参赛密码 ________

（由组委会填写）

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 乘用车物流运输计划问题

摘 要：

当前很多物流公司在在面对复杂的运输任务时，往往效率低下、运输成本不尽理想。本文的主要任务即是在确保完成运输任务的前提下，尽量使物流公司降低运输成本。

对于问题一到问题三，以 1-2 型轿运车和 1-1 型轿运车的数量关系和需要运输的乘用车数量为约束，以参加运输任务轿运车的总数量为目标，在此基础上，对轿运车的使用成本进行了优化，我们建立了整数规划模型。并分别用 lingo 求解法、分支定界法进行求解，两种方法得到的轿运车总数量相同，但分配方案有所差异。进行三次运输任务所需要的轿运车总数量分别为 18、13、30。具体的分配结果如下：

轿运车类型	每种类型轿运车总数	每种类型轿运车总数	每种类型轿运车总数
1-1	16	12	25
1-2	2	1	5

对于问题四，基于问题一到问题三的解法，当考虑轿运车的目的地时，我们改进了前三问的整数规划模型，构建目的地距离矩阵，在保证轿运车的总使用数量最少且尽量多使用 1-1 型轿运车的基础上使所有轿运车的总行程最短。对于轿运车目的地的分配，轿运车目的地优先级分配问题，轿运车实际装载乘用车的数量与规定目的地乘用车的数量存在一定的关系，添加此类约束条件。同样使用多种方法进行求解，经过比较分析，得到最终的分配结果如下：

轿用车类型	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D	每种类型轿运车总数	总行驶里程
1-1	0	6	9	5	20	6404
1-2	5	0	0	0	5	

对于问题五，乘用车和轿运车种类繁杂，需要对数据进行分类简化处理，采用分类平均法得到 4 种型号的乘用车和 3 种类型的轿运车的相关简化数据。我们建立了与问题四类似的模型，但增加了行车路线约束的数目和分配方案数据库的规模，并采用分支定界法进行求解，得到简化数据的运输方案。得到初步的分配结果如下：

轿运车类型	相同类型轿运车使用总量
1-1	98
1-2	19
2-2	5

最后，筛选特殊尺寸的乘用车和轿运车进行简化方案的优化分配。

关键词：装载方案 整数规划 分支定界法 优化

一、问题重述

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。随着我国汽车工业的高速发展，整车物流量，特别是乘用车的整车物流量迅速增长。

乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以调用的“轿运车”中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。“轿运车”是通过公路来运输乘用车整车的专用运输车，根据型号的不同有单层和双层两种类型，由于单层轿运车实际中很少使用,本题仅考虑双层轿运车。双层轿运车又分为三种子型：上下层各装载 1 列乘用车，故记为 1-1 型；下、上层分别装载 1、2 列，记为 1-2 型；上、下层各装载 2 列，记为 2-2 型，每辆轿运车可以装载乘用车的最大数量在 6 到 27 辆之间。

在确保完成运输任务的前提下，物流公司追求降低运输成本。但由于轿运车、乘用车有多种规格等原因，当前很多物流公司在制定运输计划时主要依赖调度人员的经验，在面对复杂的运输任务时，往往效率低下，而且运输成本不尽理想。请你们为物流公司建立数学模型，给出通用算法和程序。

装载具体要求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层。

整车物流的运输成本计算较为繁杂,这里简化为：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；其次，在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，但物流公司 1-2 型轿运车拥有量小，为方便后续任务安排，每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；再次，在轿运车使用数量及型号均相同情况下，行驶里程短的成本低，注意因为该物流公司是全国性公司，在各地均会有整车物流业务，所以轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回。最后每次卸车成本几乎可以忽略。

请为物流公司安排以下五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线。

（1）物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 100 辆及Ⅱ车型的乘用车 68 辆。

（2）物流公司要运输Ⅱ车型的乘用车 72 辆及Ⅲ车型的乘用车 52 辆。

（3）物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 156 辆、Ⅱ车型的乘用车 102 辆及Ⅲ车型的乘用车 39 辆。

（4）物流公司要运输 166 辆Ⅰ车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆Ⅱ车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，分别为 31、47 辆），各段长度：OD=160，DC=76，DA=200，DB=120，BE=104，AE=60。

（5）附件的表 1 给出了物流公司需要运输的乘用车类型（含序号)、尺寸大小、数量和目的地，附件的表 2 给出可以调用的轿运车类型（含序号)、数量和装载区域大小（表里数据是下层装载区域的长和宽, 1-1 型及 2-2 型轿运车上、下层装载区域相同；1-2 型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽 0.8 米。此外 2-2 型轿运车因为层高较低，上、下层均不能装载高度超过 1.7 米的乘用车。

二、基本假设

1. 装载时，每一列前方的第一辆乘用车和装载区域边界相接；
2. 装载时优先装轿运车的下层，且上层两列乘用车左右对称；
3. 不考虑乘用车装卸时的干涉问题，即高度低于层高的乘用车均可装载到相应的轿运车上；
4. 仅考虑用双层轿运车运输乘用车；
5. 忽略轿运车的每次卸车成本；
6. 轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回。

三、参数与符号说明

p：单辆 1-1 型轿运车装载各种车型的符合假设条件和装载要求的总方案数；

q：单辆 1-2 型轿运车装载各种车型的符合假设条件和装载要求的总方案数；

N_1：需要被运输的Ⅰ车型乘用车数量；

N_2；需要被运输的Ⅱ车型乘用车数量；

N_3：需要被运输的Ⅲ车型乘用车数量；

n：一次运输任务中所需要的轿运车总数量；

x_i：采用第 i 种装载方案所需的 1-1 型轿运车数量，$i = 1, 2, ..., p$；

y_i：采用第 i 种装载方案所需的 1-2 型轿运车数量，$i = p, p+1, ..., p+q$；

C_{ij}：第 i 种装载方案采用第 j 种装载方式乘用车的数量（$j = 1$、2、3 分别代表Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ车型的乘用车放在轿运车下层，$j = 4$、5 分别代表Ⅰ、Ⅱ车型的乘用车放在轿运车上层）；

D_{ij}：第 i 种装载方案分别到达 j 目的地的乘用车的数量($j = 1$、2、3、4 分别代表目的地 A、B、C、D）。

四、问题分析

本题是一个比较典型的线性整数规划方面的问题。

问题一到问题四所给的乘用车型号和轿运车类型有限，且在题设条件的约束下，装载方案的总数目可列，借此建立分配方案数据库，方便后文程序调用。

问题一只考虑装载Ⅰ型乘用车和Ⅱ型乘用车，问题二只考虑装载Ⅰ型乘用车和Ⅲ型乘用车，而问题三考虑了运载Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种车型的乘用车，因此问题一和问题二看作问题三的特殊情况，把问题一中Ⅲ车型的乘用车看作 0，同样把问题一中Ⅱ车型的乘用车看作 0。

问题一到问题三：首先轿运车使用数量最少，其次，在轿运车使用数目确定的条件下，考虑不同类型轿运车的使用成本，以此作为前三问的目标函数；每次运输任务中 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，且Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型乘用车的数量是给定的，以此作为约束条件。

问题四增加了运输目的地的要求。为了便于求解，首先根据前三问的思想，不考虑目的地，保证轿运车的总使用数量最少，在此基础上使轿运车的总行程最短。其次，优先考虑将乘用车运往 A、C 两地，开向 A 地的轿运车，大于 A 的需求量时，提前将多余的量卸在 B 地；对于目的地是 B 的轿运车，大于 B 的需求量时，提前将多余的量卸在 D 地；同理，开往 C 地的轿运车，大于 C 地的需求量时，提前将多余的量也卸在 D 地。这样就可以得到开往不同目的地两种类型轿运车的数量，以及每辆轿运车的装载方案。问题四由于考虑了目的地问题，约束条件更加复杂。

对于问题五，乘用车数据量较大，需要对数据进行分类简化处理，采用分类平均法得到 4 种型号的乘用车和 3 种类型的轿运车的相关简化数据，同时列出添加目的地 E 后的行车路线，并采用与问题四类似的方法进行求解，得到简化数据下的运输方案。最后，筛选特殊尺寸的乘用车和轿运车进行简化方案下的优先分配。

五、建立模型的准备

我们考虑到寻求分配方案数据库，那么运输任意量的乘用车都是该数据库的线性组合。

不同类型的轿运车运输型号各异的乘用车，装载方案比较复杂，轿运车可能满载，也可能没有满载，因此我们根据题设对分配方案数据库进行了以下几个约束：

（1）每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米；

（2）受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型轿运车下层，即Ⅲ型乘用车只能装在 1-1、1-2 型轿运车下层。

（3）下层力争装满，即在下层没有装载满的情况下不能装载下层；

（4）上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳；

分配方案数据库建立流程如下图所示：

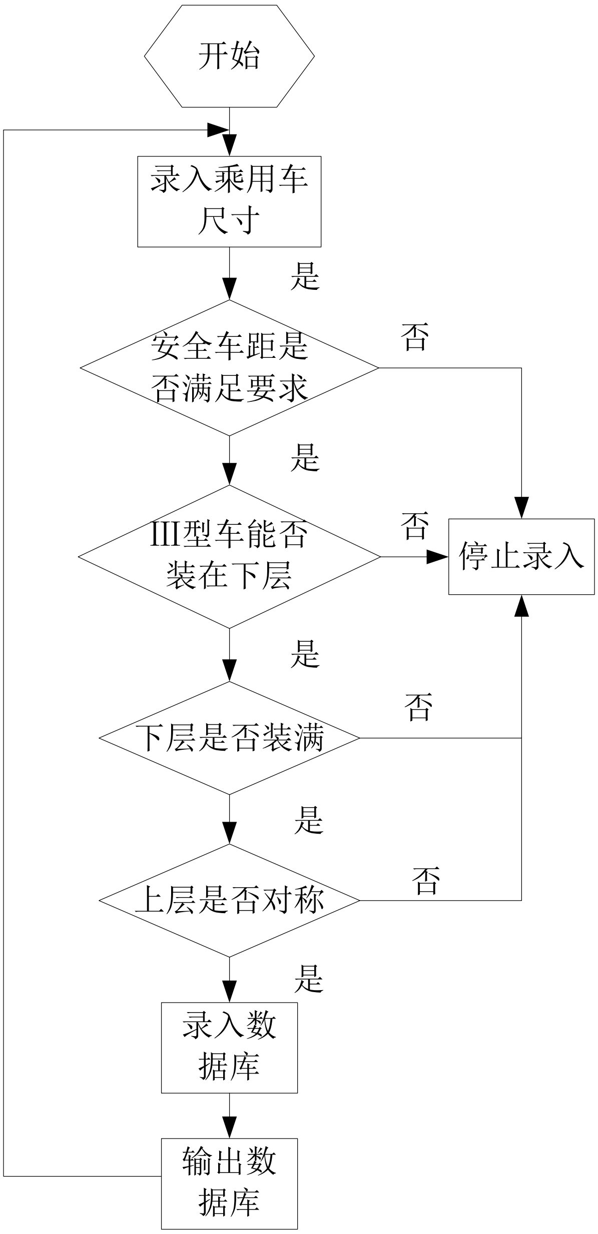

图 1 分配方案数据库的建立流程图

问题一到问题四分配方案数据库是一致的，而第五问的轿运车类型和乘用车型号种类更多，需要对其进行分类简化，简化后的方案数据库发生了变化，其规模更加庞大。

六、问题一到问题三的模型建立与求解

6.1 整数规划模型（初始模型）的建立

在本问题中，第一步，确定轿运车最少的使用数量。

目标函数：轿运车的总使用数量最小，即

$$\max \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i$$

约束条件如下：

（1）每次运输任务中 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即

$$0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \geq \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i$$

（2）Ⅰ型车的数量之和为 N1，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i = N_1$$

（3）Ⅱ型车的数量之和为 N2，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i = N_2$$

（4）Ⅲ型车的数量之和为 N3，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i3}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i3}y_i = N_3$$

（5）轿运车方案的采用量应为正整数，即

$$x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数})$$

决策变量：x_i、y_i。

以数学语言描述如下：

$$\max \ \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{q} y_i$$

$$s.t.\begin{cases} 0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \geq \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i = N_1 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i = N_2 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i3}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i3}y_i = N_3 \\ x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数}) \end{cases}$$

将上面的模型编成 lingo 程序，经过计算，我们可以得到在只考虑轿运车数量的情况下的一组可行的分配方案和轿运车的总使用数量。在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本比 1-2 型小，因此我们以 1-1 型轿运车的使用数量最多为目标，继续寻找运输成本更低的分配方案。

第二步，使得轿运车的使用成本最低。在轿运车使用数量最少的情况下，

仍然有多种分配方案，可在此条件下，对一次模型进行优化，以保证轿运车的使用成本尽可能的小。

目标函数：1-1 型轿运车的使用数量最大，即

$$\max \sum_{i=1}^{p} x_i$$

约束条件如下：

（1）保证轿运车使用数量最小，把第一步求出的 $n=\max \sum_{i=1}^{p} x_i+\sum_{i=p+1}^{q} y_i$ 作为约束条件，即

$$\sum_{i}^{p} x_i+\sum_{i}^{p+q} y_i=n$$

（2）每次运输任务中 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，即

$$0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \geq \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i$$

（3）Ⅰ型车的数量之和为 N_1，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i+\sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i+\sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i+\sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i=N_1$$

（4）Ⅱ型车的数量之和为 N_2，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i+\sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i+\sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i+\sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i=N_2$$

（5）Ⅲ型车的数量之和为 N_3，即

$$\sum_{i=1}^{p} C_{i3}x_i+\sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i3}y_i=N_3$$

（6）轿运车方案的采用量应为正整数，即

$$x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数）}$$

决策变量为： x_i、y_i。

以数学语言描述如下：

$$\max \sum_{i=1}^{p} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i}^{p} x_i + \sum_{i}^{p+q} y_i = n \\ 0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \ge \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i = N_1 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i = N_2 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i3}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i3}y_i = N_3 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i3}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i3}y_i = N_3 \\ x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数}) \end{cases}$$

6.2 方法一：lingo 求解法

6.2.1 问题一的求解

第一步得到如下一次模型。

目标函数：

$$\max \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{q} y_i$$

约束条件如下：

$$s.t.\begin{cases} 0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \ge \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i = 100 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i = 68 \\ x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数}) \end{cases}$$

利用 lingo 软件，进行求解该整数线性规划问题，只需将目标函数和约束条件输入到程序主体中即可运算。计算得到$n = \max \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{q} y_i = 18$，将其作为二次模型的约束条件。

第二步，对以下模型继续优化，以保证轿运车的使用成本尽可能的小。

目标函数：

$$\max \ \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=p+1}^{q} y_i$$

约束条件如下：

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i}^{p} x_i + \sum_{i}^{p+q} y_i = 18 \\ 0.2\sum_{i=1}^{p} x_i \ge \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i1}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i4}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i1}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i4}y_i = 100 \\ \sum_{i=1}^{p} C_{i2}x_i + \sum_{i=1}^{p} C_{i5}x_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i2}y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} C_{i5}y_i = 68 \\ x_i、y_i \in N(N\text{为非负整数）} \end{cases}$$

根据上述模型，利用 lingo 软件，可得每种类型轿运车的分配方案 1 和乘用车装载方案 1，见表 1 和表 2。

表 1 每种类型轿运车的分配方案 1

轿运车类型	每种类型轿运车总数
1-1	16
1-2	2

表 2 乘用车装载方案 1

轿运车类型	轿运车编号	下层车型Ⅰ数量	下层车型Ⅱ数量	上层车型Ⅰ数量	下层车型Ⅱ数量	方案采用量数量
1-1	1～5	0	5	0	5	5
1-1	6～16	4	0	4	0	11
1-2	17	2	4	4	2	1
1-2	18	2	4	4	8	1

6.2.2 问题二的求解

问题二的建模过程和问题一类似，只需修改通用程序 1，令 $N_1 = 0$、$N_2 = 72$、$N_3 = 52$，可得每种类型轿运车的分配方案 2 和乘用车装载方案 2，见表 3 和表 4。

表 3 每种类型轿运车的分配方案 2

轿运车类型	每种类型轿运车总数
1-1	12
1-2	1

表 4 乘用车装载方案 2

轿运车类型	轿运车编号	下层车型 Ⅰ数量	下层车型 Ⅱ数量	上层车型 Ⅰ数量	下层车型 Ⅱ数量	方案采用量数量
1-1	1	0	4	0	4	1
1-1	2～12	0	4	0	5	11
1-2	13	1	4	0	12	1

6.2.3 问题三的求解

问题三的建模过程和问题一类似，只需修改通用程序 1，令 $N_1=156$、$N_2=102$、$N_3=39$，可得每种类型轿运车的分配方案 3 和乘用车装载方案 3，见表 5 和表 6。

表 5 每种类型轿运车的分配方案 3

轿运车类型	每种类型轿运车总数
1-1	25
1-2	5

表 6 乘用车装载方案 3

轿运车类型	轿运车编号	下层车型 Ⅰ数量	下层车型 Ⅱ数量	下层车型 Ⅲ数量	上层车型 Ⅰ数量	上层车型 Ⅱ数量	方案采用量数量
1-1	1	0	0	4	4	0	1
1-1	2	0	5	0	0	5	1
1-1	3～9	0	5	0	4	0	7
1-1	9～17	1	0	3	4	0	8
1-1	18～19	2	0	2	4	0	2
1-1	20～21	3	0	1	0	5	2
1-1	22～23	3	1	0	4	0	2
1-1	24～25	4	0	0	4	0	2
1-2	26	0	5	1	4	8	1
1-2	27	1	0	4	10	0	1
1-2	28～29	2	4	0	4	8	2
1-2	30	5	0	0	4	8	1

6.3 方法二：分支定界法

当整数规划解的可行域有解界时，可行解数目是有限的。因此，我们可以逐个计算这些可行解的目标值，经过比较大小后定出最优解。但这种穷尽的枚举法对大规模问题往往不切实际。分支定界法在枚举过程中逐步把一部分可行解排斥在考虑范围之外，从而大大减少计算的复杂性。[文献 1]可以采用下述步骤对问题进行求解。

步骤一：调用前面所建立的分配方案数据库；

步骤二：判断是否满足 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%的决策变量，而且Ⅰ型承运车、Ⅱ型承运车和Ⅲ型承运车数目满足题目中的要求，满足的便进行储存，不满足的进行删除。

步骤三：步骤二中储存的所有决策变量中，找出所需 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数目总量最少的决策变量阵，并输出所需轿运车最小的数目。

步骤四：对轿运车的使用成本进行进行优化，优化目标为 1-1 型轿运车的使用数量最大，即就是 1-2 型轿运车数量最小，可先求出 1-2 型轿运车数量的上限，然后从 0 开始循环，直到新循环 1-2 型轿运车的总量大于等于前面循环的总量的时候，就结束循环，这样就找到了目标值及优化后得出的分配方案。

我们采用 yalmip 工具箱的 lpsolve 求解器，它是一个混合整数线性规划求解器，可以求解纯线性、（混合）整数、半连续和特殊有序集等模型。

我们采用分支定界算法对问题一到问题三重新进行了计算。

6.3.1 问题一的计算结果

每种类型轿运车的分配方案 1 和乘用车装载方案 4，见表 1 和表 7。

表 7 乘用车装载方案 4

轿运车类型	轿运车编号	下层车型Ⅰ数量	下层车型Ⅱ数量	上层车型Ⅰ数量	上层车型Ⅱ数量	方案采用量数量
1-1	1～5	0	5	0	5	5
1-1	6～16	4	0	4	0	11
1-2	17	1	5	0	8	1
1-2	18	1	5	10	0	1

6.3.2 问题二的求解

每种类型轿运车的分配方案 2 和乘用车装载方案 4，见表 3 和表 8。

表 8 乘用车装载方案 5

轿运车类型	轿运车编号	下层车型Ⅱ数量	下层车型Ⅲ数量	上层车型Ⅲ数量	方案采用量数量
1-1	1	0	4	4	1
1-1	2～11	0	4	5	10
1-1	12	1	3	5	1
1-2	13	0	5	12	1

6.3.3 问题三的求解

每种类型轿运车的分配方案 2 和乘用车装载方案 4，见表 5 和表 9。

表 9 乘用车装载方案 6

轿运车类型	轿运车编号	下层车型Ⅰ数量	下层车型Ⅱ数量	下层车型Ⅲ数量	上层车型Ⅰ数量	上层车型Ⅱ数量	方案采用量数量
1-1	1～5	0	5	0	0	5	5
1-1	6～16	1	0	3	4	0	11
1-1	17～15	4	0	0	4	0	9
1-2	26	0	1	4	10	0	1
1-2	27	0	5	1	2	10	1
1-2	28	1	4	1	4	8	1
1-2	29～30	2	4	0	4	8	2

6.4 两种方法求解结果的比较与分析

对于问题一，两种方法需要的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量分别相等，使用的分配方案数均为 4，且 1-1 型轿运车的装载方案也相同，但 1-2 型轿运车的装载方案有所区别。

对于问题二，两种方法需要的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量分别相等，使用的分配方案数分别为 3 和 4，两种类型轿运车的装载方案有所区别。

对于问题三，两种方法需要的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车数量分别相等，但使用的分配方案数分别为 12 和 7，两种类型轿运车的装载方案区别很大。在实际运输任务中，方案数越少，调度人员和装载人员的操作复杂度越小，配送更为方便。因而，我们认为方法二所得分配方案更为合理。

综上，两种方法给出的解均是可行解，它们在题设给定的运输任务中运输成本相同。但两种类型的轿运车的装载方案不尽相同，总体来说，方法二给出的总装载方案较少，稍优于方法一。

七、问题四的模型建立与求解

7.1 问题四的求解

首先，根据问题一到问题三的初始模型，带入问题四中不同型号乘用车的数量，得到第一次优化模型，并求解出需要的轿运车总使用数量是 25。

其次，在轿运车总使用数量均为 25 的情况下，1-1 型轿运车的使用成本比 1-2 型小，因此我们以 1-1 型轿运车的使用数量最多为目标，得到第二次优化模型。

在分配方案确定的基础上，考虑目的地问题，以所有轿运车总行驶里程最短为目标进行优化，得到第三次优化模型。

三次优化模型建立的步骤如下：

（1）确定二次优化目标，力求实现所有轿运车总行驶里程最短，即

$$\min \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} D_{ij} l_j$$

其中 l_j =（l_A, l_B, l_C, l_D），l_A、l_B、l_C、l_D 分别代表轿运车开往 A、B、C、D 四个目

的地时的行驶距离。

（2）使得 1-1 型和 1-2 型轿运车数目满足一次优化条件，即

$$\sum_{i=1}^{p} D_{ij} = 21，\sum_{i=1}^{p+q} D_{ij} = 4$$

（3）考虑了目的地问题，166 辆Ⅰ车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆Ⅱ车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，分别为 31、47 辆）。

可能到达目的地 C 的轿运车需要经过 D 时卸下一部分Ⅰ型乘用车，即到达目的地 C 的轿运车所装载Ⅰ车型乘用车的数量比 C 实际需要的要多，而目的地是 D 的轿运车所装载Ⅰ型乘用车的数量比 D 的实际需要量少，同理，到达目的地 A 的轿运车所装载Ⅰ型乘用车的数目比 A 实际需要的要多，即

$$\sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i1} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i1} \ge 42 \text{，} \sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i3} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i3} \ge 33 \text{，} \sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i4} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i4} \le 41$$

D 处可能有到达 A 或 B 卸下的，则到达 A、D 的轿运车所装载Ⅰ型乘用车的数量和比实际需要多，同理则到达 C、D 的轿运车所装载Ⅰ型乘用车的数量和比实际需要多，即

$$\sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i1} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i1} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i4} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i4} \ge 42+41$$

$$\sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i3} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i3} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i1}D_{i4} + \sum_{i=1}^{p+q} C_{i3}D_{i4} \ge 33+41$$

Ⅱ型乘用车只运往目的地 A、C，且运往目的地 A、C 的轿运车行驶方向不同，则到达目的地 A、C 的轿运车所装载的Ⅱ型的乘用车和实际需求相同。

到达 A、B、C、D 目的地的轿运车上装载Ⅰ型乘用车的数目应该为 166，即

$$\sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} C_{i1}D_{ij} + \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} C_{i3}D_{ij} = 166$$

综上，以数学语言描述如下：

$$\min \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} D_{ij} l_j$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{4} D_{ij}=21,\sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} D_{ij}=4\\ \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} C_{i1}D_{ij}+\sum_{i=1}^{p+q}\sum_{j=1}^{4} C_{i3}D_{ij}=166\\ \sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i1}\ge 42\text{，}\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i3}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i3}\ge 33\text{，}\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i4}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i4}\le 41\\ \sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i4}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i4}\ge 42+41\\ \sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i3}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i3}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i4}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i4}\ge 33+41\\ \sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i2}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i2}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i1}D_{i4}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i3}D_{i4}\ge 42+50+41\\ \sum_{i=1}^{p+q}C_{i2}D_{i1}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i4}D_{i1}=31\text{，}\quad \sum_{i=1}^{p+q}C_{i2}D_{i3}+\sum_{i=1}^{p+q}C_{i4}D_{i3}=47\\ D_{ij}\in N(N\text{为非负整数）}\end{cases}$$

7.2 lingo 软件的求解结果

根据上述二次优化模型，利用 lingo 软件，可得 1-1 型轿运车总使用数量为 20，1-2 型轿运车总使用量数为 5，不同类型轿运车开往不同目的地的分配方法 1 和运输任务详细计划 1，见表 10 和表 11。

表 10 不同类型轿运车开往不同目的地的分配方法 1

轿用车类型	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D	每种类型轿运车总数	总行驶里程
1-1	0	6	9	5	20	6404
1-2	5	0	0	0	5	

表 11 运输任务详细计划 1

轿用车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	中间停靠地	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D
1-1	4	0	5	0	5	无	0	0	4	0
1-1	1	3	1	0	5	无	0	0	1	0
1-1	1	3	1	4	0	无	0	0	1	0
1-1	2	4	0	4	0	无	0	0	2	0
1-1	1	4	0	4	0	D	0	0	1	0
1-1	6	4	0	4	0	无	0	6	0	0
1-1	5	4	0	4	0	无	0	0	0	5
1-2	1	4	0	0	5	无	1	0	0	0
1-2	2	1	5	4	8	无	2	0	0	0
1-2	1	5	0	10	0	无	1	0	0	0
1-2	1	5	0	10	0	B	1	0	0	0

7.3 分支定界法的求解结果

我们采用分支定界算法对问题四重新进行了计算，可得 1-1 型轿运车总使用数量为 21，1-2 型轿运车总使用量数为 4，不同类型轿运车开往不同目的地的分配方法 2 和运输任务详细计划 2，见表 12 和表 13。

表 12 不同类型轿运车开往不同目的地的分配方法 2

轿用车类型	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D	每种类型轿运车总数	总行驶里程
1-1	3	6	7	5	21	6528
1-2	3	0	1	0	4	

表 13 运输任务详细计划 2

轿用车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	中间停靠地	目的地 A	目的地 B	目的地 C	目的地 D
1-1	3	0	5	0	5	无	0	0	3	0
1-1	1	0	5	4	0	无	0	0	1	0
1-1	2	4	0	4	0	无	0	0	2	0
1-1	1	4	0	4	0	D	0	0	1	0
1-1	1	0	5	2	2	无	1	0	0	0
1-1	1	4	0	4	0	无	1	0	0	0
1-1	1	4	0	4	0	B	1	0	0	0
1-1	5	4	0	4	0	无	0	5	0	0
1-1	1	4	0	4	0	D	0	1	0	0
1-1	4	4	0	4	0	无	0	0	0	4
1-1	1	4	0	3	0	无	0	0	0	1
1-2	1	2	4	4	8	无	0	0	1	0
1-2	3	5	0	4	8	无	3	0	0	0

7.4 两种方法求解结果的比较与分析

实际运输任务中，调度方案多种多样。本题中两种方法给出的解均是可行解，方法一给出的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车总使用量分别为 20、5，方法二给出的 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车总使用量分别为 21、4；方法一和方法二的总行驶里程分别为 6404 和 6528；运输任务的详细计划也有所差异。总体来说，方法一给出的 1-1 型轿运车总使用量更大，总行驶里程更短，装载方案较少，故对于本题它稍优于方法二。

八、问题五的模型建立与求解

（1）对于问题五，乘用车类型、尺寸大小、数量和目的地种类繁杂，轿运车的类型、尺寸和拥有量也有较大差异，需要对原始数据进行分类简化处理，采用分类平均法得到 4 种型号的乘用车和 3 种类型的轿运车，其简化结果如表 14 和 15 所示

表 14 乘用车分类结果

车型类别	乘用车型号	长	宽	高	A	B	C	D	E	总量
微型	I	3.675	1.581	1.537	18	22	71	46	30	187
普通	II	4.489	1.747	1.529	235	170	168	169	168	910
中型	III	4.987	1.824	1.609	37	19	13	19	18	106
大型	Ⅳ	6.831	1.980	1.478	2	0	0	1	1	4

表 15 轿运车分类结果

轿运车类型	长	宽	高	拥有量
1-1	20.543	2.700	4.071	121
1-2	23.500	2.75/3.55	4.125	25
2-2	19.000	3.500	3.400	5

（2）重新编写分配方案数据库，其过程与问题一到问题四的分配方案数据库的建立过程基本一致，只不过其数据量更大。

（3）定义矩阵：[各类型车到各目的地的量] =[分配方案数据库矩阵] [决策变量矩阵/也就是到各目的地所采用所采用这种分配方案的数量]，即 $E=(D\cdot C)^T$（行代表Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ类型车，列代表目的地 A、B、C、D、E,），得到一个较为简化的5×4矩阵。

（4）根据问题一到问题三的初始模型，带入问题四中不同型号乘用车的数量，得到第一次优化模型，并求解出需要的轿运车总使用量为 122。

（5）在分配方案确定的基础上，考虑目的地问题，以所有轿运车总行驶里程最短为目标进行优化，得到第三次优化模型。因为问题五比问题四增加了 E 点，其约束条件发生了变化，优化目标没有发生变化（先不考虑 A、E 之间轿运车的周转问题）。

（6）优化目标：力求达到最短的轿运车所行驶的总距离，即

$$\min\sum_{i=1}^{5}\sum_{j}^{4}E_{ij}\cdot l_i$$

（7）可能到达目的地 C 的轿运车需要经过 D 时卸下一部分乘用车，即到达目的地 C 的轿运车所装载乘用车的数量比 C 实际需要的要多，而目的地是 D 的轿运车所装载乘用车的数量比 D 的实际需要量少，同理，到达目的地 A 的轿运车所装载乘用车的数目比 A 实际需要的要多，即

$$\sum_{i=1}^{4}E_{3i}\ge71+163+78\text{；}\quad\sum_{i=1}^{4}E_{4i}\le46+116+19+1\text{；}$$

$$\sum_{i=1}^{4}E_{1i}\ge18+235+37+2\text{；}\quad\sum_{i=1}^{4}E_{5i}\ge71+163+78$$

（8）目的地 D、E 上可能有从目的地到达 A、B 时卸下的，则到达 C、D 的轿运车上所装载乘用车的数目和比实际需要的要多，同理则到达 A、D 的轿运车上所装载乘用车的数目和比实际需要的要多，到达 D、E 的轿运车上所装载乘用车的数目和比实际需要的要多，即

$$\sum_{i=1}^{4}E_{3i}+\sum_{i=1}^{4}E_{4i}\ge71+163+78+46+116+19+1$$

$$\sum_{i=1}^{4}E_{1i}+\sum_{I=1}^{4}E_{4i}\ge18+235+37+2+46+116+19+1$$

$$\sum_{i=1}^{4}E_{5i}+\sum_{I=1}^{4}E_{4i}\ge71+163+78+46+116+19+1$$

（9）如果目的地为 B 轿运车上装载乘用车的数目不能小于 A、E 所需乘用车的数目之和，即

$$\sum_{i=1}^{4} E_{2i} >= \sum_{i=1}^{4} E_{1i} + \sum_{i=1}^{4} E_{5i}$$

模型的分配方案如表 16。

表 16 运输任务详细计划 3

轿运车类型	下层车型Ⅰ数量	下层车型Ⅱ数量	下层车型Ⅲ数量	下层车型Ⅳ数量	上层车型Ⅰ数量	上层车型Ⅱ数量	上层车型Ⅲ数量	上层车型Ⅳ数量	各轿运车数量	相同类型轿运车使用总量
1-1	0	1	3	0	0	4	0	0	32	
1-1	0	4	0	0	0	4	0	0	36	
1-1	0	4	0	0	3	2	0	0	1	98
1-1	1	2	0	1	3	2	0	0	4	
1-1	3	2	0	0	3	2	0	0	25	
1-2	0	4	1	0	0	10	0	0	10	
1-2	0	5	0	0	0	10	0	0	5	
1-2	0	5	0	0	2	8	0	0	1	19
1-2	0	5	0	0	10	2	0	0	1	
1-2	1	4	0	0	0	10	0	0	1	
1-2	5	1	0	0	0	10	0	0	1	
2-2	0	8	0	0	0	8	0	0	5	5

九、模型的改进与优缺点分析

模型的改进：

（1）乘用车以及轿运车的种类数目只是简单的进行了分类，对其长高宽简单地取了平均值，没有考虑实际应用中存在高度>1.7 的问题，存在高度限制，因此可以在数据统计时，把高度单独划分出来，重新定义分配方案数据库，模型的建立过程与上述相同，只不过分配方案数据库更加庞大；

（2）没有考虑目的地 A、E 之间的转运问题，因此在模型改进过程，D_{ij} 分配方案目的地矩阵需要增加列数，即 $j=1$、2、3、4、5、6、7 分别代表目的地 A1、A2、B、C、D、E1、E2，距离矩阵也相应增加，其中 $l_j=(l_{A1},l_{A2},l_B,l_C,l_D,l_{E1},l_{E2})$，$l_i$ 代表轿运车目的地在 A1、A2、B、C、D、E1、E2 时的行驶距离，即 $l=(360,440,280,236,160,384,420)$。

模型的优缺点分析

lingo 求解法：

lingo 求解法的优点在于内置建模语言，可以允许决策变量是整数（即整数规划），方便灵活，语句简单，执行速度非常快，并且能方便与 EXCEL 等软件交换数据。其缺点是依赖于分配方案数据库，且需要分两步计算。

分支定界法：

分支定界法可以求得最优解、平均速度快。因为从最小下界分支，每次算完限界后，把搜索树上当前所有的叶子结点的限界进行比较，找出限界最小的结点，此结点即为下次分支的结点。这种决策的优点是检查子问题较少，能较快的求得最佳解。 它的缺点是程序和算法较复杂，求解较慢。

参考文献

[1]吴孟达等. 数学建模教程. 高等教育出版社, 2011.
[2]郝孝良,戴永红,周义仓.数学建模竞赛.西安：西安大学出版社,2002.
[3]沈继红,施久玉.数学建模.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996.
[4]蒋启源.数学模型.杭州:浙江大学出版社,1993.

附录

lingo 求解程序

lingo1.txt	问题一的求解程序
lingo2.txt	问题二的求解程序
lingo3.txt	问题三的求解程序
lingo4.txt	问题四的求解程序

matlab 求解程序

qes1.m	问题一的求解程序
qes2.m	问题二的求解程序
qes3.m	问题三的求解程序
qes4.m	问题四的求解程序
qes5.m	问题五的求解程序
fenpei.m	对于问题一到问题四建立的分配方案数据库的求解程序
shujuku.xls	分配方案数据库
yalmip+lpsolve.rar	almip 工具箱和 lpsolve 求解器