

**摘要：** 本文把研究生录取分解为师生间的评价问题和师生间配对最优化的问题。建立了师生相互评价的指标体系和量化评价指标的计算模型，以满意度计量评价结果，提出了相互满意度的概念，建立了使师生配对达到整体总满意度最大的整数规划优化模型。根据建立的模型，解决了具体的研究生录取问题。所建立的模型具有较强的实用性、可操作性和可扩展性。

**关键词：** 相互满意度；评价模型；配对优化模型；整数规划

## 1. 引言

在研究生录取工作中，根据素质教育和培养高素质合格人才的要求，目前各学校都在录取的过程中采用了考试成绩与复试成绩相结合的做法。一般是根据初试的成绩，在达到国家和学校分数线的学生中从高分到低分排序，按 1:1.5 的比例选择进入复试的名单，由专家组的多名专家根据自己的看法和偏好，对所有参加复试学生的专业知识面、思维的创造性、灵活的应变能力、文字和口头的表达能力和外语水平等综合素质给出相应的评价，再由主管部门综合所有专家的意见和学生的初试成绩结合学生与导师的双向选择，确定录取名单，为每名被录取的研究生配备一位导师。（具体的问题见“2004 年全国部分高校研究生数学建模竞赛”d 题）

本文的目的就是研究如何合理地录取研究生以及合理地把被录取研究生与导师进行配对的问题。

## 2. 问题分析

在研究生录取的问题中，参加复试的研究生和导师是问题的参与者，即在录取的过程中选择和被选择；主管部门是仲裁，即对所有参与者的选择进行协调，令整体的选择达到最优。

导师在选择学生的时候，需要考虑学生的许多因素，如学生专业、学生成绩、自己对学生的偏好等；而学生在选择导师的时候也需要考虑许多因素，如导师的专业、导师的学术水平、自己是否符合导师的要求等，因此导师和学生之间进行选择的问题是多属性的综合评价问题。

由于有多名研究生、多名导师参与选择，有可能多名研究生选择同一位导师，也有可能多位导师选择了同一名研究生，而每位导师允许带的研究生是有限的，且每名研究生只能有一位为主的导师，因此必须把所有导师和被录取的研究生作为一个整体来考虑，使导师和学生的配对达到总体满意度最大，这是一个单目标决策优化的问题。

## 3 模型的建立

多属性评价的核心是建立评价指标体系和评价指标值的量化计算模型。在建立指标体系时，要考虑科学性、整体性、简要性、独立性、可测性等原则，使评价结果合理且可操作。为量化导师对学生的评价和学生对导师的评价，引入一个概念——满意度。满意度是指在研究生录取过程中导师选择学生或学生选择导师时，其意愿得到满足或结果符合心愿的程度，是评价的量化指标值。

### 3.1 导师对学生的评价模型

导师对学生的评价，需要考虑学生的初试成绩、复试成绩、专业志愿，而复试成绩又包括了灵活性、创造性、知识面、表达力、外语水平等，这样就构成了一个图 3—1 所示的层次结构指标体系。

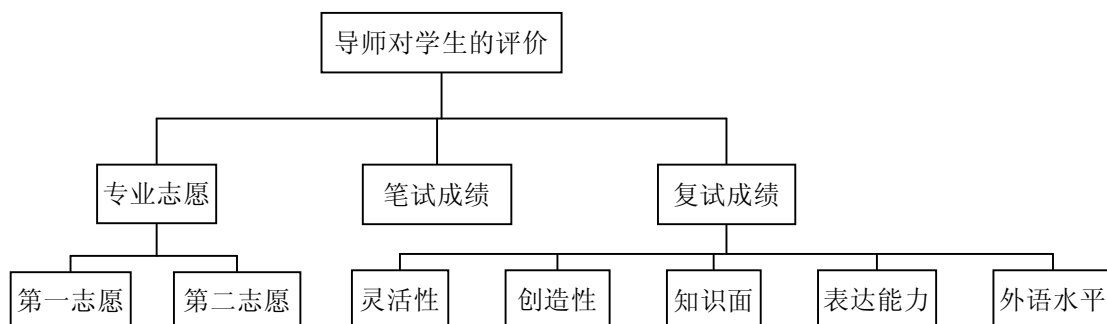


图 1 学生综合评价的层次结构指标体系

这个指标体系较全面反映了学生的综合素质，也充分体现了导师从自己的角度出发对学生各个方面进行的综合评价。初试成绩表现了综合素质中学习能力，复试成绩表现其他五种素质，专业志愿表现了因填报志愿而对录取产生的影响：导师多的专业录取的研究生多、填报学生多的专业竞争强度大。

具体的计算采用加权求和的方法：

设  $b$  为学生的初试成绩， $x$  为复试成绩， $y$  为导师期望值， $x_j$  为学生的复试成绩综合素质的第  $j$  项， $y_j$  为导师对学生第  $j$  项专长的要求， $d$  为学生填报志愿情况， $w$  是指标权重集， $f$  为导师对学生的满意度，则有：

$$f(ts) = f(w, b, x, y, d)$$

可以简单地把初试成绩  $b$  转化为  $(0,1)$  区间上的值，加上权重系数  $w_b$ ，则初试成绩满意度为  $w_b b$ ；把学生的复试成绩和导师对复试期望值转化为  $(0,1)$  区间上的值，加上权重系数

$w_{xyj}$ ，则复试满意度为  $\sum_j^5 w_{xyj} (x_{ij} - y_{kj})$ ；导师对学生填报志愿的满意度可以如下定义：

$$d_{kj}^{(1)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{即填报第一志愿的为 } 1, \text{没有填报的为 } 0, \text{同样 } d_{kj}^{(2)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{即填报第二志愿的}$$

为 1，没有填报的为 0，则  $m_d = \sum_k \sum_j (w_1 d_{kj}^{(1)} + w_2 d_{kj}^{(2)})$  其中  $w_1 > w_2$ 。这样，第  $k$  个导师对第  $i$  个学生的满意度可以用以下公式来计算：

$$f(t_k s_i) = w_b b_i + \sum_j^5 w_{xyj} (x_{ij} - y_{kj}) + \sum_j (w_1 d_{kj}^{(1)} + w_2 d_{kj}^{(2)})$$

根据导师对学生的评价，可以定出所有学生得分情况，按照得分从高到低的原则，可以选择被录取的学生。

### 3.2 学生对导师的评价模型

学校在确定研究生导师的过程中要考虑学生申报志愿的情况。学生申报志愿是选择自己喜欢的专业，学生对某门专业的选择反应了该专业的热门程度，可以把专业方向作为选择研究生导师的一项指标值。因此，学生评价导师主要考虑两个因素：专业的热门程度和导师的专业水平，而导师的专业水平包括发表论文数、论文检索数、编（译）著作数、科研项目数等，其构成的指标体系如下图所示：

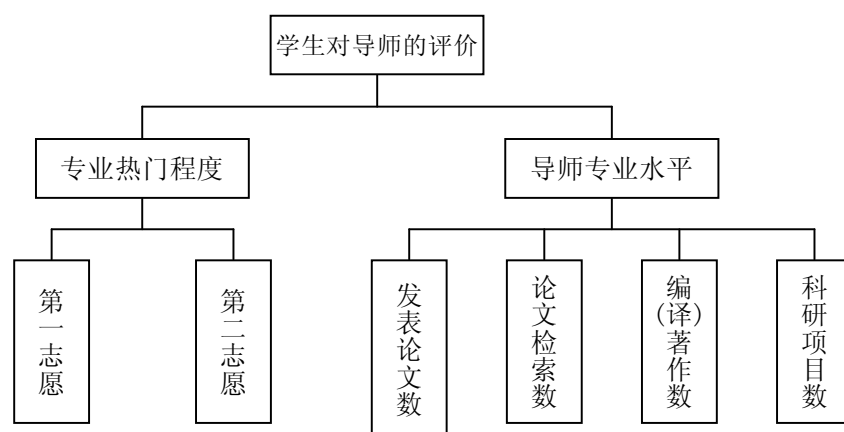


图 2 导师综合评价的指标体系

具体的计算采用加权求和的方法：

设  $v$  为导师专业热门程度， $t$  为导师学术能力， $w$  是指标权重集， $f$  为学生对导师的满意度，则有： $f(st) = f(w, v, t)$ 。

通过统计学生填报各个专业第一志愿或第二志愿填报的人数，设第一志愿的权重值是  $p_1$ ，第二志愿的权重值为  $p_2$ ，采用加权求和法得到该专业的热门程度值，设第  $i$  志愿下专业  $j$  的人数为  $r_{ij}$ ，设专业  $j$  的指标值为  $v_j$ ，

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^2 p_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p_i r_{ij}}$$

把导师的专业水平第  $j$  项指标转化为(0,1)区间上的值  $t_j$ ，加上权重系数  $w_j$ ，则导师的专业水平为  $t = \sum w_j t_j$ 。这样,第  $k$  个学生对第  $i$  个导师的满意度可以用以下公式来计算：

$f(s_k t_i) = w_v v_i + w_t t_i$ 。根据学生对导师的评价，可以得到所有导师的得分情况，按照得分从高到低的原则进行导师的选择。

### 3.3 导师与学生配对的优化模型

导师与学生配对的主要依据是师生间双向选择的意向，即包括导师对学生的满意度和学生对导师的满意度两个方面。单方面的满意度高，不能算是合理的配对，只有当两者彼此的满意度都高的时候，才是一个较佳的配对，故师生间双向选择的意向是两个单方面满意度的乘积。若 A 对 B 的满意度为  $m_{AB}$ ，B 对 A 的满意度为  $m_{BA}$ ，则 A 和 B 的相互满意度  $m$  定义如下： $m = m_{AB} * m_{BA} = m_{BA} * m_{AB}$ 。多名导师与多名学生之间的最佳配对就是使所有参与者的总相互满意度最大。这里引入满意度矩阵和满意度矩阵的乘法。

**定义 1 满意度矩阵** 若有  $m$  个导师和  $n$  个学生，其中第  $i$  个导师对第  $j$  个学生的满意度为  $f(ts)_{ij}$ ，则构成成的  $m \times n$  阶矩阵就称为  $m$  个导师对  $n$  个学生的满意度矩阵为  $F(st)_{m \times n}$ ；同样，若第  $j$  个学生对第  $i$  个导师的满意度为  $f(st)_{ji}$ ，则构成的  $n \times m$  阶矩阵就称为  $n$  个学生对  $n$  个导师的满意度矩阵为  $F(st)_{n \times n}$ 。

**定义 2 满意度矩阵的乘法** 若  $n$  个导师对  $n$  个学生的满意度矩阵为  $M_{n \times n}$ ,  $n$  个学生对  $n$  个导师的满意度矩阵为  $N_{n \times n}$ , 则这  $n$  个导师和  $n$  个学生的相互满意度矩阵为  $P_{n \times n} = M_{n \times n} * N_{n \times n}$ , 其中,  $p_{ij} = m_{ij} * n_{ji}$ 。

根据学生和导师的情况可以分别计算导师对学生的满意度矩阵和学生对导师的满意度矩阵, 进而可以确定导师与学生相互满意矩阵, 引入导师与学生配对矩阵  $X$ , 矩阵中元素是某个导师对某个学生是否配对的状态, 元素的取值如下:

$$\text{引入 0-1 变量 } x_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ 导师选择了 } j \text{ 学生} \\ 0 & i \text{ 导师未选择 } j \text{ 学生} \end{cases}$$

设  $Z$  为导师与学生的总相互满意度。则:

$$Z = P_{n \times n} \bullet X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij}; \quad (1)$$

这样导师与学生配对决策目标函数为:

$$F(Z) = \text{Max}(Z) \quad (2)$$

$$\text{使得 } \sum_{i=1}^n x_{ij} = p, j=1, 2, \dots, n \quad (3), \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = q, i=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

其中, 式(3)表示第  $j$  个学生能选择  $p$  个导师, 式(4)表示第  $i$  个导师能选择  $q$  个学生。

#### 4. 应用

在具体的问题中 (见 “2004 年全国部分高校研究生数学建模竞赛” d 题), 需要对各种原始数据进行预处理, 获取各项指标的经验权重系数, 应用以上的评价模型, 可以计算出导师对学生的满意度矩阵和学生对导师的满意度矩阵, 进而得到学生和导师的相互满意度矩阵:

表 1 导师和学生的相互满意度矩阵

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
S1	0.1125	0.0828	0.1207	0.5791	0.5099	0.2111	0.2151	0.1685	0.1109	0.0915
S2	0.2791	0.2272	0.3109	0.0958	0.0770	0.5295	0.5239	0.4458	0.1144	0.0920
S3	0.5824	0.5012	0.6270	0.2073	0.1752	0.0591	0.0632	0.0424	0.0901	0.0748
S4	0.0948	0.0680	0.0998	0.2161	0.1832	0.4903	0.4857	0.4154	0.0939	0.0778
S5	0.0874	0.0624	0.0917	0.0693	0.0562	0.1802	0.1826	0.1413	0.5863	0.5247
S6	0.1035	0.0746	0.1092	0.0828	0.0674	0.5056	0.5065	0.4295	0.2653	0.2303
S7	0.5933	0.5084	0.6445	0.0766	0.0605	0.1883	0.1946	0.1473	0.0923	0.0748
S8	0.0880	0.0668	0.0971	0.5338	0.4626	0.0599	0.0614	0.0404	0.2537	0.2097
S9	0.0833	0.0605	0.0860	0.0668	0.0520	0.4644	0.4761	0.3951	0.2368	0.2010
S10	0.2312	0.1793	0.2506	0.0599	0.0480	0.0518	0.0548	0.0336	0.5659	0.5101

这个矩阵的每一行是以导师为主导, 每一列是以学生为主导。

设每名学生最多有一位导师, 而导师的最多带两名学生。此时, 导师与学生的配对模型转化为带约束条件的整数规划问题。在求解这个带约束条件的整数规划问题时, 我们选择专门用于求解数学规划问题的数学软件 LINDO。经 LINDO 软件运算 (在 LINDO 软件中的求解过程见附录), 可以解得  $F(Z) = \text{Max}(Z) = 5.539$

根据此时的解  $X$  得到如下的导师和学生配对表 (1 表示相互配对, 0 表示没有相互配对)。

表 2 导师和学生配对表

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
S1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
S2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
S3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
S4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
S5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
S7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
S8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
S9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
S10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

由此确定导师与学生的最优配对方案为：

(S1,T4), (S2,T6), (S3,T3), (S4,T6), (S5,T9)  
(S6,T7), (S7,T3), (S8,T4), (S9,T7), (S10,T9)

## 5. 总结

本文在对对研究生录取的问题进行了深入的分析基础上,建立了导师对研究生的评价模型、研究生对导师的评价模型以及导师与学生配对的优化模型,并应用这些模型解决了具体研究生录取问题。这样的模型具有一定的通用性,可以用于解决其他的相互配对问题或者过程互动的评估问题,如员工招聘、员工测评等,具有较大的推广价值。

# Models of Optimization In Graduate Students' Matriculating

Xu Haohua, Dong Zhiming, Tang Zhiwu, Pan Gaotian, Guo Qisheng

(Academy of Armored Forces Engineering, 100072)

**Abstract:** Based on deeply analyzing, this paper takes the matriculating of graduate students as two questions: how to evaluate the students and the teachers and how to optimize the choices between the students and the teachers. This paper established indexes of evaluating between the students and the teachers and gave their calculating models. The satisfied degree is used to measure the evaluating results and the satisfied degree between each other is used to measure the choice between the students and the teachers. The optimizing model aims to get maximal satisfied degree between all the students and the teachers. Based on these models, a actual question of graduate students' matriculating was resolved. It shows that these models can be easily used and extended.

**Keywords:** the satisfied degree between each other; evaluation models;  
optimizing model of choices; integer programming