

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

题 目 军事行动避空侦察的时机和路线选择

摘 要：

本文以卫星侦察的预测和避让为背景，以保证安全的情况下最小化到达目的地的时间为目标，研究了卫星的观测和侦察的预测方法，并根据对卫星侦察的预测，优化了到达目的地的道路选择和行动方式。

针对问题一，第一小问，本文首先对观测数据进行坐标变换，结合星下点的经纬度随时间变化的函数给出了星下点的运行轨迹，给出了基于经度和纬度的 Q 型卫星的观测范围和侦察范围，同时将 Q 型卫星侦察预测转化为 Q 型卫星星下点轨迹的预测。分别联立星下点轨迹函数和目标区域的边界方程，解出星下点进入和离开目标区域的经纬度和时间，从而实现对 Q 星被观测到的情况和过顶情况的预测。对于确保安全施工情况的预测，本文通过计算卫星的侦察时段来给出确保安全施工的方案。第二小问，对 L-1、L-2 型卫星的预测方法和第一小问对 Q 星的预测方法相同，通过对两颗星被观测情况和过顶情况取并集和对确保安全施工时段取交集来考虑两颗星的共同作用，分析两颗卫星的相对位置变化，由于存在一定的周期差，两颗卫星的相对位置改变导致在侦察的协作工作方面有所削弱。第三小问，通过对观测数据的分析，求出 K 型卫星的轨

道高度、运行周期和特定时候的初始位置，采用对观测点的最小二乘拟合求出轨道平面的倾角，采用与 Q 型卫星相同的预测方法对 K 卫星后面三次被观测到情况的预测，对不同数量的观测数据拟合计算出的轨道倾角进行对比分析，总整体趋势上，随着拟合数据的增多，倾角趋于稳定，可视其为误差随着观测数据的增多逐渐减小。

针对问题二，本文从时间和安全的角度入手，对本问进行建模求解。提出在卫星监视下躲避，在无卫星监视下机动的设想，重点研究了车辆遭遇卫星的几种情况，将问题转化成单一求时间问题，并构造了求耗时最短的目标函数。求得阿勒泰-喀什-和田的最短行军时间为 54.46 小时。

针对问题三，采用建立在 Dijkstra 算法基础上的启发式搜索算法，即 A*算法，以被发现的概率作为优化目标，从分析影响运动路线的条件影响因素出发，引入影响因素存在影响因子的概念，即各影响因素存在一定权重，给出选择导弹发射装置规避卫星最佳可行性的数学模型。

一、 问题背景与重述

1.1 问题背景

大型国防工程施工、武器装备实验或部队大规模移动的隐蔽性关系到国家安全以及战争胜败，通常采用“避、变、骗、反”四种手段对付卫星侦察。“避”，就是掌握卫星运行规律，避开卫星过顶的时间段组织行动；“变”，就是针对侦察卫星的特点，相应地改变地面部队的活动规律，减弱卫星侦察的效果；“骗”，就是将军事目标伪装成非军事目标；“反”，就是利用各种武器摧毁卫星上的设备或卫星载体。无论哪种方式，都必须准确把握卫星的运行规律。

1.2 问题重述

问题一：某地域（地图坐标：北纬 31.90~32.25 度；东经 118.02~118.91 度）内拟建设一大型国防工程，计划利用境外卫星过顶的间隙组织施工。该地域长期受 Q 型、L 型卫星（有关数据见附件 1）监视。

问题二：某部需要从新疆的阿勒泰隐蔽地经喀什运动到和田并在和田执行某任务，24 小时后再隐蔽地返回阿勒泰（不必经喀什），部队可以按需要选择在高速公路（最大速度 100 公里/小时）或普速公路（除高速之外的其他公路，最大速度 50 公里）上行进，假设部队出发时（2016 年 11 月 1 日凌晨 5 时整）Q 型卫星、L-1 卫星（它们的轨道要素见附件 1，其他 L 型卫星都不考虑）均位于各自轨道的近地点。行车时车队最大长度 2 千米，部队每开进 10~12 小时可选择途经的县级以上（含县级）城市休息 10 小时以上（即连续开进时间不少于 10 小时，不多于 12 小时），请你们根据附件 3 给出的地图（必要时可借助因特网获取有关地理信息），设计合理的行军时机、路线和宿营地，避开 L-1 卫星侦察，并预测 Q 型卫星的过顶时刻，以便及时做好隐蔽工作，尽可能快地安全到达目的地。

问题三：研究导弹发射装置的战时隐蔽问题。有专家提出，运动方式可能是移动发射装置规避卫星侦察的有效方案。请你们研究以下问题：假设某移动发射装置可在某一指定区域内自由运动，分别研究针对 Q 型、L 型（包括 L-1、L-2）、K 型卫星的侦察能够规避的可行性、条件（区域大小、形状、路网状况及其他你们认为需要的条件）和方式。欢迎进一步针对两种或三种卫星的组合

侦察能够规避的可行性、条件和方式。并考虑卫星参数变化对方案的影响。

二、 问题假设及符号说明

2.1 问题假设

假设一：地球卫星绕地球运行的轨道遵循开普勒行星运动三大定律。

假设二：本题所涉及的卫星轨道均为低轨道、太阳同步轨道。

假设三：题干中卫星轨道偏心率极小，假定卫星轨道为圆形。

假设四：部队行军路径途径过个节点，各节点之间是无向互通的且只能通过一次。

假设五：各节点将路径划分为多个路段，各路段距离是已知的。

假设六：车辆行驶速度可通过道路等级确定。

假设七：车辆在每段路段的速度是给定已知的。

2.2 符号说明

符号	符号说明
a	轨道长半轴
ω	近地点角距
Ω	升交点赤经
i	轨道倾角
e	偏心率
t_0	过近地点时刻
φ	纬度
λ	经度

注：其他符号在正文中详细标注。

三、 问题分析

3.1 针对问题一

第一小问要求预测 Q 型卫星后两天被观测到的情况及过顶情况，并结合 Q 型卫星的侦察范围给出 D3、D5 两天内确保安全施工的时段。本文从已知条件入手，由目标卫星初始的轨道参数进行轨道计算，获得精度较高的卫星位置坐标。同时，通过地面站对过顶卫星的预报确定地球与卫星的相对运动状态，并且通过观测数据确定卫星的初始位置以及和地球的相对位置，而相对运动的描述必须建立在坐标系中，本文在其他学者研究此问题的基础上，给出地面站观测坐标系与以地球球心为原点的直角坐标系，通过坐标之间的转换关系将卫星在观测站坐标系中的坐标转换到地球圆心为原点的坐标系，从而求出卫星星下点经度和纬度。根据观测站的仰角、观测站的经纬度和观测深度以及卫星的轨道高度，计算出观测范围的经纬度范围，结合卫星经纬度随时间变化规律，从而给出此后一天和此后三天卫星被观测到的过顶情况，并更具卫星星下点经纬度随时间的变化规律和 Q 星的侦察范围以及施工范围的经纬度，给出卫星在 D3、D5 天对该区域的侦察情况，给出 D3、D5 两天内安全施工的时段。

第二小问要求给出 8 月 23 日 L-1、L-2 卫星的相对位置、被观测到的情况以及过顶情况和确保安全施工的时段，并进一步找出它们在侦察方面的薄弱环节。卫星的相对位置求解可以直接根据所给的参数和实测值进行轨道计算，确定相位差之后即可确定两者的位置关系，或者直接将两者位置关系的求解转化为卫星投影点位置关系的求解，给出同一时刻以及运行之后两星的位置关系。第二小问虽为双星共同工作，但是实际情况可将双星分开单独考虑，根据第一问的解题思路和解题模型，对双星单独分析，分别求出对 L-1、L-2 观测情况及过顶情况和确保安全施工的时段，然后对双星的观测结果和过顶情况取并集，对双星分别单独工作的情况下确保安全施工的时段取交集，对计算结果进行分析，找出侦察漏洞或不足给出它们在侦察方面的薄弱环节。

第三小问要求预测未来三次被观测到的情况，并说明该卫星已经被连续观察最少 n 次才能够确定下次被观测到的情况所需要的 n ，以及观察次数对预报精度的影响。首先，根据观测数据并结合地球半径，可以求出 K 型卫星的轨道高度，再根据圆周运动和万有引力规律，求出卫星运行的周期和角速度。将观

测数据转化为直角坐标系中的坐标，坐标理论上应满足卫星轨道方程所在的平面，采用最小二乘法求出能够满足所有观测点的最优平面方程，按卫星运动方向采用右手定则求出卫星轨道平面的法向量，轨道倾角的求解可转化为求该向量和坐标系 Z 轴正方向的夹角。一般认为，在观测比较合理准确的情况下，观测的次数越多对轨道的描述越准确，在本文中，将研究不同观测次数对预测精度的影响转化为不同观测次数对轨倾角求解精度的影响，本题中，预测模型的准确性直接取决于轨道倾角求解的准确性，因此该分析方法合理。

3.2 针对问题二

问题二要求设计部队行军合理的行军时间、路线和宿营地，并避开 L-1 卫星侦察，预测 Q 型卫星的过顶时间，尽快安全的到达目的地。分析上述描述，可以判断该问题其实是一个多目标的组合优化问题，可以转化为求时间的单目标问题。目标函数约束是耗时最短，最优解是一条耗时最短路径。

在转化中，时间和安全是它的两个关键点。安全是一个复杂问题，影响它的因素很多，为方便分析，可对其进行理想化处理。针对部队行军的时间问题，有两点应当明确：一是必须知道卫星的过顶时间，包括卫星过顶的开始时间和结束时间。二是车辆行驶所需时间与路段长度、行驶速度有关，而车辆的行驶速度受道路、安全等情况的影响。由于在卫星监视下车辆需要在节点等待，因此，整条路径的耗时就包括两部分，一部分是没有卫星监视的情况下车辆运输所需的时间，称为正常耗时。另一部分是在途中各节点规避卫星的等待时间之和，称为等待耗时。最终以总时间最短为优化目标，考虑安全性的前提下，寻求部队行军路线的最优解。

3.3 针对问题三

问题三要求假定某移动发射装置可在某一指定区域内自由运动，分别研究针对 Q 型、L 型（包括 L-1、L-2）、K 型卫星的侦察能够规避的可行性、条件（区域大小、形状、路网状况及其他你们认为需要的条件）和方式。根据问题描述，采用建立在 Dijkstra 算法基础上的启发式搜索算法上的 A*算法解决是合理可行的。其主要特点在于选择下一个路径节点时引入了已知的路网信息，特别是目标点信息，计算所有候选节点到目标点之间的某种目标函数(比如最短距离、最小时间等等)，以此作为评价候选节点是否属于最优路径节点的指标，优

先选择具有最优目标函数的候选节点作为下一个路径节点。考虑到各种规避条件的存在，对 A*算法做出适当改进。

四、 问题一解答

4.1 问题一计算过程

第一题主要是根据已知观测数据和卫星相关参数对卫星观测、卫星侦测和卫星过顶等情况的预测问题，本文从研究卫星星下点的运行规律入手，将观测范围转化为地球表面的经纬度范围，预测卫星星下点进入观测区域情况。对于侦测问题，将卫星的辐照宽度结合施工区域的范围，转化为卫星可侦测范围，当卫星星下点进入可侦测范围时，即为该区域被卫星侦测，通过该手段将卫星侦测情况预测问题转变为卫星观测情况预测问题。特定时间段内确保安全施工的时段分析实质上也是卫星侦测问题的研究，确保安全施工的时段可通过该时段去除卫星可侦测的时间段求解。

4.1.1 卫星与地球相对运动关系

由附件 2 可知，Q 型卫星的周期为 93.47 分（5662.2 秒），通过附件 2-1Q 型卫星连续三天的过顶情况观测数据中的 D0 天的第二次和第二次最近点的计算经度可知，卫星飞过的角度为 337.3479 度，假设地球处于静止状态（不自转），则可近似计算卫星在此状态下的飞行时间为：

$$337.3479 \div 360 \times 5662.2 = 5305.92 \text{ 秒}$$

实际的监测时间间隔为 5603 秒，大于地球静止时候卫星所需的飞行时间，所以，可以得出地球的自转方向和卫星绕地球转动方向相同。

4.1.2 建立坐标系

以地球圆心为原点，X-Y 平面在赤道平面上，X 轴指向本初子午线（经度为 0），Z 轴指向北极点（纬度为 N90°），Y 轴指向东经 90 度方向，建立坐标系，记为坐标系 1。以观测站为原点，建立三维直角坐标系，记为坐标系 2，由地球球心指向观测站的方向为 x 轴正方向，地面正北方向为 z 轴方向，y 轴与纬线相切正方向向东。

4.1.3 确定卫星在坐标系 1、2 中的位置

首先，根据观测站的经纬度和地球半径确定坐标系 2 原点在坐标系 1 中的坐标：

$$X_g = R \cos(\varphi_g) \sin(\lambda_g)$$

$$Y_g = R \cos(\varphi_g) \cos(\lambda_g)$$

$$Z_g = R \sin(\varphi_g)$$

φ_g --观测站纬度

λ_g --观测站经度

R --地球半径

根据观测数据，确定卫星在坐标系 2 中的位置：

$$X_w = R \sin(Elv)$$

$$Y_w = R \cos(Elv) \cos(Azm)$$

$$Z_w = R \cos(Elv) \sin(Azm)$$

Elv --观测站纬度

Azm --观测站经度

R --地球半径

再经过坐标转换，确定卫星在坐标系 1 中的位置：

平移变换：

$$\begin{cases} x = X + g \\ y = Y + h \\ z = Z + k \end{cases}$$

x, y, z 为在坐标系 2 中的坐标

X, Y, Z 为在坐标系 1 中的坐标

(g, h, k) 为坐标系 1 原点在坐标系 2 中的坐标

旋转变换：

坐标系1	方向余弦		
OX	l_1	m_1	n_1
OY	l_2	m_2	n_2
OZ	l_3	m_3	n_3

$$\begin{cases} x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z \\ y = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z \\ z = n_1 X + n_2 Y + n_3 Z \end{cases}$$

4.1.4 确定卫星星下点的经纬度

根据上述方法求得卫星在坐标系 1 中的坐标，根据其位置关系以及三角函数给出卫星星下点的额经纬度与卫星在坐标系 1 中坐标的关系：

$$\begin{cases} \varphi_w = \arctan(X_w / Y_w) & (X_w > 0) \\ \varphi_w = \arctan(X_w / Y_w) + 90 & (X_w \leq 0, Y_w > 0) \\ \varphi_w = \arctan(X_w / Y_w) - 90 & (X_w \leq 0, Y_w < 0) \end{cases}$$

$$\lambda_w = \arcsin(Z_w / R)$$

φ_w -- 星下点纬度
 λ_w -- 星下点经度

4.1.5 观测范围计算

卫星观测站的观测方式主要是通过调整天线的方位角和仰角进行信号发射和接受进行，天线的方位角可在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的范围内变化，天线的仰角存在最小仰角，仰角的变化范围为“最小仰角” $\sim 90^\circ$ ，由此可知，天线的观测范围为一个锥体，顶角为 160° ，中线在地球球心与观测站连线的延长线上。最大观测范围为天线达到最大仰角时方位角变化 360° 。根据卫星轨道半径确定卫星运行轨迹所在的球面，天线的观测视角与球面的交面即为观测站的观测范围，同样，本文还是将观测范围投影到地球表面，当星下点进入该范围是，则可判断该卫星被观测到，具体形状如图 1。

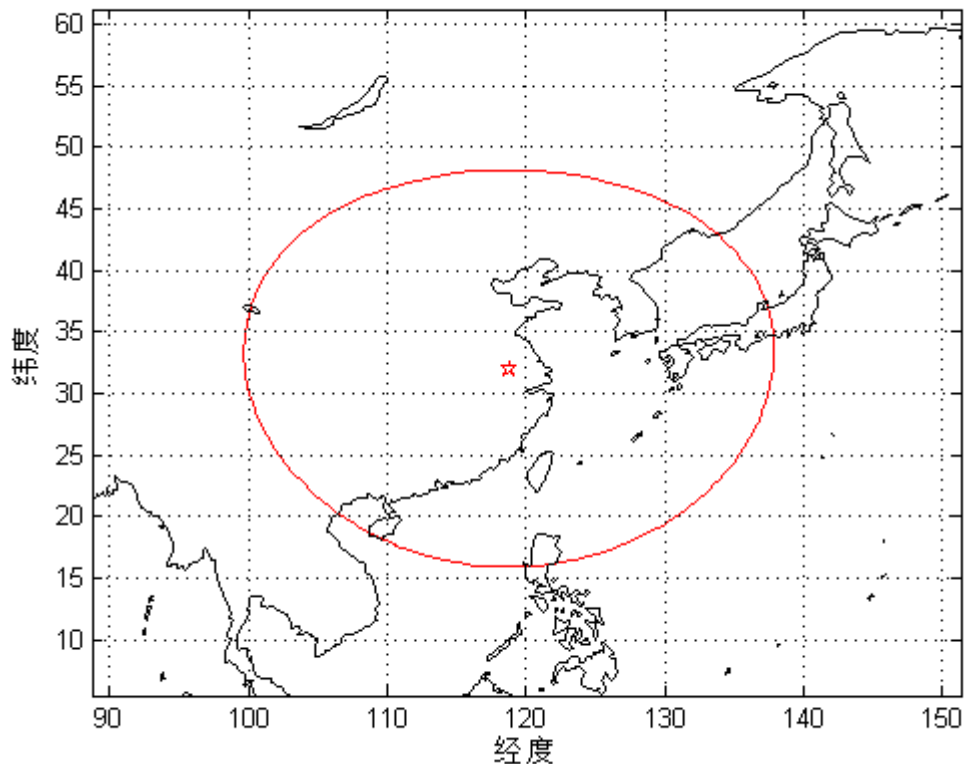


图 1 观测范围投影图

4.1.6 确定卫星星下点的运行轨迹

根据附件 1 中所给的卫星资料斜交角和卫星周期可以计算出卫星绕地球运

行的轨道，再根据观测值换算的某一时刻的经纬度和地球的自传速度，本文推算出卫星星下点的经纬度变化规律为：

$$\text{经度: } \lambda_s(t) = \lambda_0 + \arctan(\cos i \cdot \tan \theta) - \omega_e t \pm \begin{cases} -180^\circ (-180^\circ \leq \theta < -90^\circ) \\ 0^\circ (-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \\ 180^\circ (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \end{cases}$$

$$\text{纬度: } \varphi_s(t) = \arcsin(\sin i \cdot \sin \theta)$$

λ_0 —0时刻的升交点经度

ω_0 —地球的自转角速度

‘+’对应于顺行轨道，‘-’对应于逆行轨道

用 MATLAB 模拟出来的轨迹曲线示意图如图 2。

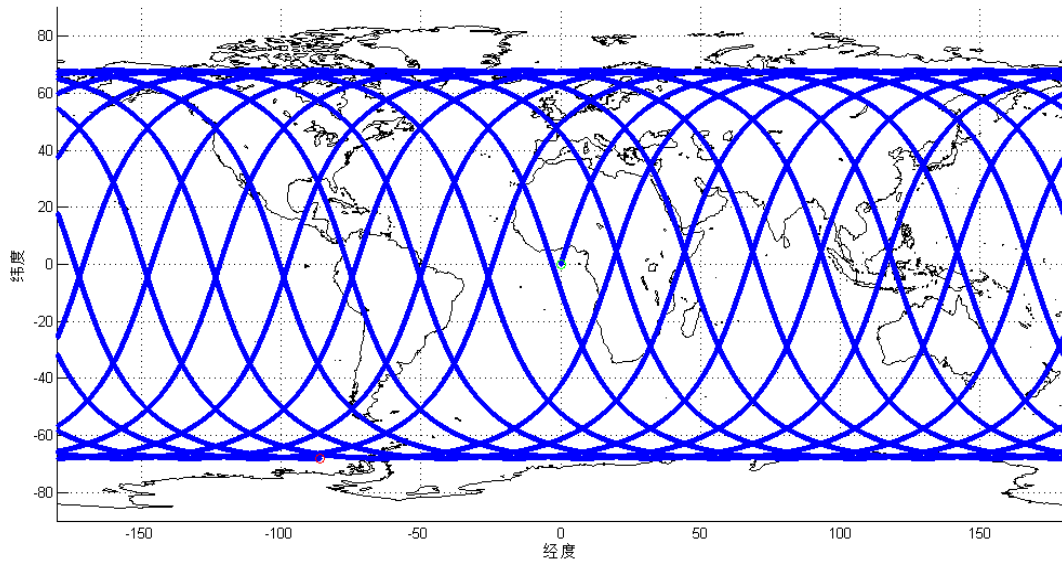


图 2 星下点轨迹示意图

4.1.7 误差分析和校正

未验证该计算方法的精确度，本文采用附件中的观测数据对卫星星下点运行的计算方法进行校验，发现存在系统误差，并且误差呈一定的规律变化。对误差进行统计分析发现，模型计算的误差相对于观测值总是存在一个提前量（公式计算的星下点运行轨迹与观测值相同，但是计算星下点运行速度偏快），而且随着预测运行总步长的增加，误差呈现出累积上升的变化趋势，基于这一误差变化规律，本文分别对经纬度基于每一步的时间步的变化大小进行调整，调整结果截取了一段数据如表 1，在模拟了三天之后依然能较好的保持精度（Q 的观测情况只有三天），有效地消除了累积误差。

表 1.Q 星模拟误差

时间（秒）	观测经度	观测纬度	预测经度	预测纬度	经度误差	纬度误差
175763	104.5052	26.28476	104.2727	26.23114	-0.23257	-0.05362
175827	103.4555	30.3005	103.3306	30.24482	-0.12491	-0.05569
175891	102.3182	34.31053	102.3298	34.2618	0.011545	-0.04873
217116	123.0363	45.40579	123.2479	45.54878	0.211603	0.142991
217334	119.7066	31.71108	119.3595	31.88872	-0.34703	0.177641
217550	116.8656	18.11212	116.2737	18.29734	-0.59188	0.185214
255094	133.8592	27.04081	133.6512	26.94418	-0.20804	-0.09663
255223	131.4645	35.1168	131.6679	35.06127	0.203337	-0.05554
255353	128.4339	43.21484	129.3514	43.21484	0.917426	-4.6E-06

4.1.8 卫星被观测到的情况预测

根据卫星星下点的运行轨迹以及观测范围在地面上的投影，对卫星的观测情况进行预测，当卫星的轨迹进入观测范围之后，即为卫星被观测站观测到，知道卫星星下点运动到观测范围之外，则观测结束。本文中，采用卫星星下点在进/出观测范围的时间和经纬度来描述观测情况预报，有上述情况可知，卫星星下点的经纬度可表示为时间的函数及 $\varphi(t)$ 和 $\lambda(t)$ ，当相邻两步的点分别处于范围内和范围外时，怎卫星行下点进/出观测区域，具体进出可根据在范围内外两点的时间先后来确定，取用这两点的平均经纬度和平局时刻来近似的描述卫星星下点的被观测到的情况，具体过程通过 MATLAB 编程实现。

4.1.9 过顶及施工区域被侦察情况预测

根据卫星星下点的运行轨迹，当卫星星下点的经纬度同时满足经度在 $E118.02^{\circ} \sim E118.91^{\circ}$ 之间和纬度在 $N31.90^{\circ} \sim N32.25^{\circ}$ 度之间时，即为卫星过顶，但是在本题中，由于给定范围较小，严格的过顶情况非常少，所以本文将过顶情况和卫星能够侦察该区域情况共同考虑，即将严格的过顶情况理解为卫星能侦察到该区域的一种情况（在编程预测过程中，并没有发现有卫星星下点能经过施工区域的情况）。

4.1.10 确保安全施工时段的预测

确保安全施工时段的预测过程假设在制定的时间段内均可以进行施工，不考虑夜间施工和不良天气等因素影响，只考虑卫星侦察因素。根据题目要求，施工区域在施工过程中应该避开卫星的侦察，在卫星过顶过着能够侦察到的时候应该停止施工，对应的，确保安全施工的时段应该是整个时段去除卫星能够

侦察到的时段。

4.2 第一问解答

根据附件给出的观测结果，给出 Q 星被观测到的情况如图 3 所示，其中卫星能被观测到的区域为红线围城的封闭区域，图中各点的连线和数字用来描述卫星在此区间出现的顺序和运动的大致路线和方向（折线为轨迹线的近似，非真实轨迹线），卫星在被观测到的区域内的运动方向总是由没有数字的一段运动到有数字的一端（以下各图中的数字、连线和红线围成区域的意义与该出处相同）。

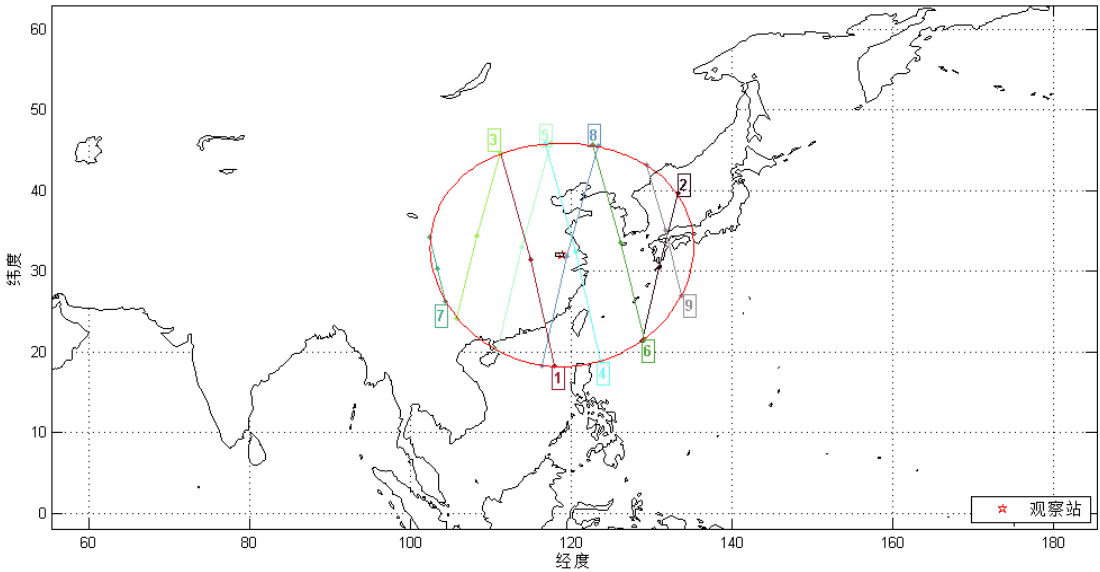


图 3.Q 星被观测到情况

Q 星被观测到的情况预测如图 4 和表 2 所示，其中第 2 条、第 3 条和第 4 条线为 Q 星在 D3 天被观测到的情况，第 9 条和第 10 条线 Q 星在 D5 天被观测到的情况。在表三中，采用 1 描述卫星进入能被观测到的范围，-1 代表卫星运动出能被观测到的范围（以下表格中 1 与-1 的含义与该处相同）。

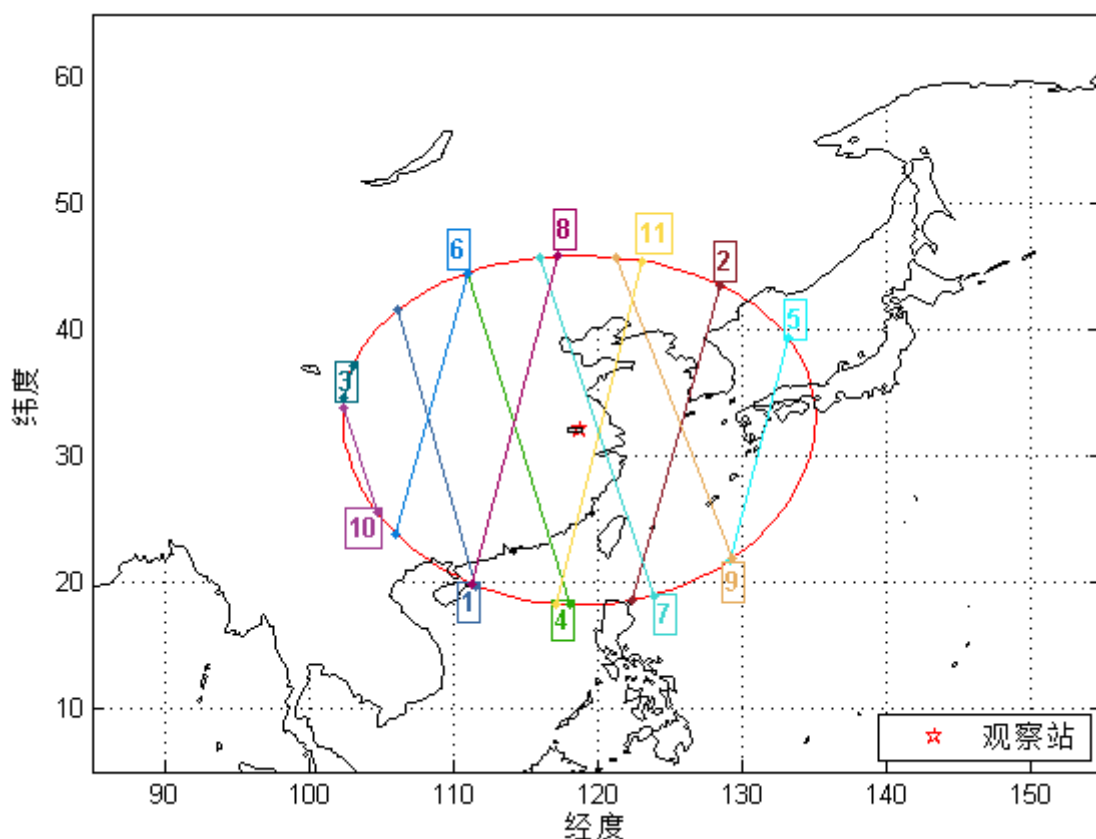


图 4.Q 星被观测到情况预测

表 2.Q 星被观测到情况预测结果

天	时间	经度	纬度	进/出 (1/-1)
D3	0:31:13	111.6595	19.7157538	1
D3	0:37:02	106.2155	41.6324265	-1
D3	12:02:40	128.5057	43.5333047	1
D3	12:09:17	122.4342	18.5943896	-1
D3	13:38:48	103.0987	37.118725	1
D3	13:39:27	102.4718	34.6707923	-1
D5	12:49:18	117.2868	45.851133	1
D5	12:56:11	111.3648	19.8813812	-1
D5	23:21:00	129.3369	21.8254952	1
D5	23:27:23	121.368	45.7465036	-1

Q 星过顶和能够侦测到施工场地的情况预测如图 5 和表 3 所示，其中第 1 条线和第 2 条线为 D4 天 Q 星对于该施工场地的侦察情况，第 3 条线为 D6 天 Q 星对于该施工场地的侦测情况，对于本题要求的此后一天(D3)和此后三天(D5)卫星的没有过顶，同样，也没有侦察到该施工场地，所以，在 D3、D5 两天内确保安全施工的时段为这两天的全天时段。

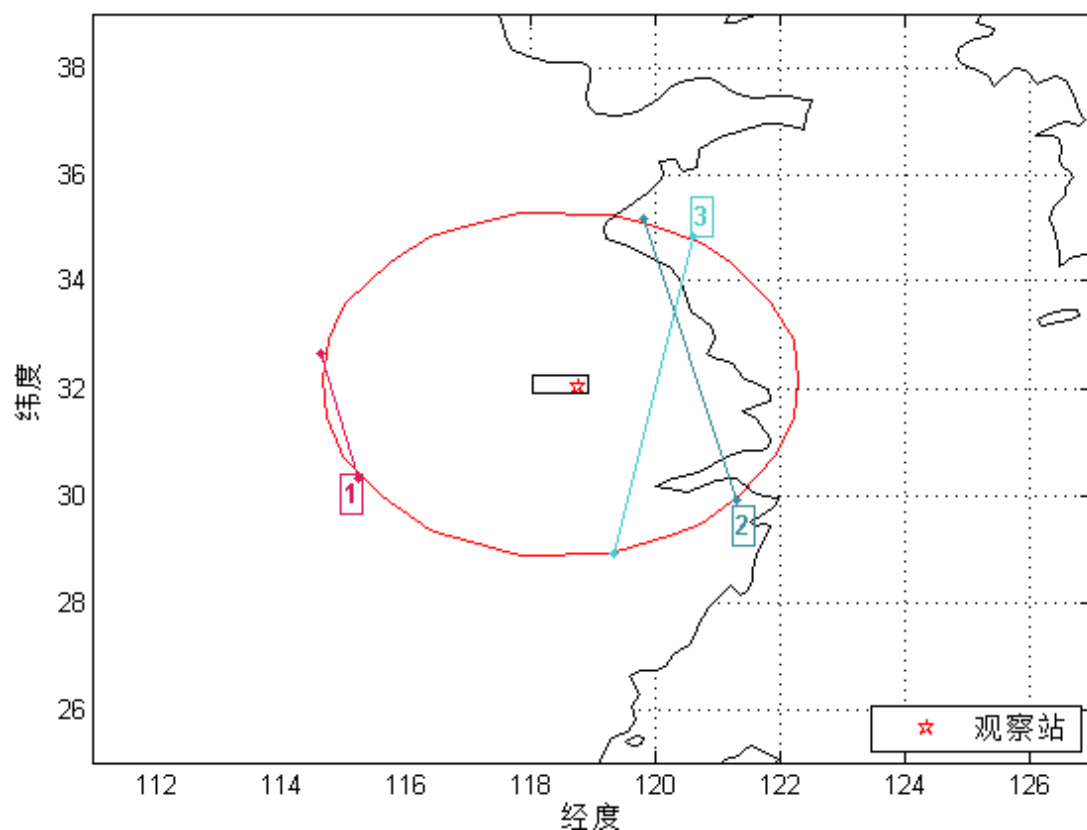


图 5.Q 星过顶和能够侦察到施工现场的预测情况

表 3.施工场地受到 Q 星侦察的时间段

天	时间	经度	纬度	进/出 (1/-1)
D4	5:57:40	115.2484	30.30914	1
D4	15:25:19	114.6426	32.63081	-1
D4	7:12:06	121.3001	29.89535	1
D4	19:11:15	119.7995	35.15798	-1
D6	14:40:53	120.6117	34.82826	1
D6	8:15:48	119.3443	28.91222	-1

4.3 第二问解答

4.3.1 L-1、L-2 相对位置求解

根据 L-1、L-2 轨道参数可知，两星的升交点赤经相差约 180° ，当两星同时经过升交点时，两星的位置关系刚好与地球共线，当两星不处于升交点时，根据卫星资料可知两星的倾斜角相差 10.978° ，二者周期相近，当两颗星运行了半个周期之后，地球自转角度为 12.21° ，由此可知，两星在运行过程中，星下点的运动轨迹在纬度较低的情况下近似于重合，有 1.2° 左右的偏差，纬度升高之后，两星运行路径偏差较大，在较短时间内，两颗星存在 180 的相位差。在运行一

段时间之后，两星位置逐渐发生改变，大约每运行 362 圈之后（约 25 天），L-1 将比 L-2 度绕行一圈，在这个过程中，两颗卫星的位置逐渐从与地球共线变化到地球的同意侧，然后再达到和地球共线的位置。

4.3.2 L-1 星预测结果

根据附件给出的观测结果，给出 L-1 星被观测到的情况如图 6 所示，由于对 L-1 星的观测时间较长，所以 L-1 被观测到的次数相对较多。

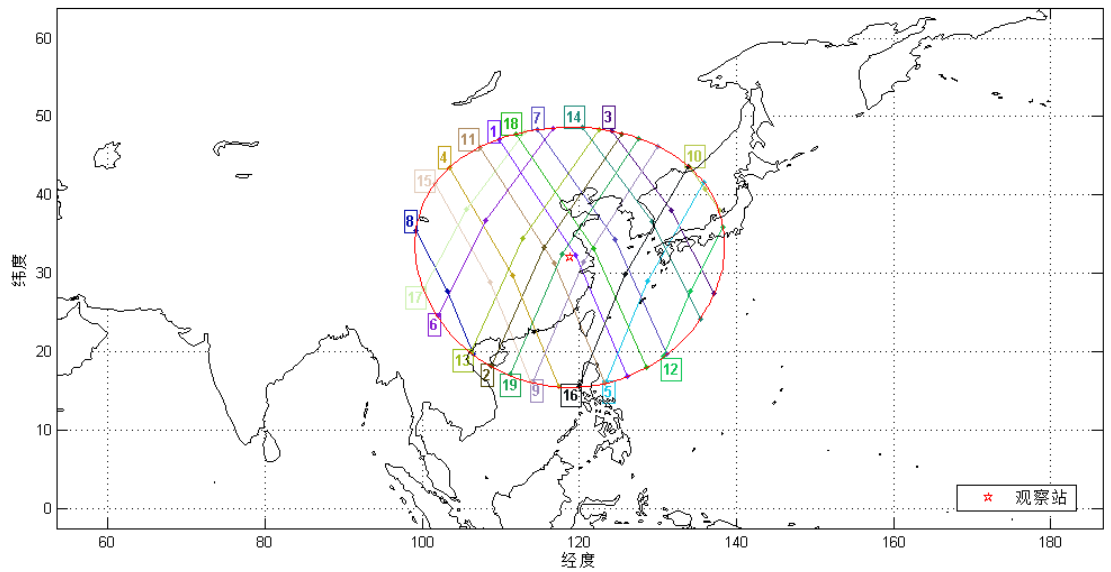


图 6.L-1 星被观测到的情况

L-1 星在 23 日被观测到的预测结果如图 7 和表 4 所示，其中第 5 条、第 6 条、第 7 条和第 8 条线为 L-1 星在 23 日别观测到的情况。

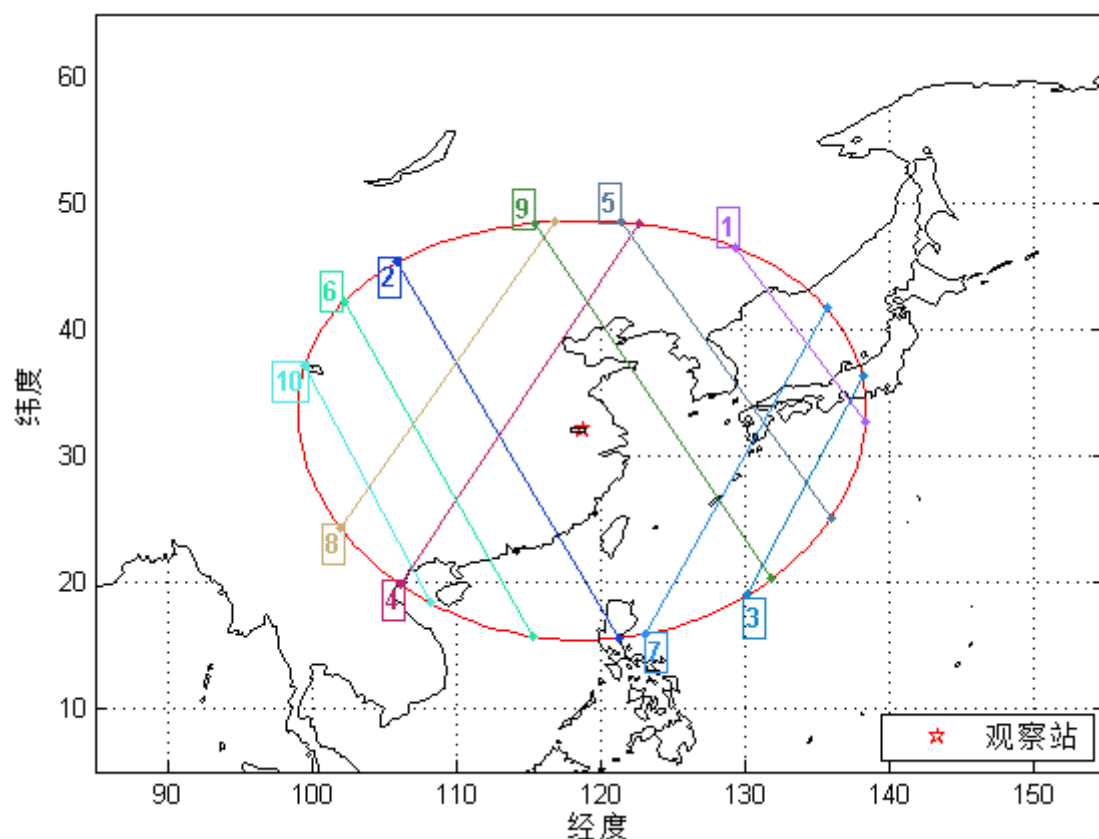


图 7.L-1 星被观测到的预测情况

表 4.L-1 星被观测到的情况预测结果

天	时间	经度	纬度	出/进 (1/-1)
23 日	3:03:04	121.497	48.51815	1
23 日	3:10:18	135.9829	25.09861	-1
23 日	4:42:41	102.2711	42.23376	1
23 日	4:50:41	115.2816	15.69182	-1
23 日	17:11:56	123.0916	15.87205	1
23 日	17:19:44	135.7049	41.76574	-1
23 日	18:52:02	101.996	24.32489	1
23 日	18:59:31	116.8675	48.57811	-1

L-1 侦测情况以及安确保全施工时段预测

L-1 星过顶和能够侦测到施工场地的情况预测如图 8 所示，在 21 到 23 日内，有一次能够侦测到施工区域，根据时间数据推算此时为 22 日，故 23 日侦测不到施工区域。换言之，在 23 日内确保安全施工的时段为这当天的全天时段。

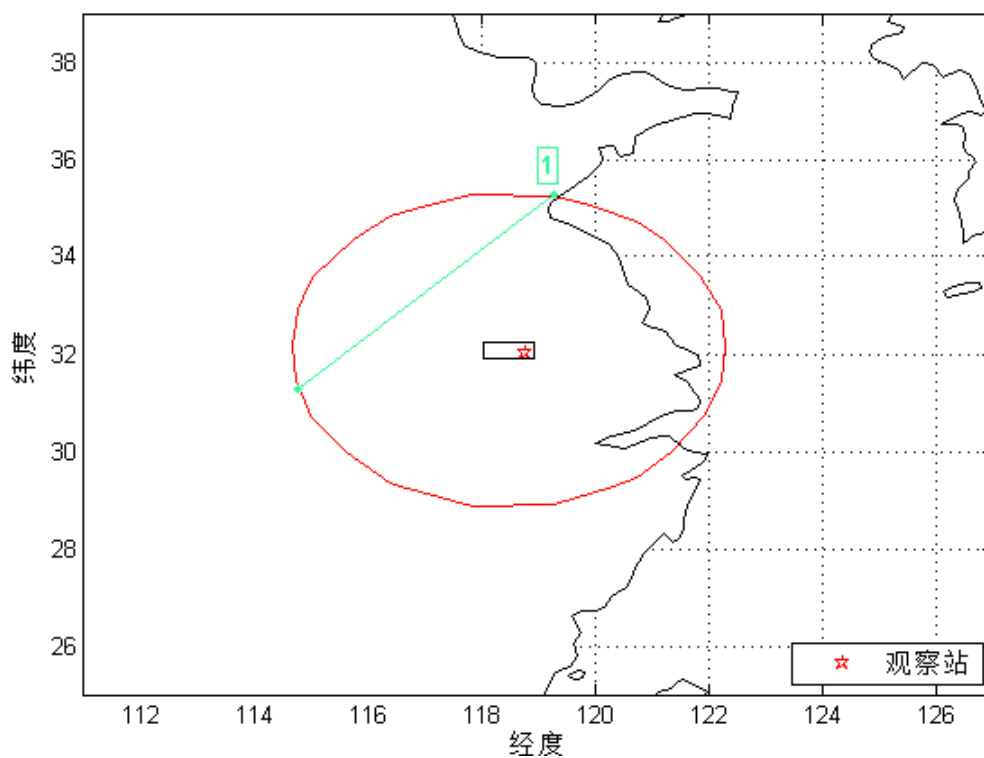


图 8.L-1 和能够侦察到施工现场的预测情况

4.3.3 L-2 星预测结果

根据附件给出的观测结果，给出 L-2 星被观测到的情况如图 9 所示。

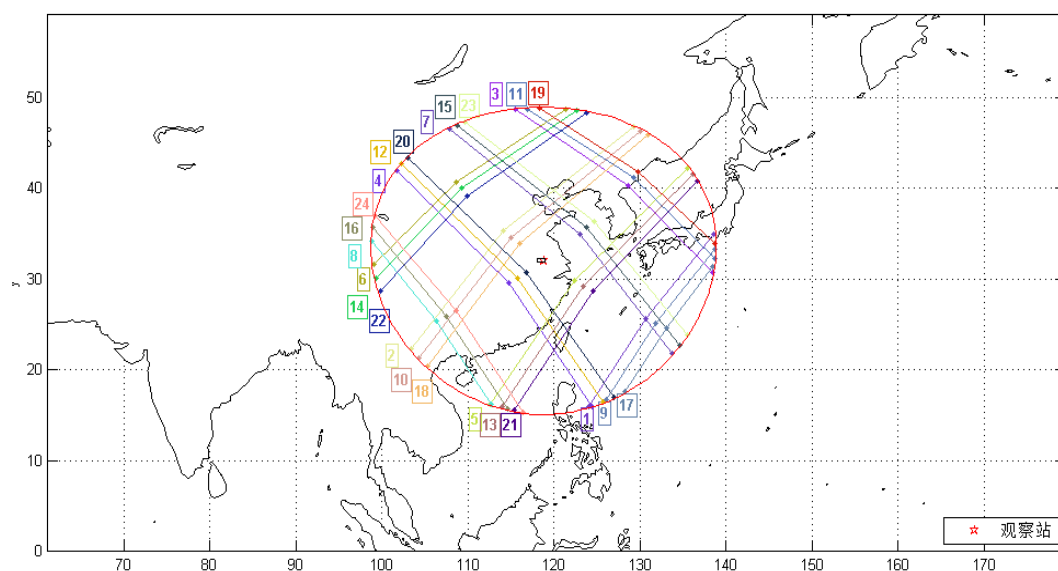


图 9.L-2 星被观测到的情况

L-2 星在 23 日被观测到的预测结果如图 10 和表 5 所示，其中第 8 条、第 9 条、第 10 条和第 11 条线为 L-2 星在 23 日别观测到的情况

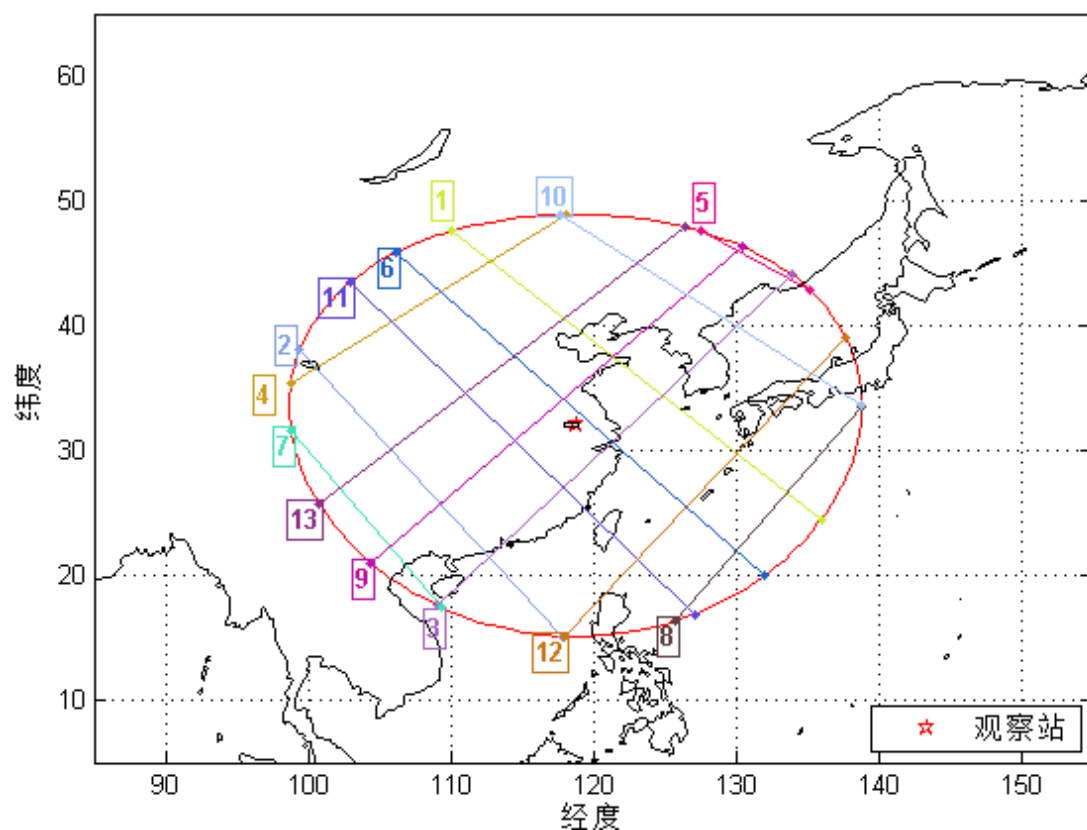


图 10.L-2 星被观测到的预测情况

表 5.L-2 星被观测到的情况预测结果

天	时间	经度	纬度	进/出 (1/-1)
23 日	2:34:20	125.8175	16.3414	1
23 日	2:40:12	138.8481	33.52179	-1
23 日	4:13:45	104.4175	20.99607	1
23 日	4:23:05	130.5444	46.35158	-1
23 日	11:09:53	117.7744	48.94196	1
23 日	11:16:04	138.86	33.60008	-1
23 日	12:50:11	102.9203	43.45742	1
23 日	12:59:39	127.1468	16.89062	-1

L-2 星过顶和能够侦测到施工场地的情况预测如图 11 和表 6 所示，在 21 到 23 日内，有四次能够侦测到施工区域，根据时间数据推算第 3 条为 23 日的运动轨迹，故 23 日 L-2 星侦测能够侦察到施工区域，侦察时间为 12:54:06-12:55:38，所以安全施工的时间段为 00:00:00-12:54:06 和 12:55:38-24:00:00。

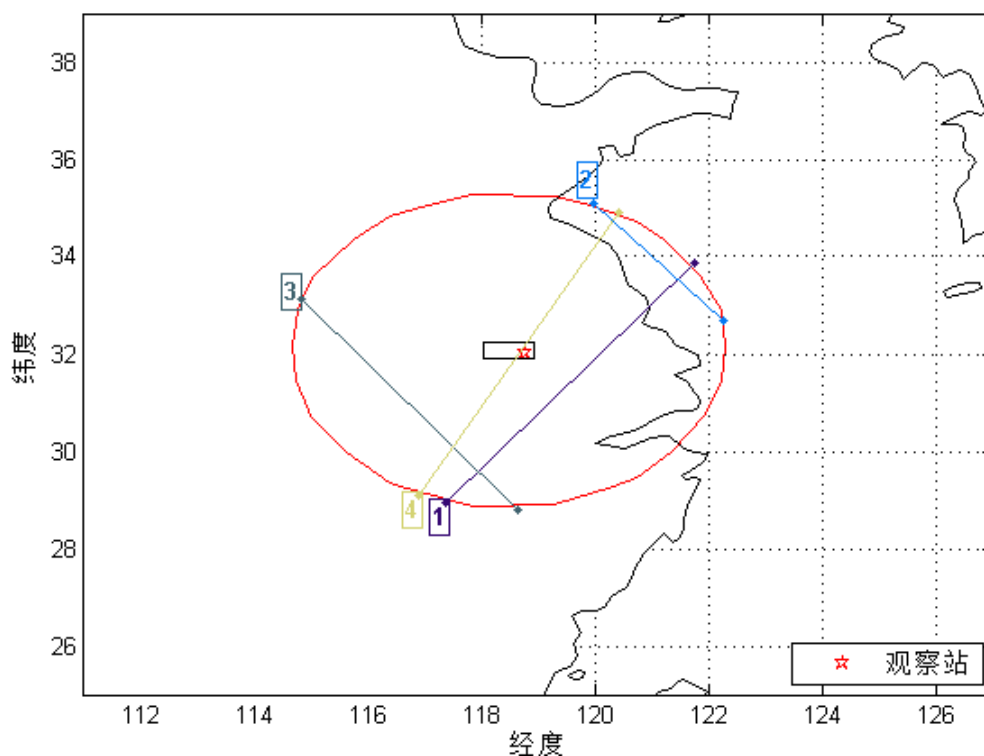


图 11.L-1 和能够侦察到施工现场的预测情况

表 6.施工场地受到 L-2 星侦察的时间段

天	时间	经度	纬度	进/出 (1/-1)
23 日	12:54:06	114.8208	33.14456	1
23 日	12:55:38	118.6196	28.78958	-1

L 型卫星是 L-1 和 L-2 协作工作，理论上，在 L 星卫星的侦察下，确保安全施工的时段应该有在两颗星分别观测下各自确保安全施工的时段交集确定，在本题中，由于 L-1 星在 23 日对施工场地的施工没有约束作用，多以，本体能够确保安全施工的时间段为 00:00:00-12:54:06 和 12:55:38-24:00:00。

4.3.4 L 型星在侦察方面的薄弱环节

L 型星在协作工作的时候确实存在一定的不足之处，首先，两颗星的倾角相差 10.978° ，折也导致了卫星在纬度较高的情况下，侦察的范围不能重合，有较大的偏差，在低纬度地区的侦察范围存在 1° 左右的偏差，这对协作工作效果有一定的影响，另外，两颗星的周期虽然很接近，但是由于偏差的存在，当两颗星运行时，大约每运行 362 圈之后（约 25 天），L-1 将比 L-2 度绕行一圈，也就是说，在两颗星运行一段时间之后，星下点的运行轨迹将不再重合，两星的协作工作效果将由明显的减弱。

4.4 第三问解答

4.4.1 K 星轨道求解

根据观测的情况可以确定出卫星的轨道半径 R_K

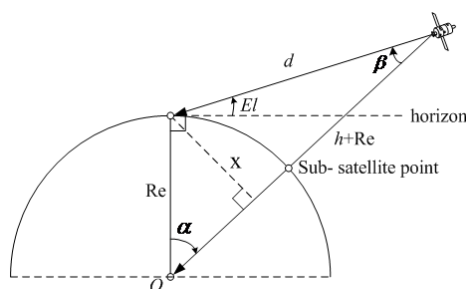


图 12.卫星观测示意图

根据余弦定理得:

$$R_K^2 = R_e^2 + d^2 - 2dR_e \cos(El + 90)$$

根据轨道半径求卫星运行周期
与开普勒第三定律可知

$$T^2 / R^3 = \text{定值}$$

则

$$T_O^2 / R_O^3 = T_K^2 / R_K^3$$

$$T_K = T_Q \sqrt{R_K^3 / R_Q^3}$$

采用第一问处理 Q 星的方法将观测的各点转化为在地球表面的经纬度，假设地球不旋转，将每次测量的经度进行地球自转影响消除修正，建立直角坐标系（第一小问中的坐标系 1），将各投影点修正后的经纬度转化为直角坐标。假设卫星所在平面的方程为 $Ax+By+Cz=0$ ，根据观测的数据采用最小二乘法计算 A 、 B 、 C ，即向量 (A, B, C) 为轨道平面的法向量，取卫星运行方向为正方向采用右手定则取法向量的方向，求出法向量和坐标系 Z 轴正方向的夹角即为轨道倾角。求出轨道倾角、卫星固定时刻的位置、轨道半径、轨道周期之后，可以根据 O 星的预测程序对 K 星的观测进行预测。

4.4.2 K 星预测结果

预测结果如图 14 和表 7，其中第 4 条、第 5 条和 6 条为预测的后面三次 K 星被观测到的情况。

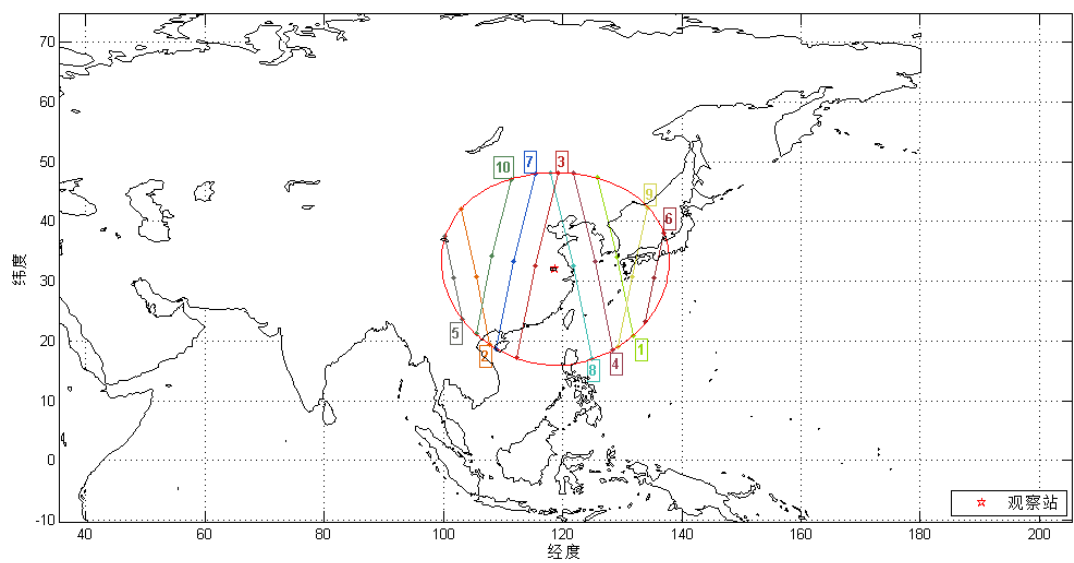


图 13.K 星被观测到的情况

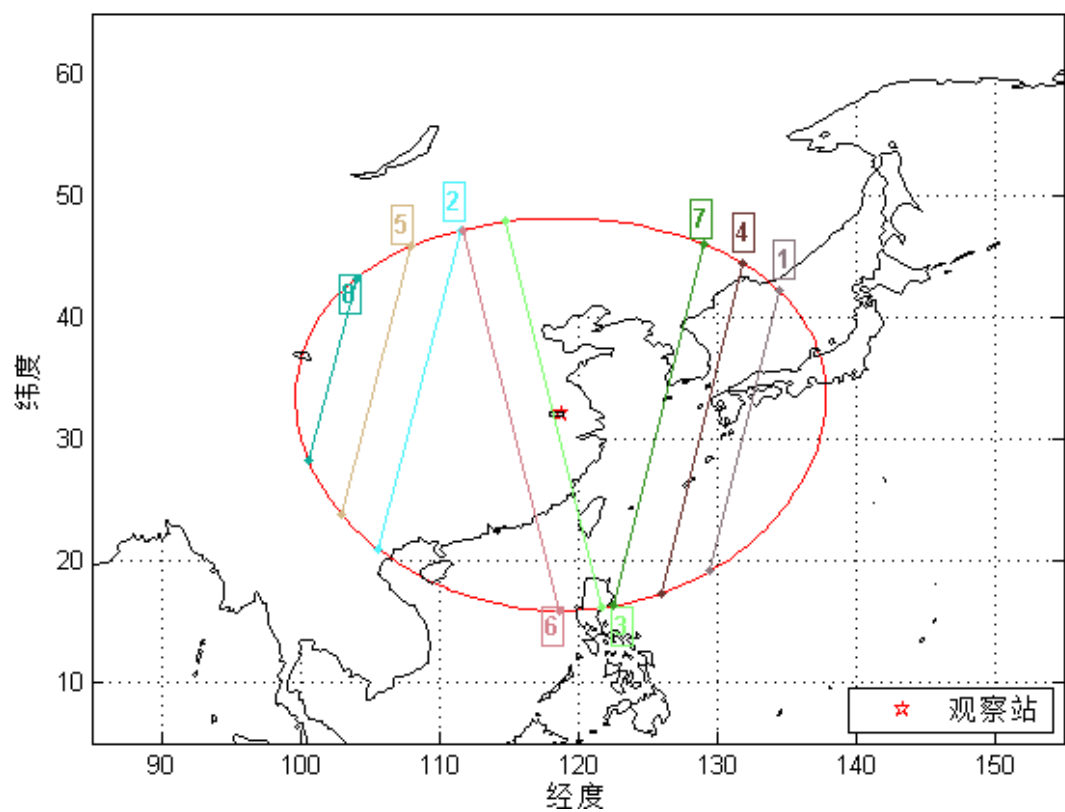


图 14.L-2 星被观测到的预测情况

表 7.施工场地受到 L-2 星侦察的时间段

预测观测情况	时间	经度	纬度	进/出 (1/-1)
第一次观测到	7:48:36	121.7945	16.16577	1
第一次观测结束	7:57:12	114.8051	47.88035	-1
第二次观测到	19:38:37	131.8245	44.49683	1
第二次观测结束	19:45:59	126.0073	17.32167	-1
第三次观测到	21:15:07	107.975	45.81693	1
第三次观测结束	21:21:04	103.0109	23.88149	-1

根据本方法，只需要两组观测数据，即只需连续观测 1 次即可对 K 星进行预测

4.4.3 K 星观测次数和精度分析

根据连续两组的观测的数据既可以确定卫星观测预测的基本数据轨道倾角、卫星固定时刻的位置、轨道半径和轨道周期，从而可以采用 Q 星的预测程序对卫星的观测情况进行预测，每次的观测数据有三组，也就是说只要进行一次观测即可对之后的观测情况进行预测

本题主要是根据观测参数求解轨道倾角，根据不同的观测数值采用最小二乘法拟合，假设观测次数越大，求得的轨道倾角越精确，分别由一次到十次观测数据求得的轨道倾角如下图，由图 15 可得，求得的轨道倾角比较稳定，将各次计算结果与十次观测的计算结果作差，如图 16，结果有一定波动，整体趋势趋于接近。总体而言，观测的次数越多，精度越高。

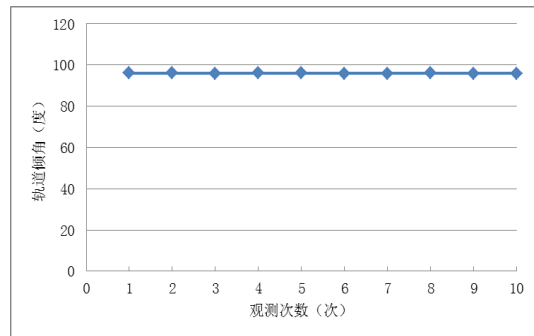


图 15.不同组观测数据对应的轨道倾角

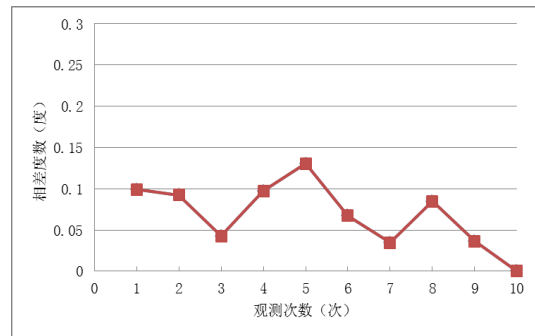


图 16.不同组观测数据对应的轨道倾角偏差

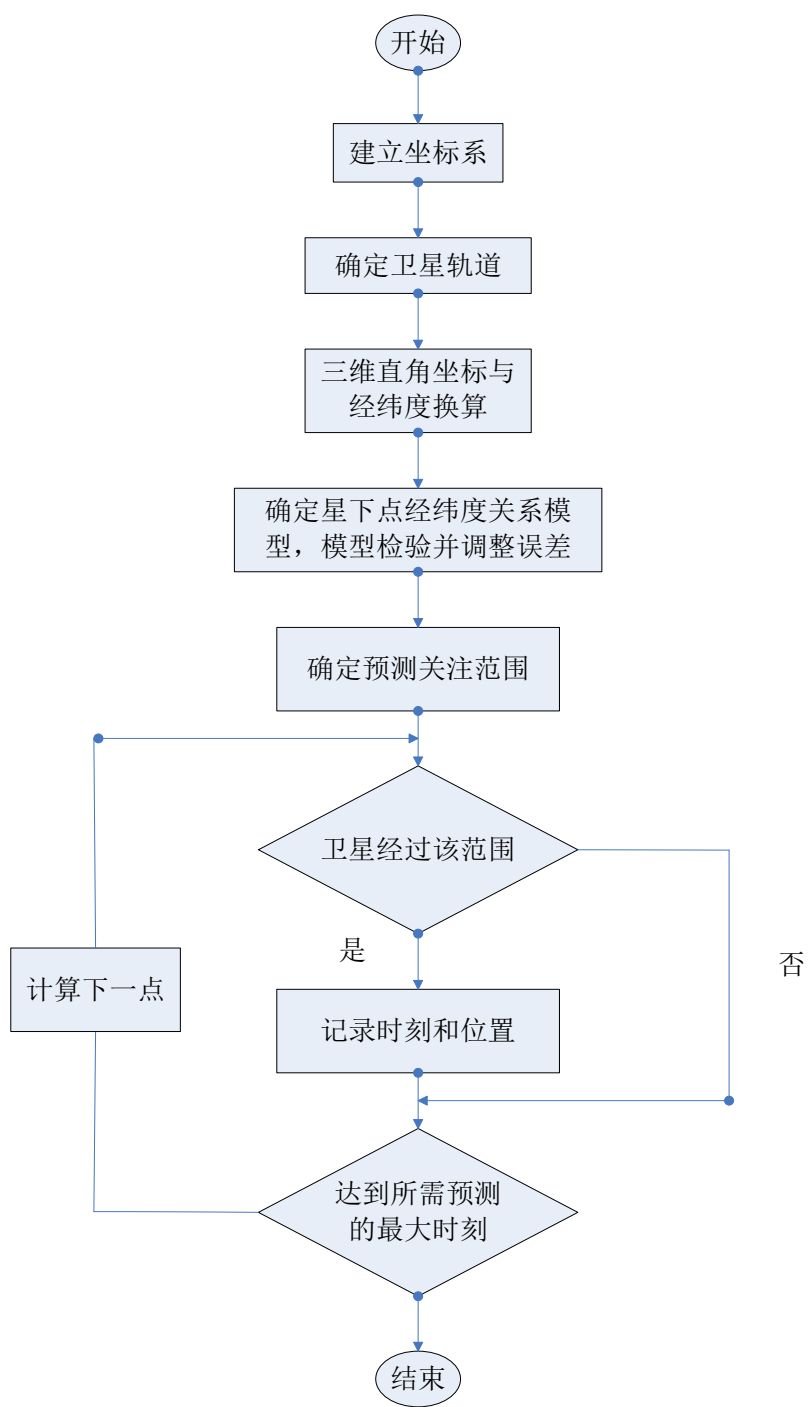


图 17. 确保安全施工时段预测流程图

五、 问题二的解答

问题二为行军路线优化控制问题，本文从时间和安全的角度入手，对问题二进行建模求解。本节具体研究内容如下：

5.1 运输路网图的建立

根据题目提供的新疆地区交通图，首先建立新疆地区从阿勒泰到和田的交通路径图为 $A=(N、L、N_k)$ 。其中：

A ——表示途中各节点集，表示为 $1、2、3 \cdots i \cdots j \cdots n$ ， n 为终点编号；

L ——表示节点路段集， L_{ij} 表示连接节点 i 到节点 j 的路段

A_k ——表示必经的城市构成的必经点合集；

5.2 运输时间的确定

根据前文假设，建立通过路段的时间为 $B=(T、D、W)$

T ——表示无卫星监视下部队行军使用的正常耗时， t_{ij} 表示从 i 点到 j 点的正常耗时；

D ——表示在有卫星监视下，部队需在途中节点的等待时间， D_{ij} 表示从 i 点到 j 点车辆需要的等待时间。

W ——表示部队在连续开进后 10~12 小时后可选择休息的时间

在正常耗时中，车辆耗时与路段距离及车辆行驶速度 v 有关， v 可根据道路等级、安全情况、天候情况，采用经验评估、专家评估等方式确定 v 值。假设速度按道路等级分为 $v_1、v_2$ ，高速公路速度为 v_1 ，普速公路（除高速公路之外的其他公路）速度为 v_2 ，则有：

$$T = \frac{s}{v} = \sum_s T_{ij} = \sum_s \frac{L_{ij}}{v}$$

其次建立卫星的过顶时间集 $F=(F_{ij}, F_i, F_j)$ 。其中，

F_{ij} ——表示 L_{ij} 路段卫星过顶时间；

F_i ——表示卫星侦察 L_{ij} 路段的开始时间；

F_j ——表示卫星侦察 L_{ij} 路段的开始时间；

在计算等待耗时中，由于卫星的轨道是固定的，通过给出各节点的经纬度及出发时间，可得到已知侦察卫星的过顶时间。建立过顶时间集 F ， F_{ij} 表示 L_{ij} 路段卫星过顶时间， F_i 表示卫星侦察 L_{ij} 路段的开始时间， F_j 表示卫星侦察路段 L_{ij} 的结束时间。

卫星在路段 L_{ij} 会出现三种情况：

一是在运输车辆到达节点 i 时卫星已侦察过 L_{ij} 路段；

二是运输车辆到达节点 j 时卫星还没有开始侦察该路段；

三是运输车辆在 L_{ij} 路段行驶时恰好卫星开始侦察该路段，此时车辆应在 i 节点等待，等卫星侦察过该路段再通行。

前两种情况车辆没有等待，等待耗时可以记作 $D_{ij} = 0$ ；最后一种情况由于假设只能在节点等待且认为只要在节点等待就是安全，因此又可分成两种情况：

(1) 卫星对路段 L_{ij} 已侦察了一段时间车辆才到达 i 节点，即 $F_i < T_i < F_j$ 此时车辆应在 i 点等待。

(2) 车辆行驶在路段 L_{ij} 上，但未到达 j 点时卫星开始对该路段侦查，即 $T_i < F_i < T_j$ ，此时车辆也应 i 点等待，这两点情况的等待耗时为 $D_{ij} = F_j - T_i$ 则有：

$$D_{ij} = \begin{cases} F_j - T_i & F_i < T_i < F_j \text{ 或 } T_i < F_i < T_j \\ 0 & F_j < T_i \text{ 或 } T_j < F_i \end{cases}$$

通过上述的建模可以看出，车辆出发的时间不同，等待耗时也将不同。如果等待耗时 $\sum_s D_{ij} \neq 0$ ，则可能出现休息一段时间后出发反而比不休息早到达作战地域的可能。其中休息时间应小于等于最短等待时耗，即 $10 \leq W_i \leq \min_s \sum_s D_{ij}$ ，在此情况下可适当考虑休息，以实现最快到达作战地域的目的。

现假设有从起点到终点的路径 S_1 ， S_1 由若干路段组成，出发时间为 t_0 ，则

通过此路径耗时为正常耗时+等待耗时，即：

$$G = \sum_s T_{ij} + \sum_s D_{ij} + \sum_s W_i$$

5.3 模型的建立

根据上述分析过程，可建立如下优化模型：

$$\begin{aligned} & \min G \\ & s.t. \left\{ \begin{aligned} & G = \sum_s T_{ij} + \sum_s D_{ij} + \sum_s W_i \\ & D_{ij} = \begin{cases} F_j - T_i & F_i < T_i < F_j \text{ 或 } T_i < F_i < T_j \\ 0 & F_j < T_i \text{ 或 } T_j < F_i \end{cases} \\ & T_{ij} = \frac{L_{ij}}{v} \\ & 10 \leq W_i \leq \min \sum_s D_{ij} \\ & i, j \in (1, n) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

5.4 模型的求解

首先将阿勒泰至和田的道路转化成相应的网络图，如图 18 所示。将从阿勒泰途径喀什再至和田的各条路线进行枚举，得到所有的可能路线。

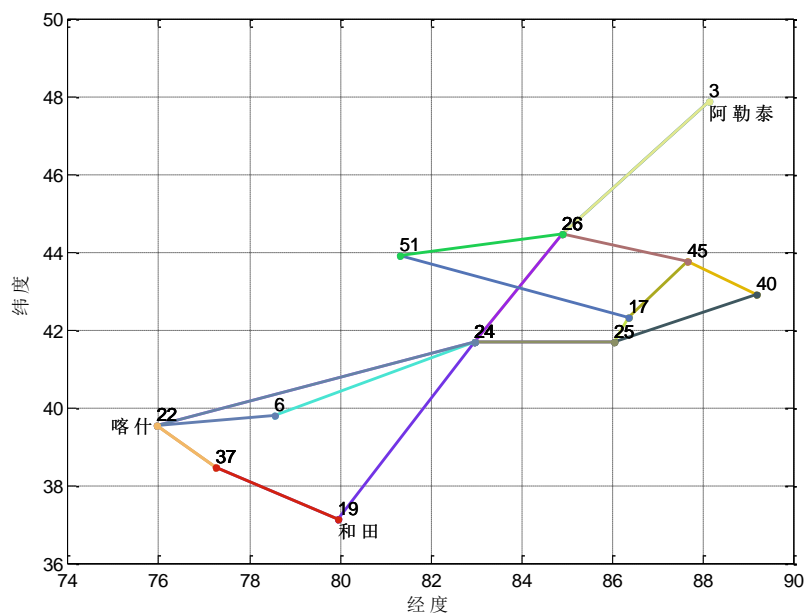


图 18. 阿勒泰-和田道路网络图

为了简化分析，能够确定卫星对不同道路的侦查时间，将道路进行离散化处理。举其中一条路线为例，将连接各城市的道路分成若干微段，并假定行军时以微段为单位，只会在微段端点停留。以微段中心向外以卫星辐照宽度为长

度延伸，得到微段的包络曲线，当卫星的星下点进入该区域时，该路段受到侦查，卫星的星下点离开该区域时，该路段解除受侦查状态。这样可以得到整条路线的卫星侦查包络图，如图 19 所示。相应的，可以根据 L、Q 卫星的初始的初始位置参数，计算出未来几天的星下点轨迹曲线。L、Q 卫星在路线区域附近的未来四天的星下点轨迹分别如图 20、21 所示。

对于 L 型卫星，由于其侦查能力强，需要避开其侦查时间；而对于 Q 型卫星，若只考虑其过顶时刻的隐蔽，则可认为其对行军过程几乎没有影响。

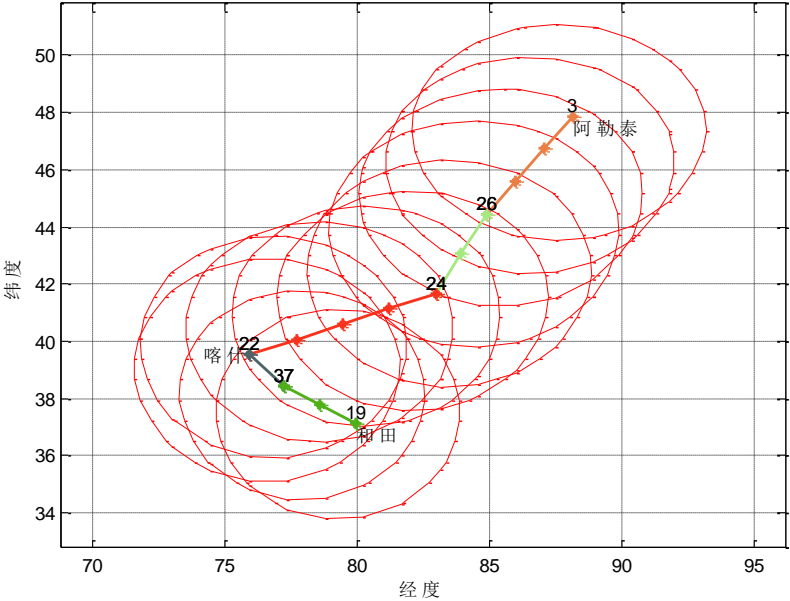


图 19. 某路线卫星侦查包络图

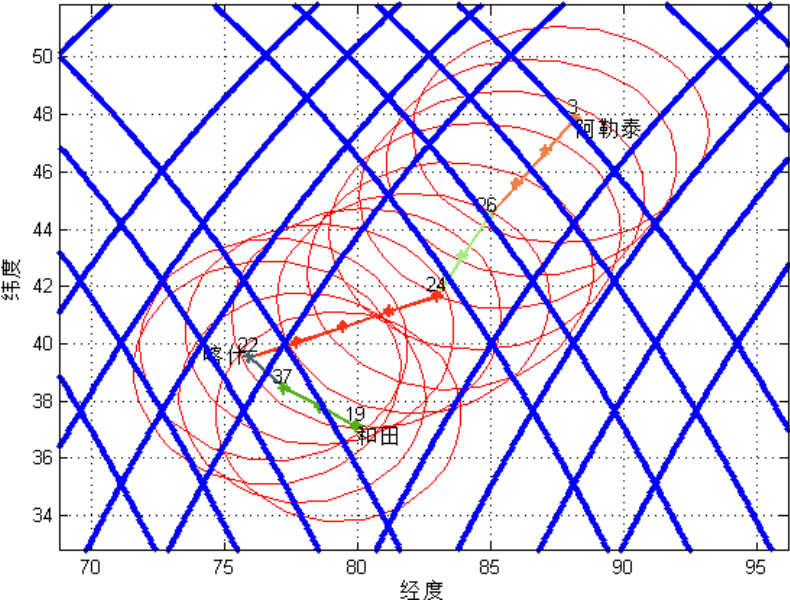


图 20. L 型卫星未来四天星下点轨迹图

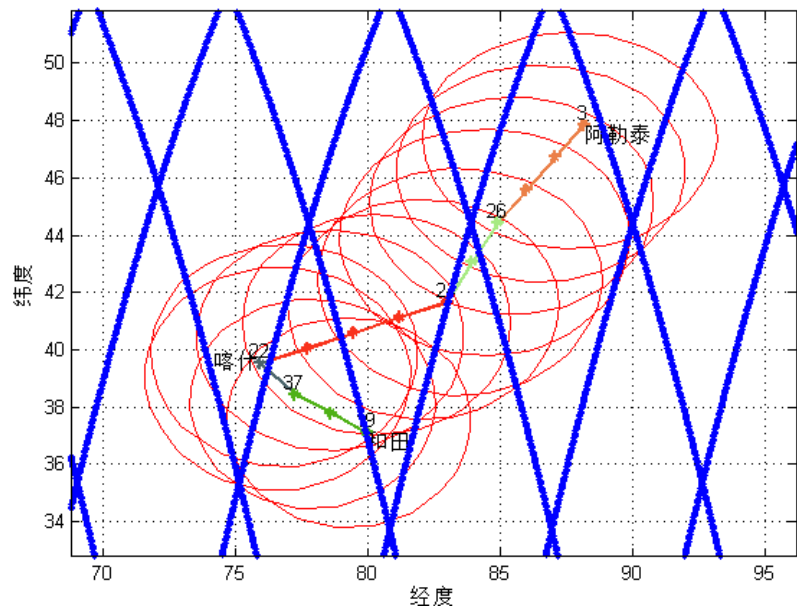


图 21. Q 型卫星未来四天星下点轨迹图

根据各路段受卫星的侦查情况数据，代入所建立的优化模型中，编程求解得到最优解。最优路线如图 22 所示。最优裤线的行军方案如图 23 所示，其中红色区域表示受到侦查。最短行军时间为 54.46 小时。

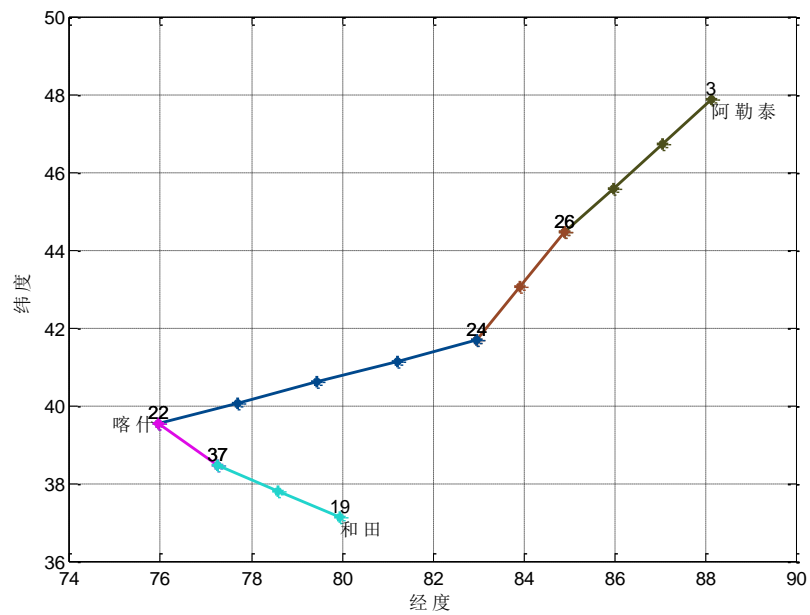


图 22. 最优行军路线图

表 8 最优行军方案

时间段(h)		行军策略
0	5	100km/h 行军
5	12	50km/h 行军
12	22	宿营新源市
22	25.6	50km/h 行军
25.6	27.4	驻扎库车市, 规避侦查
27.4	34.55	100km/h 行军
34.55	44.55	宿营喀什市
44.55	49.13	100km/h 行军
49.13	51.8	驻扎莎车市, 规避侦查
51.8	54.46	100km/h 行军

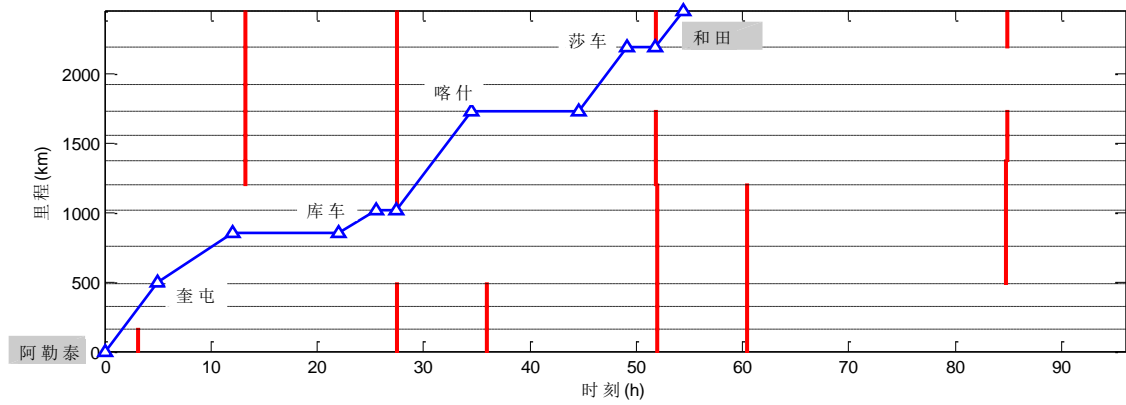


图 23 最优路线方案行军图

对于从和田返回至阿勒泰的最优方案求解，其过程与上述过程类似。

六、问题三的解答

本文采用改进后的 A*启发式搜索算法,以被发现的概率作为优化目标,从分析影响运动路线的影响因素出发,引入影响因素存在影响因子的概念,即各影响因素存在一定权重,给出选择导弹发射装置规避卫星最佳可行性的数学模型。

6.1 影响导弹发射装置行动的因素

导弹发射装置的战时隐蔽问题即是选择最低发现概率即最佳可行性规避卫星侦察,假设可行性的量化值(等于不能被敌侦察发现的概率)为 E 。这里主要考虑遭 Q 型、L 型(包括 L-1、L-2)、K 型卫星发现的概率分别为 E_1 、 E_2 、 E_3 。可认为两种或三种卫星的组合侦察被发现的概率是线性叠加的,即 $E = E_1 + E_2 + E_3$ 。正确分析确定导弹发射装置运动路线的影响因素,是机动路线问题的前提,影响运动线路的因素很多,借鉴前文的经验,本文选择如下几种影响因素:区域大小(包括节点数量,路长因素),路网状况,卫星侦察因素。将区域划分为若干个小区域,区域与区域之间通过道路连接,可将小区域以节点标号 k 、 j 表示,设每一个影响因素的量化值为 E_{kji} , 其中 $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

6.1.1 路长因素

路长主要指导弹部队机动所经过路段的实际长度。在导弹部队机动的过程中,每条线路节点之间的距离都是不等的,而在战时,时间就是生命,所以线路路长是影响部队机动的因素之一。根据以上假设,路长因素量化值可设为 E_{kj1} 。

6.1.2 路况因素

路况因素主要是指线路的道路等级、道路的交通情况和可维修性等等。如在普通公路和高速公路上,即使是相同的距离,机动所需要的时间也是不相等的。而道路的等级、道路交通情况和可维修性可通过评判打分的方法得到其量化数据,故根据以上假设路况因素量化值可设为 E_{kj2} 。

6.1.3 障碍因素

在障碍因素中,主要考虑机动中遇到的疲劳、壕沟、涵洞、桥梁和水深等因

素,这些影响因素主要限制地空导弹部队的通行,如壕沟太宽、涵洞太矮、桥梁承重太小、水深太深等都无法使部队通过,或是部队在连续行军后需要停止前进原地休整。这些影响因素的量化值都是 **BOOL** 值,即 0 或 1。能够通行即为 1,不能通行即为 0。根据假设,障碍因素的量化值可设为 E_{kj3}

6.2 机动能力因子计算

根据影响地空导弹部队机动的因素,在确定每一个影响因素的量化之后,可建立如下计算公式计算从所有标记的节点 k 到其他直接连接的未标记节点 j 的机动能力影响因子:

$$\alpha_i = \sum_{i=1} E_{kji} \cdot q_i$$

式中, E_{kji} 为第 i 个影响因素的量化值; q_i 为第 i 个影响因素所占有的比重。

计算后,代入影响因素计算式即可。

6.3 适合导弹发射装置的 A*改进算法

参考文献给出 A*改进算法,考虑了机动能力影响因子的概念,即把机动过程中的相关影响因素转化成权重值。然后将 $g(n)$ 的值乘以这个权重值,再利用 A* 算法进行求解。

基本思想及实现步骤如下:

确立如下形式的启发函数:

$$f(n) = \alpha g(n) + h(n)$$

式中: α 是每段路影响因素的影响因子; $g(n)$ 是从起点到候选节点实际花费的代价; $h(n)$ 是从候选节点到目标点的估计代价。通过比较 $f(n)$, 选取代价最小的候选节点作为下一路径节点。

在算法的实现过程中,要构造两个链表。分别存储待扩展的节点和已扩展的节点,分别称为 O 表和 C 表。算法实现步骤如下:

- 1) 初始化设置。设置初始节点: $d_s = 0$, $p_s = \Phi$; 其他点: $d_s = \infty$, $p_s = ?$ (未知); 将起始节点 s 标号,记 $k = s$ 。并将起始点信息加载到 O 表中, C 表赋

值为空。

2) 机动能力因子计算。首先计算起始点 s 到其他直接连接的未标记的点 j 的机动能力因子 α_{ij} 。

3) 距离计算。计算从所有标记点的点到其他直接连接的未标记的点 j 的距离。即搜索距离当前节点最近的节点，求 $f(j)$ 的最小值，将节点 j 从 O 表中删除并加载到 C 表中。判断节点 j 是否为终结点，如果是，转向步骤 5)；否则转向步骤 4)。

4) 判断节点 j 的节点信息是否在确定的范围内,如果在范围内,则扩展节点 j ；否则加载节点 j 的节点信息并进行扩展。转向步骤 3)。

5) 从节点 j 开始,利用回溯的方法输出起始节点到目标节点的最优路径，以及最高可行性，算法终止。

七、模型的评价与改进

对于问题一，卫星星下点经纬关于时间函数的计算相对简单，易于实现，存在误差，在进行校正之后能够很好的符合观测情况。但是，该算法是建立在地球为标准均匀球体、卫星轨道为圆形的假设上，忽略了由于地球质量分布不均匀和非球形对称性、日月及其它星体的引力、大气阻力引起的摄动。

对于问题二，建立了以最短行军时间为目标的优化模型，可以考虑不同的道路行车条件和卫星侦察情况，得到最优的行军路线。不足之处是模型需要对道路进行离散化，当需要较高精度的时候，需要对道路进行精细划分，算量增加明显。

对于问题三，按一定权重导弹发射部队规避卫星可行性的影响因素进行考虑，对于不同影响因素考虑成不同，更加合理，但是在该模型中仅考虑了三种，尚不完全，可在后期引入更加全面的影响因素对模型进行进一步完善。

参考文献

- [1]代明鑫.区域反卫星侦察技术研究[D].国防科学技术大学,2006
- [2]刘飞鸿.卫星对地侦察威胁估算模型研究[D].西安工业大学,2014
- [3]王鹏, 刘海涛, 杨根庆.一种小卫星过顶预报算法[J].上海航天,2002,(第 5 期): 17-19, 38
- [4]罗伊萍, 解志刚, 陈文锋.一种有效的卫星过顶预报方法[J].海洋测绘,2006,第 26 卷(第 3 期): 13-16
- [5]漆阳华, 杨战平, 黄清华.A*的改进路径规划算法[J].信息与电子工程,2009,第 7 卷(第 4 期): 326
- [6]邱育红.GIS 空间分析中两种改进的路径规划算法[J].计算机系统应用,2007,第 16 卷(第 7 期): 33-35+40
- [7]顾青, 豆风铅, 马飞.基于改进 A*算法的电动车能耗最优路径规划[J].农业机械学报,2015,第 46 卷(第 12 期): 316-322
- [8]陈长军.基于信息不确定性的军事运输隐蔽性路径的选择问题研究[D].南京航空航天大学,2010
- [9]石玉峰.战时不确定性运输路径优化研究[D].西南交通大学,2006
- [10]张云彬, 张永生.近圆轨道遥感卫星星下点轨迹的计算[J].测绘学院学报,2001,第 18 卷(第 4 期): 257-257
- [11]孔祥羽.卫星监视下军事运输路径优化问题[D].中国石油大学(华东),2012
- [12]孔祥羽.卫星监视下军事运输路径优化问题[J].电脑知识与技术,2012,(第 6 期): 1434-1435