

1 问题重述

我国经常发生洪水、溃坝溃堤，进而引发泥石流灾害对国家和人民生命财产造成严重的损失。因此，在汛期河道堤防一旦出现决口，必须迅速堵口以减轻洪水破坝造成的危害。其中，利用直升飞机投放堵口组件是开展封堵溃口的有效方法。由于投入溃口的重物在落水后会受到溃口水流的作用而向下游偏移，因此我们必须掌握重物落水后的运动过程，在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积和重量的重物，使其落水后能够沉底、并保持在预想的位置，以减少无效投放。

由于溃坝溃堤的高度危害性、不可重复性和经济损失过大，肯定无法通过相关实物试验去研究封堵用重物落在溃口后的运动过程，而只能先通过理论分析和小型试验获取相关数据的方法进行研究。由于具体情况不同（如溃口的纵、横断面形状；溃口底面的坡度、粗糙度；流速等）都会影响封堵重物落在溃口后的运动过程和沉底后的状况，会使问题复杂化。因此，本文只在简单情况下，通过固定大多数因素、条件，采用单因子分析法，分别考虑在不同的影响因素下物体落入水中的运动状态模型。

本次试验选取几种重物形状、四种不同速度的稳定水流、在三种不同的高度多次重复进行投放试验。通过试验试图解决：

（1）分析影响重物在水中运动过程的因素，并建立大实心方砖落水后运动过程的数学模型。

（2）在试验基础上，建立包含上述各种因素，从而能够适应不同情况的、描述重物水中运动过程的数学模型。

（3）对所建立的数学模型进行误差分析，并利用已有的资料验证所建立的数学模型的合理性，并根据数学模型提出让堵口重物恰好落在最有效位置触底的猜想和应该进行哪些新试验来验证这个猜想。

（4）根据水力学理论模型，选择对过程影响较大的相似准则对本试验及所建立的新模型的结果加以推广，并对未来的试验和研究工作提出建议。

2 问题分析

2.1 问题分析

对于问题一，要建立大实心方砖落水后的运动方程，需分析大实心方砖在水中的受力情况，根据牛顿第二定律建立微分方程表达式，可分别求出大实心方砖在水平方向和竖直方向上位移随时间的变化关系，也就得到了大实心方砖落水后对时间 t 的参数方程。

对于问题二，问题一的分析已考虑不同重物放置方式、不同水流速度和不同高度下对重物落水后的运动方程的影响，但依据题意本题在问题一的基础上还应考虑重物形状参数的影响，从而建立起适应不同形状、不同重物放置方式、不同水流速度和不同高度下重物落水的运动方程。

对于问题三，对所建立的模型进行误差分析，首先对小型试验数据利用最小二乘原理求出模拟曲线，分别计算试验数据和模拟曲线、理论曲线的均方差，分析理论模型的合理性。要求堵口重物在最有效的位置触底，即考虑重物在水平方向 x 上的位移，同时还需保证重物触底时的稳定性。

对于问题四，依据流体力学知识，选取对过程影响较大的相似准则，将小型试验推广到真实情况。利用选取的相似准则，将实际数据反馈到所建的模型中，求得重物沉底时在水平方向上的移动距离。

2.2 数据分析及校正

由于数据来源于摄像机隔着玻璃的录像截图（如图 1），将不可避免地引入误差。因此，首先需要对数据进行预处理。

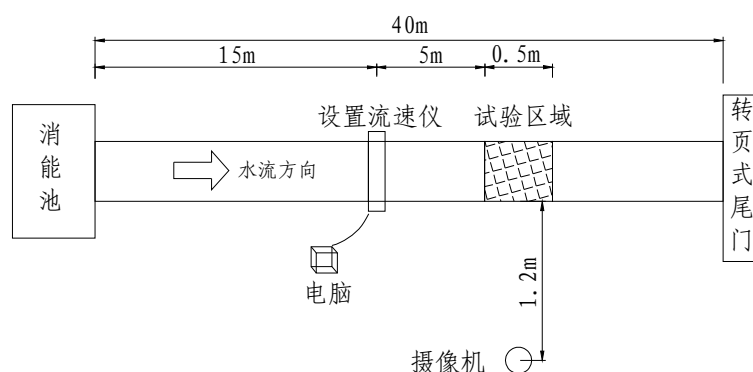


图 1 试验平面布置图

依题意可知，附件数据中的 NaN 表示某时刻重物已经触底或实验录像模糊无法读取的数据。显然，对于已经触底的情况，可直接做舍弃处理；而对由于录像模糊无法读取的数据，则需要通过一定插值方法（如多项式拟合）对其进行插值。

附件中所给的数据为显示在玻璃网格上的重物的重心纵横坐标值，其值并不完全代表重物的真实位置。由于重物在水中的运动轨迹与玻璃具有一定距离，使得所读出的数据与重物运动的真实位置存在一定的偏差。根据折射定理有

$$\begin{cases} \sin i / \sin r = n \\ \tan i = \sqrt{(25 - x')^2 + (20 - y')^2} / 120 \\ \tan \theta = \frac{|y' - 20|}{25 - x'} \\ x = x' - 20 * \tan r * \cos \theta \\ y = y' \pm 20 * \tan r * \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

式中 i 为入射角， r 为折射角，入射角与折射角的关系如图 2， θ 为入射线在 xy 平面上的投影与 x 轴的夹角。在等式 $y = y' \pm 20 * \tan r * \sin \theta$ 中，当 $y \geq 20$ 中，取正号，否则取负号。 n 为水相对于空气的折射率 ($n = 1.33$)， x' 为实验数据， x 为修正后的数据。修正后的数据会出现负数，显然这是不合理的，判为误读，需要采取一定的方法再对其进行校正。

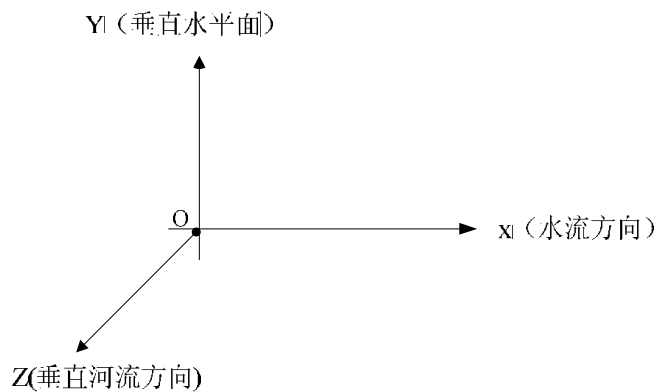


图 2 坐标轴的建立

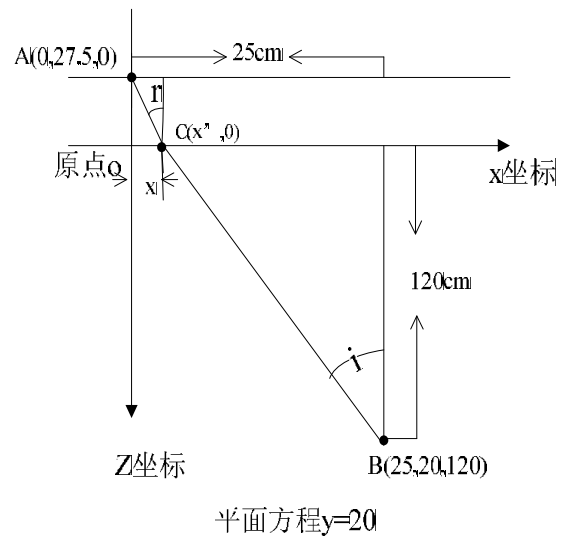


图 3 数据校正原理图

以图 2 所示，取实验区域的左下角为坐标原点 O ，水流方向为 x 坐标轴，垂直于河面的方向为 y 坐标轴建立坐标系（若无特殊说明，下文均采用此坐标系）。 $A(0, 27.5, 0)$ 为重物重心在水面投放时的初始位置， x 为理想情形下在玻璃网格上读取的 A 点坐标值。经过 matlab 迭代计算， A 在无误读情形的在玻璃网格上的数值为 $(2.770, 26.669, 0)$ 。一般说来，当入射角 i 愈大，所读数据与重物真实位置的误差越大。定义平均角度误差 $\delta_{avg} = (e_c - e_b) / i$ ，其中 e_c 为重物在 A 点时所读的实验值与真实值之间的误差； e_b 为重物运动到横坐标值与摄像机的位置横坐标相等时，实验值与真实值的误差，通常可视为零。表 1 列出大实心方砖在距水面 0.12m 以竖放状态投入水面（取速度 $U = 0.55\text{ m/s}$ ）所

测得的原始数据与校正后的数据。同理，可得其他测量数据的校正值（未附其他校正值）。

表 1：试验数据与校正后的数据对比

试验数据	纵坐标(cm)	25.5	18.5	14.5	9.5	5.5
	横坐标(cm)	2.5	3.2	4.5	7	10.5
校正后数据	横坐标	0.0008	0.7529	2.2048	4.9979	8.9021
	纵坐标	26.189	18.312	13.811	8.186	3.6887

3 问题假设及基本符合说明

3.1 问题假设

1) 假设重物在水中运动时不会和水槽边壁发生碰撞，且重物触底的瞬间即将重物认为静止不动，不考虑重物在底面发生的偏转和滑移；

2) 假设水流为速度不变的稳定水流，且重物运动过程中不发生偏转；

3) 由于本实验中投掷高度较小，假设重物从某一高度下落至水面时无能量损失，即竖直方向初速度不变；

4) 假设重物在水面放置，其运动过程为一质点的运动，不考虑形状的变化，也就是不考虑物体在水表面的运动过程；

5) 假设对于蜂巢类和方砖类试件，平放时试件有两条边平行于水流方向，立方和竖放时试件有两条边平行于竖直方向。

3.2 基本符号说明

名称	符号	单位	名称	符号	单位
质量	m	kg	拖曳力系数	C_D	
密度	ρ	kg/m^3	上举力系数	C_L	
重物的体积	V	m^3	重物的投影面积	A	m^2
溃口平均水流速度	U	m/s	重物的高度	s	m
水深	H	m	重物的长度	l	m
重物离地面的高度	h	m	重物的宽度	b	m

4 问题一求解

4.1 模型建立

影响水流作用力因素^[1]主要有：流体的流速，以 U 表示；流体的密度 ρ （常在研究分层流时考虑）；流体的动力粘滞系数 k ；边界层厚度 δ ；水深 H ，重物投放的高度 h ，即初始摆放位置；重物在水平方向的初始速度 v_{xo} ；重物最低部（底边）与壁面间的距离 y ；重物宽度 b 、高度 s 、顺水流方向上的长度 l ，即重物的形状、大小的影响。另外，在考虑物体在水下翻转中还常考虑物体迎流面的法线方向与流体方向夹角 θ ，同时如果重物不是实心块体，在研究空心块体的时候需要考虑空心率 η 。因此，水流作用力可表达为：

$$F = f(U, \rho, \mu, \delta, H, h, y, l, s, b, \theta, \eta, v_{xo})$$

本文不考虑重物和边界层以及壁面间的影响，重物在水中发生的偏转的现象也不考虑，再加上流体水的动力粘滞系数已知，所以，水流作用力可简化为

$$F = f(U, H, h, y, l, s, b, \eta, v_{xo})$$

取单个块体进行研究，块体在水中的受力如图 4 所示，大实心方块受到的作用力有水流拖曳力、有效重度、上举力。即水平方向上的拖曳力 F_D ，竖直方向的有效重力 $G_{\text{有效}}$ 和上举力 F_L ，各力的计算表达式如下：

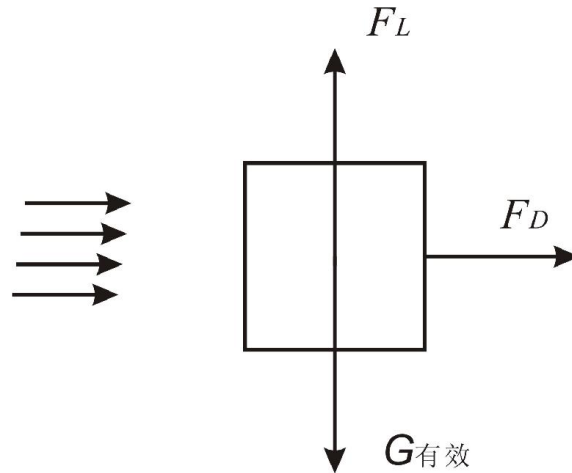


图 4 块体在水中运动的受力示意图

根据牛顿运动定律，块体在水平方向上的拖曳力提供其水平流向上加速度，其方程如下：

$$\begin{cases} F_D = C_D \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} A_1 (U - v_x)^2 \\ F_D = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \end{cases} \quad (2)$$

式 (2) 中 C_D 为拖曳力系数, A_1 为块体在垂直水流方向上的投影面积, U 为水流速度, v_x 为块体在水流方向上的运动速度。解方程组 (2) 得

$$C_D \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} A_1 (U - \frac{dx}{dt})^2 = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

为了便于计算, 记 $p = \frac{dx}{dt}$, $C = \frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m}$, 则式 (3) 可化为

$$C(U - p)^2 = \frac{dp}{dt}$$

解得

$$p = U + \frac{1}{C_1 - Ct}$$

进一步解得

$$x = Ut - \frac{1}{C} \ln(Ct - C_1) \Big|_{t=0}^t + C_2$$

带入初值

$$\begin{cases} x = 0, t = 0 \\ \frac{dx}{dt} = 0, t = 0 \end{cases}$$

最后求得 x 与 t 的函数关系式如下,

$$x = Ut - \frac{1}{\frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m}} \ln\left(\frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m} t + \frac{1}{U}\right) + \frac{1}{\frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m}} \ln\left(\frac{1}{U}\right)$$

块体在竖直方向上受到有效重力(即重力与浮力之差)和上举力 F_L 的作用, 其在竖直方向上的运动模型如下:

$$\begin{cases} G_{\text{有效}} = (\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})gV \\ F_L = C_L \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} A_2 v_y^2 \\ G_{\text{有效}} - F_L = ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases} \quad (4)$$

由 (4) 得

$$(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})gV - C_L \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} A_2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5)$$

其中 C_L 为上举力系数, A_2 为物体顺水流方向的投影面积, 其余符号的代表意义与前文一致。同样, 记 $q = \frac{dy}{dt}$, $W = \frac{C_L \rho_{\text{水}} A_2}{2m}$, $D = \frac{(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})gV}{m}$, 于是式 (5) 可化为

$$D - Wq^2 = \frac{dq}{dt}$$

进一步解得

$$q = \frac{a(1 + Ae^{bt})}{1 - Ae^{bt}} \text{ 或 } q = \frac{a(1 - Ae^{bt})}{1 + Ae^{bt}} \quad (6)$$

其中 $a = \sqrt{D/W}$, $b = -2\sqrt{DW}$, $A = e^{-2aC_1}$, C_1 是以重物落入水面的初速度 v_{y0} 有关的变量, 且 $v_{y0} = \sqrt{2g(h-H)}$ 。其中

$$\text{当 } v_{y0} > a \text{ 时, } q = \frac{a(1 + Ae^{bt})}{1 - Ae^{bt}}; \text{ 而 } v_{y0} < a \text{ 时, } q = \frac{a(1 - Ae^{bt})}{1 + Ae^{bt}}$$

将等式 (6) 进一步求解得

$$y = at - \frac{2a}{b} \ln |Ae^{bt} - 1| \Big|_0^t + C_2 \text{ 或 } y = at - \frac{2a}{b} \ln (Ae^{bt} + 1) \Big|_0^t + C_3$$

带入初始值

$$\begin{cases} y = 0, t = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0, t = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得, } C_1 = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v_{y0} - a}{v_{y0} + a} \right|, \quad C_2 = C_3 = 0$$

所以

$$y = at - \frac{2a}{b} \ln |Ae^{bt} - 1| + \frac{2a}{b} \ln |A - 1|, \text{ 或 } y = at - \frac{2a}{b} \ln (Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln (A + 1)$$

本实验给出的 y' 值应是水面高度和 y 的差值。为了确定 y 与 t 的具体表达式, 带入数值并与实验数据做比较。发现 $y' = 0.275 - (at - \frac{2a}{b} \ln |Ae^{bt} - 1| + \frac{2a}{b} \ln |A - 1|)$ 与实验数据差距较大, 即取 $y' = 0.275 - (at - \frac{2a}{b} \ln (Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln (A + 1))$ 。另外, 可得出 $v_{y0} < a$, 根据实验得知重物离水面的最大距离为 0.12m, 可判断出 $C_L < 0.4$ 。综上, 大实心方砖在水中的运动过程方程

$$\begin{cases} x = Ut - \frac{2m}{C_D \rho_{\text{水}} A_1} \ln\left(\frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m} t + \frac{1}{U}\right) + \frac{2m}{C_D \rho_{\text{水}} A_1} \ln\left(\frac{1}{U}\right) \\ y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln(Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln(A + 1)\right) \end{cases} \quad (7)$$

其中对于 y 中

$$a = \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})gV}{C_L \rho_{\text{水}} A_2}}, \quad b = -\frac{1}{m} \sqrt{2C_L(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})\rho_{\text{水}}gA_2V}, \quad A = \left| \frac{\sqrt{2g(h-H)} - a}{\sqrt{2g(h-H)} + a} \right|$$

取 $C_D = 2.2^{[2]}$, $C_L = 0.1$, 大实心方砖落水后的运动方程 $y = f(x)$, 与试验结果如下:

1、重物在水面投放时, 即 $h-H=0$

当大实心方砖平放入水中时, 其落水后的理论运动轨迹和试验所测轨迹如图 5a, 其中红色曲线为理论值, 带圆圈的虚线为实际测量数值 (下同)。

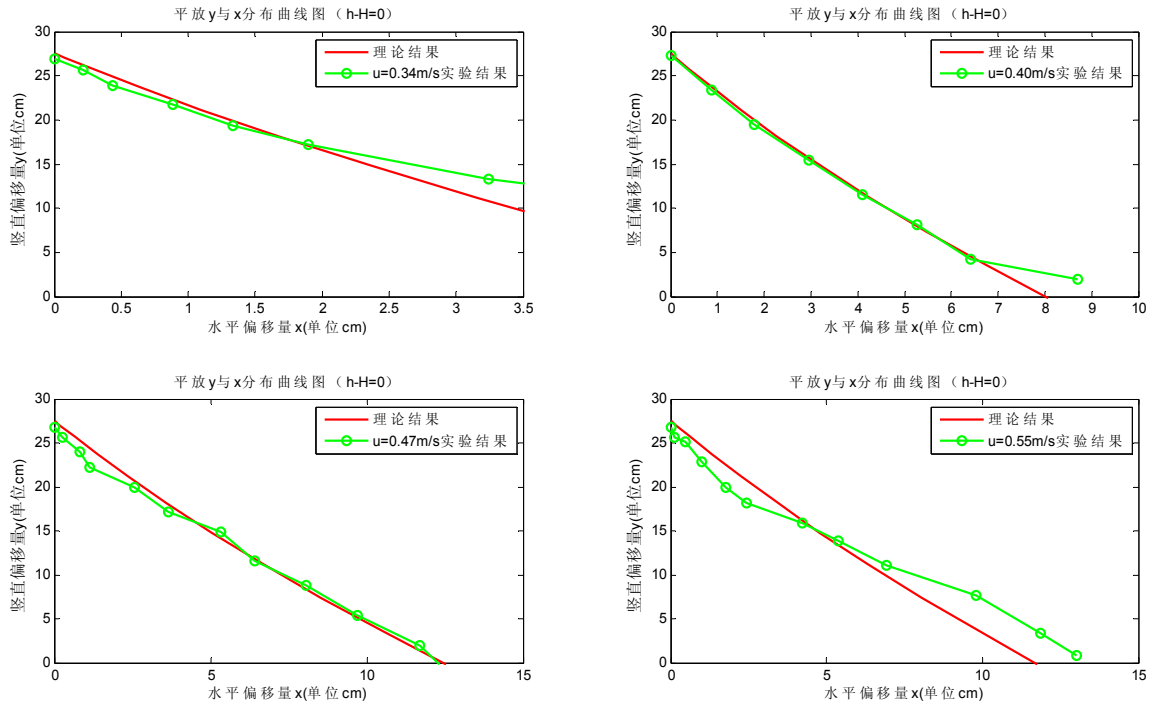


图 5a 大实心方砖在水面平放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖竖放入水中时, 其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 5b

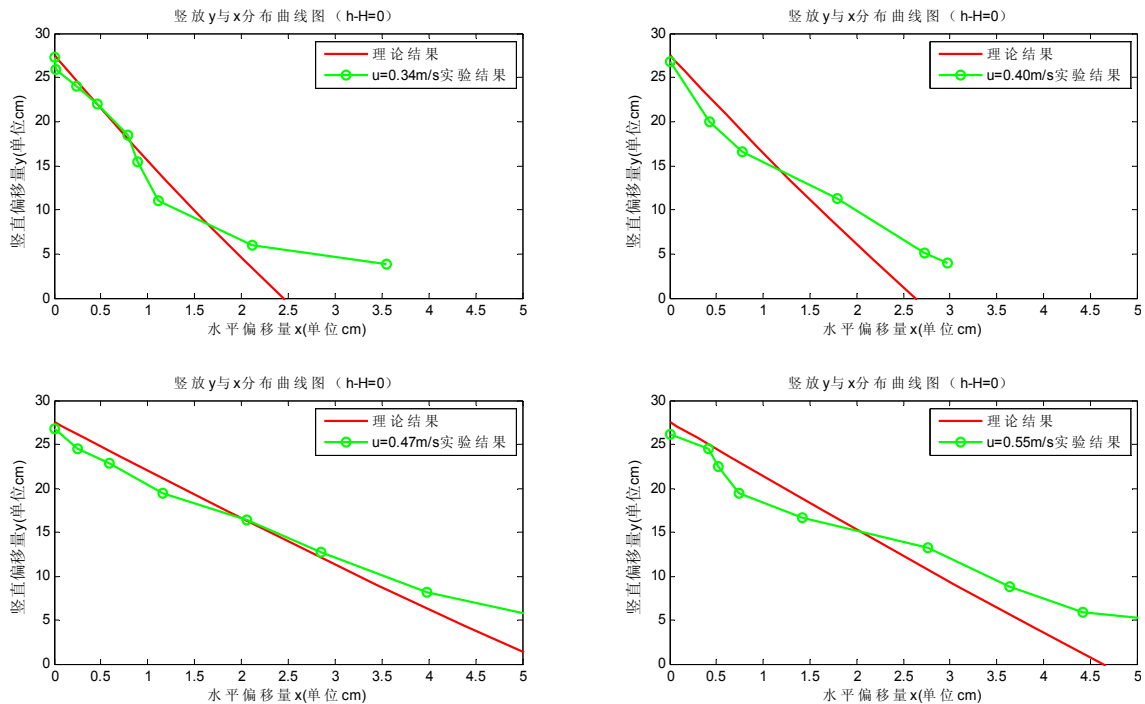


图 5b 大实心方砖在水面竖放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖立放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 5c

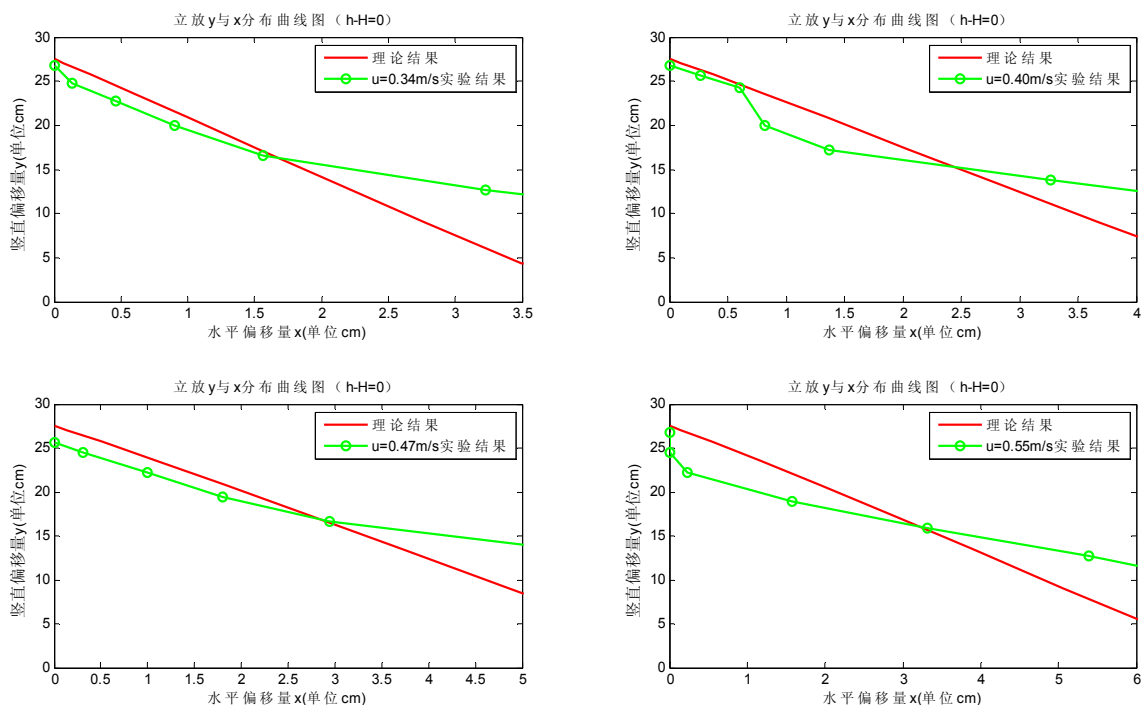


图 5c 大实心方砖在水面立放时 y 和 x 的函数关系图

2、重物在距水面 0.05m 投放时，即 $h-H=0.05\text{m}$

当大实心方砖平放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 6a

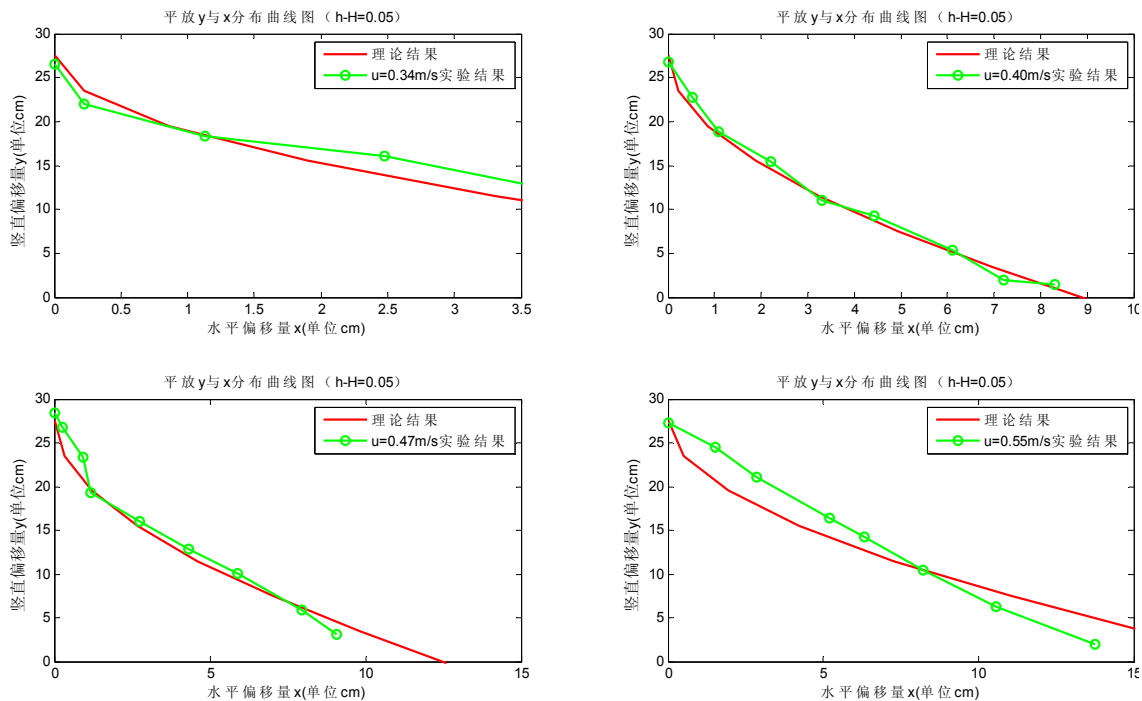


图 6a 大实心方砖距水面 0.05m 平放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖竖放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 6b

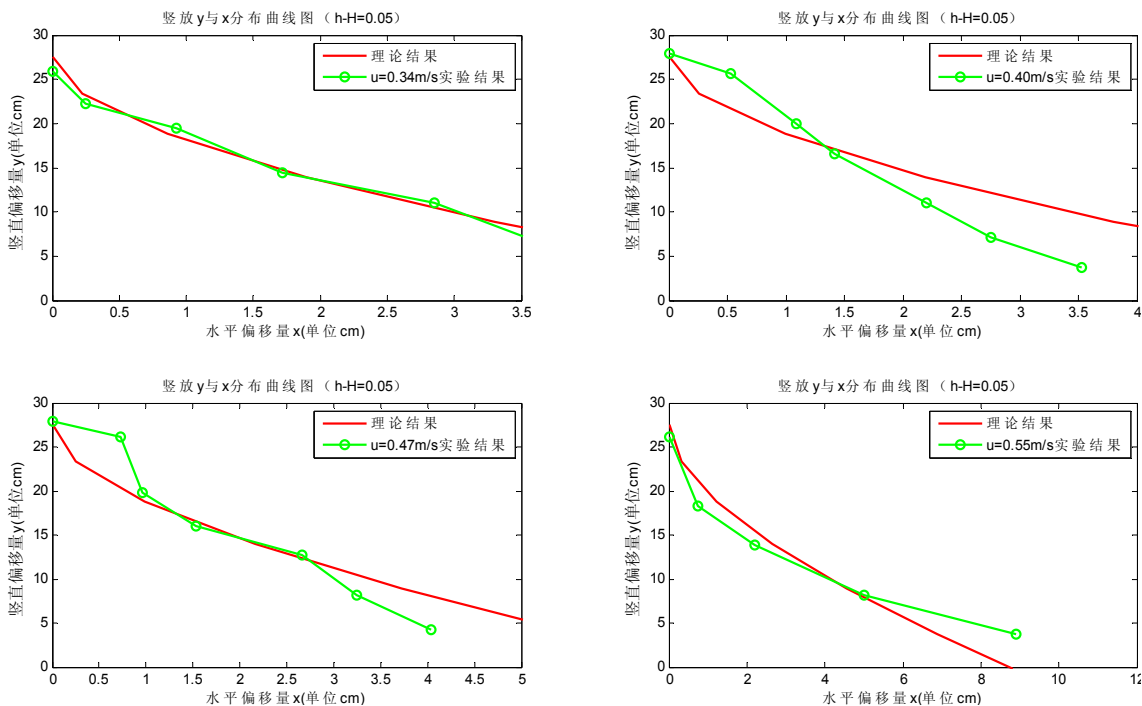


图 6b 大实心方砖距水面 0.05m 竖放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖立放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 6c

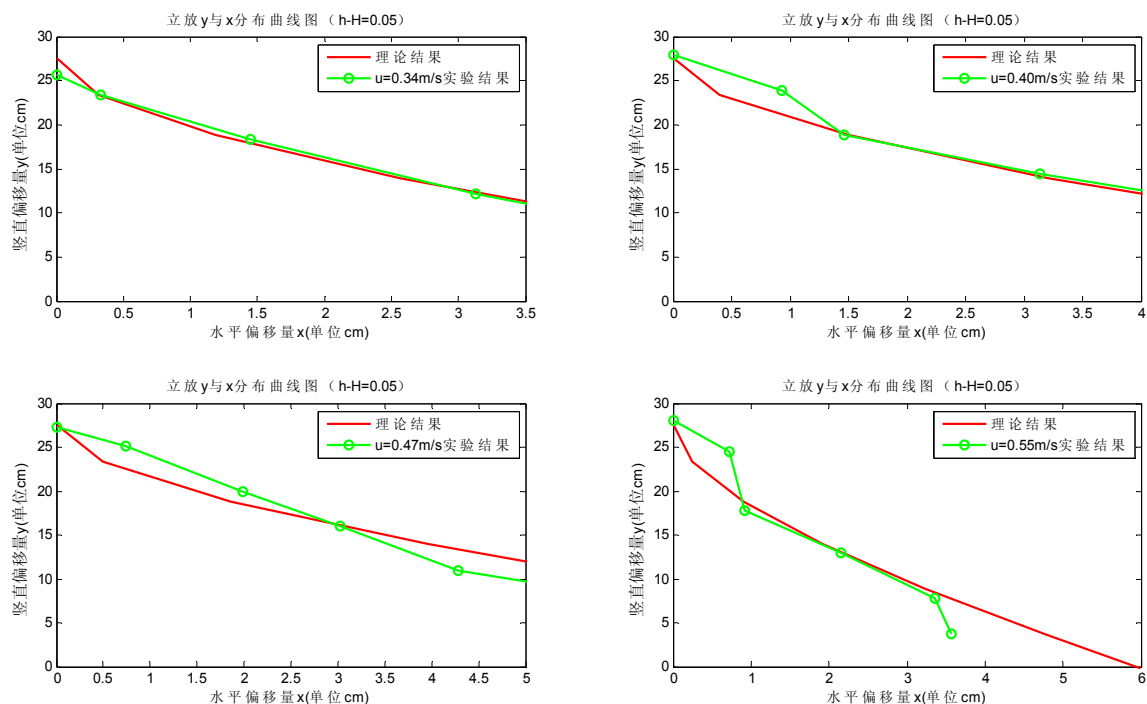


图 6c 大实心方砖距水面 0.05m 立放时 y 和 x 的函数关系图

3、重物在距水面 0.05m 投放时，即 $h-H=0.12\text{m}$

当大实心方砖平放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 7a

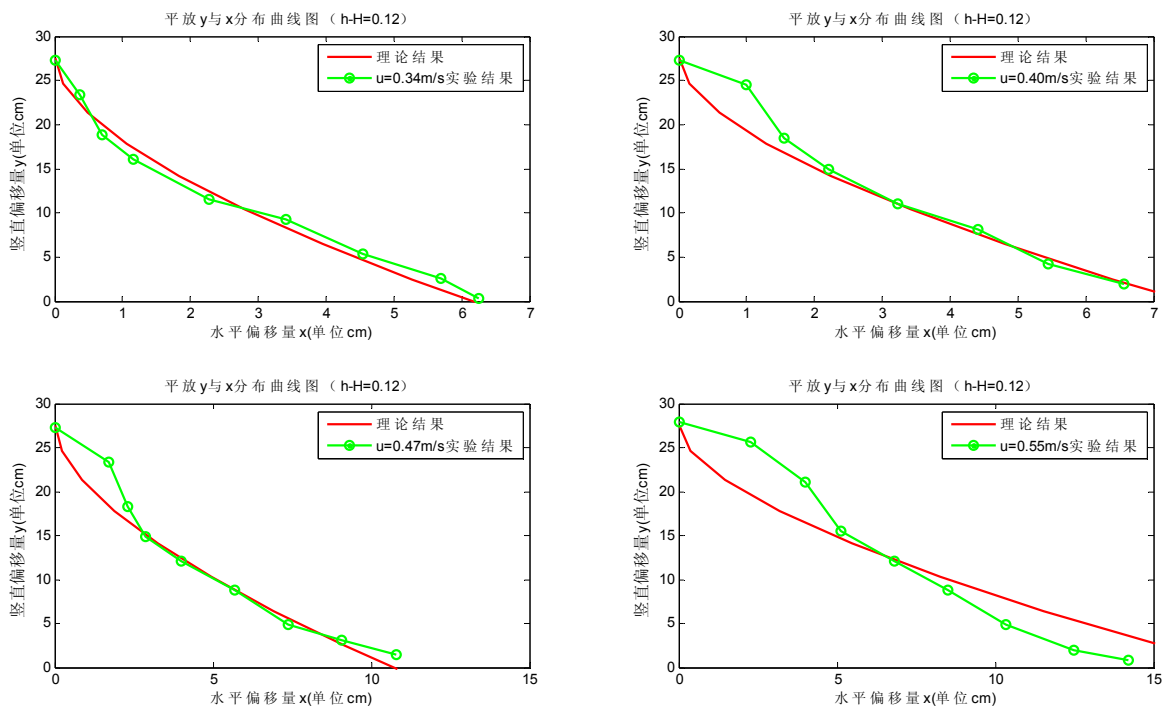


图 7a 大实心方砖距水面 0.12m 平放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖竖放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 7b

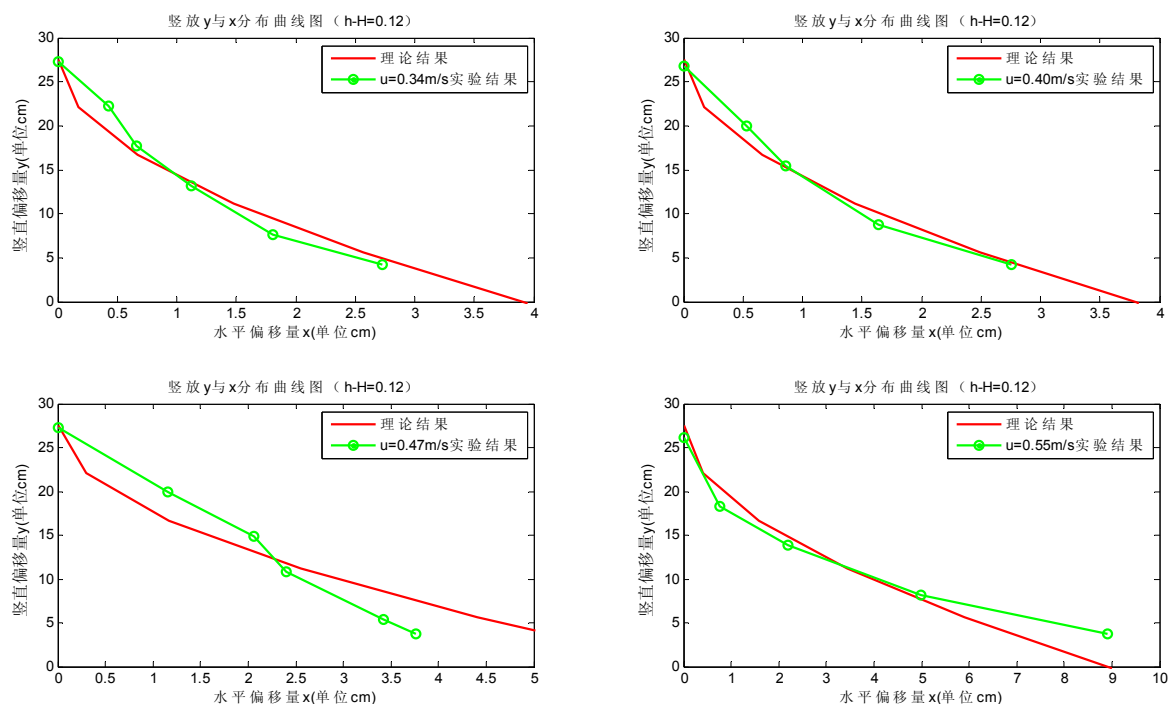


图 7b 大实心方砖距水面 0.12m 竖放时 y 和 x 的函数关系图

当大实心方砖竖放入水中时，其落水后的运动轨迹和试验所测轨迹如图 7c

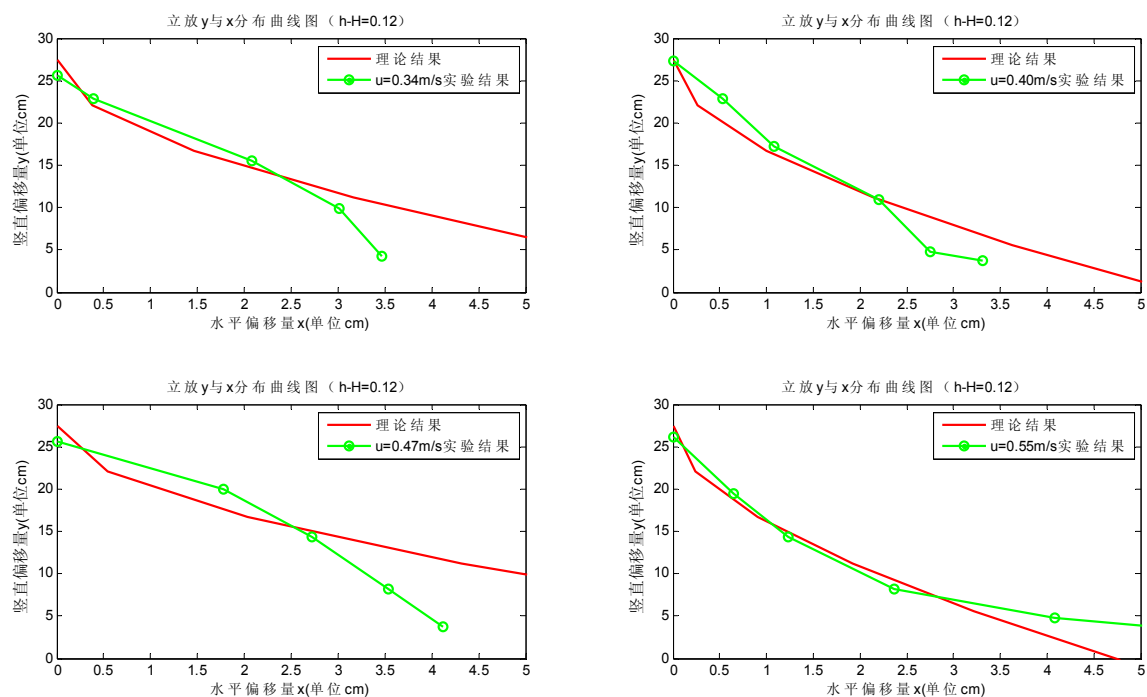


图 7c 大实心方砖距水面 0.12m 立放时 y 和 x 的函数关系图

通过上述各种情况的讨论可知，在单个影响因素变化时，理论曲线和实验数据的曲线符合的较好，只有在少数情况下，理论曲线与实验曲线分布差别较

大，如图 5c，但是其他的曲线还是符合的很好，故可以认为图 5c 的实验数据本身存在错误或其他问题。

4.2 模型讨论

在不同水流速度下（重物在水面平放时）， y 和 t 关系见图 8

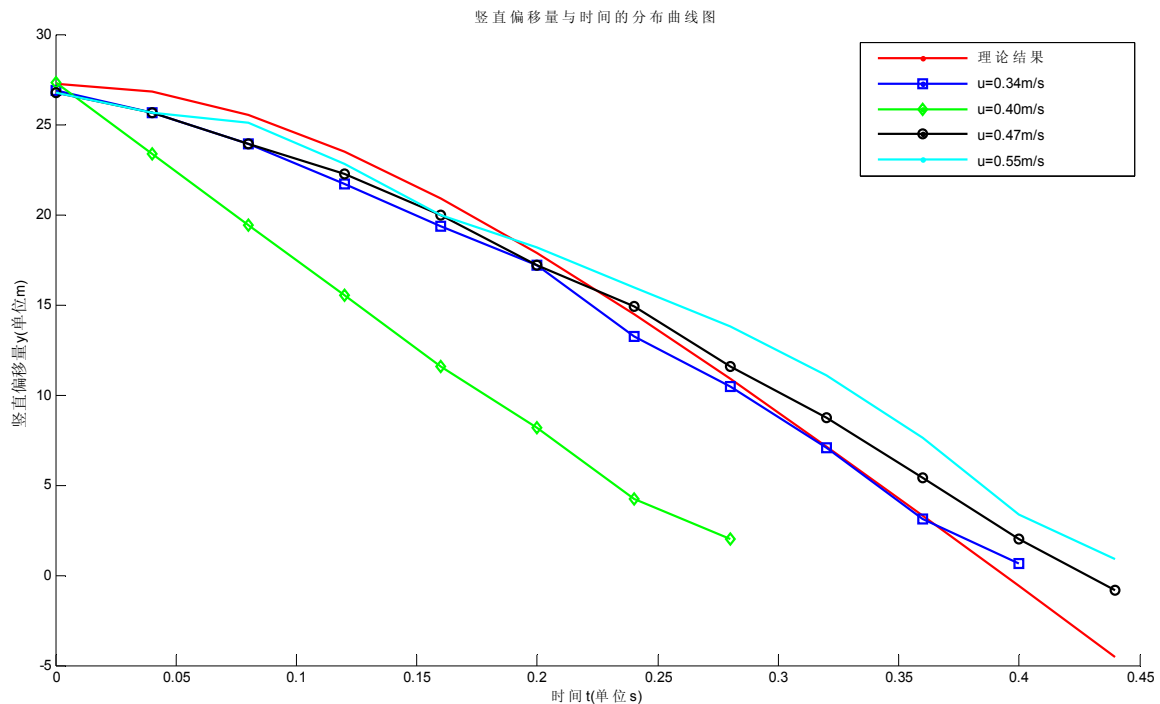


图 8 不同水流速度下 y 和 t 的函数关系图

上图除速度为 $U=0.40\text{ m/s}$ 的实验数据 y 的偏移量与时间 t 的曲线分布图与理论去曲线分布相差较大外，其他的水流流速下的曲线均理论情况下 y 的偏移量与时间 t 的曲线分布符合的很好。这说明水平流速 U 的变化不会影响 y 的变化，所以可以单独将 x 、 y 独立分析，不受其初始速度的变化影响。

另外，从图中还可看出，在水流速度 $U=0.40\text{ m/s}$ ， y 和 t 的关系曲线偏离理论曲线，因此我们有理由认为重物在水面平放时，当 $U=0.40\text{ m/s}$ 时所观察记录的数据是有问题的。同理，在改变重物的放置位置和重物投放的初始高度时，不同水流速度下记录的数据并不完全代表重物实际运动过程。由此说明数据在读取过程中存在随机误差。

本次试验所得到的数据在竖直方向上其 $v_{y0} < a$ ，但如果重物在足够高的地方投放，其 $v_{y0} < a$ 则 y 和时间 t 的函数关系将发生改变，应为

$$y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln |Ae^{bt} - 1| + \frac{2a}{b} \ln |A - 1| \right); \quad (8)$$

其中直升飞机在封堵溃口过程中，若飞机处于运动状态，则重物落水之前在水平方向上还有一个水平初速度 v_{x0} ，在试验模拟中，若给重物一水平初速度 v_{x0} ，则

$$x = Ut - \frac{1}{C} \ln(Ct - \frac{1}{|v_{x0} - U|}) + \frac{1}{C} \ln(-\frac{1}{|v_{x0} - U|}) \quad (9)$$

5 问题二求解

问题二要求利用小型试验数据或相关数学、物理方法，建立包含上述各种因素，从而能够适应不同情况的、描述重物水中运动过程的数学模型。其中建立单个重物在水中运动过程的数学模型是必做项目，建立两个重物连接后的组件在水中运动过程的数学模型为选做项目。

对于问题二，需要建立包含影响物体在水中运动过程的各种因素的数学模型，使之更具有通用性。从小型试验中可知不同重物的形状、不同速度的水流、不同高度投放重物，重物在水中的运动过程是不一致的。溃口的纵、横断面千差万别，而且都不是规则的矩形、梯形或 V 字形；溃口的底面也都不是水平或具有稳定斜率的平面，粗糙度各异；溃口各部分的流速分布肯定也是不均匀的；更值得注意的是，溃口形状和大小一般是不断变化的，流速、流量也随着水位和溃口形状的变化而变化。虽然它们都影响封堵用重物落在溃口后的运动过程和沉底后状况，但在求解问题二时，我们先通过固定大多数因素、条件，只让少数因素发挥作用，以才能发现事物内部的规律，揭示问题的本质。因此，求解问题二时，先考虑重物的形状参数、不同的水流速度以及不同的高度三种因素对重物在水中运动规律的影响，并建立相应的模型。

在问题 1 中，我们已经考虑了不同的水流速度、不同的高度以及的投放方式对重物在水中的运动模型的影响，在此我们侧重分析重物的形状参数对其运动模型的影响。对于重物在水中的运动过程中，实心重物的形状主要影响重物的拖曳力。空心的重物还需考虑其空心率。空心块体的空心率定义为空心的体积与同等大小实体块体的总体积比，用符号 η 表示空心率，则 η 表达式为：

$$\eta = \frac{V_{\text{空}}}{V} = \frac{V - V_v}{V}$$

式中 V_v 表示空心的体积， $V_{\text{空}}$ 表示空心块体的体积， V 为实心块体的体积。

根据以上定义和图 9 中含空心块体的尺寸，得到四种空心块体的空心率大小如表 2

表 2 各空心块体的空心率

空心块体	大空心方砖	小空心方砖	大空心蜂巢	小空心蜂巢
空心率 (η)	75%	50%	70%	70%

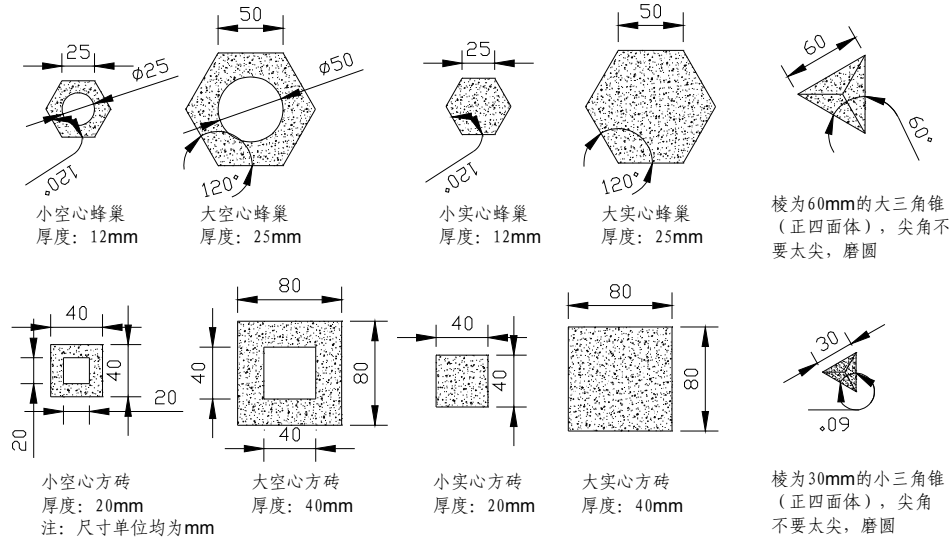


图 9 单件试件尺寸及名称图

由于重物的形状不同，其拖曳力和上举力的系数也不一致，本文试考虑形状参数的影响。

对于重物在水中的运动过程中，其形状主要影响了重物在水平方向上的运动，即拖曳力的变化。

块体形状概化为长 (l)、宽 (b)、高 (s) 的长方体^[3]，其当量粒径为 D ，则迎流面的当量面积取 $A = \pi D^2 / 4$

$$\text{等容: } b \cdot s \cdot l = V = \pi D^3 / 6$$

$$\text{等面积: } b \cdot s = A = \pi D^2 / 4$$

$$\text{则当量粒径: } D = (6bsl / \pi)^{1/3}$$

则作用在块体上的拖曳力可表达为

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho \mu^2 \frac{1}{4} \pi D^2 \cdot \frac{bs}{\frac{1}{4} \pi D^2} \quad (10)$$

$$\text{令 } C_D' = C_D \frac{4bs}{\pi D^2}, \text{ 则}$$

$$C_D' = C_D \cdot \frac{4}{(36\pi)^{\frac{1}{3}}} (bs / l^2)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

其中 bs 为物体迎流面的面积， l 为物体顺水流的长度。上式只适用于实体重物，

对于空心重物还需考虑空心率 η 的影响。

从问题 1 中建立的有关大实心方砖落水后的运动方程中可推知，实心重物在水中的数学模型即为 (7) 式，现在仅还需考虑空心对运动过程的影响。本次试验不考虑重物在厚度方向上的空心变化，且假定空心块体与实心块体的拖曳力系数不变。

在水平方向上，只有物体立放的时候，空心体积的变化才会对水平方向上的拖曳力有影响。此时 $F_D' = C_D' \frac{1}{2} \rho A' (U - v_x)^2 = C_D' \frac{1}{2} \rho A (U - v_x)^2 \frac{A'}{A}$ ，即 $F_D' = F_D \frac{A'}{A}$ ，其中 A 为实心块体的投影面积， A' 为空心块体的投影面积。

令 $\xi = \frac{A'}{A}$ ，则重物在水平方向上运动方程为

$$x = Ut - \frac{2m}{C_D' \rho_{\text{水}} A \xi} \ln\left(\frac{C_D' \rho_{\text{水}} A \xi}{2m} t + \frac{1}{U}\right) + \frac{2m}{C_D' \rho_{\text{水}} A \xi} \ln\left(\frac{1}{U}\right) \quad (12)$$

在竖直方向上，空心体积的变化对重物在水中的浮力产生的变化为

$$G_{\text{有效}} = \rho_{\text{物}} g V_{\text{空}} - \rho_{\text{水}} g V_{\text{空}}$$

同时其上举力也发生了变化，其变化因素和水平方向上的拖曳力相似，因此令 ξ' 代表空心块体的投影面积和实心块体的投影面积之比，则

$$F_L = C_L \frac{1}{2} \rho_{\text{水}} A_2 \xi' v_y^2$$

则重物在水平方向上运动方程为

$$y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln(Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln(A + 1)\right) \quad (13)$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{2\eta V(\rho_{\text{物}} g - \rho_{\text{水}} g)}{C_L \rho_{\text{水}} A_2 \xi'}}, \quad b = -\frac{1}{m} \sqrt{2C_L \eta V(\rho_{\text{物}} g - \rho_{\text{水}} g) \rho_{\text{水}} g A_2 \xi'}, \quad A = \left| \frac{\sqrt{2g(h-H)} - a}{\sqrt{2g(h-H)} + a} \right|$$

综上，得出重物在水中运动过程的数学模型为

$$\begin{cases} x = Ut - \frac{2m}{C_D' \rho_{\text{水}} A_1 \xi} \ln\left(\frac{C_D' \rho_{\text{水}} A_1 \xi}{2m} t + \frac{1}{U}\right) + \frac{2m}{C_D' \rho_{\text{水}} A_1 \xi} \ln\left(\frac{1}{U}\right) \\ y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln(Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln(A + 1)\right) \end{cases} \quad (14)$$

其中 $a = \sqrt{\frac{2\eta V(\rho_{\text{物}} g - \rho_{\text{水}} g)}{C_L \rho_{\text{水}} A_2 \xi'}}, \quad b = -\frac{1}{m} \sqrt{2C_L \eta V(\rho_{\text{物}} g - \rho_{\text{水}} g) \rho_{\text{水}} g A_2 \xi'},$

$$A = \left| \frac{\sqrt{2g(h-H)} - a}{\sqrt{2g(h-H)} + a} \right|, \quad C_D' = C_D \cdot \frac{4}{(36\pi)^{\frac{1}{3}}} (bs/l^2)^{\frac{1}{3}}$$

式中 ξ 为水平方向上实心块体和空心块体投影面积之比； ξ' 为竖直方向上实心块体和空心块体投影面积之比； η 为空心率，其中 b, s 为物体迎流面的面积， l 为物体顺水流的长度。

在问题一的基础上，本题还需考虑 η 和重物的性质对其在水中的运动过程的影响。本题选取不同形状、不同空心率的重物作为研究对象，现只考虑 $U = 0.34 \text{ m/s}$ ，重物在水面平放（即 $h-H=0$ ）时不同形状的重物在水中的运动过程（其他结果类似，图省略）。

因此当 $U = 0.34 \text{ m/s}$ ， $h-H=0$ 时，不同形状的重物其落水后运动轨迹理论值和试验所测轨迹为图 10 所示

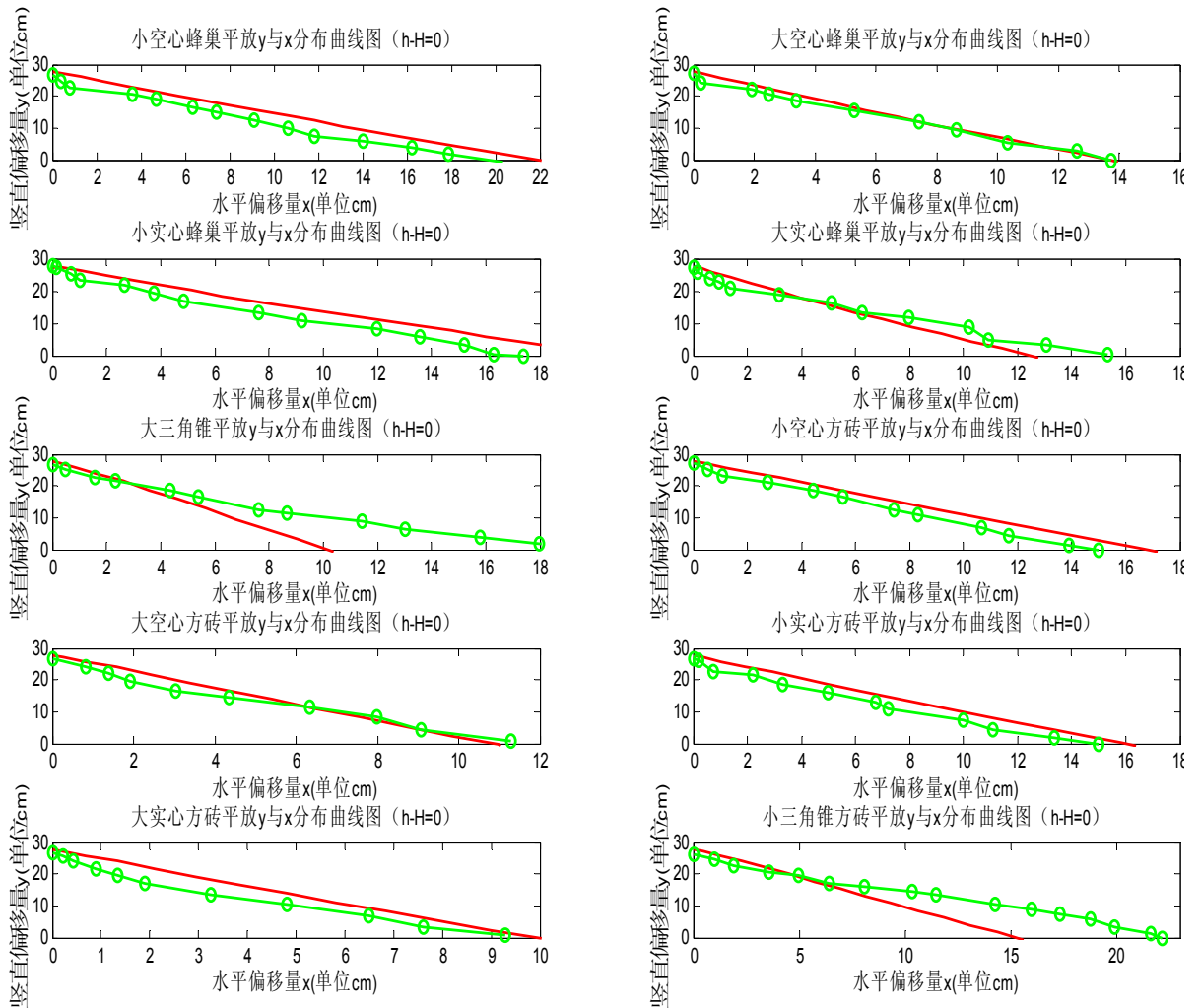


图 10 大实心方砖距水面 0.12m 平放时 y 和 x 的函数关系图

（图中实线为理论值，虚线为试验所测的值）

由于以上理论曲线与实验数据的曲线总体上符合得较好（少数图形的差别有点大外），故可以认为该理论模型适用于不同的形状参数的物体落水运动状

态的分析。

6 问题三求解

问题三要求对所建立的数学模型进行误差分析，并利用相关的数学、物理概念、小型试验数据，验证所建立的数学模型的合理性，然后根据所建立的数学模型提出让堵口重物恰好在最有效位置触底的猜想和应该进行哪些新试验来验证自己的猜想。

6.1 误差来源分析

误差主要分为系统误差、随机误差和过失误差三大类。其中系统误差来测量器、实验环境、测量方法等所引起的；随机误差则是由某些不易控制的因素造成的，即使在相同的条件下做多次测量，其误差值也不是确定的；过失误差则是一种与实际事实明显不符的误差，它主要是由于实验人员粗心、操作不当造成的。在做模拟封堵溃口有关的重物落水后运动过程的小型实验中，由于实验数据来自于试验区域临近摄像机一侧的钢化玻璃表面，而摄像机的镜头中心与刻度尺区域相距较大（1.2m），会导致读数的不准确。例如，从附件数据中可以看出，摄像机所记录的大多数点的横坐标大约为 2cm，而根据前文数据分析部分所阐述的原理可知，即使重物真实位置的横坐标为零，从玻璃刻度尺上所读取的数据也至少为 2.765cm，相对误差达 27.7%。所以我们对实验数据进行了校正。

6.2 误差估算

在求解问题一、二时，我们建立重物落水后在水中运动过程的数学模型，即

$$\begin{cases} x = Ut - \frac{2m}{C_D' \rho A_1 \xi} \ln\left(\frac{C_D' \rho A_1 \xi}{2m} t + \frac{1}{U}\right) + \frac{2m}{C_D' \rho A_1 \xi} \ln\left(\frac{1}{U}\right) \\ y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln(Ae^{bt} + 1)\right) + \frac{2a}{b} \ln(A+1) \end{cases} \quad (15)$$

式中除了 x, y, t 外均为已知数。将上述运动模型对应点的函数值与实验数据做比较可分析其误差大小，进一步验证我们模型的合理性。图 11 和表 3 给出了不同投放方式、不同高度以及不同流速，我们的模型与修正后的实验数据的均方差大小，单位统一为厘米。限于篇幅，我们通过固定其中的两个因素，改变另一个因素，以分析单个因素对模型误差的影响。在图 11 中，我们还用最小二乘法对实验数据进行了拟合，从图中可以看出，我们所建立的模型与用最小二乘法拟合的曲线比较接近，也进一步验证了我们模型的合理性。

主要考虑以下三种情形：

(1) 投放方式（以平放为例）和重物（取大实心方砖）距水面的重心位置相同，水流的速度不同时，纵坐标 y 与 x 的关系图如下：

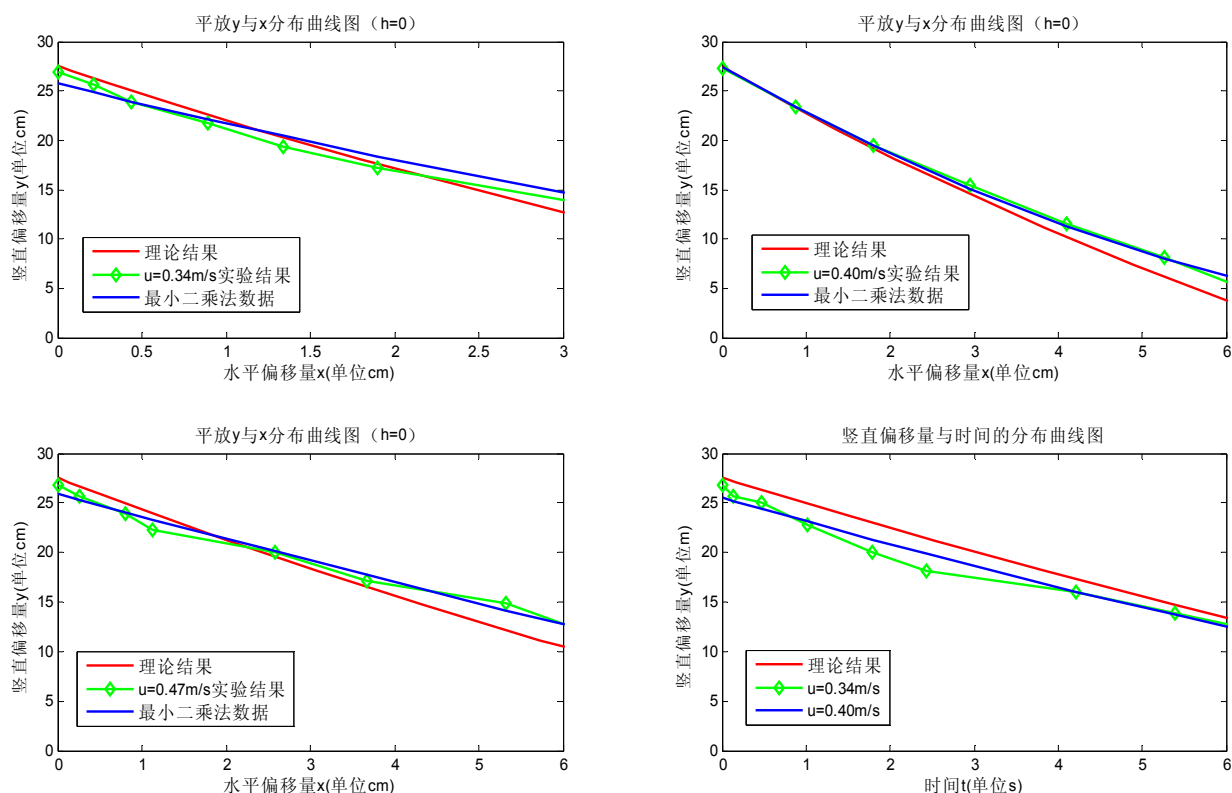
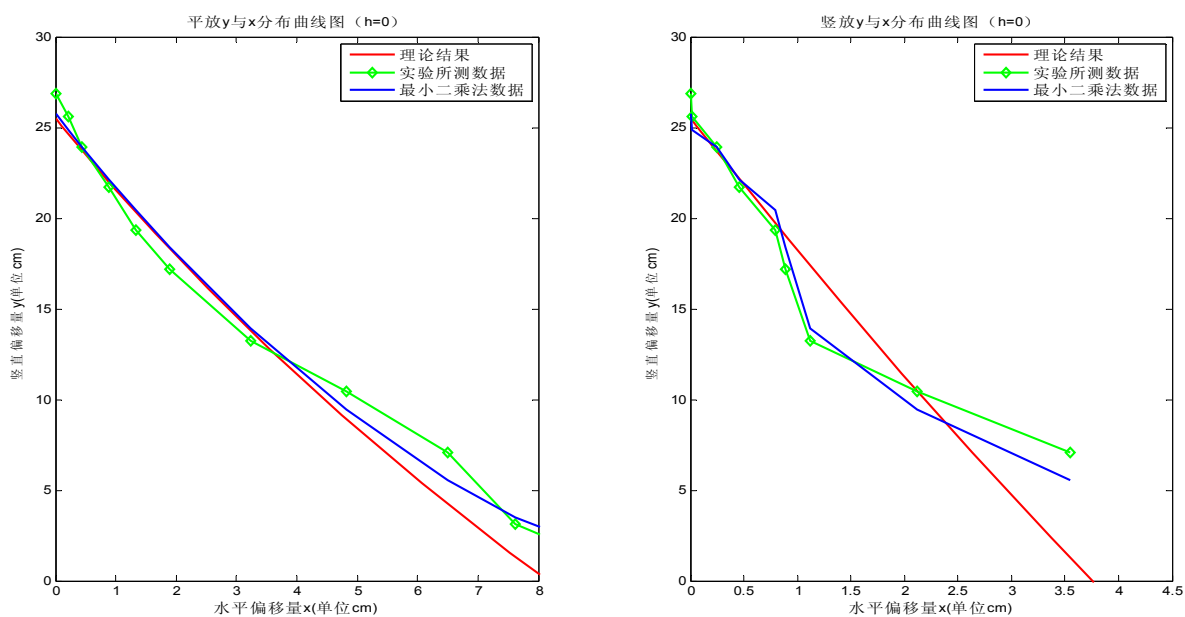


图 11 不同流速时 y 与 x 的关系图

(2) 重物重心距水面的距离（在水表面处）和水流速度保持不变时，投放方式不同时纵坐标 y 与 x 的关系图如下：



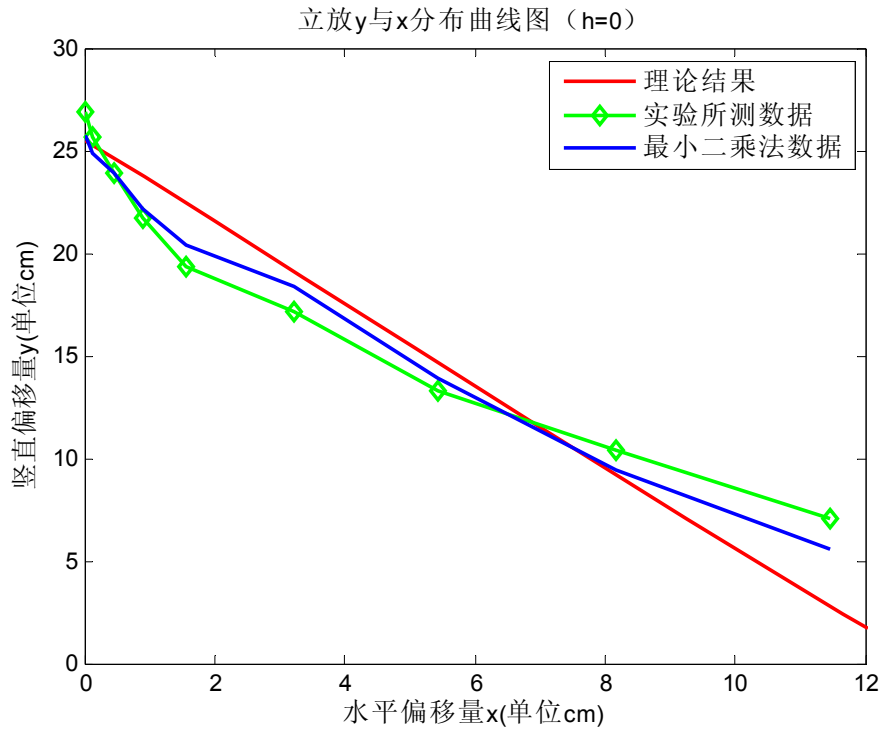
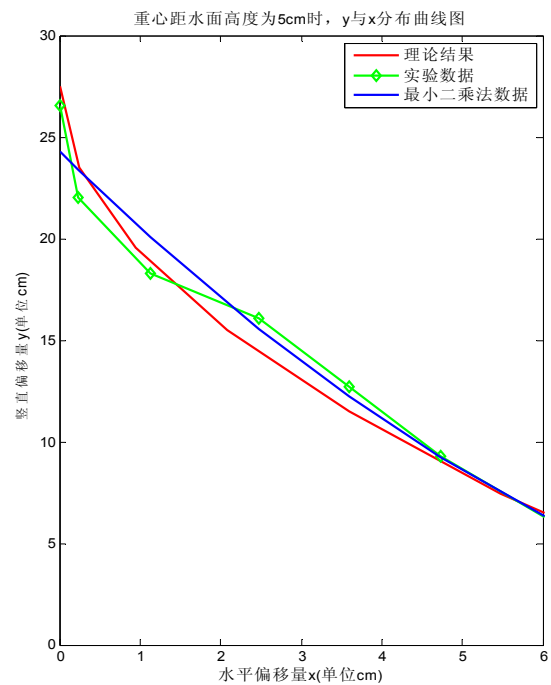
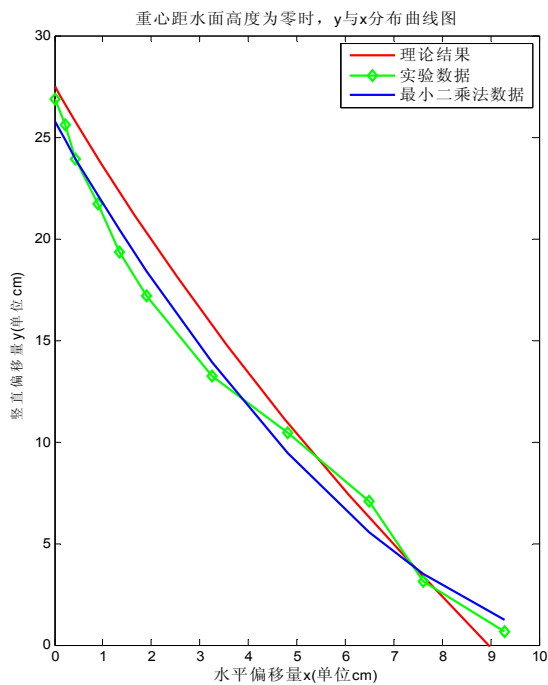


图 12 不同投放方式时 y 与 x 的关系图

(3) 投放方式 (平放) 和水流速度 ($U=0.34m/s$) 保持不变, 重物重心不同时的纵坐标 y 与 x 的关系图如下:



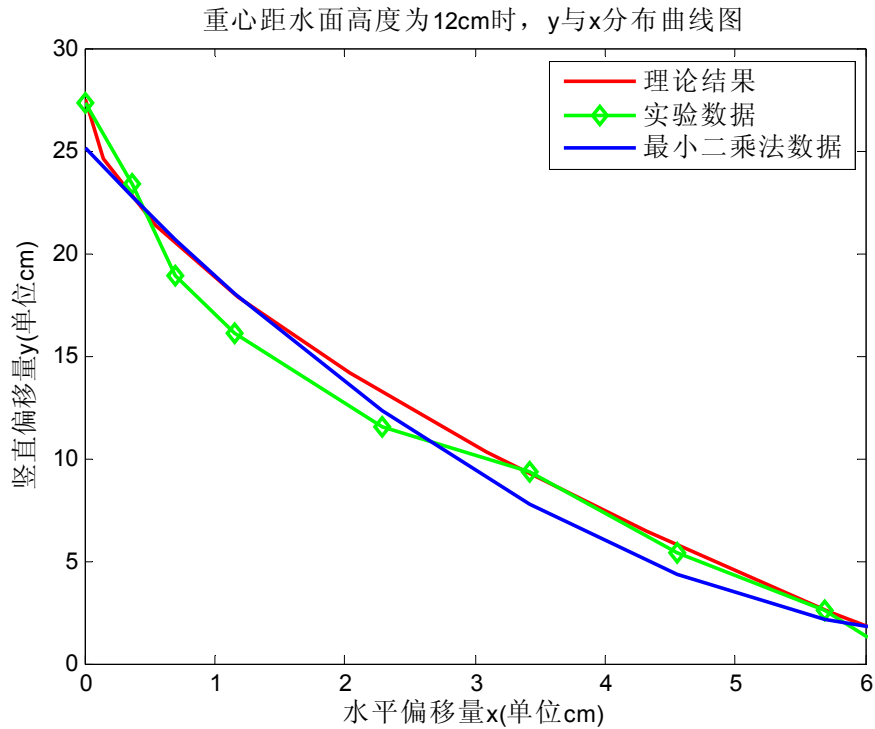


图 13 不同高度时 y 与 x 的关系图

表 4 平放时，不同高度和不同流速时的误差

高度\水流速度	0.34m/s	0.40m/s	0.47m/s	0.55m/s
重心在水平面	4.6141	1.4398	5.3486	6.6452
距水面 5cm	2.1034	1.6207	2.6707	2.6302
距水平 12cm	1.2244	1.3939	1.6624	2.6655

表 5 竖放时，不同高度和不同流速时的误差

高度\水流速度	0.34m/s	0.40m/s	0.47m/s	0.55m/s
重心在水平面	0.9867	5.4907	2.0937	1.8277
距水面 5cm	1.6008	1.4740	1.7397	1.8666
距水平 12cm	1.1364	0.9200	1.1165	2.2839

表 6 立放时，不同高度和不同流速时的误差

高度\水流速度	0.34m/s	0.40m/s	0.47m/s	0.55m/s
重心在水平面	2.1616	1.2503	1.7117	1.9052
距水面 5cm	1.5073	1.1191	1.7071	0.5553
距水平 12cm	0.9666	0.8244	1.3020	1.2640

从图 11-13 和表 4-6 中可以看出，重物的投放方式和其重心距水面的高度不变时，流速越大，均方差也越大；投放方式和水流速度不变时，重物重心距

水面的高度越高，其均方差越小；水流速度和重物重心距水面的高度不同时，平放时误差较大，而竖放和立方误差较小。显然，上述表中也有一些不合满足上述规律的数据，但由于玻璃网格的精度过低，且在读数据时，存在折射误差，故得出上述规律是合理的。

6.3 重物恰好在最有效位置触底的猜想

为了让重物更加准确地落入最有效的位置，应该考虑重物从高空抛出时的水平初速度 v_{x0} ，则重物在落水后的运动方程为：

$$\begin{cases} x = Ut - \frac{2m}{C_D \rho_{\text{水}} A_1} \ln\left(\frac{C_D \rho_{\text{水}} A_1}{2m} t - \frac{1}{|v_{x0} - U|}\right) + \frac{2m}{C_D \rho_{\text{水}} A_1} \ln\left(-\frac{1}{|v_{x0} - U|}\right) \\ y = 0.275 - \left(at - \frac{2a}{b} \ln(Ae^{bt} + 1) + \frac{2a}{b} \ln(A + 1)\right) \end{cases} \quad (15)$$

其中对于 y 中

$$a = \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})gV}{C_L \rho_{\text{水}} A_2}}, \quad b = -\frac{1}{m} \sqrt{2C_L(\rho_{\text{物}} - \rho_{\text{水}})\rho_{\text{水}}gA_2V}, \quad A = \left| \frac{\sqrt{2g(h-H)} - a}{\sqrt{2g(h-H)} + a} \right|$$

要确定重物投掷的最有效的位置，即考虑当 $y=0$ 时重物在水平方向上的位移 x 。

新的试验是在原试验基础上，设定在不同的水平初速度下，重物的水中运动轨迹，由高清摄像机实时记录。

7 问题四求解

在流体力学试验中，常根据相似准则（雷诺准则、费劳德（重力相似）准则等）利用小型试验模拟真实情况。

雷诺准则主要受水流阻力即粘滞力作用的流体，凡是有压流动，重力不影响流速分布，主要受粘滞力的作用，这类液流相似要求雷诺数相似。另外，处于水下较深的运动潜体，在不至于使水面产生波浪的情况下，也是以雷诺数相等保证液流动力相似。

费劳德（重力相似）准则适用于凡有自由水面并且允许水面上下自由变动的各种流动（重力起主要作用的流动），如堰坝溢流、孔口出流、明槽流动、紊流阻力平方区的有压管流与隧洞流动等

本试验水槽中的重物流动在自由表面受重力作用，同时又受粘滞力作用，所以应满足雷诺准则和费劳德（重力相似）准则。

雷诺数 Re 是常被用来表征判断流态的参数。为研究块体周围流态对作用

力的影响，可采用块体的某个尺度，如长度 l ，来计算雷诺数 Re_s ，即块体雷诺数

$$Re_s = \frac{Ul}{\mu} = \frac{0.34 \times 0.08}{0.0131/10000} = 2.08 \times 10^4 \quad (\mu \text{ 为水动力粘滞系数})$$

在工程上常用的 Re_s 范围为 $10^4 \sim 10^6$ 。由此可知在工程应用范围内，研究块体受力时，可认为块体的作用力系数与雷诺数 Re 无关^[1]。

因此，本题所提及的小型试验满足了费劳德（重力相似）准则，其中 $\lambda_g = 1$ ，则各物理量之间的关系^[5]如下：

$$\begin{aligned} \text{长度比尺: } \lambda &= l_p / l_m & \text{时间比尺 } \lambda_t &= \lambda^{1/2} \\ \text{流量比尺: } \lambda_Q &= \lambda^{5/2} & \text{流速比尺: } \lambda_u &= \lambda^{1/2} \\ \text{力的比尺: } \lambda_F &= \lambda^3 & \text{压强比尺: } \lambda_p &= \lambda \\ \text{面积比尺: } \lambda_A &= \lambda^2 & \text{体积比尺: } \lambda_v &= \lambda^3 \end{aligned}$$

（2）在实际应用过程中，重物的抛投要求在水中进行，抛落后的块体（常常不是单个块体的投放，而是多块体的集体投放）在水流作用以及抛投块体之间相互作用下而堆积，重新排列组合，有的相互嵌固结合，从而形成整体结构。这就要求重物能在预定的最佳位置触底且不再发生变化，也就是说块体的稳定性是非常重要的，如果块体失稳，则易发生了一系列的危害，会对人民的生命财产造成巨大损失。

块体在水流作用下的稳定性决定于水平方向的受力大小情况，拖曳力越小，块体越不易发生水平方向的移动，根据前人的实验结果显示实心块体的稳定性要大于空心块体的稳定性，同时研究还认为实心块体（正六面体）抛投后不易嵌固块石，故实心块体不利于防冲，而空心块体、四面体等的嵌固效果好，抗冲稳定性较好^[4]。

因此，考虑到实际情况，我们应选择具四面体形态的重物作为研究对象。

由题目知在长度比尺 $\lambda = l_p / l_m = H_{\text{实}} / H$ ， $\lambda_g = 1$ 时，

流速比尺： $U = U_{\text{实}} / \sqrt{\lambda}$ 距离水面高度： $h - H = H_{\text{实}} / \lambda$ 重物质量： $m = m_{\text{实}} / \lambda^3$

体积比尺： $V = \frac{m_{\text{实}}}{\rho_{\text{物}} \lambda^3}$ 面积比尺： $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{8m_{\text{实}}}{\rho_{\text{物}}} \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$ 水平位移： $x = x_{\text{实}} / \lambda$

其中 m 代表试验中质量， $m_{\text{实}}$ 代表实际中的质量，即不带下标代表试验值，带下标的为实际值。

已知 $H = 0.275\text{m}$ ， $m_{\text{实}} = 1500\text{kg}$ ，利用方程组（15）解得：

当溃口水深 $H_p = 3\text{m}$ ， $u = 4\text{m/s}$ 时， $\lambda = 3/0.275 = 10.9091$ ，计算得到 $x = 0.1505$ ，则实际应提前 $x' = 1.6423\text{m}$ （距离投放重物）；

溃口水深 $H_p = 3\text{m}$ ， $u = 5\text{m/s}$ 时， $\lambda = 3/0.275 = 10.9091$ ，计算得到 $x = 0.2099$ ，则实际应提前 $x' = 2.2895\text{m}$ （距离投放重物）；

溃口水深 $H_p = 4\text{m}$ ， $u = 4\text{m/s}$ 时， $\lambda = 4/0.275 = 14.5545$ ，计算得到 $x = 0.1645$ ，则实际应提前 $x' = 2.3929\text{m}$ （距离投放重物）；

溃口水深 $H_p = 4m$, $u = 5m/s$, $\lambda = 4/0.275 = 14.5455$, 计算得到 $x = 0.2266$, 则实际应提前 $x' = 3.2959m$ (距离投放重物);

8 模型总结及展望

本题首先对所给数据进行了分析及校正, 然后建立了包含多个影响重物落水后运动过程因素的微分方程模型。通过单因子分析法, 分别考虑了不同流速、投放方式、投掷高度以及块体的形状特征对重物在水中运动过程的影响, 并分析了各种情形下的均方差大小。计算结果表明, 本文所建立的模型与题目中所给的大多数数据均符合得较好, 从而验证了模型的合理性。在实际问题中, 溃口各部分的流速分布并不是均匀的, 其形状和大小一般是不断变化的, 流速、流量随着溃口形状的变化而变化的。今后需要不断向模型中添加新的影响因素, 以更准确的模拟实际情形。

对于当前的分析模型, 可作出以下展望:

- (1) 对于物体投掷到水中时, 应考虑投掷时物体的垂线与水平面的夹角对物体水下运动过程的影响。
- (2) 从一定的高度投掷物体, 在物体进入水中的瞬间, 物体会会有一个能量损耗, 应该分析该能量损耗对运动变化的影响。
- (3) 应该进一步分析在不同的水流流速下, 为保证物体能够沉入水底, 对物体的质量的最低要求。

参考文献

- [1] 庞启秀. 水流作用下块体受力试验研究[D]. 硕士学位论文, 2005.
- [2] 孙东坡, 张耀先, 王二平, 李国庆, 董智慧. 堵口土工包沉落试验研究[J]. 武汉大学学报(工学版), 35(4), 33-37, 2002.
- [3] 庞启秀, 徐金环, 辛海霞. 块体形状对水流拖曳力的影响[J]. 水道港口, 27(1), 5-8, 2006.
- [4] 韩世娜. 空心块体水流拖曳力的试验研究[D]. 硕士学位论文, 2007.
- [5] 杨素勤. 水流中土工包沉落模型试验与土工包护岸数值分析[D]. 硕士学位论文, 2007.