

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 吸波材料与微波暗室问题的数学建模

摘 要：

本文首先分析了入射波在尖劈状吸波体中的反射原理，通过建立反射模型来刻画出反射波线的基本性质；然后分析了微波暗室中的辐射机制，其辐射和反射模型类似于计算机图形学中整体光照模型中的辐射度方法，本文依照此模型仿真微波暗室的性能。

对于问题 1，我们首先从二维问题出发（即方位角 $\varphi = 90^\circ$ ），通过建模分析计算得

到以下结论：首先，当初始条件满足 $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时，最终反射次数为 $N = \left\lfloor \frac{\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha}{\alpha} \right\rfloor - 1$ 。

其次，反射的方向为：当 N 为奇数时，反射波与右侧斜面的法向量夹角

$\beta_N = 2N\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$ ，斜向左上方方向出去；当 N 为偶数时，反射波与左侧斜面的

法向量夹角 $\beta_N = 2N\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$ ，斜向右上方方向出去。最后，辐射强度为

$I_i = \prod_{j=1}^i \left(\rho \cos \left[2i\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) \right] \right)$ （对于特殊的情况 $\theta + \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ 的分析讨论详

见文中）。

对于问题 1 的三维情形，通过建模分析可以得到以下结论：首先，反射次数

$$N = \left\lfloor \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan \theta \cdot \sin \varphi) + \alpha}{\alpha} \right\rfloor - 1; \text{ 其次, 任意第 } i \text{ 次反射波线与尖劈斜面的夹角}$$

是 $\gamma_i = \arccos(\cos \beta_i' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 (-\varphi) + \cos^2 \theta})$ (对于 β_i' 的含义见正文), 再同理二维问题分析反射次数 N 的奇偶性, 就能判断波线最后是尖劈的左右哪个侧面射出, 上述两者结合就是最终反射线的方向; 最后, 辐射强度与反射率和各几何参数的定量关系满足

$$I_i = \prod_{j=1}^i (\rho \cdot \cos \beta_j' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta})。$$

在问题 2 中, 分析知各个位置的辐射值不同, 因此将暗室表面划分成 K 个方块形微元, 当 K 足够大时, 我们可以假设每个微元可以用其中的一个点来表示。该点所包含的功率为整个微元的总功率。对于每个微元, 它都会对其它各个微元产生影响, 同时各个微元也都会对该微元产生影响, 所有微元在相互作用下会达到平衡状态。我们通过对模型进行分析、推导以及简化, 最后得到该环境下的辐射度系统方程: $(I + M)B = E$ 。其

$$\text{中, } I \text{ 为 } N \times N \text{ 的单位阵, 系统矩阵 } M = \begin{bmatrix} -\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1N} \\ -\rho_2 F_{21} & -\rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_N F_{N1} & -\rho_N F_{N2} & \cdots & -\rho_N F_{NN} \end{bmatrix}, \text{ 总辐射度}$$

$B = (B_1, B_1, \dots, B_N)^T$, 自身辐射度 $E = (E_1, E_1, \dots, E_N)^T$, ρ 为反射系数, F_{ij} 为形状因子

$$F_{ij} = \frac{\cos \theta_x \cos \theta_x'}{\pi r^2(x, x')} A_j。$$

以我们所建立的数学模型, 经编程计算得到以下结果:

若暗室铺设垂直反射率 $\rho = 0.50$ 的平板形吸波材料, 在弹目相对运动过程中, 不能始终满足 $\gamma \leq 0.03$ 的仿真技术要求, 并且当 $t = 2s$ 时, 即在圆弧 AB 段中间点时, 达到最小值 $\gamma = 0.207469$ 。

而当暗室改为铺设平均反射率 $\rho = 0.05$ 的尖劈形吸波材料, 我们的模型在弹目相对运动过程中始终能够达到 $\gamma \leq 0.03$ 的仿真技术要求, 并且当 $t = 2s$ 时, 即在圆弧 AB 段中间点时, 达到最小 $\gamma = 0.0203104$; 当 $t = 4s$ 时, 达到最大值 $\gamma = 0.0218300$, 间接证明了尖劈型吸波体的良好性能。

关键词: 尖劈、反射、微波暗室、辐射度方法

一、问题重述

吸波体的吸波性能计算需要考虑多次反射，微波暗室的电磁特性分析应研究各个墙面间的相互影响（即一个墙面既接受其他墙面的辐射又同时反射给其他墙面）。

本题要求采用工程处理的思路，用较简单直观的几何光学模型，来初步研究分析特殊吸波体和微波暗室的性能这两类问题，后续的实验测试与修正不包括在本题中。

具体问题如下：

问题 1、尖劈形状吸波体的性能分析：

建立入射波线在一个尖劈几何空缺间反射过程的数学模型，即分别刻画最终反射波线的方向，反射次数，反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。

先从二维问题着手研究，然后推广为三维空间的情形。

问题 2、导弹导引仿真实验用的微波暗室的性能研究：

1) 若暗室铺设平板形吸波材料，其垂直反射率 $\rho = 0.50$ 。试建立合适的数学模型，在上述假设下，根据提供的数据，通过对模型的分析与数值计算，判断这样的微波暗室能否能满足仿真技术要求？在此弹目相对运动过程中，何时的 γ 值最小？

2) 进一步，若暗室改为铺设尖劈形吸波材料，由于沿尖劈形吸波体各平面处的吸波效果不是常数，所以常用统计的方法求出其平均值，称此平均值为平均反射率。现设此平均反射率已经求出，为 $\rho = 0.05$ （相当于尖劈形吸波体被换成另一种吸波性能更好材料的平板形吸波体的垂直反射率），请你再次用模型进行计算，根据结果判断，这样的暗室是否能满足仿真技术要求？何时的 γ 值最小？

二、基本假设

- 1) 本题只考虑波在两种不同介质界面处的多次反射，而不考虑尖劈内的多次透射、透射-反射及介质边缘处的绕射；
- 2) 本文假设入射波从尖劈的左侧顶尖进入到吸波体中；
- 3) 入射波的反射次数只计入碰撞点在吸波体内部的，对于碰撞点是尖劈两侧顶尖的不计入反射次数，即不理解为反射；
- 4) 假设尖劈材料的电性能参数各处均匀，斜入射时的反射率满足前述的余弦法则；
- 5) 视在天线发射功率强度分布满足余弦辐射体；
- 6) 只考虑所有墙面对辐射的反射，不计入墙面的散射；
- 7) 不计入模拟器的天线及其安装支架，以及导引头本身对辐射的影响；
- 8) 假设波在微波暗室中达到稳态的过程足够短，以便于我们建立稳态模型。

三、变量说明

θ ：射向角（ z 轴正向与入射线负方向的夹角）；

φ ：方位角（ x 轴正向与射线在 xOy 平面上投影的夹角）；

2α ：吸波尖劈的顶角；

h ：吸波尖劈的高；

d ：吸波尖劈的底部宽度；

ρ : 垂直入射反射率;
 n : 反射次数变量;
 N : 最终反射次数;
 β_i : 二维情形下第 i 次反射时的入射角;
 β_N : 最终反射方向;
 l_i : 第 i 个反射点距离尖劈空缺底部的距离;
 γ_i : 三维情形下第 i 次反射的入射角;
 θ' : 三维情形下, z 轴正向与入射波线在 yOz 平面投影的负方向的夹角;
 I_i : 第 i 次的辐射强度。

四、问题 1 模型建立与分析

对于问题 1 尖劈型吸波材料的性能分析,我们先从较简单的二维情形进行建模与分析,然后推广至三维情形。

A、二维情形

1、数学模型的建立

为方便讨论,我们假设波线沿着左侧尖劈的顶端入射,且第 1 次入射波是由第 0 次入射波反射而成(实际上,第 0 次入射波不存在,是假想波),如图 1 所示:

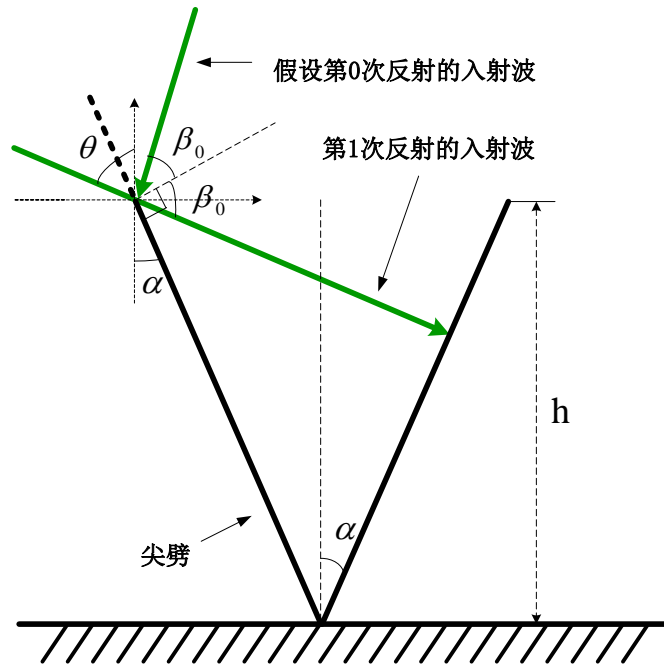


图 1. 第 0 次反射的入射角示意图

【数学模型】

$$\text{第 0 次反射的入射角 } \beta_0 \text{ 满足关系: } \beta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha \quad (1.1)$$

$$\text{第 } i \text{ 次反射时的入射角: } \beta_i = |\beta_0 - 2i\alpha| \quad (1.2)$$

第*i*个反射点距尖劈空缺底部距离:
$$l_i = \frac{l_0 \times \cos \beta_0}{\cos \beta_i} \quad (1.3)$$

第*i*次反射后波线的辐射强度:

$$I_i = \prod_{j=1}^i (\rho \cos \beta_j) \quad (1.4)$$

$$\text{【约束条件】} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta_n} < 1 \\ |\beta_0 - 2n\alpha| \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

【目标函数】 反射次数 $N = m a \pi$ (n 是正整数) (1.6)

2、模型解释与分析

2.1 关于第*i*次反射的入射角 β_i 的变化情形分析

下面，我们分三种情形进行讨论。

(1) 波线向下反射:

图 2 所示为波线向下反射过程中的某一状态, \overline{AB} 是第 i 次反射的入射波线, \overline{BC} 是第 i 次反射的反射波线, 即第 $i+1$ 次反射的入射波线。

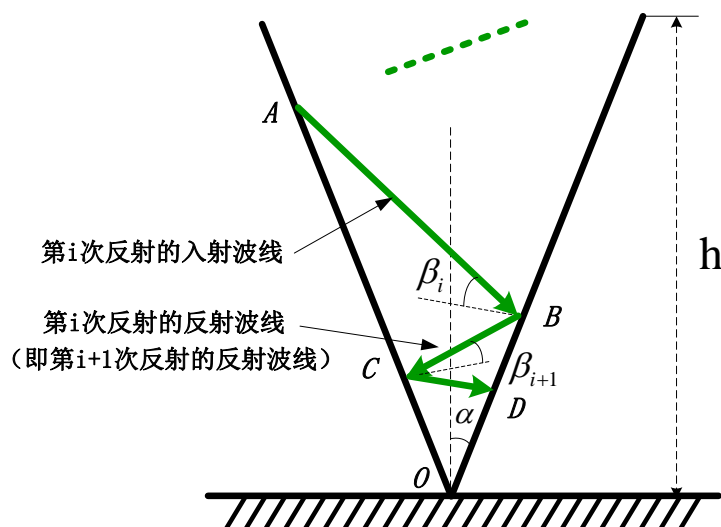


图 2. 波线向下反射角度示意图

根据图示关系, 有下式成立:

$$\begin{cases} \angle CDB = 2\alpha + \angle OCD \\ \angle OCD = \frac{\pi}{2} - \beta_{i+1} \\ \angle CDB + 2\beta_{i+1} + \angle CBD = \pi \\ \angle CBD = \frac{\pi}{2} - \beta_i \end{cases}$$

解上述方程组，可得：

$$\beta_{i+1} = \beta_i - 2\alpha$$

由此我们获知：在波线不断向下反射的过程中，入射角不断减小，每次减小的角度为 2α 。

(2) 波线向上反射：

图3所示为波线向上反射过程中的某一状态。其中 \overrightarrow{AB} 是第 i 次反射的入射波线， \overrightarrow{BC} 为第 i 次反射的反射波线，即第 $i+1$ 次反射的入射波线。

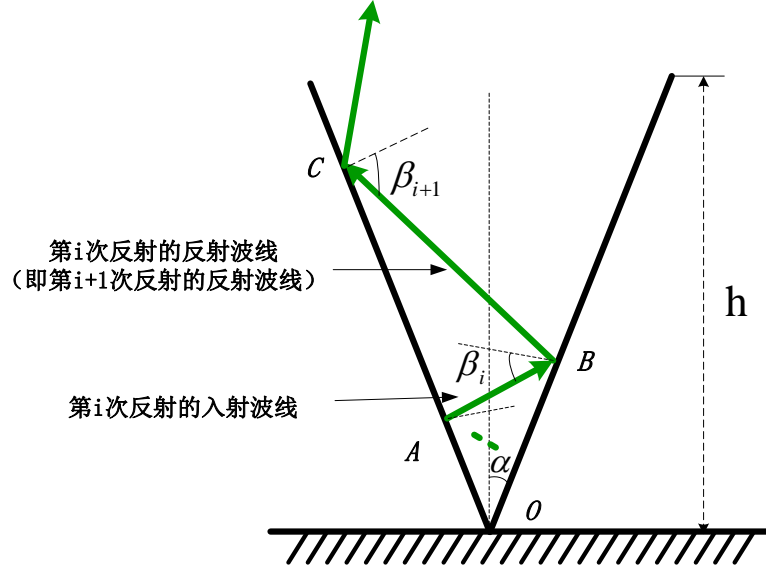


图 3. 波线向上反射角度示意图

类似的，我们可以得到：

$$\begin{cases} \angle CAB = 2\alpha + \angle ABO \\ \angle ABO = \frac{\pi}{2} - \beta_i \\ \angle CAB + 2\beta_i + \angle ACB = \pi \\ \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \beta_{i+1} \end{cases}$$

解上述方程组，可得

$$\beta_{i+1} = \beta_i + 2\alpha$$

由此我们获知：在波线不断向上反射的过程中，入射角不断增加，每次增加的角度

为 2α 。

(3) 临界情形：

下面我们来讨论波线由向下反射转变到向上反射的临界情形。图 4 所示为波线由向下反射转变为向上反射时的状态。

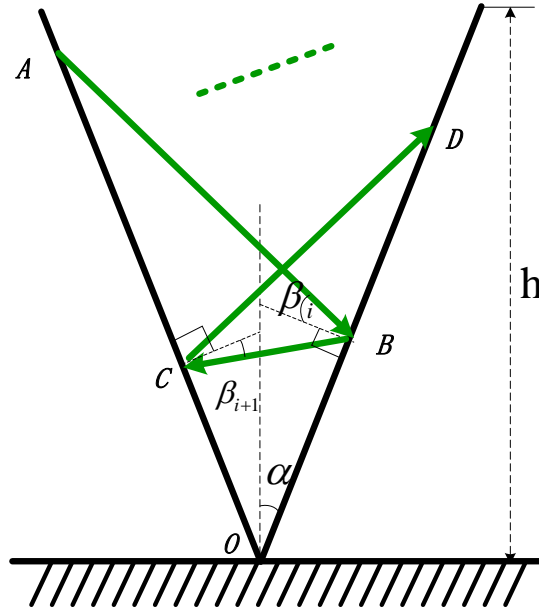


图 4. 波线由向下反射转变到向上反射的临界角度示意图

从图中分析可知：波线在 B 点仍然向下进行反射，反射到 C 点后，开始向上进行反射。这种转变发生的条件为 $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$ ，由图中关系，我们可得：

$$\angle ACB = 2\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta_i$$

即当 $\beta_i < 2\alpha$ 时，从第 $i+1$ 次反射开始，波线的反射方向将变为向上。

从上图中我们还可以得到：

$$\begin{cases} \angle CBD = 2\alpha + \angle OCB \\ \angle OCB = \frac{\pi}{2} - \beta_{i+1} \\ \angle CBD = \frac{\pi}{2} + \beta_i \end{cases}$$

解上述方程得：

$$\beta_{i+1} = 2\alpha - \beta_i$$

特别的，如果 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\beta_{i+1} = 0$ ，也就是说 $\beta_i = 2\alpha$ ，此时波线将原路返回，

如图 5(1)所示；若 $\beta_i = \alpha$ ，那么 $\beta_{i+1} = \alpha$ ，波线将沿着与来路镜像对称的路径反射出去，如图 5(2)所示。

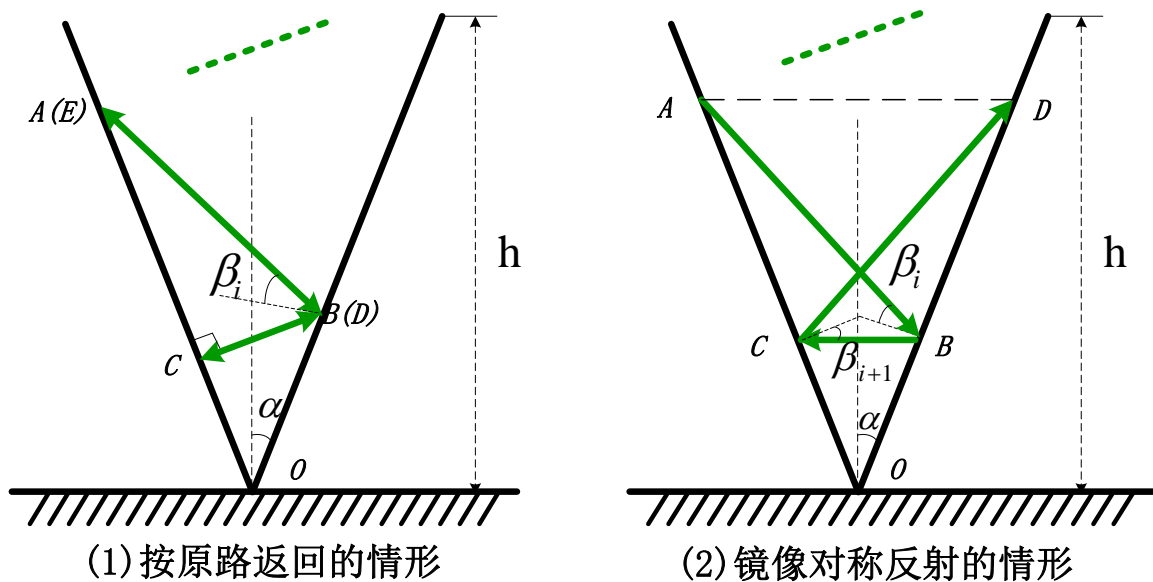


图 5. 两种特殊情形的反射角度示意图

【小结】

通过对上述三种情形的讨论，我们对于反射过程中入射角的变化做如下总结：

设第 0 次反射的入射角为 β_0 ，那么在第一个阶段中，波线不断向下反射，每次反射的入射角都比上一次减小 2α ，直至向下反射过程中的最后一次，此时入射角减小至 x ($0 < x < 2\alpha$)，向下反射过程结束；第一次向上反射时的入射角为 $2\alpha - x$ ，此后每次反射，入射角较前一次都增加 2α 。

因此，第 i 次反射时的入射角 $\beta_i = |\beta_0 - 2i\alpha|$ 。

2.2 关于第 i 个反射点距离尖劈底部的距离 l_i 的分析

我们仍然按 2.1 节的几种情形进行讨论。

(1) 波线向下反射：

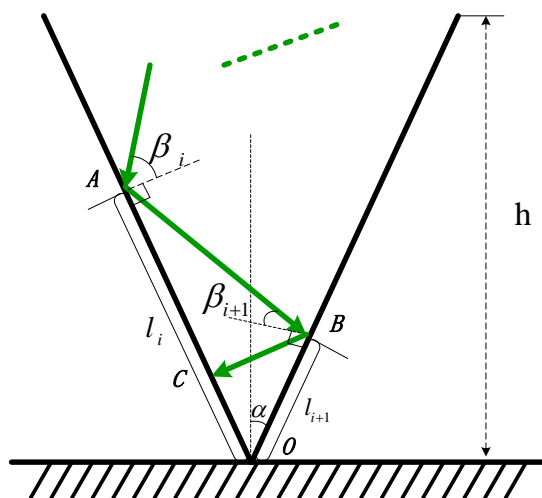


图 6. 波线向下反射距离示意图

如图 6 所示，在 $\triangle OAB$ 中，由余弦定理得：

$$\frac{l_i}{\sin \angle ABO} = \frac{l_{i+1}}{\sin \angle OAB}$$

其中：

$$\angle ABO = \frac{\pi}{2} + \beta_{i+1}$$

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \beta_i$$

由上述三式可得：

$$l_{i+1} = \frac{l_i \cos \beta_i}{\cos \beta_{i+1}}$$

(2) 波线向上反射

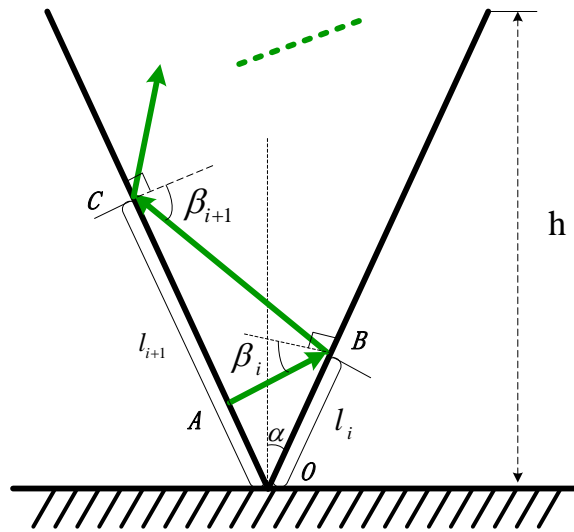


图 7. 波线向上反射距离示意图

如图 7 所示，在 $\triangle OBC$ 中，由余弦定理得：

$$\frac{l_i}{\sin \angle OCB} = \frac{l_{i+1}}{\sin \angle OBC}$$

其中：

$$\angle OCB = \frac{\pi}{2} - \beta_{i+1}$$

$$\angle OBC = \frac{\pi}{2} + \beta_i$$

由上述三式可得：

$$l_{i+1} = \frac{l_i \cos \beta_i}{\cos \beta_{i+1}}$$

(3) 临界情形

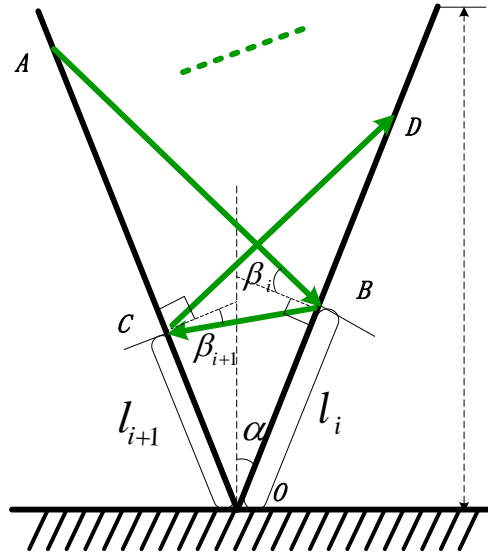


图 8. 波线由向下反射转变到向上反射的临界距离示意图

图 8 所示为临界情形，我们仍然使用余弦定理。在 $\triangle OBC$ 中有下式成立：

$$\frac{l_i}{\sin \angle OCB} = \frac{l_{i+1}}{\sin \angle OBC}$$

其中：

$$\angle OCB = \frac{\pi}{2} - \beta_{i+1}$$

$$\angle OBC = \frac{\pi}{2} - \beta_i$$

解得：

$$l_{i+1} = \frac{l_i \cos \beta_i}{\cos \beta_{i+1}}$$

【小结】

通过对上述三种情形的讨论，我们可以得到结论：在波线由上至下反射、再由下至上反射的完整过程中，都存在如下关系：

$$l_{i+1} = \frac{l_i \cos \beta_i}{\cos \beta_{i+1}}$$

所以，对于第 i 个反射点都距尖劈底部有如下距离：

$$l_i = \frac{l_0 \times \cos \beta_0}{\cos \beta_i}。$$

对于特殊情况可以单独分析，如下图 9 所示：

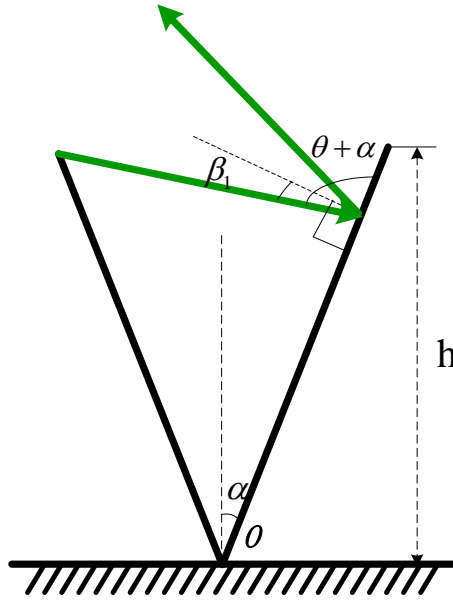


图 9. 入射波打到尖劈右侧内板直接反射出去情形示意图

若 $\theta + \alpha > \frac{\pi}{2}$ ，则入射波打到尖劈右侧内板直接反射出去，则反射次数为 1，反射波线方向：反射波与右侧斜面的法向量夹角 $\beta_1 = \theta + \alpha - \frac{\pi}{2}$ ，斜向左上方方向出去，反射波的辐射强度为： $I = \rho \cos(\theta + \alpha - \frac{\pi}{2})$ 。

若 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ，则入射波打到尖劈右侧内板再原路反射回去，则反射次数为 1，反射波线方向为：入射原波线的反向，反射波的辐射强度为 $I = \rho$ 。

下面的分析均是满足 $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 的条件下进行，即反射的次数至少是两次。

2.3 反射次数分析

声明：对于电磁波在尖劈行进过程中，最后一次的碰撞恰是尖劈的顶尖时，本文默认为电磁波在尖劈中的运动结束，不计入反射次数，辐射能量也不损失。

求反射次数 n ，即寻求最大的正整数 n ，使得：

$$l_n = \frac{l_0 \cos \beta_0}{\cos \beta_n} < l_0。$$

考虑到入射角在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间，所以即寻求最大正整数 n ，使得 $\cos \beta_0 < \cos \beta_n$ 。由式

(2) 有 $\beta_i = |\beta_0 - 2i\alpha|$ ，又因为波线一定是在向上折射的过程中射出尖劈空缺，所以在第 n 次反射的反射角可表示为：

$$\beta_n = 2n\alpha - \beta_0$$

其中：

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta + \alpha$$

因此有：

$$n < \frac{\beta_0}{\alpha} = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha}{\alpha}$$

此时，碰撞反射全过程结束，取最大整数 $n = N$ 满足上式，即为所求反射次数，即：

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha}{\alpha} \right\rceil - 1 \quad (\text{其中，} \lceil x \rceil \text{表示对 } x \text{ 向上取整})。$$

2.4 最终反射波的方向

由于本文假设入射波从尖劈的左侧顶尖进入到吸波体中，那么，若反射次数为奇数，则最终反射波是从右侧吸波体反射出去的，若反射次数为偶数，则最终反射波是从左侧吸波体反射出去的。

根据上一小节中反射次数和波线的反射角的分析，可以得到最终的反射波方向如下所示：

反射波与右侧斜面的法向量夹角 $\beta_N = 2N\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$ (N 为最终反射次数)，斜向左

上方方向出去， N 为奇数；

反射波与左侧斜面的法向量夹角 $\beta_N = 2N\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)$ (N 为最终反射次数)，斜向右

上方方向出去， N 为偶数。

2.5 反射波的辐射强度分析

本题中斜入射 ($\beta_i \neq 0$) 时的反射率满足余弦法则，即 $\rho(\beta_i) = \rho \cos \beta_i$ ，其中 β_i 为第 i 次的入射角大小， ρ 为垂直入射反射率。因此，由题设入射波线的辐射强度为 1 个单位可知，则第 i 次的反射波辐射强度为：

$$I_i = \prod_{j=1}^i \left(\rho \cos \left[2j\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha \right) \right] \right)$$

2.6 仿真结果

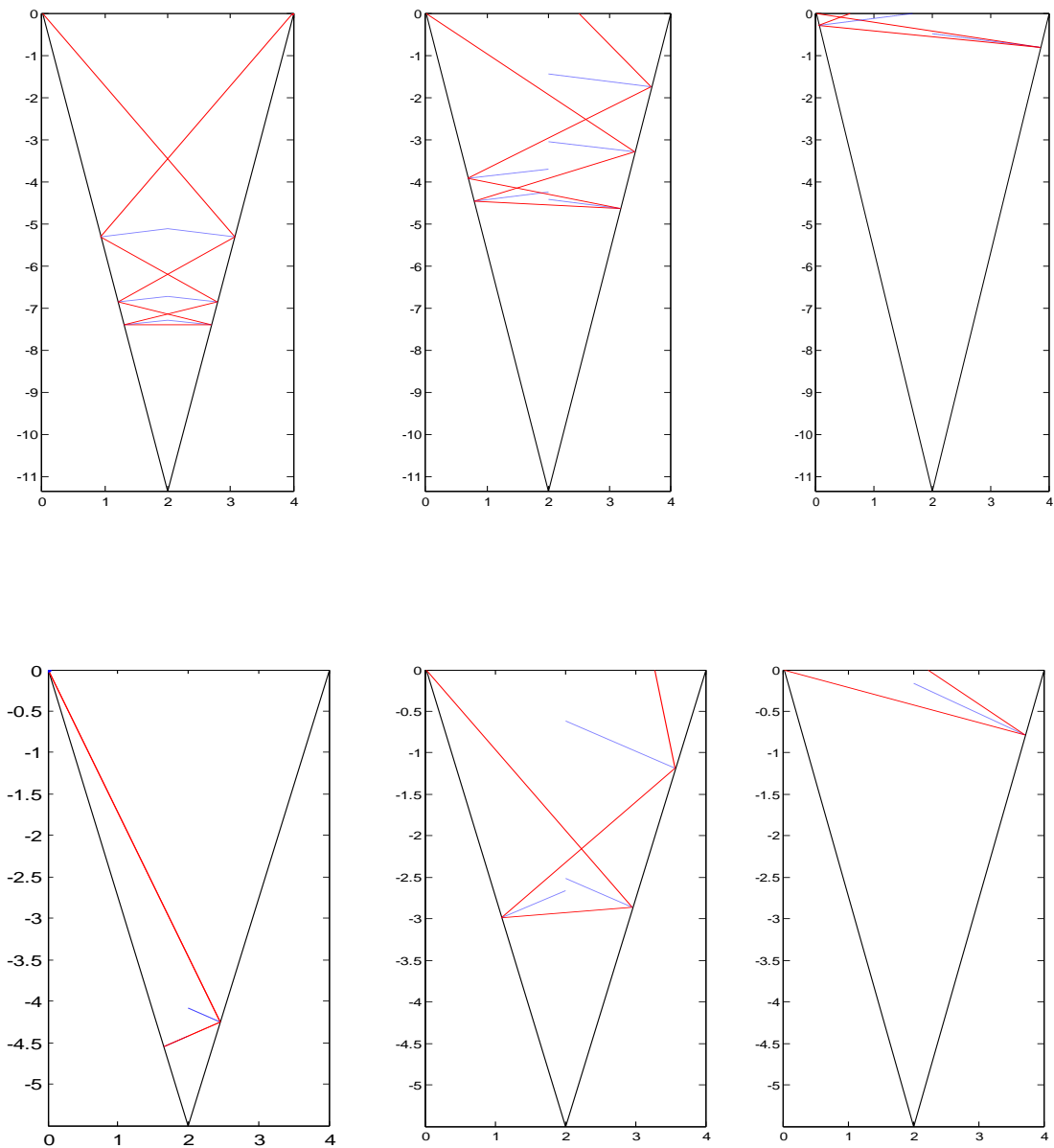
我们在仿真实验中给定 $\rho = 0.7$ ， $d = 4$ ，下表记录了四组实验的理论结果与仿真结

果的对比情形：

表格 1. 二维情形仿真结果

实验序号	α	θ	反射波方向		反射次数		反射波辐射强度	
			理论值	仿真值	理论值	仿真值	理论值	仿真值
(1)	10°	30°	10°	10°	6	6	0.0084	0.0084652
(2)		46°	34°	34°	5	5	0.0839	0.083949
(3)		78°	62°	62°	2	2	0.4657	0.46573
(4)	20°	30°	10°	10°	3	3	0.0244	0.024466
(5)		46°	14°	14°	3	3	0.1684	0.16843
(6)		78°	62°	62°	1	1	0.6931	0.69319

从表中结果可以看出，我们理论分析的结果与实验仿真结果是完全一致的。下图显示了实验中波线在尖劈空缺中的六种反射情形。其中，红实线为波线，蓝色虚线为法线。



B、三维情形

1、 数学模型的建立

下面我们由二维情形推广至三维情形。

二维情形的分析是在 yOz 平面进行的，仅考虑射向角 θ ，未考虑方位角 φ ；三维情形的分析需推广至三维空间中进行，需要增加对方位角 φ 的考虑。

【数学模型】

波线在 yOz 平面的投影与 z 轴负方向夹角：

$$\theta' = \arctan(\tan \theta \cdot \sin \varphi) \quad (2.1)$$

第 i 次反射时的入射角：

$$\gamma_i = \arccos(\cos \beta_i' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2(-\varphi) + \cos^2 \theta}) \quad (2.2)$$

第 i 次反射后波线的辐射强度：

$$I_i = \prod_{j=1}^i (\rho \cdot \cos \beta_j' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2(-\varphi) + \cos^2 \theta}) \quad (2.3)$$

【约束条件】

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta_n} < 1 \\ |\beta_0 - 2n\alpha| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

【目标函数】

$$\text{反射次数 } N = \max(n) \quad (n \text{ 是正整数}) \quad (2.5)$$

2、 模型解释与分析

对于三维情形下，我们考虑将该初始入射波分解为沿 x 轴负方向的分量 \vec{v}_x 与其投影到 yOz 平面的分量 \vec{v}_o 。下图所示为波线入射尖劈空缺时的三维情形。

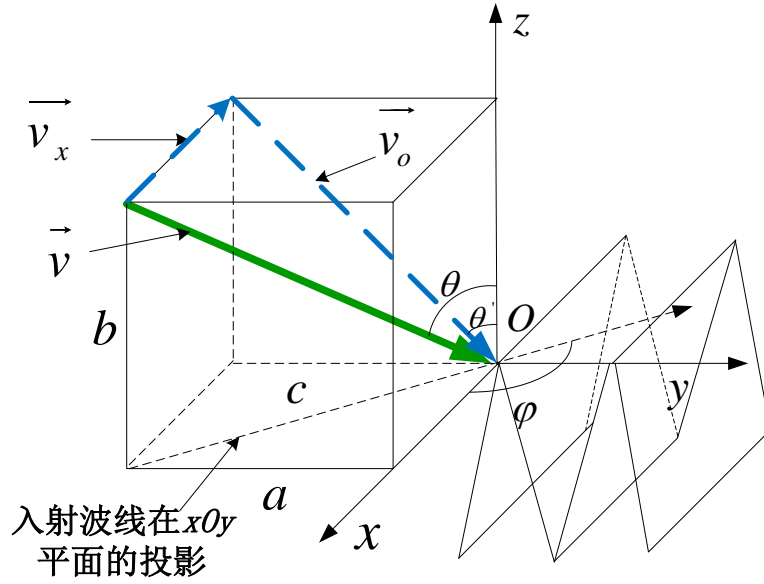


图 10. 反射波的矢量分解示意图

其中，我们假设入射线速度为 \vec{v} ，则有：

$$\begin{aligned} |\vec{v}_x| &= |\vec{v}| \sin \theta \cos(-\varphi) \\ |\vec{v}_o| &= |\vec{v}| \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2(-\varphi) + \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

\vec{v}_x 的方向与大小在反射过程中将保持不变，该速度将驱使波线沿 x 轴方向运动； \vec{v}_o 的分析与二维情形下完全一致，其大小不变，方向将受尖劈的反射而产生变化。

2.1 关于反射波的反射次数分析

由以上分析，我们对入射线速度矢量进行分解。考虑到二维情形下的分析结果以及尖劈在沿 x 轴方向上无限长这一假设条件，所以入射线在 xOy 平面上的分量不会影响反射波在尖劈空隙间的反射次数，决定反射次数的是投射在 yOz 平面的分量（如二维情形下的分析）。

我们首先来确定三维情形下入射线在 yOz 平面投影的射向角 θ' 。根据上图中的几何关系，我们可以得到如下方程组：

$$\begin{cases} \sin(\pi - \varphi) = \frac{a}{c} \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{b}{c} \\ \tan \theta' = \frac{a}{b} \end{cases}$$

解上述方程组，即可得到入射波线在 yOz 平面的投影与 z 轴夹角 θ' ：

$$\theta' = \arctan(\tan \theta \sin \varphi)$$

同理二维情况中特殊情况的分析：

若 $\theta' + \alpha > \frac{\pi}{2}$ ，则入射波打到尖劈右侧内板直接反射出去，反射次数为 1，反射波线方向：反射波与右侧斜面的法向量夹角 $\gamma_i = \arccos \left[\cos \left(\theta' + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 (-\varphi) + \cos^2 \theta} \right]$ ，斜向左上方偏内出去，反射波的

辐射强度 $I = \rho \cos(\gamma_i)$ 。

若 $\theta' + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ，则入射波打到尖劈右侧内板再原路反射回去，则反射次数为 1，反射波线方向为： $\gamma_i = \arccos \left[\sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 (-\varphi) + \cos^2 \theta} \right]$ ，反射波的辐射强度为 $I = \rho \cos(\gamma_i)$ 。

若 $\theta' + \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，即折射次数至少两次时，则反射线的相关分析如下：

对于波线分解的两个方向，由于沿着 x 轴负方向的波并未与尖劈斜面有碰撞，因此决定碰撞反射次数的就是在 yOz 平面中的波线。

因此，我们仅需要对二维情形下的反射次数表达式中的射向角进行简单修正，将上述的 θ' 取代二维反射次数表达式中的 θ ，即可得到三维情形中的反射次数 N 为：

$$N = \left\lfloor \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan \theta \sin \varphi) + \alpha}{\alpha} \right\rfloor - 1$$

2.2 关于反射波的方向分析

实际上，我们所要求的反射波方向，即反射波的速度矢量方向。

因此，在三维空间中波线第 i 次反射线的速度等于两个分解速度方向的矢量合成，它的反射角 γ_i 可以通过如下几何分析可知。下图所示为任意第 i 次反射时的情形。

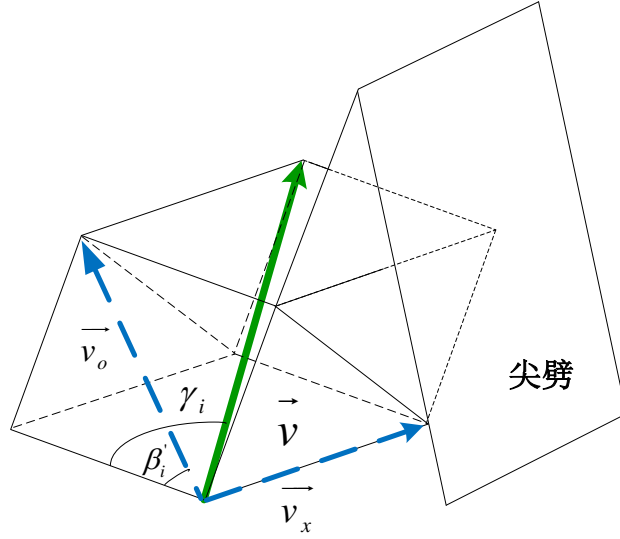


图 11. 第 i 次反射的波线矢量分解示意图

由图中几何关系可得：

$$\cos \gamma_i = \frac{|\vec{v}_o| \cdot \cos \beta_i'}{|\vec{v}|}$$

其中 β_i' 就是在二维分析中当 $\theta' = \arctan(\tan \theta \sin \varphi)$ 时入射线的反射过程中波线每次与尖劈面的法向量的夹角，即反射角。三维中波线的速度分量 \vec{v}_o 的反射过程等价于上节二维情况中波线的反射过程，那么可知 \vec{v}_o 分量反射过程中的入射角：

第 0 次反射的入射角 β_0 满足关系：

$$\beta_0' = \frac{\pi}{2} - \theta' + \alpha$$

第 i 次反射时的入射角：

$$\beta_i' = |\beta_0 - 2i\alpha|$$

因此，解得波线第 i 次反射波线的反射角为：

$$\gamma_i = \arccos(\cos \beta_i' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 (-\varphi) + \cos^2 \theta})$$

2.3 关于反射波的辐射强度分析

三维情形下的辐射强度类似于二维情形，我们很容易得到：

$$I_i = \prod_{j=1}^i (\rho \cos \gamma_j)$$

其中，可求解出三维中波线的入射角为：

$$\gamma_i = \arccos(\cos \beta_i' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta})$$

因此，三维情形下的反射波辐射强度为：

$$I_i = \prod_{j=1}^i (\rho \cdot \cos \beta_i' \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta})。$$

2.4 仿真方法和结果

我们在仿真中采用了 Householder 变换方法，即入射波与反射波满足 Householder 变换，即若入射波为 x ，反射波为 y ，镜面法线为 v ，则三者满足以下关系：

$$y = (I - \frac{2}{\langle v, v \rangle} vv^H)x$$

其中， I 是单位矩阵。利用这个关系，可以根据初始时刻的入射电磁波以及两个尖劈的几何参数信息，利用解析几何仿真出全部的电磁波路径。

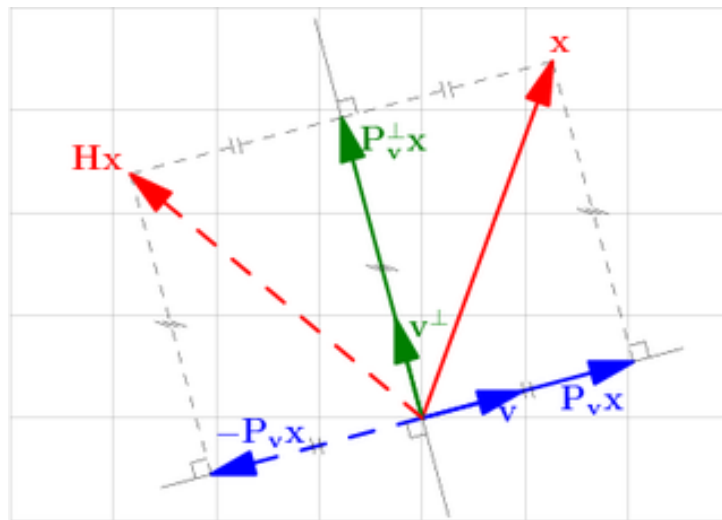


图 12. Householder 变换示意图

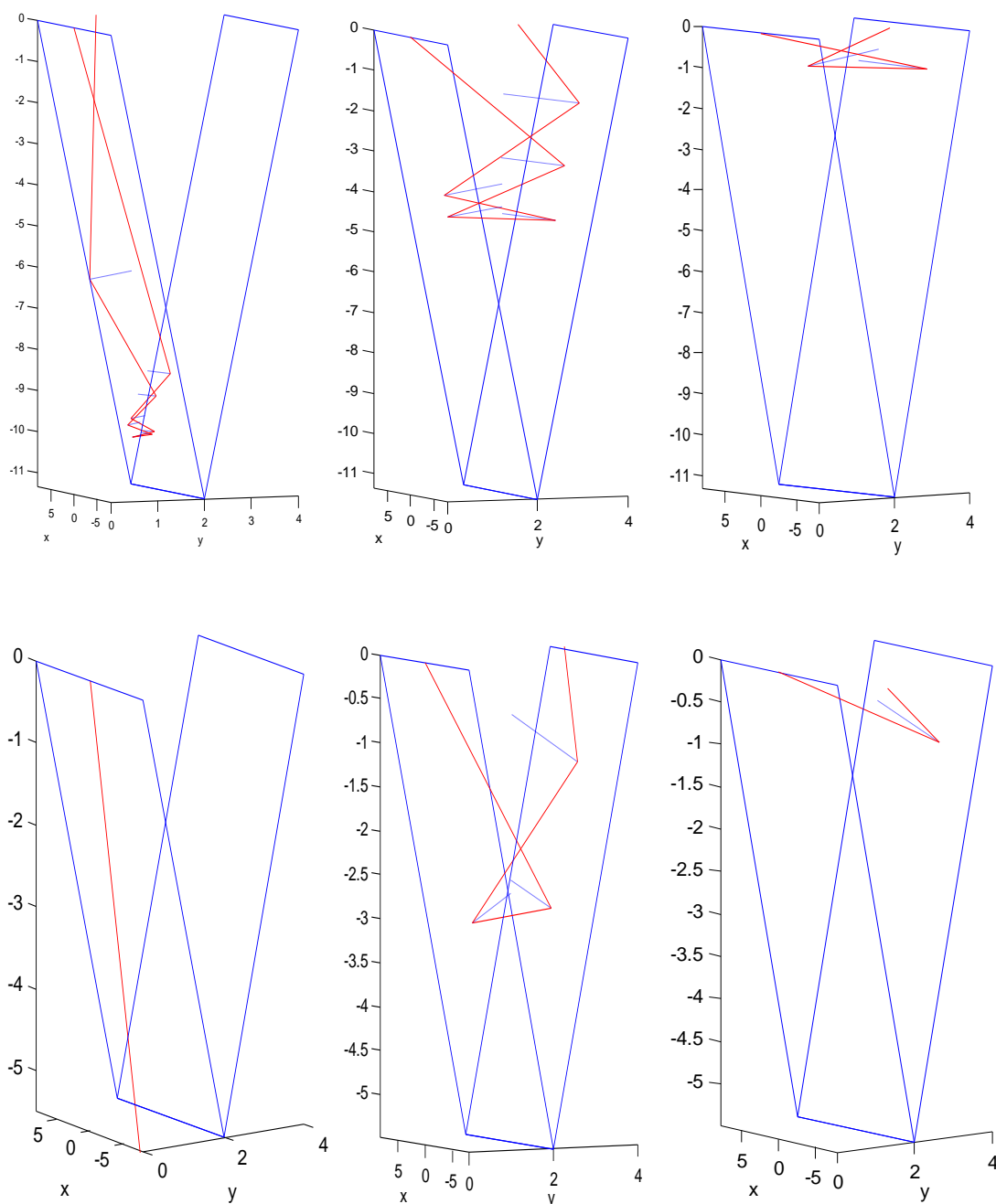
我们在仿真实验中给定 $\rho = 0.7$ ， $d = 4$ 。下表记录了四组实验的理论结果与仿真结果的对比情形：

表格 2. 三维情形仿真结果

序号	α	θ	φ	反射波方向 θ, φ		反射次数		反射波辐射强度	
				理论值	仿真值	理论值	仿真值	理论值	仿真值
(1)	10°	30°	30°	26°, 64°	25.933°, 64.341°	8	8	0.0008	0.0007555
(2)		46°	93°	34°, 92°	34.099°, 92.157°	5	5	0.0837	0.083692
(3)		78°	128°	70°, 127°	70.355°, 127.028°	2	2	0.3006	0.3006
(4)	20°	30°	30°	/	/	0	0	1	1
(5)		46°	93°	14°, 92°	14.201°, 92.158°	3	3	0.1682	0.16823
(6)		78°	128°	70°, 127°	70.3554°, 127.028°	1	1	0.5568	0.55679

通过表中结果可以看出，我们理论分析的结果与实验仿真结果是完全一致的。下图显示了六组实验中波线 2 在尖劈空缺中的反射情形。其中，红色实线为波线，蓝色虚线为法线。

【注】其中第（4）种情形较特殊，相当于波线摄入尖劈内部，因此无反射。



五、问题 2 模型建立与分析

1. 整体思路

天线在此封闭空间中发射一定功率的电磁波，电磁波经多次墙面的吸收、反射等，最终会达到一种平衡状态。此时，单位时间内墙面各点向外辐射的电磁波能量等于它的反射率与其所吸收总能量的乘积，即各点都达到动态平衡。

因此我们所要做的工作就是得到该动态平衡，并求出此时静区所吸收的二次辐射与一次辐射的功率的比值。

2. 模型的建立与分析

下图所示为面元辐射示意图，截面 dS 为微面元 dS_i 的辐射与球面所截的面积。

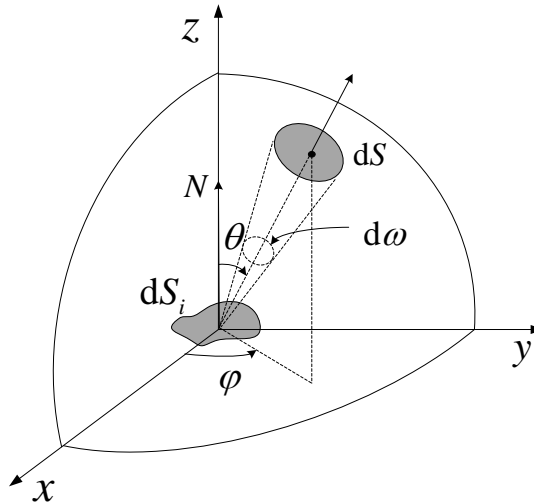


图 13. 面元辐射示意图

为便于分析，下面先给出几个辐射度学的基本概念。

辐射通量定义为单位时间内通过某一面积 dS 的辐射能量，记为 $d\Phi$ 。

辐射强度为某方向上单位立体角内的辐射通量，表示在指定方向上的辐射强度的大

小：

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

辐射照度定义为落到某微元上的辐射通量 $d\Phi$ 与此元面积 dS 之比：

$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$

辐射出射度定义为从一辐射表面（比如反射面）的单位面积上辐射出的辐射通量，

表征其辐射能力的大小：

$$M = \frac{d\Phi}{dS}$$

设表面反射率为 ρ ，那么显然有 $M = \rho E$ 。

辐射亮度 L 为面元单位面积上向某方向辐射的辐射能量：

$$L = \frac{d\Phi}{\cos \theta dS d\Omega} = \frac{I}{dS \cos \theta}$$

余弦辐射体即满足 $I_i = I_N \cos \theta$ 的辐射体。其中， I_N 为 dS 法线方向的辐射强度， I_i

为与法线成 θ 角方向的辐射强度。因此，对于余弦辐射体， $L = \frac{I}{dS}$ 为定值，即物体表面上每一点向周围各方向辐射的辐射亮度是相同的，表面各点处的辐射亮度 L 只与位置有

关，与辐射方向无关。

我们假设 dP 为表面某一点处单位面积上朝某辐射方向发出的辐射通量，则 dP 与该点处沿同一方向的辐射亮度的关系为：

$$dP = L \cos \theta d\omega \quad (3.1)$$

其中， θ 为该点处的法向与辐射方向之间的夹角。则该点处单位面积面元向其四周半空间辐射的总能量，即该点的**总辐射度**为如下式所示：

$$B = \int_{\Omega} dP = \int_{\Omega} L \cos \theta d\omega = L \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = L\pi \quad (3.2)$$

即亮度与辐射度仅差一比值 π 。

我们对各个面上每一点 x 处微面元 $dS(x)$ 进行分析。在任意时刻， $dS(x)$ 在向外辐射电磁波的同时，还会受到其它各面所辐射电磁波的影响。即 $dS(x)$ 向周围环境辐射的能量由它自身所具有的辐射能和它接收来自环境中其他物体表面向该点辐射的辐射能组成。设周围环境入射到微面元 $dS(x)$ 上的辐射能为 $H(x)$ ，而 $\rho(x)$ 为该表面在 x 处的反射率，则微面元 $dS(x)$ 对环境入射辐射能的反射而产生的那部分辐射辐射能为 $\rho(x)H(x)$ 。

x 点处的辐射度 $B(x)$ 满足：

$$B(x)dA(x) = E(x)dA(x) + \rho(x)H(x) \quad (3.3)$$

其中， $dA(x)$ 为微面元的面积， $E(x)$ 为该表面在点 x 处的自身辐射度， $\rho(x)$ 为反射系数。

对于 $H(x)$ ，它是周围环境表面各点辐射度 $B(x')$ 的函数，其中， $x' \neq x$ 。 x' 点处的微面元 $dS(x')$ 向四周辐射的能量中只有一小部分到达 x 点处。若用 $F(x', x)$ 表示从微面元 $dS(x')$ 辐射并到达面元 $dS(x)$ 的辐射能占它向四周辐射的总辐射能的比例，则 $dS(x')$ 对 x 的入射辐射能为 $B(x')F(x', x)dA(x')$ ，则：

$$H(x) = \int_S B(x')F(x', x)dA(x') \quad (3.4)$$

其中， S 为环境中的所有表面。通常称 $F(x', x)$ 为微面元 $dS(x')$ 对微面元 $dS(x)$ 的形状因子，或称为点 x' 对点 x 的形状因子。它只与微面元 $dS(x')$ 和 $dS(x)$ 的相对位置、几何大小有关，是一个纯几何量。根据立体角的定义，从 x' 处观察 $dS(x)$ 所张的立体角为：

$$d\omega = \frac{\cos \theta_x dA(x)}{r^2(x', x)} \quad (3.5)$$

其中， $r(x', x)$ 为点 x' 与点 x 之间的距离， θ_x 为 $dS(x)$ 在 x 处的法向量 N_x 与连接点 x' 与

点 x 的向量 $x-x'$ 之间的夹角。

由式(3.1)和(3.2)知，由微面元 $dS(x')$ 发出的能量到达 $dS(x)$ 的能量为：

$$dP(x')dA(x')=L(x')\cos\theta_x d\omega dA(x')=\frac{B(x')}{\pi}\cos\theta_x d\omega dA(x')$$

其中， $dP(x')$ 为处的单位面积朝立体角 $d\omega$ 发出的辐射通量。 $L(x')$ 为 x' 处沿方向 $x-x'$ 的辐射亮度。

由辐射度定义可知，微面元 $dS(x')$ 向四周发出的总能量为 $B(x')dA(x')$ ，故面元 $dS(x')$ 到面元 $dS(x)$ 的形状因子为：

$$F(x',x)=\frac{dP(x')dA(x')}{B(x')dA(x')}=\frac{\cos\theta_x d\omega}{\pi}=\frac{\cos\theta_x \cos\theta_{x'}}{\pi r^2(x,x')}dA(x')$$

定义遮挡函数 $HID(*,*)$ ，若遮挡，其值为 0，否则为 1。

于是形状因子一般形式为：

$$F(x',x)=HID(dS(x),dS(x'))\frac{\cos\theta_x \cos\theta_{x'}}{\pi r^2(x,x')}dA(x') \quad (3.6)$$

由式(3.4)-(3.6)，得到辐射度方程为：

$$B(x)=E(x)+\rho(x)\int_S B(x')\frac{\cos\theta_x \cos\theta_{x'}}{\pi r^2(x,x')}HID(dS(x),dS(x'))dA(x') \quad (3.7)$$

上式可描述封闭环境中各物体表面在平衡状态时的辐射能分布。

3. 模型的简化与计算

式(3.7)给出了物体表面辐射度函数的一般表达式，但是该式过于复杂，精确求解物体表面上个点的辐射度 $B(x)$ 显然不切实际，为此我们对式(3.7)进行简化。

我们将物体表面分割成 N 个小正方形，当 N 增大到一定程度时，各个小正方形可近似当作一个微元，其上各点的辐射度值和反射率均可视为常数。令第 i 个面片 S_i 的辐射度为 B_i ，其自身拥有的辐射度为 E_i ，漫反射系数为 ρ_i ，其面积为 A_i ，则将式(3.7)应用于面片 A_i 上，并在式两边对 S_i 求积分，得：

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos\theta_x \cos\theta_{x'}}{\pi r^2(x,x')} HID(dS(x),dS(x')) dA(x') dA(x) \quad (3.8)$$

当面片非常小，可以等效成一个点。因此 $\frac{\cos \theta_x \cos \theta_{x'}}{\pi r^2(x, x')}$ 为一常数，即：

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\cos \theta_x \cos \theta_{x'}}{\pi r^2(x, x')} \int_{S_i} \int_{S_j} dA(x') dA(x) = \frac{\cos \theta_x \cos \theta_{x'}}{\pi r^2(x, x')} A_j$$

若记 $F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_x \cos \theta_{x'}}{\pi r^2(x, x')} HID(dS(x), dS(x')) dA(x') dA(x)$,

则式(3.7)可改写为：

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij}, i=1, 2, \dots, N \quad (3.9)$$

此即为简化后辐射度系统方程，也可写为矩阵形式：

$$(I + M)B = E \quad (3.10)$$

其中， I 为 $N \times N$ 的单位阵，其他记号意义如下：

$$M = \begin{bmatrix} -\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1N} \\ -\rho_2 F_{21} & -\rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_N F_{N1} & -\rho_N F_{N2} & \cdots & -\rho_N F_{NN} \end{bmatrix}$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_N)^T$$

$$E = (E_1, E_2, \dots, E_N)^T$$

并称 F_{ij} 为面片 i 对面片 j 的形状因子。一旦计算好形状因子，就可以通过求解式(3.9)得到每个面片的辐射度值，由于辐射度解与视点无关，只要给定视点和视线方向，就可以用任意消隐算法来绘制场景。无论视点、视线、辐射源辐射照属性、面片漫反射系数如何改变，均无须重新计算形状因子。

因此，辐射度方法可归结为下面的流程图。

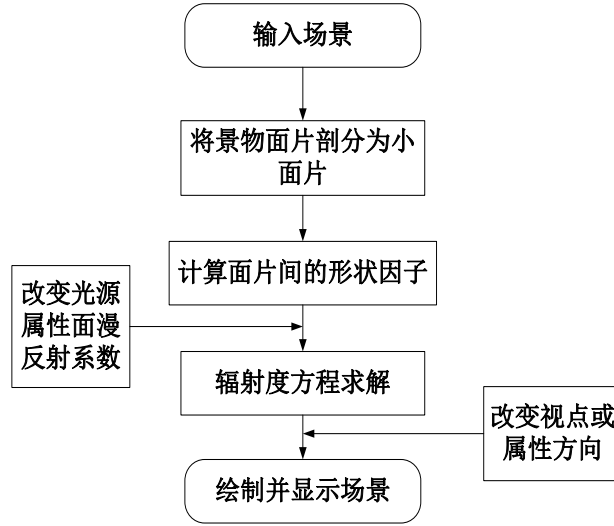


图 14. 辐射度方法流程图

4. 视在目标源功率的等效分布

根据上面的辐射度模型，我们将暗室中圆弧形天线中任意时刻的某个视在目标源，根据余弦辐射体的性质，将其辐射功率辐射到暗室墙面上所有能接受到其辐射的微元上，那么就等价于该部分墙面所有微元具有自身的自辐射度。

假设某一时刻的天线辐射源的功率为 P ，根据其是余弦辐射体的性质，设其辐射强度 $I_i = I_N \cos(i)$ ，则有：

$$\Phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(i) \sin i di = \pi I_N = P$$

则天线辐射源沿法线方向的强度 $I_N = \frac{P}{\pi}$ 。

根据辐射源的以上特性，将其功率等价到所有能辐射到的墙面微元 dS 上去，那么该微元的辐射照度为 $E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I_i}{r^2} \cos \theta$ ，那么通过等价转换该微元的本身的辐射初射度就是 $M = \rho E$ ，此时 M 即上面模型中的 $E(x)$ 。

5. 模型计算方法的改进——逐步求精法

根据上述模型，若将暗室表面分割成互不遮挡的 N 个微元，那么形状因子的矩阵将达到 $N \times N$ 的规模。假设当前状态下，面片 S_j 所具有的辐射度值为 B_j^k ，其带辐射的辐射度值为 ΔB_j^k ，算法首先选择具有最大待辐射能量面片 S_i ：

$$\Delta B_i^k A_i = \max_{1 \leq j \leq N} (\Delta B_j^k A_j)$$

然后将 S_i 所积聚的能量向环境中的所有其他面片辐射出去。面片 S_i 对面片 S_j 的辐射度值的贡献为：

$$\Delta Rad = \Delta B_i^k \cdot \rho_j F_{ji} = \rho_j \Delta B_i^k \frac{A_i}{A_j} F_{ij} \quad (3.11)$$

经过辐射后， $S_j (j=1,2,\dots,N; j \neq i)$ 面片上的辐射度和待辐射的辐射度值更新为

$$B_j^{k+1} = B_j^k + \Delta Rad$$

$$\Delta B_j^{k+1} = \Delta B_j^k + \Delta Rad$$

而 S_i 上的待辐射能量则变为 0，即 $\Delta B_i^{k+1} = 0$ 。

上述 4 个方程描述了逐步求精辐射度算法的每步迭代过程。由式(3.11)可知，每一迭代步骤顺序计算 N 个形状因子 F_{ji} ，因而，逐步求精辐射度算法每步的计算复杂度为

$O(N)$ 。根据前面的论述，初始状态面片 S_i 的辐射度和待辐射能量均为 E_i ，即

$$B_i^0 = \Delta B_i^0 = E_i。$$

6. 仿真结果与分析

我们将暗室表面分割成互不遮挡的 0.1×0.1 大小的正方形微元，可以计算出微元总数 $N = 146400$ 个。

以我们所建立的数学模型，经编程计算得到微波暗室的性能分析以下结果：

若暗室铺设垂直反射率 $\rho = 0.50$ 的平板形吸波材料，在弹目相对运动过程中，始终不能

满足 $\gamma \leq 0.03$ 的仿真技术要求，并且当 $t = 2s$ 时，达到最小值 $\gamma = 0.207469$ ，如下图所示，

横轴为时间 t ，纵轴为 γ 值。

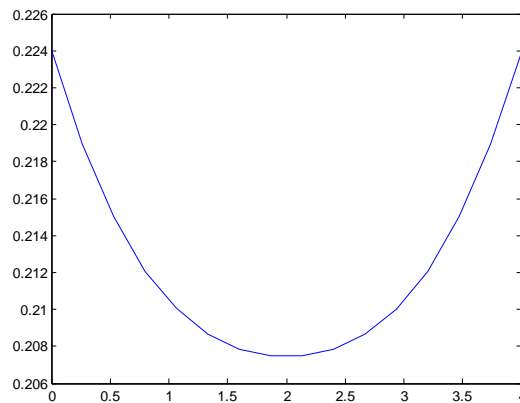


图 15. $\rho = 0.50$ 时， γ 随 t 的变化

而当暗室改为铺设平均反射率 $\rho = 0.05$ 的尖劈形吸波材料，我们的模型在弹目相对运动过程中始终能够达到 $\gamma \leq 0.03$ 的仿真技术要求，并且当 $t = 2s$ 时，达到最小 $\gamma = 0.0203104$ ，当 $t = 4s$ 时，达到最大值 $\gamma = 0.0218300$ 。如下图所示，横轴为时间 t ，纵轴为 γ 值。

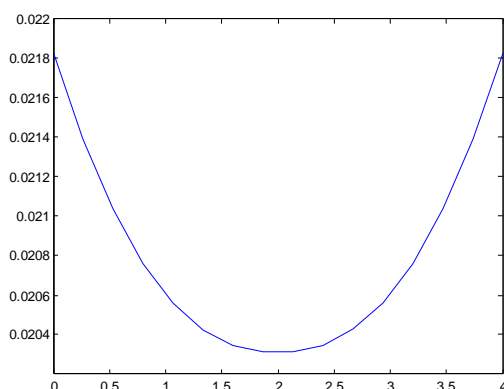


图 16. $\rho = 0.05$ 时， γ 随 t 的变化

以上数值具体可见下表：

表格 3. γ 随 t 的变化

时间 t	$\rho = 0.50$ 时的 γ 值	$\rho = 0.05$ 时的 γ 值
0	0.224009	0.021826
0.266667	0.218961	0.0213907
0.533333	0.215019	0.0210381
0.8	0.212071	0.0207631
1.066667	0.21005	0.0205609
1.333333	0.208632	0.0204253
1.6	0.207836	0.0203468
1.866667	0.207485	0.0203121
2.133333	0.20749	0.0203132
2.4	0.207829	0.0203457
2.666667	0.208635	0.0204266
2.933333	0.210016	0.0205611
3.2	0.212076	0.0207627
3.466667	0.215023	0.0210379
3.733333	0.218975	0.0213914
4	0.224002	0.02183

以下为用 MATLAB 仿真得到的若干微波暗室能量辐射图：

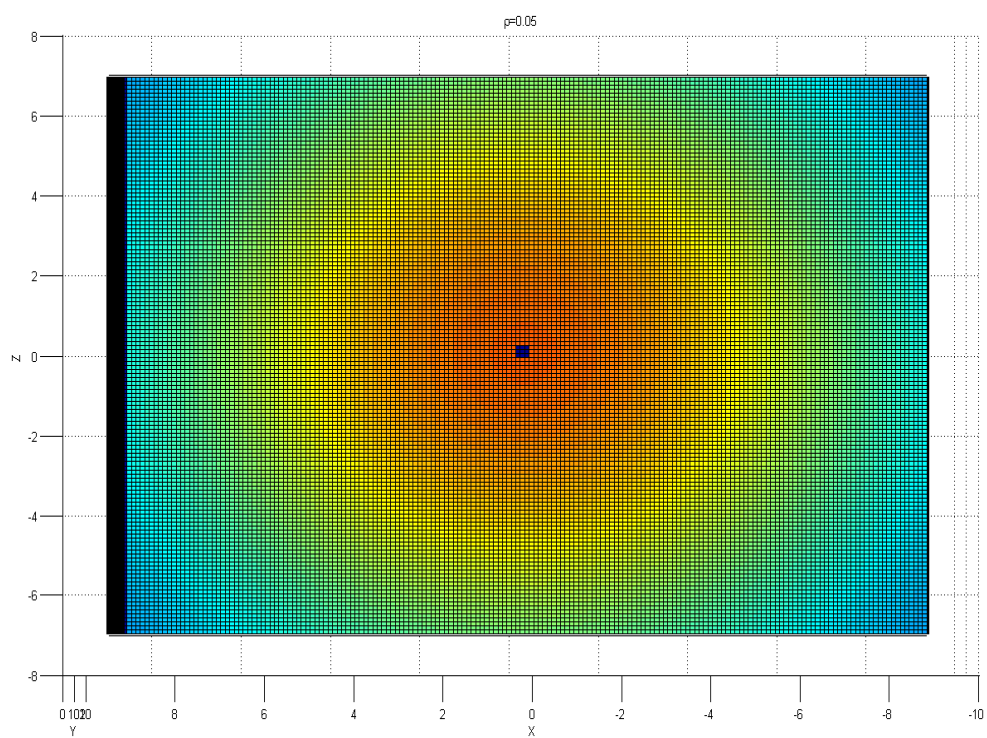


图 17. $\rho = 0.05, t = 2s$ 时的能量辐射俯视图

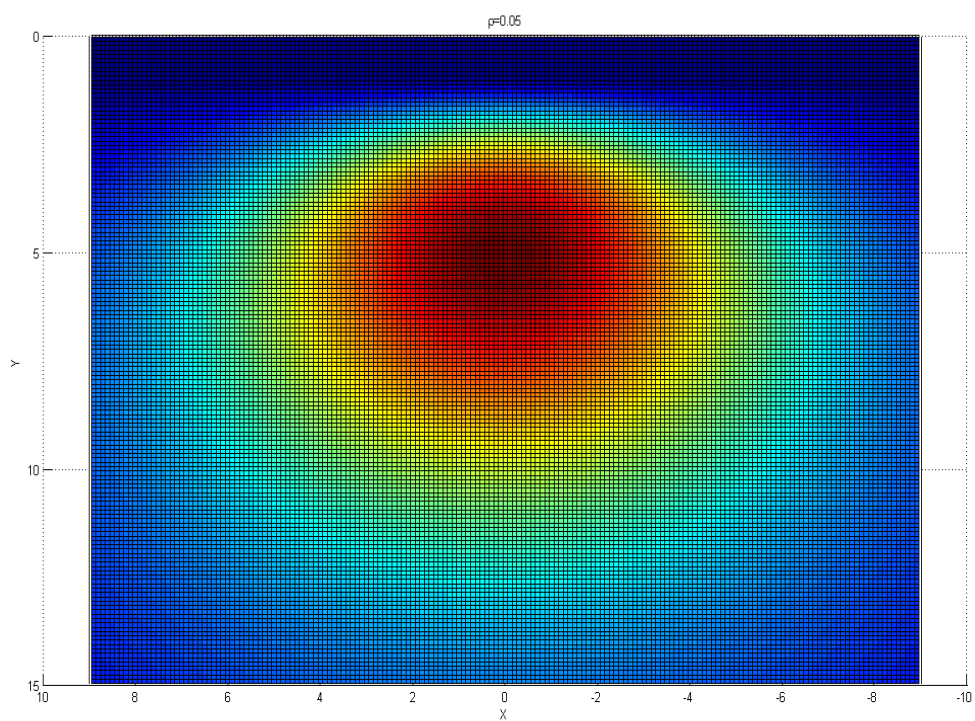


图 18. $\rho = 0.05, t = 2s$ 时的能量辐射俯视图

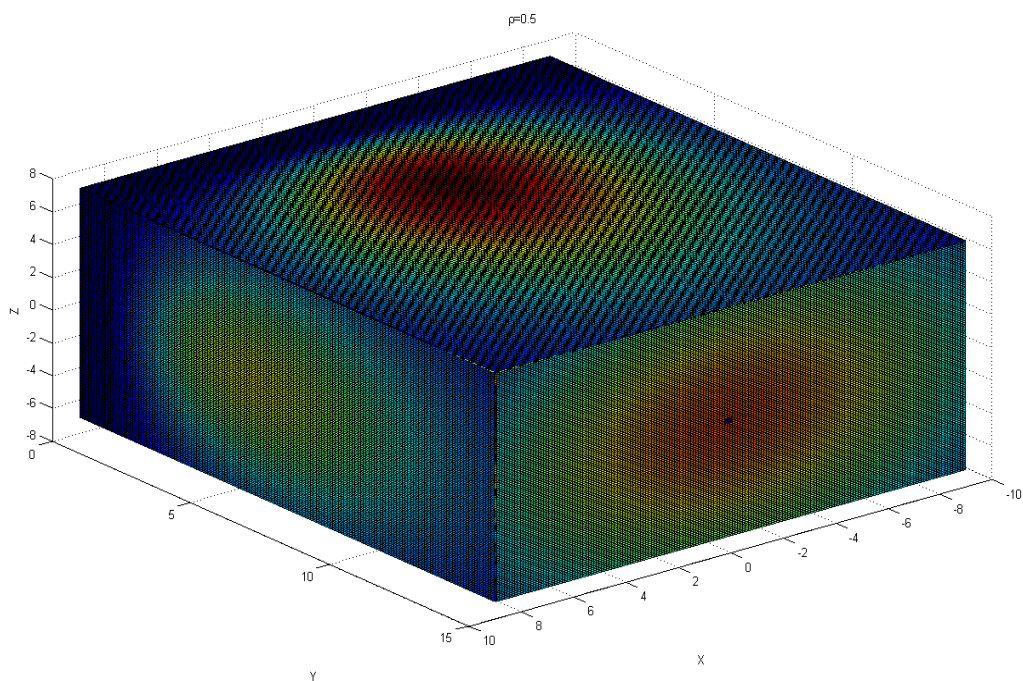


图 19. $\rho = 0.5, t = 2s$ 时的能量辐射侧视图

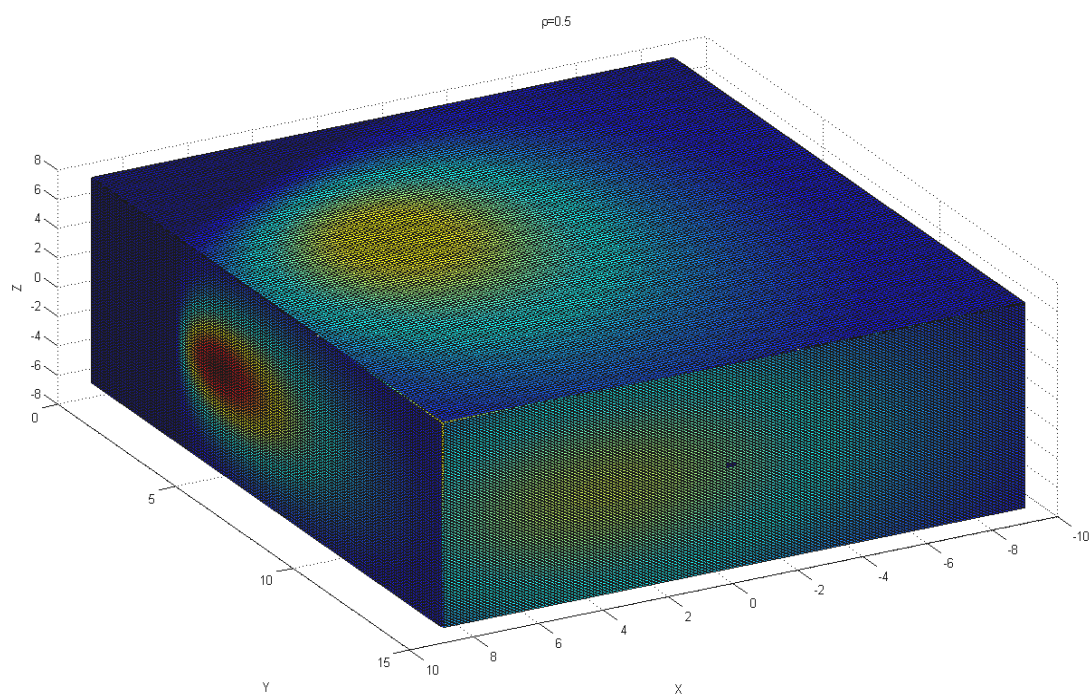


图 20. $\rho = 0.5, t = 2s$ 时的能量辐射侧视图

上图中，侧边的黑色小方块表示微波暗室中的静区，对于辐射入的能量，其全部吸收，没有反射。图中，亮色表示辐射能量高，暗色表示辐射能量低。光源正对的暗室区域可以接收到直达辐射，所以能量较高；而光源背后区域只能依靠其他墙面的反射获得辐射能量，因此能量较低。

六、模型评价与改进

关于尖劈形状吸波体的性能，我们首先从二维情形进行了研究，然后推广至三维情形。我们详尽地讨论了各种可能出现的情形，包括一般反射情形与各种特殊情形，建立了严格的、充分的数学模型，并得出了正确以及精确的数值结果。

关于微波暗室的性能研究，一方面，我们从能量守恒的角度出发，基于波在各墙面反射吸收的过程足够短的假设，建立了一个稳态模型，简化了中间的繁杂过程，得到了良好的分析与仿真结果；另一方面，我们所建立的稳态模型由于分割的微元面片精度有限，占用内存较多，可以在算法方面得到进一步的改进。

七、参考文献

- [1] 孙家广、胡事民，计算机图形学基础教程，清华大学出版社，2009.8
- [2] 张晓庭、方开泰，多元统计分析引论，科学出版社，1982.6
- [3] 车念曾、闫达远，辐射度学和光度学，北京理工大学出版社，1990.2
- [4] F. 格鲁姆. J. 贝彻雷[美]，辐射度学，机械工业出版社，1987.1
- [5] 陆大有，工程辐射传热，国防工业出版社，1988.7