

仓库容量有限条件下的随机存贮管理问题

摘要：本文讨论了仓库容量有限条件下的随机存贮管理问题。首先建立了一个理论模型，根据题目要求写出平均费用的函数，该函数是关于订货点 L 和缺货天数 X 的函数，因为缺货天数 X 是一随机变量，这里给出了 X 为离散型和连续型两种模型，分三种情况讨论了各自的损失费用，然后得出期望平均费用函数 $E[f(L, X)]$ ，经过 Maple 软件的辅助，对 L 进行求导，令 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0$ 从而得出求解最优订货点 L^* 的方程。由于计算量太过庞大，所以在建立理论模型之后，本文还给出了一种比较实用的求解全局最优的遍历搜索算法，应用于问题 2 中求解出了三种商品各自的最佳订货点。经 SPSS 验证可知，问题 2 中给出的 3 种商品的缺货天数 X 不符合一些常见连续型的概率分布，故在求解时将 X 看做离散型的随机变量，采用频率替换的方法，计算出各自的 $P(X)$ ，经遍历搜索找到最佳订货点。在问题 3 中，类似问题 1 的解法，求出计算最佳订货点 L_i^* 的理论模型，同时为便于问题 4 的求解，依然采用解决问题 2 的遍历算法，经 Matlab 编程求解得出问题 4 的最佳订货点 L^* 、 Q_{0i} 和 Q_i 。问题 5 中假定商品的销售量是离散变化的，采用马氏链模型，在问题 2 的基础上补充假设条件，给出了单品种商品随机存贮模型，这一模型结合实际可以加以推广。

本文分为三个部分：第一部分是问题重述；第二部分是给出随机存贮问题的数学模型和一个搜索算法，通过计算机编程，应用于问题 2 和 4 中，从而给出了实际问题的最优解。第三部分为模型的评价和推广。

关键字：随机存贮，K-S 检验，频率替换，遍历搜索，马氏链模型

一、问题重述

工厂生产需定期地定购各种原料，商家销售要成批地购进各种商品。无论是原料或商品，都有一个怎样存贮的问题。存得少了无法满足需求，影响利润；存得太多，存贮费用就高。因此说存贮管理是降低成本、提高经济效益的有效途径和方法。本问题主要考虑的是在销售速率固定，交货时间为一随机变量的情况下，商场如何确定最优的订货点 L^* 来使其总的损失费用达到最低。

二、数学建模和问题求解

（一）问题 1：

1.1 模型假设：

1. 供货量充足
2. 每次订货的时候存贮量 q 刚好是 L 。

1.2 符号说明：

c_1 ：每次进货的订货费

c_2 ：使用自己的仓库存贮商品时，单位商品每天的存贮费用

c_3 ：使用租用的仓库存贮商品时，单位商品每天的存贮费用

c_4 ：缺货情况下，单位商品每天的损失费用

X ：交货时间，是一个随机变量

Q_0 ：自己的仓库用于存贮商品的最大容量

Q ：到货时商品的存贮量

q ：商品的存贮量

L ：订货点，即订货时商品所剩下的存贮量

L^* ：最优订货点，即使总损失费用达到最低的订货点

$f(L, X)$: 一个订货周期内的平均总损失费用, 是关于 L 和 X 的函数

$p(X)$: 交货时间的概率密度函数

1.3 解题思路:

假设随机变量 X (交货时间) 的密度函数已知为 $p(x)$ 。考虑某个周期内平均每天的损失费用设为 $g(L)$, 求其最小时 L 的取值 L^* 。因为 $L \leq Q_0$ 和 $L > Q_0$ 时 $g(L)$ 的表达式是不同的, 所以分三步来求 L^* 。

(1) 当 $L \leq Q_0$ 时, 求出 $L_1^* = L_1(p(x))$, 使得 $g(L_1^*) = \min(g(L), \forall L \leq Q_0)$ 。

(2) 当 $L > Q_0$ 时, 求出 $L_2^* = L_2(p(x))$, 使得 $g(L_2^*) = \min(g(L), \forall L > Q_0)$ 最小。

$$(3) L^* = \begin{cases} L_1^* & g(L_1^*) \leq g(L_2^*) \\ L_2^* & g(L_1^*) > g(L_2^*) \end{cases}$$

1.4 具体步骤

第一步: 考虑 $L \leq Q_0$ 时一个周期内平均每天的损失费用 $f(L, X)$ 。

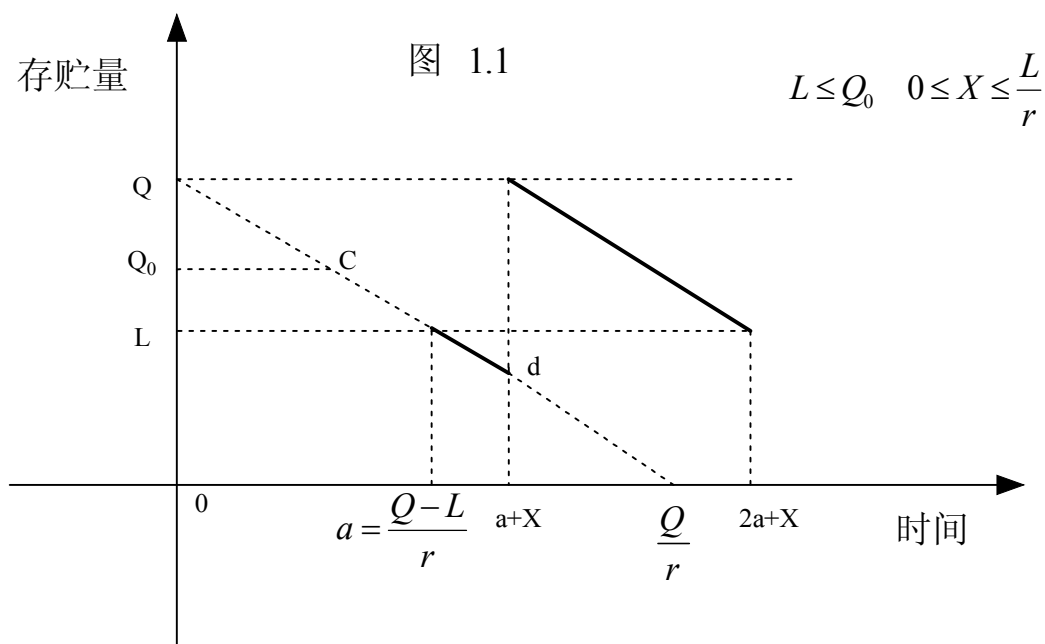
因为在一个周期内可能会发生 $0 \leq X \leq \frac{L}{r}$ (会发生缺货) 或 $X > \frac{L}{r}$ (不会缺货) 的情况。分别考虑得到费用函数为:

$$f(L, X) = \begin{cases} \frac{A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2}{X + \frac{Q - L}{r}} & 0 \leq X \leq \frac{L}{r} \\ \frac{A + c_4 r (X - \frac{L}{r})}{X + \frac{Q - L}{r}} & X > \frac{L}{r} \end{cases}$$

$$\text{其中 } A = c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q - Q_0)^2}{2r}$$

现在来具体解释 $f(L, X)$:

(1) 当 $0 \leq X \leq \frac{L}{r}$ 时

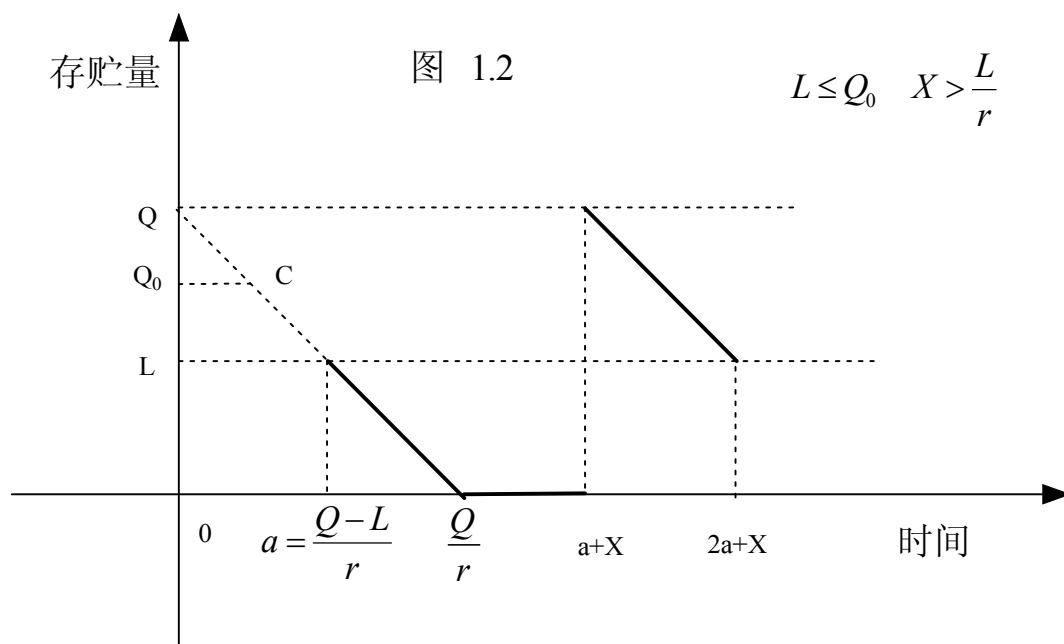


见图 1.1: 设在 0 时刻, 存贮量为 Q ; 在 a 时刻存贮量降为 L , 开始订货 (易知 $a = \frac{Q-L}{r}$)。在 $X+a$ 时刻货到, 在 $X+2a$ 存贮量又降为 L 。以 $[a \quad X+2a]$ 为一个周期, 求其费用。由图易知, $[a \quad X+2a]$ 周期内的费用等于 $[0 \quad a+X]$ 的费用, 所以只需求 $[0 \quad a+X]$ 的费用, 其值为 $c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad a+X)$ (注: $S(Q \quad Q_0 \quad c)$ 表示 $(Q \quad Q_0 \quad c)$ 围成的面积)。易证

$$\begin{aligned}
 & c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad a+X) = \\
 & c_1 + c_2 \times S(0 \quad Q \quad \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q \quad Q_0 \quad c) - c_2 \times S(d \quad a+X \quad \frac{Q}{r}) \\
 & = c_1 + c_2 \int_0^{\frac{Q}{r}} r t dt + (c_3 - c_2) \int_0^{\frac{Q-Q_0}{r}} r t dt - c_2 \int_0^{\frac{L}{r}-X} r t dt \\
 & = A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2
 \end{aligned}$$

所以这个周期内的平均每天的费用为 $\frac{A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2}{X + \frac{Q-L}{r}}$ 。

(2) 当 $X > \frac{L}{r}$ 时



见图 1.2, 考虑 $[0 \quad a+X]$ 之间的费用, 其值为

$$c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad \frac{Q}{r}) + c_4 r(X - \frac{L}{r})。易证:$$

$$c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad \frac{Q}{r}) + c_4 r(X - \frac{L}{r}) =$$

$$c_1 + c_2 \times S(0, Q \quad \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q \quad Q_0 \quad c) + c_4 r(X - \frac{L}{r}) = A + c_4 r(X - \frac{L}{r})$$

$$\text{所以这个周期内的平均每天的费用为 } \frac{A + c_4 r(X - \frac{L}{r})}{X + \frac{Q-L}{r}}$$

要求 L^* 使得平均每天费用的期望值最小, 即满足:

$$E[f(L_1^*, X)] = \min E[f(L, X)] \quad (\forall L \leq Q_0)$$

(1) 若 X 为离散型:

$$E[f(L, X)] = \sum_i f(L, x_i) P(x_i), \text{ 这是一个关于 } L \text{ 的函数, 在 } P(x_i) \text{ 已知的情况下,}$$

$$\text{令 } \frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0, \text{ 可求得 } L_1^*$$

(2) 若 X 为连续型则

$$E[f(L, X)] = \int_0^\infty f(L, x) p(x) dx = \int_0^{\frac{L}{r}} f(L, x) p(x) dx + \int_{\frac{L}{r}}^\infty f(L, x) p(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{L}{r}} \left[\frac{A - \frac{c_2 r}{2} (x - \frac{L}{r})^2}{x + \frac{Q-L}{r}} \right] p(x) dx + \int_{\frac{L}{r}}^{\infty} \left[\frac{A + c_4 r (x - \frac{L}{r})}{x + \frac{Q-L}{r}} \right] p(x) dx$$

这是一个关于 L 的函数，令 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0$ ，即可求得 L_1^* 。

通过 Maple 求 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{dE[f(L, X)]}{dL} = & \int_0^{\frac{L}{r}} \frac{c_2 (x - \frac{L}{r}) p(x)}{x + \frac{Q-L}{r}} + \frac{[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q - Q_0)^2}{2r} - \frac{1}{2} c_2 r (x - \frac{L}{r})^2] p(x)}{[x + \frac{Q-L}{r}]^2 r} dx \\ & + \int_{\frac{L}{r}}^{\infty} \frac{c_4 p(x)}{x + \frac{Q-L}{r}} + \frac{[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q - Q_0)^2}{2r} + c_4 r (x - \frac{L}{r})] p(x)}{(x + \frac{Q-L}{r})^2 r} dx \quad (1.1) \end{aligned}$$

则最优订货点 L_1^* 就是代入 (1.1) 中使之值为 0 的 L 值。

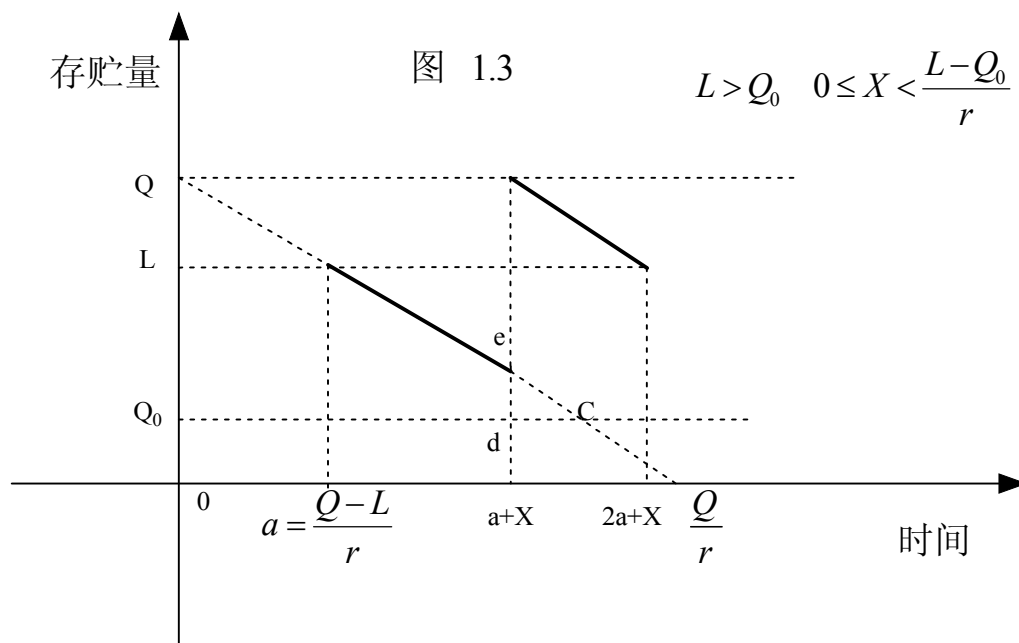
第二步：考虑 $L > Q_0$ 时一个周期内平均每天的费用 $f(L, X)$ 。

$$f(L, X) = \begin{cases} \frac{A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2) r}{2} (X - \frac{L - Q_0}{r})^2}{X + \frac{Q-L}{r}} & (0 \leq X \leq \frac{L - Q_0}{r}) \\ \frac{A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2}{X + \frac{Q-L}{r}} & (\frac{L - Q_0}{r} < X \leq \frac{L}{r}) \\ \frac{A + r (X - \frac{L}{r})}{X + \frac{Q-L}{r}} & (X > \frac{L}{r}) \end{cases}$$

$$\text{其中 } A = c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q - Q_0)^2}{2r}$$

现在来具体解释 $f(L, X)$ ：

(1) 当 $0 \leq X \leq \frac{L - Q_0}{r}$ 时



见图 1.3，同理考虑 $[0 \quad a + X]$ 的费用，其值为

$c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad d \quad e) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad d \quad a + X)$ 。易证：

$$c_1 + c_3 \times S(Q \quad Q_0 \quad d \quad e) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad d \quad a + X) =$$

$$c_1 + c_2 \times S(0, Q \quad \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q \quad Q_0 \quad c) - c_2 \times S(e \quad a + x \quad \frac{Q}{r}) - (c_3 - c_2) \times S(e \quad d \quad c)$$

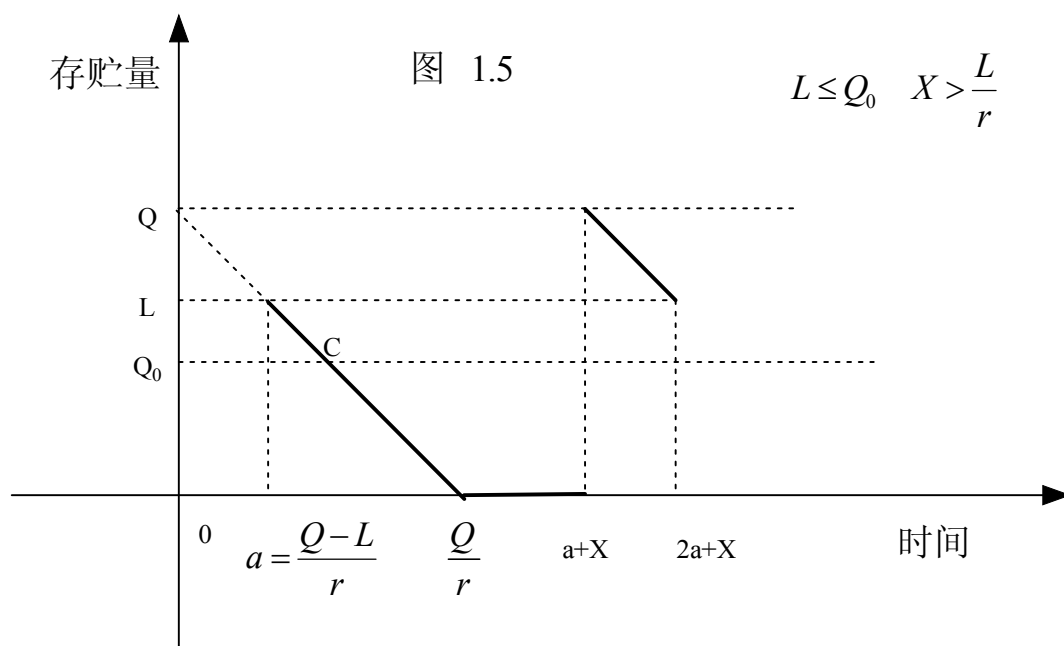
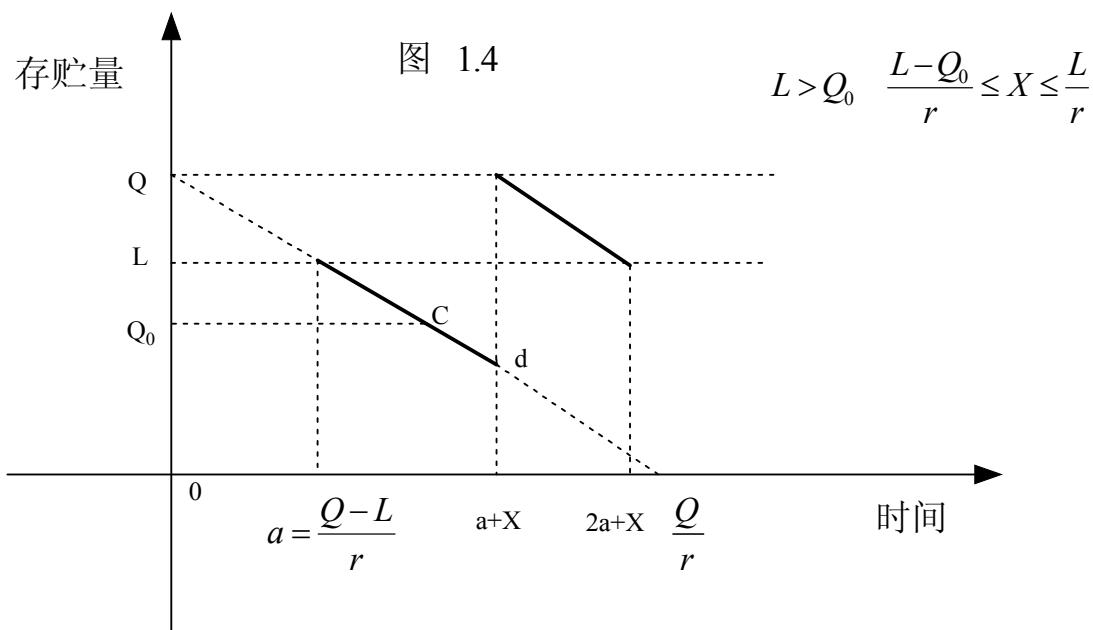
$$= A - c_2 \int_0^{\frac{L-X}{r}} r t d t - (c_3 - c_2) \int_0^{\frac{L-Q_0}{r} - X} r t d t$$

$$= A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2) r}{2} (\frac{L - Q_0}{r} - X)^2$$

所以这个周期内的平均每天的费用为
$$\frac{A - \frac{c_2 r}{2} (X - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2) r}{2} (\frac{L - Q_0}{r} - X)^2}{X + \frac{Q - L}{r}}$$

(2) 当 $\frac{L - Q_0}{r} < X \leq \frac{L}{r}$ 和 $X > \frac{L}{r}$ 时候的情况，参看图 1.4 和 1.5，类似于第一步

里的情形，即可得到其平均每天的费用函数。



要求 L_2^* 使得平均每天费用的期望值最小，即要满足：

$$E[f(L_2^*, X)] = \min E[f(L, X)] \quad (\forall L > Q_0)$$

(1) 若 X 为离散型：

$E[f(L, X)] = \sum_i f(L, x_i) P(x_i)$ ，这是一个关于 L 的函数，在 $P(x_i)$ 已知的情况下，

令 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0$ ，可求得 L_2^* 。

(2) 若 X 为连续型：

$$\begin{aligned}
E[f(L, X)] &= \int_0^\infty f(L, x)p(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} f(L, x)p(x)dx + \int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} f(L, x)p(x)dx + \int_{\frac{L}{r}}^\infty f(L, x)p(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} \frac{A - \frac{c_2 r}{2} (x - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2)r}{2} (\frac{L-Q_0}{r} - x)^2}{x + \frac{Q-L}{r}} p(x)dx \\
&\quad + \int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} \frac{A - \frac{c_2 r}{2} (x - \frac{L}{r})^2}{x + \frac{Q-L}{r}} p(x)dx + \int_{\frac{L}{r}}^\infty \frac{A + c_4 (x - \frac{L}{r})}{x + \frac{Q-L}{r}} p(x)dx
\end{aligned}$$

这是一个关于 L 的函数。

令 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0$ ，即可求得 L_2^* 。

通过 Maple 求 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL}$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{dE[f(L, X)]}{dL} &= \int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} \frac{[c_2 (x - \frac{L}{r}) - (c_3 - c_2)(\frac{L-Q_0}{r} - x)]p(x)}{x + \frac{Q-L}{r}} \\
&\quad + \frac{[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q-Q_0)^2}{2r} - \frac{1}{2}c_2 r (x - \frac{L}{r})^2 - \frac{1}{2}(c_3 - c_2)r(\frac{L-Q_0}{r} - x)^2]p(x)}{[x + \frac{Q-L}{r}]^2 r} dx \\
&\quad + \int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} \frac{c_2 (x - \frac{L}{r})p(x)}{x + \frac{Q-L}{r}} + \frac{[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q-Q_0)^2}{2r} - \frac{1}{2}c_2 r (x - \frac{L}{r})^2]p(x)}{[x + \frac{Q-L}{r}]^2 r} dx \\
&\quad + \int_{\frac{L}{r}}^\infty \frac{c_4 p(x)}{x + \frac{Q-L}{r}} + \frac{[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{(c_3 - c_2)(Q-Q_0)^2}{2r} + c_4 r (x - \frac{L}{r})]p(x)}{(x + \frac{Q-L}{r})^2 r} dx \quad (1.2)
\end{aligned}$$

则最优订货点 L_2^* 就是代入 (1.2) 中使之值为 0 的 L 值。

第三步：

$$L^* = \begin{cases} L_1^* & E[f(L_1^*, X)] \leq E[f(L_2^*, X)] \\ L_2^* & E[f(L_1^*, X)] > E[f(L_2^*, X)] \end{cases}$$

（二）问题 2：

2.1 缺货天数的数据分析

这里首先要找出缺货天数 X 服从何种分布，下面根据题目给出的到货天数的记录判断 X 服从的分布。

我们采用单样本的 **K—S** 检验，它是一种拟合优度的非参数检验方法，利用样本的数据推断总体是否服从某一理论分布，它适用于探索连续型随机变量的分布形态。它可以将一个变量的实际频数分布与正态分布、均匀分布和指数分布进行比较。

这里以商品三的缺货天数为例来检验 X 是否服从上述三种连续型分布。

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00002
N		61
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	1.9508
	Std. Deviation	1.16084
Most Extreme Differences	Absolute	.254
	Positive	.254
	Negative	-.206
Kolmogorov-Smirnov Z		1.981
Asymp. Sig. (2-tailed)		.001

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 2

		VAR00002
N		61
Uniform Parameters ^{a,b}	Minimum	1.00
	Maximum	6.00
Most Extreme Differences	Absolute	.570
	Positive	.570
	Negative	-.016
Kolmogorov-Smirnov Z		4.456
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

a. Test distribution is Uniform.

b. Calculated from data.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 3

		VAR00002
N		61
Exponential parameter. ^{a,b}	Mean	1.9508
Most Extreme Differences	Absolute	.401
	Positive	.129
	Negative	-.401
Kolmogorov-Smirnov Z		3.132
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

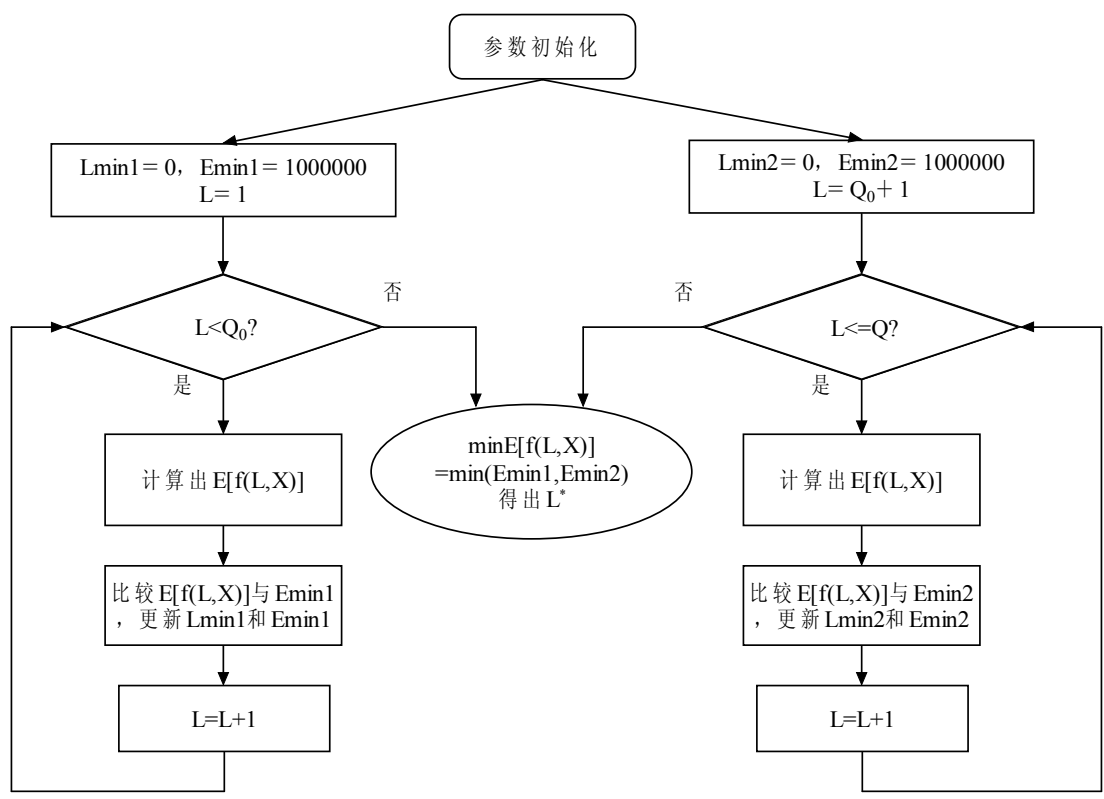
上面三张表分别体现的是检验缺货天数 X 是否服从正态分布、均匀分布和指数分布，上述三表中的相伴概率值分别为 0.001，0.000 和 0.000，均小于 0.05，说明 X 不服从上述三种连续型分布。

因此在这里我们就假定 X 不是连续型的随机变量，另一方面，当我们假定 X 是一离散型的随机变量时，可以大大简化实际问题的求解难度。

2.2 程序实现

考虑到问题 2 中 L 是正整数，当 $0 < L \leq Q_0$ ，则 L 可能的取值最多为 Q_0 个，则对每个 L 的可能取值求其 $E[f(L, X)]$ ，计算 Q_0 次就可得到 L_1^* 。这比 $\frac{dE[f(L, X)]}{dL} = 0$ ，来求得 L_1^* 更方便。

具体流程如下图：



其中 Lmin1 用来存储 L_1^* 的值, Emin1 用来存储 $E[f(L_1^*, X)]$ 的值; Lmin2 用来存储 L_2^* 的值, Emin2 用来存储 $E[f(L_2^*, X)]$ 的值。

对于商品一，我们通过连续的 36 次订货到达时间天数的数据得到：

到达天数 X	0	1	2	3	4	5	6	7
出现频率 P(X)	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

通过上述算法我们得出 $\min E[f(L, X)] = 3.3878$ ， $L^* = 36$ 。

对于商品二，我们通过连续的 43 次订货到达时间天数的数据得到：

到达天数 X	1	2	3	4	5
出现频率 P(X)	$\frac{2}{43}$	$\frac{23}{43}$	$\frac{12}{43}$	$\frac{5}{43}$	$\frac{1}{43}$

通过上述算法我们得出 $\min E[f(L, X)] = 4.7353$, $L^* = 45$ 。

对于商品三，我们通过连续的 61 次订货到达时间天数的数据得到：

到达天数 X	1	2	3	4	5	6
出现频率 P(X)	$\frac{27}{61}$	$\frac{20}{61}$	$\frac{8}{61}$	$\frac{3}{61}$	$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{61}$

通过上述算法我们得出 $\min E[f(L, X)] = 10.55$, $L^* = 34$ 。

(三) 问题 3

3.1 模型假设：

1. 各种商品的订货时间是相同的，而且到货时间也是相同的；
2. 供货量充足，保证到货后商品存贮体积能够补充到固定值 Q ，同时各种商品的存贮体积都能补充到各自的固定值 Q_i ；
3. 商品的每天的销售是一个连续的状态，而不考虑成离散的状态。

3.2 符号说明：

m ：商品的种类数

r_i ：第 i 种商品的销售速率

c_1 ：每次进货的订货费，与商品的数量和品种无关

c_{2i} ：第 i 种商品在使用自己的仓库存贮商品时，单位体积商品每天的存贮费用

c_{3i} ：第 i 种商品在使用租用的仓库存贮商品时，单位体积商品每天的存贮费用

c_{4i} ：第 i 种商品在缺货情况下，单位体积的商品每天的损失费用

X ：到货时间，是一个随机变量， m 种商品的交货时间都相同

Q_{0i} ：第 i 种商品自己的仓库的体积容量

Q_i ：第 i 种商品到货时存贮量补充到的固定体积

Q_0 ：自己的仓库用于存贮 m 种商品的总体积容量

Q : m 种商品到货时存贮量补充到的总固定体积

q : m 种商品的存贮量总体积

L : 订货点, 即 m 种商品订货时商品所剩下的存贮量总体积

L^* : 最优订货点, 即使总损失费用达到最低的订货点

L_i^* : 总损失费用达到最低时第 i 种商品的订货点, 且有 $L^* = \sum_{i=1}^m L_i^*$

$f_i(L_i, X)$: 第 i 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用, 是关于 L_i 和 X 的函数

$f(L, X)$: m 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用, 有 $f(L, X) = \sum_{i=1}^m f_i(L, X)$

$p(x)$: 到货时间 X 的概率密度函数

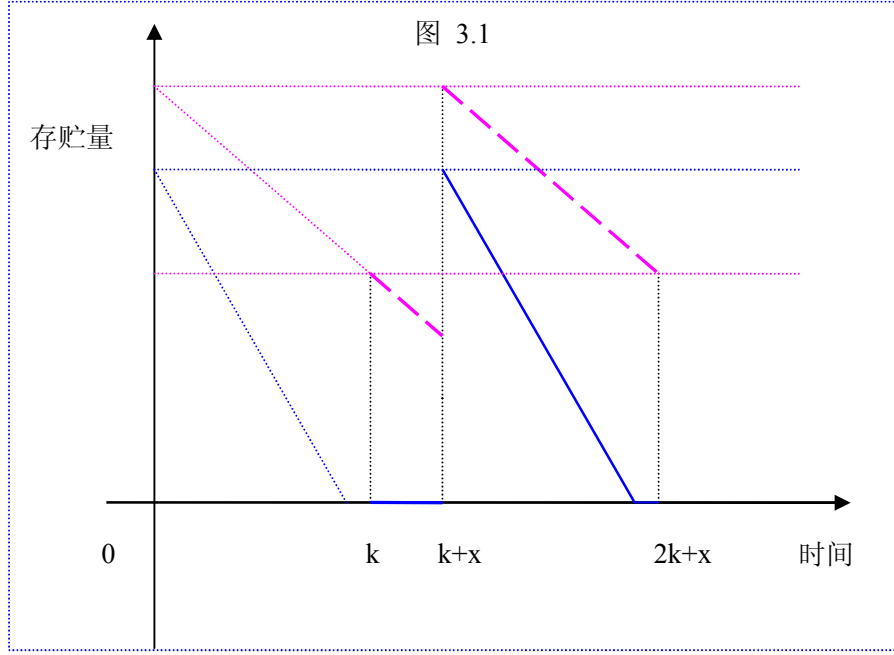
$E[f(L, X)]$: m 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用的期望

3.4 模型建立:

问题 3 是讨论多种商品需要订货的问题。但由于所有商品每次订货都是在同一时间从同一供应站订货, 所以可以以问题 1 中的单一商品存贮模型为基础, 建立多种商品的随机存贮模型。但必须注意, 问题 1 模型的考虑是以商品的数量为基准的, 而问题 3 的模型是以商品的体积为基准考虑。

先说明当 L 固定, Q_i 固定时候, 任意次当存贮量 q 降到 L 时即任意次开始订货的时候, 此时每种商品的存贮量 L_i 是固定不变的。

解释如下:



见图 3.1：设 $t=0$ 时所有商品的存贮量为 Q_i ，经过 k 时间，总商品存贮量首次降到 L ，此时各商品的存储量为 $L_i = \max(-r_i k + Q_i, 0)$ ，开始订货。过了 x 时间，货到，各商品的存贮量又为 Q_i ，则以 x 时刻为起点，经过 k 时间总商品的存贮量将首次到达 L ，此时各商品的存储量为 L_i ，由图易知对于同一商品 L_i 不变。

因为各种商品的订货时间是相同则可得：

$$\begin{cases} \frac{Q_1 - L_1}{v_1 r_1} = \frac{Q_2 - L_2}{v_2 r_2} = \dots = \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} = k \quad (\text{当 } L_i > 0 \text{ 时}) \\ \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} \leq k \quad (\text{当 } L_i = 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$\text{所以 } k = \max \left(\frac{Q_i - L_i}{r_i} \right) \quad 1 \leq i \leq m$$

针对 L_i 的不同取值范围，分三情况进行讨论。

情况 1：当 $L_i = 0$ 时，其费用 $f_i(L_i, X)$ 函数如下：

$$f_i(L_i, X) = \frac{\frac{c_{2i} Q_i^2}{2v_i r_i} + \frac{(c_{3i} - c_{2i})(Q_i - Q_{0i})^2}{2v_i r_i} + c_4 v_i r_i X}{k + X}$$

情况 2：当 $L_i \leq Q_{0i}$ 时，参照第一个问题，其费用 $f_i(L_i, X)$ 函数如下，

$$f_i(L_i, X) = \begin{cases} \frac{A_i + c_{4i}v_i r_i (X - \frac{L_i}{v_i r_i})}{X + \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i}} & X > \frac{L_i}{v_i r_i} \\ \frac{A_i - \frac{1}{2}c_{2i}v_i r_i (X - \frac{L_i}{v_i r_i})^2}{X + \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i}} & X \leq \frac{L_i}{v_i r_i} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{其中 } A_i = c_1 + \frac{c_{2i}Q_i^2}{2v_i r_i} + \frac{(c_{3i} - c_{2i})(Q_i - Q_{0i})^2}{2v_i r_i}$$

情况 2: 当 $L_i > Q_{0i}$ 时:

$$f_i(L_i, X) = \begin{cases} \frac{A_i - \frac{c_{2i}v_i r_i}{2}(X - \frac{L_i}{v_i r_i})^2 - \frac{(c_{3i} - c_{2i})v_i r_i}{2}(\frac{L_i - Q_{0i}}{v_i r_i} - X)^2}{X + \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i}} & 0 \leq X \leq \frac{L_i - Q_{0i}}{v_i r_i} \\ \frac{A_i - \frac{c_{2i}v_i r_i}{2}(X - \frac{L_i}{v_i r_i})^2}{X + \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i}} & \frac{L_i - Q_{0i}}{v_i r_i} < X \leq \frac{L_i}{v_i r_i} \\ \frac{A_i + c_{4i}v_i r_i (X - \frac{L_i}{v_i r_i})}{X + \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i}} & X > \frac{L_i}{v_i r_i} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f(L, X) = \sum_{i=1}^m f_i(L_i, X)$$

则原题化为求 L^* 满足:

$$E[f(L^*, X)] = \min E[f(L, X)] = \int_0^\infty \sum_{i=1}^m f_i(L_i, x) p(x) dx$$

且这个多种商品的随机存贮模型同时满足下列几个约束条件:

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^m Q_{0i} = Q_0 \\ \sum_{i=1}^m Q_i = Q \\ \sum_{i=1}^m L_i = L \\ \frac{Q_1 - L_1}{v_1 r_1} = \frac{Q_2 - L_2}{v_2 r_2} = \dots = \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} = k \quad (\text{当 } L_i > 0 \text{ 时}) \\ \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} \leq k \quad (\text{当 } L_i = 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

但由于 X 的分布未知，同时 Q_i 和 Q_{0i} 都是未知量；而且在问题 1 的单品种存贮模型中我们知道 L^* 的求解是十分困难的。所以对于多品种商品的存贮问题，直接解上面的模型是十分困难的。同时 $L_i = 0$ 情况的存在，增加了其求解难度。因此在实际问题的解决中，我们可以用上面的模型作为基础，并假设 $L_i > 0$ 对任意的 i 都成立，即排除 $L_i = 0$ 的情况，通过计算机编程，建立类似于问题 2 中的合适算法求解上述模型。在问题 4 的解决中我们可以看到这样的解题思路。

（四）问题 4：

4.1 问题分析

由于货物到达商场的的时间 X 是整数，所以可以认为 X 服从 1 天到 3 天之间的均匀分布实际上是一种离散分布，等价于 $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}$ 。问题 2 中原来的商品单价是以商品的个数为单位考虑的；而要利用问题 3 中的多品种商品存贮模型，则必须以商品的体积为单位进行考虑，所以我们对问题 2 中损失费用的单价进行转化处理，将它除以每单位商品的体积得到模型所需要的单价，如下表：

	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
商品一 ($i=1$)	0.2	0.4	19
商品二 ($i=2$)	0.75	1	37.5
商品三 ($i=3$)	0.6	0.8	12.5

由于每种商品的个数是有限的，所以我们可以参照问题 2 中的求解办法，采用遍历搜索算法。但是由于 Q_i 和 Q_{0i} 都是未知量，这对于我们利用 (3.1) 以及 (3.2) 进行遍历搜索的求解增加了很大难度。所以我们可以对 Q_i 和 Q_{0i} 也进行遍历搜索，对于搜索的每一个 Q_i 和 Q_{0i} ，作为已知参数，然后利用问题 2 的模型求解 L^* 。

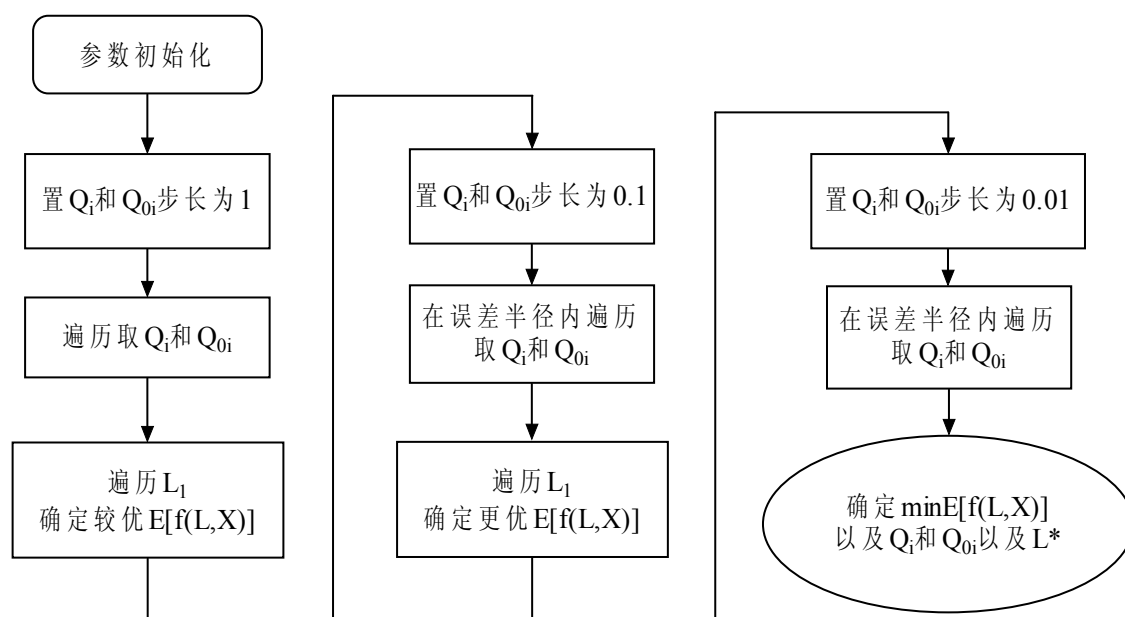
4.2 优化的 Q_i 和 Q_{0i} 的遍历搜索算法：

在这个问题中， Q_i 和 Q_{0i} ($i = 1, 2, 3$) 总共有六个参数，那么在算法中就起码有六次嵌套的循环。 $Q_i < Q = 10$ ，所以如果以 0.01 为循环的步长，那么光一个 Q_i 的搜索就有 1000 次循环， Q_i 和 Q_{0i} 总共的循环次数大约 10 的 36 次方，运算的次数和时间是非常惊人的，也让计算机无法承受。因此，我们对遍历搜索算法进行改进。先使步长为 1，则总循环次数不超过 10 的 6 次方，通过对 Q_i 和 Q_{0i} 进行遍历，然后再遍历 L_i^* ，求得较优的 $E[f(L, X)]$ 以及确定对应的 Q_i 和 Q_{0i} 。由于是以步长 1 进行遍历搜索，所以 Q_i 和 Q_{0i} 的误差半径不超过 1。然后我们再取步长为 0.1，对 Q_i 和 Q_{0i} 在 1 的误差半径的范围内进行遍历搜索，则每一重的循环次数不超过 20，求得更优的 $E[f(L, X)]$ 以及确定对应的 Q_i 和 Q_{0i} 。由于第二次是以步长 0.1 进行遍历搜索，所以 Q_i 和 Q_{0i} 的误差半径不超过 0.1。最后又以步长 0.01 对 Q_i 和 Q_{0i} 在 0.1 的误差半径的范围内进行遍历搜索，同样每次循环次数不超过 20，这样我们最后求得了 $\min E[f(L, X)]$ 以及确定对应的 Q_i ， Q_{0i} 以及 L^* 。

4.3 L^* 的遍历搜索求解：

在进行 Q_i 和 Q_{0i} 的每一次遍历取值以后，我们可以对每一个 L_i 进行遍历求解。因为我们有等式 $\frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} = k \quad i = 1, 2, \dots, m$ ，所以我们实际上只需要对 L_1 进行遍历，而 L_2 和 L_3 都可以通过这个等式确定。通过循环比较可以求得最优解 $\min E[f(L, X)]$ 以及 L^* 。

大致的算法流程如下图：



通过 matlab 编程求解，最后解得 $E[f(L^*, X)] = \min E[f(L, X)] = 17.494$ ，
 $L^* = 7.3333$ ， $L_1^* = 1.55$ ， $L_2^* = 1.8$ ， $L_3^* = 3.9833$ ， $Q_1 = 2.05$ ， $Q_2 = 2.30$ ， $Q_3 = 5.65$ ，
 $Q_{01} = 1.27$ ， $Q_{02} = 1.68$ ， $Q_{03} = 3.05$ 。

(五) 问题 5:

5.1 问题假设:

为了方便讨论，我们只考虑一种商品的随机存贮模型。并在问题 1 的基础上补充了以下假定：

1. 订货情况 $c_1 = c(t)$ ，即 c_1 是一个与 t 有关的函数，而且具有周期性，周期为 T 。
2. 一般来说，商品的销售速率 $\{R_t\}$ 是一个随机的马氏链过程，并且同样具有周期性，周期也为 T ；因为 $\{R_t\}$ 具有马氏性，所以是一个在周期 T 内时间、状态均为离散的随机转移过程。
3. X 的概率分布 $P_X(x)$ 是离散的。

5.2 模型建立:

因为 $\{R_t\}$ 是马氏过程，所以 $P(R_{t+1} = r_{t+1} | R_1 = r_1, \dots, R_t = r_t) = P(R_{t+1} = r_{t+1} | R_t = r_t)$ ，

即 R_t 的分布只与上一时刻的 R_t 取值有关。

因为 R_t 的取值状态是离散的，所以 R_t 的分布是离散型的，并且取值的集合有限，设为 R 。则对于每一个 t ， R_t 的分布为 $P_{R_t}(r)$ 。

由于总损失费用与 c_1 有关，而 $c_1 = c(t)$ 是跟时间 t 有关的；同时总损失费用也和 R_t 有关，所以可以设总损失费用函数为 $f_t(L, R_t, X)$ 。

首先对 $f_t(L, R_t, X)$ 关于 X 求期望 $E_X[f_t(L, R_t, X)] = \sum_{x=0}^{\infty} f_t(L, R_t, x)P_X(x)$ ，再对 $E[f_t(L, R_t, X)]$ 关于 R_t 求期望 $E_{R_t}(E_X[f_t(L, R_t, X)])$ ，再令 $g(L) = \min_{t \in T} E_{R_t}(E_X[f_t(L, R_t, X)])$ 。则模型的求解就化为求 L^* 使得 $g(L^*) = \min g(L)$ 。

当然，这一模型只是建立了一个基本的理论框架基础，具体模型的建立必须结合实际的问题，同时在模型成功建立的例子上能否求解出 L^* 还必须结合问题的复杂性以及有关参数的分布和取值。

三、模型的评价和推广

本文建立了一个关于随机存贮的理论模型，为便于实际问题的求解，还另外给出了一个遍历搜索算法。前者具有一定的理论基础，后者采用前者的思想，全局寻优，给出了实际问题的最优解。在求解问题 2 时，由于遍历搜索的可行性，获得的是全局最优解。而在采用该算法在解决问题 4 时，由于商品品种较多，采取全局遍历搜索的算法会十分耗时而且难以实现，所以采用了修正步长的优化的遍历搜索算法，所以最终求得的结果是一接近全局最优的近似解，其结果的误差小于 0.01。这一方法可以推广到少量品种的随机存贮管理的情况。但是这一算法在随机存贮的商品品种较多的情况下运算量将非常大，要根据实际情况进行修改。

参考文献:

- 【1】**陈有禄 罗秋兰. 仓库容量有限条件下的一类存贮管理模型. 数学的实践与认识, 2004. 6
- 【2】**周宏. 订货点决策模拟研究. 系统仿真学报, 2004. 1
- 【3】**杜世田. 多品种随机存贮模型的存贮策略. 山东工业大学学报 2001. 2
- 【4】**陈同英. 原木随机存贮策略的最优化问题. 运筹与管理, 2002. 1
- 【5】**姜启源著. 数学模型 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2002. 6
- 【6】**钱敏平 龚光鲁著. 随机过程论. 北京: 北京大学出版社, 1992. 10

附录：

程序代码：

```
%求解问题 2 商品一
prob=[2/36 4/36 5/36 15/36 5/36 3/36 1/36 1/36];
r=12;
c1=10;
c2=0.01;
c3=0.02;
c4=0.95;
Q0=40;
Q=60;
A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);
Emin1=1000000;
Lmin1=0;
for L=1:Q0
    sum=0;
    for X=0:length(prob)-1
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin1)
        Lmin1=L;
        Emin1=sum;
    end;
end;

Emin2=1000000;
Lmin2=0;
for L=Q0+1:Q
    sum=0;
    for X=0:length(prob)-1
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
end;
```

```
    if (sum<Emin2)
        Lmin2=L;
        Emin2=sum;
    end;
end;
```

```
if (Emin1<Emin2)
    Emin=Emin1;
    Lmin=Lmin1;
else
    Emin=Emin2;
    Lmin=Lmin2;
end;
```

```

%求解问题 2 商品二
prob=[2/43 23/43 12/43 5/43 1/43];
r=15;
c1=10;
c2=0.03;
c3=0.04;
c4=1.5;
Q0=40;
Q=60;
A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);
Emin1=1000000;
Lmin1=0;
for L=1:Q0
    sum=0;
    for X=1:length(prob)
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin1)
        Lmin1=L;
        Emin1=sum;
    end;
end;

Emin2=1000000;
Lmin2=0;
for L=Q0+1:Q
    sum=0;
    for X=1:5
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else if (X<=L/r & X>(L-Q0)/r)
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2-(c3-c2)*r/2*((L-Q0)/r-X)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        end;
    end;
    sum=sum+temp;
end;
if (sum<Emin2)

```



```
        Lmin2=L;  
        Emin2=sum;  
    end;  
end;  
  
if (Emin1<Emin2)  
    Emin=Emin1;  
    Lmin=Lmin1;  
else  
    Emin=Emin2;  
    Lmin=Lmin2;  
end;
```

%求解问题 2 商品三

prob=[27/61 20/61 8/61 3/61 2/61 1/61];

r=20;

c1=10;

c2=0.06;

c3=0.08;

c4=1.25;

Q0=20;

Q=40;

$A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);$

Emin1=1000000;

Lmin1=0;

for L=1:Q0

 sum=0;

 for X=1:length(prob)

 if (X>L/r)

$temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);$

 else

$temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);$

 end;

 sum=sum+temp;

 end;

 if (sum<Emin1)

 Lmin1=L;

 Emin1=sum;

 end;

end;

Emin2=1000000;

Lmin2=0;

for L=Q0+1:Q

 sum=0;

 for X=1:6

 if (X>L/r)

$temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);$

 else if (X<=L/r & X>(L-Q0)/r)

$temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);$

 else

$temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2-(c3-c2)*r/2*((L-Q0)/r-X)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);$

 end;

 end;

 sum=sum+temp;

end;

```
    if (sum<Emin2)
        Lmin2=L;
        Emin2=sum;
    end;
end;
```

```
if (Emin1<Emin2)
    Emin=Emin1;
    Lmin=Lmin1;
else
    Emin=Emin2;
    Lmin=Lmin2;
end;
```

```

%求解问题 4
%参数初始化
r=[12 15 20];
%c 矩阵 行: c1,c2,c3,c4; 列: 商品 1, 2, 3
c=[10 10 10;
    0.01 0.03 0.06;
    0.02 0.04 0.08;
    0.95 1.50 1.25];
v=[0.05 0.04 0.1];
Q=zeros(1,3);
Q0=zeros(1,3);
L=zeros(1,3);
EL=zeros(1,3);
EQ=zeros(1,3);
EQ0=zeros(1,3);
EK=zeros(1,3);
LL=0;
TQ0=6;
TQ=10;

%X 的分布列
prob=[1/3 1/3 1/3];

%程序开始
Emin=1000000000;
Lmin=0;
for Q1=1:1:10 %遍历 Q1
    Q(1)=Q1;
    for Q2=1:1:TQ-Q(1) %遍历 Q2
        Q(2)=Q2;
        for Q3=1:1:TQ-Q(1)-Q(2) %遍历 Q3
            Q(3)=Q3;
            for Q01=1:1:min(6,Q(1)) %遍历 Q0_1
                Q0(1)=Q01;
                for Q02=1:1:min([6,Q(2),TQ0-Q0(1)]) %遍历 Q0_2
                    Q0(2)=Q02;
                    for Q03=1:1:min([6,Q(3),TQ0-Q0(1)-Q0(2)]) %遍历 Q0_3
                        Q0(3)=Q03;
                        for K1=1:10:min(200,fix(Q(1)/v(1))) %遍历商品一的数目
                            L(1)=K1*v(1);
                            for K2=1:10:min(fix((Q-L(1))/v(2)),fix(Q(2)/v(2))) %遍历商品二的数目
                                L(2)=K2*v(2);
                                for K3=1:10:min(fix((Q-L(1)-L(2))/v(3)),fix(Q(3)/v(3))) %遍历商品三的数目
                                    L(3)=K3*v(3);
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```
LL=L(1)+L(2)+L(3);
total=0; %初始化期望
for i=1:3
    sum=0;

    A=c(1,i)+c(2,i)*Q(i)^2/(2*v(i)^2*r(i))+(c(3,i)-c(2,i))*(Q(i)-Q0(i))^2/(2*v(i)^2*r(i));
    for X=1:3
        if (X>L(i)/(v(i)*r(i)))

            temp=(A+c(4,i)*r(i)*(X-L(i)/(v(i)*r(i))))/(X+(Q(i)-L(i))/(v(i)*r(i)))*prob(X);
        else
            temp=(A-c(2,i)*r(i)/2*(X-L(i)/(v(i)*r(i)))^2)/(X+(Q(i)-L(i))/(v(i)*r(i)))*prob(X);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    total=total+sum;
end;
if total<Emin
    EQ0=Q0;
    EQ=Q;
    EL=L;
    Emin=total;
    EK(1)=K1;
    EK(2)=K2;
    EK(3)=K3;
    Lmin=LL;
end;
end;
end;
end;
end;
end;
end;
```