

# 全国第六届研究生数学建模竞赛



题 目

## 110 警车配置及巡逻方案

### 摘 要

本文根据图论中的相关理论，将某城区路网抽象为有向图，按照图的深度优先遍历算法，以初始驻车点、可满足接警后行动时限约束的最长距离为控制因素，对城区道路进行巡逻区域划分，算得满足约束条件的所需最少警车数量；以巡逻周期、见警次数、群众满意度、巡逻均衡度为指标，建立了“警车巡逻效果评价表达式”。根据实际情况，以保持警车巡逻尽可能高效为目标，在以各巡逻效果评价指标为约束条件下，建立“警车分区域巡逻模型”；根据旅行商问题求解思路，综合运用弗洛伊德算法、神经网络算法，分别就区域间是否相关联设计了不同的城区巡逻方案。根据巡逻隐蔽性约束、警车数量约束、警车速度因素等特殊要求进行模型修正，按区域适应性不同求得多个巡逻方案，并计算出其对应巡逻效果指标值。最后，考虑道路节点优先度、区域道路节点密度、车速及自然地理环境如水域等相互制约关系，利用 MATLAB 仿真，进行了全区域巡逻模型及巡逻方案优化，得到全区域优化巡逻方案。

关键词：警车配置、巡逻方案、旅行商问题、模型优化、隐蔽性、分区域巡逻

# 110 警车配置及巡逻方案

## 1 问题来源及意义

110 警车属于人民群众公共安全保护系统的一部分，承担着十分重要的责任，是城市安全与和谐的象征，110 警车在街道上巡弋，既能够对违法犯罪分子起到震慑作用，降低犯罪率，又能够增加市民的安全感，同时也加快了接处警（接受报警并赶往现场处理事件）时间，提高了反应时效，为社会和谐提供了有力的保障。

反应时效与巡逻效率是警车配置与巡逻问题的两个重要指标。反应时效是指 110 指挥部规定的接受报警并赶往现场处理事件的最大时间限制，反应时效关系到群众的生命财产安全及大众舆论的好坏；巡逻效率影响着工作成本及安保作用。在进行警车配置和设计警车巡逻方案时，针对城市各区域情况，在不影响时限标准实现的前提下，必须尽可能地降低成本，将少警车数量。

## 2 问题描述

考虑某城市内一区域，为简化问题，假定所有事发现场均在下图的道路上。该区域内三个重点部位的坐标分别为：(5112, 4806)，(9126, 4266)，(7434, 1332)（见下图红点部位，蓝色部分为水域，道路数据见附件，相邻两个交叉路口之间的道路近似认为是直线）。

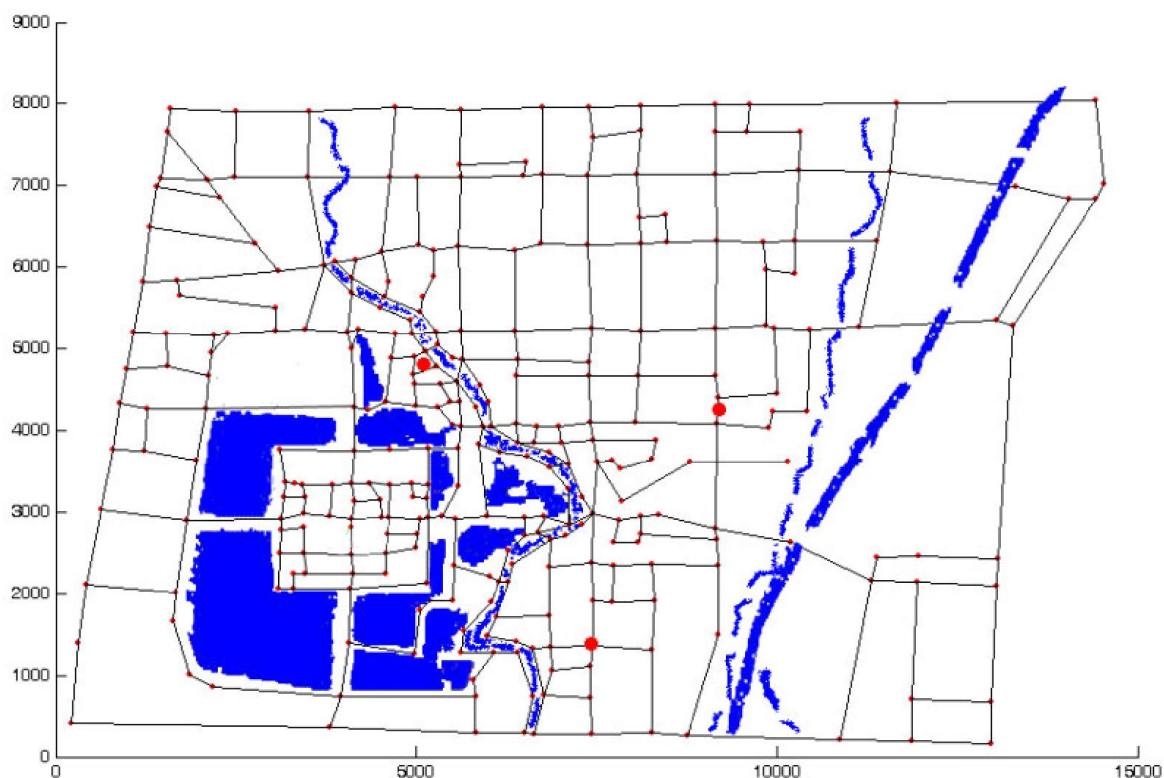


图 1 某城区道路交叉示意图

某城市拟增加一批配备有 GPS 卫星定位系统及先进通讯设备的 110 警车。设 110 警车的平均巡逻速度为 20km/h，接警后的平均行驶速度为 40km/h。警车配置及巡逻方案要尽量满足以下要求：

- D1. 警车在接警后三分钟内赶到现场的比率不低于 90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内。
- D2. 使巡逻效果更显著；
- D3. 警车巡逻规律应有一定的隐蔽性。

需回答以下问题：

- 一. 若要求满足 D1,该区最少需要配置多少辆警车巡逻？
- 二. 请给出评价巡逻效果显著程度的有关指标。
- 三. 请给出满足 D1 且尽量满足 D2 条件的警车巡逻方案及其评价指标值。
- 四. 在第三问的基础上，再考虑 D3 条件，给出你们的警车巡逻方案及其评价指标值。
- 五. 如果该区域仅配置 10 辆警车，应如何制定巡逻方案，使 D1、D2 尽量得到满足？
- 六. 若警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h，回答问题三。
- 七. 还有哪些因素、哪些情况需要考虑？给出相应的解决方案。

### 3 模型的建立与求解

#### 3.1 城区所需最少警车配置计算

##### 3.1.1 问题分析

某城市拟增加一批配备有 GPS 卫星定位系统及先进通讯设备的 110 警车。已设 110 警车的平均巡逻速度为 20km/h，接警后的平均行驶速度为 40km/h。

由题意可知，该城区所有事发现场均在图 1 所示的道路上。该区域内三个重点部位的坐标分别为：(5112, 4806)，(9126, 4266)，(7434, 1332)（见图 1 红点部位，相邻两个交叉路口之间的道路近似认为是直线）。警车配置及巡逻方案要尽量满足：

警车在接警后 3 分钟内赶到现场的比例不低于 90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内。

根据这一要求，对图1所示城区进行区域细分，可绘得每辆警车负责的巡逻区域，对于这一细分过程，分析如下：

对于某一辆警车，以图1内任意一点为驻车点，即该警车所属巡逻区域中心点，沿可行道路向四周相邻接点延伸，以接警后的平均行驶速度行驶3分钟（重点部位2分钟）所能到达距离为该区域范围上限，若中心点至相邻接点距离未超过上限，则对其相邻接点进行递归操作，直至超出区域上限。

根据这一思路，可得满足D1条件下图1所示城区巡逻任务所需警车配置情况。

##### 3.1.2 模型假设

- 1) 假设城区所有道路畅通无阻；
- 2) 假设相邻两个交叉路口之间的道路为直线；
- 3) 假设所有事发现场均在城区道路上；
- 4) 假设单一巡逻区域内某一时间无并发事件；
- 5) 假设巡逻过程警车无故障发生；
- 6) 假设警车驻车点均位于道路交叉路口。

##### 3.1.3 符号说明

$N$ ：城区警车总数，即城区巡逻子区域数目；

$N_{\min}$ ：城区所需最少警车数目；

$n$ ：城区警车即城区巡逻区域序号（ $n=1,2,\dots,N$ ）；

$K_i$ ：第 $i$ 个交叉路口（ $i=1,2,\dots,307$ ）；

$\bar{K}_i$ ：第 $i$ 个交叉路口邻接路口集合（ $i=1,2,\dots,307$ ）；

$m_i$ ：与第 $i$ 个交叉路口相邻的交叉路口数目（ $i=1,2,\dots,307$ ）；

$K(x_i, y_i)$ ：第 $i$ 个交叉路口坐标（ $x_i \in (0,15000), y_i \in (0,9000)$ ）；

$\bar{K}(x_i, y_i)$ ：第 $i$ 个交叉路口的邻接路口集合，坐标表示（ $x_i \in (0,15000), y_i \in (0,9000)$ ）；

$L(i, j)$  : 第  $i$  个道路交叉路口至第  $j$  个道路交叉路口间距离  
( $i=1,2,\dots,307; j=1,2,\dots,307$ ; 单位: m) ;

$L_{\max}$  : 警车接警时距离现场距离上限 (单位: m) ;

$L$  : 警车接警时距离现场距离 (单位: m) ;

$T_{\max}$  : 警车接警后到达现场耗时上限 (单位: h) ;

$T$  : 警车接警后到达现场耗时上限 (单位: h) ;

$t_n(x_i, y_i)$  : 第  $n$  辆警车到达第  $i$  个交叉路口坐标 ( $x_i \in (0, 15000), y_i \in (0, 9000)$ ) ;

$v_{\text{接警}}$  : 110警车接警后平均时速 (单位: km/h) ;

$v_{\text{巡逻}}$  : 110警车平均巡逻时速 (单位: km/h) ;

$Q_n$  : 第  $n$  个警车巡逻子区域 ( $n=1,2,\dots,N$ ) 。

$\delta$  : 警车接警后三分钟内赶到现场比例。

### 3.1.4 模型建立

根据题目中的已知条件, 城区内任意相邻交叉路口间距离可用下式计算:

$$L(i, \tilde{i}) = \sqrt{(x_i - x_{\tilde{i}})^2 + (y_i - y_{\tilde{i}})^2} \quad (1)$$

综合计算, 可求得任意两交叉路口间距离为:

$$L(i, j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\tilde{i} \dots j} \sqrt{(x_i - x_{\tilde{i}})^2 + (y_i - y_{\tilde{i}})^2} & \text{当 } i < j \text{ 时;} \\ \sum_{j=1}^{\tilde{j} \dots i} \sqrt{(x_j - x_{\tilde{j}})^2 + (y_j - y_{\tilde{j}})^2} & \text{当 } i > j \text{ 时.} \end{cases} \quad (2)$$

其中:

对于  $\tilde{i}$  :  $K_{\tilde{i}} \in \bar{K}_i$ , 即  $K(x_{\tilde{i}}, y_{\tilde{i}}) \in \bar{K}(x_i, y_i)$ ;

对于  $\tilde{j}$  :  $K_{\tilde{j}} \in \bar{K}_j$ , 即  $K(x_{\tilde{j}}, y_{\tilde{j}}) \in \bar{K}(x_j, y_j)$ ;

基于假设4, 单一巡逻区域内某一时间无并发事件, 故每一子区域只需一辆警车。为方便计算和编写约束条件, 将题中的时间和距离统一化为距离处理, 称为“等效距离”, 即: 警车接警时到达现场耗时转化为警车行驶的等效距离  $L$  为:  $L = T \times v_{\text{接警}}$ ;

同时得到警车接警时可行驶的最大等效路程  $L_{\max}$  为:  $L_{\max} = T_{\max} \times v_{\text{接警}}$ 。

设城区内第  $i$  点为警车驻车点, 坐标为  $K(x_i, y_i)$ , 根据题意要求, 可得警车巡逻区域划分约束关系式:

$$L(i, j) = L(K(x_i, y_i), K(x_j, y_j)) \leq L_{\max} \quad (3)$$

### 3.1.5 模型求解

根据题意，主要分析城区警车巡逻区域划分问题，结合已知记录统计数据，应用式（1），可求得城区道路各相邻交叉路口间距离。

根据附表《地图数据》可得城区全体交叉口坐标；提取附表《道路数据》中的起始交叉口编号、终止交叉口编号，按编号得其对应坐标，应用平面直角坐标系下两点之间距离公式，求出全体相邻交叉口间距离，即城区各路段长度；据此分析，可绘得该城区道路交叉路口详细信息如图1所示。

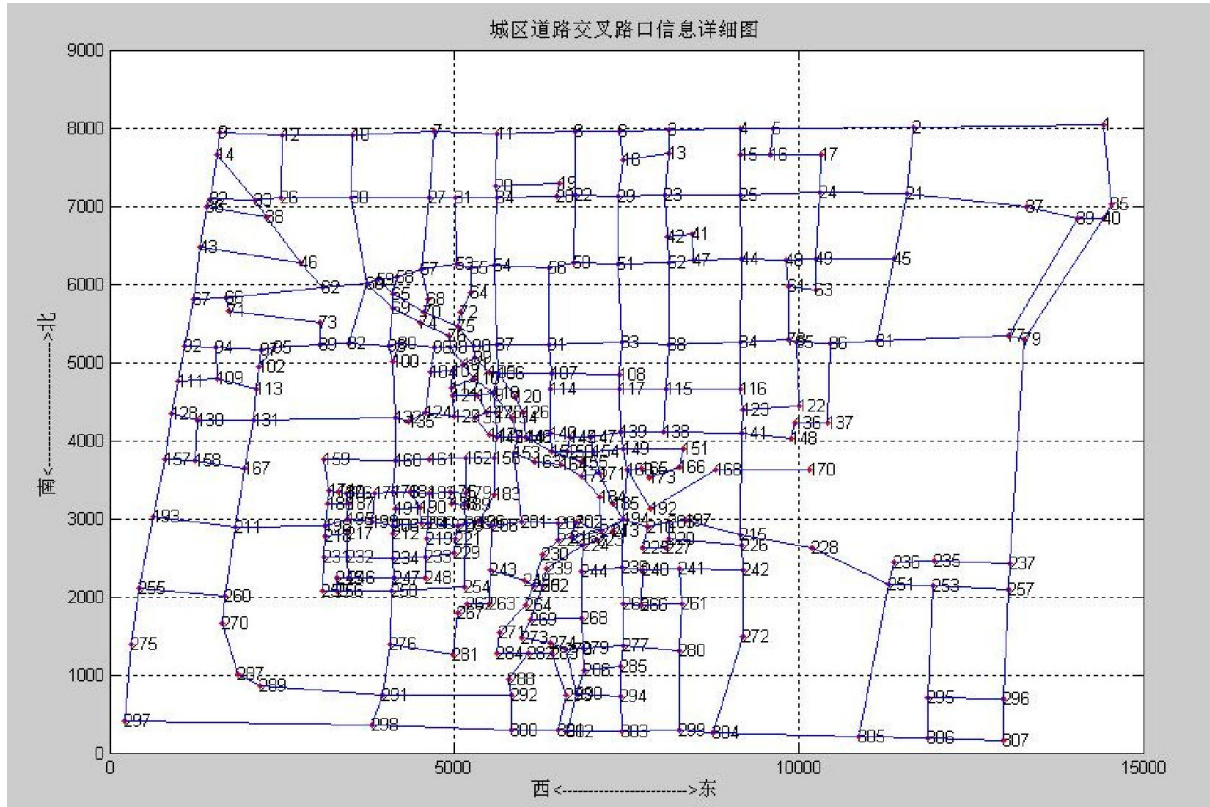


图1 城区道路交叉路口信息详细图

由图1可知，该城区道路数据可视为以交叉路口为节点，以各路段为边的有向图。<sup>[2]</sup>由于本题研究对象为警车，接警后可逆向行驶，故将其作为无向图讨论。

设城区内第 $i$ 点为警车驻车点，坐标为 $K(x_i, y_i)$ ，根据式（3），可算得以 $K(x_i, y_i)$ 为中心点，距离中心点距离满足接警处理时限要求的警车巡逻区域 $Q_n$ ， $Q_n$ 为节点集合，即该警车可负责的交叉路口及包含路段范围。

根据分析可知，城区所需警车配置问题即城区巡逻区域划分问题，可转化为路径长度限定条件下无向图的遍历问题。算法流程如图2所示。

具体求解步骤如下：

文中以三个重点部位（5112，4806），（9126，4266），（7434，1332）为初始驻车点，根据式（3）将城区细分为 $N$ 个巡逻区域， $N$ 即为所需警车配置。

**Step1:** 以重点部位点（5112，4806）为中心点，对于其邻接点集合 $\bar{K}(5112, 4806)$ ，

应用式 (1) 计算中心点到各邻接点距离  $L(i)$ ，若  $L(i)$  不满足式 (3) 约束，则记录第  $i$  节点为对应于本中心点的边界点之一，转Step3；若  $L(i)$  满足式 (3) 约束，转Step2。

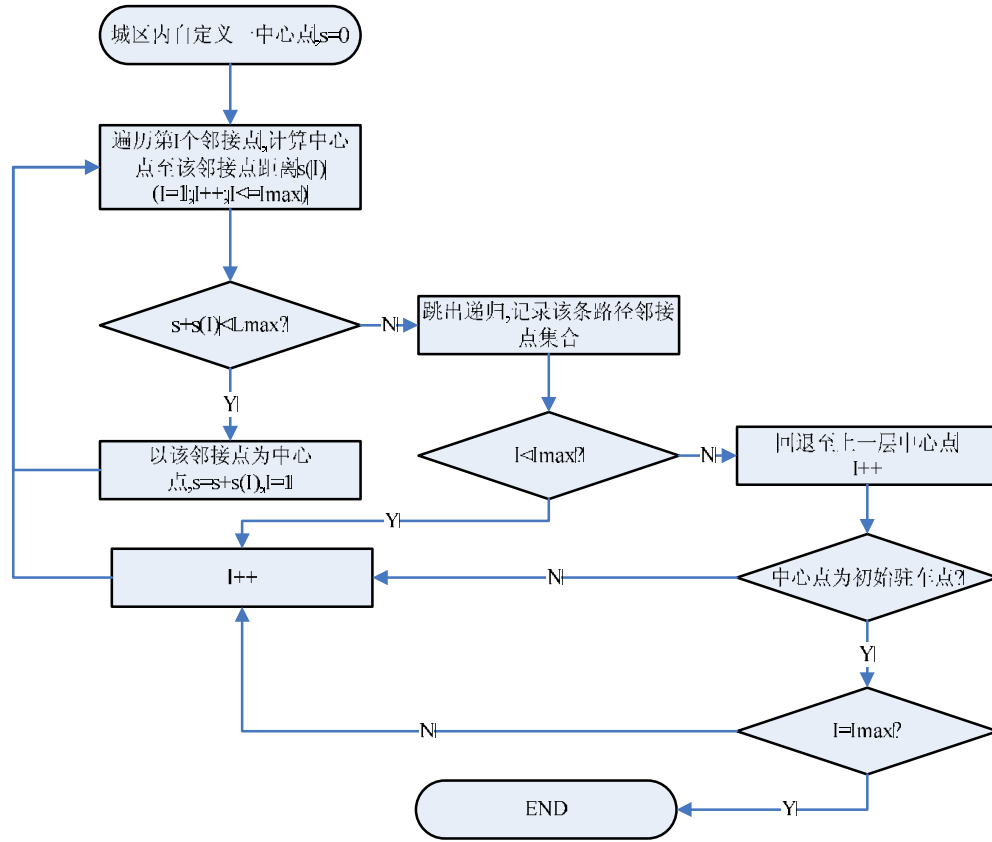


图2 城区巡逻区域划分算法流程图

**Step2:** 对于第  $i$  节点的邻接点集合  $\bar{K}_i$ ，应用式 (1) 计算  $i$  节点到其各邻接点距离  $L(i, j)$ ，若  $L(i, j) + L(i)$  不满足式 (3) 约束，则记录第  $j$  节点为对应于本中心点的边界点之一；若  $L(i, j) + L(i)$  满足式 (3) 约束，则对于第  $j$  节点的邻接点集合  $\bar{K}_j$  ( $i = j$ ) 转Step2。

**Step3:** 汇集对于中心点 (5112, 4806)，满足式 (3) 约束的所有节点，构成集合  $Q_n$ ，即第  $n$  个警车巡逻区域，此时得到一个人以 (5112, 4806) 为驻车点的巡逻区域。一个巡逻区域规划完成。

**Step4:** 同理，分别可得以点 (9126, 4266)，(7434, 1332) 为中心点的巡逻区域。  
注：对于此3出重点部位， $L_{\max} = v_{\text{接警}} \times T_{\max} = (40000/3600) \times 120 = 1300(\text{m})$ 。

**Step5:** 对于城区内尚未被分入巡逻区域的第  $i$  节点，判断其与  $Q_n$  边界点间距离，取其中最接近于  $L_{\max} = 2000(\text{m})$  的节点，以该节点为中心点，递归进行Step2，Step3。

**Step6:** 统计城区内警车巡逻区域总数，即所需警车配置数目。

依据以上算法思路，对图1所示城区进行分区处理，可得巡逻区域信息，见表（1）所示。

表1 城区警车巡逻区域划分详细信息

区域编号 ( $n$ )	中心点坐标	区域内节点( $i$ )				
1	26 (2484, 7110)	9	10	12	14	32
		33	36	38	43	
2	31 (5022, 7110)	7	8	11	20	27
		34				
3	16 (9594, 7650)	2	3	4	5	15
		17	25			
4	82 (3474, 5238)	30	46	53	57	58
		59	60	62	65	66
		68	69	70	71	73
		74	80	89	93	94
		95	97	100	102	109
5	(5112, 4806)	64	72	75	76	87
		90	91	96	98	99
		101	103	104	105	106
		107	110	112	114	118
		119	120	121	124	125
		126	127	129	133	134
		135	142	143	144	146
6	51 (7380, 6264)	153	156	162	163	183
		6	13	18	19	22
		23	28	29	41	42
		44	47	50	52	54
		55	56	83	88	108
7	45 (11376, 6318)	115	117			
		21	24	37	45	48
		49	61	63	78	81
8	260 (1674, 2016)	85	86			
		157	158	167	193	211
		255	260	270	275	287
9	234 (4101, 2484)	289				
		159	160	161	174	175
		176	177	178	179	180
		181	182	186	187	188
		189	190	191	195	198
		199	200	204	205	209
		212	217	218	219	229
		231	232	233	243	245



		246	247	248	254	256
		258	259	262	263	267
		276	281	208		
10	184 (7110, 3276)	138	139	140	145	147
		149	150	151	152	155
		164	165	166	269	169
		170	171	172	173	184
		185	192	194	197	201
		202	203	206	207	210
		213	214	216	222	223
		224	225	227	230	239
		244	249	250	252	264
		注：节点 70、168 仅有一条通路连接，包含于本区域。				
11	(9126, 4266)	84	116	122	123	136
		137	141	148		
12	(7434, 1332)	238	240	265	266	268
		273	274	277	278	279
		280	285	286	290	294
		303				
13	272 (9198, 1494)	215	226	241	242	261
		299	304			
14	251 (11304, 2160)	228	235	236	237	253
		257	295	305		

如表（1）所示，将城区细分为14个警车巡逻区域，各区域均包含若干个道路交叉路口，每一区域对应一辆警车，可得区域总集合内所需警车数。

将表（1）所示区域绘制于图1上，可得各区域具体分布见图3所示。

表（1）中并未包含全体道路交叉路口，由于相邻距离过远，或相邻节点数量过少，基于效率及成本考虑，不应将其划为标准巡逻区域以及安排警车，此类节点见表（2）所示。

表2 未编入标准巡逻区域的节点

节点编号( <i>i</i> )				
1	35	39	40	67
77	79	92	111	128
271	282	283	284	288
292	293	296	297	298
300	301	302	306	307

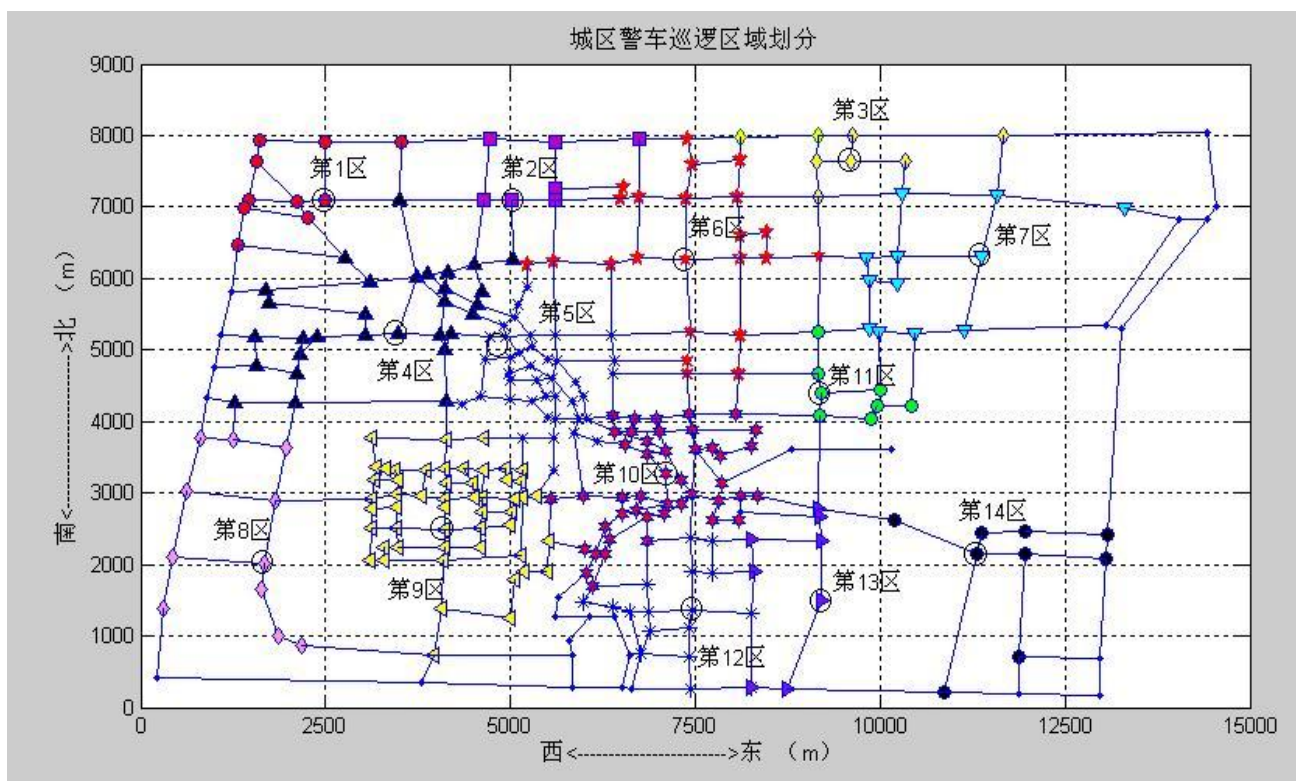


图3 城区警车巡逻区域划分图

选取表（1）所示区域包含路口节点数最多的第9区，其区域详细组成见图4所示；选取表（1）所示区域包含路口节点数最少的第2区，其区域详细组成见图5所示。

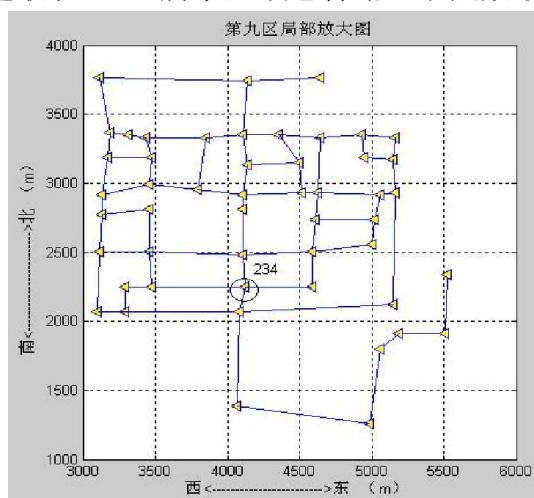


图4 第九巡逻区域包含交叉路口详细

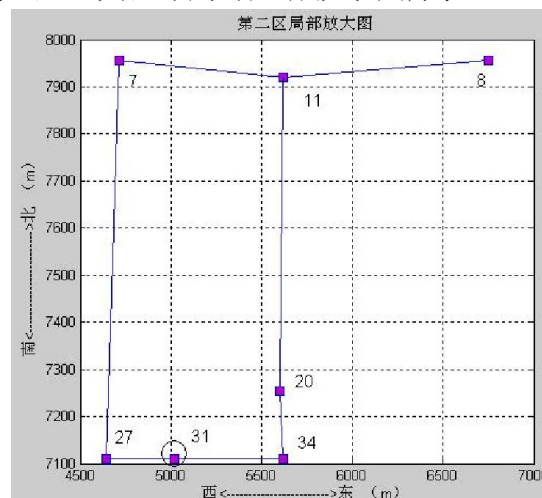


图5 第二巡逻区域包含交叉路口详细

如表（2）所示，未编入标准巡逻区域的节点数为25；按照表（1）、表（2）所示方案进行巡逻区域划分，对应可算得警车在接警后三分钟内赶到现场的的比例值，即

$$\delta = \left( \frac{(307 - 25)}{307} \right) \times 100\% \approx 91.9\%。$$

在表（2）所示未编入标准巡逻区域的点中，绝大部分为城区边缘上节点，可理解为环城道路上的路口，对于此类节点，以  $L_{\max}$  为上限规划巡逻范围已不适用，对于环城

区道路上节点，处于真实情况考虑，本文特殊安排一辆机动警车进行巡逻，对应 $\delta$ 值将更符合题意要求。

依据此区域划分，可实现警车在接警后三分钟内赶到现场比例不低于90%；而感到重点部位的时间必须在两分钟之内，可算得城区所需最少警车数目 $N_{\min}=15$ 。

### 3.2 警车巡逻效果评价表达式

#### 3.2.1 问题分析

在警车接警后三分钟赶到现场的比率不低于90%的条件下，还需保证巡逻效果，明确了巡逻时间、巡逻路线、巡逻任务和警务人员的工作要求；巡逻效果的含义，即加大巡逻力度，提高街面见警次数，及时发现犯罪，严格控制社会犯罪率，以最大程度起到震慑作用，让群众满意。

警车在一个巡逻周期内必须经过自己管辖区域内所有街道节点，由此可确定巡逻效果评价指标之一：一个巡逻周期所费时间。

相对而言，道路交叉口处人数较多，且交通便利，是巡逻的重点区域，警车在节点处的出现对见警次数的提升效果显著，由此可确定巡逻效果评价指标之二：警车在一个巡逻周期内经过节点的总次数。

据调查可知，人群密度高的地方往往是犯罪高发区域，可作假设：街道人群的密集度与节点优先度(即本交叉路口的邻接点数)成正比关系，在巡逻时针对不同优先度的节点，对应的巡逻频率也应不同。综合考虑，以一个巡逻周期内警车到达某节点的次数与此节点的优先度的比值为该节点的群众满意率；可求得该节点所处区域内所有节点对应群众满意率方差，即巡逻的均衡度，作为巡逻效果评价指标之三。

据以上分析，可得警车巡逻效果评价函数表达式。

#### 3.2.2 模型假设

- 1) 假设道路交叉路口人数与该交叉路口的邻接点数成正比；  
其余所有假设均与问题1假设相同（从略）。

#### 3.2.3 符号说明

$q_n$ ：第 $n$ 区包含交叉路口总数（ $n=1,2,\dots,N$ ）；

$T_n$ ：第 $n$ 区对应巡逻周期所费时间（单位：h）；

$L_n$ ：第 $n$ 区对应巡逻周期车辆行驶总距离（单位：km）；

$l_n$ ：第 $n$ 区对应巡逻周期车辆行驶路线；

$\bar{T}$ ：城区对应巡逻周期所费时间均值（单位：h）；

$M_n$ ：第 $n$ 区对应巡逻周期警车经过道路交叉口总次数；

$\bar{M}_n$ ：第 $n$ 区对应巡逻周期警车经过道路交叉口平均次数；

$M_n(i)$ ：第 $n$ 区第 $i$ 节点对应巡逻周期警车经过次数；

$\bar{M}$ ：城区对应巡逻周期警车经过道路交叉口次数均值；

$P_n(i)$ : 第  $n$  区内第  $i$  节点优先度, 即该节点对应邻接点数;

$\alpha_n(i)$ : 第  $n$  区内第  $i$  节点对应群众满意度 ( $\alpha_n(i) = \frac{M_n(i)}{P_n(i)} \times 100\%$ );

$\bar{\alpha}_n$ : 第  $n$  区群众满意度均值;

$\bar{\alpha}$ : 城区对应巡逻周期群众满意度均值;

$\beta_n$ : 第  $n$  区巡逻均衡度。(即  $\alpha_n(i)$  的方差);

$\bar{\beta}$ : 城区对应巡逻周期群众满意率的稳定程度, 即巡逻的均衡度。(即  $\beta_n$  的均值);

其它符号与问题一相同(从略)。

### 3.2.4 模型建立

根据模型分析, 警车巡逻效果显著程度可由4个参数进行描述。

**定义1:** 任一巡逻区域内, 警车由驻车点巡逻到达本区域内全体交叉路口后再返回驻车点全程所费时间为本区域巡逻周期。

**定义2:** 第  $n$  区第  $i$  节点对应巡逻周期警车经过道路交叉口次数为该节点见警次数。

以下模型首先均以单一巡逻区域, 即第  $n$  区作为讨论范围。

1. 评价指标一: 巡逻效率指标  $T_n$ , 即第  $n$  区对应一个巡逻周期所费时间。

$$T_n = \frac{L_n}{v_{\text{巡逻}}} = \frac{\sum_{i,j \in I_n} L_n(i,j)}{v_{\text{巡逻}}}$$

对于全部城区范围, 可得其均值表达式:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N T_n = \frac{1}{N} \times \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{\sum_{i,j \in I_n} L_n(i,j)}{v_{\text{巡逻}}} \right) \right) \quad (4)$$

2. 评价指标二: 巡逻密度指标, 即第  $n$  区对应巡逻周期内见警次数  $\bar{M}_n$ 。

$$\bar{M}_n = \frac{M_n}{q_n} = \frac{\sum_{i \in Q_n} M_n(i)}{q_n}$$

对于全部城区范围, 可得其均值表达式:

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N \bar{M}_n = \frac{1}{N} \times \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{\sum_{i \in Q_n} M_n(i)}{q_n} \right) \right) \quad (5)$$

3. 评价指标三: 群众满意指标  $(\bar{\alpha}_n, \beta_n)$ , 在巡逻时针对不同优先度的节点, 对应的

巡逻频率也应不同，故引入此描述参数，即第  $n$  区对应巡逻周期内群众满意率均值及其均衡度。

其中，定义第  $n$  区内第  $i$  节点对应群众满意度为：  $\alpha_n(i) = \frac{M_n(i)}{P_n(i)} \times 100\%$ ；则有：

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\sum_{i \in Q_n} \alpha_n(i)}{q_n} = \frac{\sum_{i \in Q_n} \left( \frac{M_n(i)}{P_n(i)} \right)}{q_n} \times 100\%$$

$$\beta_n = S^2 = \sum_{i \in Q_n} (\alpha_n(i) - \bar{\alpha}_n)^2$$

对于全部城区范围，可得其均值表达式：

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N \bar{\alpha}_n = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N \left( \frac{\sum_{i \in Q_n} \left( \frac{M_n(i)}{P_n(i)} \right)}{q_n} \times 100\% \right) \times 100\% \\ \bar{\beta} = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N \beta_n = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N \sum_{i \in Q_n} (\alpha_n(i) - \bar{\alpha}_n)^2 \end{cases} \quad (6)$$

联立式 (4)、式 (5)、式 (6)，即可得本题需要推导的警车巡逻效果评价表达式。

整理得到：  $(T_n, \bar{M}_n, \bar{\alpha}_n, \beta_n)$  即为第  $n$  区警车巡逻效果显著程度的评价准则。同理，扩展至全城区，  $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  即可描述一个巡逻周期内的警车巡逻效果。

### 3.3 警车分区域巡逻模型及其巡逻方案设计

#### 3.3.1 问题分析

依题意要求，警车巡逻要尽量满足接警后三分钟赶到现场，两分钟之内赶到重点部分，且尽量使巡逻效果显著。问题可归结为如何确定警车巡逻路线，在规定巡逻区域内怎样确定一条巡逻线路回路，满足巡逻时间尽量少，达到巡逻效果目标最优。而旅行商 (TSP) 问题是一个典型的组合优化问题，能够从某点出发且遍历完所有点，最终回到出发点的一条代价最少的路线，但在街道节点分布图并不是从全连通图，本文在算法实现过程采用了弗洛伊德 (Floyd) 算法求出每一节点到其他所有节点的最短路径，作为 TSP 中的某一点到其它所有点的路程代价。由于城市道路网络图结构复杂，TSP 算法在警车巡逻路线确定时受到了一定的限制，我们采用自组织特征映射 (SOFM) 来实现 TSP 算法。

SOFM 是由芬兰学者 T. Kohonen 提出的，它属于竞争神经网络，本质上是一种无监督的学习机，在 SOFM 中，输出层的神经元分布在一维或二维的网格上，特征映射的过程，就是把在输入空间中样本之间的拓扑关系，尽量完整地反映到输出空间中由神经元组成的网格中，即在网格中的邻近的神经元对应类似的输入样本。<sup>[4]</sup> 这种充分利用神经元位置关系的神经网络，更接近于生物神经系统的特性，具有很好的自组织学习能力。

### 3.3.2 模型假设

- 1) 假设警车不可跨区巡逻；
  - 2) 假设警车可跨区执行任务，即接警后可离开自身巡逻区域；
- 其余所有假设均与问题1假设相同（从略）。

### 3.3.3 符号说明

$a(n)$ ：第  $n$  步的学习步长；

$\sigma(n)$ ：第  $n$  步的领域宽度；

$w_i(n)$ ：第  $n$  步第  $i$  节点的网络权值；

$d(i, j)$ ：第  $i$  节点到第  $j$  节点的最短距离；

$path(n)$ ：第  $n$  巡逻区巡逻线路节点编号；

$L_n(i, j)$ ：第  $n$  区对应巡逻周期车辆行驶路线内由第  $i$  点至第  $j$  点一段；

其它使用符号与问题1、问题2相同（从略）。

### 3.3.4 模型建立

根据第一题城区最少警车配置与第二题中警车巡逻效果评价指标，建立起分区巡逻线路模型并计算出巡逻指标。对于城区内第  $n$  个巡逻区域，建立分区域巡逻效果多目标模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min: T_n = \frac{L_n}{v_{\text{巡逻}}} = \frac{\sum_{i,j \in L_n} L_n(i, j)}{v_{\text{巡逻}}} \\ \max: \bar{M}_n = \frac{M_n}{q_n} = \frac{\sum_{i \in Q_n} M_n(i)}{q_n} \\ \max: \bar{\alpha}_n = \frac{\sum_{i \in Q_n} \alpha_n(i)}{q_n} = \frac{\sum_{i \in Q_n} \left( \frac{M_n(i)}{P_n(i)} \right)}{q_n} \times 100\% \\ \min: \beta_n = S^2 = \sum_{i \in Q_n} (\alpha_n(i) - \bar{\alpha}_n)^2 \end{array} \right. \quad (7)$$

该模型是图论中多目标优化路径问题，各目标之间存在相互制约，当要求巡逻线路所用时间最少时，巡逻密度指标与群众满意指标会受到制约。从总体巡逻效果来考虑，巡逻路线的确定在对巡逻效果起关键作用，所以我们可以采用旅行商问题来解决巡逻线路。旅行商问题（TSP）是一个典型的组合优化问题，它能够从某节点出发且遍历完所有节点，最终回到出发点的一条路径长度最少的路线。当巡逻线路确定后，根据节点的巡逻次数、节点优先级等分别计算出巡逻密度指标与群众满意指标，来评价巡逻满意度。

TSP 是典型的 NP-难解问题，由于这个问题具有许多实际应用背景，在本题中给出

了城区所有节点坐标，正好适合于 SOFM 来解决欧氏空间中的 TSP。

根据 SOFM 在自组织映射过程中保持输入样本的拓扑关系这一特点，可以把某区域街道节点二维坐标作为输入样本，把它们映射到一维的环形输出空间上，就得到了一个遍历所有道路节点的回路。即形成一条巡逻路线。由于邻近道路节点坐标映射到相邻的神经元上，根据这个回路进行遍历，其路径总长度应该是最短的。这就是利用 SOFM 解决 TSP 的基本想法。

SOFM实现TSP算法流程：

**Step1:** 将指定  $Q_n$  区域内，所有道路节点二维坐标作为输入样本；

**Step2:** 根据Floyd算法计算出该区域内所有节点到其它节点的最短路径，形成  $q_n \times q_n$  的节点距离矩阵；

**Step3:** 初始化网络权值，确定学习步长  $\alpha(n)$  以及领域宽度参数  $\sigma(n)$ ；

**Step4:** 随机顺序将节点坐标  $k(x_i, y_i)$  作为输入元素，根据最小欧氏距离确定获胜神经元送进网络；

**Step5:** 按如下公式调整网络权值参数：

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \alpha(n) * h_{i(x),j}(n) * (x_i - w_i(n))$$

其中：  $h_{i(x),j}(n) = \exp(-\frac{d_{(j,i)}^2}{2\sigma^2(n)})$  表示领域函数。

**Step6:** 重复以上过程直到网络权值基本不反变化或到达设定的迭代次数；

**Step7:** 将计算出的巡逻线路的节点编号数组存入  $path(n)$  中，即输出巡逻路线。

### 3.3.5 模型求解

#### 3.3.5.1 区域间无关联的巡逻方案设计

巡逻方案，即全城区在一个巡逻周期内全部巡逻区域内警车的行车路径集合。在问题一中，已将城区划分为14个标准巡逻区域，这些巡逻区域分别由一辆警车完成该区巡逻任务，巡逻区域间相互无关联，即各巡逻区域内警车巡逻路线互不影响，各行其道，基于此理解，由题目中的已知数据和建立的模型，给定警车初始驻车点，可得第  $n$  区（ $n \in (1, 2, \dots, 14)$ ）对应的一条可行路径，将各区域巡逻路径整合，即构成城区巡逻方案一，详见表（3）所示。其4小时内巡逻路径详细坐标表示见电子文档附件：1041605-Result3.txt。

表3 问题3巡逻方案一

$n$	$l_n$
1	9 12 10 12 26 33 38 36 43 36 32 14 9
2	7 11 8 11 20 34 31 27 7
3	25 15 16 17 16 5 2 5 4 3 4 15 25
4	30 60 62 46 62 66 71 73 39 95 97 94 109 113 131 113 102 95 89 82 93 100 32 100 80 93 69 74 69 65 70 68 57 53 57 58 59 60 30
5	64 72 75 90 99 101 98 76 98 96 104 124 135 124 129 121 112 103 101 110 118 119 127 133 142 143 156 162 156 183 126 120 106 118 125 143 144 134 118 106 105 106 107 114 107 91 87 90 75 72 64
6	54 56 50 22 28 19 28 22 29 18 6 18 13 23 42 41 47 44 47 52 38 115 117 108 83 51 50 56 54
7	24 21 37 21 45 81 86 85 78 61 63 49 48 49 24
8	275 255 193 157 158 167 211 260 270 287 289 287 270 260 255 275
9	243 263 262 267 281 276 291 276 258 254 205 196 205 189 179 175 188 175 182 200 209 221 229 221 219 233 248 247 234 212 208 204 190 181 178 191 208 199 177 176 180 174 159 160 161 160 159 174 186 187 195 198 218 217 232 231 232 246 245 256 259 256 258 276 281 267 262 263 243
10	206 201 207 222 230 250 249 250 264 250 252 269 252 239 224 244 224 223 213 194 210 225 227 220 203 197 203 210 194 169 192 169 165 173 165 169 149 139 147 145 140 152 150 154 171 155 171 172 164 172 184 172 171 185 194 212 202 216 222 207 201 206
11	84 116 123 141 148 136 137 136 148 141 123 122 123 116 84
12	274 278 290 294 303 294 285 277 280 261 266 240 238 265 277 279 268 279 286 290 278 274
13	215 226 242 241 242 272 304 299 304 272 242 226 215
14	228 251 305 306 295 253 257 237 235 236 251 228

由于城区节点总数数据较大，且各区域内路径构造方法一致，本文以第7区为例，根据所建模型，可得第7区内可行路径 $l_7$ 。

$$l_7: 24 \rightarrow 21 \rightarrow 37 \rightarrow 21 \rightarrow 45 \rightarrow 81 \rightarrow 86 \rightarrow 85 \rightarrow 78 \rightarrow 61 \rightarrow 63 \rightarrow 49 \rightarrow 48 \rightarrow 49 \rightarrow 24$$

利用问题二所建表达式，评价 $l_7$ 的巡逻效果，可得：

$$T_7 = \frac{L_7}{v_{\text{巡逻}}} = \frac{\sum_{i,j \in l_7} L_7(i,j)}{v_{\text{巡逻}}} = \frac{10.002}{20} = 0.5001(\text{h})$$

$$\bar{M}_7 = \frac{M_7}{q_7} = \frac{\sum_{i \in Q_7} M_7(i)}{q_7} = \frac{15}{12} = 1.25$$

$$\bar{\alpha}_7 = \frac{\sum_{i \in Q_7} \alpha_7(i)}{q_7} = \frac{\sum_{i \in Q_7} \left( \frac{M_7(i)}{P_7(i)} \right)}{q_7} \times 100\% = 40.27\%$$



$$\beta_7 = S^2 = \sum_{i \in Q_7} (\alpha_7(i) - \bar{\alpha}_7)^2 = 0.0858$$

其中， $\bar{\alpha}_7$ 、 $\beta_7$ 的详细数据求解见表（4）所示。

表4 问题3巡逻方案一对应第7区内群众满意度与巡逻均衡度

节点编号 $K_i$	优先级 $P_7(i)$	见警次数 $M_7(i)$	群众满意度 $\alpha_7(i)$
24	4	2	0.5
21	4	2	0.5
37	2	1	0.5
45	3	1	0.333
81	3	1	0.333
86	3	1	0.333
85	3	1	0.333
78	3	1	0.333
61	3	1	0.333
63	2	1	0.5
49	4	2	0.5
48	3	1	0.333

根据式（6），可算得：

平均满意度  $\bar{\alpha}_7=40.27\%$ ；巡逻均衡度  $\beta_7=0.0858$

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的相对最优巡逻路径，共同构成全城区巡逻方案一，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（5）所示。

表5 问题3巡逻方案一对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ （单位：km）	$T_n$ （单位：h）	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\beta_n$
1	7.27	0.3635	13	9	1.444444	0.4514	0.2204
2	5.802	0.2901	9	6	1.5	0.3889	0.1436
3	12.277	0.61385	13	7	1.857143	0.4861	0.1501
4	19.171	0.95855	39	25	1.56	0.4189	0.1267
5	16.128	0.8064	57	40	1.425	0.4626	0.177
6	14.646	0.7323	29	22	1.318182	0.4194	0.1533
7	10.002	0.5001	15	12	1.25	0.3968	0.1256
8	10.06	0.503	16	11	1.454545	0.4486	0.2158
9	25.658	1.2829	69	48	1.4375	0.4808	0.2278
10	19.282	0.9641	62	45	1.377778	0.4936	0.1784
11	6.735	0.33675	15	8	1.875	0.508	0.2089
12	9.523	0.47615	22	16	1.375	0.4615	0.1935
13	8.0824	0.40412	13	7	1.857143	0.4712	0.2074
14	10.796	0.5398	12	8	1.5	0.4519	0.1898
全城均值	12.53089	0.626544	27.42857	18.857143	1.516553	0.452836	0.179879

由表（5）可知，全城巡方案一对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（6）所示。

表6 问题3巡方案一对应全城巡评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.6265	1.5166	0.4528	0.1799

### 3.3.5.2 区域间有关联的巡方案设计

分析巡方案一，由于所建模型基于TSP处理算法，目标即为找到所给区域内一条相对最短全遍历路径，因此该方案能够较好满足评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 中的 $\bar{T}$ 即巡效率指标；方案一将14个标准巡区域考虑成单一独立的范围，这些巡区域分别由一辆警车完成该区巡任务，巡区域间相互无关联，即各巡区域内警车巡路线互不影响，各行其道，毫无组织规划，这并不符合现实情况，容易造成巡警力资源浪费。对题意要求的“警车在接警后三分钟内赶到现场的比不低于90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内”这一巡约束尤其不适应，只是一个局部可行解。

根据以上分析，本文对所建模型及算法进行调整，在求解各区域内巡路径的过程中，考虑各区域之间的关联这一因素，确定具体巡优化关联规则如下：

“巡同向性”规则，在X轴方向，若 $l_n(i,j)$ 对应两点坐标值存在关系： $x_i < x_j$ ，则对于 $l_{n-1}(i,j)$ 、 $l_{n+1}(i,j)$ 均应有关系： $x_i < x_j$ ；在Y轴方向，若 $l_n(i,j)$ 对应两点坐标值存在关系： $y_i < y_j$ ，则对于 $l_{n-1}(i,j)$ 、 $l_{n+1}(i,j)$ 均应有关系： $y_i < y_j$ 。

由于巡区域是根据确定中心点，递归寻找路径，满足“警车在接警后三分钟内赶到现场的比不低于90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内”这一巡时效限制，所得14个区域是基于警车静态状态下进行描绘的。当第n区域内警车开始巡，该车所能满足时效限制的区域范围也将随之变化，而不是固定于第n区内，巡方案一的弱点就在于此，在全体区域内警车均处于运动状态时，各辆警车的时效限制满足范围将产生交错，浪费警力资源；同时造成接警时限满足范围缩小，警车在接警后三分钟内赶到现场的比下降，降低巡效果。

为了满足时限要求，本文提出在寻优路径过程中加入“巡同向性”约束，即各区域警车互相沟通，或接受同一上层调度命令，统一巡行动，如14辆警车均在各自区域内均沿逆时针方向由区域边界至中心逐层向内巡。

基于此理解，由题目中的已知数据和建立的模型，给定警车初始驻车点。考虑“巡同向性”，可得第n区（ $n \in (1, 2, \dots, 14)$ ）对应的一条可行路径，将各区域巡路径整合，即构成城区巡方案二。见表（7）所示，对应4小时内巡路径详细坐标表示见光盘附件：1041605-Result3.txt）。

表7 问题3巡逻方案二

$n$	$l_n$
1	9 14 32 36 38 33 26 12 10 12 9
2	7 27 31 34 20 11 8 11 7
3	3 4 15 25 15 16 17 16 5 2 5 4 3
4	30 60 62 46 66 71 73 89 95 97 94 109 113 102 113 131 132 100 93 82 93 100 80 100 93 69 74 69 65 70 68 57 58 59 60 30
5	64 72 75 90 98 76 98 96 98 90 87 91 107 106 105 99 101 103 104 124 135 124 129 121 112 110 118 119 121 129 133 127 125 143 144 143 142 143 156 162 156 183 156 143 144 153 163 153 144 146 126 120 106 105 99 90 75 72 64
6	6 18 13 23 29 22 28 19 28 22 50 56 54 55 54 56 50 51 52 42 41 47 44 47 52 88 83 108 117 115 88 52 42 23 13 18 6
7	24 41 48 61 63 61 78 85 86 81 45 21 37 21 24
8	157 193 255 275 255 260 270 287 289 287 270 260 211 167 158 157
9	159 174 180 176 187 186 198 195 198 218 217 232 231 259 256 245 246 247 258 254 205 209 196 209 221 229 233 219 200 204 208 212 234 233 219 200 209 205 189 129 175 188 175 182 181 190 191 178 177 199 177 178 160 161 160 159
10	140 145 147 154 150 152 155 171 172 164 172 184 214 202 207 201 206 201 207 202 214 216 222 230 250 249 250 264 250 252 269 252 239 224 244 224 223 213 194 210 225 227 270 203 197 203 210 194 185 171 154 149 151 166 173 165 169 192 169 149 139 147 145 140
11	84 116 123 141 148 136 137 136 148 141 123 122 123 116 84
12	238 265 277 279 268 279 278 274 273 274 278 290 286 285 294 303 294 285 277 280 277 265 226 240 238
13	215 226 242 241 242 272 304 299 304 272 242 226 215
14	228 251 305 251 253 295 253 257 237 235 236 251 228

由于城区节点总数数据量较大，且各区域内路径构造方法一致，仍以第7区为例，根据所建模型，可得第7区内相对优化路径 $l_7$ 。

$$l_7: 24 \rightarrow 41 \rightarrow 48 \rightarrow 61 \rightarrow 63 \rightarrow 61 \rightarrow 78 \rightarrow 85 \rightarrow 86 \rightarrow 81 \rightarrow 45 \rightarrow 21 \rightarrow 37 \rightarrow 21 \rightarrow 24$$

利用问题二所建表达式，评价 $l_7$ 的巡逻效果，可得：

$$T_7 = 0.55495(\text{h}); \quad \bar{M}_7 = 1.25; \quad \bar{\alpha}_7 = 43.06\%; \quad \beta_7 = 0.1114。$$

其中， $\bar{\alpha}_7$ 、 $\beta_7$ 的详细数据求解见表（8）所示。

表8 问题3巡逻方案二对应第7区内群众满意度及巡逻均衡度

节点编号 $K_i$	优先级 $P_7(i)$	见警次数 $M_7(i)$	满意度 $\alpha_7(i)$
24	4	2	0.5
41	2	1	0.5
48	3	1	0.3333
61	3	2	0.6666
63	2	1	0.5
78	3	1	0.3333
85	3	1	0.3333
86	3	1	0.3333
81	3	1	0.3333
45	3	1	0.3333
21	4	2	0.5
37	2	1	0.5

根据式（6），可算得：

平均满意度  $\bar{\alpha}_7=43.06\%$ ；巡逻均衡度  $\beta_7=0.1114$ 。

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的相对最优巡逻路径，共同构成全城区巡逻方案二，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（9）所示。

表9 问题3巡逻方案二对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ （单位：km）	$T_n$ （单位：h）	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\beta_n$
1	7.17	0.3585	13	9	1.444444	0.4375	0.2106
2	5.803	0.29015	9	6	1.5	0.4306	0.1622
3	10.37	0.5185	13	7	1.857143	0.5069	0.1607
4	17.431	0.87155	36	25	1.44	0.4101	0.1681
5	16.79	0.8395	59	40	1.475	0.5246	0.2478
6	18.876	0.9438	37	22	1.681818	0.5022	0.2018
7	11.099	0.55495	15	12	1.25	0.4649	0.1944
8	10.012	0.5006	16	11	1.454545	0.5066	0.2312
9	17.265	0.86325	56	48	1.166667	0.4318	0.157
10	20.625	1.03125	64	45	1.422222	0.5	0.1231
11	6.736	0.3368	15	8	1.875	0.5389	0.1672
12	10.494	0.5247	25	16	1.5625	0.4944	0.1532
13	8.082	0.4041	13	7	1.857143	0.4963	0.1685
14	11.922	0.5961	13	8	1.625	0.4852	0.1521
全城均值	12.33393	0.616696	27.42857	18.85714	1.543677	0.480714	0.178421

由表（9）可知，全城区巡逻方案一对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（10）所示。

表10 问题3巡逻方案二对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.6167	1.5437	0.4807	0.1784

### 3.3.6 结果分析

比较方案一与方案二对应评价指标值，在巡逻效率、见警度、群众满意度及均衡度等评价指标上，方案一表现更好，原因在于方案一无需考虑本区域外警车巡逻线路，目标单一，而方案二需考虑“巡逻同向性”规则，在最短路径寻找上没有优势；但是在满足时限范围上，方案二比方案一优势明显，方案二的目标就是构造一个14个区域警车巡逻的动态平衡，达到警车在接警后三分钟内赶到现场的比率最大化，实现与问题一同样的指标，主要强调了接警效率的提高，从而提高整体的巡逻效果。

## 3.4 考虑隐蔽性的警车分区域巡逻模型

### 3.4.1 问题分析

警车分区域巡逻需要考虑隐蔽性，应不易于被犯罪分子发现巡逻规律。若按照3.3节所得巡逻方案循环进行，在理想的条件下，这一行车规律很容易将被掌握。隐蔽性的含义，就是对于某一区域内的任一节点，在警车经过一次后，下次经过同一点的时间不确定，也就是无法预测。在此可对巡逻周期内加入一随机扰动项，实现巡逻路径的局部随机处理，就能大大提高其隐蔽性，从而使巡逻效果得以保证。

### 3.4.2 符号说明

$\Delta T$ ：巡逻周期间隔时间，为时间上的随机扰动项（单位：h）；

$\bar{T}_n(i)$ ：第n区内警车以第i节点为起始点的本区域巡逻周期（单位：h）

$t_{out}(n,i,j)$ ：第n区内警车以第i节点为起始点的第j次巡逻开始时刻；

$t_{in}(n,i,j)$ ：第n区内警车以第i节点为起始点的第j次巡逻结束时刻；

$t_{pass}(n,i,j)$ ：第n区内警车第j次经过第i节点的時刻；

其它符号与问题1相同。（从略）

### 3.4.3 问题求解

对于某一区域内的任一节点，在警车经过一次后，下次经过同一点的时间不确定，这便是本问题需要实现的目标。

为了达到巡逻规律的隐蔽，可在每一次巡逻周期完成后加入一个等待时间间隔，即一个时间随机扰动项，使得巡逻周期不能完全实现“无缝连接”，产生出巡逻的局部随机化效果。

设在第n巡逻区间内，以点i为初始驻车点，初次巡逻开始时间为： $t_{out}(n,i,1)$ ；当警车完成一次区域内巡逻回到点i，则可对下一次巡逻周期的开始进行控制，控制方法确定如下。

**方法一：**初始驻车点保持为点*i*，可控制因素为第*j*次巡逻开始时间，即  $t_{out}(n, i, j)$ 。加入巡逻初始时间随机扰动项  $\Delta T$ ，组合得可控巡逻初始时间表达式（8）：

$$t_{out}(n, i, j+1) = t_{in}(n, i, j) + \Delta T \quad (8)$$

其中， $\Delta T$  为一随机量，设定其取值范围：  $0 \leq \Delta T \leq \bar{T}_n$ 。

式（8）可实现：

$$t_{pass}(n, i, j+1) = t_{pass}(n, i, j) + \bar{T}_n + \Delta T \quad (9)$$

式（9）即可体现巡逻隐蔽性的要求。

对于方法一，不改变本区域初始驻车点，通过等待一段随机时间，造成巡逻循环间隔的不同，从而达到迷惑犯罪分子，不显循环规律的目的。

**方法二：**在巡逻周期间隔期内，改变初始驻车点与下次巡逻开始时间，即初始驻车点  $i$ 、 $t_{out}(n, i, j)$  均为可控因素。 $i$  的确定决定了  $t_{out}(n, i, j)$ 。

设点  $i$  巡逻完成一次，设下一初始驻车点为  $i'$ ，则有：

$$t_{out}(n, i', j+1) = t_{in}(n, i, j) + \frac{L(i, i')}{v_{巡逻}} \quad (10)$$

其中， $L(i, i')$  为相邻初始驻车点间距离。

式（10）可实现：

$$\begin{cases} \Delta T = \bar{T}_n(i) + \frac{(L(i, k) - L(i', k))}{v_{巡逻}} + \frac{L(i, i')}{v_{巡逻}} \\ t_{pass}(n, k, j+1) = t_{pass}(n, k, j) + \bar{T}_n(i) + \frac{(L(i, k) - L(i', k))}{v_{巡逻}} + \frac{L(i, i')}{v_{巡逻}} \end{cases} \quad (11)$$

初始驻车点  $i$  的变更使得巡逻周期不固定，在此方法下，区域内一个巡逻周期为各个子巡逻周期之均值。

初始驻车点的变更，对应的巡逻路径随之变化，按照式（11）可计算相邻两次经过点  $k$  的时间间隔  $\Delta T$ ，随机项  $\Delta T$  的存在即为巡逻隐蔽性的实现。

相较而言，方法一更易于应用，方法二隐蔽效果更好。对于各区域的不同要求，两种方法是一套很好的互补措施。另外，警车巡逻路径中可在中间节点上停留，这将丰富随机扰动项  $\Delta T$  的范围与随机程度。

以 3.3 节所得巡逻方案一为基础方案，分别应用方法 1、方法 2 进行隐蔽性优化。

**方法一优化应用：**

优化后的巡逻方案内全体巡逻路径不变；到达各节点的时刻与时间随机扰动项  $\Delta T$  有关。

其中：

$$T_n = \frac{L_n}{v_{巡逻}} = \frac{\sum_{i, j \in L_n} L_n(i, j)}{v_{巡逻}} + \Delta T$$

代入式（4），可得优化后城区巡逻效率：

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \times \sum_{n=1}^N (T_n + \Delta T) = \frac{1}{N} \times \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{\sum_{i,j \in I_n} L_n(i,j)}{v_{\text{巡逻}}} \right) + \Delta T \right)$$

其余评价指标 $(\bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 随 $\bar{T}$ 的增大而降低，总体上经过隐蔽性优化处理后的巡逻方案须付出其余巡逻效果指标一定程度下降的代价，针对不同的巡逻需求，选取不同的指标作为主要目标。

#### 方法二优化应用：

综合 3.3 节所得巡逻方案一、巡逻方案二，将两种巡逻路径相结合，在一定长的时间段内，交替采用两种方案进行巡逻，交替规则可为：二者随机顺序组合。

以 3.3 节方案一为第一次巡逻路径；方案二为第二次巡逻路径，可得隐蔽性优化后巡逻方案，具体巡逻路径为 3.3 节方案一、二之顺序集合。

可得对应新方案评价指标值为 3.3 节两方案指标值之均值，见表（11）所示。

表 11 问题 4 隐蔽性优化巡逻方案对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.6216	1.5302	0.4668	0.1792

对于以上两种方法，可对优化节点进行扩展，将对于初始驻车点的处理推广到巡逻路径中任何一点，也可对多个巡逻方案进行交互处理，都将使得巡逻隐蔽性得到很大的加强。

### 3.5 10 辆警车配置的分区域巡逻方案设计

#### 3.5.1 问题分析

本题是在问题三的基础上，进一步考虑更改条件，达到既能够尽量使警车在接警后 3 分钟内赶到现场的比率不低于 90%；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内，又实现节约巡逻成本的要求。

由题意知，城区警车配置总数固定为 10 辆，由问题一所划分得到的最少警车数为 15 辆，警车数量的减少必将造成单车巡逻区域的扩大与接警效率的降低，因而巡逻方案的制定显得尤为重要。

根据问题 1 中所分析的巡逻区域划分原则以及警车配置的改变，可对问题一中所建巡逻区域划分模型进行修正：计算城区道路总长度，共计 307 个交叉路口、458 条路段，将道路总长度 10 等分，平均分配给各警车，作为单一警车巡逻区域内道路基准长度；以此道路基准长度作为巡逻区域划分约束，同时考虑问题一所得区域内单挑路径长度上限的约束；将城区划分为 10 个巡逻区域。在各巡逻区域内应用问题 3 中所建模型寻找最优行车路线，可得多组分区域警车巡逻方案，通过对区域范围进行手工优化，以实现巡逻方案的科学性、合理性目标。

#### 3.5.2 符号说明

$\bar{L}$ ：城区各巡逻区域内道路总长度理想均值（单位：m）；

$L_i$ ：城区内第  $i$  条道路长度（ $1 \leq i \leq 458$ ，单位：m）；

$L_n$ ：第  $n$  个巡逻区域内道路总长度 ( $1 \leq n \leq N$ ，单位：m)；

$L_{sum}$ ：城区道路总长度 (单位：m)；

其它使用符号与问题1相同 (从略)。

### 3.5.3 模型建立

根据题目中所给数据，根据式 (1)，可算得城区内任意相邻交叉路口间距离  $L(i, \tilde{i})$ ，则：

$$\text{城区全体道路总长 } L_{sum} = \sum_{i=1}^{458} L_i ;$$

$$\text{城区各巡逻区域内道路总长度理想均值为: } \bar{L} = \frac{1}{N} \times L_{sum} = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{458} L_i .$$

在巡逻区域划分时，根据各警车均衡承担巡逻任务的原则，各辆警车负责的巡逻区域范围应接近于  $\bar{L}$ ，即：

$$L_n = \sum_{i \in Q_n} L_i \geq \bar{L} \quad (12)$$

本文以  $\bar{L}$  为区域范围上限，根据上述划分原则，将图1所示城区交叉路口节点进行重新划分，具体算法步骤确定如下：

**Step1:** 保留问题一中所得以3个重要部位 (5112, 4806), (9126, 4266), (7434, 1332) 为中心点的巡逻区域不变，在上述3个重点区域之外，以点  $(x_i, y_i)$  为中心点，对于其一层邻接点集合  $\bar{K}(x_i, y_i)$ ，应用式 (1) 计算中心点到各邻接点距离  $L(i)$ ，并求和，若  $\sum_i L(i)$  满足式 (12) 约束，则记录第  $i$  节点各邻接点为对应于本中心点的边界点，转**Step3**；若  $L(i)$  不满足式 (12) 约束，转**Step2**。

**Step2:** 寻找集合  $\bar{K}(x_i, y_i)$  内各点的邻接点，即以点  $(x_i, y_i)$  为中心点的二层临邻接集合  $\bar{\bar{K}}(x_i, y_i)$ ，根据题目已知数据，查找点  $(x_i, y_i)$  与  $\bar{\bar{K}}(x_i, y_i)$  内所有点连接而成的路段长度  $L_i$  并求和，若  $\sum_i L_i$  满足式 (12) 约束，则记录  $\bar{\bar{K}}(x_i, y_i)$  内各点为对应于本中心点的边界点，转**Step3**；若  $L(i)$  不满足式 (12) 约束，令  $\bar{K}(x_i, y_i) = \bar{\bar{K}}(x_i, y_i)$ ，转**Step2**。

**Step3:** 整合已记录点，对于已选节点进行合理的人工优化。

当巡逻区域规划完毕，在每一区域内安排一辆警车，并根据问题三所建巡逻路径规划模型，可得警车数量改为10后各分区巡逻方案。

### 3.5.4 模型求解及巡逻方案

按照上述区域划分算法，可得10组节点，将所有巡逻区域包含节点绘制于图1上，



可得10辆警车配置下各区域具体分布见图6所示。

城区警车巡逻区域划分(警车数:10辆)

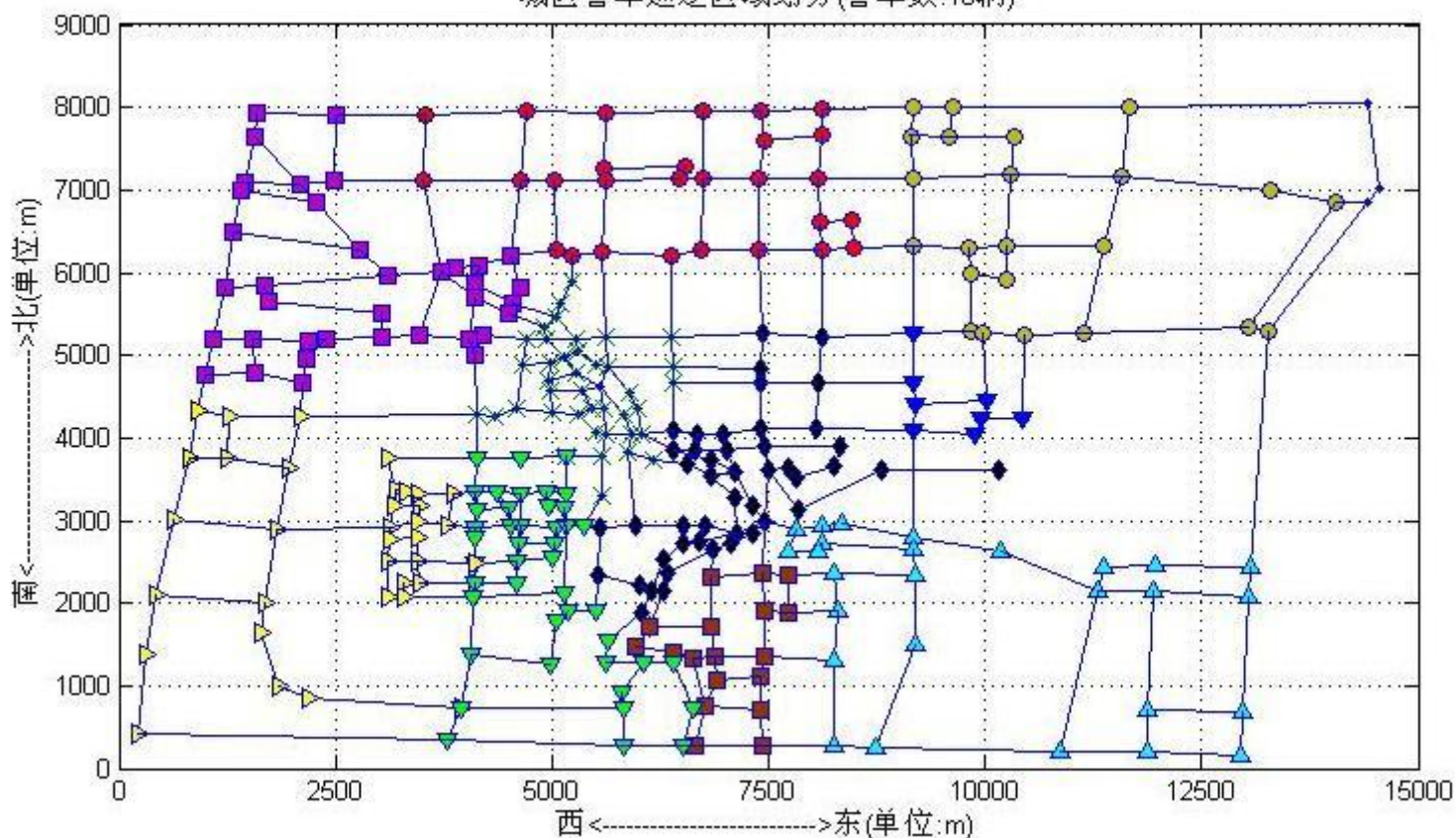


图6 10辆警车配置的城区巡逻区域划分图

#### 3.5.4.1 方案一

如图6所示，已将城区划分为10个标准巡逻区域，这些巡逻区域分别由一辆警车完成该区巡逻任务，基于此理解，由题目中的已知数据和建立的模型，给定警车初始驻车点，可得第 $n$ 区 ( $n \in (1, 2, \dots, 10)$ ) 对应的一条可行路径，将各区域巡逻路径整合，即构成城区巡逻方案一，详见表(12)所示。其4小时内巡逻路径详细坐标表示见电子文档附件：1041605-Result5.txt。

表12 问题5巡逻方案一

$n$	$l_n$
1	111 92 94 97 102 95 89 73 71 66 67 43 46 38 36 32 33 26 30 60 62 60 59 58 57 68 70 65 69 74 69 93 80 100 93 82 89 95 97 94 92 111
2	10 7 11 8 6 3 13 23 42 41 47 52 51 50 56 54 55 53 31 27 31 34 20 19 28 22 29 18 6 8 11 7 10
3	4 15 25 44 48 61 78 85 86 81 77 39 37 21 2 5 16 17 24 49 63 61 48 44 25 15 4
4	64 72 75 90 98 76 98 96 104 124 135 124 129 133 142 143 156 183 196 206 201 153 144 134 118 125 127 119 121 112 110 112 103 101 99 105 106 87 91 107 114 140 152 146 126 120 106 87 90 75 72 64
5	170 168 192 169 165 173 166 151 149 139 138 115 117 108 117 139 147 154 150 145 140 152 155 171 172 164 172 184 214 202 216 222 207 201 206 201 209 222 230 250 249 250 264 250 252 269 252 239 224 244 224 223 213 194 185 194 169 192 168 170
6	84 116 123 122 123 141 148 136 137 136 148 141 123 116 84
7	275 255 193 157 128 130 131 113 131 167 158 167 211 198 186 174 159 174 180 176 177 199 195 187 195 198 218 231 218 217 232 246 245 256 259 256 258 276 291 298 291 289 287 270 260 255 275
8	132 160 178 191 208 212 234 247 248 233 219 200 204 190 181 182 175 188 189 205 196 206 243 263 262 267 281 276 291 292 300 292 288 282 284 271 284 282 288 292 291 276 281 267 262 263 243 206 196 205 189 188 175 182 181 178 160 132
9	238 240 266 265 277 280 277 285 294 303 294 290 286 279 278 274 278 279 277 265 238
10	261 241 242 226 220 227 225 210 203 197 215 228 251 236 235 237 253 295 296 307 306 305 304 299 304 272 242 241 261

由于城区节点总数数据较大，且各区域内路径构造方法一致，本文以第4区为例，根据所建模型，可得第4区内可行路径 $l_4$ 。

$$\begin{aligned}
 &64 \rightarrow 72 \rightarrow 75 \rightarrow 90 \rightarrow 98 \rightarrow 76 \rightarrow 98 \rightarrow 96 \rightarrow 104 \rightarrow 124 \rightarrow 135 \rightarrow 124 \\
 &\rightarrow 129 \rightarrow 133 \rightarrow 142 \rightarrow 143 \rightarrow 156 \rightarrow 183 \rightarrow 196 \rightarrow 206 \rightarrow 201 \rightarrow 153 \\
 l_4: &\rightarrow 144 \rightarrow 134 \rightarrow 118 \rightarrow 125 \rightarrow 127 \rightarrow 119 \rightarrow 121 \rightarrow 112 \rightarrow 110 \rightarrow 112 \\
 &\rightarrow 103 \rightarrow 101 \rightarrow 99 \rightarrow 105 \rightarrow 106 \rightarrow 87 \rightarrow 91 \rightarrow 107 \rightarrow 114 \rightarrow 140 \rightarrow 152 \\
 &\rightarrow 146 \rightarrow 126 \rightarrow 120 \rightarrow 106 \rightarrow 87 \rightarrow 90 \rightarrow 75 \rightarrow 72 \rightarrow 64
 \end{aligned}$$

利用问题二所建表达式，评价 $l_4$ 的巡逻效果，可得：

$$T_4 = 16.051 / 20 = 0.80255(\text{h}); \quad \bar{M}_4 = \frac{52}{40} = 1.3; \quad \bar{\alpha}_4 = 41.32\%; \quad \beta_4 = 0.178。$$

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的相对最优巡逻路径，共同构成全城巡逻方案一，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（13）所示。

表13 问题5巡逻方案一对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ (单位: km)	$T_n$ (单位: h)	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\beta_n$
1	20.364	1.0182	42	32	1.3125	0.4004	0.1376
2	19.089	0.95445	33	27	1.222222	0.3872	0.143
3	19.934	0.9967	27	21	1.285714	0.393	0.129
4	16.051	0.80255	52	40	1.3	0.4132	0.178
5	24.266	1.2133	60	46	1.304348	0.4855	0.2899
6	6.734	0.3367	15	8	1.875	0.4674	0.1984
7	22.982	1.1491	47	38	1.236842	0.4511	0.1527
8	22.897	1.14485	58	43	1.348837	0.567	0.2432
9	8.593	0.42965	21	15	1.4	0.5978	0.2299
10	22.366	1.1183	30	25	1.2	0.5109	0.2113
全城均值	18.3276	0.91638	38.5	29.5	1.348546	0.46735	0.1913

由表（13）可知，全城区巡逻方案一对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（14）所示。

表14 问题5巡逻方案一对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.9164	1.35	0.4674	0.1913

### 3.5.4.2 方案二

由于警车数量减少，各警车对应巡逻区域扩大，在区域扩大的条件下，警车对接警时限的满足比例非常低，如方案一所示，警车巡逻路径长度普遍较大，由其对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 可知，方案一的巡逻效果很差。

为了改善10辆警车配置下的巡逻效果，对图6中所示各区域节点进行优化处理，优化规则为：

根据各区域内节点的优先级 $M_n(i)$ ，若 $M_n(i) \geq 4$ ，则记录该点为巡逻关键点；否则为非关键点。

以巡逻关键点为巡逻方案须经过的有效节点，而不是必须经过全部节点，在从一个关键点至另一关键点路程上可经过非关键点。

通过节点优先级对巡逻节点进行筛选优化，这样巡逻效率将得到显著提高；由于关键点均为相对重要节点，需重点巡逻，群众满意度也将提高；关键点邻接点多，便于接警后迅速赶赴现场，能够更好的满足接警时限约束。

根据上述优化思路，设计巡逻方案二，详见表（15）所示。

其4小时内巡逻路径详细坐标表示见电子文档附件：1041605-Result5.txt。

表15 问题5巡逻方案二

$n$	$l_n$
1	111 92 94 97 102 95 89 73 71 66 67 43 46 38 36 32 33 26 30 60 62 60 59 58 57 68 70 65 69 74 69 93 80 100 93 82 89 95 97 94 92 111
2	10 7 11 8 6 3 13 23 42 41 47 52 51 50 56 54 55 53 31 27 31 34 20 19 28 22 29 18 6 8 11 7 10
3	4 15 25 44 48 61 78 85 86 81 77 39 37 21 2 5 16 17 24 49 63 61 48 44 25 15 4
4	64 72 75 90 98 76 98 96 104 124 135 124 129 133 142 143 156 183 196 206 201 153 144 134 118 125 127 119 121 112 110 112 103 101 99 105 106 87 91 107 114 140 152 146 126 120 106 87 90 75 72 64
5	170 168 192 169 165 173 166 151 149 139 138 115 117 108 117 139 147 154 150 145 140 152 155 171 172 164 172 184 214 202 216 222 207 201 206 201 209 222 230 250 249 250 264 250 252 269 252 239 224 244 224 223 213 194 185 194 169 192 168 170
6	84 116 123 122 123 141 148 136 137 136 148 141 123 116 84
7	275 255 193 157 128 130 131 113 131 167 158 167 211 198 186 174 159 174 180 176 177 199 195 187 195 198 218 231 218 217 232 246 245 256 259 256 258 276 291 298 291 289 287 270 260 255 275
8	132 160 178 191 208 212 234 247 248 233 219 200 204 190 181 182 175 188 189 205 196 206 243 263 262 267 281 276 291 292 300 292 288 282 284 271 284 282 288 292 291 276 281 267 262 263 243 206 196 205 189 188 175 182 181 178 160 132
9	238 240 266 265 277 280 277 285 294 303 294 290 286 279 278 274 278 279 277 265 238
10	261 241 242 226 220 227 225 210 203 197 215 228 251 236 235 237 253 295 296 307 306 305 304 299 304 272 242 241 261

仍以第4区为例，根据所建模型，可得第4区内可行路径 $l_4$ ，见图7所示。

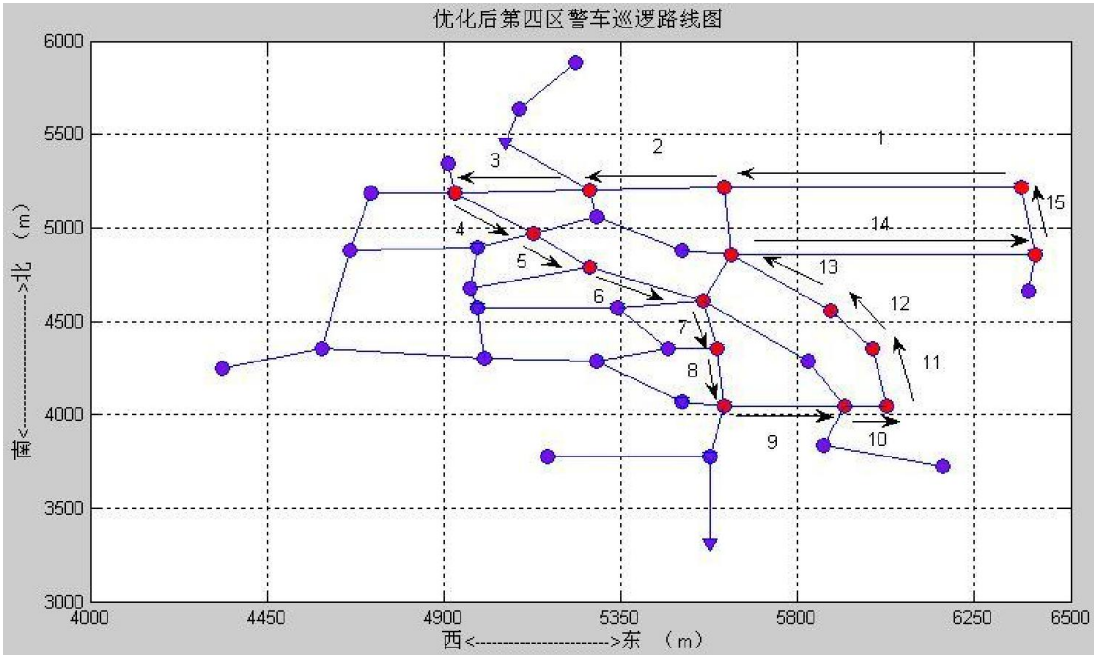


图7 问题5巡逻方案二第4区内可行路径

$$l_4: 91 \rightarrow 87 \rightarrow 90 \rightarrow 98 \rightarrow 101 \rightarrow 110 \rightarrow 118 \rightarrow 125 \rightarrow 143 \rightarrow 144 \\ \rightarrow 146 \rightarrow 126 \rightarrow 120 \rightarrow 106 \rightarrow 107 \rightarrow 91$$

利用问题二所建表达式，评价 $l_4$ 的巡逻效果，可得：

$$T_4 = 5.345/20 = 0.26725(\text{h}); \quad \bar{M}_4 = \frac{16}{40} = 0.4; \quad \bar{\alpha}_4 = 30.44\%; \quad \beta_4 = 0.1075。$$

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的相对最优巡逻路径，共同构成全城区巡逻方案二，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（16）所示。

表16 问题5巡逻方案二对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ （单位：km）	$T_n$ （单位：h）	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\beta_n$
1	3.939	0.19695	12	32	0.375	0.3567	0.1427
2	8.357	0.41785	16	27	0.592593	0.3578	0.1396
3	6.447	0.32235	8	21	0.380952	0.3189	0.1023
4	5.345	0.26725	16	40	0.4	0.3044	0.1075
5	8.66	0.433	23	46	0.5	0.4944	0.2469
6	2.346	0.1173	7	8	0.875	0.5	0.2635
7	12.902	0.6451	22	38	0.578947	0.386	0.1185
8	4.686	0.2343	17	43	0.395349	0.3816	0.1312
9	4.408	0.2204	11	15	0.733333	0.3904	0.1445
10	4.4974	0.22487	5	25	0.2	0.3947	0.1941
全城均值	6.15874	0.307937	13.7	29.5	0.503117	0.38849	0.15908

由表（16）可知，全城区巡逻方案二对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（17）所示。

表17 问题5巡逻方案二对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.3079	0.5031	0.3885	0.1591

对比方案一、方案二，可知方案二的巡逻效率提升显著，全程经过节点数量减少，使得见警次数很低，相较而言优势更为突出。

### 3.6 警车提速的分区域巡逻方案设计

#### 3.6.1 问题分析

警车接警后的平均行驶速度由40km/h提高到50km/h，意味着接警后满足3分钟时限要求的距离范围扩大，也就是在问题一所绘区域的基础上可以向外延伸，向外500米范围以内的节点可以包括进各标准区域内。

#### 3.6.2 问题求解

如图3所示，已将城区划分为14个标准巡逻区域，这些巡逻区域分别由一辆警车完成该区巡逻任务，由于警车接警后速度的提升，使得单一区域可控制范围变大，通过各

区间向外延伸，可得修正后的区域分布。新加入节点与其对应区域关系见表（18）所示。

表18 警车提速后新加入节点对应区域关系

$n$	$i$
4	67 92 111 128 130
7	77 79 39 40 35 1
8	97
9	298
10	168 170 271 284 282 283 288 293 292 300 301 302
14	296 307 306

基于以上理解，由题目中的已知数据和建立的模型，对修正后的区域集合给定警车初始驻车点，可得第 $n$ 区（ $n \in (1, 2, \dots, 14)$ ）对应的一条可行路径，将各区域巡逻路径整合，即构成城区巡逻方案，详见表（19）所示。其4小时内巡逻路径详细坐标表示见电子文档附件：1041605-Result6.txt。

表19 问题6巡逻方案

$n$	$l_n$
1	33
2	27 31 34 20 11 7 27
3	25
4	27 57 58 65 69 98 100 132 131 113 102 95 89 82 60 59 58 57 27
5	91 87 90 98 101 110 118 125 143 144 146 126 120 106 107 91
6	54 56 50 22 29 23 42 52 47 44 47 52 88 115 117 108 83 51 50 56 54
7	24 21 15 49 24
8	11
9	160 178 191 208 199 195 198 218 231 232 234 247 258 276 291 276 258 274 248 233 229 221 209 200 204 208 191 178 160
10	140 145 147 139 149 169 194 212 216 222 230 249 252 239 224 223 213 194 185 171 154 150 152 140
11	84 116 123 141 123 116 84
12	238 265 247 285 294 290 286 279 277 265 238
13	215
14	251

以第7区为例，根据所建模型，可得第7区内可行路径 $l_7$ 。

$$l_7: 24 \rightarrow 21 \rightarrow 15 \rightarrow 49 \rightarrow 24$$

利用问题二所建表达式，评价 $l_7$ 的巡逻效果，可得：

$$T_7 = 4.146 / 20 = 0.2073(\text{h}); \quad \bar{M}_7 = \frac{5}{6} = 0.8333; \quad \bar{\alpha}_4 = 33.33\%; \quad \beta_4 = 0.1179。$$

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的相对最优巡逻路径，共同构成全城区巡逻方

案，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（20）所示。

表20 问题6巡逻方案对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ (单位: km)	$T_n$ (单位: h)	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\beta}_n$
1	0	0	1	9	0.1111111	0.2708	0.0417
2	3.533	0.17665	7	6	1.1666667	0.3472	0.0819
3	0	0	19	7	2.7142857	0.25	0
4	10.427	0.52135	16	30	0.5333333	0.3406	0.1206
5	5.345	0.26725	21	40	0.525	0.3063	0.1041
6	11.63	0.5815	5	22	0.2272727	0.3698	0.1693
7	4.146	0.2073	1	18	0.0555556	0.3229	0.125
8	0	0	29	12	2.4166667	0.3125	0.1159
9	9.799	0.48995	24	49	0.4897959	0.3841	0.137
10	7.399	0.36995	7	57	0.122807	0.3623	0.1084
11	2.346	0.1173	11	8	1.375	0.5208	0.1969
12	4.412	0.2206	1	16	0.0625	0.3696	0.1226
13	0	0	1	7	0.1428571	0.3587	0.1216
14	0	0	12	11	1.0909091	0.3587	0.1216
全城 均值	4.216928571	0.2108464	11.071429	20.8571429	0.7881258	0.348164	0.1119

由表（20）可知，城区巡逻方案对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（21）所示。

表21 问题6巡逻方案对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.2108	0.7881	0.3482	0.1119

### 3.7 全区域巡逻模型与巡逻方案优化设计

#### 3.7.1 问题分析

题中给出警车平均巡逻速度与接警后行驶速度，但在实际情况下，车速不可能保持稳定，事实上应考虑到城市的街道节点的分布状况、人流密度、道路功能、性质、当地的实际车速、限制车速等影响警车的速度。正常情况，在警车在街道节点密集的地方行驶速度相对较慢，在街道节点稀疏的路段速度较快。本文采用了在某区内节点数总数与区域面积的比值作为该区域节点密集度，建立车速与节点密集度的关系表达式。在结合城区一般分区原则给定较为合理的分区方案。根据分区情况调整警车配置，提出较为优化的巡逻方案。

#### 3.7.2 模型假设

- 1) 假设该城市城区最高车速为  $60km/h$ ；
  - 2) 假设该警车巡逻时最低车速不低于  $35km/h$ ；
- 其余所有假设均与问题1假设相同（从略）。

### 3.7.3 符号说明

$K_i(x_{\min}, y_i)$ ：某区域内最西方向的节点坐标；

$K_i(x_{\max}, y_i)$ ：某区域内最东方向的节点坐标；

$K_i(x_i, y_{\min})$ ：某区域内最南方向的节点坐标；

$K_i(x_i, y_{\max})$ ：某区域内最北方向的节点坐标；

$s_{(n,i)}$ ：第  $n$  区域内第  $j$  个三角形的面积；

$S_n$ ：第  $n$  区域内任意四边形的面积；

$q_n$ ：第  $n$  内区域的节点总数；

$\rho_n$ ：第  $n$  区域内节点密集；

$\lambda$ ：警车速度与节点密集度比值。

其它符号与问题1相同。（从略）

### 3.7.4 优化模型

在满足接警平均速度为  $40km/h$  的条件求出所需最少警车的城区区域分布图的基础上，考虑到警车的速度与节点密集度成反比例的关系，按图 3 中城区警车巡逻区域划分出图中所示 14 个区域，分别计算出各个区域内的总的节点数与面积，算出 14 个区域的节点密集度。

应用区域面积算法，找出区域内所有节点中最靠近西、东、南、北方向四组节点坐标  $K_i(x_{\min}, y)$ ， $K_i(x_{\max}, y_i)$ ， $K_i(x_i, y_{\min})$ ， $K_i(x_i, y_{\max})$ ，在已知节点坐标情况下，利用两点间坐标公式求分别求出不规则四边形的四条边长与任意一条对角线长度，将不规则的四边形按对角线看成两个三角形，利用海伦公式：

$$s_n = \sqrt{p_n * (p_n - a_n) * (p_n - b_n) * (p_n - c_n)}$$

分别计算出任一三角形的面积，可近似得出某巡逻区域面积  $S_n = s_{(n,1)} + s_{(n,2)}$ ；

**定义 3**：节点密集度为区域内节点数与区域面积的比值  $\rho_n = \frac{q_n}{S_n}$ 。

可算得某区域内节点数、面积、节点密集度，见表（22）所示。



表 22 各区域关键参数信息

区域编号	节点个数	面积 (km <sup>2</sup> )	节点密集度
1	9	5.07	1.78
2	6	12.57	0.48
3	7	3.00	2.33
4	25	12.33	2.03
5	40	3.45	11.59
6	22	11.86	1.85
7	12	8.37	1.43
8	11	4.5	2.44
9	48	4.85	9.89
10	45	1.06	42.45
11	8	0.73	10.95
12	16	3.45	4.64
13	7	9.02	0.78
14	8	6.60	1.21

设速度与节点密度之间反比例系数为  $\lambda$ ，建立速度与密集度关系表达式如下：

$$v_n = \frac{\lambda}{\rho_n} = \lambda * \frac{q_n}{S_n} \quad (13)$$

其中： $\lambda$  表示节点密度最大差值与速度最大差值的比值。

根据聚类划分思路，应用速度与密集度关系表达式 (13)，将该城区全体道路节点分为三个等级，其中，二级节点的速度可以通过  $\lambda$  求出，其对应区域、车速关系见表 (22) 所示。

表 22 各区域对应等级信息

等级	区域号	车速 (km/h)
1	10、11	35
2	9、12	45
3	3、4、6、1、7、14、13、2	60

对于巡逻区域划分，在尽量满足节点速度与密度关系约束的同时，需考虑城区区域划分的一般规则，即通常以河流、绿地、铁路等为基准划分城区。本文综合考虑上述规则并以速度—密集度关系式为准则，对城区区域进行划分，如图 8 所示。

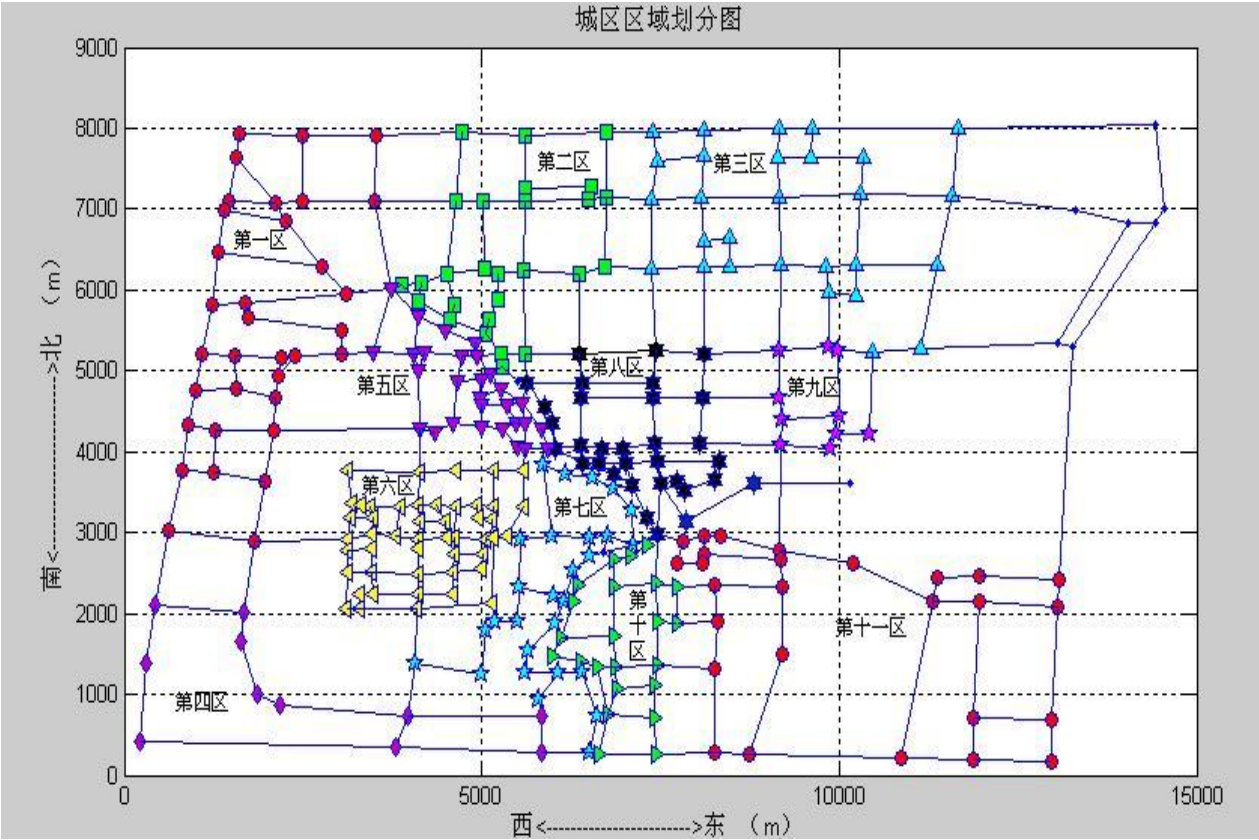


图 8 优化的巡逻模型对应城区区域划分

3.7.5 巡逻方案

考虑速度与密集度的反比例关系、以及城区区域划分一般性原则，确立区域划分方案，在巡逻路线中采用问题五中采用的巡逻路径优化方法，制定出优化分区巡逻模型对应各区域巡逻路线，如表（23）所示。

表23 全城区域巡逻方案

$n$	$l_n$
1	9 14 32 36 43 67 92 111 128 157 193 211 167 131 113 102 95 89 82 60 30 10 12 9
2	27 31 34 28 22 50 56 54 55 64 72 75 70 68 57 27
3	6 3 4 5 2 21 45 49 48 44 47 52 51 29 18 6
4	255 260 270 287 289 291 292 300 298 297 275 255
5	60 69 74 76 98 101 110 118 134 144 143 142 133 129 124 104 96 80 93 82 60
6	6 18 13 23 29 22 28 19 28 22 50 56 54 55 54 56 50 51 52 42 41 47 44 47 52 88 83 108 117 115 88 52 42 23 13 18 6
7	153 163 164 172 184 212 216 222 230 250 249 243 263 262 267 281 267 262 263 243 206 201 153
8	106 107 91 83 88 115 117 139 149 169 194 185 171 154 150 152 140 146 126 120 106
9	84 78 85 122 123 141 123 116 84
10	194 238 265 277 285 294 290 286 279 268 244 224 223 213 194
11	210 203 220 226 215 228 251 253 295 306 305 304 299 280 261 241 242 226220 227 225 210

该方案巡逻区域划分主要考虑到区域划分的一般性规则、以及速度与密集度关系，

将问题一中城区中的第4、5、10区域界限打破。

本文选取第5区进行分析，由表（23）可得第5区巡逻路径。

$l_5: 60 \rightarrow 69 \rightarrow 74 \rightarrow 76 \rightarrow 98 \rightarrow 101 \rightarrow 110 \rightarrow 118 \rightarrow 134 \rightarrow 144 \rightarrow 143 \rightarrow 142 \rightarrow$   
 $133 \rightarrow 129 \rightarrow 124 \rightarrow 104 \rightarrow 96 \rightarrow 80 \rightarrow 93 \rightarrow 82 \rightarrow 60$

$\therefore$  第5区域属于一级区域

$\therefore v_5 = 35km/h$

利用问题二所建表达式，评价 $l_5$ 的巡逻效果，可得：

$T_5 = 0.2021(h); \bar{M}_5 = 0.857143; \bar{\alpha}_5 = 33.83\%; \beta_5 = 0.0958。$

同理，可得城区内剩余所有巡逻区域的可行巡逻路径，共同构成全城区巡逻方案，其中各区巡逻路径对应评价指标见表（24）所示。

表24 问题7巡逻方案对应各区巡逻评价指标值

$n$	$L_n$ （单位：km）	$T_n$ （单位：h）	$M_n$	$q_n$	$\bar{M}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\beta_n$
1	13.843	0.69215	24	33	0.727273	0.3457	0.1476
2	7.215	0.36075	16	27	0.592593	0.3384	0.0861
3	11.673	0.58365	16	26	0.615385	0.3167	0.0882
4	14.077	0.70385	12	11	1.090909	0.3601	0.114
5	7.074	0.3537	24	28	0.857143	0.3341	0.0909
6	6.13	0.3065	23	47	0.489362	0.3478	0.1025
7	8.608	0.4304	23	23	1	0.4891	0.2348
8	8.862	0.4431	21	33	0.636364	0.2964	0.0925
9	3.918	0.1959	9	9	1	0.3406	0.1254
10	5.566	0.2783	15	38	0.394737	0.3297	0.0888
11	15.31	0.7655	22	27	0.814815	0.3551	0.098
全城均值	9.297818	0.464891	18.63636	27.45455	0.747144	0.350336	0.115345

由表（24）可知，全城区巡逻方案对应评价指标值 $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 见表（25）所示。

表25 问题7巡逻方案对应全城区巡逻评价指标值

评价指标	$\bar{T}$	$\bar{M}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
评价指标值	0.4649	0.7471	0.3503	0.1153

相对于问题三中获得巡逻方案，首先，巡逻区域的划分更为科学、合理，建立车辆行驶速度与区域节点密度之间的关系，很有现实意义。其次，针对河流、水域等自然障碍物对区域划分带来的影响和约束，进行了相对合理的规划与安排。再次，依据节点优先级的不同，对巡逻模型输入数据进行优化，带来了突出的巡逻效率，并能保证高比例满足接警后3分钟时限内到达现场这一约束，是一种很好的优化策略。

对于处于道路节点密度很高的区域，车速相对较慢，对于区域的巡逻工作指标较难

完成，巡逻效果无法保证。

本文提出解决方案，可安排两辆或多辆警车于上述类似区域，以实现重点地区重点保护的目。

仍以第5区为例，安排两辆警车在这一区域，可分别得其巡逻路径。

$$l_5: \begin{array}{l} 60 \rightarrow 69 \rightarrow 93 \rightarrow 100 \rightarrow 132 \rightarrow 135 \rightarrow 124 \rightarrow 129 \rightarrow 133 \rightarrow 142 \rightarrow 143 \rightarrow 125 \\ \rightarrow 118 \rightarrow 110 \rightarrow 101 \rightarrow 98 \rightarrow 76 \rightarrow 74 \rightarrow 69 \rightarrow 60 \end{array}$$

$$l'_5: \begin{array}{l} 153 \rightarrow 144 \rightarrow 134 \rightarrow 118 \rightarrow 110 \rightarrow 101 \rightarrow 98 \rightarrow 96 \rightarrow 104 \rightarrow 103 \rightarrow 112 \\ \rightarrow 121 \rightarrow 129 \rightarrow 133 \rightarrow 142 \rightarrow 143 \rightarrow 144 \end{array}$$

应用式（4）、（5）、（6），可算得其巡逻效果评价指标值：

$$T_5 = \frac{L_5}{v_{\text{巡逻}}} = \frac{\sum_{i,j \in l_5} L_5(i,j)}{v_{\text{巡逻}}} = 6.536 / 20 = 0.3268(\text{h})$$

$$\bar{M}_5 = \frac{M_5}{q_5} = \frac{\sum_{i \in Q_5} M_5(i)}{q_5} = \frac{36}{28} = 1.3$$

$$\bar{\alpha}_5 = \frac{\sum_{i \in Q_5} \alpha_5(i)}{q_5} = \frac{\sum_{i \in Q_5} \left( \frac{M_5(i)}{P_5(i)} \right)}{q_5} \times 100\% = 33.83\%$$

$$\bar{\alpha}'_5 = 34.06\%$$

$$\beta_5 = S^2 = \sum_{i \in Q_5} (\alpha_5(i) - \bar{\alpha}_5)^2 = 0.0958$$

$$\beta'_5 = 0.0898$$

分析其评价指标值可知，该巡逻路径对接警时限满足度高，巡逻效率、见警次数、群众满意度以及巡逻均衡度等指标值也均较高，“两车一区”的巡逻效果十分突出，在节点高密度区域可考虑采用此种方法。

按照优化模型规划得到的区域划分，如图8所示，其有效覆盖率可达到：

$$(307-8) / 307 = 97.4\%。$$

## 4 模型的总结与改进

本文根据图论中的相关理论，将某城区路网抽象为有向图，按照图的深度优先遍历算法，以初始驻车点、可满足接警后行动时限的最长距离为控制因素，对城区道路进行巡逻区域划分，算得满足约束条件的所需最少警车数量。以巡逻周期、见警次数、群众满意度、巡逻均衡度为指标，建立了“警车巡逻效果评价表达式”。根据旅行商问题求解思路，综合运用弗洛伊德算法、神经网络算法，建立了“警车分区域巡逻模型”，分别就区域间是否相关联设计了不同的城区巡逻方案。并就隐蔽性约束、警车数量约束、警车速度因素等特殊要求进行模型修正，得到适应性不同的巡逻方案。最后进行了全区域巡逻模型及巡逻方案优化。

文中所建立的“警车分区域巡逻模型”具有通用性，可以推广至旅游线路规划、公交线路规划等。该模型能够对已知相关数据的城市路网，进行合理行车区域规划，合理选用给出的优化算法，可实现高效行车，使车辆与城区均得到较好的交通效果。

限于本文诸多参数或比例系数等为假设数值或自定义，针对题目中问题的求解结果可能会出现一定误差。如警车行驶速度上下限、见警率定义等；文中假设的数值限于本文计算和讨论，针对某一实际路网，其行驶速度限制值一定，不需要假设。另外，文中所用的部分数值已将现实问题简化，实际中影响车辆行驶路线因素很多，该模型在应用中需要适当修正或调整部分参数，并加以改进。

## 参考文献

- [1] 赵静 但琦等, 数学建模与数学实验[M], 北京: 高等教育出版社. 2001.7.
- [2] 卜月华;图论及其应用. [M], 南京: 东南大学出版社. 2003.7.
- [3] 宁正元, 王秀丽; 算法与数据结构. [M]. 北京: 清华大学出版社. 2006.6.
- [4] 谢秉磊, 有时间窗约束旅行商问题的启发式遗传算法 [J],《西南交通大学学报》, 2001, 36(2): 210~213.
- [5] 王景存, 张晓彤, 陈彬, 陈和平. 一种基于 Dijkstra 算法的启发式最优路径搜索算法[J],《北京科技大学学报》, 2007.3.
- [6] 李军,车辆调度问题的分派启发式算法 [J],《系统工程理论与实践》,1999.
- [7] 胡守信 李柏年, 基于 MATLAB 的数学实验[M], 科学出版社, 2005.4.
- [8] 李志纯,黄海军, 随机交通分配中有效路径的确定方法[J], 交通运输系统工程与信息, 2003.2
- [9] 柴登峰,张登荣, 前 N 条最短路径问题的算法及应用[J], 浙江大学学报(工学版), 2002.9.

## 附件 部分 Matlab 程序电子文档名称清单（详见电子文档）

- 1、 Bsf.m :相关最少警车数目数据处理程序;
- 2、 du.m:相关节点优先度数据处理程序;
- 3、 floyd.m:利用弗洛伊德算法求解最短路径集合程序;
- 4、 ljzb.m:相关巡逻方案坐标生成程序;
- 5、 s\_tsp.m:路径确定程序;
- 6、 zb.m:相关巡逻评价指标求解程序。