

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目      功率放大器非线性特性及预失真建模研究

### 摘                      要：

本文主要围绕功率放大器的非线性特性以及相应的预失真补偿等问题，在合理假设的基础上，分析处理某功放无记忆效应和某功放有记忆效应的复输入输出数据，采用函数多项式、Saleh 等常用方法，构建相应的功放模型和预失真模型，并基于最小二乘法（LS）、递归最小二乘法（RLS）等算法对模型参数进行求解，然后运用 NMSE/EVM 评价所建模型的准确度。此外，本文还通过估计信号的功率谱密度来计算信号的相邻信道功率比（ACPR），并分析预失真补偿的对带外失真性能的影响。

对于问题 1A：题目中的输出信号相移趋近于 0，所以首先假定功放不改变信号的相位，可以直接对幅度的非线性特性进行分析。考虑到该功放的无记忆效应，本文采用了函数多项式和 Saleh 两种方法对功放进行建模，并通过 LS 算法和 RLS 算法推导出模型参数的最优解。在构建多项式模型进行拟合过程中，通过比较不同阶数模型的 NMSE 值，综合考虑模型复杂度等问题，最终选择一个合适的阶数。此外，本文还采用了正交函数基对功放模型进行多项式表示，并与原有多项式模型作性能对比。

对于问题 1B：为满足“输出幅度限制”和“功率最大化”两个约束条件，线性化后系统的理想增益 $g$ 取作数据文件 1 中的输出信号峰值与输入信号峰值之比。由于预失真补偿可以看作是功放的逆模型，所以同样可以采用函数多项式对预失真器进行建模，并将数据文件中功放的输出信号 $z(n)/g$ 和输入信号 $x(n)$ 分别当作预失真器的输入和输出进行训练，目标误差函数即预失真器的拟合误差。为了提高模型的线性精度，还可以通过对整个训练反馈系统进行迭代

以更新预失真器参数，实验结果表明该方法能显著改善模型。在得到性能满意的预失真器模型后，计算实际系统的幅度增益，并运用 NMSE/EVM 评价所建模型的准确度，总体原则是使预失真和功放的联合模型呈线性后误差最小。

对于问题 2A：考虑到该功放的有记忆效应，采用“和记忆多项式”进行建模，并通过 LS 算法和 RLS 算法推导出模型参数的最优解。由于题目中该功放的信号数据量比较大，采用 RLS 算法能够很好地提高模型拟合的精度，通过比较两种算法所对应的 NMSE 值也可以证明这一点。同样地，模型的阶数和记忆深度也需要综合考虑各种因素得到一个合适的值。此外，还采用了正交函数基对该功放模型进行多项式表示。

对于问题 2B：预失真模型也采用“和记忆多项式”进行表示，同时以框图的方式建立预失真处理的模型实现示意图，定义基本实现单元模块（如延时模块等）并确定其之间的关系，组成整体图。同样地，在得到性能满意的预失真器模型后，运用 NMSE/EVM 评价所建模型的准确度。

对于拓展研究：根据题目给出的数据，本文采用直接法计算出三类信号（输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号）的功率谱密度，并用图形的方式表示，然后通过题中给出的计算公式和信道带宽得到 ACPR，比较预失真补偿对带外失真性能的影响。

实验结果表明：利用函数多项式等常用模型能够较好地完成问题 1 和问题 2 中的任务，拟合得到的信号值误差在模型假设预先定义的范围之内，NMSE 值小于 -40dB（即 EVM 值小于 1%）。此外，拓展研究的结果也表明预失真补偿能够减小功率放大器的输出信号对邻道信号的干扰，ACPR 值下降了 16dB 左右。

本文主要亮点在于：为保证所用模型的工程可实现性，我们综合考虑了模型的准确度、复杂度等因素，在模型的选取（多项式模型和 Saleh 模型等）、模型的求解（LS 算法和 RLS 算法等）以及参数个数的选择（多项式阶数和记忆深度）等方面进行了大量对比实验分析，比较不同情况下的 NMSE 值，最后根据模型假设预先定义的误差允许范围选择满足要求且实现复杂度低的模型，这种方法在实际工程应用中是很常见的。

**关键词：**功率放大器 非线性特性 预失真补偿 功率谱密度

## 目录

一：问题的重述.....	- 4 -
1.1 背景介绍.....	- 4 -
1.2 需要研究的几个问题.....	- 4 -
二：符号说明.....	- 6 -
三：问题一.....	- 7 -
3.1 问题分析.....	- 7 -
3.2 模型假设.....	- 7 -
3.3 模型的建立与求解.....	- 7 -
3.3.1 无记忆功率放大器的非线性特性建模.....	- 7 -
3.3.2 预失真建模.....	- 14 -
3.4 问题一结论.....	- 21 -
四：问题二.....	- 22 -
4.1 问题分析.....	- 22 -
4.2 模型假设.....	- 22 -
4.3 模型的建立与求解.....	- 22 -
4.3.1 有记忆功率放大器的非线性特性建模.....	- 22 -
4.3.2 预失真建模.....	- 27 -
4.4 问题二结论.....	- 30 -
五：拓展研究.....	- 31 -
5.1 问题分析.....	- 31 -
5.2 功率谱密度的计算.....	- 31 -
5.3 传输信道与相邻信道的确定.....	- 32 -
5.4 ACPR 计算与分析.....	- 32 -
5.5 拓展研究的结论.....	- 32 -
六：结束语.....	- 33 -
七：参考文献.....	- 34 -

## 一：问题的重述

### 1.1 背景介绍

信号的功率放大是电子通信系统的关键功能之一，其实现模块称为功率放大器（PA，Power Amplifier），简称功放。功放的输出信号相对于输入信号可能产生非线性变形，这将带来无益的干扰信号，影响信息的正确传递和接收，此现象称为非线性失真。传统电路设计上，可通过降低输出功率的方式减轻非线性失真效应。

功放非线性属于有源电子器件的固有特性，研究其机理并采取措施改善，具有重要意义。目前已提出了各种技术来克服改善功放的非线性失真，其中预失真技术是被研究和应用较多的一项新技术，其最新的研究成果已经被用于实际的产品（如无线通信系统等），但在新算法、实现复杂度、计算速度、效果精度等方面仍有相当的研究价值。

本题从数学建模的角度进行探索。若记输入信号 $x(t)$ ，输出信号为 $z(t)$ ， $t$ 为时间变量，则功放非线性在数学上可表示为 $z(t) = G(x(t))$ ，其中 $G$ 为非线性函数。预失真的基本原理是：在功放前设置一个预失真处理模块，这两个模块的合成总效果使整体输入-输出特性线性化，输出功率得到充分利用。

由于各类功放的固有特性不同，特性函数 $G(\cdot)$ 差异较大，即使同一功放，由于输入信号类型、环境温度等的改变，其非线性特性也会发生变化。根据函数逼近的 Weierstrass 定理，对解析函数 $G(x)$ 总可以用一个次数充分大的多项式逼近到任意程度，故可采用计算简单的多项式表示非线性函数。

如果某时刻的输出仅与此时刻的输入相关，称为无记忆功放，而如果功放的某时刻输出不仅与此时刻输入有关，而且与此前某一时间段的输入有关，则称为有记忆功放。

### 1.2 需要研究的几个问题

在题目所提供的背景材料以及自行查阅相关文献资料的基础上，需要研究下列问题：

#### 1) 无记忆功放

数据文件 1 给出了某功放无记忆效应的复输入-输出测试数据，其输入-输出幅度图为：

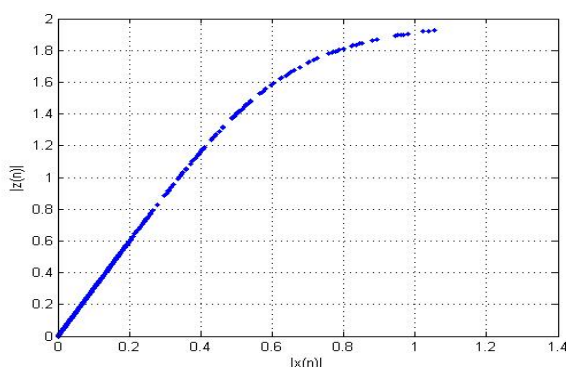


图 1.1 功放输入/输出幅度散点图

请根据提供的数据，完成以下任务。

A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。

B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，建立预失真模型。写出目标误差函数，计算线性化后最大可能的幅度放大倍数，运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的结果。

2) 有记忆功放

数据文件 2 给出了某功放的有记忆效应的复输入-输出数据，请完成以下任务。

A. 建立此功放的非线性特性的数学模型，然后用 NMSE 评价所建模型的准确度。

B. 根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，以框图的方式建立预失真处理的模型实现示意图（提示：可定义基本实现单元模块和确定其之间关系，组成整体图），然后计算预失真模型相关参数。运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的计算结果。

3) 拓展研究

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (1-1)$$

其中  $s(f)$  为信号的功率谱密度函数， $[f_1, f_2]$  为传输信道， $[f_2, f_3]$  为相邻信道。功率谱密度的计算可通过对信号的自相关函数进行 Fourier 变换计算，也可以通过直接法等计算（假定本题涉及的信号为时间平稳信号）。

如果题 2 所附的数据采样频率  $F_s = 30.72 \times 12 \text{MHz}$ ，传输信道按照 20MHz 来算，邻信道也是 20MHz。根据给出的数据，请计算功放预失真补偿前后的功率谱密度，并用图形的方式表示三类信号的功率谱密度（输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号），最后用 ACPR 对结果进行分析评价。

## 二：符号说明

输入信号：  $x(n)$

输入信号幅度：  $|x(n)|$

输入信号相位：  $\arg(x(n))$

输出信号：  $z(n)$

输出信号幅度：  $|z(n)|$

输出信号相位：  $\arg(z(n))$

输出信号的相移：  $\Delta\theta(n)$

经预失真处理后的信号：  $y(n)$

经预失真处理后的信号幅度：  $|y(n)|$

经预失真处理后的信号相位：  $\arg(y(n))$

功放输出信号幅度随输入信号幅度变化图： AM/AM 图

功放输出信号相位变化随输入信号幅度变化图： AM/PM 图

系统的信号放大倍数：  $g$

功放输入-输出传输特性：  $G(\cdot)$

预失真器特性：  $F(\cdot)$

信号平均输出功率：  $P_{avg}$

### 三：问题一

#### 3.1 问题分析

数据文件 1 中包含了某功放无记忆效应的复输入-输出测试数据(1000 组), 首先我们对该数据进行了预处理, 通过作出 AM/AM 图和 AM/PM 图来大致分析该功放的非线性特性 (如图 3.1 所示), 其中输出信号的相移 $\Delta\theta(n)$ 可以由输出信号相位 $\arg(z(n))$ 和输入信号相位 $\arg(x(n))$ 相减得到。

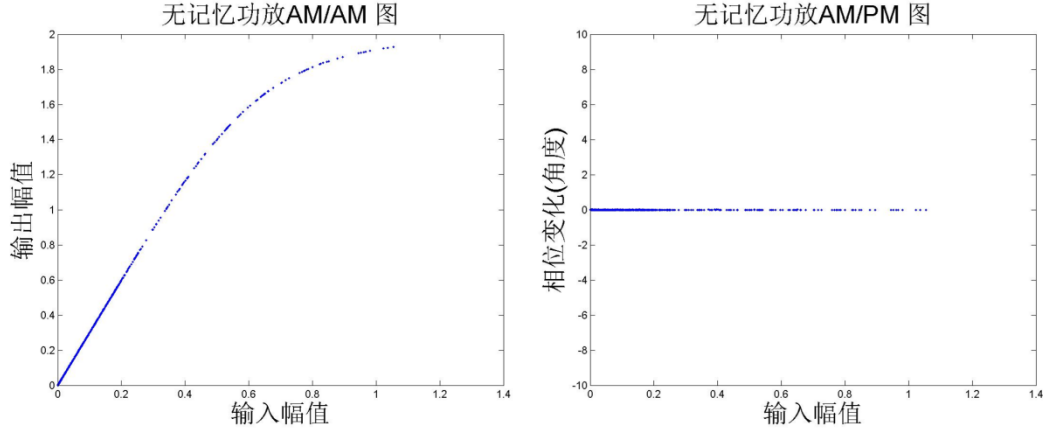


图 3.1 无记忆功放的 AM/AM 图和 AM/PM 图

从图 3.1 可以看出, 该无记忆功放的输出信号幅度 $|z(n)|$ 与输入信号幅度 $|x(n)|$ 成单调的非线性关系, 而输出相移基本不随输入幅度的变化而变化, 始终保持在 0 附近 (实际上相位差小于  $10^{-13}$  度)。因此, 我们在下面的求解过程中可以假定功率放大器不会改变输入信号的相位, 直接对功放输入输出幅度的非线性特性进行建模。

#### 3.2 模型假设

- 1) 该无记忆功率放大器对输入信号相位的改变非常小, 可以忽略不计;
- 2)  $x(n)/z(n)$ 为原始输入/输出信号经过离散采样得到,  $y(n)$ 为预失真器的原始输出信号经过离散采样得到, 采样过程符合 Nyquist 采样定理要求;
- 3) 当功放的输入为 0 时, 输出也为 0, 即其 AM/AM 特性曲线经过原点;
- 4) 限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值;
- 5) 限定允许的误差范围: NMSE 小于 -40dB, 即 EVM 值小于 1%。

#### 3.3 模型的建立与求解

##### 3.3.1 无记忆功率放大器的非线性特性建模

###### 1. 多项式模型

无记忆功放在某一时刻的输出仅与此时刻的输入相关, 则其非线性特性可用离散多项式表示如下:

$$z(n) = \sum_{k=1}^K a_k x^k(n) = a_1 x(n) + a_2 x^2(n) + \dots + a_K x^K(n) \quad (3-1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

其中,  $K$ 表示非线性的阶数 (即多项式次数), 诸 $a_k$ 为各次幂的系数。根据

假设（输出信号相位变化可忽略不计），即：

$$\arg(z(n)) = \arg(x(n)) \quad (3-2)$$

则先不考虑相位，功放的输入-输出信号幅度的非线性关系可表示为：

$$\begin{aligned} |z(n)| &= \sum_{k=1}^K a_k |x(n)|^k = a_1 |x(n)| + a_2 |x(n)|^2 + \dots + a_K |x(n)|^K \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3-3)$$

记  $\varphi_k(x) = x^k$ ，则  $z = f(x)$  可以用函数组  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^K = \{x, x^2, \dots, x^K\}$  生成的  $K$  维空间里这组基的线性组合表示，即：

$$|z(n)| = \sum_{k=1}^K a_k \varphi_k(|x(n)|) \quad (3-4)$$

用向量  $Z$  来表示输出信号：

$$Z = [ |z(1)|, |z(2)|, \dots, |z(N)| ]_{1 \times N} \quad (3-5)$$

由向量  $\hat{Z}$  来表示拟合后的输出信号：

$$\hat{Z} = [ |\hat{z}(1)|, |\hat{z}(2)|, \dots, |\hat{z}(N)| ]_{1 \times N} \quad (3-6)$$

由  $N \times K$  维矩阵  $X$  来表示输入信号及其各阶函数表示：

$$X = \begin{bmatrix} \varphi_1(|x(1)|) & \varphi_2(|x(1)|) & \dots & \varphi_K(|x(1)|) \\ \varphi_1(|x(2)|) & \varphi_2(|x(2)|) & \dots & \varphi_K(|x(2)|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(|x(N)|) & \varphi_2(|x(N)|) & \dots & \varphi_K(|x(N)|) \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

由向量  $A$  来表示多项式系数：

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_K]^T \quad (3-8)$$

则拟合后的输出信号  $\hat{Z}$  可以用矩阵的形式来表示：

$$\hat{Z} = XA \quad (3-9)$$

本文通过最小二乘法(LS)作多项式拟合，即确定待定系数  $a_k (k = 1, 2, \dots, K)$ ，使得：

$$\begin{aligned} J &= |e(n)|^2 = |Z - \hat{Z}|^2 = (Z - \hat{Z})^H (Z - \hat{Z}) = (Z - XA)^H (Z - XA) \\ &= Z^H Z - Z^H XA - A^H X^H Z + A^H X^H XA \\ &= Z^H Z - 2A^H X^H Z + A^H X^H XA \end{aligned} \quad (3-10)$$

有最小值，即有：

$$\nabla J = \frac{\partial J}{\partial A} = 0 \quad (3-11)$$

推导得：



$$X^H X A = X^H Z \quad (3-12)$$

两边同时乘以 $(X^H X)^{-1}$ ，解得：

$$A = (X^H X)^{-1} X^H Z \quad (3-13)$$

根据数据文件 1 可以首先计算出矩阵 $X$ （输入信号其各阶函数表示）和向量 $Z$ （输出信号），将其代入式(3-13)可以得到系数向量 $A$ ，再将 $A$ 代入(3-9)可以进一步得到输出信号幅度的拟合值 $\hat{Z}$ 。因为假设该功放不会改变输入信号的相位，则通过模型拟合得到信号估计值（含幅度和相位）：

$$\hat{z}(n) = |\hat{z}(n)| e^{j \arg(\hat{z}(n))} = |\hat{z}(n)| e^{j \arg(z(n))} \quad (3-14)$$

最后根据 NMSE 以及 EVM 的计算公式对拟合误差进行评价：

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (3-15)$$

$$EVM = \sqrt{\frac{E[e^2]}{E[X^2]}} \times 100\% \quad (3-16)$$

不同阶数 $K$ （3~10）对应的 NMSE 值和 EVM 如表 3-1 所示。

**表 3-1 不同阶数 $K$ （3~8）对应的 NMSE 值与 EVM 值**

阶数 $K$	3	4	5	6	7	8
NMSE 值(dB)	-37.81	-46.66	-53.44	-64.00	-68.63	-80.85
EVM 值(%)	1.29	0.46	0.21	0.06	0.03	0.01

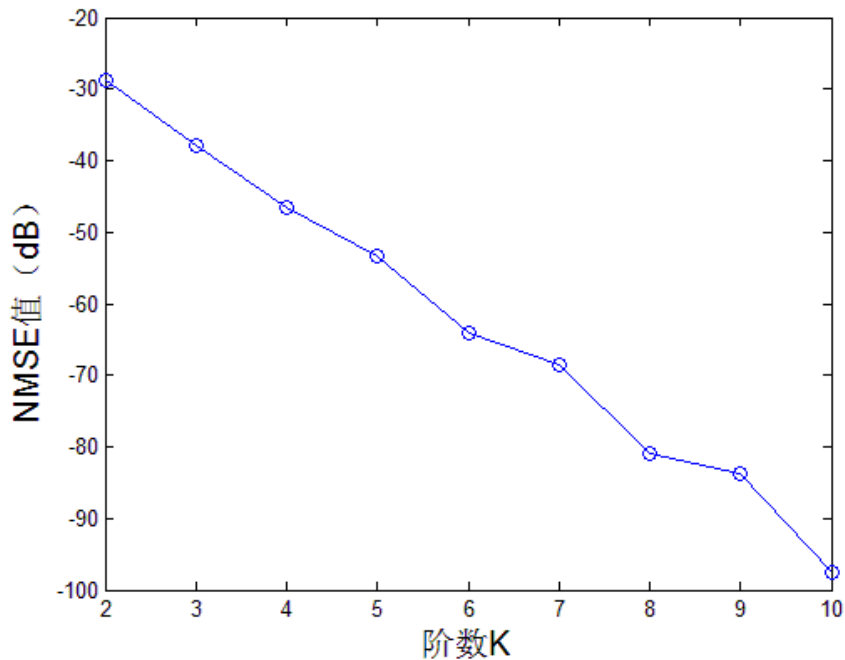


图 3.2 不同阶数多项式拟合后模型的 NMSE 值

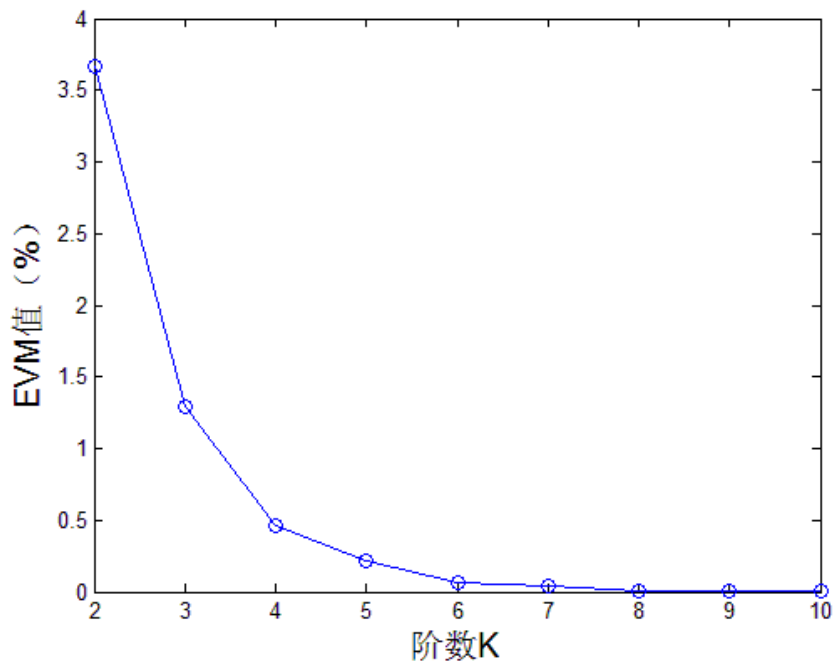


图 3.3 不同阶数多项式拟合后模型的 EVM 值

随着多项式拟合阶数 $K$ 的增大，模型得到 NMSE 值和 EVM 值会越来越小，如图 3.2 和图 3.3 所示。

当选取 $K$ 为 4 时，模型的 NMSE 值已经降至-40dB 以下，EVM 值小于 1%，基本满足实际需求，而当多项式的阶数增加时，会导致模型过于复杂。因此最终得到的功率放大器模型为：

$$|z(n)| = \sum_{k=1}^4 a_k |x(n)|^k = 2.866|x(n)| + 1.495|x(n)|^2 - 4.153|x(n)|^3 + 1.7|x(n)|^4 \quad (3-17)$$

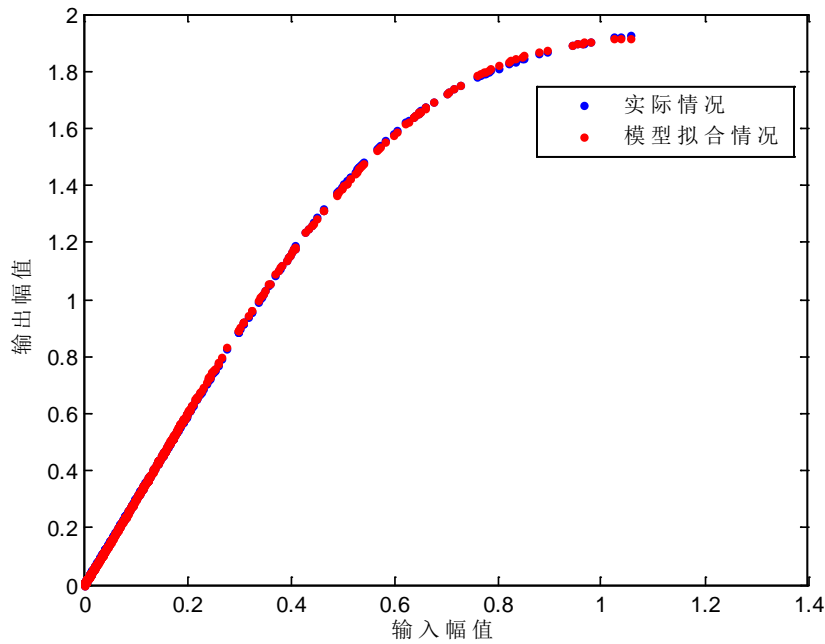


图 3.4  $K$ 取 4 时功放模型的拟合结果图

图 3.4 为  $K = 4$  的拟合情况。

在式(3-3)中,  $z = f(x)$  是用函数组  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{K=K} = \{x, x^2, \dots, x^K\}$  生成的  $K$  维空间里这组基的线性组合表示, 下面采用一组正交函数基来进行线性表示:

正交函数基的一般公式[1]为:

$$\psi_k(x) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+k} \frac{(k+1)!}{(l-1)!(l+1)!(k-l)!} |x|^{l-1} x \quad (3-18)$$

例如当  $k$  取 1~5 时, 得到:

$$\psi_1(x) = x$$

$$\psi_2(x) = 4|x|x - 3x$$

$$\psi_3(x) = 15|x|^2x - 20|x|x + 6x$$

$$\psi_4(x) = 56|x|^3x - 105|x|^2x + 60|x|x - 10x$$

$$\psi_5(x) = 210|x|^4x - 504|x|^3x + 420|x|^2x - 140|x|x + 15x$$

式(3-3)等价于:

$$|z(n)| = \sum_{k=1}^K b_k \psi_k(|x(n)|) \quad (3-19)$$

类似地, 可以采用最小二乘法得到拟合系数  $b_k (k = 1, 2, \dots, K)$ , 从而计算出不同阶数情况下模型的 NSME 与 EVM 值, 如表 3-2 所示。

通过比较可以发现, 采用正交函数基表示功放的输入输出关系后, NMSE 值与用传统函数基表达的结果相同, 即在精度上并没有提高。但是如图 3.5 所示, 当  $x \rightarrow 0$  时, 原有基函数  $\varphi_k(x)$  (收敛速度与  $x^k$  相同) 的下降速度很快, 这将使得查找表法在低输入时的量化误差增加, 而正交基函数  $\psi_k(x)$  (收敛速度与  $x$  相同) 不会存在此类问题, 因此从实际工程实现的角度来分析, 正交函数组  $\{\psi_k(x)\}$  的性能好于原有函数组  $\{\varphi_k(x)\}$ 。

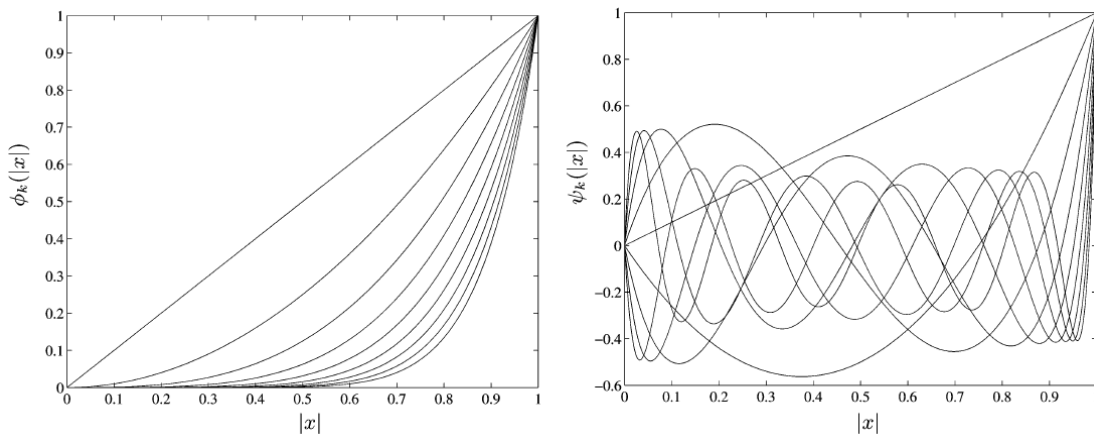


图 3.5 原有函数组  $\{\varphi_k(x)\}$  和正交函数组  $\{\psi_k(x)\}$  对比[1]

表 3-2 不同阶数  $K(3 \sim 8)$  对应的 NMSE 值与 EVM 值(采用正交函数基表示)

阶数 $K$	3	4	5	6	7	8
NMSE 值(dB)	-37.81	-46.66	-53.44	-64.00	-68.63	-80.85
EVM 值(%)	1.29	0.46	0.21	0.06	0.03	0.01

## 2.Saleh 模型

除了多项式模型，还可以用 Saleh 模型[2][3]来刻画无记忆功率放大器的非线性特性，表达式如下：

$$z(n) = \frac{\alpha_a |x(n)|}{1 + \beta_a |x(n)|^2} \exp \left( j \left( \arg(x(n)) + \frac{\alpha_\phi |x(n)|^2}{1 + \beta_\phi |x(n)|^2} \right) \right) \quad (3-20)$$

易得到表示 AM/AM 特性和 AM/PM 特性的模型分别为：

$$|z(n)| = \frac{\alpha_a |x(n)|}{1 + \beta_a |x(n)|^2} \quad (3-21)$$

$$\Delta\theta(n) = \frac{\alpha_\phi |x(n)|^2}{1 + \beta_\phi |x(n)|^2} \quad (3-22)$$

这里我们只需拟合 AM/AM 特性的模型。由式(3-21)可得

$$|z(n)| = \alpha_a |x(n)| - \beta_a |x(n)|^2 |z(n)| \quad (3-23)$$

把 $|x(n)|$ 、 $-|x(n)|^2 |z(n)|$ 当作式(3-4)中的基函数 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ ，则同样可用式(3-5)~式(3-13)的处理方法求出系数 $\alpha_a$ 和 $\beta_a$ 。所得结果如表 3-3 所示。

表 3-3 Saleh 模型拟合结果

$\alpha_a$	$\beta_a$	NMSE(dB)	EVM(%)
3.153	-0.617	-31.83	2.56

从表(3-3)的结果可以看到，用 Saleh 模型对该功率放大器进行拟合的 NMSE 与 EVM 都没有达到我们假设中给定的要求，表明拟合效果不是很好，这一点从拟合效果图更容易看出来，如图 3.6 所示。

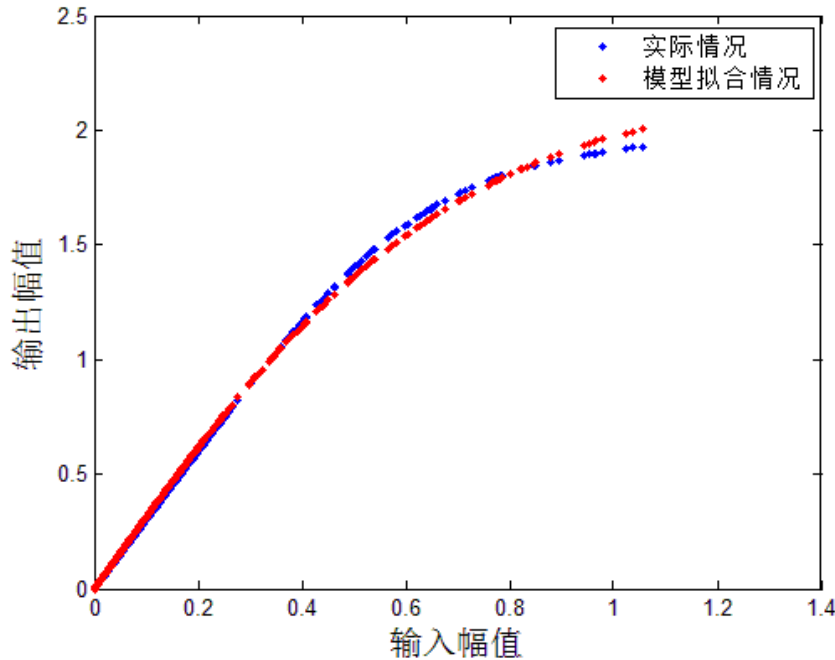


图 3.6 Saleh 模型的拟合结果图

事实上, Saleh 模型最初是针对行波管放大器(TWTA)提出来的, 因此 Saleh 模型能够比较精确地描述行波管放大器的非线性特性[2]。但对于其他放大器(如固态功率放大器 SSPA), 则不一定适用, 因为不同于行波管放大器的幅度和相位转换特性。由拟合结果可知本题中的放大器特性也不适合用该模型来描述。

### 3.递归最小二乘法(RLS)

在用式(3-13)求解模型系数时, 实际工程实现有几个问题:

- (1) 需要对矩阵 $X^H X$ 进行求逆运算。当模型阶数较高时, 矩阵 $X^H X$ 较大, 求逆实现起来不方便, 且误差较大。
- (2) 当有新的训练数据时, 需要重新构造矩阵 $X$ 并对 $X^H X$ 求逆, 需要很大的不必要的计算量。
- (3) 当有新的训练数据时, 通过式(3-13)求出的解没有用于新的求解过程, 使得整个过程效率不高。
- (4) 功放在工作过程中可能处于动态变化, 这种一步求逆的算法无法实时跟踪各种变换的影响。

使用递归最小二乘法(Recursive Least Square, RLS)求解能够解决以上问题。RLS 的基本思想就是通过已有数据迭代, 一步步逼近最优的最小二乘解。具体迭代步骤为:

$$1) \text{ 求卡尔曼增益向量: } k_i = \frac{1}{1 + x_i^T P_{i-1} x_i} P_{i-1} x_i \quad (3-24)$$

$$2) \text{ 更新方差矩阵的逆: } P_i = (I - k_i x_i^T) P_{i-1} \quad (3-25)$$

$$3) \text{ 更新所求系数: } a^{(i)} = a^{(i-1)} + k_i (z_i - x_i^T a^{(i-1)}) \quad (3-26)$$

其中,  $k_i$ 是卡尔曼增益向量;  $P_i$ 是方差矩阵的逆, 其初始值为 $P_0 = \delta^{-1} I$ ,  $\delta$ 是一个很小的正数;  $z_i$ 为第 $n = i$ 时的输出, 而 $x_i$ 为式(3-13)中 $X$ 的第 $i$ 行, 也即 $n = i$ 时基函数的值组成的向量 $[\varphi_1(x(i)), \varphi_2(x(i)), \dots, \varphi_N(x(i))]$ ;  $e_i = z_i - x_i^T a^{(i-1)}$ 表示

误差;  $a^{(i)}$ 是第 $i$ 次迭代求得的参数向量, 其初值可以设为 0 向量。当然, 较为准确的初值估计可以提高算法的准确度。

用 RLS 算法迭代求解时, 要考虑到算法的收敛性。当测试数据比较少时, 迭代次数有限, 所求得结果并不一定是最优解。本题由于数据相对较少(1000 组), 用 RLS 算法求得的模型参数没有直接用矩阵求逆方法的结果准确, 如图 3.7 和图 3.8 所示。RLS 参数设置为 $\delta = 0.001$ 。

在数据较少时要想提高 RLS 的精确度, 可以考虑采用一些使得收敛速度加快的改进 RLS 算法。而当测试数据较多时, 上述 RLS 算法即可得到较好的效果。

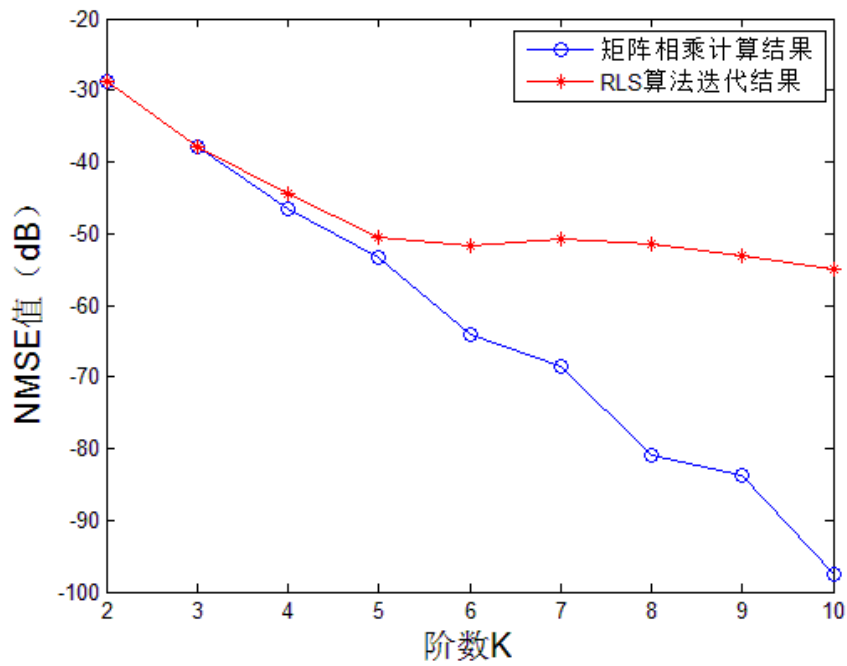


图 3.7 矩阵求逆方法与 RLS 迭代方法 NMSE 结果对比

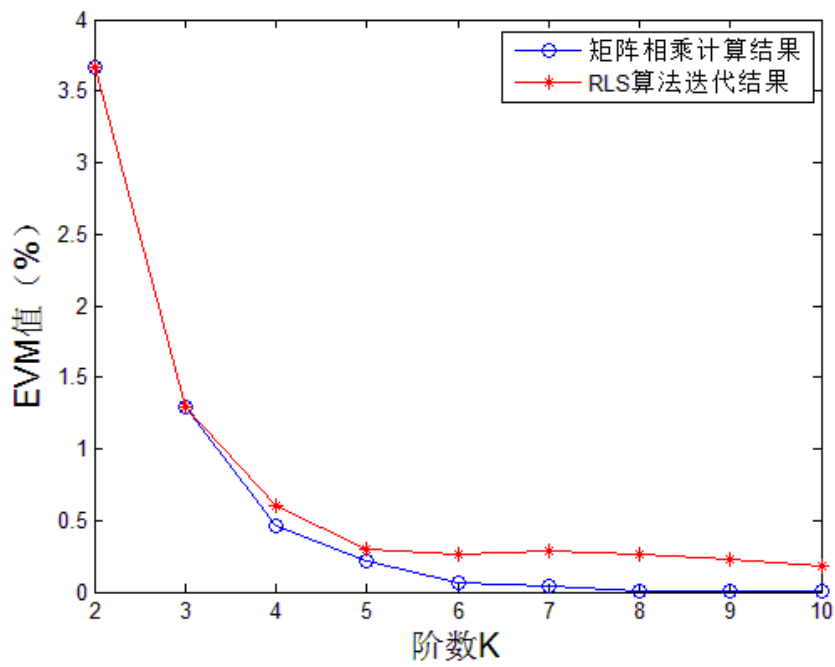


图 3.8 矩阵求逆方法与 RLS 迭代方法 EVM 结果对比

### 3.3.2 预失真建模

预失真的基本原理是：在功放前设置一个预失真处理模块（与功放有相反特性），这两个模块合成的总效果使整体输入-输出特性线性化，输出功率得到充分利用。原理框图如图 3.9 所示。

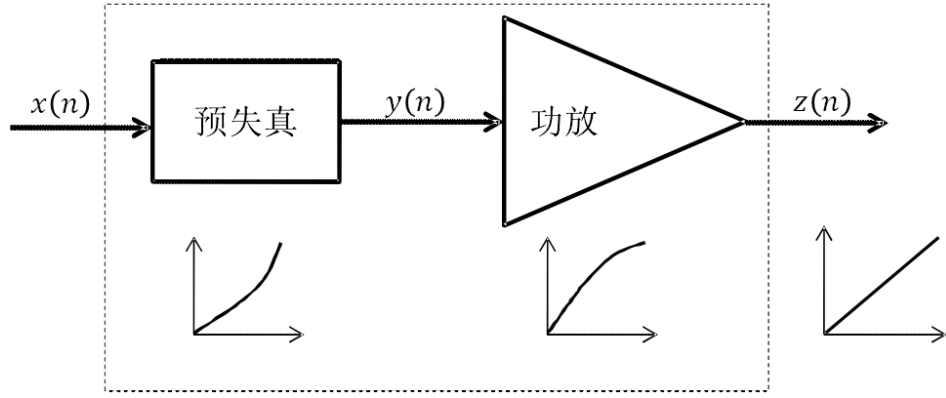


图 3.9 预失真技术的原理框图示意

其中 $x(n)$ 和 $z(n)$ 表示系统输入和输出信号， $y(n)$ 为预失真器的输出，设功放输入-输出传输特性为 $G()$ ，预失真器特性为 $F()$ ，那么预失真处理原理可表示为:

$$z(n) = G(y(n)) = G(F(x(n))) = G \circ F(x(n)) = L(x(n)) \quad (3-27)$$

$G \circ F = L$ 表示为 $G()$ 和 $F()$ 的复合函数等于 $L()$ 。线性化则要求

$$z(n) = L(x(n)) = g \cdot x(n) \quad (3-28)$$

式中常数 $g$ 是功放的理想“幅度放大倍数”( $g > 1$ )。

构造预失真器模型的方法可大致分为两种，一种是首先确定功放，然后找出功放的反变换。然而，非线性系统的反变换在实际应用中是非常难于获得的。另一种方法是用间接的训练结构来设计预失真器（如图 3.10 所示），这在实际应用中比较常见。

本文采用间接的训练结构来设计预失真器，将输出信号 $z(n)/g$ 作为待训练的预失真器(A)的输入，其中 $g$ 是预先设定的系统理想增益。由于该无记忆功放对输入信号相位的改变可忽略不计，所以待训练的预失真器(A)也不会改变信号的相位，其输入-输出信号幅度的非线性关系表示如下：

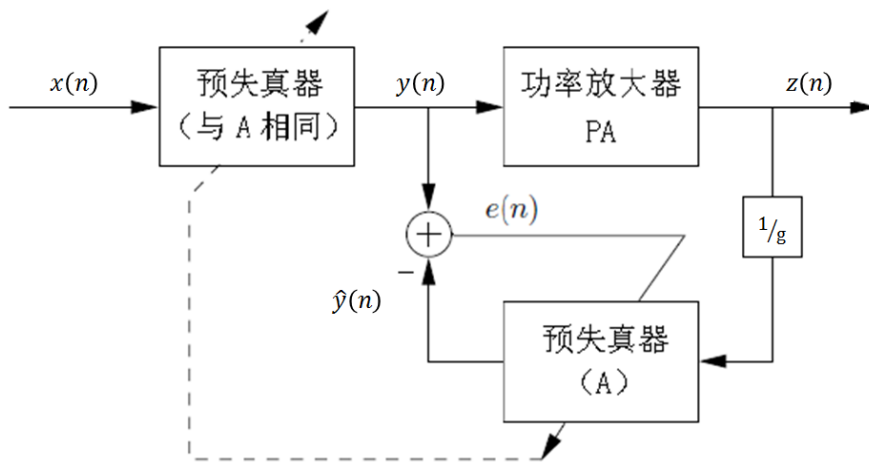


图 3.10 利用间接训练结构设计预失真器[3]

$$|y(n)| = \sum_{k=1}^K b_k |z(n)/g|^k = b_1 |z(n)/g| + b_2 |z(n)/g|^2 + \dots + b_K |z(n)/g|^K \quad (3-29)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

使用函数组  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{K=K} = \{x, x^2, \dots, x^K\}$  表示为:

$$|y(n)| = \sum_{k=1}^K b_k \varphi_k(|z(n)/g|) \quad (3-30)$$

实际的预失真器和待训练的预失真器(A)完全一样。理想情况下,我们希望最终  $z(n) = gx(n)$ , 即预失真和功放的联合模型呈线性后误差最小。

本题探索中, 预失真处理建模还需考虑以下 2 个约束条件:

约束 1: 预失真处理的“输出幅度限制”。由于功放的输入幅度需保持在一定范围, 过大的值会导致饱和溢出, 因此, 本题的建模中限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值。

约束 2: 预失真处理加载后, 尽可能使功放的输出“功率最大化”。为了充分发挥功放的作用, 预失真处理模型的建立必需考虑尽可能使功放的信号平均输出功率最大, 因此预失真处理后的输出幅度(等效为功放的输入幅度)需尽可能提高。

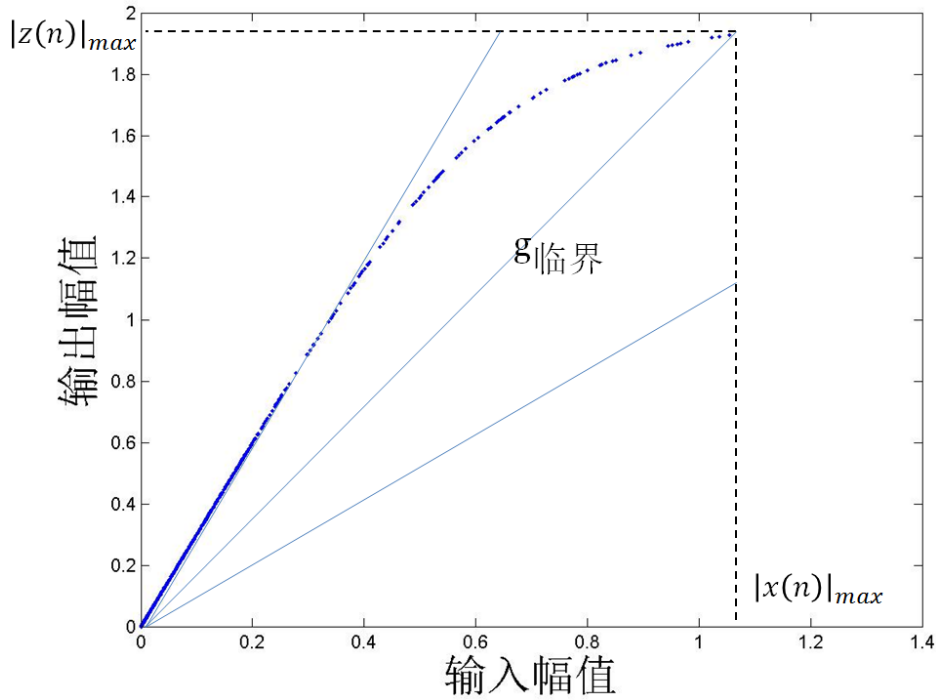


图 3.11 系统在不同增益大小情况下的对比分析

如图 3.11 所示, 加载预失真器后得到的整体系统输入输出幅值关系变为线性, 即  $z(n) = g \cdot x(n)$ , 假设增益大小的临界值为:

$$g_{\text{临界}} = \frac{|z(n)|_{\max}}{|x(n)|_{\max}} \quad (3-31)$$

可以分为三种情况进行讨论[4]:



(1) 当 $g = g_{\text{临界}}$ 时, 输出信号的峰值等于 $|z(n)|_{\text{max}}$ , 此时信号的平均输出功率记作 $P_{\text{avg1}}$ ;

(2) 当 $g < g_{\text{临界}}$ 时, 输出信号的峰值小于 $|z(n)|_{\text{max}}$ , 此时信号的平均输出功率 $P_{\text{avg2}}$ 小于 $P_{\text{avg1}}$ ;

(3) 当 $g > g_{\text{临界}}$ 时, 输出信号的峰值等于 $|z(n)|_{\text{max}}$ , 此时信号的平均输出功率 $P_{\text{avg3}}$ 等于 $P_{\text{avg1}}$ , 由于需要考虑约束 1 中所提到的预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值, 这将导致系统输入信号范围变小, 即加载预失真器后输入信号不能取到 $|x(n)|_{\text{max}}$ , 显然对于实际应用不利。

综合考虑“输出幅度限制”和“功率最大化”两个约束, 可以判断系统的理想增益 $g$ 等于 $g_{\text{临界}}$ 。根据数据文件 1 可计算得 $g_{\text{临界}} = 1.8265$ 。

下面对上述预失真模型进行求解。  
用向量 $Y$ 来表示预失真器的输出信号:

$$Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]_{1 \times N} \quad (3-32)$$

用向量 $\hat{Y}$ 来表示拟合后预失真器的输出信号:

$$\hat{Y} = [\hat{y}(1), \hat{y}(2), \dots, \hat{y}(N)]_{1 \times N} \quad (3-33)$$

类似地, 预失真器的输入信号及其各阶函数可以表示为:

$$Z = \begin{bmatrix} \varphi_1(|z(1)/g|) & \varphi_2(|z(1)/g|) & \cdots & \varphi_K(|z(1)/g|) \\ \varphi_1(|z(2)/g|) & \varphi_2(|z(2)/g|) & \cdots & \varphi_K(|z(2)/g|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(|z(N)/g|) & \varphi_2(|z(N)/g|) & \cdots & \varphi_K(|z(N)/g|) \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

用向量 $B$ 来表示多项式系数:

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T \quad (3-35)$$

拟合后预失真器的输出信号可以写成矩阵表示:

$$\hat{Y} = ZB \quad (3-36)$$

目标误差函数:

$$J = \|e\|^2 = (Y - \hat{Y})^H (Y - \hat{Y}) \quad (3-37)$$

使该目标函数取最小值, 此时系数表示:

$$B = (Z^H Z)^{-1} Z^H Y \quad (3-38)$$

功放的非线性特性采用 3.3.1 中的所求的多项式模型来表示 (阶数  $K=4$ ),

求解预失真器的具体迭代步骤如下：

步骤一：由于预失真器是功放的逆模型，我们可以首先将数据文件 1 中功放的输出信号 $z(n)/g$ 和输入信号 $x(n)$ 分别当作训练预失真器(A)的输入和输出，对该预失真器进行训练，根据式(3-38)得出系数向量 $B$ 。

步骤二：由于实际的预失真器和待训练的预失真器(A)完全一样，如图 3.10 所示，我们可以根据输入信号 $x(n)$ 和预失真器系数得到预失真器输出信号 $y(n)$ ，然后将信号 $y(n)$ 作为功放的输入，得到功放输出信号 $z(n)$ 。

步骤三：将功放的输出信号 $z(n)/g$ 和输入信号 $y(n)$ 作为待训练的预失真器(A)的输入和输出，优化得到系数向量 $B$ 和 $\hat{Y}$ ，计算 $Y$ 与 $\hat{Y}$ 的偏差（采用 EVM 表示），如果 EVM 小于阈值 $e_\tau$ 或者迭代次数大于阈值 $N_\tau$ ，则循环结束，否则迭代次数加 1，转向步骤二。

整体系统模型的计算精度采用 NMSE 来表征，输入信号 $x(n)$ 经过预失真器和功放后得到的输出信号作为 $\hat{z}(n)$ ，输入信号 $x(n)$ 经过理想线性系统得到的输出信号作为 $z(n)$ ，NMSE 的计算公式可以表示为：

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |gx(n) - G(F(x(n)))|^2}{\sum_{n=1}^N |gx(n)|^2} \quad (3-39)$$

在步骤二中，将信号 $y(n)$ 作为功放的输入，得到功放输出信号 $z(n)$ ，实际训练时可以直接检测功放的输出值，但本题不知道功放的具体输入输出特性，故采用之前拟合的功放模型进行计算。当然，也可以只进行步骤一求得预失真模型的参数，只是精度稍低。

表 3-4 和表 3-5 分别列出了直接计算(未迭代)和迭代后所得整体系统相对理想线性系统的 NMSE 值和 EVM 值。选择了不同阶数  $K$  的预失真模型，迭代时 EVM 的阈值 $e_\tau$ 取 1%，迭代次数的阈值 $N_\tau$ 取 5。

从表中结果可以看出，无论是否采用迭代训练，随着预失真模型的拟合阶数 $K$ 的增大，NMSE 值和 EVM 值都会越来越小，即模型的精度会随着阶数的提高而增大。但相比直接计算而言，迭代的结果精度更高。不同阶数  $K$  下得到的 NMSE 和 EVM 如图 3.12 和图 3.13 所示。

表 3-4 不同阶数  $K$  (3~8) 对应的 NMSE 值

阶数 $K$	3	4	5	6	7	8
未迭代 NMSE 值(dB)	-27.93	-31.58	-36.03	-40.07	-42.94	-43.96
迭代 NMSE 值(dB)	-36.12	-39.12	-41.64	-42.93	-46.30	-49.85

表 3-5 不同阶数  $K$  (3~8) 对应的 EVM 值

阶数 $K$	3	4	5	6	7	8
未迭代 EVM 值(%)	4.01	2.64	1.58	0.99	0.71	0.63
迭代 EVM 值(%)	1.56	1.11	0.83	0.71	0.48	0.32

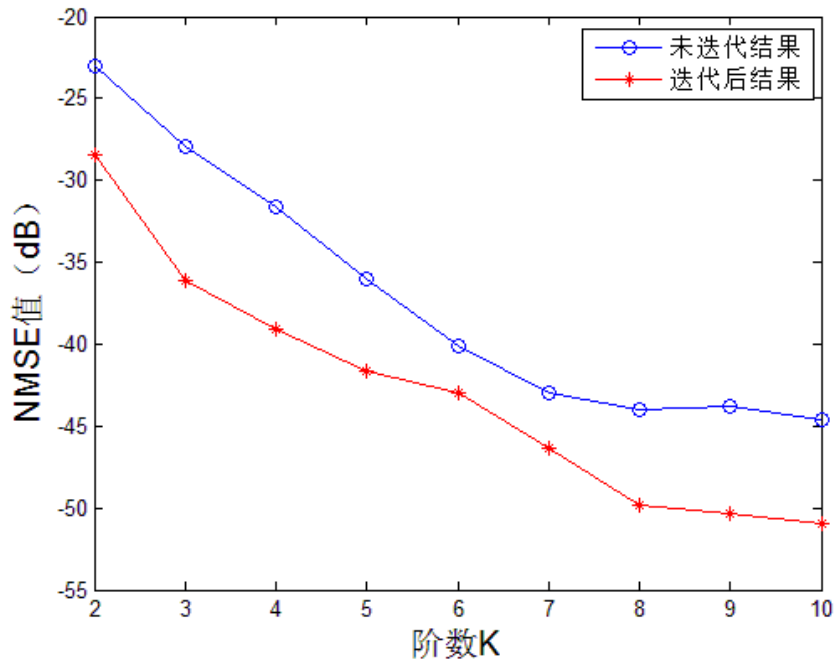


图 3.12 不同阶数多项式拟合预失真模型的 NMSE 值（系统整体）

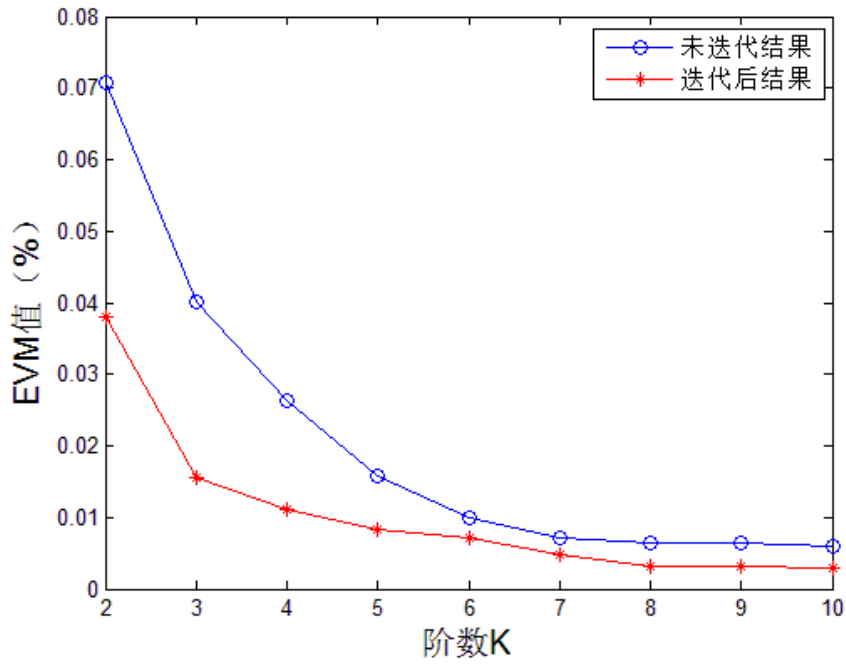


图 3.13 不同阶数多项式拟合预失真模型的 EVM 值（系统整体）

根据模型假设中的 NMSE 小于 -40dB（即 EVM 值小于 0.01）的标准，我们确定预失真器的阶数为 5 阶，**最终拟合的预失真器模型为：**

$$\begin{aligned}
 |y(n)| &= \sum_{k=1}^5 b_k |x(n)|^k \\
 &= 0.689|x(n)| - 0.923|x(n)|^2 + 3.376|x(n)|^3 - 4.932|x(n)|^4 + 2.619|x(n)|^5
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

预失真器的输入输出幅度图如图 3.14 所示。加上预失真器后，整个系统的输入输出幅度图如图 3.15 所示。可以看到幅值基本成线性关系。又假设相位不发生变化，故最终得到的系统具有较好的线性特性。

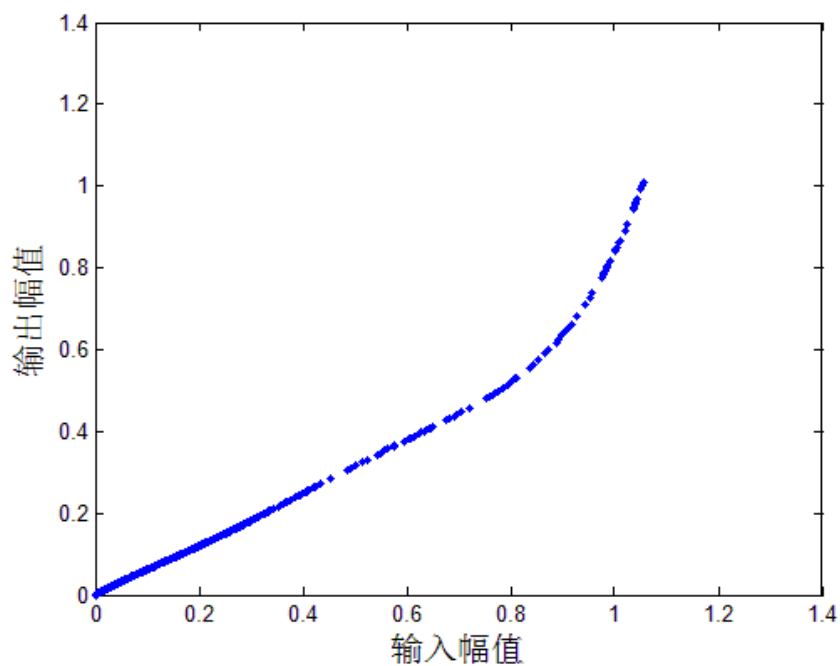


图 3.14 预失真器建模后输入/输出幅度散点图

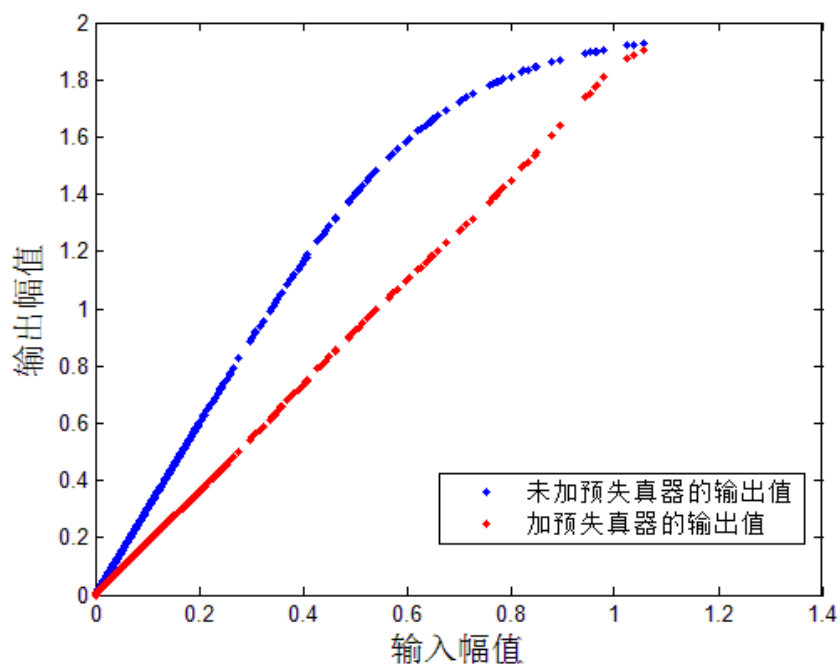


图 3.15 加入预失真器前后输入/输出幅度散点图

根据整个系统输入输出幅值，拟合后得到系统的幅度放大倍数为  $g=1.8244$ ，这也是线性化后最大可能的幅度放大倍数。

### 3.4 问题一结论

在刻画该无记忆功率放大器的非线性特性时，我们采用了多项式模型和 Saleh 模型。对于多项式模型，能够用较低阶数较好的刻画该无记忆功率放大器的 AM/AM 特性，精度较高；而 Saleh 模型的精度较低，不适合用于描述该功放的非线性特性。

针对多项式模型，我们采用了两组基函数进行表示：传统基函数和正交基函数。在只处理信号幅值时，两者对模型的精度没有影响。但在工程实现时，正交基要比传统基误差更小，更易实现。

在求解模型参数时，我们采用了矩阵直接求逆的最小二乘法和递归最小二乘法（RLS）。由于 RLS 要考虑收敛速度，而本问题的测试数据量较小，使得 RLS 求解的结果精度比直接用矩阵求逆的结果精度低。但在工程实现时，矩阵求逆存在计算复杂、效率低等问题，相比起来 RLS 更加适合用于工程实现。但针对本问题的实现，需要进行一定的改进以提高其收敛速度。

## 四：问题二

### 4.1 问题分析

数据文件 2 中包含了某功放有记忆效应的复输入-输出测试数据(73920 组), 同样我们先对该数据进行了预处理, 通过作出 AM/AM 图和 AM/PM 图来大致分析该功放的非线性特性 (如图 4.1 所示)。

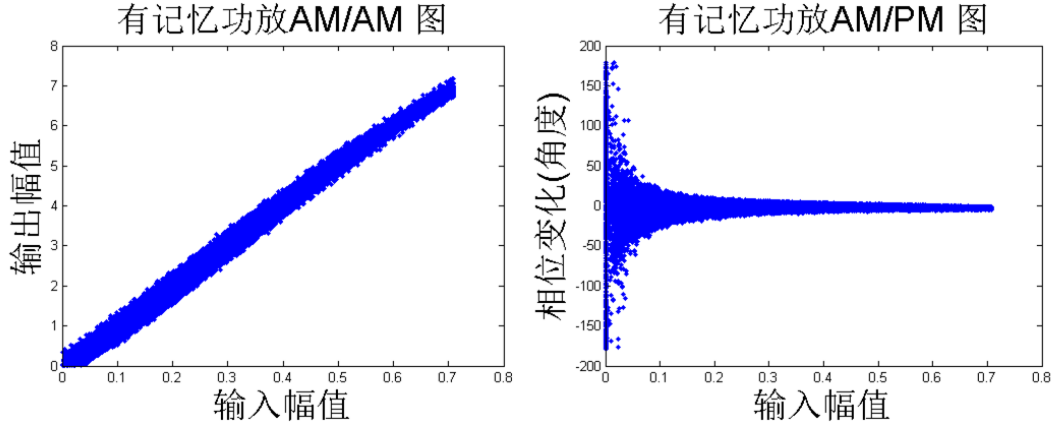


图 4.1 有记忆功放的 AM/AM 图和 AM/PM 图

从图 4.1 可以看出, 该有记忆功放的输出信号幅度 $|z(n)|$ 与输入信号幅度线性程度良好, 增益大致在 10 左右; 而输出相移在输入幅度较小的情况下会出现较大值, 随着输入幅度的增大, 输出相移逐渐趋近于 0。因此, 我们在下面的求解过程中不能忽略相位信息, 需要利用功放输入输出复信号对其非线性特性进行建模。

### 4.2 模型假设

- 1)  $x(n)/z(n)$ 为原始输入/输出信号经过离散采样得到,  $y(n)$ 为预失真器的原始输出信号经过离散采样得到, 采样过程符合 Nyquist 采样定理要求;
- 2) 限定预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值;
- 3) 限定允许的误差范围: NMSE 小于-40dB, 即 EVM 值小于 1%。

### 4.3 模型的建立与求解

#### 4.3.1 有记忆功率放大器的非线性特性建模

有记忆功放在某一时刻输出不仅与此时刻输入有关, 而且与此前某一时段的输入有关。具有记忆效应的功率放大器的模型一般可以用 Volterra 级数模型来表示[3] [5] [6]。它是一种泛函级数模型, 可以离散表示为:

$$z(n) = \sum_{k=1}^K z_k(n) \quad (4-1)$$

其中

$$z_k(n) = \sum_{m_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{m_k=0}^{M-1} h_k(m_1, \dots, m_k) \prod_{l=1}^k x(n-m_l) \quad (4-2)$$

$M$ 为记忆深度,  $h_k(m_1, \dots, m_k)$ 为  $k$  阶 Volterra 核。通过对阶数和记忆深度的调

节，可以十分精确的对功率放大器进行逼近。但随着阶数和记忆深度的增加，需要求得的参数呈指数级增长，难以在实际应用中实现，故一般较少使用。

除了 Volterra 级数模型外，还有一些由其简化得到的模型，如 Wiener 模型和 Hammerstein 等，具体简化步骤可阅读文献[1] [3]。记忆多项式模型也是一种简化的 Volterra 级数模型，这种模型只考虑 Volterra 级数模型中的对角项[7]，较为简单，其表达式为：

$$z(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M a_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \quad (4-3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

本题中我们采用该记忆多项式模型对此功放的非线性特性进行建模。

记  $\varphi_k(x) = x|x|^{k-1}$ ，则  $z$  可以用函数组  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{K=K} = \{x, x|x|, \dots, x|x|^{K-1}\}$  生成的  $K$  维空间里这组基的线性组合表示，即：

$$z(n) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M a_{km} \varphi_k(x(n-m)) \quad (4-4)$$

由向量  $Z$  来表示功放输出信号：

$$Z = [z(1), z(2), \dots, z(N)]_{1 \times N} \quad (4-5)$$

由向量  $\hat{Z}$  来表示拟合后的输出信号：

$$\hat{Z} = [\hat{z}(1), \hat{z}(2), \dots, \hat{z}(N)]_{1 \times N} \quad (4-6)$$

由矩阵  $X$  ( $N$  行  $K \times (M + 1)$  列) 来表示输入信号及其各阶函数表示 (以第  $n$  行为例)：

$$X(n,:) = [\varphi_1(x(n)), \varphi_1(x(n-1)), \dots, \varphi_1(x(n-M)), \dots, \varphi_k(x(n)), \varphi_k(x(n-1)), \dots, \varphi_k(x(n-M)), \dots, \varphi_K(x(n)), \varphi_K(x(n-1)), \dots, \varphi_K(x(n-M))]$$

$$(4-7)$$

由向量  $A$  来表示多项式系数：

$$A = [a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1M}, \dots, a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{kM}, \dots, a_{K0}, a_{K1}, \dots, a_{KM}]^T \quad (4-8)$$

则输出信号  $\hat{Z}$  可以用矩阵的形式来表示：

$$\hat{Z} = XA \quad (4-9)$$

目标误差函数：

$$J = \|e\|^2 = (Z - \hat{Z})^H (Z - \hat{Z}) \quad (4-10)$$

与无记忆功放类似，可以通过最小二乘法(LS)做拟合求解，有矩阵求逆法和 RLS 迭代法两种方法。具体步骤与无记忆功放模型求解时相同。用两种方法求得模型系数  $A$  后，通过式(4-9)求出模型的输出值，然后根据式(3-15)和式(3-16)计算出各自的 NMSE 值和 EVM 值。我们选取了不同的阶数  $K$  和不同的记忆深度  $M$ ，结果如表 4-1~表 4-4 所示。

从表中数据可以看到，采用矩阵求逆法计算得到的结果误差都相对较大，

**表 4-1 阶数 K 和记忆深度 M 变化时矩阵求逆算法得到的 NMSE 值(单位: dB)**

$\begin{matrix} K \\ M \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-28.94	-28.63	-21.09	-30.06	-29.28	-28.53	-28.20	-26.89	-26.67
2	-31.51	-32.01	-28.14	-35.42	-36.51	-30.74	-31.40	-33.16	-34.57
3	-29.88	-30.47	-33.37	-33.26	-34.55	-26.38	-29.91	-31.33	-28.94
4	-28.04	-29.75	-36.09	-31.56	-32.76	-21.04	-27.56	-27.62	-32.09
5	-27.84	-30.16	-34.89	-26.09	-36.77	-32.67	-28.88	-22.47	-33.99
6	-27.69	-30.57	-27.29	-24.26	-37.30	-34.77	-33.36	-31.42	-34.58
7	-25.55	-30.21	-19.38	-35.73	-36.70	-32.97	-30.85	-31.60	-31.73
8	-23.29	-29.59	-22.91	-36.95	-37.79	-31.77	-35.30	-31.89	-31.32
9	-23.25	-29.37	-20.97	-36.25	-37.06	-25.98	-34.42	-25.39	-34.66
10	-23.05	-28.16	-24.08	-32.79	-36.98	-28.90	-31.22	-27.15	-30.63

**表 4-2 阶数 K 和记忆深度 M 变化时 RLS 算法得到的 NMSE 值（单位: dB）**

$\begin{matrix} K \\ M \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-29.19	-29.54	-31.05	-31.13	-31.13	-31.14	-31.14	-31.14	-31.14
2	-32.70	-33.55	-39.70	-40.44	-40.47	-40.48	-40.48	-40.48	-40.48
3	-33.16	-34.17	-42.67	-44.34	-44.42	-44.47	-44.48	-44.48	-44.48
4	-33.20	-34.23	-43.10	-44.98	-45.06	-45.11	-45.13	-45.14	-45.14
5	-33.21	-34.26	-43.24	-45.21	-45.32	-45.37	-45.38	-45.39	-45.39
6	-33.22	-34.29	-43.37	-45.42	-45.52	-45.57	-45.59	-45.59	-45.60
7	-33.23	-34.30	-43.46	-45.55	-45.66	-45.72	-45.74	-45.74	-45.74
8	-33.23	-34.31	-43.50	-45.62	-45.72	-45.78	-45.80	-45.80	-45.80
9	-33.23	-34.32	-43.53	-45.66	-45.77	-45.83	-45.85	-45.85	-45.85
10	-33.23	-34.32	-43.55	-45.70	-45.81	-45.87	-45.88	-45.89	-45.89

**表 4-3 阶数 K 和记忆深度 M 变化时矩阵求逆算法得到的 EVM 值（单位: %）**

$\begin{matrix} K \\ M \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.57	3.70	8.82	3.14	3.44	3.74	3.89	4.52	4.64
2	2.66	2.51	3.92	1.69	1.49	2.91	2.69	2.20	1.87
3	3.20	2.99	2.15	2.17	1.87	4.80	3.19	2.71	3.57
4	3.96	3.25	1.57	2.64	2.30	8.87	4.19	4.16	2.49
5	4.05	3.10	1.80	4.96	1.45	2.32	3.60	7.53	2.00
6	4.12	2.96	4.32	6.13	1.36	1.83	2.15	2.68	1.87
7	5.28	3.09	10.74	1.64	1.46	2.25	2.87	2.63	2.59
8	6.85	3.31	7.16	1.42	1.29	2.58	1.72	2.54	2.72
9	6.88	3.40	8.94	1.54	1.40	5.02	1.90	5.38	1.85
10	7.04	3.91	6.26	2.29	1.42	3.59	2.75	4.39	2.94



表 4-4 阶数 K 和记忆深度 M 变化时 RLS 算法得到的 EVM 值（单位：%）

K \ M	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.47	3.33	2.80	2.78	2.78	2.77	2.77	2.77	2.77
2	2.32	2.10	1.03	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95
3	2.20	1.96	0.73	0.61	0.60	0.60	0.60	0.60	0.60
4	2.19	1.94	0.70	0.56	0.56	0.55	0.55	0.55	0.55
5	2.18	1.94	0.69	0.55	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54
6	2.18	1.93	0.68	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
7	2.18	1.93	0.67	0.53	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52
8	2.18	1.93	0.67	0.52	0.52	0.51	0.51	0.51	0.51
9	2.18	1.92	0.67	0.52	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51
10	2.18	1.92	0.66	0.52	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51

并且模型精度并不是随着阶数和记忆深度的增加而增加的，当阶数过高时精度还可能下降。而用 RLS 算法得到的结果误差比矩阵求逆法要小，而且随着阶数和记忆深度的增加，模型的精度也在增加。尽管模型精度到达一定程度后会达到一个稳定点，但不会出现阶数增加导致精度下降的情况。理论上，模型的参数越多，其精度也应该越高。这一点与 RLS 求解的结果相符，而与矩阵求逆法求解的结果不符。RLS 算法求解的模型系数要比矩阵求逆法的准确，其原因在于本问题的测试数据很大（73920 组），RLS 算法迭代次数多，最终能够收敛到最优解（或者说最优解附近）；而模型参数较多，导致矩阵  $X^H X$  较大，在求其逆的时候会产生较大误差，使得算出的结果远离最优解。因此，在这个问题的条件下，采用 RLS 算法要更好一些。图 4.2 与图 4.3 是两种算法的 NMSE 部分结果示意图，能更加直观反映以上讨论结果。

按照我们模型假设中的标准，可以选择  $K=4$ ,  $M=2$ ，此时 NMSE 值和 EVM 值刚好满足要求。另外从图 4.3 中可以看出，当阶数  $K$  达到 4，再增大阶数时 NMSE 基本不再有明显的减小；记忆深度  $M$  达到 2 后，再增大  $M$  对模型精度的提高也不大，但会使实际实现时复杂度增大。因此这里我们选定式(4-3)中功放模型的阶数为  $K=4$ ，记忆深度为  $M=2$ 。然后计算出模型的系数，得到最终该有记忆功率放大器模型为：

$$\begin{aligned}
 z(n) &= \sum_{k=1}^4 \sum_{m=0}^2 a_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \\
 A &= [a_{10}, a_{11}, \dots, a_{20}, a_{21}, \dots, a_{42}] \\
 &= [2.34 + 0.98i, 12.86 - 6.05i, -7.37 + 4.15i, 8.15 + 4.89i, \\
 &\quad 2.00 + 0.26i, 0.60 + 1.04i, -13.98 - 10.27i, -2.22 - 1.56i, \\
 &\quad -1.36 - 1.24i, 5.43 + 6.03i, 1.67 + 1.62i, 0.91 + 0.34i]
 \end{aligned} \quad (4-11)$$

模型拟合后的 AM/AM 特性图与 AM/PM 特性图如图 4.4 所示。可以看到基本上与题目提供的原有数据计算出的 AM/AM 图和 AM/PM 图一样。

式(4-3)中所用的基为  $\{x, x|x|, \dots, x|x|^{k-1}\}$ ，这组基与传统基  $\{x, x^2, \dots, x^k\}$  的特性一样，当  $x \rightarrow 0$  时，基函数  $\varphi_k(x)$ （收敛速度与  $x^k$  相同）的下降速度很快。在实际实现时，可以考虑式(3-18)中的正交基  $\psi_k(x)$ 。

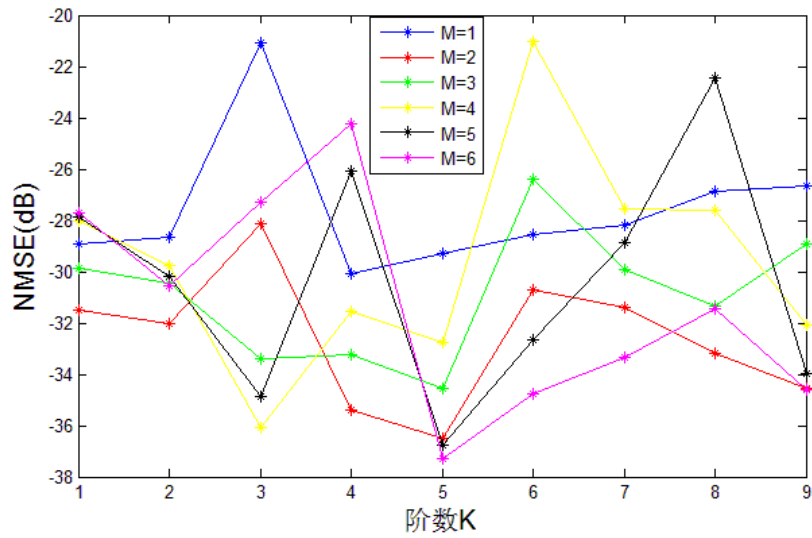


图 4.2 不同阶数  $K$  和记忆深度  $M$  下矩阵求逆法得到的模型 NMSE 值

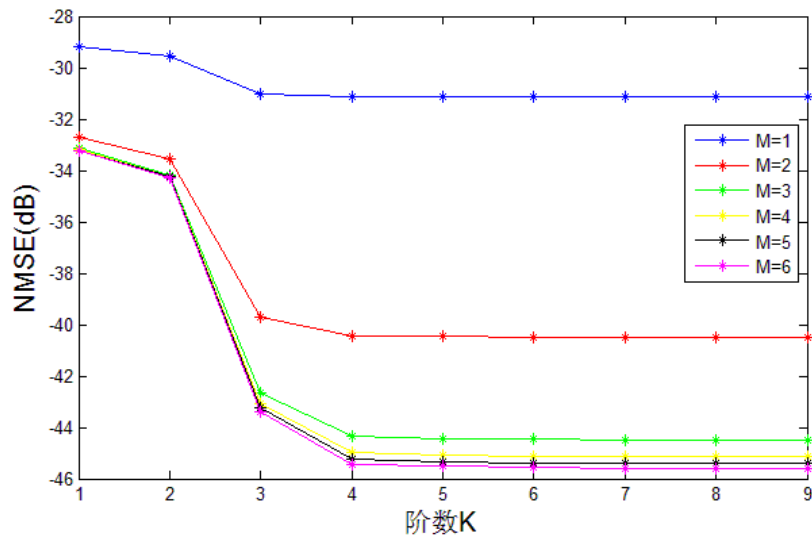
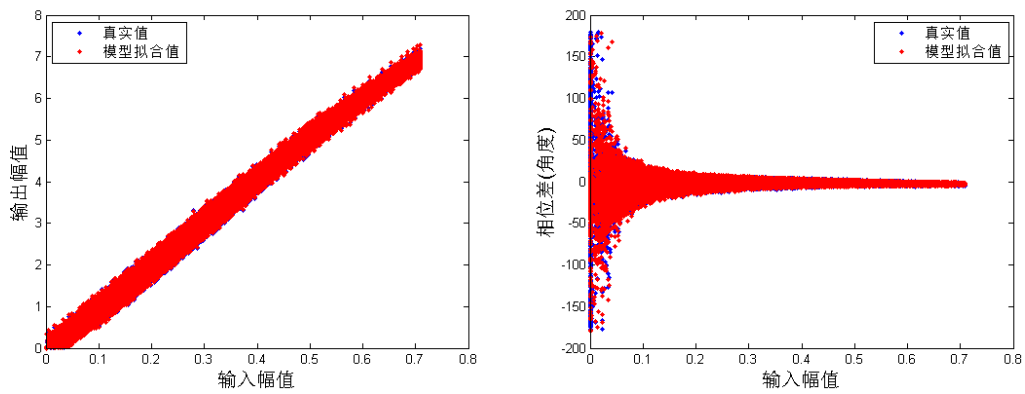


图 4.3 不同阶数  $K$  和记忆深度  $M$  下 RLS 法得到的模型 NMSE 值



(a)AM/AM 散点图

(b)AM/PM 散点图

图 4.4 有记忆功放的拟合与真实的 AM/AM 图和 AM/PM 图

事实上，式(3-18)可以改写为

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l+k} \frac{(k+1)!}{(l-1)!(l+1)!(k-l)!} |x|^{l-1} x \\ &= \sum_{l=1}^k p_{kl} x |x|^{l-1} = [p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kk}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ x|x| \\ \vdots \\ x|x|^{k-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-12)$$

其中，

$$p_{kl} = (-1)^{l+k} \frac{(k+1)!}{(l-1)!(l+1)!(k-l)!} \quad (4-13)$$

从而可得

$$\begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_K(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x|x| \\ \vdots \\ x|x|^{K-1} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

即正交基与基 $\{x, x|x|, \dots, x|x|^{k-1}\}$ 可以通过一个矩阵相互转换。因此用两组基去表示信号 $z(n)$ 在数学上是等价的，所拟合出的模型系数也可相互表示。故理论上用哪组基都可以。但正如之前分析过的，工程实现时还是使用正交基更好。

#### 4.3.2 预失真建模

预失真的基本原理在 3.3.2 节已经有过介绍，这里不再赘述。这里我们采用如图 3.10 所示的间接法来设计预失真器，其特性用记忆多项式模型来描述，使其能够补偿该记忆非线性功放的非线性以及记忆性，表达式为：

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^M b_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1} \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (4-15)$$

只需求出模型参数 $b_{km}$ 即可。

式(4-15)可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=1}^K b_{k0} x(n) |x(n)|^{k-1} + \sum_{k=1}^K b_{k1} x(n-1) |x(n-1)|^{k-1} + \cdots \\ &\quad + \sum_{k=1}^K b_{kM} x(n-M) |x(n-M)|^{k-1} \\ &= F_0(x(n)) + F_1(x(n-1)) + \cdots + F_M(x(n-M))\end{aligned}\quad (4-16)$$

其中

$$F_m(x) = \sum_{k=1}^K b_{km} x |x|^{k-1} \quad (4-17)$$

根据式(4-16)，可以考虑用如图 4.5 的结构来实现预失真器。图 4.5 中， $x(n)$ 表

示输入信号,  $z^{-1}$ 代表延时模块,  $F_m(x)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ 表示非线性处理模块,  $\oplus$ 代表两个信号求和, 而 $y(n)$ 则是输出信号。该结构图中, 需要确定的是非线性处理模块, 它们的表达式如公式(4-17)所示。在整体的实现示意图中, 需要确定的参数有延迟模块的个数  $M$ , 也就是记忆深度, 还有非线性模块中的阶数  $K$  以及系数 $b_{km}$ , 也即记忆多项式中的系数。 $K$  和  $M$  的确定采用枚举法, 通过观察不同取值时模型的精度来确定, 同时还需考虑实现的复杂度。系数 $b_{km}$ 则通过数据拟合求得。

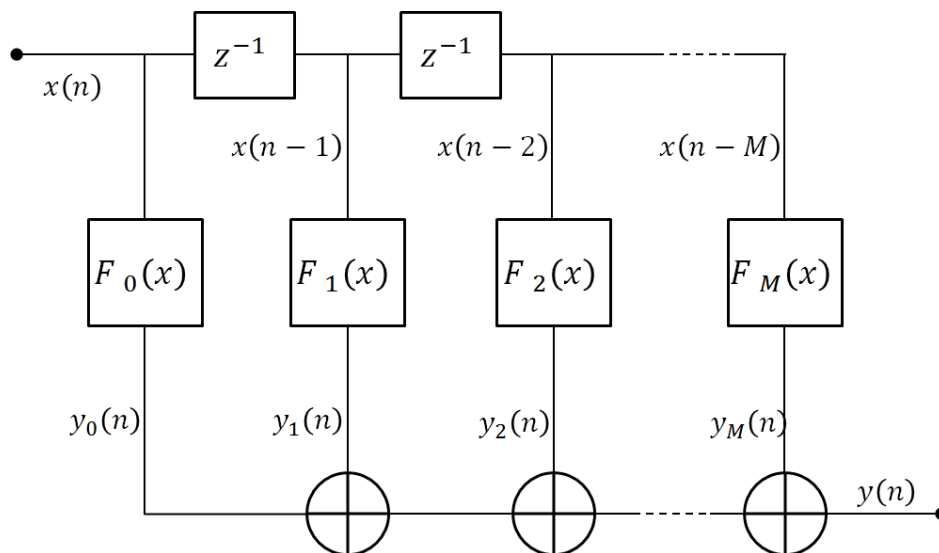


图 4.5 预失真处理器实现示意图[8]

理想情况下, 我们希望最终 $z(n) = gx(n)$ , 即预失真和功放的联合模型呈线性后误差最小。因此我们将输出信号 $z(n)/g$ 作为待训练的预失真器的输入(其中 $g$ 是预先设定的系统理想增益),  $x(n)$ 作为输出拟合模型参数。考虑到“输出幅度限制”和“功率最大化”约束, 理想增益 $g$ 的取值同 3.3.2 节中分析的取值方法一样:

$$g = \frac{|z(n)|_{\max}}{|x(n)|_{\max}} \quad (4-18)$$

根据数据文件 2 可计算得 $g = 10.1491$ 。

类似问题一预失真建模的推导过程(3-32)~(3-37), 这里也可以得到一个目标误差函数, 然后我们采用 RLS 而不是矩阵直接求逆来求解, 因为 4.3.1 节中已分析过在此问的情况下 RLS 有更好的求解精度。

选取不同的阶数  $K$  和不同的记忆深度  $M$ , 求得的模型与理想线性模型相差的 NMSE 和 EVM 结果如表 4-5 和表 4-6。

表 4-5 不同阶数  $K$  和记忆深度  $M$  取值时整体系统模型的 NMSE 值(单位: dB)

$K \backslash M$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-29.68	-30.04	-31.51	-31.57	-31.56	-31.56	-31.55	-31.55	-31.54
2	-33.49	-34.42	-43.26	-45.05	-45.03	-44.95	-44.88	-44.85	-44.84
3	-33.51	-34.49	-39.87	-39.69	-39.55	-39.38	-39.28	-39.23	-39.21

4	-33.30	-34.25	-39.22	-39.26	-39.20	-39.09	-39.02	-38.99	-38.98
5	-33.27	-34.15	-39.51	-39.80	-39.76	-39.66	-39.61	-39.58	-39.57
6	-33.26	-34.09	-39.97	-40.27	-40.21	-40.08	-40.02	-39.99	-39.98
7	-33.04	-33.88	-39.98	-40.17	-40.08	-39.94	-39.87	-39.84	-39.82
8	-32.94	-33.83	-39.90	-40.00	-39.91	-39.77	-39.70	-39.66	-39.64
9	-32.99	-33.87	-39.77	-39.93	-39.85	-39.70	-39.63	-39.60	-39.58
10	-32.99	-33.86	-39.75	-39.97	-39.88	-39.74	-39.67	-39.64	-39.62

表 4-6 不同阶数  $K$  和记忆深度  $M$  取值时整体系统模型的 EVM 值(单位: %)

$M \backslash K$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.28	3.15	2.66	2.64	2.64	2.64	2.65	2.65	2.65
2	2.12	1.90	0.69	0.56	0.56	0.57	0.57	0.57	0.57
3	2.11	1.89	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.09	1.10
4	2.16	1.94	1.09	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12
5	2.17	1.96	1.06	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.05
6	2.17	1.97	1.00	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
7	2.23	2.02	1.00	0.98	0.99	1.01	1.01	1.02	1.02
8	2.25	2.04	1.01	1.00	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04
9	2.24	2.03	1.03	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05
10	2.24	2.03	1.03	1.00	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04

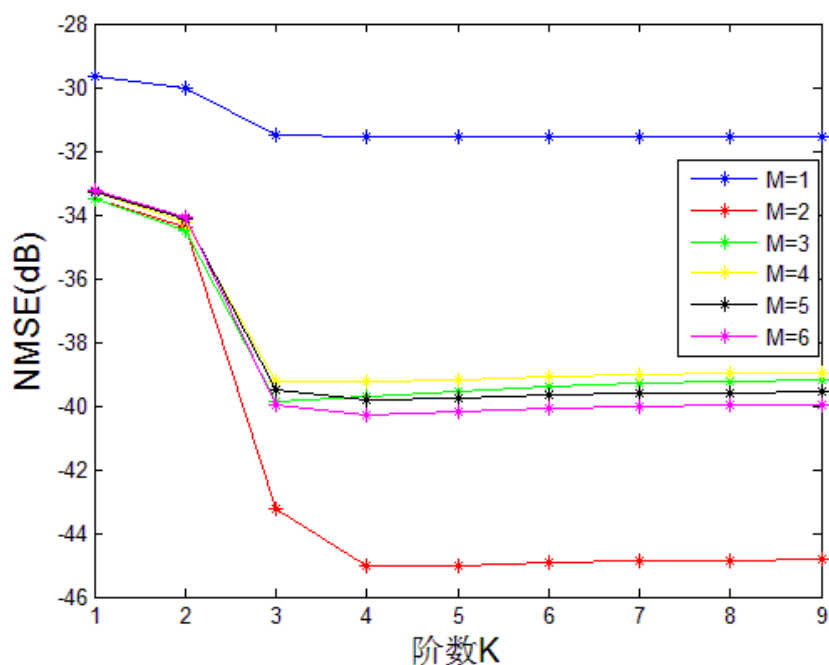


图 4.6 不同阶数  $K$  和记忆深度  $M$  下得到的整体线性模型 NMSE 值

图 4.6 还画出了不同  $K$  和  $M$  取值时部分 NMSE 结果图。从图和表中可以看出当预失真器阶数  $K=4$ ，记忆深度  $M=2$  时，预失真器与功率放大器整体组成的系统线性度误差最小。并且增大阶数  $K$  不会明显提高模型的精度，而增大记忆

深度  $M$  则会使得模型的精度减小。最终确定预失真器的阶数和记忆深度为  $K=4$ ,  $M=2$ , 与功放的一致。拟合出模型的系数后, 预失真模型可以表示为:

$$y(n) = \sum_{k=1}^4 \sum_{m=0}^2 b_{km} x(n-m) |x(n-m)|^{k-1}$$

$$B = [b_{10}, b_{11}, \dots, b_{20}, b_{21}, \dots, b_{42}]$$

$$= [1.77 - 0.09i, -1.34 + 0.63i, 0.78 - 0.43i, -0.87 - 0.59i, 0.30 - 0.06i, -0.35 - 0.08i, 1.01 + 1.28i, 0.11 - 0.01i, 0.24 + 0.27i, 0.11 - 0.69i, -0.82 - 0.05i, 0.25 - 0.20i] \quad (4-19)$$

加上预失真器后, 整个系统的输入输出幅度图如图 4.7 所示。可以看到输入输出幅值基本成线性关系, 而输入输出相位差基本为零, 除了少数幅值接近零的数据外。

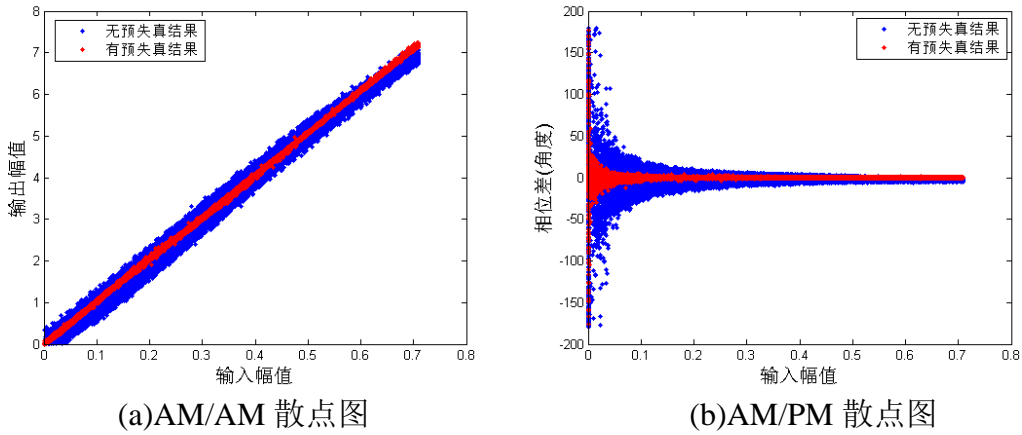


图 4.7 加入预失真器前后的 AM/AM 图和 AM/PM 图

根据整个系统输入输出幅值, 拟合后得到系统的幅度放大倍数为  $g=10.1419$ 。

#### 4.4 问题二结论

在刻画该有记忆功率放大器的非线性特性时, 我们采用了比较简单的记忆多项式模型。该模型能够用较低阶数和记忆深度较好地刻画记忆功率放大器的非线性特性。但增大阶数和记忆深度时, 模型的精度很快就达到了一个稳定的点, 很难再继续提高 (NMSE 值稳定在  $-45.9\text{dB}$  左右, EVM 值稳定在  $0.51\%$  左右)。因此若在实际应用中有更高的精度需求, 则该记忆多项式模型不再适用, 需要更复杂的模型。

针对记忆多项式模型, 我们采用了两组基函数进行表示: 传统基函数和正交基函数。数学推理发现两组基函数可以相互线性表示, 因此拟合效果一样。但在工程实现时, 正交基要比传统基误差更小, 更易实现。

在求解模型参数时, 我们采用了矩阵直接求逆的最小二乘法和递归最小二乘法 (RLS)。由于本问题的数据量较大, RLS 能够收敛到 (接近) 最优解, 具有较高的精度, 相反矩阵求逆的方法会引入较大误差, 结果精度低。因此实际实现时可直接用 RLS 法迭代求解。

## 五：拓展研究

### 5.1 问题分析

功率放大器的非线性效应会使得输入信号经过放大器后产生新的频率分量（交叉信号），这些新频率分量会影响到相邻信道中的信号。对功率放大器进行预失真补偿后，可以减轻其非线性效应，从而可以减小新频率分量对邻道信号的影响。因此，我们可以通过对比预失真补偿前后交叉信号对邻道信号的影响程度来研究预失真补偿的效果。

相邻信道功率比(Adjacent Channel Power Ratio, ACRP)是一个信道的带外失真参数，用来衡量这些新的频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为：

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (5-1)$$

其中 $s(f)$  为信号的功率谱密度函数(PSD)， $[f_1, f_2]$ 为传输信道， $[f_2, f_3]$ 为相邻信道。由式(5-1)可知，算出信号的功率谱密度并确定传输信道与相邻信道的范围，即可计算出 ACPR 值。

### 5.2 功率谱密度的计算

功率谱密度的计算有以下两种经典方法：

(1) 周期图法（直接法）：计算信号的 Fourier 变换，再由 Fourier 变换值得到功率谱密度。

(2) 自相关法（间接法）：计算信号的自相关函数，再对自相关函数进行 Fourier 变换。

记信号为 $x(n)$ ，信号长度为  $N$ ，直接法计算公式为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\omega}, S_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2 \quad (5-2)$$

间接法计算公式为：

$$R_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m) \quad (5-3)$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_x(m) e^{-jm\omega}$$

其中 $R_x$ 为自相关函数， $S_x$ 为功率谱密度函数。

这里我们采用直接法计算题 2 中的输入信号 $x(n)$ ，无预失真补偿的功率放大器输出信号 $z(n)$ 以及有预失真补偿的功率放大器输出信号 $\hat{z}(n)$ 的功率谱密度。计算结果如图 5.1 所示。

从图 5.1 (a)中可以看出，在中心频带输出信号相比输入信号功率确实变大了，但在输出信号 PSD 的旁瓣明显大于输入信号旁瓣，即对邻道信号产生了较大的干扰。从图 5.1(b)中可以看出，引入预失真补偿能减小对邻道信号的干扰。另外，也可以看出由直接法计算出的功率谱随频率的起伏较激烈。实际上，间接法计算结果也一样，同时数据越长这种起伏越严重。这是属于这两种经典谱估计方法的共有缺点。

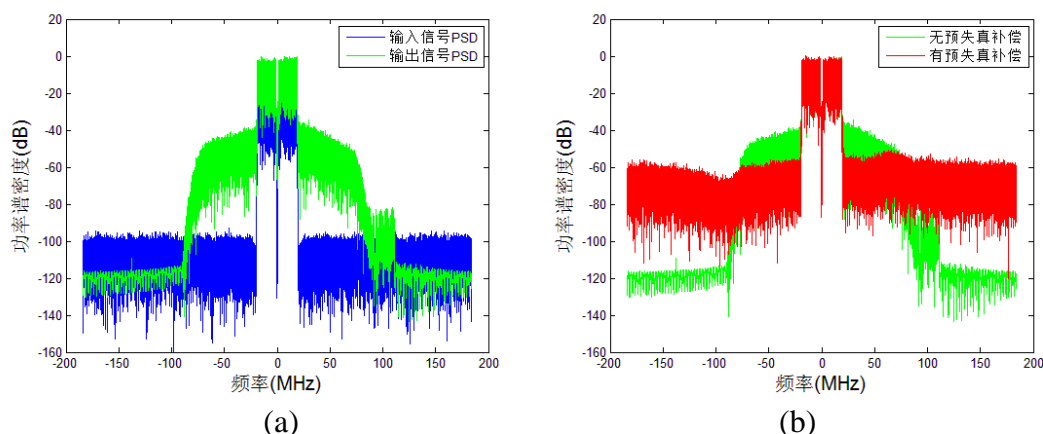


图 5.1 信号的功率谱密度图：(a)无预失真补偿时功率放大器输入信号与输出信号的功率谱密度；(b)有/无预失真补偿时功率放大器输出信号的功率谱密度

### 5.3 传输信道与相邻信道的确定

设传输信号时载波频率为 $f_0$ ，传输信道带宽为 $f_B$ ，相邻信道带宽为 $f_n$ ，则有

$$f_1 = f_0, f_2 = f_1 + f_B, f_3 = f_2 + f_n \quad (5-4)$$

或者

$$f_1 = f_0, f_2 = f_1 - f_B, f_3 = f_2 - f_n \quad (5-5)$$

其中，式(5-4)用于计算右 ACPR 值，而(5-5)用于计算左 ACPR 值。

在本题中，由于只对功率谱进行处理，与载波频率没有什么关系，故 $f_0$ 可以设置为 0，即不需要对信号进行上变频处理。又传输信道和邻信道都是 20MHz，因此，对于右 ACPR 值，有 $f_1 = 0, f_2 = 20, f_3 = 40$ ；对于左 ACPR 值，有 $f_1 = 0, f_2 = -20, f_3 = -40$ ，单位都是 MHz。

### 5.4 ACPR 计算与分析

根据式(5-1)，计算出做预失真补偿前后的 ACPR 值如表 5-1 所示。同时也计算了输入信号的 ACPR 作为参考。

表 5-1 信号的 ACPR 值

	输入信号(参考)	无预失真补偿	有预失真补偿
ACPR(dB):+20MHz	-78.47	-37.26	-53.77
ACPR(dB):-20MHz	-78.36	-38.51	-55.34

由表可以看出，信号经过非线性功率放大器后，对邻道信号确实会产生较大影响，表现在其 ACPR 值有很大程度地增大。而进行预失真补偿后，ACPR 值减小了 16dB 左右，表明对邻道信号的影响会有所减小。

### 5.5 拓展研究的结论

通过计算输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度，可以看出功率放大器能够对输入信号进行功率放大，但同时由于其非线性会使得输出信号对邻道信号的干扰增大。经过预失真补偿后，功率放大器的输出信号对邻道信号的干扰会相对减小，具体表现在 ACPR 值的减小。



## 六：结束语

本文针对无记忆功放与有记忆功放的非线性特性进行建模，同时构建了相应的预失真补偿模型，通过运用参数 NMSE/EVM 分析实验结果，可以发现利用函数多项式等常用模型能够较好地完成任务 1 和问题 2 中的任务，拟合得到的信号值误差在模型假设预先定义的范围之内，NMSE 值小于-40dB（即 EVM 值小于 1%）。在拓展研究中，通过估计信号的功率谱密度并计算 ACPR 值，结果表明预失真补偿能够减小功率放大器的输出信号对邻道信号的干扰。除此以外，上述模型依然存在一些值得进一步思考的地方：

1) 在问题二中对有记忆效应的功放进行建模求解过程中，若采用 RLS 算法计算模型最优参数，如表(4-2)所示，当记忆深度  $M$  和多项式阶数  $K$  增加到一定值以后，即使再增大  $M$  或者  $K$ ，也无法减小模型的 NMSE 值。这种情况表明如果希望进一步提高模型的精度，则需要选择更为复杂的模型，例如文献[4]中给出了记忆多项式更一般的表示形式，模型的结构也更加复杂：

$$\begin{aligned}
 y_{GMP}(n) = & \sum_{k=0}^{K_a-1} \sum_{l=0}^{L_a-1} a_{kl} x(n-l) |x(n-l)|^k \\
 & + \sum_{k=1}^{K_b} \sum_{l=0}^{L_b-1} \sum_{m=1}^{M_b} b_{klm} x(n-l) |x(n-l-m)|^k \\
 & + \sum_{k=1}^{K_c} \sum_{l=0}^{L_c-1} \sum_{m=1}^{M_c} c_{klm} x(n-l) |x(n-l+m)|^k
 \end{aligned} \tag{6-1}$$

2) 本文在模型假设中预先定义了误差允许的范围是 NMSE 值小于-40dB（即 EVM 值小于 1%），实际情况下精度范围应根据具体的需求来定义。

总之，为保证所用模型的工程可实现性，必须综合考虑复杂度、准确度等多种因素，选取合适的中间参数值，这样才能使所构建模型的在实际应用下得到理想的效果。

## 七：参考文献

- [1] Raviv Raich, et al. Orthogonal Polynomials for Power Amplifier Modeling and Predistorter Design. IEEE Trans. Vehicular technology, 2004,53(5):1468-1479
- [2] 李明玉. 宽带通信中功率放大器行为模型与预失真技术研究[D]. 电子科技大学, 2010.
- [3] Dennis R.Morgan et al. A Generalized Memory Polynomial Model for Digital Predistortion of RF Power Amplifiers. IEEE Trans. Signal Processing , 2006,54(10):3852-3860
- [4] Anding Zhu; Draxler, P.J.; Yan, J.J.; Brazil, T.J.; Kimball, D.F.; Asbeck, P.M., "Open-Loop Digital Predistorter for RF Power Amplifiers Using Dynamic Deviation Reduction-Based Volterra Series," Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on , vol.56, no.7, pp.1524,1534, July 2008
- [5] John Tsimbinos, Identification and Compensation of Nonlinear Distortion, PhD Dissertation, School of Electronic Engineering, University Of South Australia, Adelaide, February 1995.
- [6] Tianhai Wang, et al. Volterra-Mapping-Based Behavioral Modeling of Nonlinear Circuits and Systems for High Frequencies. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2003,51(5):1433-1440
- [7] 姚瑶. 功率放大器宽带自适应预失真级数研究[D]. 成都理工大学, 2011
- [8] 南敬昌. 宽带功率放大器非线性、行为模型与数字预失真系统研究[D]. 北京邮电大学, 2007.