

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 基于最优参数搜索算法的 VCSEL 激光器仿真模型

摘 要：

随着经济和互联网技术的快速发展，“光纤宽带入户”需求激增，光纤传输中的激光信号更适合未来高速率的传输网络。VCSEL 作为光纤通信普遍使用的核心器件，对其特性尤其是在下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型研究具有重要的理论和现实意义。

本文遵循“物理建模—参数拟合—误差分析—模型改进”的总体研究思路，在结合机理分析、最小二乘法等处理方式的基础上，从功率和电流、环境温度等的关系角度，建立了解决问题 1 的基于 L-I 模型的参数拟合优化模型、基于电压与电流函数关系的 L-I 改进模型和 VCSEL 正常工作最高环境温度求取的隐式优化模型；基于对问题 1 的结果精度进行分析，建立了解决问题 2 的考虑有效区电流温变影响的 L-I 模型和相应的参数拟合优化模型；从影响激光器带宽的因素出发，建立了基于公认的 VCSEL 带宽模型的解决问题 3 的 VCSEL 带宽模型的参数拟合多目标模型和基于 VCSEL 带宽模型的带宽响应曲线数据求取和分析模型；基于获得的增加带宽的方案，建立了解决问题 4 的基于速率方程的等效电路模型。设计了各种模型的最优参数组合求解算法，并利用 MATLAB 软件编程计算，得

到了各个模型在不同条件下的仿真曲线；对仿真结果进行残差和敏感性等分析，获得了不同因素对 VCSEL 性能的影响规律。

针对问题 1：基于现有 L-I 模型，结合物理学意义，建立参数拟合模型，应用遗传算法实现了参数组 $(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 的最优拟合（见表 5-1），绘制不同环境温度下的 L-I 曲线。根据电压与电流函数关系，分别建立了基于电压与电流函数关系的 L-I 模型和 VCSEL 正常工作最高环境温度计算模型，经实例计算后得到以下认识：在保证用户正常使用的前提下，该 VCSEL 最高工作环境温度应低于 36.6℃。

针对问题 2：基于问题 1，对 L-I 模型进行误差分析，结果表明当前的 L-I 模型未充分考虑温度 T 对光功率 L（P）计算结果的影响。基于误差分析的结果，建立了考虑有效区电流温变影响的 L-I 模型和相应的参数拟合模型，运用实测数据得到改进模型的参数组 $(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ （见表 6-3）。对考虑有效区电流温变影响的 L-I 模型进行仿真分析，新的 L-I 模型能更有效描述温度 T、电流 I 与光功率 L（P）的关系。

针对问题 3：在确认 VCSEL 小信号响应模型推导过程正确的前提下，建立了 VCSEL 小信号响应的参数拟合模型，调整了三个误差约束目标函数的权重配比，拟合出 VCSEL 小信号响应模型的参数组 $(\eta_i, \beta, \tau_n, k, G_0, N_0, \tau_p, \varepsilon)$ （见表 7-2），绘制 VCSEL 带宽模型的带宽响应曲线并分析，得出温度和偏置电流对带宽曲线的影响规律。对拟合参数进行敏感性分析，提出改变参数以得到更宽带宽的方案。

针对问题 4：通过文献调研的方式，建立了基于激光器速率方程的小信号等效电路模型，提出了该模型的参数拟合思路；结合光功率转换效率 k 的物理意义，计算出了一套增大带宽的参数设计方案。

关键词：VCSEL L-I 模型 带宽模型 遗传算法 误差分析

1 问题重述

1.1 问题背景

随着经济技术的发展,对互联网技术的要求越来越高,我国家庭固定网络速度已经快速发展到了今天的百兆,甚至千兆的光纤宽带入户阶段。“光纤宽带入户”就是采用光纤来传输信号。光纤中传输的信号有激光信号和电信号,其中激光信号具有远高于电信号传输速率的特点,更适合于未来高速率的传输网络。在光纤通信传输系统设计前,往往会通过计算机仿真的方式研究系统设计的指标,以便快速找到最适合的解决方案。因此在进行系统仿真时,需要准确掌握系统中各个器件的特性以保证仿真模型的精度,其中激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。

1.2 问题的提出

尽管与我们生活息息相关的激光器种类繁多,但由于垂直腔面发射激光器(VCSEL: Vertical Cavity Surface Emitting Laser)具有使用简单,功耗较低等特点,一般 VCSEL 的工作电流在 6mA~8mA,所以本题目需要在满足如下要求时,完成本文的主要任务——得到能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。

(1) 问题的要求

针对垂直腔面发射激光器(VCSEL)的特点——它的输出的光功率强度与器件的温度相关,当器件温度(受激光器自身发热和环境温度的共同影响)改变后,激光器输出的光功率强度也会相应发生变化,在进行建模时,需要满足如下要求:

- 1) 准确反映 VCSEL 激光器特性;
- 2) 考虑激光器输出的功率强度与温度的关系,即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用;
- 3) 如何设计激光器的参数使激光器具有更大的传输带宽,即 S21 曲线上纵坐标-10dB 位置对应的横坐标频率值更大。

(2) 待研究问题

问题 1: 基于 VCSEL 的 L-I 模型的经验公式,根据实测数据,确定模型参数($\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$),画出 10°C, 20°C, 30°C,, 90°C 等温度下的 L-I 曲线,并根据建立的 L-I 模型推测出在保证用户可以正常使用网络的条件下,电信机房里 VCSEL 激光器的最高的工作环境温度。

问题 2: 根据问题 1 中模型精度和误差产生的原因对模型提出改进,并根据改进的模型画出 10°C, 20°C, 30°C,, 90°C 等温度下的 L-I 曲线与问题 1 中的 L-I 曲线进行比较,或者通过完全不同方法得到更好的 L-I 模型。

问题 3: 根据 VCSEL 激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据,建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型,给出参数构成及其确定方法,画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线,其中一条必

须是 20℃ 下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线；利用该模型分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响；提出除了通过改变环境温度和偏置电流来获得更宽带宽激光器的方法；确定通过改变哪些参数会有激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度高于 0 频位置的现象。

问题 4：探索更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快；或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB（或 10dB）带宽。若有，给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。

2 模型假设

- (1) 转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小, 即 $\eta(T)$ 近似于常数 η ;
- (2) 加载于激光器的电流为直流电, 即 $I_{th} = 0$;
- (3) 二极管热电压 (diode's thermal voltage) 不随温度的变化而变化, 即 V_T 为一常数;
- (4) 阈值电流等于热偏置电流与一个常数的和, 即 $I_{th}(N, T) = I_{off}(T) + I_{th0}$ 。

3 符号说明

符号	意义	单位
P_0	激光器输出光功率的测定值	mW
P, P_S	L-I 模型光功率的计算值	mW
I	注入到激光器的外部驱动电流	mA
$\eta, \eta(T), \eta_i$	转换效率	无因次
$I_{th}(N, T)$	阈值电流	mA
N	载流子数	无因次
$I_{off}(T)$	与温度相关的经验热偏置电流	mA
I_{th0}	常数	mA
R_{th}	VCSEL 热阻抗	°C/mW
τ_{thl}	热时间常数	
T_0	环境温度	K
V, V_0	输入电压的计算值和测定值	V
V_T	二极管热电压	V
R_S	串联电阻	
I_S	二极管饱和电流	mA
t	时间	s
N_0	透明载流子数	无因次
N_{db}	振幅	dB

4 模型准备

4.1 基本名词含义

(1) 垂直腔面发射激光器 (VCSEL)

垂直腔面发射激光器 (Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser, 简称 VCSEL, 又译垂直共振腔面射型雷射) 是一种半导体激光器, 能将电信号转化为激光信号。与传统的激光器相比, VCSEL 具有使用简单, 功耗较低等特点。根据题目要求, 本文将以此种激光器作为研究对象。

(2) 信号

在物理或工程上可以将信号理解成变化着的物理量, 最常用的是电压、电流、磁通量、光通量等。例如电信号可以通过电流的幅度、频率、相位变化来表示不同的消息。本文中研究的是光信号, 而研究的重点是光信号的幅度和频率。

(3) 系统

一般输入的信号和最终得到的信号不完全相同, 而造成这种变化的中间环节的统称为系统。若系统的功能不随时间变化, 那么可以将该系统建模为线性常系数微分方程。通常该模型是通过机理分析法建立的, 然后用输入和其对应的输出数据, 通过数学方法求解参数, 得出模型。本文模型的确定主要就是使用这种方法。

(4) 带宽

在模拟信号系统中, 带宽其实就是信号占用的频谱的度量, 能标识传输信号所占有的频率宽度。其中频率宽度是指传输信号的最高频率和最低频率的差值。

4.2 数据预处理

题中给出的数据可能与模型中的参数的单位不同, 或者为了方便编程, 需要对测试数据进行参数的转化。转化后的各个参数的单位见符号说明。需要说明的是振幅的单位 dB 与功率的单位 mW 之间的关系。根据调研文献^[1], 它们之间的有如下换算关系:

$$\begin{aligned} 0\text{dBm} &= 10\log(1)\text{mW}=1\text{mW} \\ x\text{dBm} &= 10\log\left(10^{\frac{x}{10}}\right)\text{mW}=10^{\frac{x}{10}}\text{mW} \\ y\text{dBm}-z\text{dBm} &= (y-z)\text{dB} \end{aligned} \quad (4-1)$$

5 问题 1: VCSEL 的 L-I 模型的参数确定

激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能转换为光子的光能的过程，在转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多（发热导致能量浪费了），器件温度越高，那么转化为光能的能量越少（输出光功率越低），可以利用的能量就越少。因此需要对激光器输出功率与工作电流的关系进行研究。

5.1 问题描述及分析

本题的目的是找出一种方法，确定 L-I 模型的参数 η 、 I_{th0} 、 R_{th} 、 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 和 a_4 ，再根据确定了参数的 L-I 模型绘制 L-I 曲线，并且计算在保证用户正常使用的情况下，VCSEL 激光器的最高工作温度。此题实际上为非线性多参数函数的拟合问题。题中已经给出了 1401 组数据，每组数据包括测得的驱动电流、电压和对应的光功率，其中温度为固定值 20℃。

本题的关键是如何拟合 L-I 模型的 8 个参数，所以考虑应用拟合参数的一般方法——最小二乘法进行拟合。由于需要拟合的函数是非线性的，而且需要拟合的参数一共有 8 个，所以找到合适的算法将是参数能否成功拟合的关键。题中要求绘制在不同环境温度下，光功率和电流强度的关系，而根据题中附录一，L-I 模型最后是光功率 P_0 和驱动电流 I 、电压 V 和环境温度 T_0 的函数关系，关系式中多了一个变量 V ，所以找到一种方法消除这个变量是关键。最后一个要求是求取在保证用户正常使用的情况下，VCSEL 激光器的最高工作温度。可以在 L-I 模型确定后，通过改变环境温度，看不同电流强度下的最大光功率是否大于 2mW 即可找出最高温度。综上所述本题的关键是：

- (1) 找到合适的算法拟合参数；
- (2) 如何消除电压这一变量。

5.2 L-I 模型的建立

L-I 模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型，国际上很多研究机构都对此模型做了大量研究，目前已经有一个经验公式获得了大多数人的认可

$$P = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (5-1)$$

假设转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小，即 $\eta(T)$ 近似于常数 η ；同时令 $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$ ，那么式（5-1）可以简化为

$$P = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (5-2)$$

将 $I_{off}(T)$ 表示为

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (5-3)$$

式(5-3)中的温度 T 受外界环境温度 T_0 和自身的温度影响,自身的温度与器件产生的瞬时功率 IV 相关

$$T = T_0 + (IV - P)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (5-4)$$

所以 VCSEL 的经验模型为

$$\begin{cases} P = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \\ T = T_0 + (IV - P)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \end{cases} \quad (5-5)$$

5.3 基于 L-I 模型的参数拟合模型的建立

根据已经建立的 L-I 模型,将式(5-3)和式(5-4)代入式(5-2)可得

$$P = \eta \left\{ I - I_{th0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [T_0 + (IV - P)R_{th}]^n \right\} \quad (5-6)$$

因为在直流电中,式(5-4)中的 $dT/dt = 0$,所以省略。一般情况下,级数取前四项即可满足精度要求,所以式(5-6)可写为

$$P = \eta \left\{ I - I_{th0} - \sum_{n=0}^4 a_n [T_0 + (IV - P)R_{th}]^n \right\} \quad (5-7)$$

分析式(5-7)可知,上述经验公式是一个 P 关于 I , T_0 , V 的隐函数 $P = f(I, V, T_0, P)$ 。在实际中我们知道,电流和功率不可能小于0,所以有非负约束

$$\begin{cases} P \geq 0 \\ I_{th0} \geq 0 \end{cases} \quad (5-8)$$

以光功率的拟合值与实测值的离差平方和最小为目标函数,参数 η 、 I_{th0} 、 R_{th} 、 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 和 a_4 为决策变量,式(5-5)和式(5-8)为约束条件建立光功率 P_0 和电流 I 、环境温度 T_0 的函数关系参数的拟合模型

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum (P - P_0)^2 \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \\ T = T_0 + (IV - P)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \\ P = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ P \geq 0 \quad I_{th0} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-9)$$

5.4 L-I 模型的参数拟合模型的求解

(1) 求解思路

在建立的光功率 P_0 和电流 I 、环境温度 T_0 的函数关系参数的拟合模型中， η 、 I_{th0} 、 R_{th} 、 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 和 a_4 均为待定常系数。根据给定的测试数据，通过经验模型参数的一般确定方法，即参数拟合，运用遗传算法确定各个参数的值。

(2) 算法设计与模型参数确定

对光功率和电流、环境温度的函数关系参数的拟合模型，以离差平方和最小为优化目标，获得拟合参数。具体计算步骤如下：

Step1: 读取 I 、 U 、 P_0 、 T_a 数据文件；

Step2: 设置遗传算法参数集 gaoptionset；

Step3: 调用 MATLAB 软件的 ga 函数和 Eval 评价函数；

Step4: 令 $V_{sum} = 0$ ， $i = 0$ ；

Step5: $i = i + 1$ ， $T = T_0 + (IV - P_0)R_{th}$ ；

Step6: 计算 $I_{off} = \sum_{j=1}^4 a_j T^j$ ；

Step7: 计算 $P = \eta(I - I_{th} - I_{off})$ ，如果 $P < 0$ ，则令 $P = 0$ ，并进入 Step8；否则直接进入 Step8；

Step8: 计算 $V_{sum} = V_{sum} + (P - P_0)^2$ ，如果 $i = 1401$ ，则进入 Step9；否则返回 Step5；

Step9: 输出结果。

程序计算流程如图 5-1 所示。

通过 Matlab 编程（代码见附录 B）获得参数的值如表 5-1 所示。

表 5-1 光功率和电流、环境温度的函数关系参数拟合值

参数	拟合值	参数	拟合值
η	0.363	I_{th0}	4.32×10^{-4}
R_{th}	3.25×10^3	a_0	4.36×10^{-3}
a_1	-7.27×10^{-5}	a_2	3.14×10^{-7}
a_3	-6.34×10^{-10}	a_4	7.86×10^{-13}

模型残差分析表明（图 5-2），模型计算稳定。图 5-2 需要说明的是：为了更好地使各个参数的大小显示在图中，每个参数都乘上了 10 的整数次方，使得处理后的值的范围在-10 到 10 之间。

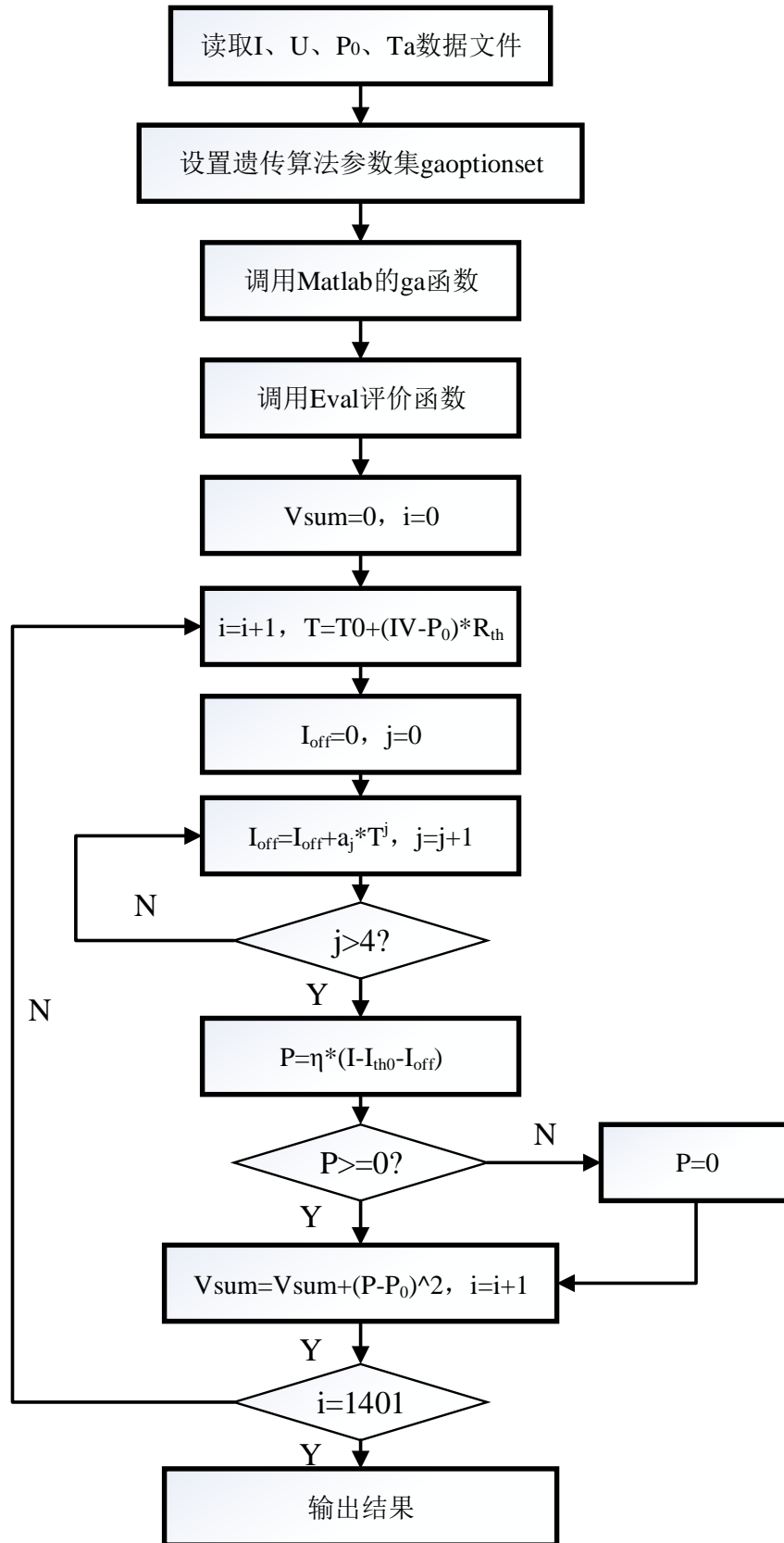


图 5-1 程序计算流程图

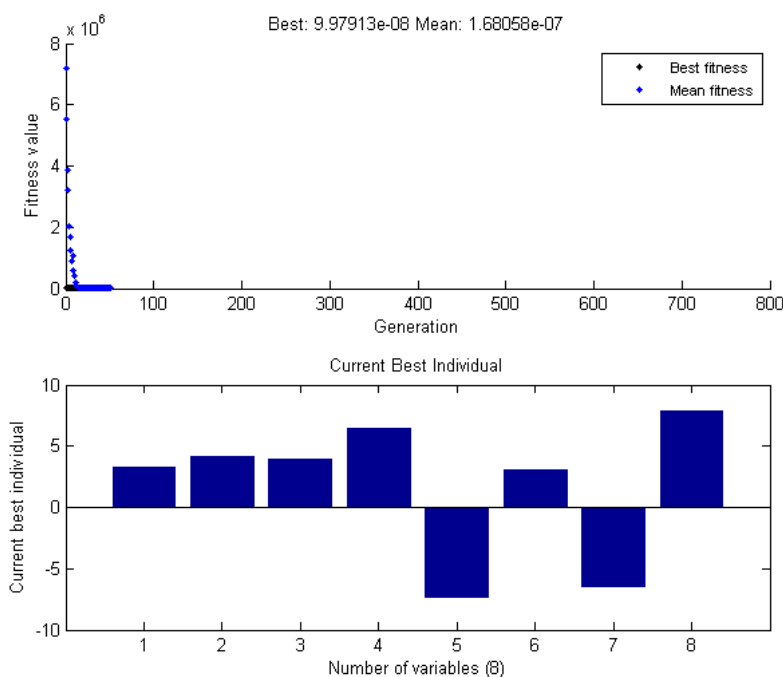


图 5-2 遗传算法收敛图

从实测光功率与拟合光功率的对比图（图 5-3）可以看出，实测曲线和拟合曲线基本重合，拟合效果较好。

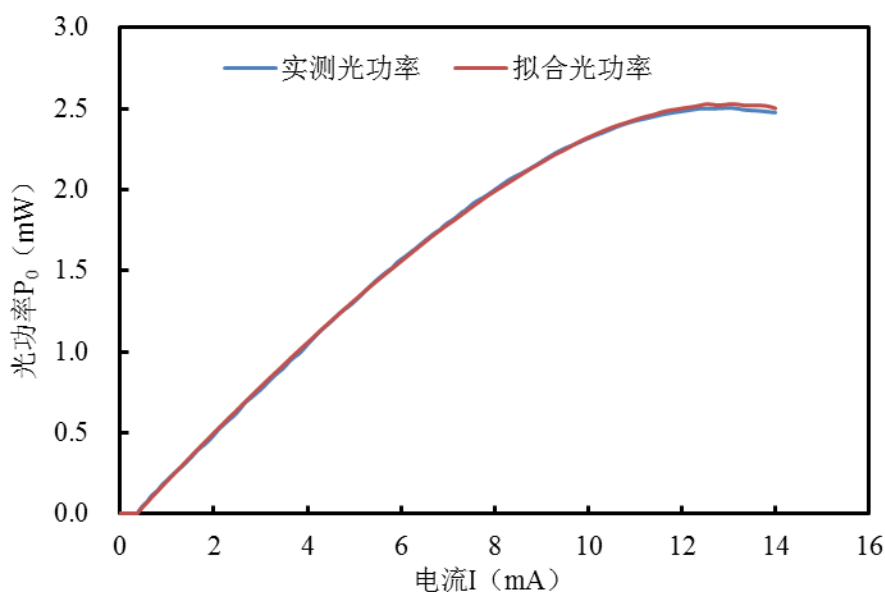


图 5-3 实测光功率与拟合光功率对比图

5.5 电压和电流函数关系的确定

从 5.3 节中可以得出 VCSEL 的经验模型是一个 P 关于 I , V , T_0 的隐函数 $P = f(I, V, T_0, P)$ ，该等式中的变量有四个，分别是光功率 P 、电流 I 、电压 V 和环境温度 T_0 。为了求得在不同环境温度 T_0 下，光功率 P 和电流 I 的关系，必须消除其中的一个变量。根据调研，电压 V 和电流 I 存在函数关系^[2]。

(1) 电压和电流函数关系的参数拟合模型建立
 据研究, V 为 (I, T) 的函数^[2], 即 $V = f(I, T)$

$$V = IR_S + V_T \ln\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \quad (5-10)$$

根据假设(3) V_T 为常数和实际情况, 电阻、电流和电压不能小于 0, 所以有非负约束

$$\begin{cases} R_S \geq 0 \\ V_T \geq 0 \\ I_S \geq 0 \end{cases} \quad (5-11)$$

以电压的拟合值与实测值的离差平方和最小为目标函数, R_S 、 V_T 和 I_S 为决策变量, 式(5-10)和式(5-11)为约束条件建立电压 V 和电流 I 的函数关系参数的拟合模型

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum (V - V_0)^2 \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} V = IR_S + V_T \ln\left(1 + \frac{I}{I_S}\right) \\ R_S \geq 0 \\ V_T \geq 0 \\ I_S \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-12)$$

(2) 求解思路

在建立电压 V 和电流 I 的函数关系参数的拟合模型中, R_S 、 V_T 和 I_S 均为待定常数。根据给定的测试数据, 通过经验模型参数的一般确定方法, 即参数拟合, 运用 MATLAB 软件工具箱 `curve fitting` 拟合确定各个参数的值。

(3) 模型参数确定

运用 MATLAB 软件工具箱 `curve fitting` 进行面板操作即可拟合得到参数 R_S 、 V_T 和 I_S 的值分别为 0.05788、0.1501 和 9.7×10^{-6} , 其中判定系数 $R^2 = 0.9946$ 。参数拟合对比如图 5-4 所示, 拟合参数如表 5-2 所示, 从对比图和拟合优度的值可以看出拟合值与实测值误差较小, 拟合效果较好。

表 5-2 拟合值及拟合优度

参数	值	参数	值
R_S	0.05788	V_T	0.1501
I_S	9.7×10^{-6}		
SSE	1.044	R-square	0.9946
Adjusted R-square	0.9946	RMSE	0.02732

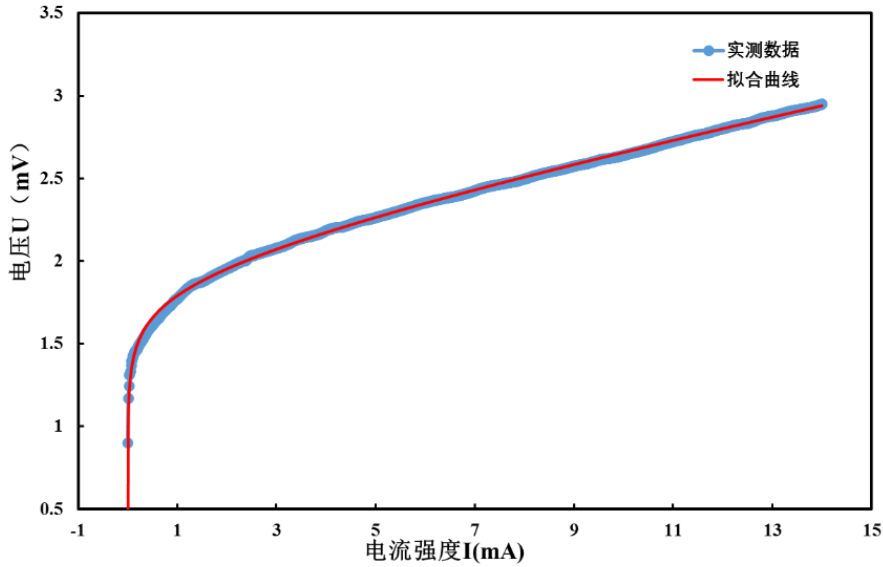


图 5-4 实测电压与拟合电压对比图

5.6 基于电压和电流函数关系的 L-I 曲线绘制

(1) 改进的 L-I 模型及求解思路

从 5.3 节可得到 P_0 与 I , V , T_0 的函数关系, 从 5.5 节中可以得到电压 V 和电流 I 的函数关系, 即电压可以用电流来表示。通过化简可以得到 $P = f(I, T_0, P)$ 的隐函数关系; 然后给定不同的环境温度的值, 即可得到仅仅是光功率和电流的函数关系; 最后通过 MATLAB 软件 fsolve 函数进行数值求解, 得到不同电流下光功率的值。

(2) 算法设计与模型参数确定 L-I 曲线绘制

已经可以得出函数关系 $P = f(I, T_0, P)$, 其中变量有 P , I , T_0 。给定一个环境温度, 再给出一组电流的值, 即可根据 fsolve 函数计算出一组光功率的值; 再给定另一个环境温度的值, 即可算出这个环境温度下, 一组电流与光功率的值, 如此循环, 最后得到不同环境温度下, 不同电流下的光功率, 根据这些数据绘制不同温度下的 L-I 曲线。具体的计算步骤如下:

Step1: 给定一组环境温度 T , 和电流初值 $I = 0$;

Step2: 令 $I = I + 0.01$;

Step3: 给定光功率初值 $P = 1$, 调用 fsolve 函数求 $P = f(I, P)$ 的值, 如果 $I < 28$, 则进入 Step2; 否则进入 Step4;

Step4: 输出结果。

程序计算流程如图 5-5 所示。

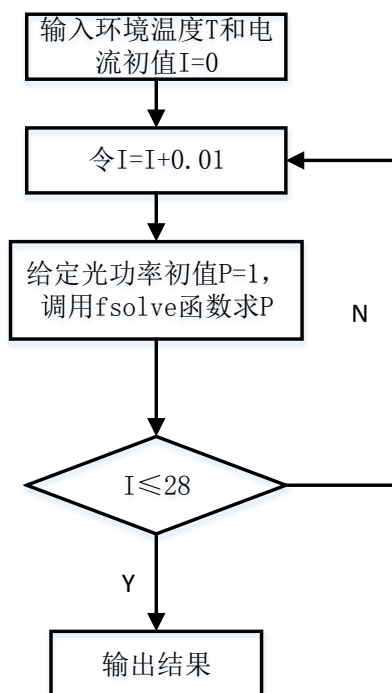


图 5-5 程序计算流程图

通过 Matlab 编程（代码见附录 B）得出不同温度下的 L-I 曲线。从不同温度下的 L-I 曲线图（图 5-6）中可以看出：在同一温度下，随着电流的不断增大，光功率的数值是先变大，后变小的；当电流增大到 22mA 后，所有温度下的光功率都等于 0；在同一电流强度下，随着温度的升高，光功率不断减小；随着温度的降低，每个温度下最大光功率对应的电流逐渐增大。

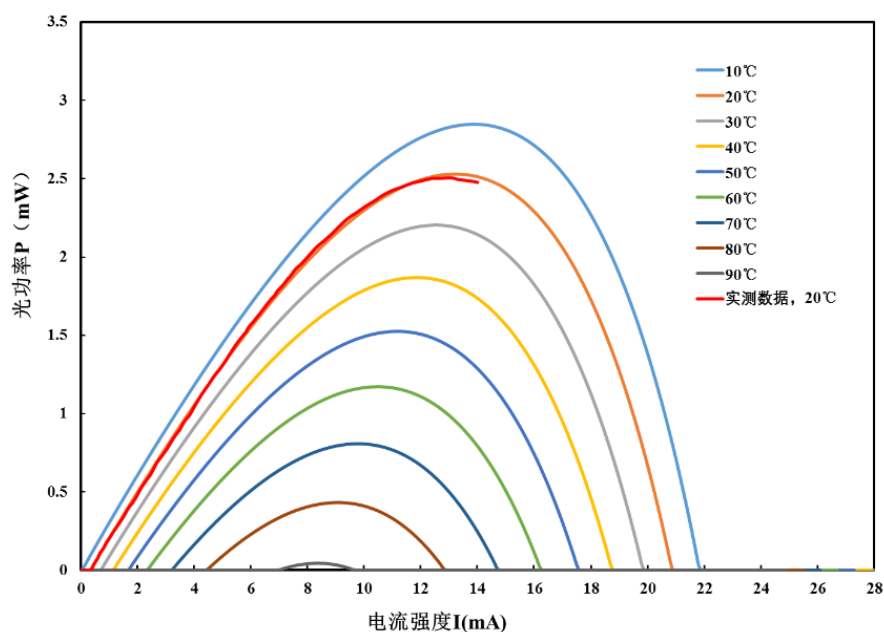


图 5-6 不同温度下和实测数据 L-I 曲线图

5.7 保证用户正常使用最高环境温度的确定

(1) 模型建立

根据得到的 L-I 模型和电压与电流的函数关系，可以得到 P 和 I ， T_0 的函数关系为 $P = f(I, T_0, P)$ ，换一种表达方式即为 $T_0 = f_1(I, T_0, P)$ 。结合题中所给条件，当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。所以激光器在所求的最高工作温度下，其光功率不能小于 2mW，所以有约束

$$P_0 \geq 2 \quad (5-13)$$

在实际中电流大小不可能小于 0，所以有非负约束

$$I \geq 0 \quad (5-14)$$

所以激光器正常工作最高环境温度的求解模型为

$$\begin{aligned} & \text{Max } T_0 = f_1(I, T_0, P_0) \\ & s.t. \begin{cases} I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \\ T = T_0 + (IV - P)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \\ P = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \\ V = IR_s + V_T \ln\left(1 + \frac{I}{I_s}\right) \\ P_0 \geq 2 \\ I \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-15)$$

(2) 求解思路

观察图 5-6，在环境温度为 30℃ 的条件下，激光器产生的最大光功率明显大于 2mW；在环境温度为 40℃ 的条件下，激光器产生的最大光功率明显小于 2mW。可知保证用户正常使用的最高环境温度在 30℃ 与 40℃ 之间。已知求取参数所在范围，且知道光功率在这段温度范围内随着温度的增加是严格单减的，所以直接采用迭代法进行求解。

(3) 算法设计与最高环境温度确定

取步长为 0.01℃，以 30℃ 为初始温度，采用 5.6 节中的计算方法计算光功率的值，直到计算的光功率小于 2mW 时停止，此时的温度即为激光器能正常工作的最高温度。计算步骤为：

Step1: 输入初值 $T = 30$

Step2: 令 $T = T + 0.01$;

Step3: 根据 5.6 节计算方法，计算出不同电流下对应 P ，如果 $P \leq 2$ ，则进入 Step4；否则进入 Step2；

Step4: 输出 T 和 P 。

程序计算流程图如图 5-7 所示。

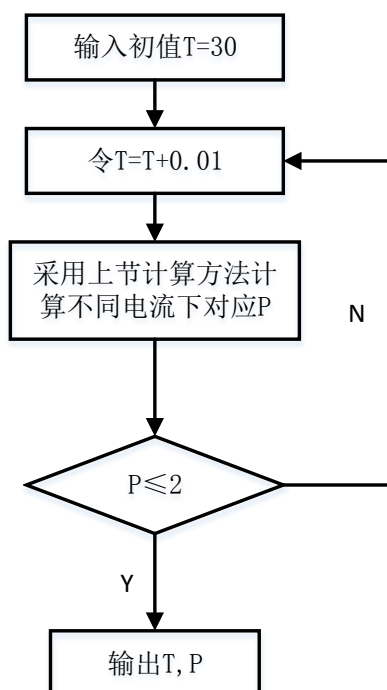


图 5-7 程序计算流程图

通过 Matlab 编程（代码见附录 B）获得激光器输出光功率能达到 2mW 的最高环境温度为 36.6℃。在图 5-6 中加入环境温度为 36.6℃时的 L-I 曲线得到下图。

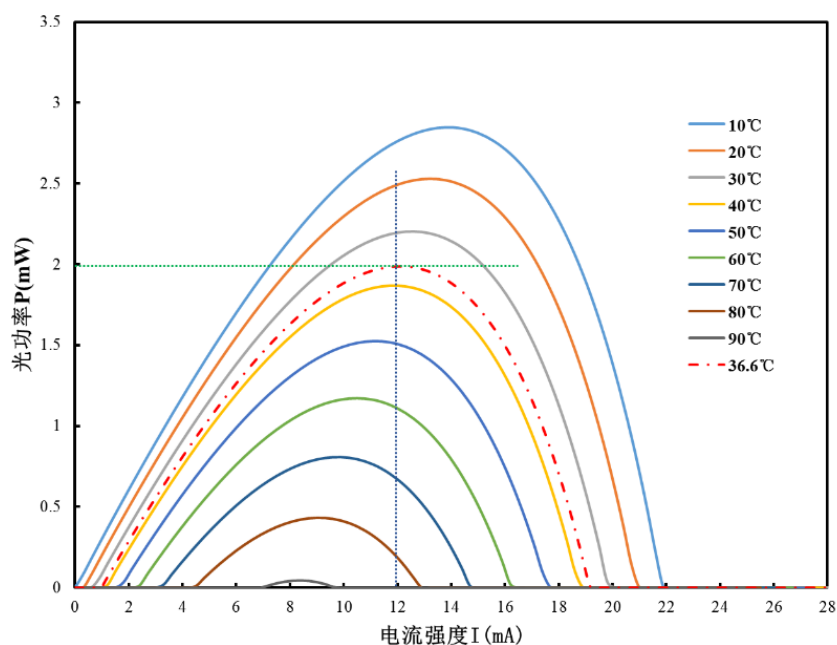


图 5-8 不同温度下 L-I 曲线图

6 问题 2：VCSEL 的 L-I 模型改进

6.1 问题描述及分析

本小题的目的是分析问题 1 中 L-I 模型误差产生的原因，并据此对 L-I 模型进行改进。为了达到改进模型的目的，首先应该对模型产生误差的原因进行分析，再找出方法进行解决。

在问题 1 中，虽然采用遗传算法对 L-I 模型参数得到了很好的拟合，但由于算法搜索的随机性，往往会得到不同的参数组合，导致虽然在实验温度(20℃)条件下拟合较好，但在其他温度条件下光功率仿真结果差距大。因此，应该首先对原模型进行参数敏感性分析，再根据敏感性分析的结果提出对 L-I 模型的改进方法。所以本小题的关键是：

- (1) 找出影响模型精度较大的参数；
- (2) 找出针对影响较大参数的模型改进方法。

6.2 模型的精度及误差分析

原 L-I 模型中阈值电流 $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$ ，公式中活动区阈值电流 I_{th0} 假设为与时间无关的常数，同时假设泄露电流 $I_{off}(T)$ 为一与温度 T 的多项式拟合经验关系，导致虽然在实验温度(20℃)条件下拟合较好，但在其他温度条件下光功率仿真结果可能差距大。实际上，激光器中有效区阈值电流 I_{th0} 同样会受到温度的影响，因此考虑对原模型阈值电流计算模型进行修正。

原有模型通过现代优化算法—遗传算法，对 8 个参数的拟合可以得到很好的拟合结果，但由于算法搜索的随机性，往往会得到不同的参数组合。因此，首先对原模型进行参数敏感性分析，通过模型可知，除参数 η 外，其他 7 个参数均会影响阈值电流的计算，因此，保持 η 不变，通过问题 1 参数拟合模型得到五组参数组合，见表 6-1。通过比较各组参数经过 5 次拟合的波动情况，用式(6-1)计算仿真结果的平均误差，评价参数的敏感性。

$$\bar{\varepsilon} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{|P_i - P_0|}{P_0} \right) / N \times 100\% \quad (6-1)$$

表 6-1 五组不同的拟合参数组合

序号	I_{th0} $\times 10^{-3}$	R_{th}	η	a_0 $\times 10^{-3}$	a_1 $\times 10^{-5}$	a_2 $\times 10^{-7}$	a_3 $\times 10^{-10}$	a_4 $\times 10^{-10}$	平均误差
1	6.88	2606.27	0.3633	1.87	-9.23	2.73	-3.88	6.63	1.25%
2	3.88	2699.98	0.3633	3.46	-9.00	3.29	-6.09	8.68	1.89%
3	3.16	2669.52	0.3633	4.11	-8.47	3.06	-6.11	9.46	1.4%
4	2.23	2637.42	0.3633	1.41	-6.90	2.94	-5.70	8.11	1.56%
5	1.84	2699.99	0.3633	4.63	-8.93	3.54	-6.80	9.04	1.88%

由表 6-1 可知，对 5 组不同的拟合参数进行仿真，平均误差不超过 2%，说明在实验条件下模型精度高，误差小。为比较在其他温度下模型的稳定性，选取序号为 1 和 2 的两组参数进行不同温度仿真。得到仿真对比图，如图 6-1 所示。

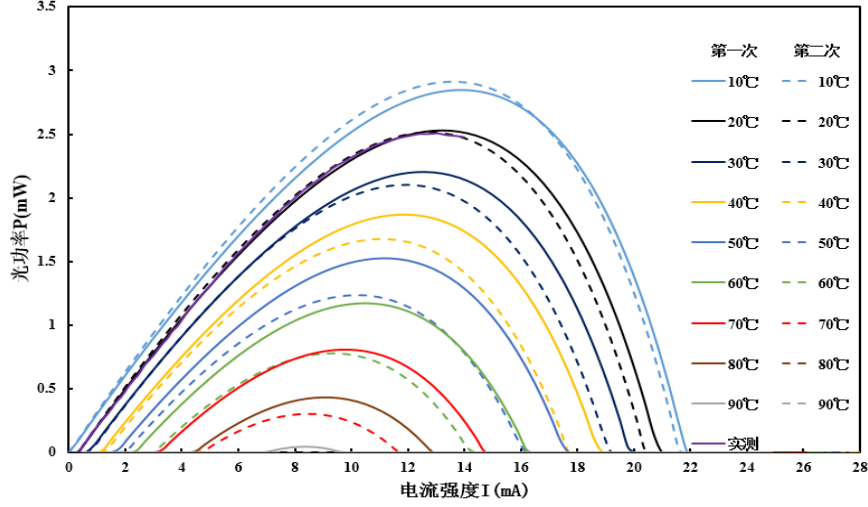


图 6-1 两组参数下 L-I 曲线图

通过对比可知，在电流较小时，两组参数所得到的 L-I 曲线差异较小，随着电流增大，差异逐渐增大，以 40°C 曲线为例，当电流小于 10mA 时，两组参数计算功率值平均相差 11.2%，当电流大于 10mA 时，功率值平均相差 28.6%。且随着温度增加，误差进一步增大。在 10°C 时，两组 P 值平均相差 6.9%，当温度达到 80°C 时，两组 P 值平均相差 80.3%。由此可以说明，虽然第 1 问模型参数拟合精度高，但未充分考虑温度的影响，造成了模型严重的不稳定性。通过文献调研，了解到阈值电流受温度影响严重^[2]，因此，本文基于阈值电流的温变模型对原 L-I 模型进行了修正。

6.3 考虑有效区电流温变影响 L-I 模型的建立

根据文献调研，1989 年 Byrne 提出了计算二极管阈值电流的模型及计算方法^{[3][4]}。下面是二极管阈值电流计算模型的推导过程。

通过实验建立的公认的阈值电流与温度之间存在如下的经验公式

$$I_{th}(T) = I_C \cdot e^{(T/T_0)} \quad (6-2)$$

此处 I_C 为电流常数； T_0 为二极管特征温度。

激光速率方程如下

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I_a}{qV_{act}} - \sum_{-N_m}^{N_m} \frac{g_{oi}}{1 + \sum_{-N_m}^{N_m} S_i} (N - N_{tr}) S_i - \frac{N}{\tau_n} \\ \frac{dS_i}{dt} = \frac{g_{oi}}{1 + \sum_{-N_m}^{N_m} S_i} \Gamma (N - N_{tr}) S_i - \frac{S_i}{\tau_p} + \beta \Gamma \frac{N}{\tau_n} \end{cases} \quad (6-3)$$

以上函数关系中参数含义及拟合初值见表 6-2。通过上述单模式速率方程式 (6-3)，可以得到有效区阈值电流

$$I_{th0} \approx \frac{qV_{act}}{\tau_n} \cdot \left[\frac{1}{g_0 \Gamma \tau_p} + N_{tr} \right] \quad (6-4)$$

通过比较公式 (6-4) 与公式 (6-2) 并假设只有 g_0 和 N_{tr} 与温度有关，可以得到如下结论

$$I_{th0}(T) \approx \frac{qV_{act}}{\tau_n} \cdot \left[\frac{1}{g_{c0} \exp(-T/T_{oa}) \Gamma \tau_p} + N_{ctr}(T/T_{oa}) \right] \quad (6-5)$$

其中： $g_0(T) = g_{c0} \exp(-T/T_{oa})$ ， $N_{tr}(T) = N_{ctr} \exp(T/T_{oa})$ ，是与温度有关的变量。而每个模型中有

$$g_{0i} = g_0(T) \left(1 - 4 \frac{[\lambda_i - \lambda_0(T)]^2}{\Delta \lambda} \right) \quad (6-6)$$

其中， λ 是每个模型的波长， $\Delta \lambda$ 是增益谱宽， λ_0 是最大增益波长，与温度有关。

以上是关于有效区阈值电流 $I_{th0}(T)$ 的建模推导，并不是所有加载于二级管的电流都能注入有效区，会有一部分电流泄露从而减弱光电效应并增大阈值电流。在直流稳态条件下可用如下经验公式来计算二极管在温度变化较大时的泄露电流。

$$I_{off} = I_D C_{leak} (\exp(T/T_{ol}) - 1) \quad (6-7)$$

I_{off} 为泄露电流， I_D 为二极管电流， C_{leak} 为平均泄露常数， T_{ol} 为泄露电流特征温度。

二极管电流与电压关系模型和二极管温度变化模型与问题 1 相同，此处不再重复。综上所述，考虑有效区电流温变影响的修正 L-I 模型可表述如下

$$\begin{cases} P = \eta (I - I_{th}(T)) \\ I_{th}(T) = I_{th0}(T) + I_{off}(T) \\ I_{th0}(T) \approx \frac{q}{\tau_n} \cdot \left[\frac{V_{act}}{g_{c0} \Gamma \tau_p} + V_{act} N_{ctr} \right] \exp(T/T_{oa}) \\ I_{off} = I_D C_{leak} (\exp(T/T_{ol}) - 1) \\ T = T_0 + (IV - P) R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \\ V = IR_s + V_T \ln \left(1 + \frac{I}{I_s} \right) \end{cases} \quad (6-8)$$

上述模型中，式 (6-8) 中的项 $V_{act}/(g_{c0}\Gamma\tau_p)$ 中的四个参数虽然各自有其物理意义，为简化计算，在参数拟合过程中将其视为参数团 Q_0 进行拟合，项 $V_{act}N_{ctr}$ 对应本题目中的 N_0 ，视为一个参数。由此，本题一共需拟合 $(\tau_n, Q_0, N_0, T_{oa}, C_{leak}, T_{ol}, \eta, R_{th})$ 共 8 个参数。

6.4 考虑有效区电流温变影响 L-I 模型的参数确定与仿真

(1) 基于修正 L-I 模型的参数确定模型及求解思路

对改进的 L-I 模型，其参数拟合模型与未改进模型的参数拟合模型类似，此处直接给出其模型。

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum (P - P_0)^2 \\ & s.t. \quad \begin{cases} P = \eta(I - I_{th}(T)) \\ I_{th}(T) = I_{th0}(T) + I_{off}(T) \\ I_{th0}(T) \approx \frac{q}{\tau_n} \cdot [\frac{V_{act}}{g_{c0}\Gamma\tau_p} + V_{act}N_{ctr}] \exp(T/T_{oa}) \\ I_{off} = I_D C_{leak} (\exp(T/T_{ol}) - 1) \\ T = T_0 + (IV - P)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \\ V = IR_S + V_T \ln \left(1 + \frac{I}{I_S} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (6-9)$$

与未改进的 L-I 模型的参数拟合模型相比，改进后的参数拟合模型只是约束条件和拟合的参数变化了。最后的求解思路 and 未改进的参数拟合模型相同。在建立的光功率 P 和电流 I 、环境温度 T_0 的函数关系参数的拟合模型中， η 、 T_{ol} 、 R_{th} 、 C_{leak} 、 T_{oa} 、 N_0 、 Q_0 和 τ_n 均为待定常系数。根据问题 1 给定的测试数据，通过经验模型参数的一般确定方法，即参数拟合，运用遗传算法确定各个参数的值。其中，在运用 Matlab 遗传算法工具箱时不用设初值，但由于遗传算法的随机性，容易出现早熟或不收敛情况。因此，确定各参数的合理变化区间对拟合效果的影响尤为重要。对于有效区的参数 (τ_n, Q_0, N_0) 取已经公开发表的数据作为估计初值（参数团取各参数计算后数据为初值），对于泄露区与现象级参数 $(T_{oa}, T_{ol}, C_{leak})$ 通过稳态条件下测试电流、电压、光功率实测关系确定初值^{[2][3]}。各物理参数物理意义及对应估计初值见表 6-2。

表 6-2 五组不同的拟合参数组合

符号	物理意义	初值	单位
V_{act}	二极管有效区体积	0.8427×10^{-16}	m^3
g_c	增益常数	8.0×10^{-11}	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
N_{ctr}	透明电子密度	0.59×10^{23}	m^{-3}
τ_n	载流子复合寿命	3×10^{-9}	s
Γ	光束缚因子	0.4	无因次
τ_p	光子寿命	0.7×10^{-12}	s
T_{oa}	有效区特征温度	100	K
C_{leak}	泄露电流比例系数	2.27×10^{-6}	无因次
T_{ol}	泄露区特征温度	30	K

(2) 算法设计与模型参数确定

改进 L-I 模型的参数拟合步骤和未改进 L-I 模型参数拟合步骤类似，唯一区别在于中间的计算公式不同，所以此处不再重复说明。最后通过 Matlab 编程（代码见附录 B）获得参数的值如表 6-3 所示。

表 6-3 光功率和电流、环境温度的函数关系参数拟合值

参数	拟合值	参数	拟合值
η	0.3889	N_0	3.655×10^7
R_{th}	1.862×10^3	T_{oa}	67.509
τ_n	5.01×10^{-6}	C_{leak}	8.343×10^{-3}
Q_0	7.236×10^7	T_{ol}	89.492

模型收敛图（图 6-2）表明，模型计算稳定。从实测光功率与拟合光功率的对比图（图 6-2）可以看出，实测曲线和拟合曲线基本重合，拟合效果较好。

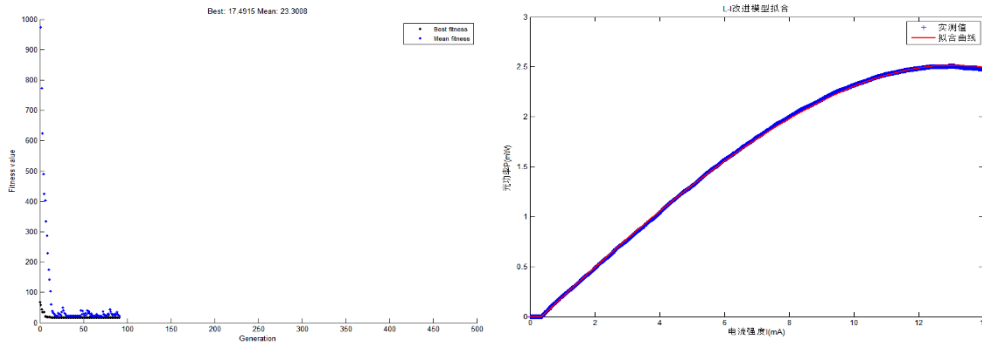


图 6-2 遗传算法收敛图与拟合图

6.5 考虑有效区电流温变影响 L-I 模型的误差分析

同第 1 问，采用 matlab 数值求解函数对模型进行数值求解仿真后可得不同温度下的 L-I 曲线（利用 MATLAB 软件的作图步骤与问题 1 类似，此处略去，计算程序代码见附录 B），如图 6-3 所示，并仿真出上题中保证用户正常使用的条件下，激光器工作的最高温度为 37.1℃，此时工作电流为 11.84mA。

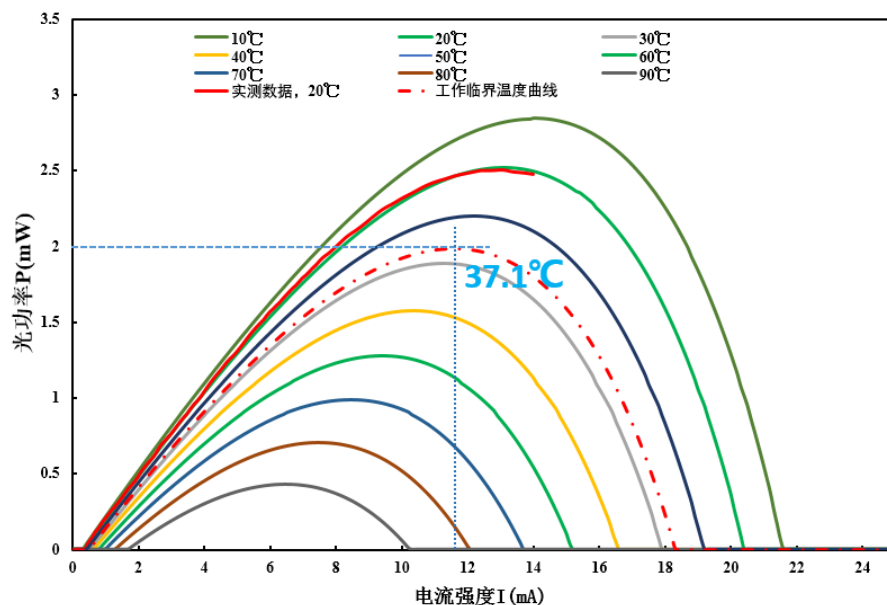


图 6-3 不同温度修正 L-I 模型仿真曲线

将得到的仿真曲线与原模型仿真曲线对比如图 6-4 所示。

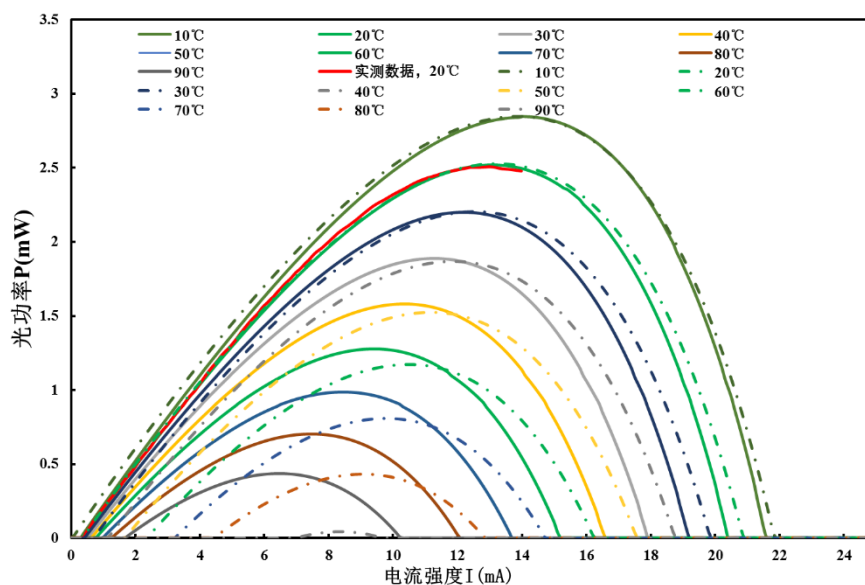


图 6-4 新旧模型不同温度仿真曲线对比图（实线：旧模型；虚线：新模型）

从新模型与旧模型不同温度下仿真对比曲线可以看出，新模型与旧模型存在一定的差异，温度越大，两种模型之间的区别越大，当温度为 10℃时，两模型计算 p 值平均差异为 4.2%，当温度为 80℃时，两模型计算的 P 值差异达到

48.9%。且随着温度增加，旧模型的阈值电流增幅较大，最大值为 6.8mA，新模型阈值电流增幅较小,最大值为 1.83mA。

通过修正模型拟合参数，得到两组不同的参数组合（见表 6-4），由此得到对比仿真曲线对比图如图 6-5 所示。

表 6-4 两组拟合参数值

η	τ_n	Q_0	N_0	T_{oa}	C_{leak}	T_{ol}	R_{th}
0.39	5.01E-06	72364334	36549522	67.51	0.0083	89.49	1862.96
0.39	5.35E-06	55503142	88436615.	69.68	0.0063	84.69	1956.29

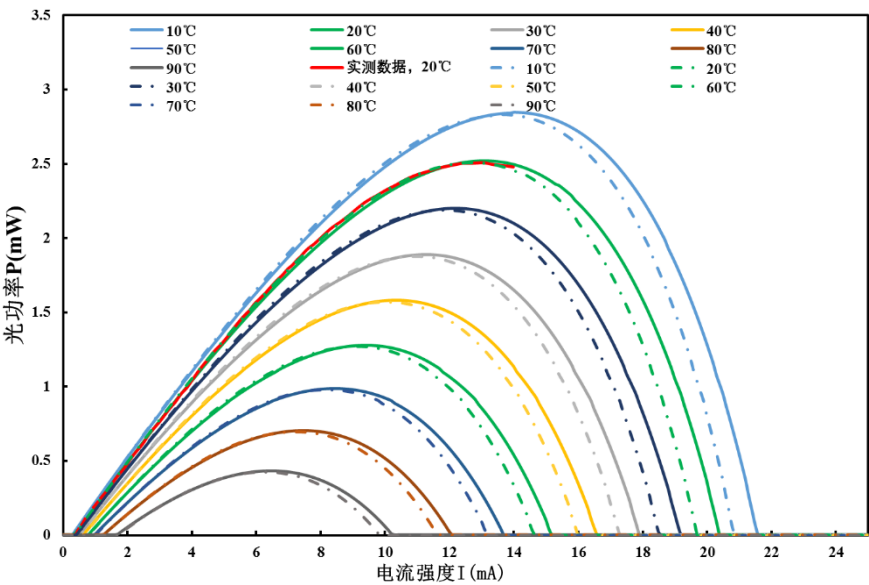


图 6-5 两组不同参数对比仿真曲线

由上图可以看出，在修正的 L-I 模型由于修正了阈值电流的温变模型。新模型在不同温度下不同拟合参数之间的误差比原模型误差小，以 40℃为例，再次仿真结果相关 9.2%，且在电流强度较小时，几乎不存在误差。此外，随着温度的增加，误差值不会进一步增大，在 80℃时两次仿真结果相差 8.6%，从而说明了新模型的精确性与稳定性。

7 问题 3: VCSEL 带宽模型的建立

前面主要是从功率和电流、环境温度的关系的角度对激光器进行研究,为了满足未来日益高速的网络传输要求,需要对影响激光器传输带宽的因素进行分析。下面将建立 VCSEL 的带宽模型,并对影响激光器带宽的因素进行分析,并对建立的带宽模型进行改进。

7.1 问题描述及分析

本题的目的是建立小信号频幅响应参数模型,然后根据建立的模型找出确定模型中参数的方法,作出不同环境温度和不同偏置电流的带宽响应曲线,分析激光器温度和偏置电流对带宽曲线的影响,找出获得更宽带宽的手段,最后找出造成激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度高于 0 频位置的原因。此题实质与问题 1 类似,归根结底解决问题 3 的关键是确定建立的模型中的参数。题中已经给出 2500 组数据,每组数据包括测得的频率和对应的幅度,其中偏置电流为 7.5mA,环境温度为 20℃。

本小题的模型建立过程在题中的附录 2 中已经给出,但是题中已经提示,给出的模型推导过程可能存在错误,所以应该先对给出的推导过程进行验证。本题的关键是对带宽模型的参数进行拟合,和问题 1 相同,本问题也采用最小二乘法进行拟合。参数拟合过后,得到的带宽模型中将不存在未知的参数,再对模型进行敏感性分析,得出不同激光器温度、偏置电流和其它参数对激光器带宽的影响,提出获得更宽带宽的手段,设计参数使激光器在 3Db 范围内的带宽曲线更平缓。

7.2 VCSEL 带宽模型的建立

(1) 带宽模型建立的思路

带宽模型的建立一般分为三个步骤,分别是:求出无驱动信号(即稳态)情况下的电流 I_S 、载流子数 N_S 和光子数 S_S ;加载小信号;重新表示原速率方程中的电流、载流子数和光子数。

(2) 无驱动信号下的带宽模型

根据题中已知条件,将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入激光器速率方程可得

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \end{cases} \quad (7-1)$$

同样,题中也给出了 VCSEL 输出的光功率与光子数的函数关系,且两者呈正比关系,其中两者的比例系数设为 k ,则

$$P = kS \quad (7-2)$$

在外部驱动电流保持恒定一段时间后，载流子数 N 与光子数 S 将达到稳定状态，此时 N 和 S 对时间求导为0。式（7-1）变为

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (7-3)$$

$$-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (7-4)$$

将光功率和光子数的函数关系代入式（7-4）中，并且化简，最后可以得到

$$N_s = \frac{P / (k\tau_p) + G_0 N_0 P / (k + \varepsilon P)}{\beta / \tau_n + G_0 P / (k + \varepsilon P)} \quad (7-5)$$

通过上式可以计算出载流子浓度的值，将载流子浓度 N_s 和光功率与光子数的函数关系代入式（7-3）可得激光器发光的驱动电流的计算式

$$I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)P}{k + \varepsilon P} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \quad (7-6)$$

将计算出的载流子浓度和驱动电流带入式（7-3）可计算稳态下理论上的光子数 S_s

$$S_s = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0(N_s - N_0)} \quad (7-7)$$

最后再通过光功率与光子数的函数关系可以计算出理论上的光功率

$$P_s = kS_s \quad (7-8)$$

（3）加载小信号的带宽模型

因为给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

$$\begin{aligned} I(t) &= I_s + i(f)e^{j2\pi ft} \\ N(t) &= N_s + n(f)e^{j2\pi ft} \\ S(t) &= S_s + s(f)e^{j2\pi ft} \end{aligned} \quad (7-9)$$

将式（7-9）代入式（7-1）中可得

$$\begin{aligned} \frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} &= \frac{\eta_i(I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} \\ &- \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \\ \frac{d(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{dt} &= -\frac{S_s + s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{\tau_n} \\ &+ \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \end{aligned} \quad (7-10)$$

将稳态方程式 (7-3) 和式 (7-4) 中的载流子浓度和光子数均替换为理论值 N_s 和 S_s 后代入式 (7-10) 中的第一个式子进行化简得

$$(j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} = \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} - \frac{G_0 n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft} + G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \quad (7-11)$$

增益压缩因子 ε 本身较小, 与小信号的乘积 $\varepsilon s(f)$ 较小, 忽略其影响; 然后将式 (7-11) 中的 2 倍频高次项忽略; 再将稳态方程式 (7-3) 中的载流子浓度和光子数均替换为理论值 N_s 和 S_s 后代入上式中, 可化简为

$$(j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (7-12)$$

同理, 式 (7-10) 的第二个式子可化简为

$$(j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} + \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (7-13)$$

上式可变换为 $n(f)$ 的表达式

$$n(f) = \frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} s(f) \quad (7-14)$$

根据题中的描述, 信号的响应等于对应频率处输出与输入信号的比值, 假定小信号响应为线性频率响应 $h(f)$, 按照定义表示为小信号带来的输出信号 $p(f)$ 与输入信号 $i(f)$ 的比值。

$$h(f) = \frac{p(f)}{i(f)} = k \frac{s(f)}{i(f)} \quad (7-15)$$

通常, 在通信系统里面的信号响应有以下形式

$$h(f) = \frac{X}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (7-16)$$

式 (7-12) 和 (7-13) 式忽略了 $\varepsilon s(f)$ 项得到的, 为了提高精度, 假定只忽略高阶项, 不忽略 $\varepsilon s(f)$ 项(具体推导过程见附录 A)。然后将式 (7-14) 代入式 (7-12), 再将 $P_s = kS_s$ 代入式中, 并写成式 (7-16) 的形式

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s/k)^2} \quad (7-17)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (7-18)$$

最后，响应函数需要进行归一化处理，因此不必关心刚才等式里面的 X 表达式是什么，在归一化处理时 X 被抵消掉了。归一化小信号响应为

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (7-19)$$

以上即为 VCSEL 的带宽模型，模型中的物理量和参数统计如表 7-1 所示。

表 7-1 VCSEL 带宽模型物理量和参数统计表

符号	物理意义	分类
P, P_s	光功率	物理量
N_s	载流子浓度	物理量
I_{cur}	驱动电流	物理量
S_s	光子数	物理量
$H(f)$	振幅	物理量
k	光功率与光子数比例因子	参数
τ_p	光子寿命	参数
τ_n	载流子复合寿命	参数
G_0	增益系数	参数
N_0	透明载流子数	参数
ε	增益压缩因子	参数
β	受激辐射耦合系数	参数
η_i	转换效率	参数

在问题 3 给出的实测参数中，并没有直接给出光功率的实测值，而其它参数的计算需要用到光功率，所以利用式 (4-1) 进行单位换算计算光功率的值，再根据题中附录 2，可以得到各个物理量的计算流程如图 7-1 所示。

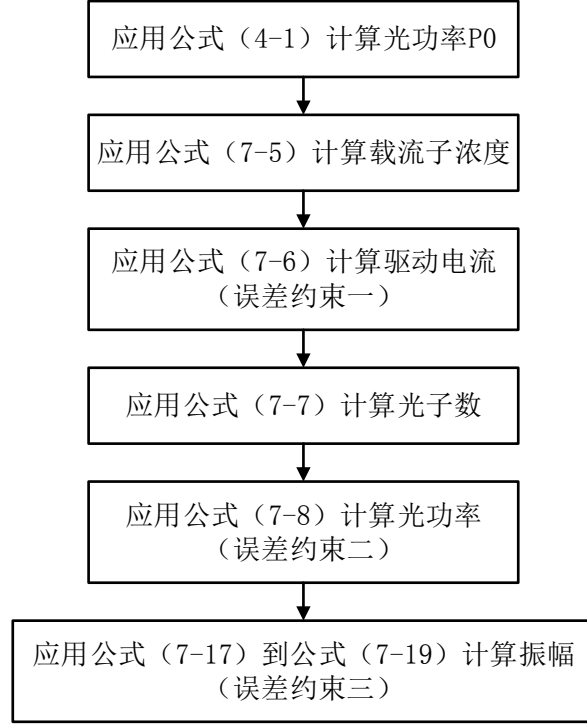


图 7-1 物理量计算流程图

7.3 激光器小信号幅频响应参数拟合模型的建立

7.2 节中已经得到了 VCSEL 的带宽模型，为了得到不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线，需要确定 7.2 节中 VCSEL 的带宽模型中各个参数的值。所以本文基于已经给出的一组 VCSEL 激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据，应用最小二乘法建立激光器小信号幅频响应参数模型。

根据题中附录 2，可以得出该参数模型的决策变量为 η_i 、 k 、 τ_p 、 τ_n 、 G_0 、 N_0 、 ε 、 β 。从图 7-1 能得出：在物理量的计算过程中，会得到驱动电流、光功率和振幅的理论值，应用最小二乘法建立参数模型的情况下，就会有三个目标函数

$$\begin{aligned}
 &Min \quad (I_{cur} - I)^2 \\
 &Min \quad (P_{od} - P_0)^2 \\
 &Min \quad (N_{db} - N_{db0})^2
 \end{aligned} \tag{7-20}$$

所以激光器小信号幅频响应参数拟合模型为

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad (I_{cur} - I)^2 \\
& \text{Min} \quad (P_{od} - P_0)^2 \\
& \text{Min} \quad (N_{db} - N_{db0})^2 \\
& \left\{ \begin{aligned}
N_s &= \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \\
I_{cur} &= \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \\
S_s &= \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0) - \varepsilon \eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n} \\
P_{od} &= k S_s \\
Y &= \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\
Z &= \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\
H(f) &\equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\
k &> 0
\end{aligned} \right. \quad (7-21)
\end{aligned}$$

上述模型为多目标优化模型，为了对此模型进行简化，将其改为单目标优化模型，先将三个目标进行无因次化

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad \left(\frac{I_{cur} - I}{I} \right)^2 \\
& \text{Min} \quad \left(\frac{P_{od} - P_0}{P_0} \right)^2 \\
& \text{Min} \quad \left(\frac{N_{db} - N_{db0}}{N_{db0}} \right)^2
\end{aligned} \quad (7-22)$$

再对以上三个目标函数进行线性加权，改为单目标优化

$$\text{Min} \quad \lambda_1 \left(\frac{I_{cur} - I}{I} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{P_{od} - P_0}{P_0} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{N_{db} - N_{db0}}{N_{db0}} \right)^2 \quad (7-23)$$

因为随着光子数的增加，光功率是增加的，即光功率与光子数成正比，所以系数 k 为一个大于0的数，所以有约束

$$k > 0 \quad (7-24)$$

所以激光器小信号幅频响应参数模型为

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \lambda_1 \left(\frac{I_{cur} - I}{I} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{P_{od} - P_0}{P_0} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{N_{db} - N_{db0}}{N_{db0}} \right)^2 \\
s.t. \quad & \begin{cases} N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \\ I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \\ S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0) - \varepsilon \eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n} \\ P_{od} = k S_s \\ Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\ Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\ H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\ k > 0 \end{cases} \quad (7-25)
\end{aligned}$$

7.4 激光器小信号幅频响应参数模型的参数确定

(1) 求解思路

结合题中给出数据，从 7.3 节建立的模型可以看出，在计算载流子数前需要计算光功率的值，需要用到问题 1 或问题 2 中的 L-I 模型进行求解。因为问题 2 中的模型经过改进，且已经证明更精确，所以在本问题中，将用问题 2 中的 L-I 模型对光功率进行求解。

在激光器小信号幅频响应参数模型中， η_i 、 k 、 τ_p 、 τ_n 、 G_0 、 N_0 、 ε 和 β 均为待定常数。根据给定的测试数据，通过经验模型参数的一般确定方法，即参数拟合，运用遗传算法确定各个参数的值。为了避免拟合结果偏向于使其中某一项的离差平方和最小，权重的确定应当足使各项离差平方和的值相差较小。

(2) 算法设计与模型参数确定

对激光器小信号幅频响应参数模型，以离差平方和最小为优化目标，获得拟合参数。具体计算步骤如下：

Step1: 读取 I_b、T_a、f、N_db 数据文件；

Step2: 调用 MATLAB 软件的 ga 函数；

Step3: 令 $V_{sum} = 0$, $evl1 = 0$, $evl2 = 0$, $evl3 = 0$, $i = 0$;

Step4: $i = i + 1$, 将实测振幅转化为光功率 P_0 ;

Step5: 用式 (7-5) 计算载流子数 N_s ;

Step6: 用问题 2 模型计算阈值电流 I_{th} ;

Step7: 用式 (7-6) 计算驱动电流 I_{cur} , $evl1 = evl1 + (I_{cur} - I_b)^2$;

Step8: 用式 (7-7) 计算光子数 S_s , $P_s = kS_s$, $evl2 = evl2 + (P_s - P_0)^2$;

Step9: 用式 (7-17) 和式 (7-18) 计算 Y, Z;

Step10: 用式 (7-19) 计算 H;

Step11: 计算 $|H| = \sqrt{(real(H))^2 + (imag(H))^2}$, $N_{db_calc} = 10 \lg(|H|)$, $evl3 = evl3 + (N_{db_calc} - N_{db})^2$, 如果 $i = 2500$, 则进入 Step12; 否则进入 Step10;

Step12: $V_{sum} = evl1 + evl2 + evl3$;

Step13: 输出结果。

程序计算流程如图 7-2 所示。

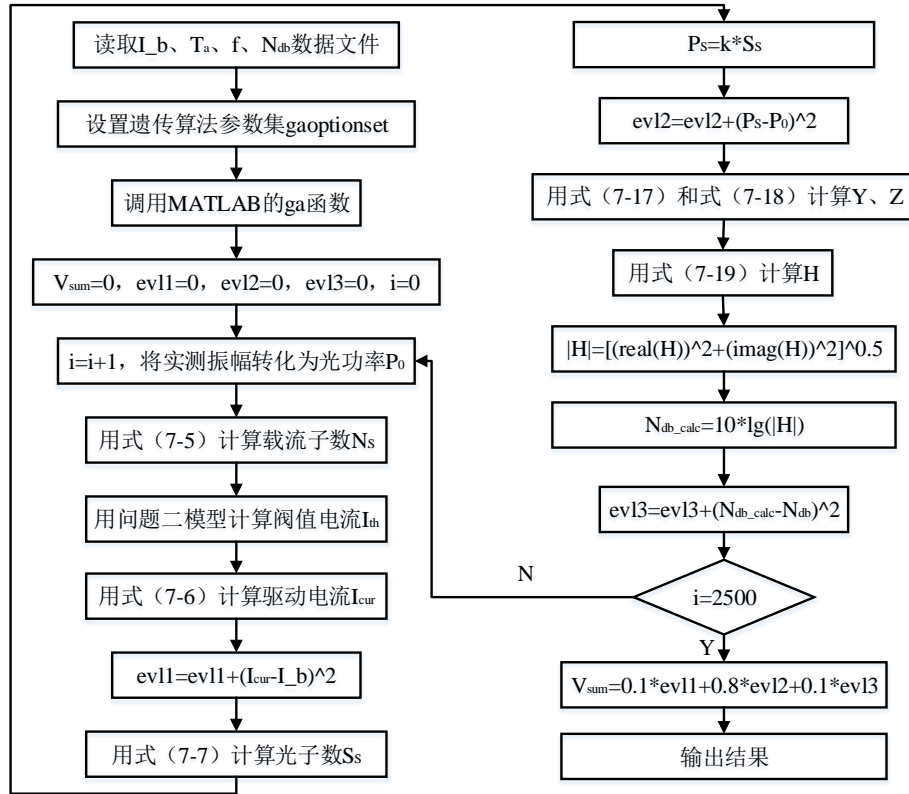


图 7-2 程序计算流程图

通过 Matlab 编程（代码见附录 B）获得参数的值如表 7-2 所示。

表 7-2 光功率和电流、环境温度的函数关系参数拟合值

参数	拟合值	参数	拟合值
k	2.67×10^{-7}	τ_p	1.09×10^{-11}
τ_n	8.29×10^{-8}	G_0	2.29×10^7
N_0	1.21×10^{10}	ε	2.05×10^{-9}
β	9.80×10^{-4}	η_i	0.507

模型残差分析表明（图 7-3），模型计算稳定。

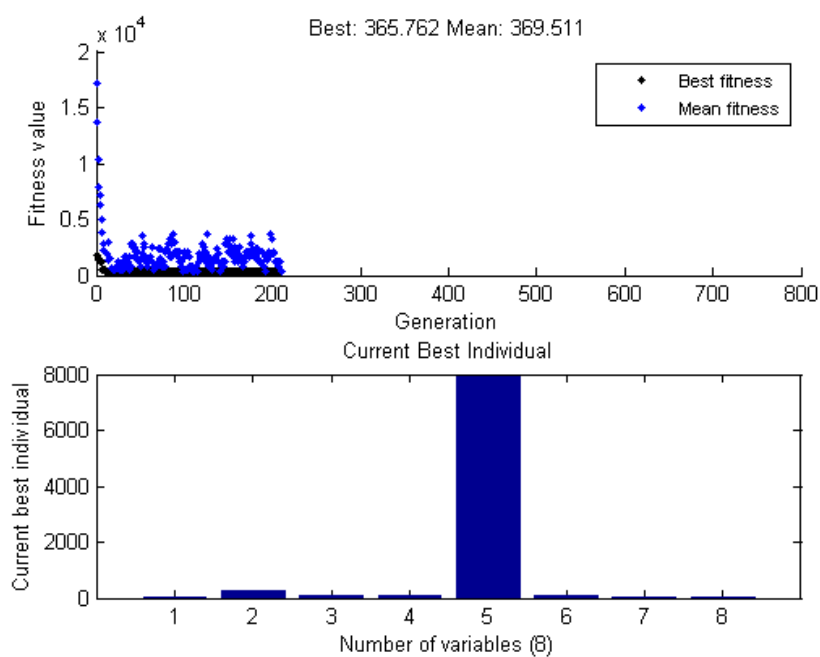


图 7-3 遗传算法收敛图

从实测振幅与拟合振幅的对比图（图 7-4）、实测电流与拟合电流对比图（图 7-5）和实测光功率与拟合光功率对比图（图 7-6）可以看出，实测曲线和拟合曲线基本重合，拟合效果较好。

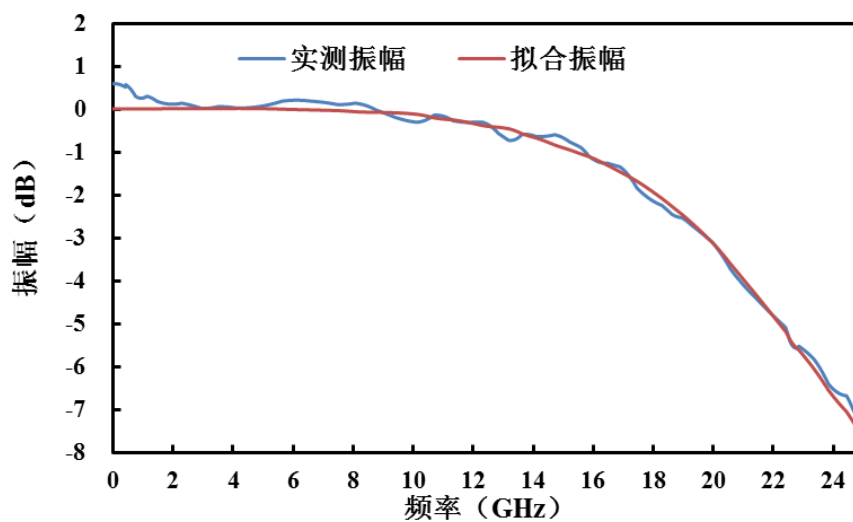


图 7-4 实测振幅与拟合振幅对比图

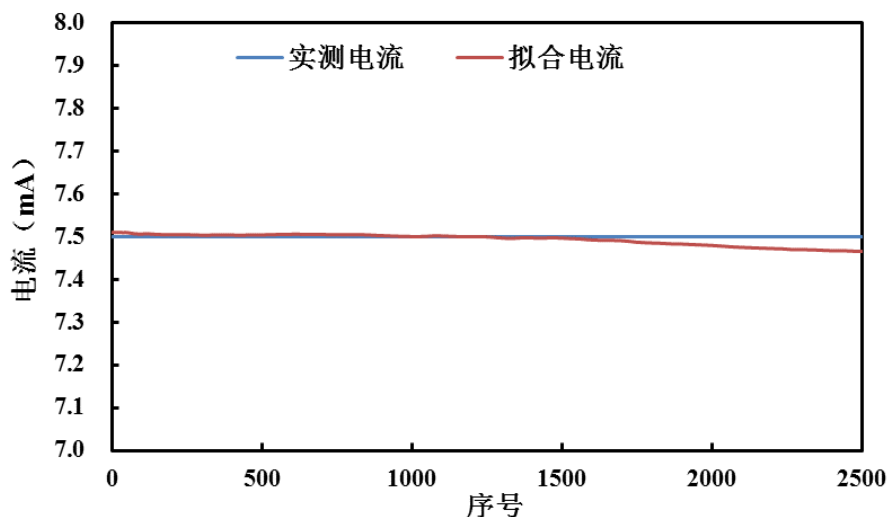


图 7-5 实测振幅与拟合振幅对比图

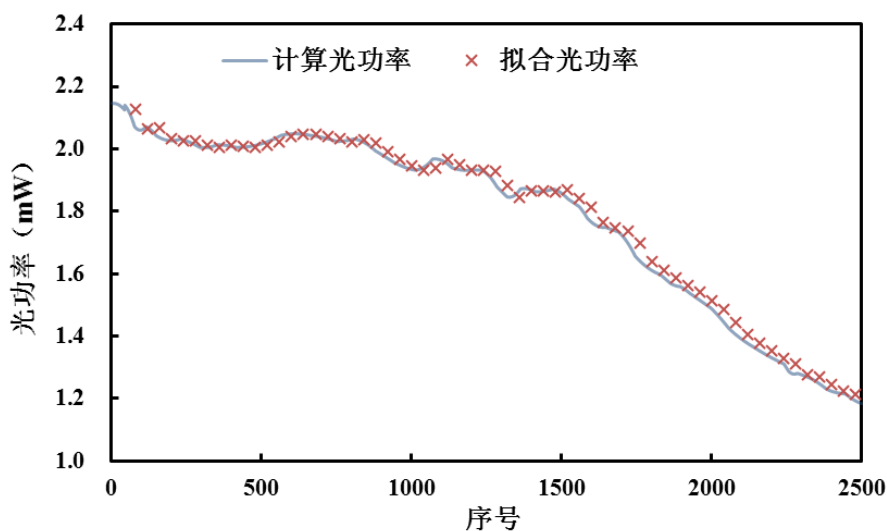


图 7-6 计算光功率与拟合光功率对比图

7.5 带宽响应曲线绘制及分析

题中要求绘制不同环境温度和不同偏置电流的带宽相应曲线曲线，并且分析环境温度和偏置电流对带宽曲线的影响。为了较好的说明两个因素对带宽曲线的影响，本节中将先固定偏置电流的值，作出不同环境温度下的带宽响应曲线，并分析；再固定环境温度，作出不同偏置电流下的带宽响应曲线，并分析。

(1) 带宽曲线数据求取思路

绘制相同偏置电流下，不同环境温度的带宽响应曲线和绘制相同环境温度下，不同偏置电流的带宽响应曲线的思路相同，所以此处只以绘制在相同偏置电流下，不同环境温度的带宽响应曲线为例，对求取绘制曲线需要数据的思路进行说明。

(2) 带宽曲线数据计算步骤

在计算相同偏置电流下，不同环境温度的带宽响应曲线数据时，已知数据有偏置电流 I 、环境温度 T_0 和频率 f 。数据计算步骤为：

Step1: 用式 (6-8) 计算光功率 P ;

Step2: 根据式 (7-5) 计算载流子浓度 N_s ;

Step3: 根据式 (7-6) 至式 (7-8) 计算光功率 P_s ;

Step4: 根据式 (7-19) 计算振幅 $H(f)$ 。

数据计算流程如图 7-7 所示, 计算程序代码见附录 B。

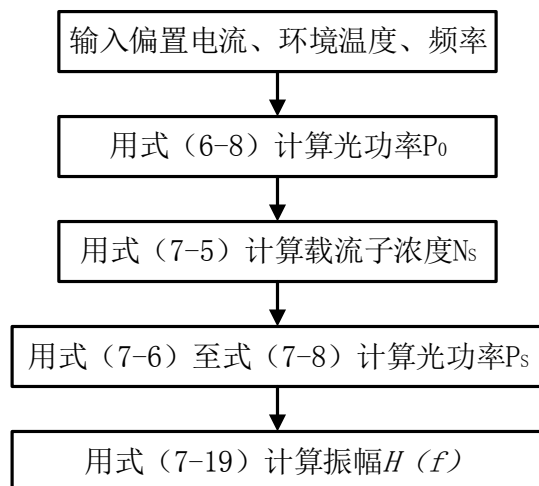


图 7-7 数据计算流程图

(3) 带宽响应曲线的绘制及分析方法

通过改变环境温度的大小, 可得到不同环境温度下带宽曲线的数据。应用 excel 软件即可作出同一偏置电流下, 不同环境温度的带宽响应曲线。图 7-8 为 20℃下, 偏置电流为 7.5mA 时的带宽响应曲线。

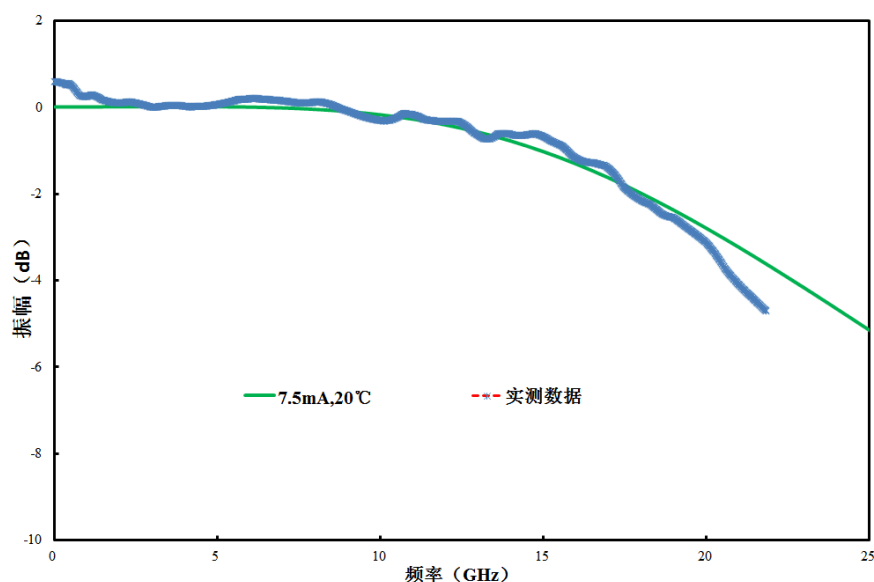


图 7-8 数据计算流程图

(4) 环境温度对带宽响应曲线的影响分析（偏置电流为 7.5mA）

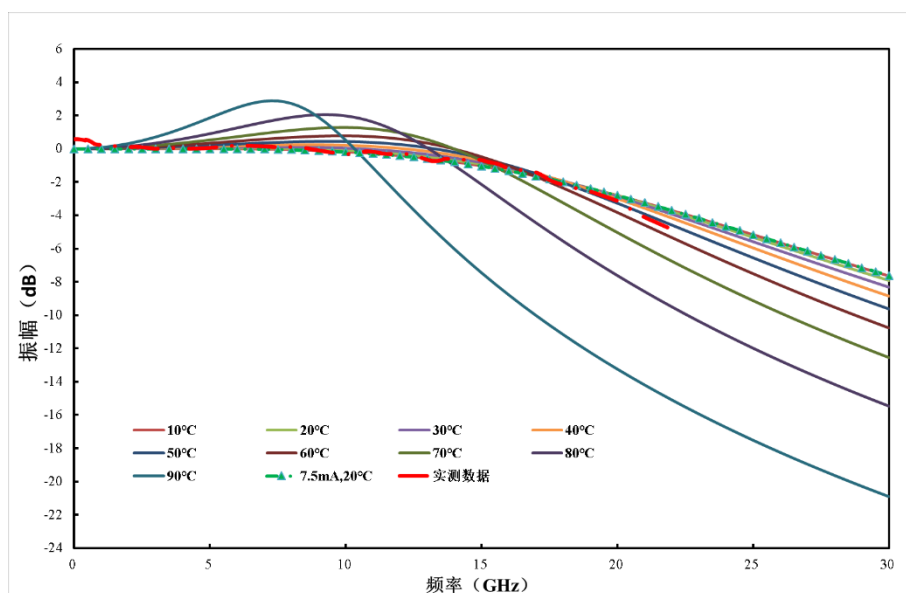


图 7-9 不同环境温度的带宽响应曲线图

图 7-9 即为不同环境温度下的带宽响应曲线,图 7-9 中,在同一偏置电流下,有以下规律:

- 1) 无论环境温度为多少,当频率为接近为 0 时,振幅为 0。在实际中,相当于没有加入小信号,所以最后不能测得振幅,与实际相符;
- 2) 当环境温度为 90°C、80°C 和 70°C 时,随着频率的升高,振幅有明显的先升高后下降的趋势,即在曲线中会呈现出波峰;
- 3) 当环境温度小于某一值时,随着频率的升高,振幅一直是下降的趋势;
- 4) 随着环境温度的增加,波峰是呈上升趋势,且在越来越小的频率处出现;
- 5) 环境温度越高,振幅下降速率越快。

(5) 偏置电流对带宽响应曲线的影响分析（环境温度为 20°C）

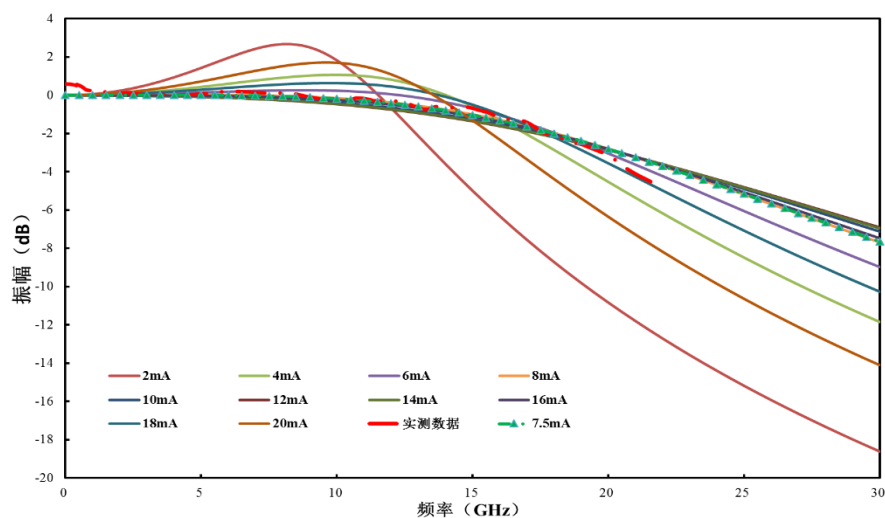


图 7-10 不同偏置电流的带宽响应曲线图

图 7-10 即为不同偏置电流下的带宽响应曲线,图 7-10 中,同一环境温度下,有以下规律:

- 1) 无论偏置电流为多少,当频率为接近为 0 时,振幅为 0。在实际中,相当于没有加入小信号,所以最后不能测得振幅,与实际相符;
- 2) 当偏置电流为 2mA、4mA 和 20mA 时,带宽响应曲线有明显的振幅随着频率的升高,振幅先升高后下降的趋势,即在曲线中会呈现出波峰;
- 3) 当偏置电流为其他值时,随着频率的升高,振幅一直是下降的趋势;
- 4) 随着偏置电流的增加,波峰是先下降,后上升的趋势,在偏置电流为 6-18mA 的区间中,没有波峰的出现;
- 5) 当偏置电流为 2mA、4mA、6mA、18mA 和 20mA 时,随着频率的增加,振幅的下降速率较快。从图中也能看出:当偏置电流小于一定值时,随着偏置电流的增加,振幅下降速率变慢;当偏置电流大于一定值时,随着偏置电流的增加,振幅下降速率变快。

(5) 偏置电流和环境温度与带宽 (10dB) 的关系

根据带宽模型计算出在不同环境温度 and 不同偏置电流下的带宽 (10dB), 绘制成曲线, 如图 7-11 和图 7-12 所示。

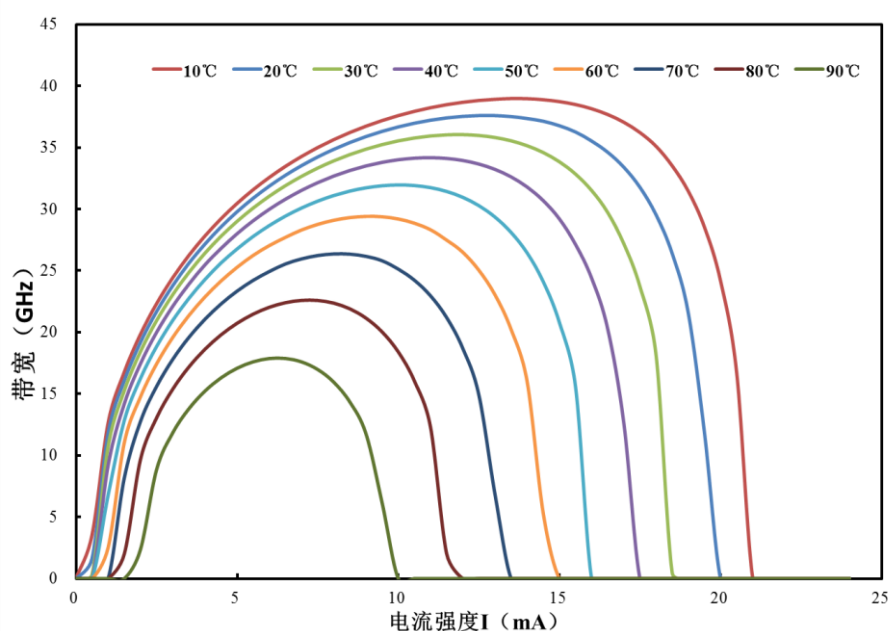


图 7-11 偏置电流与带宽关系曲线

从图 7-11 中可以看出,同一环境温度下,随着电流强度的增加,带宽是先增加,后减小的。以环境温度为 20℃ 下电流强度与带宽关系进行说明:当电流强度小于 10mA 时,随着电流强度的增加,带宽呈上升趋势,而且上升速率较快;当电流强度处于 10mA 和 17mA 之间时,带宽先上升后下降,而且上升和下降速率都较慢;当电流强度大于 17mA 时,带宽随着电流强度的增加而降低,而且下降速率较快。

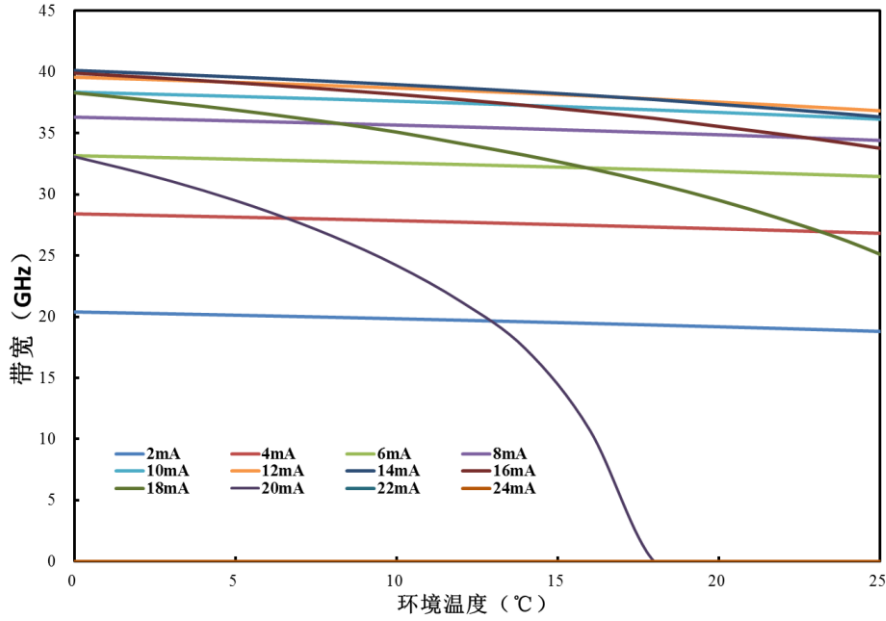


图 7-12 环境温度与带宽关系曲线

从图 7-12 中可以得出以下规律：

- 1) 当偏置电流小于 12mA 时，随着环境温度的升高，带宽曲线几乎是一条水平线，即在这个偏置电流范围内，环境温度对带宽的影响不大；
- 2) 当偏置电流大于 12mA 时，随着环境温度的升高，带宽曲线呈下降趋势。当偏置电流为 20mA 时，带宽曲线下落较快；
- 3) 当偏置电流处于 6 或 8mA 时，带宽曲线几乎为一条水平线，而且整体处于较高的带宽范围内，这与题中给出的一般 VCSEL 的工作电流为 6mA~8mA 相符合，佐证了该模型的建立及参数拟合结果的正确性。

7.6 获得更宽带宽的设计方案

通过上节中分析不同环境温度与不同偏置电流下的带宽仿真带宽响应曲线可知，环境温度与偏置电流的大小对激光器带宽有着显著的影响，因此，可以通过恒温箱与固定电流等固定外界输入参数的方法来提高激光器的带宽。此外，在带宽模型所拟合的 8 个参数 (η_i 、 k 、 τ_p 、 τ_n 、 G_0 、 N_0 、 ε 和 β 均) 中，有一些参数可以通过改变激光器的结构来改变，从而实现提高激光器带宽的目的。

在本题目带宽模型中，不可变参数有： τ_p 、 τ_n 、 G_0 、 N_0 ，这些参数有具体的物理学含义，无法通过改变装置结构来改变。可变参数有 ε 、 β 、 k 、 η_i 。因此，对这四个参数进行敏感性分析，找出以带宽影响最大的参数，并由此从设计上改变这些参数，从而提高激光器带宽。

本文采用单因素分析法对各个参数进行敏感性分析，固定其他参数。逐个改变参数取值，做出一系列仿真曲线进行对比。通过各参数在不同取值下的带宽仿

真曲线进行对比确定参数敏感性。参数 ε 的敏感性分析如图 7-13 所示。

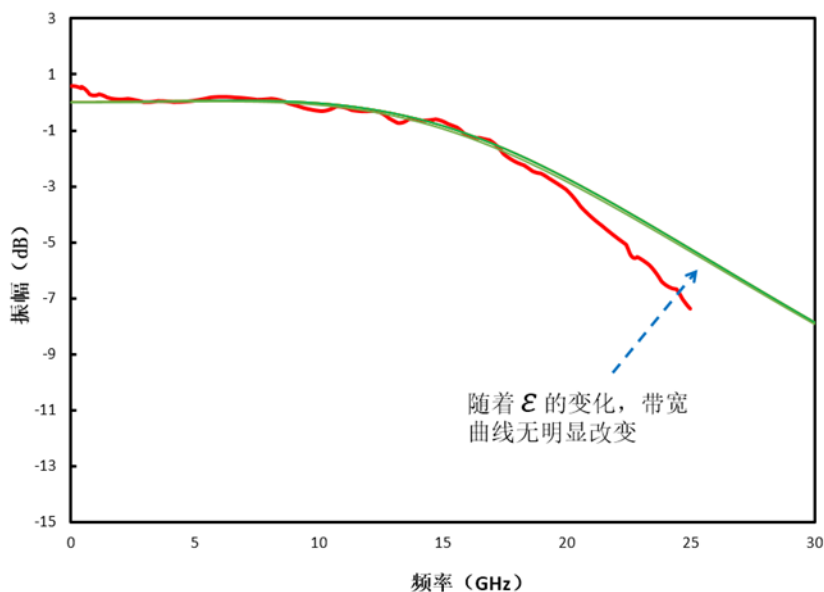


图 7-13 参数 ε 的敏感性分析图

通过对比带宽仿真图 7-13 可知,随着 ε 值的变化,带宽曲线未发生明显改变。由此可知 ε 对带宽影响较小。用同样方法对其他另外参数作敏感性分析,以 k 的分析为例作出敏感性分析图如图 7-14 所示。

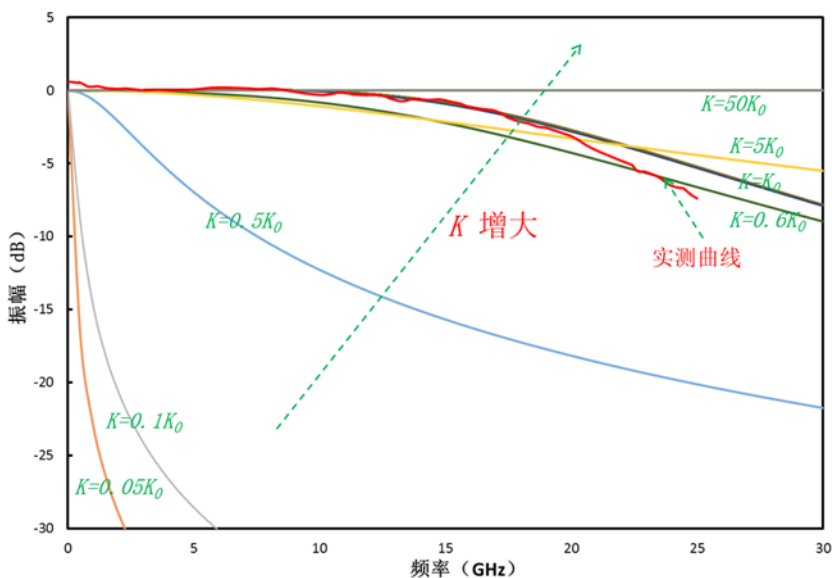


图 7-14 参数 k 的敏感性分析图

在图 7-14 中,将参数 k 值设为拟合值的 (0.01~100) 倍之间变化,并仿真出相应带宽曲线。通过分析可知,随着参数 k 取值的增加,振幅曲线斜率逐渐减小,相应带宽逐渐增加。 k 值与带宽呈现出很好的正相关性。敏感性较好的参数还有受激辐射耦合系数 β 与 η_i ,因此,可以通过改变激光器结构以增加 k 、 β 的取值来

提高激光器的相应带宽^{[5][6]}。

7.7 VCSEL 带宽模型参数的优化

VCSEL 带宽模型的参数影响了带宽模型仿真曲线的形态，当其中的一些参数发生变化时，甚至可能会出现激光器在 3dB 范围内的部分频率高于 0 频的现象，需要通过参数优化调整来避免这一现象。通过控制变量法逐一改变某单一参数的取值，进行仿真绘制带宽曲线可知， $(\eta_i, k, \tau_p, \tau_n, N_0, \varepsilon, \beta)$ 这 7 个参数不影响带宽曲线的仿真。下面以 N_0 的敏感性分析为例进行说明。

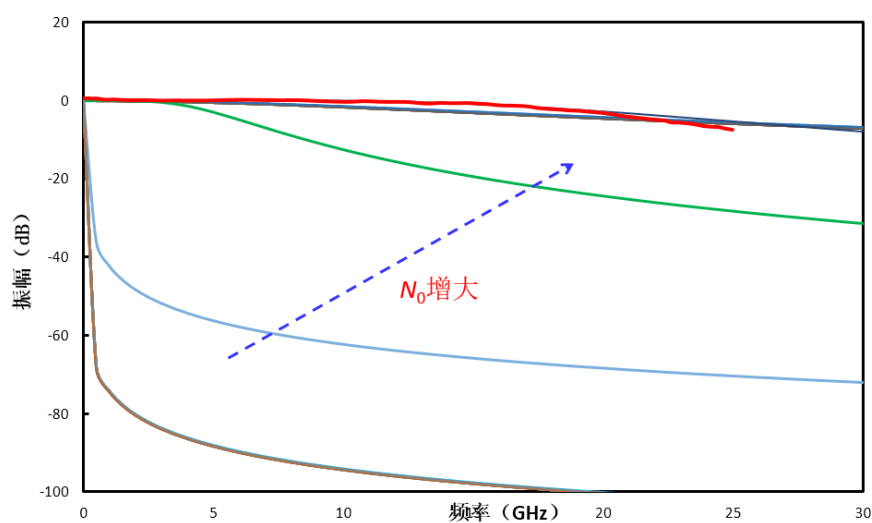


图 7-15 N_0 影响下的带宽响应曲线

由图 7-15 可知， N_0 在 $(0.01 \times N_{0a}, 100 \times N_{0a})$ 范围内变化时，仿真曲线会发生变化，但均不会出现振幅高于 0 的情况。表明 N_0 的变化不会影响带宽曲线是否产生峰值。其它 6 个参数 $(\eta_i, k, \tau_p, \tau_n, \varepsilon, \beta)$ 敏感性分析结果与此类似，如图 7-16 和图 7-17 所示。

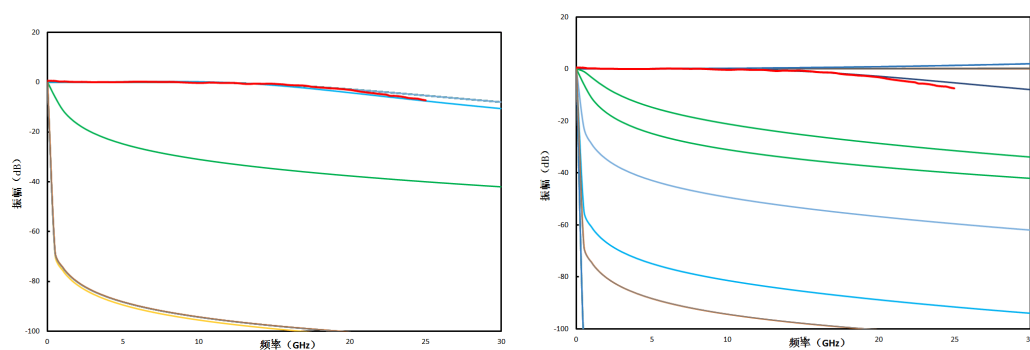


图 7-16 τ_p 和 τ_n 影响下的带宽响应曲线

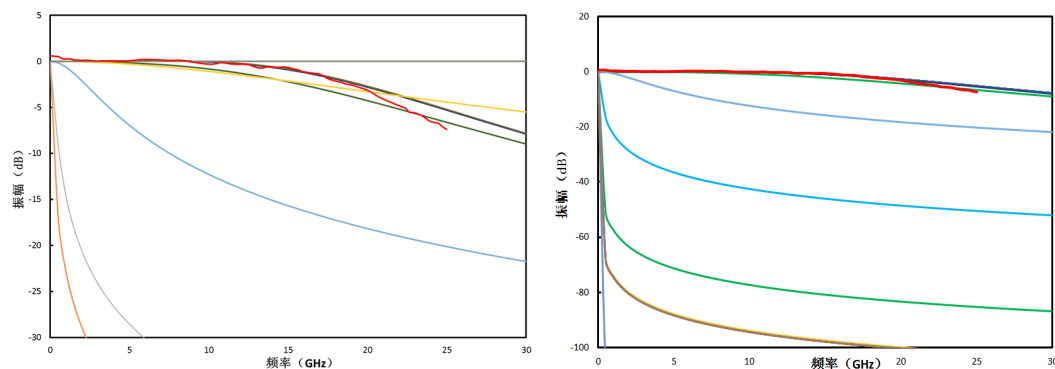


图 7-17 k 和 β 影响下的带宽响应曲线

参数 G_0 （增益系数）的变化会造成这一现象。将 G_0 的变化范围设为 $0.01 \sim 100G_{0a}$ (G_{0a} 为模型参数 G_0 的拟合值)，改变 G_0 后由不同 G_0 值作出的仿真曲线如图 7-18 所示。

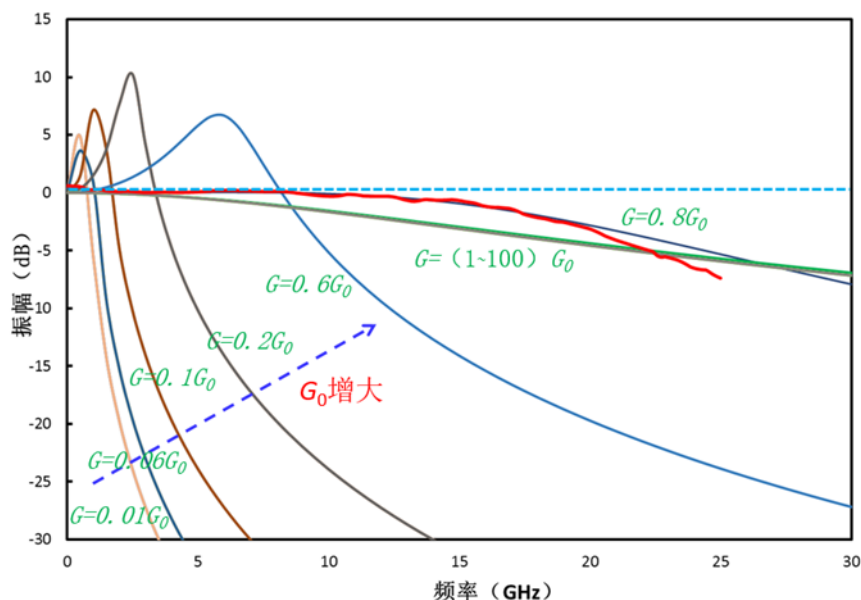


图 7-18 G_0 影响下的带宽响应曲线

通过对带宽仿真曲线的对比分析可知，随着 G_0 的增大，仿真曲线幅度异常程度先增大，后逐渐减小，直到 $G = 0.8G_0$ 时，即 1.83×10^7 ，带宽仿真曲线幅值趋于平坦且幅值小于 0。因此，可以在模型参数拟合过程中，将 $G_0 > G_{0a}$ 作为参数拟合的一个约束条件，由此拟合所得参数可使仿真曲线光滑平坦。

8 问题 4: VCSEL 带宽模型的改进

8.1 问题描述及分析

本题是开放性探索问题，目的是找出另一种带宽模型的建模方式，使模型运算根快。或者找出一种方案，在相同温度和偏置电流条件下得到更宽的带宽。

因此，本题通过文献调研找出新的带宽模型建模方式和对现有 VCSEL 小信号响应模型进行改进这两种思路进行研究。

8.2 激光器建模方法概述

基于电路级模型从描述半导体激光器有源区载流子和光子相互作用关系的速率方程出发，建立相应的等效电路模型，通过提取等效电路模型的参数来求解速率方程，以便进行器件特性的研究。这种方法大大简化了编程量，求解速度快，而且易于和微波射频集成电路计算机辅助设计软件相结合，是目前应用的最广泛而有效的方法。模型包括基于速率方程的带宽模型和基于速率方程的等效电路模型。下文将介绍基于速率方程的等效电路模型的建模过程。

8.3 基于速率方程的等效电路模型的建立

半导体激光器的一维速率方程^{[8][9]}为

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I_A}{\alpha} - \frac{N}{\tau_n} - g_0(N - N_0)(1 - \varepsilon S)S \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \Gamma \frac{\beta N}{\tau_n} + \Gamma g_0(N - N_0)(1 - \varepsilon S)S \end{cases} \quad (8-1)$$

速率方程中的 I_A 、 N 、 S 可以表示为稳态数值和随时间变化的交流小信号变量之和

$$I_A = I_{A0} + ie^{j\omega t} \quad (8-2)$$

$$N = N_{00} + ne^{j\omega t} \quad (8-3)$$

$$S = S_0 + se^{j\omega t} \quad (8-4)$$

对有源区注入恒定电流时，速率方程可以变换为

$$0 = \frac{I_{A0}}{\alpha} - \frac{N_{00}}{\tau_n} - g_0(N_{00} - N_0)(1 - \varepsilon S_0)S_0 \quad (8-5)$$

$$0 = -\frac{S_0}{\tau_p} + \Gamma \frac{\beta N_{00}}{\tau_n} + \Gamma g_0(N_{00} - N_0)(1 - \varepsilon S_0)S_0 \quad (8-6)$$

在半导体光电子器件中，PN 电压和载流子密度之间的关系可以用肖特基关系来表征

$$N=N_0 \left[\exp \left(\frac{qV_j}{2kT} \right) - 1 \right] \quad (8-7)$$

其中 N_0 为平衡载流子浓度， V_j 为结电压， q 为电子电荷， k 为玻尔兹曼常数。

假设结电压 V_j 可以表示为

$$V_j = V_{j0} + v_j e^{j\omega t} \quad (8-8)$$

其中 V_{j0} 为端口电压的稳态数值。

将式（8-2）至式（8-8）代入速率方程，在偏置点附近对速率方程进行傅里叶变换，可以得到变换的小信号速率方程

$$v_j = i(R_{x1} + R_{x2} + j\omega L_x) \quad (8-9)$$

$$i = v_j(1/R_1 + j\omega C_d) + i_s \quad (8-10)$$

其中

$$i_s = \alpha g_0 (N_{00} - N_0)(1 - 2\xi S_0)s \quad (8-11)$$

$$L_x = \frac{\tau_p R_d}{g_0 \tau_n S_0} \quad (8-12)$$

$$R_d = \frac{2kT}{qI_{th}} \quad (8-13)$$

$$C_d = \frac{\tau_n}{R_d} \quad (8-14)$$

$$R_1 = \frac{R_d}{1 + g_0 \tau_n S_0} \quad (8-15)$$

$$R_{x1} = \frac{\xi R_d}{g_0 \tau_n} \quad (8-16)$$

$$R_{x2} = \frac{\Gamma \beta R_d \tau_p I_{th}}{\alpha g_0 \tau_n S_0^2} \quad (8-17)$$

$$R_2 = R_{x1} + R_{x2} \quad (8-18)$$

其中， I_{th} 为阈值电流，表达式为

$$I_{th} = \frac{\alpha}{\tau_n} \left(\frac{1}{\tau_p \Gamma g_0} + N_0 \right) \quad (8-19)$$

网络的 Y 参数可以表示为

$$Y_{11}^o = j\omega C_p + \frac{j\omega C_{so}}{1 + \omega^2 C_{so}^2 L_p + j\omega C_{so} R_p} \quad (8-20)$$

其中 $\omega = 2\pi \times \text{freq}$ 为角频率。忽略 ω 的高次项

$$\text{Re}(Y_{11}^o) \approx \frac{\omega^2 C_{so}^2 R_p}{1 + (\omega C_{so} R_p)^2} \quad (8-21)$$

即

$$\frac{1}{\text{Re}(Y_{11}^o)} = R_p + \frac{1}{\omega^2 C_{so}^2 R_p} \quad (8-22)$$

在低频情况下, $\omega^2 C_{so} L_p \ll 1$, $\omega R_p C_{so} \rightarrow 0$, 有

$$Y_{11}^o \approx j\omega C_p + j\omega C_{so} \quad (8-23)$$

即

$$C_p + C_{so} = \frac{\text{Im}(Y_{11}^o)}{\omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0} \quad (8-24)$$

L_p 的值为

$$L_p = \frac{1}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{Y_{11}^o - j\omega C_p} - \frac{1}{j\omega C_{so}} \right) \quad (8-25)$$

网络的阻抗 Z 参数可以表示为

$$Z_{11}^D = R_p + \frac{R_s}{1 + j\omega C_s R_s} = R_p + \frac{R_s - j\omega C_s R_s^2}{1 + (\omega C_s R_s)^2} \quad (8-26)$$

通常情况下, 对于一般的半导体激光器来说, R_p 的值是与偏置电流无关的, 有

$$R_s = \text{Re}(Z_{11}^D) - R_p \Big|_{\omega \rightarrow 0} \quad (8-27)$$

$$C_s = \frac{1}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{Z_{11}^D - R_p} \right) \quad (8-28)$$

利用式 (8-22)、(8-25)、(8-27) 和 (8-28), 可以得到寄生网络等效电路模型的参数。以上即为基于速率方程的等效电路模型。

8.4 基于比例系数 k 与激光器参数函数关系带宽模型的建立

根据调研, 根据激光器的腔长、内部的损耗和镜面反射率, 可以算出比例系数 k 。设 R_l 是顶部的镜面反射率, R_b 是底部的镜面反射率, 则镜面损耗为

$$\alpha_m = -\frac{1}{L} \log(R_l R_b) \quad (8-29)$$

从顶部镜面输出的能量比例为

$$F = -\frac{(1-R_l)}{(1-R_l) + \sqrt{\frac{R_l}{R_b}}(1-R_b)} \quad (8-30)$$

设 α_i 是内部损耗，则光子寿命可以由下式算出

$$\tau_p = \frac{1}{v_g(\alpha_m + \alpha_i)} \quad (8-31)$$

由内部损耗、镜面损耗，能量输出比例，可以算出，光学效率为

$$\eta = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_i} F \quad (8-32)$$

比例系数

$$k = \frac{V\eta hc}{\Gamma \tau_p \lambda_0} \quad (8-33)$$

将比例系数代入问题 3 的模型中即可得到新的 VCSEL 带宽模型。

其中

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\frac{\eta_i Vhc}{\tau_p \lambda_0} + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{\left(1 + \varepsilon P_s / \frac{\eta_i Vhc}{\tau_p \lambda_0}\right)^2} \quad (8-34)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p \left(\frac{\eta_i Vhc}{\tau_p \lambda_0} + \varepsilon P_s\right)} - \frac{(1-\beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n \left(1 + \varepsilon P_s / \frac{\eta_i Vhc}{\tau_p \lambda_0}\right)^2} \quad (8-35)$$

8.5 获得更宽带宽的方案

根据问题 3 中的实测值，对建立的基于比例系数 k 与激光器参数函数关系带宽模型，得到了较好的拟合结果，拟合值与实测值对比效果如图 8-1 所示。

在 7.6 节中已经得出：随着比例系数 k 的增加，带宽呈增加趋势。所以在此问中，可以通过改变式（8-29）至式（8-33）中的某些参数来增大比例系数，从而增大带宽。例如，可以增大激光器的镜面反射率，以增大从顶部镜面输出的能量比例，从而增大光学效率，以达到增大比例系数的目的。

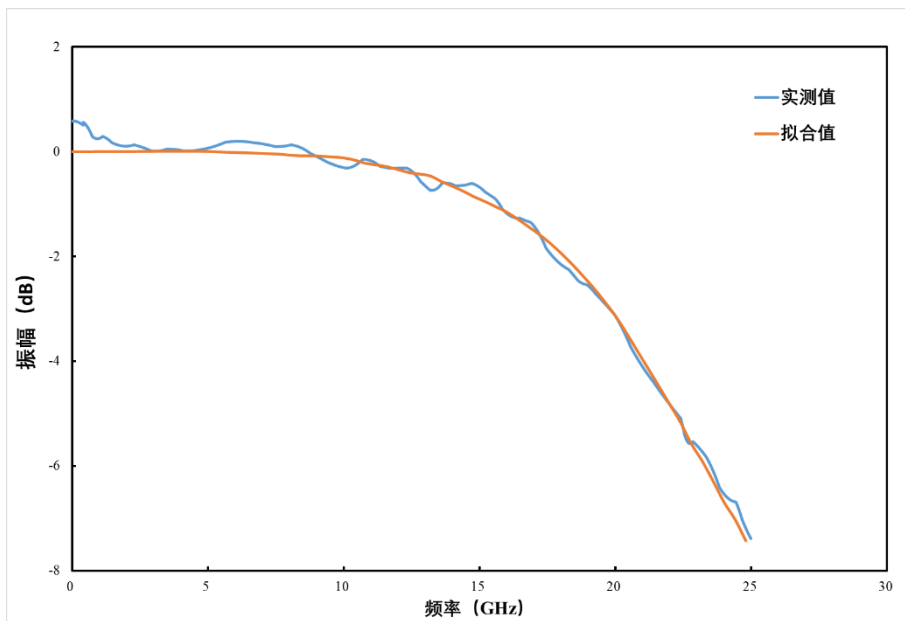


图 8-1 实测值与拟合值对比图

9 模型总结与评价

本文研究的是能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。根据现有的经典 L-I 与小信号带宽物理模型，通过与实测数据拟合回归得到最优参数组合，再通过数值求解仿真出并回归，最后对模型进行了必要的修正。作为本文研究的核心，参数拟合采用了现代优化多种群遗传算法，最终实现了参数的精确拟合。

本模型的优点有：

1) 遗传算法是一种全局收敛优化算法，一般不会出现局部收敛的情况，在保证种群数量足够的情况下模型全局收敛性高。

2) 模型的修正不仅仅基于统计数据的分布特征，而是基于深刻的物理学背景与公认的经验，因此，模型具有物理与统计上的双重合理性。

本模型的缺点有：

1) 由于遗传算法的随机性，对某一特定物理参数的搜索往往具有随机性。因此容易造成模型参数的拟合值与物理学上的合理取值有一定误差。

2) 物理模型的推导过程中由于计算过于复杂而提出了一些假设，并采纳了一些经验公式。对于精确的模型而言，这些假设与经验公式的合理性仍然值得进一步深入研究。

参考文献

- [1] xinyue1314. DB 是什么单位. <https://zhidao.baidu.com/question/356802532.html>. 2017.09.18.
- [2] Mena P V, Morikuni J J, Kang S M, et al. A simple rate-equation-based thermal VCSEL model[J]. 1999, 17(5):865-872.
- [3] D. M. Byrne and B. A. Keating, "A laser diode model based on temperature dependent rate equations," IEEE Photon. Technol. Lett., vol.1, pp. 356–359, Nov. 1989.
- [4] J. W. Scott, R. S. Geels, S. W. Corzine, and L. A. Coldren, "Modeling temperature effects and spatial hole burning to optimize vertical-cavity surface-emitting laser performance," IEEE J. Quantum Electron., vol.29, no. 5, pp. 1295–1308, 1993.
- [5] Javro S A, Kang S M. Transforming Tucker's linearization laser rate equations to a form that has a single solution regime[J]. Journal of Lightwave Technology, 2002, 13(9):1899-1904.
- [6] Scott J W, Geels R S, Corzine S W, et al. Modeling temperature effects and spatial hole burning to optimize vertical-cavity surface-emitting laser performance[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1993, 29(5):1295-1308.
- [7] 欧阳丽. 垂直腔体表面发射激光器等效电路模型的研究[D]. 华东师范大学, 2011.
- [8] Tucker R, Kaminow I. High-frequency characteristics of directly modulated InGaAsP ridge waveguide and buried heterostructure lasers[J]. Lightwave Technology Journal of, 1984, 2(4):385-393.
- [9] Tucker R S, Pope D J. Microwave Circuit Models of Semiconductor Injection Lasers[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques, 1982, 31(3):289-294.

附录 A：H(f)表达式推导（不忽略 $\varepsilon s(f)$ 项）

（一） $n(f)$ 与 $s(f)$ 关系式一推导：

根据式（7-10）中第一个式子有：

$$\begin{aligned} (j2\pi f) n(f) e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i (I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{n(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} + \frac{\eta_i i(f) e^{j2\pi ft}}{q} \\ &\quad - \frac{G_0 S_s n(f) e^{j2\pi ft} + G_0 (N_s - N_0) s(f) e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

等式右边加上并减去 $\frac{G_0(N_s-N_0)S_s}{1+\varepsilon S_s}$ 得：

$$\begin{aligned} (j2\pi f) n(f) e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i (I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} \\ &\quad + \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f) e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - \frac{G_0 S_s n(f) e^{j2\pi ft} + G_0 (N_s - N_0) s(f) e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

根据式（7-3），上式等号右边前三项等于 0，所以：

$$\begin{aligned} (j2\pi f) n(f) e^{j2\pi ft} &= \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f) e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - \frac{G_0 S_s n(f) e^{j2\pi ft} + G_0 (N_s - N_0) s(f) e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f) e^{j2\pi ft}} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

上式合并同类项：

$$\begin{aligned}
(j2\pi f) n(f) e^{j2\pi ft} = & G_0 (N_s - N_0) S_s \left[\frac{\varepsilon S(f) e^{j2\pi ft}}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f) e^{j2\pi ft})} \right] \\
& + \frac{\eta_i i(f) e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\
& - \frac{G_0 S_s n(f) e^{j2\pi ft} + G_0 (N_s - N_0) s(f) e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f) e^{j2\pi ft}}
\end{aligned} \tag{A-4}$$

忽略 $e^{j2\pi ft}$ 项:

$$\begin{aligned}
(j2\pi f) n(f) = & G_0 (N_s - N_0) S_s \left[\frac{\varepsilon S(f)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f))} \right] \\
& + \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f) + G_0 (N_s - N_0) s(f)}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f)}
\end{aligned} \tag{A-5}$$

上式合并同类项:

$$(j2\pi f) n(f) = G_0 \left[\frac{-S_s n(f) - (N_s - N_0) s(f) - \varepsilon S_s S_s n(f)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f))} \right] + \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} \tag{A-6}$$

将上式进行合并同类项, 得到 $n(f)$ 与 $s(f)$ 关系式一:

$$n(f) = \frac{-\frac{G_0 (N_s - N_0) s(f)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f))} + \frac{\eta_i i(f)}{q}}{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f))}} \tag{A-7}$$

(二) $n(f)$ 与 $s(f)$ 关系式二推导:

根据式(7-10)中第一个式子有:

$$\begin{aligned}
(j2\pi f) s(f) e^{j2\pi ft} = & -\frac{S_s}{\tau_p} - \frac{s(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{\beta n(f) e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\
& + \frac{G_0 (N_s + n(f) e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f) e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon S(f) e^{j2\pi ft}}
\end{aligned} \tag{A-8}$$

等式右边加上并减去 $\frac{G_0(N_s-N_0)S_s}{1+\varepsilon S_s}$ 得：

$$\begin{aligned}
 (j2\pi f)s(f)e^{j2\pi ft} = & -\frac{S_s}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} \\
 & - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\
 & + \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}}
 \end{aligned} \tag{A-9}$$

根据式 (7-4)，上式等号右边前三项等于 0，所以：

$$\begin{aligned}
 (j2\pi f)s(f)e^{j2\pi ft} = & -\frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\
 & + \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}}
 \end{aligned} \tag{A-10}$$

忽略 $e^{j2\pi ft}$ 项：

$$(j2\pi f)s(f) = G_0 \left[\frac{(N_s + n(f) - N_0)(S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)} - \frac{(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] - \frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} \tag{A-11}$$

对上式进行多项式合并与拆分：

$$(j2\pi f)s(f) = G_0 \left[\frac{(N_s - N_0)s(f)}{[1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)](1 + \varepsilon S_s)} + \frac{n(f)(S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)} \right] - \frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} \tag{A-12}$$

将上式进行合并同类项，得到 $n(f)$ 与 $s(f)$ 关系式二：

$$\begin{aligned}
 n(f) = & \frac{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{[1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)](1 + \varepsilon S_s)}}{\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0(S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)}} s(f)
 \end{aligned} \tag{A-13}$$

(三) $\frac{s(f)}{i(f)}$ 的表达式推导：

(一) 和 (二) 中已经得到两个 $n(f)$ 与 $s(f)$ 的关系式，联立两式可得：

$$\begin{aligned}
& - \frac{G_0 (N_s - N_0) s(f)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))} + \frac{\eta_i i(f)}{q} \\
& \frac{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))}}{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{[1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)](1 + \varepsilon S_s)}} s(f) \\
& = \frac{\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 (S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)}}{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))}} s(f)
\end{aligned} \tag{A-14}$$

等式两端同时除以 $i(f)$ 得：

$$\begin{aligned}
& - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))} \left(\frac{s(f)}{i(f)} \right) + \frac{\eta_i}{q} \\
& \frac{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))}}{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{[1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)](1 + \varepsilon S_s)}} \left(\frac{s(f)}{i(f)} \right) \\
& = \frac{\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 (S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)}}{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))}} \left(\frac{s(f)}{i(f)} \right)
\end{aligned} \tag{A-15}$$

合并 $\frac{s(f)}{i(f)}$ 项：

$$\begin{aligned}
& - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))} \left(\frac{s(f)}{i(f)} \right) + \frac{\eta_i}{q} \\
& = \left[(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f))} \right] \\
& \times \frac{(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{[1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)](1 + \varepsilon S_s)}}{\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 (S_s + s(f))}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)}} \left(\frac{s(f)}{i(f)} \right)
\end{aligned} \tag{A-16}$$

得到 $\frac{s(f)}{i(f)}$ 的表达式：

$$\left(\frac{s(f)}{i(f)}\right) = \frac{\frac{\eta_i}{q} \left[\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right]}{\left[(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{(1 + \varepsilon S_s)} \right] \left[(j2\pi f) + \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \right] + \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon S_s)(1 + \varepsilon S_s)} \left[\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right]} \quad (\text{A-17})$$

将上式写成下式的形式：

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (\text{A-18})$$

其中

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (\text{A-19})$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (\text{A-20})$$

附录 B：程序代码及结果文件说明

说明	程序代码	计算结果
	文件名	文件名
问题 1 中光功率和电流、环境温度的函数关系参数的拟合模型	Q1_1.m	A1_1.xlsx
问题 1 中 L-I 曲线绘制	Q1_2.m	A1_2.xlsx
问题 1 中确定保证用户正常使用激光器最高环境温度的计算	Q1_3.m	无文件
问题 2 中修正 L-I 模型的参数拟合	Q2_1.m	A2_1.xlsx
问题 2 中修正 L-I 模型的曲线绘制	Q2_2.m	A2_2.xlsx
问题 3 中带宽模型参数拟合	Q3_1.m	A3_1.xlsx
问题 3 中带宽响应曲线数据计算	Q3_2.m	A3_2.xlsx
问题 3 中敏感性分析数据计算	Q3_3.m	A3_3.xlsx
问题 4 中改进带宽模型参数拟合	Q4_1.m	A4_1.xlsx

注：程序代码和结果文件见附件，此处只作文件说明！