

全国第六届研究生数学建模竞赛



题 目 基于小波变换的枪弹头痕迹自动对比研究

摘 要：

对于问题一，首先找到次棱痕迹横切面上能够代表波形特征的数据点，然后借助最小二乘法拟合出一条可以代表次棱痕迹方向的直线，称为趋势线。以趋势线作为两个次棱痕迹之间位置和姿态的参考线，校正子弹在测量过程中由于水平、竖直、倾角产生的误差，使两条次棱痕迹得以尽量在同一位置和姿态进行观察比对。

对于问题二，利用小波变换的方法，对于垂直于 XOY 平面上的每一个波形，进行小波阈值去噪，除去随机的噪声而不影响到原始波形中本身包含的尖峰细节信息。

对于问题三，在每个次棱痕迹上对应的三段位置通过求平均值的方法得到有代表性的三条波形，代表次棱痕迹的特征性质进行比对；对于这些代表性波形首先用问题二的方法进行去噪，然后通过 Haar 小波分解得到描述波的性质的小波系数，通过小波系数的相关性分析求得次棱痕迹之间的相关度；这里还运用了波形在 X 轴方向上误差范围内的逐步网格相对平移的方法减少误差。

对于问题四，运用问题三的解法，依次循环比较两颗子弹的次棱，从而获得两颗子弹之间的相似程度的信息，判断两个弹头的相似度。按照要求列表表示 22 个弹头间的相似程度和相似度由高到低的文件号，如第 19 页表格所示。

关键字 小波变换 相关系数分析 最小二乘法 阈值去噪

一、 问题重述

在公安实践中,需要根据弹头上的痕迹来判断两个弹头是否为同一支枪发射的。传统方法是通过显微镜肉眼观察,比对两个弹头上的线条型痕迹,看这些线条的粗细分布是否吻合。传统做法有两个弱点:一是效率极低,二是弹头样本不易保存,容易发生锈蚀损坏等情况。

现代高精度数据采集设备为自动比对方法创造了条件。自动比对方法的过程分为两步:

第一步,通过光学设备采集弹头上痕迹的三维数据,保存为数据文件。采集过程中基准平面在弹头痕迹的附近,测量时调节弹头的姿态使得:(1)弹头圆柱中心线尽量平行于基准平面;(2) y 轴尽量平行于擦痕的走向。弹头的姿态靠人工调节,所以上述的两个平行都不是准确的平行。这4条次棱的数据是分4次测量的,所以它们只能在4个独立的空间坐标系中分别显示它们的图像,没有一个参照系能使它们组合成一个整体图像在一个坐标系中显示。

第二步,采用适当的方法,通过电脑比对,判别一个弹头与样本弹头的相似程度,以便确认发射该弹头的枪支。

需要研究的问题是:

- 1、在光学设备上采集弹头上痕迹的3维数据时,人工调节很难使两个弹头在同样位置和同样姿态情况下被测量,从而会造成测量误差。通常会造成0.03mm左右的平移误差和 0.2° 的转动误差。如何处理由位置和姿态造成的测量误差,使得两个弹头可以尽量在相同位置和相同姿态的情况下进行比对。(这里假设弹头的直径为7.90mm,长度约为12mm)。
- 2、弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性,会造成数据误差和噪声,采取怎样的方法去消除这些误差和噪声。
- 3、文件名以77开头的12个文件分别是6支枪发射的12个弹头(每支枪发射2个弹头)的次棱部分的测量数据,依据这些数据,
 - (1)给出可供对比的特征和提取特征的方法。
 - (2)依据这些数据,选择采用数据的哪一部分用作比对,其效果比较好。
 - (3)给出完整的比对方案、算法,并在电子版附件中给出程序。
- 4、文件名以t开头的22个文件分别是另外11支枪发射的22个弹头(每支枪发射2个弹头)次棱部分的测量数据,
 - (1)用解决第三个问题的方法给出这22个弹头痕迹两两之间的相似程度,并列表表示;
 - (2)根据(1)的结果,用列表的方式给出每个弹头按相似度由高到低给出与之相似的前5位的弹头文件号。

二、 模型假设

- 1、利用光学设备采集弹头上的痕迹时温度、湿度等可能影响测量的客观条件相同。
- 2、定义子弹的标准姿态,子弹的标准位置是擦痕方向与 Y 轴平行,弹头圆柱中心线平行于空间直角坐标系的 XOY 平面。

三、 符号说明

$O-XYZ$: 标准坐标系

(x_i, y_j, z_{ij}) : 光学设备采集到的三维数据上的点坐标。其中,

$$i \in [0, 564], j \in [0, 756]。$$

L : 趋势线, 是反映擦痕方向的一条空间直线, 其方程为

$$L: \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}。$$

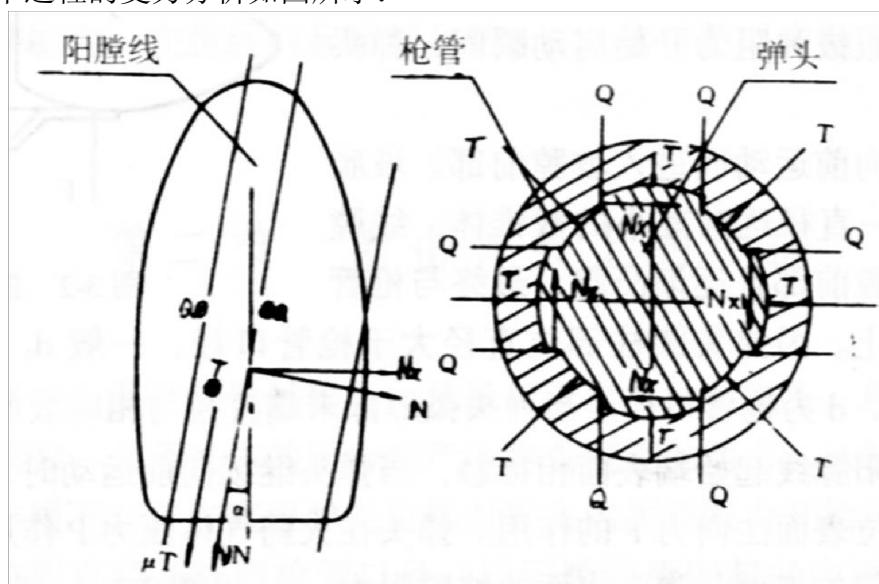
S : 在次棱痕迹上垂直于 XOY 平面的横截面。

四、问题的求解

我们把固定测量设备的空间直角坐标系 $O-XYZ$ 定义为标准坐标系。

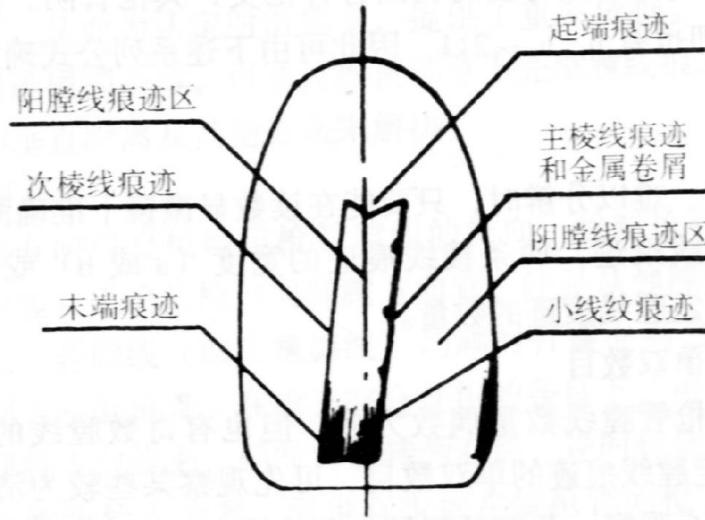
问题一 校正子弹测量时的姿态和位置

发射子弹时, 弹头在经过枪膛内的阴阳膛线等部位时, 分别形成了一些痕迹特征。这个过程的受力分析如图所示:



图一: 子弹受力分析示意图

膛线的两个边棱的摩擦作用, 反映在弹头上就是左右两个棱线痕迹。膛线方向为向右旋转, 右边棱角摩擦力增大, 形成的右侧棱线痕迹就粗大明显。这种粗大明显的棱线痕迹称主棱线痕迹。左边不明显的棱线痕迹称次棱线痕迹。痕迹如下图所示:



图二：子弹擦痕迹示意图

由光学设备采集数据的原理和方式可知，用于采集数据的光源和数据采集仪器是固定不动的，光源在被测弹头的侧上方，感光器在弹头的正上方；弹头由人工固定在支架上，用人工调节弹头的位置很难使两个弹头在同样的空间姿态被测量。这样的结果就是可能出现在平移和转动上的误差。误差的可能来源有以下几种情况：

- 子弹在被测量时存在水平或竖直方向上的平移；
- 擦痕走向与 XOY 平面之间存在转角；
- 擦痕走向与 YOZ 平面之间存在转角；

为了研究的方便，我们首先确定每个次棱线痕迹区域在坐标系 $O-XYZ$ 中的位置。

我们定义次棱线痕迹曲面上一条特殊的空间直线为次棱痕迹趋势线 L ，它同时满足以下两个条件：

- $L \subset S$ ， S 为次棱线痕迹曲面；
- 对应 L 上的任意点 (x_i, y_j, z_{ij}) ， $i = \left\lceil \frac{1}{n} \left(\sum_{p=1}^n k_p \right) \right\rceil$ ， k_p 为 S 在 y_j 处的横截面

波形的拐点的 X 轴坐标， n 为横截面波的拐点个数。

同时，我们定义拐点为满足条件 $(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i) \leq 0$ 的点。

在这样定义拐点之后，波形上一些比较小的扰动也有可能被判定为拐点，但是它们并不能代表波形的特征，所以需要把诸如此类的小扰动去除。我们把满足下面条件的点从拐点中去除，即不判定其为拐点：

- $(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i) \leq 0$
- $(x_i - x_{i-l})(x_i - x_{i-1}) < 0$ or $(x_{i+l} - x_i)(x_{i+1} - x_i) < 0$ ， l 为网格点跨度。

在这里我们经过试验，将 l 取为8时，大部分小扰动可以被排除。

在得到所有的数据点后，我们可以用这些点来拟合空间直线 L ，下面介绍如何拟合空间直线 L 。

常用的数据拟合方法有最小二乘法 and 契比雪夫法，其中以最小二乘法最为常用和重要。在坐标系 $O-XYZ$ 中，空间直线的标准方程为

$$\frac{x-x_i^*}{p} = \frac{y-y_i^*}{q} = \frac{z-z_i^*}{r},$$

(p, q, r) 为方向向量， (x_i^*, y_i^*, z_i^*) 为空间直线经过的一点。

整理得直线射影式方程为

$$\begin{cases} x = \frac{p}{r}(z-z_i^*) + x_i^* = az + b \\ y = \frac{q}{r}(z-z_i^*) + y_i^* = cz + d \end{cases}$$

其中： $a = \frac{p}{r}, b = x_i^* - \frac{p}{r}z_i^*, c = \frac{q}{r}, d = y_i^* - \frac{q}{r}z_i^*$ 。这样直线可以看作是两个平面相交所得的直线，所以可以分别对两个方程进行数据拟合。

假设我们在上一步中得到了 m 组数据点，设 $\hat{x}_k = az_k + b$ 表示按拟合方程

$x_k = az_k + b$ 求得的近似值， $k=1, \dots, m$ 。一般的，它不同于实测值，两者之差为

$$Q_x = \sum_{k=1}^m (x_k - (az_k + b))^2$$

同理可得

$$Q_y = \sum_{k=1}^m (y_k - (cz_k + d))^2$$

当 a, b, c, d 满足以下方程时， Q 取最小值。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q_x}{\partial b} = 0, \frac{\partial Q_y}{\partial c} = 0, \frac{\partial Q_y}{\partial d} = 0$$

展开有

$$\left\{ \begin{array}{l} bm + a \sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m x_i \\ b \sum_{i=1}^m z_i + a \sum_{i=1}^m z_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i z_i \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} dm + c \sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ d \sum_{i=1}^m z_i + c \sum_{i=1}^m z_i^2 = \sum_{i=1}^m y_i z_i \end{array} \right\}。$$

令

$$F = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = [a, b]', X = [x_1 \dots x_m]', B = [c, d]', Y = [y_1 \dots y_m]'$$

则方程可以写成

$$FF'A = FX, FF'B = FY$$

根据 m 组数据点就可以得出 a, b, c, d 的值, 这样我们就得到了趋势线 L 的方程^[5]。

因此, 擦痕走向与平面或者坐标轴之间的倾角和位置平移可以用趋势线 L 来表示, 即以上姿态和位置上的偏差转化为:

- a)' 测量时趋势线 L 存在垂直于各坐标平面的平移;
- b)' 趋势线 L 与 XOY 平面之间存在转角;
- c)' 趋势线 L 与 YOZ 平面之间存在转角;

下面我们来分别分析以上几种情况对于数据采集带来的影响, 并且给出校正这些影响的具体办法, 以使两个弹头在进行比对时尽量处于相同的姿态和位置。

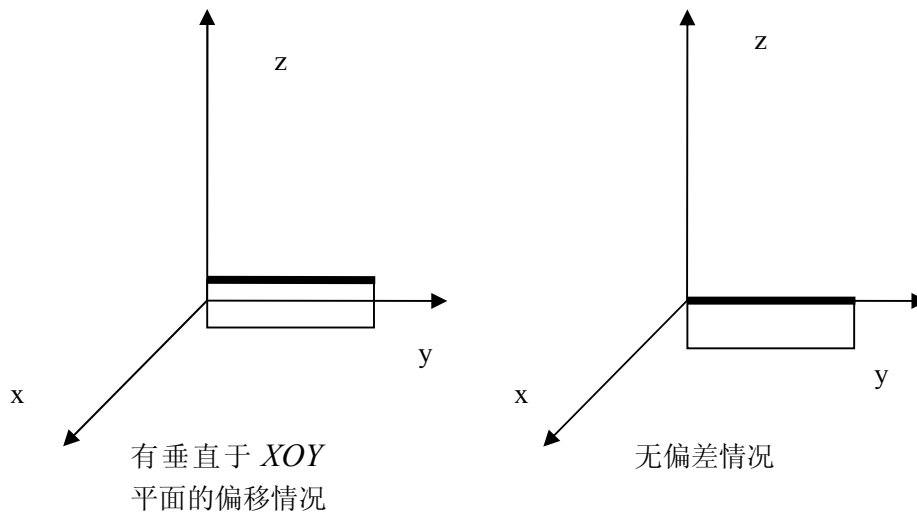
1、测量时趋势线存在平行于坐标平面的平移的校正

平移带来的位置偏差的影响在于:

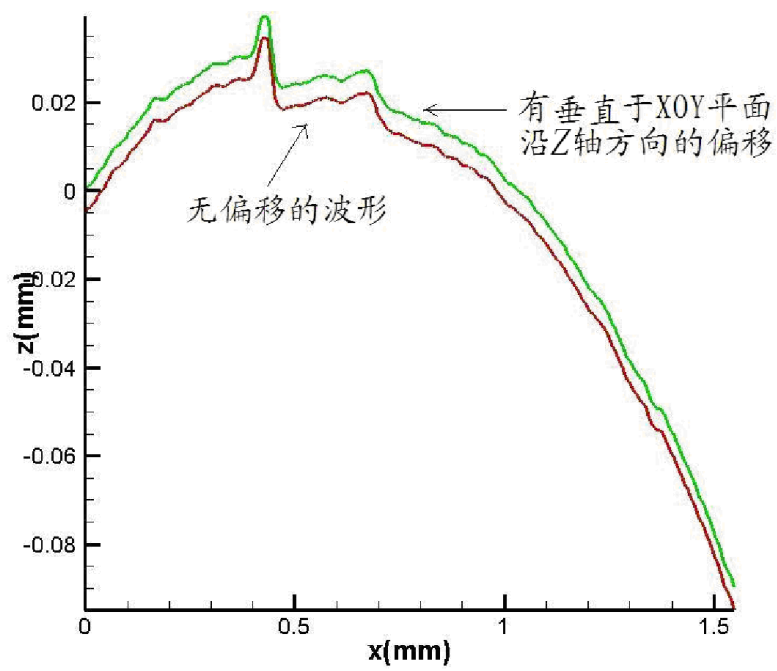
在我们在进行比对时, 需要对一些网格位置上的 Y 值, 提取出两条待对比痕迹的对应于此 Y 值的波, 将两条波的特征进行对比, 以判断两条痕迹的相似性。

如果垂直于 XOY 平面或者 YOZ 平面或者 XOZ 平面的方向上存在平移的话, 对于本应在同一位置的波, 会出现以下三种情况:

垂直于 XOY 平面的方向上有位移:

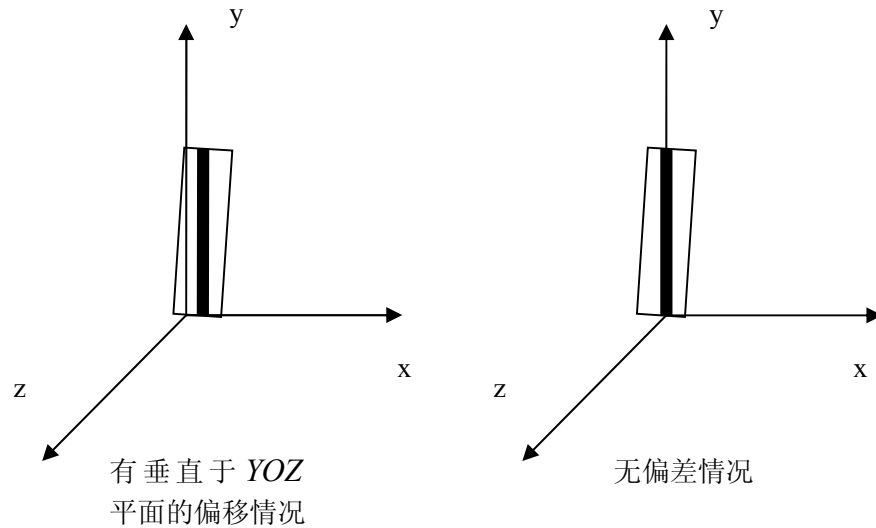


图三: 次棱痕迹在垂直于 XOY 平面的方向上有位移的空间示意图

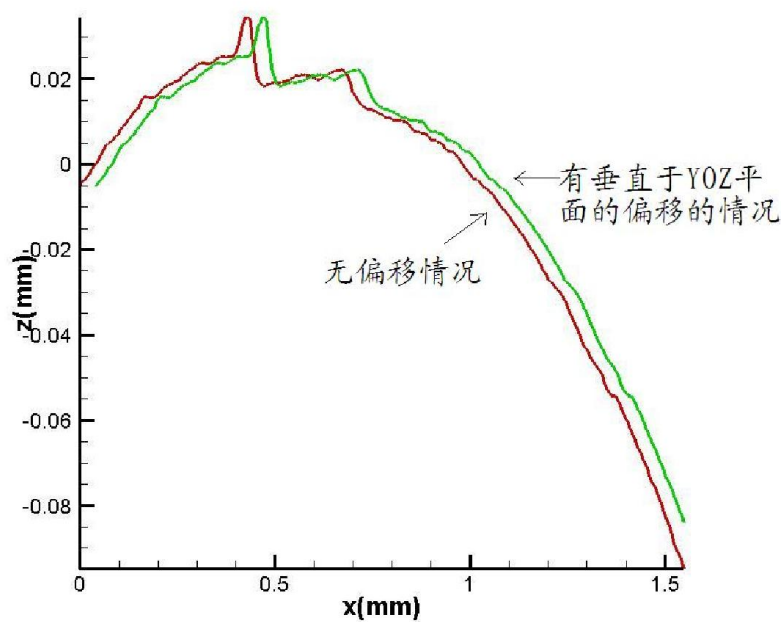


图四：次棱痕迹在垂直于 XOY 平面的方向上有位移的截面示意图

垂直于 YOZ 平面的方向上有位移：

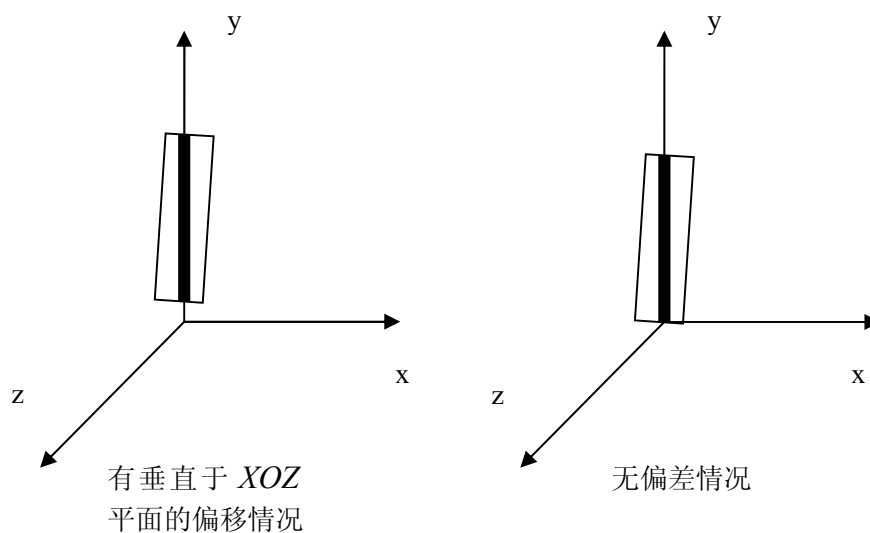


图五：次棱痕迹在垂直于 YOZ 平面的方向上有位移的空间示意图



图六：次棱痕迹在垂直于 YOZ 平面的方向上有位移的截面示意图

垂直于 XOZ 平面的方向上有位移：



图七：次棱痕迹在垂直于 XOZ 平面的方向上有位移的空间示意图

这样一来，本来应该处于同一位置的两条波形就无法进行比对。我们可以通过以下的步骤进行调整：

(1) 在垂直于 YOZ 平面和 XOY 平面的方向上进行平移调整（子弹的位置有水平的左右位移或者竖直方向上的上下位移）。

设需要在两个弹头上进行比对的两个次棱痕迹 A 和 B 对应的趋势线为 L_1 和 L_2 ，取两条趋势线在整个网格中的中点 $M_1(x_M, y_{\text{中}}, z_M)$ 和 $M_2(\tilde{x}_M, \tilde{y}_{\text{中}}, \tilde{z}_M)$ ，其中， $y_{\text{中}} = 2.076250/2 = 1.038125$ ，且 $x_M, z_M, \tilde{x}_M, \tilde{z}_M$ 均可以通过 L_1 和 L_2 的方程求出，表达式如下：

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{y_{\text{中}} - b_1}{q_1} p_1 + a_1, & \tilde{x}_M &= \frac{y_{\text{中}} - b_2}{q_2} p_2 + a_2 \\ z_M &= \frac{y_{\text{中}} - b_1}{q_1} r_1 + c_1, & \tilde{z}_M &= \frac{y_{\text{中}} - b_2}{q_2} r_2 + c_2 \end{aligned}$$

以次棱痕迹 A 为基准，将次棱痕迹 B 的趋势线 L_2 的中点 M_2 平移至 M_1 ，且保证次棱痕迹 B 上的所有点都相应地移动，则次棱痕迹 B 上的任意一点 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 将移到 $(\tilde{x} + x_M - \tilde{x}_M, \tilde{y}, \tilde{z} + z_M - \tilde{z}_M)$ ，即：

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \longrightarrow (\tilde{x} + x_M - \tilde{x}_M, \tilde{y}, \tilde{z} + z_M - \tilde{z}_M)$$

这样就消除了垂直于 YOZ 平面和 XOY 平面的方向上的位置差距。

(2) 在垂直于 XOZ 平面的方向上进行平移调整(子弹的位置有水平的前后位移)。
与上面的情况不同，在垂直于 XOZ 平面的方向上我们无法确定平移的具体数值。

但是，我们已经知道，平移误差最大是在 0.03mm 左右，考虑到网格的间距是 0.002750mm，就是说在垂直于 XOZ 平面的方向上的位移最多有 ± 11 个网格的移动。

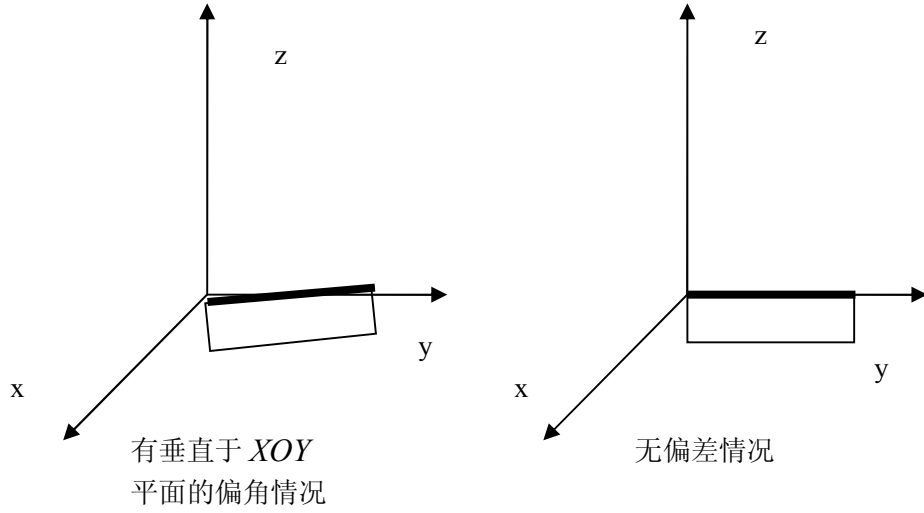
因此，在进行比对时，我们可以固定一条次棱痕迹，另外一条进行垂直于 XOZ 平面的方向上的位移调整，每步调整一个网格，依次调整 ± 11 个网格，每次都进行一次比对，最终选择最为温和的一次，即相关度最大的一次，将此次比对得出的相似度值作为两个次棱痕迹的相似度值。

这样，通过利用网格上的逐步调整，可以校正这种平移误差。

2、趋势线与 XOY 平面之间存在的转角的校正

这种偏移的空间表示如图八所示，这种偏移带来的影响是：

对于固定的 Y 值，横切面上的整条波都在垂直于 XOY 平面的方向上有位移。这样一来，本应进行比对的两条波在坐标系上有竖直的位差，其位差值为趋势线 L 上的对应于这个固定的 Y 值的点的 z 坐标值。



图八：次棱痕迹与 XOZ 平面之间有倾角的空间示意图

对于次棱痕迹上的任意一点 (x_i, y_j, z_{ij}) ，需要被在垂直于 XOY 平面的方向上移动的距离设为 h ，由趋势线 L 的方程 $\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ 可以得到 L 上对

应于 y_j 的点的 z 坐标为 $\frac{y_j - b}{q}r + c$ 。则次棱痕迹上的任意一点 (x_i, y_j, z_{ij})

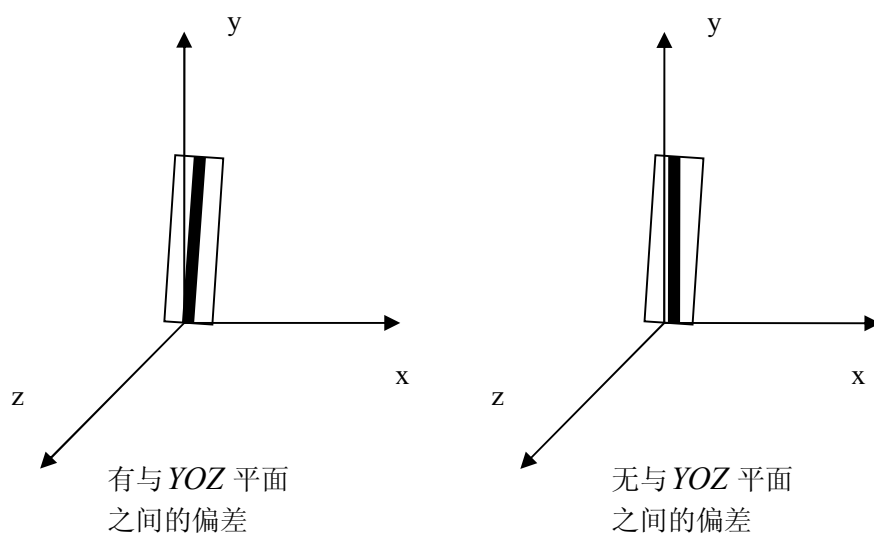
应该被调整到： $(x_i, y_j, z_{ij} - (\frac{y_j - b}{q}r + c))$ 。即：

$$(x_i, y_j, z_{ij}) \longrightarrow (x_i, y_j, z_{ij} - (\frac{y_j - b}{q}r + c))$$

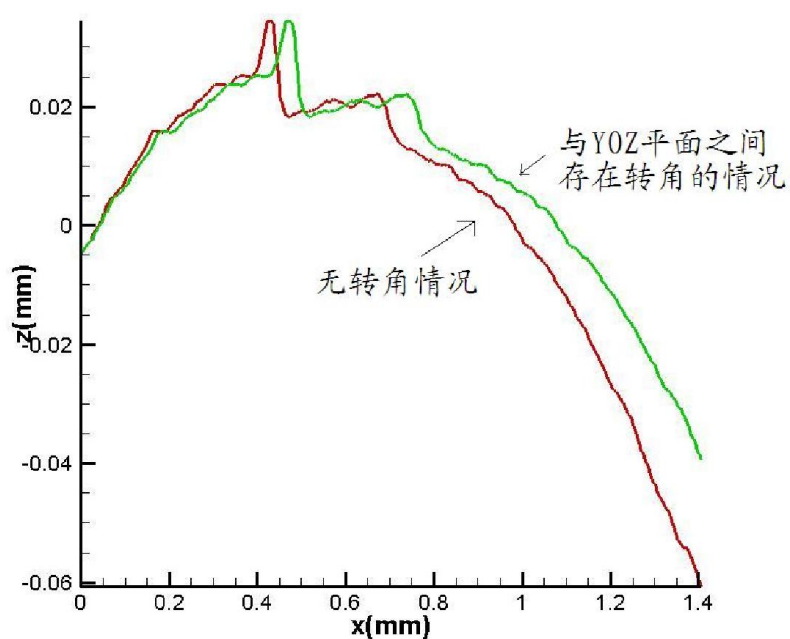
这样就消除了趋势线与 XOY 平面之间存在的转角带来的位置偏差，即子弹在擦痕走向与 XOY 平面之间存在转角带来的误差。

3、趋势线与 YOZ 平面之间存在的转角的校正

由于子弹摆放位置水平的向左或右偏移，导致擦痕方向不与 Y 轴平行，与 YOZ 平面之间存在一个夹角，空间情形如下图所示：



图九：擦痕在垂直于YOZ平面的方向上与YOZ平面之间有转角的空间示意图



图十：擦痕在垂直于YOZ平面的方向上与YOZ平面之间有转角的截面示意图

如上图所示，这种位置偏差带来的影响在于，对应于同一 Y 值的横切面上的波形被拉伸了，即波长变长了。

为了校正这种影响，需要相应于趋势线与YOZ平面之间的转角 α 进行收缩。在 Y 轴上被拉伸的倍数和偏斜角度之间有对应关系，对于次棱痕迹上的任意一点 (x_i, y_j, z_{ij}) ，调整以后的新点的坐标为： $(x_i \cos \alpha, y_j, z_{ij})$ 。其中，由趋势

线 L 的方程 $\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ 可以得到 $\cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ 。即：

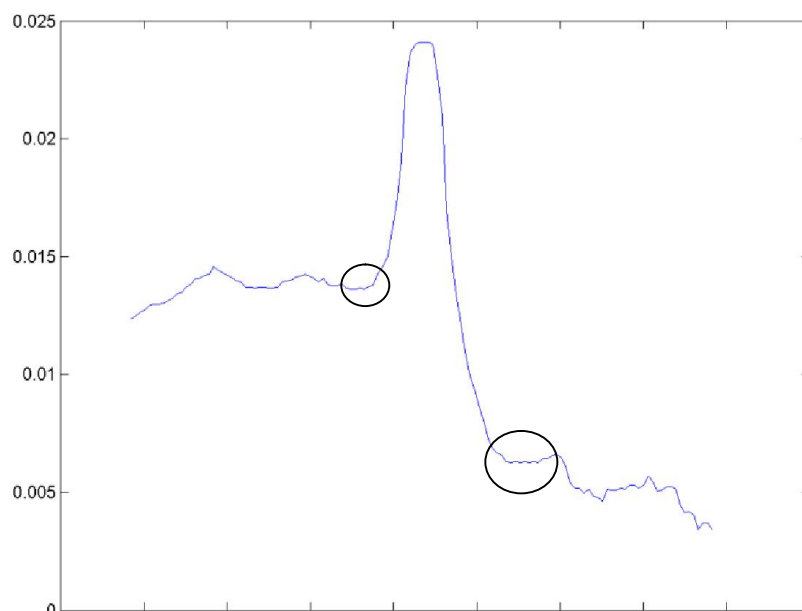
$$(x_i, y_j, z_{ij}) \rightarrow (x_i \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, y_j, z_{ij})$$

下面的表格显示了几个偏角对应的拉伸倍数：

α 角	0.1°	0.5°	1°	2°	3°
拉伸倍数	1.000001523	1.000038078	1.000152328	1.000609544	1.001372346

问题二 消除噪声和误差

在第一问中我们已经解决了由于人工测量造成的误差，但是在实际操作中，不仅人工测量会造成误差，弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹也会造成对横截面波形造成干扰，表现在波形上为存在一些非常密集的拐点，如下图：



图十一：受噪声干扰的截面波形示意图

这些噪声造成最后比对时造成误差，极大影响了人们对子弹头相似程度的判断，所以非常有必要在相似度分析之前对图像消除噪声，突出图像的期望特征，尤其是在弹头次棱线附近的表面痕迹，为了很好的分析这段波形，我们采用小波变换方法。

近年来，小波理论迅速发展，由于其具备良好的时频特性，因而实际应用非常广泛，这主要得益于小波变换具有如下特点：

- ①低熵性。小波系数的稀疏分布，使得图像变换后的熵降低。
- ②多分辨率。由于采用了多分辨率的方法，所以可以非常好地刻画信号的非平稳特征，如边缘、尖峰、断点等。
- ③去相关性。因为小波变换可以对信号进行去相关，且噪声在变换后有白化趋势，所以小波域比时域更利于去噪。
- ④选基灵活性。由于小波变换可以灵活选择变换基，对不同的研究对象，可

以选用不同的小波母函数，以获得最佳效果^{【4】}。

我们现在通过小波阈值去噪法来抑制特征波中的噪声部分。

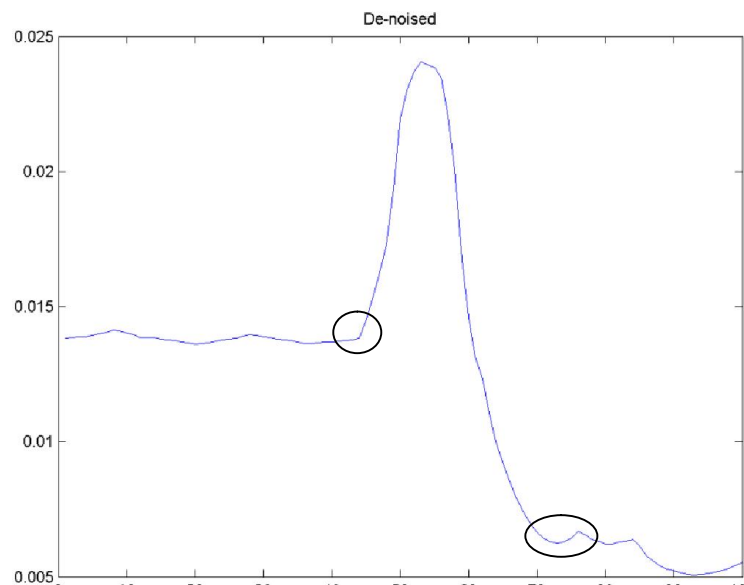
小波阈值去噪法的主要理论依据是，小波变化特别是正交小波变化具有很强的去数据相关性，它能够使信号的能量在小波域中集中在一些大的小波系数中，而噪声的能量则分布在整个小波域中。因此，经小波分解后，信号的小波系数幅值要大于噪声的系数幅值。可以认为，幅值比较大的小波系数一般以信号为主，而幅值较小的系数在很大程度上是噪声。于是采取阈值的办法可以把信号系数保留，而使大部分噪声系数减少为零^{【3】}。

一般来说，一维信号的去噪方法可以分为三个步骤：

- 1) 对信号进行小波分解；
- 2) 在小波分解后的各层系数中，对模大于和小于某阈值的系数分别处理；
- 3) 对处理完的小波系数再反变换重构出一幅经去噪后的图像。

在我们这道问题中，垂直于 XOY 平面的横截面波 $z_k = f(x_k) + \varepsilon_k, k=1,2,\dots,564$ ，其中 $f(x_k)$ 为真实波形， ε_k 为噪声， z_k 为含有噪声的波形信号。对特征波 z_k 进行去噪的目的就是要抑制信号中的噪声部分，从而在 z_k 中恢复出真实波形 $f(x_k)$ 。

我们在 Matlab 中采用 db3 小波进行小波分解。将次棱痕迹横切面的波形信号 S 输入 Matlab 7.0, 利用 `wdencmp` 命令消除噪声^{【2】}。对于上面的图十一，去噪效果如下：



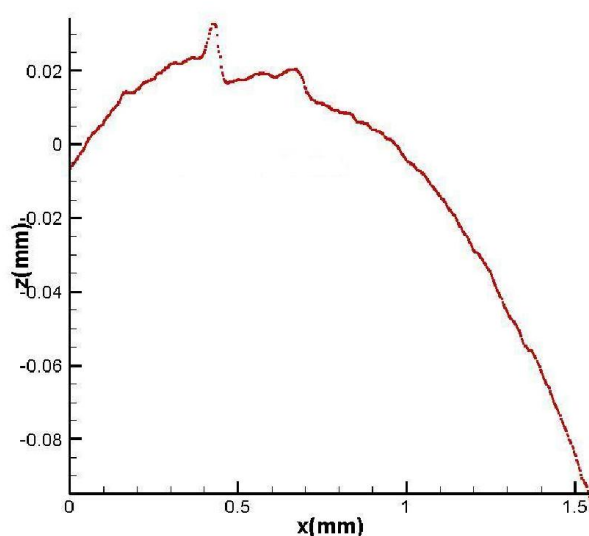
图十二：图十一去噪后的截面波形示意图

从波形上可以看出，经过去噪后，波形保留了基本的特征，并且将一些高频扰动消除掉了。

问题三 特征提取、比对方案及算法

由问题一中的受力分析和实际经验的观察，可以知道由于膛线的摩擦挤压，在子弹表面产生了次棱痕迹。区分这些次棱痕迹的关键在于比对垂直于次棱痕迹的切面上的波形的性质。因此我们进行判别的依据就是这些波形的特征。为了避免随机误差，我们应当在两条待比对的次棱痕迹的垂直于 XOY 平面的方向上对应的取出有代表性的波形，进行比对。

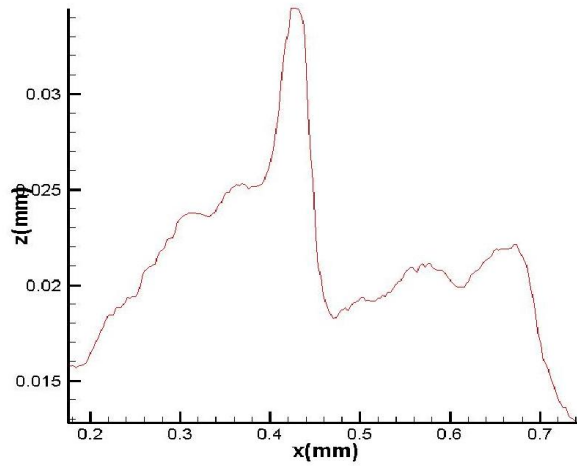
在次棱痕迹上，我们取垂直于 XOY 平面的截面，得到的一组点列组成了波形。可以发现波形的大概形状如下图：



图十三：截面波形示意图

由图十三可以看到，在次棱痕迹上有两个大波峰，这两个大波峰之间有若干短促的小波，其中有两个最为突出，且左边的小波峰偏高，右边小波峰偏长。这是由于弹头痕迹中主棱线痕迹和次棱线痕迹宽度窄，深度大，故而会在横切面曲线中形成两个特殊的波形^[6]。

在实际的比对和计算中，由于需要比对的子弹形态各异，波形特征的明显程度也不尽相同，但是可以肯定的是次棱痕迹方向是基本平行于 Y 轴的。而且题目中给出的描述每个次棱痕迹的数据较多，而所需的仅是用于描述波形变化的一段，如下图所示：



图十四：截面波形中体现变化的一段的示意图

过多的数据不仅对于比对没有帮助，反而会带来不必要的误差。因此首先，对于每一条我们即将进行比对的波形，我们取定最能描述波形性质的 256 个点。

选取这些点的方法是：

Step1 首先选取 $y_{\text{中}} = y_{378} = 1.038125$ ，则可以得到垂直于 XOY 平面的对应的一条波形 $S_{\text{中}}$ 。

Step2 确定波形 $S_{\text{中}}$ 右边波峰偏长的小波峰的最高点作为基准点，设基准点对应的 X 坐标为 x_{i0} ，则此后我们在即将进行比对的波形上即取定 X 坐标在 $[x_{i0-235}, x_{i0+20}]$ 上的一段进行比对，舍弃其他不表示特征的无用点。

下面来确定选取哪些有代表性的波形进行比对。

Step3 在 $y_{\text{中}} = y_{378} = 1.038125$ 的附近取三条线段： $l_1: [y_{271}, y_{285}]$ ， $l_2: [y_{371}, y_{385}]$ ， $l_3: [y_{471}, y_{485}]$ ，在这三条线段垂直于 XOY 平面的方向上各可以得到 15 条波形，即 S_{ij} ($i=1:3; j=1:15$)。

Step4 对于上面三组波形中的一组 S_{1j} ($j=1:15$)，对应于 $[x_{i0-235}, x_{i0+20}]$ 上的

每个 x_i ($i = (i_0 - 235) : (i_0 + 20)$)，取对应的 z 值为 $z_1 = \frac{1}{15} \sum_{j=1}^{15} z_{1j}$ ，其中 z_{1j}

是 S_{1j} 上对应于 x_i 的 z 值。这样通过取平均，我们消除了一些可能由于 y 方向上平移的存在，产生在某个波形上的误差，得到了一条可以代表这组波形的波 S_1 。

其他两组波形类似的可以得到各自的代表性波形 S_2 和 S_3 。

Step5 用问题二中的去噪方法对三条代表性波形进行去噪, 除去可能由于随机误差引起的干扰, 得到新的可以更好的反映弹头表面特征的波形 S'_1 , S'_2 , S'_3 。

下面介绍如何提取用以进行相关性对比的数据——Haar 小波变换下的小波系数。

对于一条波形, 小波系数可以很好的描述波形特征。对一个给定波形进行小波变换, 就是将该波形按某一小波函数展开, 即将信号表示为一系列不同尺度和不同时间移的小波函数的线性组合, 其中每一项的系数称为小波系数, 而同一尺度下所有不同时间移的小波函数的线性组合称为信号在该尺度下的小波分量。

这里采用的是 Haar 小波进行小波变换。

Haar 小波分解的步骤是:

(1) 设待分解的波形信号是 $f(t)$, 选择 $N = 2^n$, 得到采样信号值 $a_k^n = f(\frac{k}{2^n})$, 于是 $f_n(x) = \sum_{k \in Z} a_k^n \varphi(2^n x - k)$, 对信号 $f(t)$ 进行高精度的近似, 其中 φ 是 Haar

函数 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(2) 设信号 $f_n(x)$ 逐级分解为

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \omega_{n-1}(x) + \omega_{n-2}(x) + \cdots + \omega_{l-1}(x) + f_{l-1}(x) \\ &= \omega_{n-1}(x) + \omega_{n-2}(x) + \cdots + \omega_0(x) + f_0(x) \end{aligned}$$

其中 $\omega_{l-1}(x) = \sum_{k \in Z} b_k^{l-1} \psi(2^{l-1} x - k)$, $f_{l-1}(x) = \sum_{k \in Z} a_k^{l-1} \varphi(2^{l-1} x - k)$,

$$\psi(x) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(2x - k)。$$

系数 a_k^{l-1} 与 b_k^{l-1} 按照上标从大到小的顺序从 $l = n$ 开始直到 $l = 0$ 结束。

(3) 分解后的波形信号表示成

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \omega_l(x) + f_0(x) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{k \in Z} b_k^l \psi(2^l x - k) \right) + \sum_{k \in Z} a_k^0 \varphi(x - k) \end{aligned}$$

小波系数即为 $\{b_k^l\}$ 。

小波系数代表了整个波的特征, 这是因为通过小波系数可以完成原波信号的重构, 重构的信号值满足: $\tilde{f}_n(x) = \sum_{k \in Z} a_k^n \varphi(2^n x - k)$, 保留了原波在时域和频域上的特征。得到了小波系数就可以通过分析小波系数来对比两个波之间的相似

关系。

具体实现 Haar 小波变换，得到小波系数的做法为：

Step6 将波形 S'_1 ， S'_2 ， S'_3 上的点读入 MatLab7.0，利用在 Mat Lab 中的 Haar 小波变换函数 **dwt** 函数进行小波分解，分别得到对应的小波系数 $\{D_1\}$ ， $\{D_2\}$ 和 $\{D_3\}$ 。

Step7 将两个需要比对的次棱痕迹 A 和 B 均通过以上的 Step1-Step6 进行取值、计算和变换，各自得到了相应的三组小波系数 $\{D_{A1}\}$ ， $\{D_{A2}\}$ ， $\{D_{A3}\}$ 和 $\{D_{B1}\}$ ， $\{D_{B2}\}$ ， $\{D_{B3}\}$ 。

Step8 分别计算三组对应的小波系数 $\{D_{A1}\}$ 和 $\{D_{B1}\}$ ， $\{D_{A2}\}$ 和 $\{D_{B2}\}$ ， $\{D_{A3}\}$ 和 $\{D_{B3}\}$ 之间的相关系数 r_1 ， r_2 和 r_3 。

Step9 求出两条需要比对的次棱痕迹 A 和 B 的相似度 $r = (r_1 + r_2 + r_3) / 3$ 。

至此，我们求出了需要比对的两条次棱痕迹的相似度。

但是值得注意的是，我们在 Step2 取定基本点时可能存在一定的误差。这种误差我们通过以下的步骤来进行校正：

Step10 对于两条需要比对的次棱痕迹 A 和 B，经过 Step1-Step5 的步骤，得到了两组对应的波形。下面固定 A 得到的三条波形不变，B 对应的三条波形在垂直于 YOZ、平行于 X 轴的方向上依次平移 ± 5 个网格，然后进行 Step6-Step9 的比对，一共进行 11 次，得到 11 个相似度的值。取这 11 个值中最大的一个作为这两条次棱痕迹的相似度值。

将以上的 Step1-Step10 写成 MatLab 程序 Cycle3，将文件名以 77 开头的 12 个文件进行配对比对，得到的相似度值列表如下：

子弹代码	1928033	1203959	1504519	1811345	1812492	1923252
相似度	0.9476	0.4795	0.5997	0.3430	0.4672	0.6338

问题四 弹头比对结果

运用解决第三个问题的办法处理这 22 个弹头的数据，仍然采用压缩文件的 t01-t22 作为这 22 个弹头的编号，得到以下的 22*22 矩阵，表示 22 个弹头痕迹两两之间的相似程度：

子	t01	t02	t03	t04	t05	t06	t07	t08	t09	t10	t11
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

弹											
t01	1.000	0.556	0.511	0.521	0.414	0.486	0.394	0.389	0.499	0.325	0.555
t02	0.556	1.000	0.634	0.620	0.499	0.469	0.615	0.626	0.538	0.298	0.637
t03	0.511	0.634	1.000	0.693	0.842	0.507	0.680	0.657	0.796	0.480	0.653
t04	0.521	0.620	0.693	1.000	0.554	0.577	0.891	0.764	0.600	0.342	0.583
t05	0.414	0.499	0.842	0.554	1.000	0.472	0.604	0.605	0.706	0.439	0.507
t06	0.486	0.469	0.507	0.577	0.472	1.000	0.602	0.635	0.649	0.477	0.531
t07	0.394	0.615	0.680	0.891	0.604	0.602	1.000	0.897	0.735	0.252	0.705
t08	0.389	0.626	0.657	0.764	0.605	0.635	0.897	1.000	0.762	0.374	0.629
t09	0.499	0.538	0.796	0.600	0.706	0.649	0.735	0.762	1.000	0.492	0.707
t10	0.325	0.298	0.480	0.342	0.439	0.477	0.252	0.374	0.492	1.000	0.228
t11	0.555	0.637	0.653	0.583	0.507	0.531	0.705	0.629	0.707	0.228	1.000
t12	0.363	0.562	0.673	0.635	0.640	0.612	0.815	0.747	0.757	0.416	0.639
t13	0.323	0.530	0.714	0.845	0.641	0.550	0.938	0.788	0.690	0.313	0.616
t14	0.556	0.515	0.751	0.639	0.736	0.567	0.724	0.752	0.743	0.528	0.621
t15	0.493	0.660	0.784	0.709	0.713	0.644	0.854	0.776	0.739	0.350	0.678
t16	0.528	0.638	0.786	0.715	0.654	0.592	0.880	0.776	0.792	0.366	0.677
t17	0.536	0.726	0.711	0.557	0.673	0.493	0.650	0.623	0.591	0.408	0.742
t18	0.550	0.485	0.515	0.331	0.422	0.344	0.405	0.362	0.439	0.325	0.588
t19	0.513	0.776	0.681	0.536	0.528	0.476	0.536	0.559	0.596	0.388	0.587
t20	0.551	0.612	0.862	0.599	0.612	0.529	0.613	0.636	0.608	0.369	0.624
t21	0.495	0.615	0.782	0.820	0.729	0.558	0.890	0.852	0.743	0.333	0.680
t22	0.418	0.515	0.821	0.655	0.736	0.683	0.764	0.822	0.789	0.498	0.658
子弹	t12	t13	t14	t15	t16	t17	t18	t19	t20	t21	t22
t01	0.363	0.323	0.556	0.493	0.528	0.536	0.550	0.513	0.551	0.495	0.418
t02	0.562	0.530	0.515	0.660	0.638	0.726	0.485	0.776	0.612	0.615	0.515
t03	0.673	0.714	0.751	0.784	0.786	0.711	0.515	0.681	0.862	0.782	0.821
t04	0.635	0.845	0.639	0.709	0.715	0.557	0.331	0.536	0.599	0.820	0.655
t05	0.640	0.641	0.736	0.713	0.654	0.673	0.422	0.528	0.612	0.729	0.736
t06	0.612	0.550	0.567	0.644	0.592	0.493	0.344	0.476	0.529	0.558	0.683
t07	0.815	0.938	0.724	0.854	0.880	0.650	0.405	0.536	0.613	0.890	0.764
t08	0.747	0.788	0.752	0.776	0.776	0.623	0.362	0.559	0.636	0.852	0.822
t09	0.757	0.690	0.743	0.739	0.792	0.591	0.439	0.596	0.608	0.743	0.789
t10	0.416	0.313	0.528	0.350	0.366	0.408	0.325	0.388	0.369	0.333	0.498
t11	0.639	0.616	0.621	0.678	0.677	0.742	0.588	0.587	0.624	0.680	0.658
t12	1.000	0.692	0.680	0.746	0.785	0.603	0.431	0.505	0.593	0.701	0.708
t13	0.692	1.000	0.697	0.816	0.823	0.595	0.402	0.540	0.612	0.838	0.768
t14	0.680	0.697	1.000	0.768	0.780	0.699	0.452	0.510	0.757	0.724	0.849
t15	0.746	0.816	0.768	1.000	0.871	0.679	0.504	0.597	0.751	0.782	0.752
t16	0.785	0.823	0.780	0.871	1.000	0.744	0.388	0.580	0.766	0.778	0.759
t17	0.603	0.595	0.699	0.679	0.744	1.000	0.459	0.697	0.705	0.628	0.658
t18	0.431	0.402	0.452	0.504	0.388	0.459	1.000	0.550	0.465	0.554	0.458

t19	0.505	0.540	0.510	0.597	0.580	0.697	0.550	1.000	0.702	0.566	0.450
t20	0.593	0.612	0.757	0.751	0.766	0.705	0.465	0.702	1.000	0.627	0.779
t21	0.701	0.838	0.724	0.782	0.778	0.628	0.554	0.566	0.627	1.000	0.780
t22	0.708	0.768	0.849	0.752	0.759	0.658	0.458	0.450	0.779	0.780	1.000

每个弹头按相似度由高到低给出与之相似的前 5 位的弹头文件号的表格：

弹头编号	1	2	3	4	5
t01	t02	t14	t11	t20	t18
t02	t19	t17	t15	t16	t11
t03	t20	t05	t22	t09	t16
t04	t07	t13	t21	t08	t16
t05	t03	t22	t14	t21	t15
t06	t22	t09	t15	t08	t12
t07	t13	t08	t04	t21	t16
t08	t07	t21	t22	t13	t15
t09	t03	t16	t22	t08	t12
t10	t14	t22	t09	t03	t06
t11	t17	t09	t07	t21	t15
t12	t07	t16	t09	t08	t15
t13	t07	t04	t21	t16	t15
t14	t22	t16	t15	t20	t08
t15	t16	t07	t13	t03	t21
t16	t07	t15	t13	t09	t03
t17	t16	t11	t02	t03	t20
t18	t11	t21	t19	t01	t03
t19	t02	t20	t17	t03	t15
t20	t03	t22	t16	t14	t15
t21	t07	t08	t13	t04	t03
t22	t14	t08	t03	t09	t21

五、精度分析

下面讨论本方法的精度，即误差来源：

1、由于子弹本身的材质和射入的物体的材质的区别，以及由取出子弹的过程等引起的形变误差：这是一种客观存在的误差。

2、测量时子弹绕轴线顺时针或者逆时针转动的误差：这种误差很难避免，而且校正起来非常困难，需要找到子弹的轴线位置。但是，由题意可知，转动角度最多为 0.2° ，且已知弹头的直径为 7.90mm，长度约为 12mm，因此在平行于 X 轴的方向上最多有 0.013788mm 的偏移，即最多偏移 5 个网格。这个偏移在 Step10 中可以进行校正。

3、垂直于 XOZ 平面、平行于 Y 轴的方向的位移带来的误差：这种误差在 Step3-Step4 中可以被校正一部分，但是仍可能存在。减少这种误差的方法将在模型拓展中说明。

4、相似度值选取方法的误差：在选取相似度值时，对于每次 4 条次棱痕迹和另外 4 条次棱痕迹的顺次比较，我们定义的相似度选取方法是选取最大的两个相关系数的平均值最大的那种配对方法作为匹配结果。但是这种人为的选取准则可能对于相似度判定带来一定的误差。

5、在 Step2 选取中间波峰的基准点以找到最能代表特征的区域时，由于有些子弹的截面形状特别，无法通过有效的算法得到基准点，只能通过手工查找得到，可能带来误差。

六、模型评价与拓展

以上的建模方法通过选取有代表性的波形进行特征提取，比对小波系数求得子弹擦痕之间的相似度，并且通过多次比较使方法具有稳定性，能够较好的得到结果。但是，仍然还有一些不足之处。

由于时间的限制，对于模型的一些进一步拓展的想法没有实现，但是，这些方面值得我们进一步深入考虑，以更好的精确模型，减少误差，提高准确度：

1、在垂直于 Y 轴方向上的有代表性的波形的选取问题上，目前选取的是三条不相交的线段对应的波形族，通过取平均值得到有代表性的波形。以第四题为例，使用 3G 内存 2.20GHZ 双核 CPU 的电脑运行一次得到结果需要 20 分钟，因此没有采用更为复杂的方法。这个问题至少可以从以下两个角度拓展模型：

(1) 增多在 Y 轴上选取的线段，即增加每两条次棱痕迹间对比的有代表性波形的数量；

(2) 选取的线段可以相交，这样可以进一步减小随机误差；

2、计算有代表性的波形时，采用平均值的方法能够减少计算量，但是如果采用最小二乘拟合的方法，拟合出这条代表性波形，将会使模型更为准确。

以上的这些问题都值得我们进一步深入思考，完善模型。

参考文献

- [1] 孙淼，弹头痕迹三维测量仪简析，中国防伪报道，2008 年 05 期，p15-20,2008.
- [2] 郑治真 沈萍等，小波变换及其 MATLAB 工具的应用，地震出版社，2001 年 10 月
- [3] 唐桂文等，基于小波阈值去噪理论的监测数据处理方法，测绘科学，2009 年 01 期.
- [4] 成礼智 王红霞等，小波的理论与应用，科学出版社，2004 年 9 月
- [5] 裘杨，空间直线拟合的一种方法，齐齐哈尔大学学报，2009 年 02 期
- [6] 李加波等，基于小波变换的输电线路行波测距研究，湖南电力，2005 年 01 期

附录：主要程序代码

%ComDiffBul.m 定义了一个 ComDiffBul(i,j)函数，用来比较第四问中不同文件编号之间的相关度

```
function y = ComDiffBul(ii,jj)
```

% i,j 表示输入文件的序号

% y 返回的是相关度

```
DiffMids = ['c1_mid.dat',  
            'c2_mid.dat',  
            'c3_mid.dat',  
            'c4_mid.dat'];
```

```
Rootpath = 'D:\b\4';
```

```
for i = 1:4
```

```
    for j = 1:4
```

```
        for w=1:3
```

```
            d1 = load([Rootpath '\ ' t int2str(ii) '\ ' c' int2str(i) ' _ ' int2str(w) '.dat' ]);
```

```
            d2 = load([Rootpath '\ ' t int2str(jj) '\ ' c' int2str(j) ' _ ' int2str(w) '.dat' ]);
```

```
            d1=d1';
```

```
            d2=d2';
```

```
            s = d1(10:137,2);
```

```
            ls = length(s);
```

```
            [C,L]=wavedec(s,8,'db3');
```

```
            [thr,sorh,keepapp]=ddencmp('den','wv',s);
```

```
            clean=wdencmp('gbl',C,L,'db3',5,thr,sorh,keepapp);
```

```
            t=clean(1:ls);
```

```
            lt=length(t);
```

```
            [C,L]=wavedec(t,8,'db1');
```

```
            D1=wrcoef('d',C,L,'db1',1);
```

```
            D2=wrcoef('d',C,L,'db1',2);
```

```
            D3=wrcoef('d',C,L,'db1',3);
```

```
            d1_D3=D3;
```

```
            for k = 1:11
```

```
                s = d2(5+k:k+132,2);
```

```
                ls = length(s);
```

```
                [C,L]=wavedec(s,8,'db3');
```

```
                [thr,sorh,keepapp]=ddencmp('den','wv',s);
```

```
                clean=wdencmp('gbl',C,L,'db3',5,thr,sorh,keepapp);
```

```
                t=clean(1:ls);
```

```
                lt=length(t);
```

```
                [C,L]=wavedec(t,8,'db1');
```

```
                D1=wrcoef('d',C,L,'db1',1);
```

```
                D2=wrcoef('d',C,L,'db1',2);
```

```
                D3=wrcoef('d',C,L,'db1',3);
```

```

        d2_D3(k,:)=D3;
    end
    maxi = 0;
    for k =1:11
        temp = corrcoef(d1_D3,d2_D3(k,:));
        if(temp(1,2)>maxi)
            maxi = temp(1,2);
        end
    end
    r_tem(w)=maxi;
end
r_temp(i,j)=mean(r_tem);
end
end
c=0;
maxy=0;
for i=1:4
    for j=1:4
        p=j+c;
        if(p>4)
            p=p-4;
        end
        r(i,j)=r_temp(j,p);
    end
    c=c+1;
end
ymax = 0;
for i = 1:4
    r(i,:)=sort(r(i,:), 'descend');
    tempp = (r(i,1)+r(i,2)+r(i,3))/3.0;
    if(tempp>ymax)
        ymax=tempp;
    end
end
end
y=ymax;

```