装载 45 种不同规格的乘用车,以满足 A、B、C、D、E 五个目的地对 45 种乘用车的数量需求。本问题可以看作是问题四的扩展研究,只是问题比第四问要复杂的多,但整体的模型是一致的。对于这种 NP-难问题,寻找最优解是不切实际的,需要重新设计启发式算法,简化目标函数,使其更容易求解,以期能够求得满足约束条件的可行解。

### 五、 问题求解与算法设计

#### 5.1 装载问题的基本模型

##### 5.1.1 模型定性分析

在不考虑整车目的地和轿运车的路径选择的情况下，问题可抽象为带装载组合约束的一维装车问题<sup>[1]</sup>，即有  $n$  个属于  $l$  种类型的相同（单位）尺寸的物品，有  $w$  辆车，每辆车对这  $l$  种类型的物品有几种装载组合，不同车辆的装载组合不同，每辆车选择一种装载组合并严格按照物品组合进行装载。优化目标是在满载的情况下装载最多的物品，同时给出每个物品的具体配载方案。

### 5.1.2 复杂性分析

考虑带装载组合约束的一维装车问题的简化问题，当每辆车只有一个装载组合时，问题变为：有  $l$  种类型的物品，类型  $k$  的物品数  $N_k$ ，有  $n$  个装载组合，第  $j$  个装载组合对类型  $k$  物品的容量  $C_{jk}$ ，对所有类型物品的容量  $C_j$ ，选择装载组合以尽可能装载最多的物品。已知多维背包问题为 NP—难问题<sup>[2]</sup>，而多维背包问题可以转化为一维组合装车问题的简化问题，则一维组合装车问题的简化问题为 NP—难问题，显然一维组合装车问题更为复杂，也即一维组合装车问题为 NP—难问题。

### 5.1.3 一维组合装车问题线性混合整数规划模型<sup>[3]</sup>

问题最终结果是给出具体的装载方案，即物品装载在哪辆车的哪个装载组合上，因此以物品作为决策主体，物品选择车辆、装载组合。

设物品数为  $m$ ，类型数为  $l$ ，车辆数为  $w$ ，第  $v$  辆车的装载组合数为  $v\_n$ ，第  $v$  辆车第  $j$  个装载组合装载第  $k$  种类型物品的容量为  $C_{vjk}$ ， $x_{ivj}$  为物品  $i$  是否装载在车辆  $v$  的第  $j$  个装载组合上的 0、1 变量， $y_{vj}$  为车辆  $v$  是否选择第  $j$  个装载组合的 0、1 变量，则有如下数学模型：

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^w \sum_{j=1}^{v\_n} x_{ivj} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{j=1}^{v\_n} y_{vj} \leq 1, & v=1,2,\dots,w \\ \sum_{v=1}^w \sum_{j=1}^{v\_n} x_{ivj} \leq 1, & i=1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^m x_{ivj} = C_{vjk} y_{vj}, & \text{if } m_i = k \\ & k=1,2,\dots,l; v=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,v\_n \\ x_{ivj} \in \{0,1\} & i=1,2,\dots,m, v=1,2,\dots,w, j=1,2,\dots,v\_n \\ y_{vj} \in \{0,1\} & v=1,2,\dots,w, j=1,2,\dots,v\_n \end{cases} \end{aligned} \quad (5-1)$$

优化目标为物品装载数最多；约束式第一式表示一辆车最多只能选择一种装载组合；第二式表示一个物品最多只能被装载到一辆车的某个装载组合上；第三式表示每辆车必须严格按照装载组合装满每种类型的物品；第四、五式定义了变量的取值范围。

## 5.2 两阶段装载优化模型的建立

### 5.2.1 实际问题的分析与简化

在本问题中，有三种类型的乘用车，其数量根据具体的运输任务而定，每种车的规格均不同。轿运车也有两种，其规格也有较大差异。现要考虑将给定数量的三种类型的乘用车装载到两种类型的较运车上，但轿运车的数量可以无

限多。为了保证完成运输任务的前提下，降低整车物流的运输成本，目标函数变为在满足满载的情况下，选择最优装载组合方案，使得所使用的轿运车数量最少。而满载的条件在本问题中不再适用，我们简化为考虑轿运车的空间利用率最大，为此，建立了两阶段装载优化模型<sup>[4]</sup>。

### 5.2.2 装载组合方案的确定

在给定运输任务的乘用车类型后，根据各乘用车的规格和各装载用轿运车的规格，首先确定 1-1 型和 1-2 型轿运车每层可以装载的乘用车类型，然后依据 1-1 型和 1-2 型轿运车的实际长度，再加上纵向的安全车距的限制，采用穷举法，可以确立各类型轿运车的所有装载组合。

假定轿运车的长度为  $L$ ，第  $j$  种乘用车的长度为  $l_j$  ( $j = 1, 2, 3$  分别代表 I 型、II 型、III 型)，并用  $k_j$  表示装载组合中承载的第  $j$  种乘用车的数目，安全距离  $c=0.1$ ，满足要求的装载组合方案应满足（只考虑单个下层的情况，其它层类似）：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 [(k_j - 1) \cdot c + k_j \cdot l_j] \leq L, \\ \sum_{j=1}^3 k_j \leq L / \min(l_1, l_2, l_3) \end{cases} \quad (5-2)$$

### 5.2.3 两阶段装载优化模型

#### (1) 第一阶段：空间利用率最大化优化模型

##### a) 目标函数的确定

考虑到无论是使用 1-1 型轿运车还是 1-2 型轿运车，均采用双层装载。而且为了安全，下层装载的是重心高度较高的乘用车，如 III 车型乘用车。再者，I 车型和 II 车型乘用车的宽度均在轿运车的允许范围之内。因此，轿运车在装载乘用车时，在高度和宽度上并不存在利用的概念，在最大化空间利用率时仅需考虑长度的充分利用即可，而具体装载辆数取决于乘用车的类型。

设  $C_{i,j}$  表示第  $i$  种装载组合方案能承载第  $j$  种乘用车的数目 ( $i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, M$ ， $m$  为使用 1-1 型轿运车的最大方案数， $M$  为分别使用 1-1 型、1-2 型轿运车的总方案数之和； $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ，分别表示上 I（I 型车放在上层，后面依次类推）、上 II、下 I、下 II、下 III 五种情况）， $n$  表示轿运车的列数（1-1 型为 2，1-2 型为 3，2-2 型为 4），则目标函数可以表示为：

$$\max F = (C_{i,1} \cdot l_1 + C_{i,2} \cdot l_2 + C_{i,3} \cdot l_1 + C_{i,4} \cdot l_2 + C_{i,5} \cdot l_3 + \sum_{j=1}^5 (C_{i,j} - 1) \cdot c) / (n \cdot L) \quad (5-3)$$

##### b) 约束条件的确定

轿运车装载时，应保证乘用车与乘用车之间，乘用车与轿运车端壁之间的最小间隙，避免发生碰撞，此安全距离为 0.1 米，同时应满足轿运车的装载长度约束。即，满足的约束条件如下：

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^2 C_{i,j} \cdot l_j + \sum_{j=1}^2 (C_{i,j} - 1) \cdot c \leq L \\ \sum_{j=3}^5 C_{i,j} \cdot l_j + \sum_{j=3}^5 (C_{i,j} - 1) \cdot c \leq L \end{cases} \quad (5-4)$$

## (2) 第二阶段：运输成本最小化优化模型

### a) 目标函数的确定

由于影响整车物流运输成本高低的主要因素首先是轿运车使用数量，其次是在轿运车使用数量相同情况下的轿运车使用成本，最后是行驶里程成本。而在前三问的模型中，不考虑路径问题，因而我们以轿运车的使用数量最少为主要考虑因素，对组合方案进行优化，以使运输成本最小。

设第  $i$  种方案的使用数量为  $x_i (i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, M)$ ，则目标函数为：

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \quad (5-5)$$

### b) 约束条件的确定

由于 1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值。为了降低成本，应使 1-2 型轿运车使用量少于 1-1 型轿运车，且每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，这也符合物流公司 1-2 型轿运车拥有量小的实际；再者，无论采用哪些组合方案，都必须满足物流公司的运输安排，努力完成任务。即，满足的约束条件如下：

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=m+1}^M x_j \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,1} + C_{i,3}) \cdot x_i = N_1, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = N_2, \\ \sum_{i=1}^M C_{i,5} \cdot x_i = N_3, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z \end{cases} \quad (5-6)$$

其中， $N_j$  为需要装载的第  $j$  种乘用车的数量。

### 5.2.4 基于经验阈值的求解优化方法

考虑到在求解上述两阶段装载优化模型时，问题归结为一个双目标规划问题，实际求解时较为困难。为此，对问题进行重新分析，空间利用率最大可以等价于长度余量最少，而组合方案的求解时也可以通过考虑长度余量来进行分析。设长度余量为  $r$ ，则

$$r = n \cdot L - C_{i,1} \cdot l_1 + C_{i,2} \cdot l_2 + C_{i,3} \cdot l_1 + C_{i,4} \cdot l_2 + C_{i,5} \cdot l_3 + \sum_{j=1}^5 (C_{i,j} - 1) \cdot c \quad (5-7)$$

根据实际情况， $r$  应满足非负的要求。

由于每种方案的长度余量不同，但对于每种类型的轿运车的所有装载组合方案，其长度余量必有一个取值范围，我们可以考虑人为的给定一个阈值。这样可以对组合方案进行有目的的筛选，也可以解决因穷举法产生的“组合爆炸”问题，同时也考虑了空间利用率最大。因而，求解两阶段装载优化问题最终归结为一个整数规划问题



$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \quad (5-8)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=m+1}^M x_j \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,1} + C_{i,3}) \cdot x_i = N_1, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = N_2, \\ \sum_{i=1}^M C_{i,5} \cdot x_i = N_3, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z \\ 0 < r < T \end{cases}$$

其中,  $T$  为阈值, 根据经验获得, 在本文的计算中,  $T$  取 2。

### 5.3 装载优化模型的通用求解算法设计

#### 5.3.1 求解整数规划的分支定界算法

分支定界算法是一种隐枚举法, 是整数规划中常用的算法之一<sup>[5]</sup>。它的主要思想是根据某种策略将原问题松弛问题的可行域分解为越来越小的子域, 并检查每个子域内整数解的情况, 直到找到最优整数解或证明整数解不存在。

分支定界法从求松弛问题开始, 将问题可行域分为许多的子域(最通常的分解方式是“两分法”), 这一过程称为分支; 通过分支找到更好的整数解来不断的修改问题的上下解, 这一过程称为定界。定界的目的是为了测定界的趋势, 留下有价值的或尚不能判定的分支。删除肯定不存在最优解的分支, 称之为剪枝, 以达到加速收敛, 简化运算的目的。不同的分支定界方法在于分支、定界和剪枝的不同处理手段上, 其算法的一般步骤可概括为:

Step1: 初始化。选择可行域的  $S$  的初始松弛集合  $F$ , 满足  $F \supseteq S$ ; 初始可行点集合  $Q = \varnothing$ , 上界  $\alpha = +\infty$ , 令  $P = \{F\}$ , 计算下界  $\beta(F) \leq \min\{f(x), x \in S\}$ , 并令  $\beta = \beta(F)$ 。在计算  $\beta(F)$  的过程中, 若有必要, 则更新  $Q$  和  $\alpha$ 。

Step2: 分割。将  $F$  分割成有限个子集  $F_i$ ,  $i \in I$  (指标集) 满足

$$F = \bigcup_{i \in I} F_i, \text{int } F_i \cap \text{int } F_j = \varnothing, \forall i, j \in I, i \neq j, \text{ 令 } P = (P \setminus F) \bigcup \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)。$$

Step3: 剪枝。对每个  $i \in I$ , 计算  $f$  在子集  $F_i$  上的下界  $\beta(F_i)$ , 使其满足  $\beta(F_i) \leq \text{int } f(F_i \cup S)$ , 利用在计算  $\beta(F_i)$  的过程中所发现的所有可行点修正集合  $Q$ , 同时按照合适的删除规则, 删除  $P$  中所有不包含最优解的  $F_i$  或  $F_i$  的一部分, 剩余集合不妨仍记为  $P$ ;

Step4: 定界。令  $\beta = \min\{\beta(F_i) | F \in P\}$ ,  $\alpha = \min\{f(x) | x \in Q\}$ 。

Step5: 终止判断。若  $\alpha - \beta \leq \varepsilon$  (充分小的正数), 则终止算法。否则, 从

$P$  中挑选合适的子集  $F$ ,  $F \in P$ , 转入步骤 2。

### 5.3.2 启发式调整优化

启发式算法<sup>[3]</sup>是一种基于直观或经验构造的算法,在可接受的花费(指计算时间和空间)下给出待解决组合优化问题每一个实例的一个可行解,该可行解与最优解的偏离程度不一定事先可以预计。

利用分支定界法求解整数规划问题(5-8)所得的解有时并不是最优解,此时就需要进行调整,这时只需要在保证轿运车总数量不变的情况下,对可行解进行启发式的局部调整即可。这种启发式的调整思路大致如下:

- (1) 放宽阈值  $T$ , 扩大解的范围;
- (2) 根据经验, 将新解范围中的某一种方案的数量与可行解相应的方案数量进行替换;
- (3) 验证新的解是否满足约束条件, 如果新解满足约束条件且新解的轿运车数量总数不超过可行解, 则新解即为可能的最优解;
- (4) 在这些所有可能的最优解中, 寻找轿运车数目最少的即为最优解。

启发式算法简单直观, 速度快, 容易被接受, 但在最坏情况下, 也不能获得最优解, 这时就只能通过人工干预进行调整, 以获得最优解。

### 5.3.3 通用算法设计

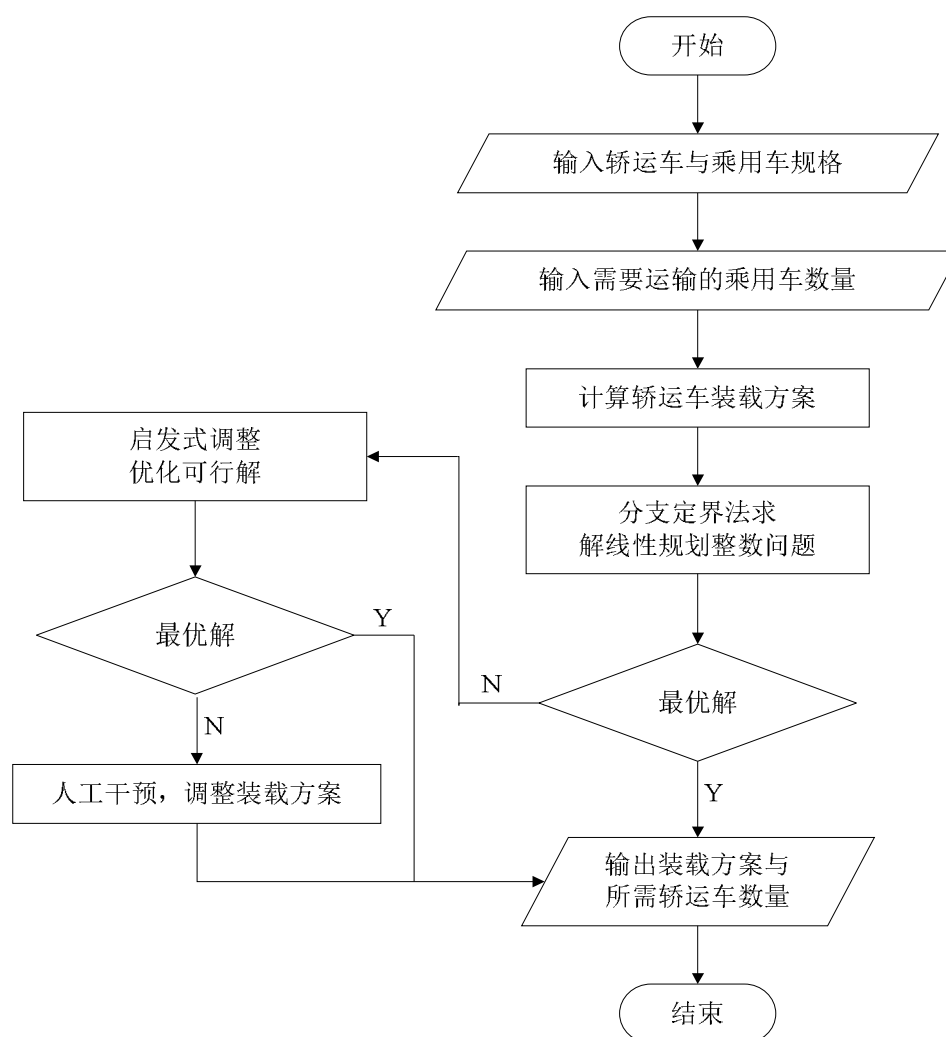


图 1 通用算法流程图

本文通过前三问的求解，归纳总结出了一种适合求解前三问的通用算法，并用一个通用程序进行了实现。所实现的通用程序，能够满足前三问运输任务，并能按照题目要求输入输出最优解。算法的流程图如图 1 所示，这里，简单叙述一下通用算法的主要步骤：

Step1: 分别输入轿运车与乘用车的规格数据（长、宽、高），并输入需要运输的三种乘用车的数量，如果没有某种乘用车，则输入 0；

Step2: 通过（5-2）式来计算所有可能的轿运车装载方案，并进行编号；

Step3: 利用分支定界法求解式（5-8）所示的整数规划问题，并对所求得的解进行验证，如果求得的解就是最优解，则转到 Step6；否则继续；

Step4: 按照上节所述的启发式调整优化方法继续求解优化，寻找最优解，并对所求得的解进行验证，如果所得的解即是最优解，则转到 Step6；否则继续；

Step5: 对上步所得的可行解进行人工干预，局部小范围调整方案，以获得最优解；

Step6: 按照题目要求输出装载方案与所需轿运车数量的 Excel 格式。

#### 5.4 问题一求解

本问题中， $N_1=100$ ， $N_2=68$ ， $N_3=0$ ，带入式（5-8）中，可得问题一的具体模型为：

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \quad (5-9)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=m+1}^M x_j \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,1} + C_{i,3}) \cdot x_i = 100, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = 68, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z \\ 0 < r < 2 \end{cases}$$

将  $N_1=100$ ， $N_2=68$ ， $N_3=0$  输入到通用程序中，可以求得 11 种装载组合方案，如表 1 所示，其中前 5 种为使用 1-1 型轿运车时的所有可能装载组合方案，后 6 种为使用 1-2 型轿运车时的所有可能装载组合方案。

表 1 问题一的所有可能装载组合方案

方 案 数 目	方 案 1	方 案 2	方 案 3	方 案 4	方 案 5	方 案 6	方 案 7	方 案 8	方 案 9	方 案 10	方 案 11
上层装载 I 型乘用车数目	4	3	2	1	0	10	8	6	4	2	0
上层装载 II 型乘用车数目	0	1	2	3	5	0	2	4	8	10	12
下层装载 I 型乘用车数目	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
下层装载 II 型乘用车数目	0	1	2	3	5	0	1	2	4	5	6

最终求得的所有装载方案情况如表 2 所示：

表 2 问题一的装载方案

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为1乘用车数量	装在上层序号为2乘用车数量	装在上层序号为3乘用车数量	装在下层序号为1乘用车数量	装在下层序号为2乘用车数量	装在上层序号为3乘用车数量	中间停靠地	目的地
1-1 型	11	4	0	0	4	0	0	0	0
1-1 型	5	0	5	0	0	5	0	0	0
1-2 型	2	4	8	0	2	4	0	0	0

统计的轿运车数量，如表 3 所示：

表 3 问题一的轿运车数量统计

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	16
1-2 型	2

利用 MATLAB 软件实现了前三问通用算法的 exe 可执行文件，其第一问运行结果如图 2 所示。图 2 中，读取的 excel 表格名字为“inputData\_1”，输出了 inputData\_1.xls 中输入的乘用车数量以及通过算法所得到的不同类型轿运车数量，其具体轿运车装载方案输出并保存在了 outData\_1.xls 与 outData\_1\_2.xls 中。

图 2 第一问运行结果

## 5.5 问题二求解

本问题中， $N_1=0$ ， $N_2=72$ ， $N_3=52$ ，带入式（5-8）中，可得问题二的具体模型为：

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \quad (5-10)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=m+1}^M x_j \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = 72, \\ \sum_{i=1}^M C_{i,5} \cdot x_i = 52, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z \\ 0 < r < 2 \end{cases}$$

将  $N_1=0$ ,  $N_2=72$ ,  $N_3=52$  输入到通用程序中, 可以求得 9 种装载组合方案, 如表 4 所示, 其中前 4 种为使用 1-1 型轿运车时的所有可能装载组合方案, 后 5 种为使用 1-2 型轿运车时的所有可能装载组合方案。

表 4 问题二的所有可能装载组合方案

数 目 \ 方 案	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8	方案 9
上层装载 II 型乘用车数目	5	5	5	5	12	12	12	12	12
下层装载 II 型乘用车数目	0	1	2	3	0	1	2	4	5
下层装载 III 型乘用车数目	4	3	2	1	5	4	3	2	1

最终求得的所有装载方案情况如表 5 所示:

表 5 问题二的装载方案

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	中间停靠地	目的地
1-1 型	12	0	5	0	0	0	4	0	0
1-2 型	1	0	12	0	0	0	5	0	0

统计的轿运车数量, 如表 6 所示:

表 6 问题二的轿运车数量统计

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	12
1-2 型	1

利用 MATLAB 软件实现了前三问通用算法的 exe 可执行文件, 其第一问运

行结果如图 3 所示。图 3 中，读取的 excel 表格名字为“inputData\_2”，输出了 inputData\_2.xls 中输入的乘用车数量以及通过算法所得到的不同类型轿运车数量，其具体轿运车装载方案输出并保存在了 outData\_2.xls 与 outData\_2\_2.xls 中。

图 3 第二问运行结果

### 5.6 问题三求解

本问题中， $N_1=156$ ， $N_2=102$ ， $N_3=39$ ，带入式 (5-8) 中，可得问题三的具体模型为：

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \quad (5-11)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=m+1}^M x_j \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,1} + C_{i,3}) \cdot x_i = 156, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = 102, \\ \sum_{i=1}^M C_{i,5} \cdot x_i = 39, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z \\ 0 < r < 2 \end{cases}$$

将  $N_1=156$ ， $N_2=102$ ， $N_3=39$  输入到通用程序中，由于此时得到的所有可能装载组合方案达到了 140 种，所以不再列出。

最终求得的所有装载方案情况如表 7 所示：

表 7 问题三的装载方案

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为1乘用车数量	装在上层序号为2乘用车数量	装在上层序号为3乘用车数量	装在下层序号为1乘用车数量	装在下层序号为2乘用车数量	装在上层序号为3乘用车数量	中间停靠地	目的地
1-1 型	1	0	5	0	0	3	1	0	0
1-1 型	1	4	0	0	0	0	4	0	0
1-1 型	5	4	0	0	2	0	2	0	0
1-1 型	11	4	0	0	3	0	1	0	0
1-1 型	2	0	5	0	2	0	2	0	0
1-1 型	5	0	5	0	3	0	1	0	0
1-2 型	5	4	8	0	1	4	1	0	0

统计的轿运车数量，如表 8 所示：

表 8 问题三的轿运车数量统计

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	25
1-2 型	5

我们用 MATLAB 软件实现了前三问通用算法的 exe 可执行文件，其运行结果如图 4 所示。图 4 中，读取的 excel 表格名字为“inputData\_3”，输出了 inputData\_3.xls 中输入的乘用车数量以及通过算法所得到的不同类型轿运车数量，其具体轿运车装载方案输出并保存在了 outData\_3.xls 与 outData\_3\_2.xls 中。

The figure shows a MATLAB GUI window with a light green background. At the top, there is a label 'excel名称输入' (Excel name input) followed by a text box containing 'inputData\_3'. Below this, on the left side, is a vertical label '输出结果' (Output results). To the right of this label, there are three rows of output data: 'I型乘用车数量' (Type I passenger vehicle count) with a value of 156, 'II型乘用车数量' (Type II passenger vehicle count) with a value of 102, and 'III型乘用车数量' (Type III passenger vehicle count) with a value of 39. To the right of these, there are two more rows of output data: '1-1轿运车数量' (Type 1-1 vehicle count) with a value of 25, and '1-2轿运车数量' (Type 1-2 vehicle count) with a value of 5. At the bottom center, there is a button labeled '执行计算' (Execute calculation), and at the bottom right, there is a button labeled '退出' (Exit).

图 4 第三问运行结果

## 5.7 问题四求解与算法设计

### 5.7.1 模型建立

本问题中,  $N_1=166$ ,  $N_2=78$ ,  $N_3=0$ , 只考虑的是 I 型和 II 型乘用车, 所有可能装载组合方案如表 1 所示。按照运输成本最少的要求, 只需要在这些可能的装载组合方案中, 选取某些方案数, 并考虑采用每种方案的轿运车数量, 以使总的轿运车数量最少, 尽最大可能的满足各目的地对 I 型和 II 型乘用车的数量要求, 同时使得轿运车的总路程最少即可。

设  $y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 种方案去第 } k \text{ 个目的地} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 种方案不去第 } k \text{ 个目的地} \end{cases}$ ,  $P_k$  表示 O 到 A、B、C、D 的距离, ( $k = 1, 2, 3, 4$ , 分别代表 A、B、C、D), 则可以建立如下双目标规划模型:

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \text{ 且 } \min S = \sum_{k=1}^4 (\sum_{i=1}^M y_{i,k} x_i) P_k \quad (5-12)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=m+1}^M x_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^m x_i, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,1} + C_{i,3}) \cdot x_i = 166, \\ \sum_{i=1}^M (C_{i,2} + C_{i,4}) \cdot x_i = 78, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,1} \cdot C_{i,1} \cdot x_i = 42, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,1} \cdot C_{i,2} \cdot x_i = 31, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,2} \cdot C_{i,1} \cdot x_i = 50, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,3} \cdot C_{i,1} \cdot x_i = 33, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,3} \cdot C_{i,2} \cdot x_i = 47, \\ \sum_{i=1}^M y_{i,4} \cdot C_{i,1} \cdot x_i = 41, \\ x_i \geq 0, x_i \in Z, y_{i,k} = 0,1 \end{cases}$$

此双目标规划问题也属于整数规划问题, 当然也可以使用分支定界法进行求解。故在此问的求解中我们仍使用上面所述的通用算法进行求解, 也将问题按两阶段处理, 先考虑轿运车数量最少, 寻找较优解, 然后在这些解中寻找路径最优的解, 即为所求。

### 5.7.2 启发式调整优化算法

与前三问不同的是, 在求解时的启发式调整优化算法, 这里简述如下:

- (1) 根据图 5 所示的路线图, 确定距离 O 点距离最远的点, 如 A;



- (2) 优先考虑距离最远的点。为了减少行驶成本，对于最远的点应尽可能减少轿运车的数量，所以尽可能的采用 1-2 型轿运车装载乘用车，运往目的地 A；
- (3) 再考虑次最远点，如 B。如仍有 1-2 型轿运车剩余，则优先考虑使用 1-2 型轿运车，否则就只能采用 1-1 型轿运车；
- (4) 接着考虑 C 点 ( $OC < OB$ )。根据 A、B 的运输量以及每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20% 的约束，可以确定在 C 点时，不会有 1-2 型轿运车剩余，所以只能采用 1-1 型轿运车；
- (5) 最后考虑 D 点。由于去 A、B、C 点均要经过 D 点，在满足 A、B、C 运输量需求的情况下，有时可能轿运车并不能达到满载，为了充分利用轿运车的空间，可以再装上一定数目的乘用车，到了 D 点卸车即可。

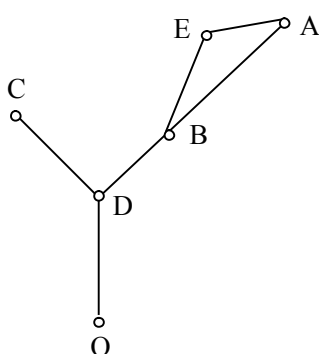


图 5 路线图

### 5.7.3 求解结果

最终求得的所有装载方案情况如表 9 所示：

表 9 问题四的装载方案

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	中间停靠地	停靠地卸载序号为 1 乘用车数量	停靠地卸载序号为 1 乘用车数量	目的地
1-2 型	2	4	8	0	2	4	0	0	0	0	A
1-2 型	1	4	7	0	5	0	0	0	0	0	A
1-2 型	1	10	0	0	5	0	0	0	0	0	A
1-1 型	1	4	0	0	4	0	0	B	2	0	A
1-1 型	6	4	0	0	4	0	0	0	0	0	B
1-1 型	4	0	5	0	0	5	0	0	0	0	C
1-1 型	1	2	2	0	0	5	0	0	0	0	C
1-1 型	3	4	0	0	4	0	0	0	0	0	C
1-1 型	1	4	0	0	4	0	0	D	1	0	C
1-1 型	5	4	0	0	4	0	0	0	0	0	D

统计的轿运车数量，如表 10 所示：

表 10 问题四的轿运车数量统计

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	21
1-2 型	4

此时，轿运车的总路程  $S$  为

$$S=(2+1+1+1)*360+6*280+(4+1+3+1)*236+5*160=6404$$

我们用 MATLAB 软件实现了第四问算法的 exe 可执行文件，其运行结果如图 6 所示。图 6 中，读取的 excel 表格名字为“inputData\_4”，输出了 inputData\_4.xls 中输入的乘用车数量以及通过算法所得到的不同类型轿运车数量，其具体轿运车装载方案输出并保存在了 outData\_4.xls 与 outData\_4\_2.xls 中。



图 6 第四问运行结果

## 5.8 问题五求解与算法设计

### 5.8.1 模型建立

本问题可以看作是问题四的扩展研究，此时，乘用车类型增加到 45，轿运车种类增加到 10，目的地增加到 5，优化目标仍与第四问相同，参照 (5-12) 的双目标规划模型，可以得到如下模型：

$$\min F = \sum_{i=1}^M x_i \text{ 且 } \min S = \sum_{k=1}^5 (\sum_{i=1}^M y_{i,k} x_i) P_k \quad (5-13)$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=m_4+1}^{m_5} x_i + \sum_{i=m_9+1}^{m_{10}} x_i \leq 0.2 \sum_{h=0, h \neq 4}^8 \sum_{i=m_h+1}^{m_{h+1}} x_i, \\ \sum_{i=1}^M C_{i,j} \cdot x_i = N_j, j=1,2,\dots,45 \\ \sum_{i=1}^M y_{i,k} C_{i,j} \cdot x_i = b_{j,k}, k=1,2,\dots,5; j=1,2,\dots,45 \\ x_i \geq 0, x_i \in Z, y_{ik} = 0,1 \end{cases}$$

其中,  $m_h$  表示第  $h$  种轿运车在所有组合方案中的位置下标 ( $h=0, 1, \dots, 10; m_0=0$ ),  $b_{jk}$  表示第  $j$  种乘用车运往第  $k$  个目的地的数量。

### 5.8.2 基于排样算法的装载优化算法

在求解 (5-13) 所示的优化模型时, 为避免采用穷举法出现的“组合爆炸”, 可采用基于排样算法的装载优化算法来解决该问题<sup>[4]</sup>。由于该算法与汽车运输设备的规格尺寸、所到目的地密切相关, 因此结合运输汽车专用车的结构尺寸、所到目的地, 可设计基于排样算法的汽车装载优化算法如下:

Step 1: 根据轿运车装载乘用车的限高尺度, 初步确定轿运车可以装载的乘用车类型;

Step 2: 根据乘用车及轿运车的规格尺寸, 进一步对轿运车可以装载的乘用车类型进行划分;

Step 3: 依据待装乘用车不同类型的目的地需求, 构建关系树;

Step 4: 根据待装乘用车的关系树以及启发式调整优化算法 (见下文所述), 初步选择配载方案;

Step 5: 验证配载方案是否满足约束条件; 若不满足, 则回到 Step4; 满足, 则进入下一步;

Step6: 确定各种轿运车装载乘用车的方案。

根据上述算法, 结合实际待装乘用车的长度及轿运车的类型, 我们将待装乘用车划分为“高”、“低窄”、“低宽”三种车型。“高”的标准是: 乘用车高度大于 1.7 米; “低窄”的标准是: 乘用车高度不超过 1.7 米且宽度不超过 1.7 米; “低宽”的标准是: 乘用车高度不超过 1.7 米且宽度大于 1.7 米。最终的乘用车分类结果如下表所示:

表 11 乘用车分类结果

车型	高	低窄	低宽
乘用车编号	1,12,17,24,25,26,31,37	3,5,7,8,14,18,20,27,29,30,34,39,40	2,4,6,9,10,11,13,15,16,19,21,22,23,28,32,33,35,36,38,41,42,43,44,45

接着, 按照待装乘用车的三种类型以及五个目的地对乘用车的需求, 可得到具体的关系树, 如图 7 所示。

### 5.8.3 启发式调整优化算法

根据附表中给出的轿运车数据, 可以看出, 对于“高”型车, 只能装载在 1-2 型车的下层和 1-1 型的下层; 对于“低窄”型车, 可以装载在任意类型的轿运车上, 但根据经验, 应尽可能的选择 2-2 型车和 1-2 型车的上层进行装载, 这样可以最大限度的利用 2-2 型车和 1-2 型车的上层空间, 使其装载的“低窄”型车数量最大化, 这样将使其空间得到充分利用, 又能减少轿运车的成本; 对于“低宽”型车, 可以装载在 1-1 型的上下层, 2-2 型车和 1-2 型车的下层, 上层由于考虑到要使两列对称, 如果装载“低宽”型车将只能利用一列, 不能充分利用 2-2 型车和 1-2 型车的上层空间, 故此, 根据经验以及成本要求, 应考虑只选择 1-1 型的上下层进行装配。通过上述分析, 可得最终简化的装载方案如下:

- (1) “高”型车: 只选择 1-2 型车和 1-1 型的下层;
- (2) “低窄”型车: 优先选择 2-2 型车和 1-2 型车的上层;
- (3) “低宽”型车: 只考虑 1-1 型车的上下层。

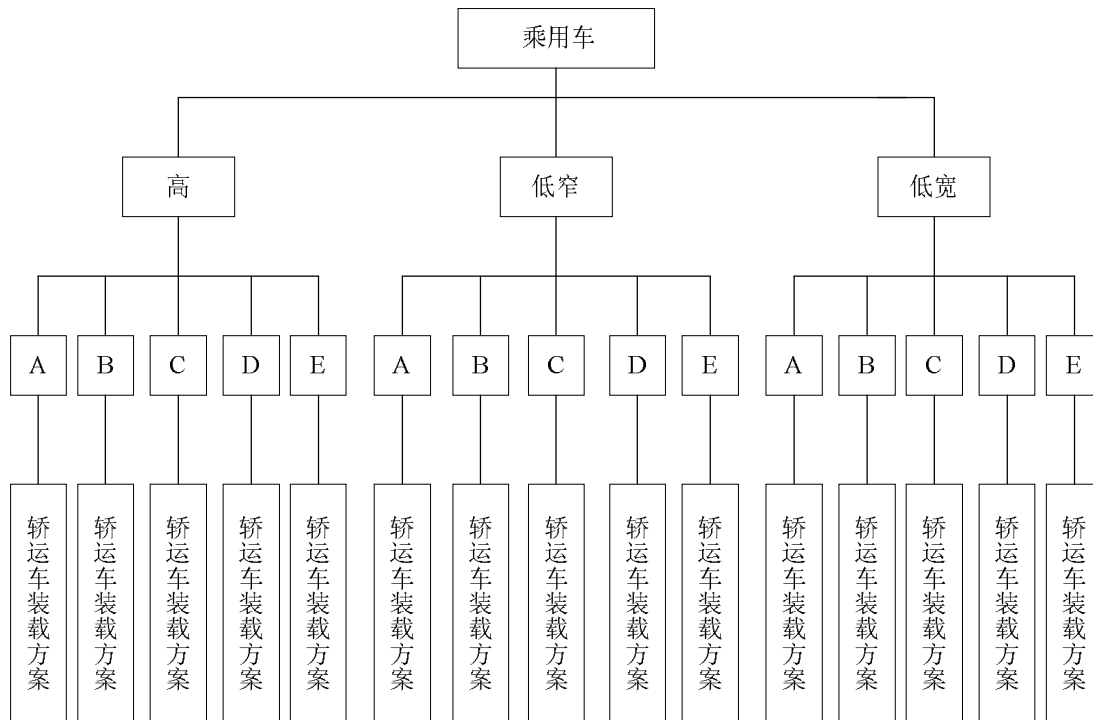


图 7 关系树

在调度的过程中，根据目的地对不同类型乘用车的需求以及上述装载方案进行调度。调度过程中，仍然采用启发式的调整优化算法，其主要遵循的原则如下：

- (1) 根据距离的远近，按目的地 E、A、B、C、D 的顺序进行调整优化；
- (2) E 地优先选用 2-2 型车和 1-2 型车装载；
- (3) A 地优先选用 1-2 型车装载；
- (4) E 地装载后，若未满载，则未满载的空间装载 D 地需要的乘用车，即这些车是停靠在 D 地卸载的；
- (5) A 地装载后，若未满载，则未满载的空间装载 B 或 D 地需要的乘用车；
- (6) C 地装载后，若未满载，则未满载的空间装载 D 地需要的乘用车；
- (7) 使用的 1-1 型与 1-2 型轿运车数量要满足题目提及的 20%比例约束；
- (8) 使用同类型轿运车（1-1 型、1-2 型和 2-2 型车）时，优先选择运输长度较长的。

#### 5.8.4 求解结果

首先对本问中求解所得的表格进行说明，即在表 12–表 20 中，对以下几种表达方式的解释如下：“3（1）”表示 3 号轿运车的第 1 辆车；“16D”表示需要在 D 处卸载车型编号为 16 的乘用车，并且表格中其对应的数字就是该乘用车在 D 处的卸载乘用车量。

在对问题进行简化的基础上，对不同的目的地分别进行求解详细的装载与运输方案，在此基础上通过 matlab 编程可解的相应的可行解，然后再根据实际生活中的调度经验对多得的可行解进行不断地优化，从而可得 ABCDE 五处目的地比较优异的装载和运输方案。其中目的地 A 的详细装载和运输方案如表 12 所示。

表 12 目的地 A 处的乘用车装载方案

装载 方案 序号	目的地 A		乘用车车型编号					
1	轿运车序号（编号）		2	4	16D			
	3（1）	上层装载量	2	2	1			
		下层装载量		5				
2	轿运车序号（编号）		23	28	16D	14D		
	3（2）	上层装载量	4		1			
		下层装载量	1	3		1		
3	轿运车序号（编号）		4	6				
	3（3）	上层装载量	4	1				
		下层装载量	4	1				
4	轿运车序号（编号）		6	9				
	3（4）	上层装载量	4	1				
		下层装载量	4	1				
5	轿运车序号（编号）		11					
	3（5）	上层装载量	5					
		下层装载量	5					
6	轿运车序号（编号）		9	10	11			
	3（6）	上层装载量	1	3	1			
		下层装载量	1	3	1			
7	轿运车序号（编号）		13					
	3（7）	上层装载量	5					
		下层装载量	5					
8	轿运车序号（编号）		13	15	10D			
	3（8）	上层装载量		4	1			
		下层装载量	5					
9	轿运车序号（编号）		16	19				
	3（9）	上层装载量	4	1				
		下层装载量	4	1				
10	轿运车序号（编号）		19	21	22			
	3（10）	上层装载量	1	2	2			
		下层装载量	1	2	2			
11	轿运车序号（编号）		28	14D				
	3（11）	上层装载量	4	1				
		下层装载量	4	1				
12	轿运车序号（编号）		28	32				
	4（1）	上层装载量	1	3				
		下层装载量		4				

13	轿运车序号（编号）		32					
	4（2）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
14	轿运车序号（编号）		33					
	4（3）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
15	轿运车序号（编号）		33	35				
	4（4）	上层装载量	1	3				
		下层装载量	1	3				
16	轿运车序号（编号）		35	36				
	4（5）	上层装载量	3	1				
		下层装载量		4				
17	轿运车序号（编号）		38	41	30D			
	4（6）	上层装载量	3	1	1			
		下层装载量	5					
18	轿运车序号（编号）		41					
	4（7）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
19	轿运车序号（编号）		42					
	4（8）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
20	轿运车序号（编号）		43					
	4（9）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
21	轿运车序号（编号）		43	44	45			
	4（10）	上层装载量		2	1			
		下层装载量	4					
22	轿运车序号（编号）		45					
	4（11）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
23	轿运车序号（编号）		45	40D				
	4（12）	上层装载量	3	2				
		下层装载量	3	2				
24	轿运车序号（编号）		29	3	7			
	9（1）	上层装载量	3	5				
		下层装载量		7	1			
25	轿运车序号（编号）		7	8	14			
	9（2）	上层装载量	6	2				
		下层装载量		3	5			
26	轿运车序号（编号）		14	18	5			
	9（3）	上层装载量	2	6				
		下层装载量		7	1			

27	轿运车序号（编号）		5	27	39			
	9（4）	上层装载量	1	3	4			
		下层装载量	10					
28	轿运车序号（编号）		39	20	20D	40D	5D	30D
	9（5）	上层装载量	1	3	2	4		
		下层装载量			2		4	4
29	轿运车序号（编号）		1	25	35D	32D		
	5（1）	上层装载量			7	3		
		下层装载量	4	1				
30	轿运车序号（编号）		25	24	20B	21D	32D	34D
	5（2）	上层装载量				2	3	5
		下层装载量	3	1	1			
31	轿运车序号（编号）		24	5B	8D	18D	29D	34D
	10（1）	上层装载量		1	1	4	4	1
		下层装载量	4					
32	轿运车序号（编号）		24	17	5D	18D		
	10（2）	上层装载量			8	4		
		下层装载量	2	2				
33	轿运车序号（编号）		17	12	7D	3D	5D	
	10（3）	上层装载量				4	8	
		下层装载量	1	3	1			
34	轿运车序号（编号）		12	14D	34D	3D	8D	
	10（4）	上层装载量				6	4	
		下层装载量	3	1	1			

对表 12 中所使用的轿运车进行统计，可得到目的地 A 所需的轿运车类型以及相应的数量如表 13 所示：

表 13 目的地 A 所需的轿运车类型与数量

轿运车序号	轿运车类型	需要的轿运车数
3	1-1 型	11
4	1-1 型	12
5	1-2 型	2
9	2-2 型	5
10	1-2 型	4
总数		34

目的地 B 的详细装载和运输方案如表 14 所示：

表 14 目的地 B 处的乘用车装载方案

装载方案序号	目的地 B	乘用车车型编号					
1	轿运车序号（编号）		12	24	25		
	8（1）	上层装载量	3	1			
		下层装载量		1	3		

2	轿运车序号（编号）		12	26	31	5	20	34
	10（1）	上层装载量				8	3	1
		下层装载量	1	1	3			
3	轿运车序号（编号）		1	37	3	8	14	18
	10（2）	上层装载量			2	3	4	1
		下层装载量	2	3				
4	轿运车序号（编号）		31	34	37	18	39	
	10（3）	上层装载量				6	4	
		下层装载量	3	1	1			
5	轿运车序号（编号）		30	22D	31D			
	4（1）	上层装载量	2	3				
		下层装载量			5			
6	轿运车序号（编号）		45					
	1（1）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
7	轿运车序号（编号）		35	36				
	1（2）	上层装载量	1	3				
		下层装载量	1	3				
8	轿运车序号（编号）		4	16				
	1（3）	上层装载量	3	1				
		下层装载量	3	1				
9	轿运车序号（编号）		4	35	45			
	1（4）	上层装载量	2	2				
		下层装载量			4			
10	轿运车序号（编号）		45	2	6	37D		
	1（5）	上层装载量	1	2		1		
		下层装载量		1	3			
11	轿运车序号（编号）		6					
	1（6）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
12	轿运车序号（编号）		6	11	13			
	1（7）	上层装载量	1	3				
		下层装载量			4			
13	轿运车序号（编号）		13	15	16			
	1（8）	上层装载量	4					
		下层装载量	1	2	1			
14	轿运车序号（编号）		16	19				
	1（9）	上层装载量	4					
		下层装载量	2	2				
15	轿运车序号（编号）		19	21	22			
	1（10）	上层装载量	1	3				
		下层装载量		2	2			



16	轿运车序号（编号）		32					
	1（11）	上层装载量	4					
		下层装载量	4					
17	轿运车序号（编号）		32	23	37D			
	1（12）	上层装载量	4					
		下层装载量		3	1			
18	轿运车序号（编号）		28	37D				
	1（13）	上层装载量	3	1				
		下层装载量	3	1				
19	轿运车序号（编号）		28	33	37D	39D		
	1（14）	上层装载量	3		1			
		下层装载量	2	1		1		
20	轿运车序号（编号）		20	33				
	2（1）	上层装载量	1	3				
		下层装载量	1	3				
21	轿运车序号（编号）		33	38				
	2（2）	上层装载量	1	3				
		下层装载量		4				
22	轿运车序号（编号）		27	41				
	2（3）	上层装载量	2	2				
		下层装载量	2	2				
23	轿运车序号（编号）		30	41	42	3		
	2（4）	上层装载量	1	1	2			
		下层装载量			3	1		
24	轿运车序号（编号）		29	42	43			
	2（5）	上层装载量	1	2	1			
		下层装载量	2		2			
25	轿运车序号（编号）		29	43	3			
	2（6）	上层装载量	2	2				
		下层装载量		1	3			

对表 14 中所使用的轿运车进行统计，可得到目的地 B 所需的轿运车类型以及相应的数量如表 15 所示：

表 15 目的地 B 所需的轿运车类型与数量

轿运车序号	轿运车类型	需要的轿运车数
1	1-1 型	14
2	1-1 型	6
4	1-2 型	1
8	2-2 型	1
10	1-2 型	3
总数		25

目的地 C 的详细装载和运输方案如表 16 所示：

表 16 目的地 C 处的乘用车装载方案

装载方案序号	目的地 C		乘用车车型编号				
1	轿运车序号（编号）		29	34	26	37	
	4（1）	上层装载量	2	3			
		下层装载量			3	2	
2	轿运车序号（编号）		29	34	26	37	
	4（2）	上层装载量	2	3			
		下层装载量			2	3	
3	轿运车序号（编号）		29	34	31	37	
	4（3）	上层装载量	2	3			
		下层装载量			4	1	
4	轿运车序号（编号）		29	34	25		
	8（1）	上层装载量	3	2			
		下层装载量			4		
5	轿运车序号（编号）		3	29	34	25	
	8（2）	上层装载量	1	3	1		
		下层装载量				4	
6	轿运车序号（编号）		3	7	29	24	
	8（3）	上层装载量	2	1	2		
		下层装载量				4	
7	轿运车序号（编号）		5	7	8	12	37
	8（4）	上层装载量	1	1	3		
		下层装载量				2	3
8	轿运车序号（编号）		3	5	37		
	8（5）	上层装载量	2	3			
		下层装载量			5		
9	轿运车序号（编号）		5	8	37		
	8（6）	上层装载量	3	2			
		下层装载量			5		
10	轿运车序号（编号）		8	30	37	24D	
	8（7）	上层装载量	2	3			
		下层装载量			1	3	
11	轿运车序号（编号）		8	20	30		
	8（8）	上层装载量	3	1	1		
		下层装载量	2		3		
12	轿运车序号（编号）		30	40			
	8（9）	上层装载量		5			
		下层装载量	1	4			
13	轿运车序号（编号）		14	20	40		
	8（10）	上层装载量	3	1	1		
		下层装载量			5		

14	轿运车序号（编号）		18	20			
	8（11）	上层装载量	2	3			
		下层装载量	2	3			
15	轿运车序号（编号）		20	27	39		
	8（12）	上层装载量	4		1		
		下层装载量	3	2			
16	轿运车序号（编号）		39	44D	5D		
	8（13）	上层装载量	3	1			
		下层装载量	4		1		
17	轿运车序号（编号）		4	6			
	8（14）	上层装载量	4				
		下层装载量		4			
18	轿运车序号（编号）		6				
	8（15）	上层装载量	4				
		下层装载量	4				
19	轿运车序号（编号）		6	9			
	7（1）	上层装载量	1	3			
		下层装载量	1	3			
20	轿运车序号（编号）		11	13			
	7（2）	上层装载量	2	2			
		下层装载量	3	1			
21	轿运车序号（编号）		13	15	16		
	7（3）	上层装载量	1	1	2		
		下层装载量	1	2	1		
22	轿运车序号（编号）		16	19	21	23	
	7（4）	上层装载量	1	2		1	
		下层装载量		2	1	1	
23	轿运车序号（编号）		28	32	38	20D	
	1（1）	上层装载量	3			1	
		下层装载量	1	1	2		
24	轿运车序号（编号）		32	33	35		
	1（2）	上层装载量	2	1	1		
		下层装载量	1	1	2		
25	轿运车序号（编号）		33	38	7D		
	1（3）	上层装载量	3		1		
		下层装载量	1	3			
26	轿运车序号（编号）		36	38	37D		
	1（4）	上层装载量	3	1			
		下层装载量		4	1		
27	轿运车序号（编号）		36	42			
	1（5）	上层装载量	4				
		下层装载量	1	3			

28	轿运车序号（编号）		42	45			
	1（6）	上层装载量	1	3			
		下层装载量		4			
29	轿运车序号（编号）		45	45D	22D		
	1（7）	上层装载量	2	2			
		下层装载量			4		

对表 16 中所使用的轿运车进行统计，可得到目的地 C 所需的轿运车类型以及相应的数量如表 17 所示：

表 17 目的地 C 所需的轿运车类型与数量

轿运车序号	轿运车类型	需要的轿运车数
1	1-1 型	7
4	1-1 型	3
7	1-2 型	4
8	2-2 型	15
总数		29

目的地 D 的详细装载和运输方案如表 18 所示：

表 18 目的地 D 处的乘用车装载方案

装载方案序号	目的地 D		乘用车车型编号				
1	轿运车序号（编号）		7	27	39	43	44
	10（1）	上层装载量	3	6	1		
		下层装载量				3	1
2	轿运车序号（编号）		1	25	37	26	
	2（1）	上层装载量	2	1	1		
		下层装载量		1	1	2	
3	轿运车序号（编号）		26	37	31		
	2（2）	上层装载量	3	1			
		下层装载量	2		2		
4	轿运车序号（编号）		31	37	27	10	
	2（3）	上层装载量	4				
		下层装载量		1	2	1	
5	轿运车序号（编号）		2	10	38	9	
	2（4）	上层装载量	1	1	2		
		下层装载量			1	3	
6	轿运车序号（编号）		9	2	43		
	2（5）	上层装载量	4				
		下层装载量		2	1		
7	轿运车序号（编号）		2	6			
	2（6）	上层装载量	1	2			
		下层装载量		4			

8	轿运车序号（编号）		6	13			
	2（7）	上层装载量	3	1			
		下层装载量		4			
9	轿运车序号（编号）		4	13			
	2（8）	上层装载量	1	2			
		下层装载量	3				
10	轿运车序号（编号）		4	22			
	2（9）	上层装载量	3				
		下层装载量	2	1			
11	轿运车序号（编号）		22	23			
	2（10）	上层装载量	3				
		下层装载量	1	2			

对表 18 中所使用的轿运车进行统计，可得到目的地 D 所需的轿运车类型以及相应的数量如表 19 所示：

表 19 目的地 D 所需的轿运车类型与数量

轿运车序号	轿运车类型	需要的轿运车数
2	1-1 型	10
10	1-2 型	1
总数		11

目的地 E 的详细装载和运输方案如表 20 所示：

表 20 目的地 E 处的乘用车装载方案

装载方案序号	目的地 E		乘用车车型编号						
1	轿运车序号（编号）		26	29	3				
	5（1）	上层装载量		7	4				
		下层装载量	5						
2	轿运车序号（编号）		26	31	3	7			
	5（2）	上层装载量			3	7			
		下层装载量	3	2					
3	轿运车序号（编号）		31	8	14	18			
	5（3）	上层装载量		4	5	1			
		下层装载量	5						
4	轿运车序号（编号）		31	25	18	5	27	1D	
	5（4）	上层装载量			4	6	1		
		下层装载量	1	3				1	
5	轿运车序号（编号）		25	24	27	30	20B		
	5（5）	上层装载量			6	4			
		下层装载量	3	1			1		
6	轿运车序号（编号）		24	17	1	30	34	39D	20B
	5（6）	上层装载量				5	4	1	
		下层装载量	1	2	1				1

7	轿运车序号（编号）		37	34	39	30D			
	5（7）	上层装载量		1	9				
		下层装载量	5			1			
8	轿运车序号（编号）		40	20	42D				
	5（8）	上层装载量	4	8					
		下层装载量			5				
9	轿运车序号（编号）		2	4	6				
	3（1）	上层装载量	1	3	1				
		下层装载量	1	3	1				
10	轿运车序号（编号）		6						
	3（2）	上层装载量	5						
		下层装载量	5						
11	轿运车序号（编号）		6	9	10	13			
	3（3）	上层装载量	1	2	1	1			
		下层装载量		3	1	1			
12	轿运车序号（编号）		13	15	16				
	3（4）	上层装载量	2	1	2				
		下层装载量	2	1	2				
13	轿运车序号（编号）		16	19	22	23	45D		
	3（5）	上层装载量	1	2	2				
		下层装载量			1	3	1		
14	轿运车序号（编号）		23	28	31D				
	3（6）	上层装载量	1	3	1				
		下层装载量	1	3	1				
15	轿运车序号（编号）		32	35					
	3（7）	上层装载量	5						
		下层装载量		5					
16	轿运车序号（编号）		36	38					
	3（8）	上层装载量	5						
		下层装载量	4	1					
17	轿运车序号（编号）		38	41	9D				
	3（9）	上层装载量	4	1					
		下层装载量		4	1				
118	轿运车序号（编号）		41	42	43	39D			
	3（10）	上层装载量	1	4					
		下层装载量		1	3	1			
19	轿运车序号（编号）		44	45	15D	19D			
	3（11）	上层装载量	1	3					
		下层装载量		3	1	1			

对表 20 中所使用的轿运车进行统计，可得到目的地 E 所需的轿运车类型以及相应的数量如表 21 所示：

表 21 目的地 E 所需的轿运车类型与数量

轿运车序号	轿运车类型	需要的轿运车数
3	1-1 型	11
5	1-2 型	8
总数		19

将上述 ABCDE 五处目的地所需的轿运车类型与数量进行综合便可得到该物流公司在完成本次运输任务所需的轿运车类型及数量如表 22 所示：

表 22 完成本次运输任务所需的轿运车类型及数量

序号	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D	目的地 E	余量
1（1-1 型）	0	14	7	0	0	0
2（1-1 型）	0	7	0	10	0	1
3（1-1 型）	11	0	0	0	11	0
4（1-1 型）	12	0	3	0	0	0
5（1-2 型）	2	0	0	0	8	0
6（1-1 型）	0	0	0	0	0	25
7（1-1 型）	0	0	4	0	0	0
8（1-1 型）	0	1	15	0	0	0
9（2-2 型）	5	0	0	0	0	0
10（1-2 型）	4	3	0	1	0	1
目的地总量	34	25	29	11	19	27
轿运车总量	118					

表 23 完成本次运输任务所需各目的地的 1-1、1-2 和 2-2 型轿运车的数量

目的地 轿运车类型	A	B	C	D	E	总数
1-1 型车使用数量	23	22	29	10	11	95
1-2 型车使用数量	6	3	0	1	8	18
2-2 型车使用数量	5	0	0	0	0	5

由表 22 和表 23 可知，完成物流公司该次运输任务共需 118 辆轿运车，其中包括了 95 辆 1-1 型车，18 辆 1-2 型车和 5 辆 2-2 型车，并且到达 ABCDE 五处所需的轿运车分别为 34、25、29、11、19 辆。同时，由题中所给地图可知， $OA=360$ ， $OB=280$ ， $OC=236$ ， $OD=160$ ， $OE=384$ ，故完成本次运输任务所需要行驶的总里程为 35140。

## 六、通用性算法检验与测试

前三问的建立的兩阶段装载优化模型，我们实现了通用性算法，对算法我们进行了测试以检验其在其他输入数据组合下的求解能力，输入的数据如表 24、表 25 所示：

表 24 第一次通用程序测试的输入数据

乘用车序号（即类型）	需要运输的乘用车数量（如果没有，对应位置填 0）
1	72
2	0
3	52

表 25 第二次通用程序测试的输入数据

乘用车序号（即类型）	需要运输的乘用车数量（如果没有，对应位置填 0）
1	133
2	140
3	40

使用 exe 可执行文件得到的结果为：

excel名称输入

输出结果

I型乘用车数量  1-1轿运车数量

II型乘用车数量  1-2轿运车数量

III型乘用车数量

图 8 第一次通用程序测试的输出结果

excel名称输入

输出结果

I型乘用车数量  1-1轿运车数量

II型乘用车数量  1-2轿运车数量

III型乘用车数量

图 9 第二次通用程序测试的输出结果



通用程序测试输出的 excel 表格如表 26～表 29 所示：

表 26 第一次通用程序测试的输出结果

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	中间停靠地	目的地
1-1 型	8	4	0	0	0	0	4	0	0
1-1 型	3	4	0	0	1	0	3	0	0
1-1 型	1	4	0	0	2	0	2	0	0
1-2 型	2	10	0	0	0	0	5	0	0

表 27 第一次通用程序测试的输出结果

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	12
1-2 型	2

表 28 第二次通用程序测试的输出结果

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	中间停靠地	目的地
1-1 型	3	4	0	0	2	0	2	0	0
1-1 型	7	4	0	0	3	0	1	0	0
1-1 型	1	0	5	0	1	0	3	0	0
1-1 型	15	0	5	0	3	0	1	0	0
1-2 型	5	4	8	0	0	4	2	0	0

表 29 第二次通用程序测试的输出结果

轿运车类型	使用总车辆数
1-1 型	26
1-2 型	5

经过验证，通过上述两次测试得到的解均为最优解。这说明了前三问所提出的通用程序具有通用性，也说明了前三问所建立的模型具有准确性。

## 七、 模型的评价与推广

### 6.1 模型的评价

#### 6.1.1 模型的优点

(1) 前三问建立的模型在生活实际应用中具有很高的实用性或参照性，能有效解决目的地不多，轿运车与乘用车类型不多的物流装载问题，且该模型易于求解；

(2) 第四问、第五问建立的所使用的轿运车数量最少和总路程最少的双目标整数规划模型是对具体问题客观合理的抽象描述，结合启发式算法使得问题得到简化，所得到的解也是优异的。

#### 6.1.2 模型的缺点

(1) 前三问的通用算法在一些极端情况或者特殊情况下求得的解不一定是最优的，且建立的模型在目的地变多，轿运车与乘用车类型变多的情况下求解也是较为困难的；

(2) 第五问的模型求解算法，由于是按照经验来的，所得的解只能是一种可行解，是局部最优的，并不是全局最优解。

### 6.2 模型的推广

本文所设计的基于经验阈值的分支定界优化算法可以很好的应用到其他的领域中进行问题的求解，其中主要可以用来解决路径、背包以及下料问题，同时，通过对阈值的设置进行优化将使得该改进型的分支定界优化算法在求解问题时能够得到更加优异的解。

第四问与第五问中所使用的启发式算法思维也可以应用到其他大数据分析问题中，使得其问题本身进行简化，降低问题的求解难度，且该启发式思想能很好的与其他算法结合，能够进一步提高求解问题的能力。

## 八、 参考文献

- [1] 张江静, 陈峰. 带装载组合约束的一维装车问题算法研究[J]. 工业工程与管理, 2012, 17(3): 90-96.
- [2] Chu P, Beasley J. A genetic algorithm for the multi-dimensional knapsack problem[J]. Journal of Heuristics, 1998, 4: 63-86.
- [3] 张江静. 一维组合装车问题模型与算法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2012.
- [4] 高立杰. 铁路汽车物流配载优化研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
- [5] 熊义杰. 运筹学教程[M]. 国防工业出版社, 2004.
- [6] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [7] 徐瑞, 黄兆东等. MATLAB2007 科学计算与工程分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

## 九、 附件

附件清单:

前三问:

JM_1.exe	exe 可执行文件
JM_1.fig	fig 文件 (GUI 界面)

JM_1.m	fig 文件对应 m 文件
main.m	m 文件主程序
adjust.m	方案调整函数
cal_loadAbility3.m	计算轿运车装载方案函数
IntProgFZ.m	分支定界法函数
isRight.m	验证方案可行性函数
OutData.m	excel 结果输出函数
inputData_1.xls	第 1 问输入数据 excel 表格
inputData_2.xls	第 2 问输入数据 excel 表格
inputData_3.xls	第 3 问输入数据 excel 表格
inputData_JC1.xls	测试数据 excel 表格
inputData_JC2.xls	测试数据 excel 表格
outData_1.xls	第 1 问结果数据输出 excel 表格
outData_1_2.xls	第 1 问结果数据输出 excel 表格
outData_2.xls	第 2 问结果数据输出 excel 表格
outData_2_2.xls	第 2 问结果数据输出 excel 表格
outData_3.xls	第 3 问结果数据输出 excel 表格
outData_3_2.xls	第 3 问结果数据输出 excel 表格
outData_JC1.xls	测试数据结果输出 excel 表格
outData_JC1_2.xls	测试数据结果输出 excel 表格
outData_JC2.xls	测试数据结果输出 excel 表格
outData_JC2_2.xls	测试数据结果输出 excel 表格
第四问:	
JM_4.exe	exe 可执行文件
JM_4.fig	fig 文件 (GUI 界面)
JM_4.m	fig 文件对应 m 文件
main.m	m 文件主程序
adjust.m	方案调整函数
change.m	方案优化函数
cal_loadAbility3.m	计算轿运车装载方案函数
question4.m	计算得到初步装载方案函数
IntProgFZ.m	分支定界法函数
isRight.m	验证方案可行性函数
getRoad.m.m	得到运输路径函数, 并得到 excel 结果输出
inputData_4.xls	第 4 问输入数据 excel 表格
outData_1.xls	第 4 问结果数据输出 excel 表格
outData_1_2.xls	第 4 问结果数据输出 excel 表格
第五问:	
main.m	m 文件主程序, 对应乘用车类型一装配调整主函数
main2.m	m 文件主程序 2, 对应乘用车类型二装配调整主函数
main3.m	m 文件主程序 3, 对应乘用车类型三装配调整主函数
cal_N.m	得到乘用车类型一装配方案函数

cal_N2.m	得到乘用车类型二装配方案函数
cal_N3.m	得到乘用车类型三装配方案函数
adjust.m	方案调整函数
change.m	方案优化函数