全国第六届研究生数学建模竞赛

题　目　　　　　　警车配置及巡逻方案

摘　　　　要：

为了更高效的利用警务资源，本文对警车配置及巡逻方案提出了四项评价指标，即单位时间内每条道路被巡查平均次数、单位时间内每条道路被巡查次数的标准差、事件发生后警车赶到现场所用的平均时间、单位时间内所有警车对全部道路巡逻的覆盖率。同时，针对问题 1~7 建立了三个模型解决相关问题或优化已有方案。

针对问题 1：要使覆盖一定范围的警车最少，本文将问题转化成集合覆盖模型，建立了模型Ⅰ（式 1）。运用启发式 SCHF 算法（式 2）求解，得出最少需要配置 20 辆警车。

针对问题 3~6：综合考虑评价巡逻方案优劣的四项指标，建立了基于结点优先级的巡逻方案模型（模型Ⅱ）。该模型通过降低被经过结点的优先级，实现对每条道路巡逻次数尽可能均等以及巡逻覆盖范围尽可能广。具体指标值见表 8。

针对问题 4：针对要求警车巡逻具有隐蔽性这一目标，在相邻结点优先级相等的情况下，利用离散型随机变量模型（模型Ⅲ）来随机的选取一条道路进行巡逻，使得巡逻线路无规律可循，从而实现巡逻的隐蔽性。

关键词：集合覆盖模型；启发式 SCHF 算法；结点优先；离散随机模型

1 问题重述

某城市拟增加一批配备有 GPS 卫星定位系统及先进通讯设备的 110 警车。110 警车的平均巡逻速度为 20km/h，接警后的平均行驶速度为 40km/h。警车配置及巡逻方案要尽量满足以下要求：

D1. 警车在接警后三分钟内赶到现场的比例不低于 90％；而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内。

D2. 使巡逻效果更显著；

D3. 警车巡逻规律应有一定的隐蔽性。

结合题中给定的城市道路信息，如何配置警车以及设计合理的巡逻方案需要解决以下问题：

（1）若要求满足 D1，该区最少需要配置多少辆警车巡逻？

（2）给出评价巡逻效果显著程度的有关指标。

（3）在满足 D1 且尽量满足 D2 条件的警车巡逻方案及其评价指标值。

（4）在第三问的基础上，考虑 D3 条件，给出警车巡逻方案及其评价指标值。

（5）在仅配置 10 辆警车的情况下，如何制定巡逻方案，使 D1、D2 尽量得到满足？

（6）若警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h，回答问题三。

（7）给出还需要考虑的情况因素以及相应的解决方案。

2 问题分析

求解问题 1 时，可根据地图数据的分布对城区进行区域划分，对相应区域分配警车，这样可能得到比本文更优的解。但考虑到本题后续问题的求解，该方法在很大程度上不理想。首先，整个区域丢失了部分拓扑关系，在解决问题 4、5

时优化空间减少。其次，针对数据设计的解决方案，缺乏理论依据，不能解决一般性问题。考虑使用 Floyd 算法结合贪心算法求解问题 1，由 Floyd 算法计算得到各路口两两间的最短路径，然后经过贪心计算得到第一辆警车的位置。为了不出现警车间管辖范围出现重叠，此时应删除已被覆盖的路口结点，更新剩下结点的拓扑关系，依次重复直到所有结点均被覆盖。由于 Floyd 算法的时间复杂度为 $O(n^3)$，可知整个算法的时间复杂度为 $O(n^4)$，显然在时间上不可取。而且该算法在数据特殊的情况下可能出现“岛屿”现象。所谓“岛屿”，即在某些结点周围的所有结点均优先被警车覆盖掉，剩下的稀散点间失去拓扑，形成部分孤点。鉴于此，本文采用启发式 SCHF 算法，较好地解决了上述存在的问题。

巡逻方案直接影响巡逻的效应，设计一个合理有效的巡逻方案可以增强发现犯罪的能力，降低和减少可防性案件的发生。问题中除 3 个重点部位，其他结点发生事件的概率假设均相等，所以设计的巡逻方案应使警车尽量均匀分布在城区，而且尽量避免短时间内重复巡逻相同结点。据此，可提出 f_{avg}、σ、$\bar{t}$ 和 η 等评价指标来衡量巡逻方案的优良性。结合计算机操作系统中的进程调度策略，赋予城区路口优先级，为了避免 OS 中出现的“饿死”现象，在巡逻过程中动态改变结点的优先级，可以使巡逻效果达到最佳。为实现巡逻规律具有一定的隐蔽性，考虑让警车在其管辖范围内随机地进行道路的选择，使其巡逻路线不拘泥于常规。

3 基本假设

（1）同一时间不发生两起以上的事件；

（2）在每辆警车所管辖的区域范围内，事件发生的概率相等；

（3）除去重点部位外，认为每条道路的重要性均相等；

（4）所有道路均为双行道；

（5）城区道路交通状况良好，警车以恒定的速度行驶。

（6）假定所有事发现场均在道路上；

（7）相邻两个交叉路口之间的道路近似为直线；

4 符号说明

n：该地区配置警车的数量；

q：该地区结点总数

c：该地区道路总数；

I：该地区所有道路的集合；

S：该地区所有结点的集合；

S_i：在第 i 个结点上停放警车所能影响结点的集合；

S_{cvr}：若干个 S_i 组成的集合且能覆盖该地区所有结点；

v_0：警车平均巡逻速度；

v_1：警车接警后平均行驶速度；

d_0：接警后警车三分钟内能到达现场所允许的最远路程；

d_1：接警后警车三分钟内 90%以上概率能到达现场所允许的最远路程；

d_2：巡逻时警车一分钟内所行驶的路程；

d_3：接警后警车三分钟内能到达现场所允许的最远路程；

R_i：单位时间内第 i 辆警车所巡查道路的条数；

L_i：单位时间内第 i 条道路被巡查的次数；

Y_i：单位时间内所有警车巡逻时所经过的结点的集合；

K_{ij}：第 i 个结点到第 j 个警车的最短路径；

M_i：第i个结点到每个警车路径的最小值；

f_{avg}：单位时间内每条道路被巡查平均次数；

σ：单位时间内每条道路被巡查次数的标准差；

$\bar{t}$：事件发生后警车赶到现场所用的平均时间；

η：单位时间内所有警车对全部道路巡逻的覆盖率；

P_i：在巡逻问题中第i个结点的优先级。

5 模型建立与求解

5.1 相关概念

最小集合覆盖问题：S是一个集合，$S_1,S_2,\cdots,S_m$是S的子集，且构成S的覆盖，即$\bigcup_{i=1}^{m}S_i=S$，求最小的覆盖。

定义 1 x是属于S的任一取定的元素，如果x当且仅当只属于$S_1,S_2,\cdots,S_m$的K个集合，则称x的频率为K，用$K(x)$表示。

定义 2 在集合S_i中，所有元素出现的次数称为S_i的基数，用$|S_i|$表示。

定义3 S_i是$S_1,S_2,\cdots,S_m$中的一个集合，令$P(S_i)=\min\{K(x);x\in S_i\}$，称$P(S_i)$为$S_i$的覆盖度，空集的覆盖度定义为$m-1$。

定义 4 在$S_1,S_2,\cdots,S_m$中如果排出一个集合S_i之后，出现R个必选的集合（覆盖度为 1 的集合），则称S_i的必选度为R，用$R(S_i)$表示。

定义 5 设 NPH 是一个给定的 NP 难问题，ST 是一个求解 NPH 的策略，如果 ST 的前提条件的验证以及策略的操作皆可在多项式时间内完成，则称 ST 为多项式时间策略。

定义6 NPH是一个NP难问题，ST是求解NPH的一个多项式时间策略，如果

NPH的实例满足ST条件时，经过ST操作之后问题的实例规模比原来的小，并且问题的新实例的最优化解都是原问题实例的优化解，则称ST为完备策略。

5.2 模型Ⅰ（集合覆盖模型）

5.2.1 数据准备

根据已知的道路地图数据，建立起道路网络图，并对每个交叉路口进行编号，如图 1 所示。

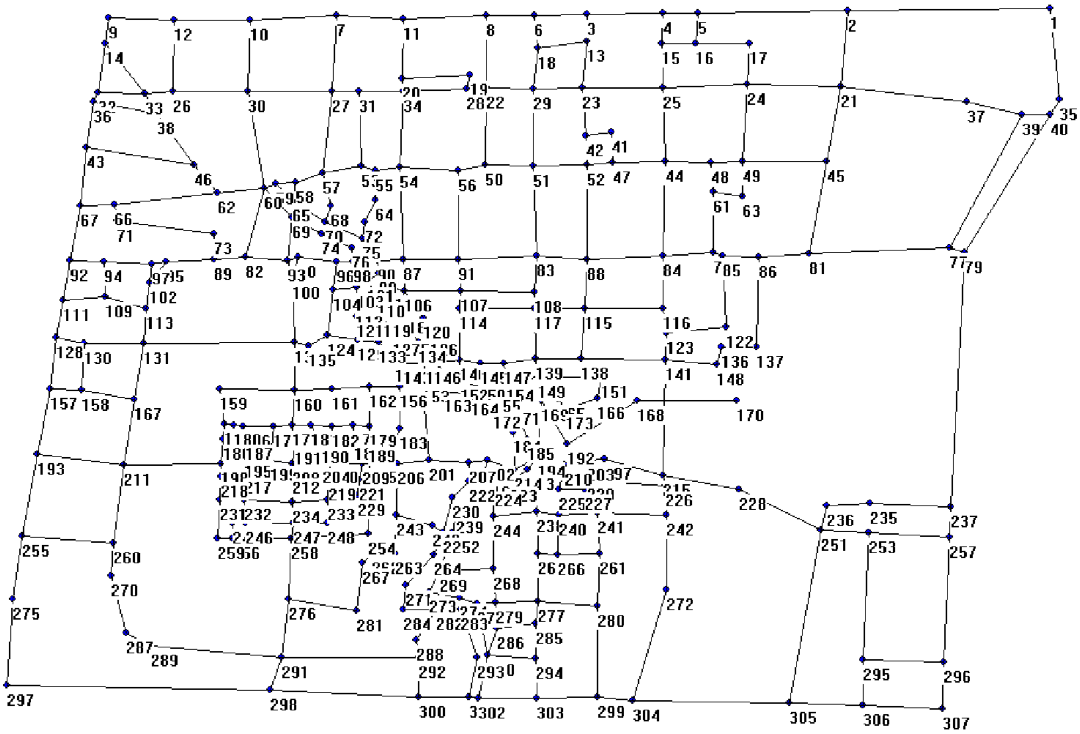

图 1　带编号的城市道路网图

考虑到城市道路的特殊性，任意两个点之间的路线通常比较曲折且不为直线，例如地图上某两点的空间距离很近，却没有直达的路线，需要通过其它路口中转，所以如果采用普通的点覆盖的方法，很难适应实际情况。

对于每个位置警车的影响范围，我们对每个路口都采用了带约束的广度优先搜索算法，即给定了广度优先搜索的最大深度值，旨在计算出在实际道路中任意一个路口位置警车的影响范围，避免了一般的点覆盖模型应用在此题折线距离中

计算不精确的问题。由于该方法不作为本问题重点，在此不做赘述。

本题中警车接警后行驶的平均速度为 40km/h，三分钟能行驶的路程 $d_0 = v_0 \times t = 40 \times 3/60 = 2\,(\text{km})$。即如果现场离警车的道路距离在 2km 以内，且不考虑警车在行驶途中的突发状况，则在三分钟内警车能 100%的到达。实际情况只要求除重点部位外，其它现场只需要在三分钟内赶到的概率为 90%以上即可，因而在建模时可采用更长的搜索路长 $d_1 = d_0/90\% \approx 2.22\,(\text{km})$。

利用 d_1 作为宽度优先搜索的约束半径，对每个警车可能的起始位置计算出警车沿附近所有道路能到达的所有位置，作为警车的影响范围。建立模型时把每个警车视为静态，求出在道路每个结点上停放警车的影响范围。表 1 给出了本题中从每个路口出发，经过不大于 d_1 的路程所能到达的其它路口编号的部分数据。例如，从路口 1 出发，经过不大于 d_1 的路程能到达 35、39、40 号路口。

表 1　距每个路口路程小于搜索路长所有路口编号

$\bar{X}$	链接的路口（编号）
1	35　40　39
2	5　21　24　45
3	6　4　13　8　18　5　15　23　22　29　16　25　42　41　52　47
…	………………..
305	251　304　306　295　307
306	295　305　307　253　296
307	296　306　257　295　305

利用 MATLAB 统计出每个路口在路程 d_1 内可到达的其它路口的数目，如图 2 所示。

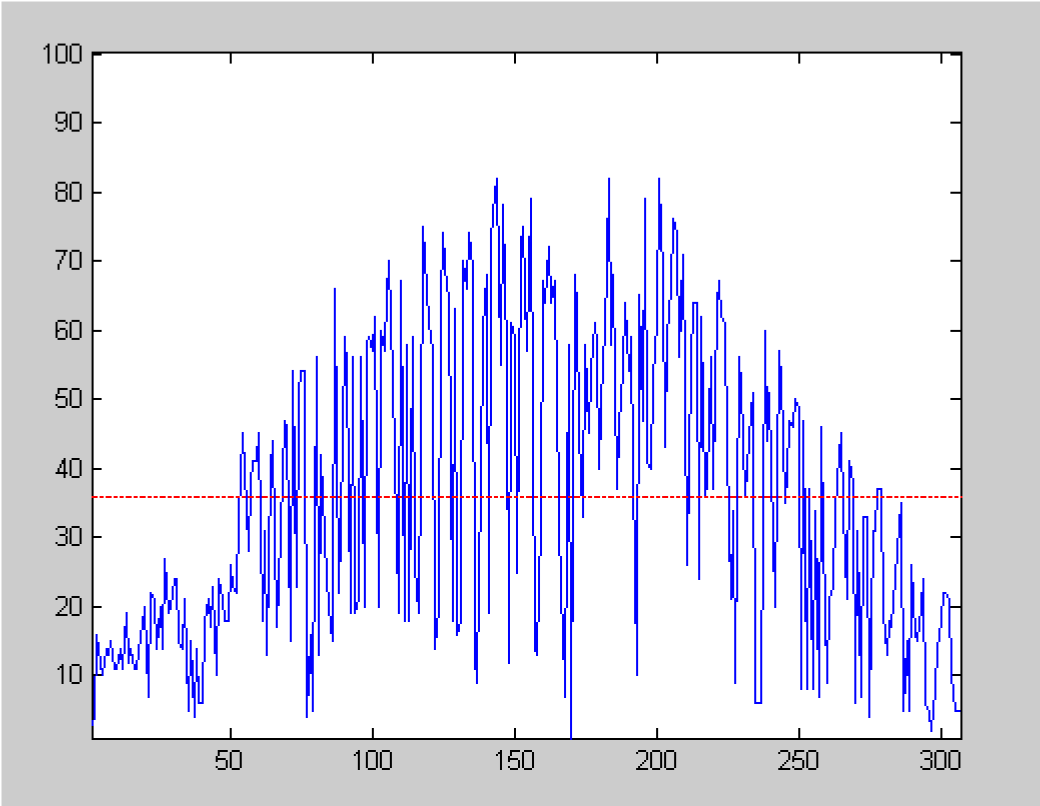

图 2　距每个路口路程小于搜索路长的所有路口数目

图中横坐标为每个路口编号，纵坐标为可到达路口的数目，波动起伏大的连线为每个路口所能到达路口的数目 S_i，中间的横线为所有路口能达到其他路口总数的平均值：$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} S_i = \frac{11052}{307} \approx 36$。将图 2 与图 1 进行对比可知，由于编号小和编号大的点大部分都位于点稀疏区，它们所能搜索到的路口数目比编号居中的点要少，故图形呈山峰状。

5.2.2 模型 I 的分析

在问题 1 条件的约束下，要使配置的警车数目 N 最少，则警车应尽可能的散布在整个城市且达到所有警车管辖区域重叠面积最小。

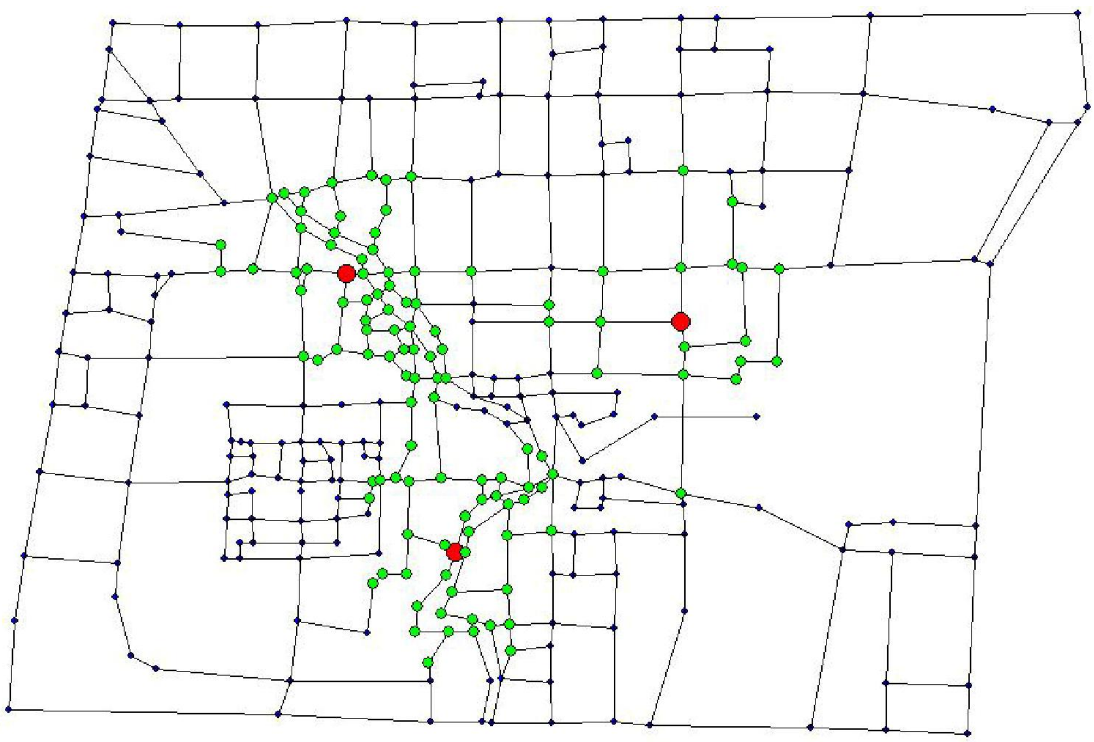

图 3　警车影响范围示意

图 3 中显示了该市道路图中任意放置的三辆警车的影响范围（红色大圆点代表警车所处位置，绿色小圆点为警车的影响范围），可以将警车影响范围内覆盖的结点看作一个集合，城市道路上的所有结点看做一个全集 S，我们需要所有的警车影响范围要覆盖每个道路结点（即 $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = S$），同时又要使警车数目最小，即 $|S_{cvr}|$ 最小，因而可以将该问题转化成集合覆盖问题来求解。

集合覆盖问题(SCP)可用如下的二值整数规划来确切地描述：

$$v(SCP) = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

服从于条件　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1$，$i = 1,2,\cdots,m$，$x_j \in \{0,1\}$，$j = 1,2,\cdots,n$

公式(1)中：c_j 表示第 j 列的代价；x_j 取1表示第 j 列包含在解中，取0表示第 j 列没有包含在解中；a_{ij} 表示0-1矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 第 i 行、j 列的值，$a_{ij} = 1$ 表示第 j 列盖住了第 i 行，$a_{ij} = 0$ 表示第 j 列没有盖住第 i 行。

对集合覆盖问题，我们的算法思想就是从 n 列中，按照某种规则依次选择若干列盖住所有的行，使得这些被选中列的代价之和尽量地小。在某一时刻，已经按选择规则选择了若干列盖住若干行，还有若干行未被盖住，这种状态称为一种格局。开始时，所有行都未被盖住，此时的格局称为初始格局；若所有行都被盖住了，此时的格局称为终止格局。算法的目标就是要找一个代价最小的终止格局。表 2 为一个集合覆盖的例子，A 为 5 行 6 列的 0-1 矩阵，$\vec{C}$ 为列的代价值，$\vec{X}$ 为解向量。表 1 表示的是一个终止格局，用第 1、3、4 列盖住了所有 5 行，代价为 6。对于这个例子，最优解为 $X=(1,1,0,1,0,0)$，即用 1、2、4 列盖住所有的行，其代价为 5。

表 2　集合覆盖的例子

$\bar{X}$	1	0	1	1	0	0
A	1	1	0	1	0	0
	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0	1
	1	0	0	0	0	1
$\bar{C}$	1	1	2	3	6	7

在解决集合覆盖问题时，可将那些冗余的列事先剔除，以降低问题规模。对任一列 j，其代价为 c_j，设此列可盖住 p 行 $i_1,i_2,\cdots i_p$。若能从剩下的列中选出最小代价的一列来盖住第 $i_l\ (l=1,2,\cdots p)$ 行。若这些列的代价之和小于 c_j，则可将第 j 列剔除掉。表3所示的集合覆盖是表1所示的集合覆盖经简化后的结果。简化后，实例的唯一解。$X=(1,1,1)$ 也是其最优解，代价仍为5。

表 3　简化后的集合覆盖的实例

$\bar{X}$	1	1	1
A	1	1	1
	0	0	1
	1	0	0
	0	1	0
	1	0	0
$\bar{C}$	1	1	3

由定义6可知，如上的简化问题的方法在解决NP难问题时被称为完备策略。用完备策略既能降低问题的求解难度，又能保留一些（不增加）最优解，所以它是求解NP困难问题的最重要的策略，因此用启发式算法求解NP困难问题时，我们首先应该考虑寻找完备策略。

5.2.3 模型Ⅰ的建立

在问题1中，除去重点部位外，我们认为每个结点的重要性相同，在将该问题转化成集合覆盖问题时，可以设每列的代价$c_i(i=1,2,\cdots n)$相同且均为1。为了降低模型的求解难度同时不影响最终求解的质量，首先提出集合覆盖问题的三个完备策略：

完备策略1　如果$S_1,S_2,\cdots,S_m$中的一个集合$S_i=S$，则选择S_i作为最优化覆盖中的唯一一个集合S_i；

完备策略2　如果存在$x\in S$，x只属于$S_1,S_2,\cdots,S_m$中的一个集合S_i，即$P(S_i)=1$，则选择S_i作为最优化覆盖中的一个集合S_i；

完备策略3　如果$S_i\subseteq S_j$，则排出S_i。

不难看出以上3个策略都是多项式时间策略，下面我们证明这3个策略满足定义5。

策略1显然满足定义5。

考虑策略2，当问题的实例满足策略2的条件时，即存在$x \in S$ 只属于覆盖中的一个集合，不妨设$x \in S_i$，则S_i定在任何一个覆盖中（否则不能形成一个覆盖），于是S_i属于任何一个最优化覆盖中，这就是说，选择S_i之后求解难度降低了，但还保留着所有最优化覆盖，故策略2是完备策略。

考虑策略3，问题的实例满足策略3的条件时，即存在两个集合S_i，S_j满足$S_i \subseteq S_j$，如果一个最优覆盖含有S_i，则在该覆盖中，用S_j来代替S_i后仍然是一个最优化覆盖，故排除S_i之后问题的难度降低了，但不增加最优化覆盖，因此策略 3 是完备策略。

通过给出的3个完备策略和3个启发式策略。先给出构造启发函数的基本准则，然后给出启发函数算法，最后对算法进行合理性分析，构造启发函数的基本准则。

(1) 给出一个$S_1, S_2, \cdots, S_m$到实数轴R上的映射$F(x)$，当S_i的排除优先级比S_j的排除优先级高时，$F(S_i) < F(S_j)$。

(2) 当满足完备策略1或2时，$F(S_i)$最大，并且$F(S_i) > L$。L是一个给定的常数。

(3) 当$\left|S_i \cup S_j - S_i \cap S_j\right| << \left|S_i \cap S_j\right|$时，$F(S_i) \cong F(S_j)$。

(4) 当$P(S_i) \cong P(S_j)$，$R(S_i) \cong R(S_j)$，$\left|S_i\right| \cong \left|S_j\right|$时，$F(S_i) \cong F(S_j)$。

根据以上的4条构造准则，我们构造如下启发函数。

$$F(S_i) = a \times \frac{1 + R(S_i)}{P(S_i) - 1} + b \times \frac{1}{N - \left|S_i\right|} \tag{2}$$

其中a和b是待定的参数，$N = \left|S\right|$，$L = a \times (1 + N) + b$。

下面用启发函数(2)建立集合覆盖问题的启发函数算法SCHF：

初值$COVER = \{\phi\}$，$ORIGINAL = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$；

第1步：求出使$F(S_i)$最大的S_{i0}和使$F(S_i)$最小的S_{j0}（其中S_i，S_{i0}，

$S_{j0} \in ORIGINAL$ ）；

第2步：如果 $F(S_{i0}) > L$，则 $COVER = COVER + \{S_{i0}\}$，$S = S - S_{i0}$，$ORIGINAL = ORIGINAL - \{S_{i0}\}$，否则 $ORIGINAL = ORIGINAL - \{S_{j0}\}$；

第3步：如果 $S = \phi$，则算法结束，否则返回第1步。

5.2.4 模型 I 的应用

把城市中所有路口看作是一个全集，首先暂不考虑重点部位对求解的约束，将表 1 中每个路口可到达的路口情况表转化为 0-1 矩阵，利用上面给出的 SCHF 启发式算法求解实际集合覆盖问题，得到一组最优解 $\bar{X}$。表 4 给出部分解集的 0-1 矩阵。

表 4　利用 SCHF 算法求取解集的部分 0-1 矩阵

$\bar{X}$	168	255	253	257	304	40	291	24	84	123
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
…					………………..					
305	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
306	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
307	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{C}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\bar{X}$	67	22	30	279	198	132	249	185	118	156
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
…					………………..					
305	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
306	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
307	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{C}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

输出所求的最优解在道路网图上的位置，在图 4 中，大圆圈代表警车停放位

置，可以看出警车停放的位置较均匀的散布在地图上，满足问题 1 要求。

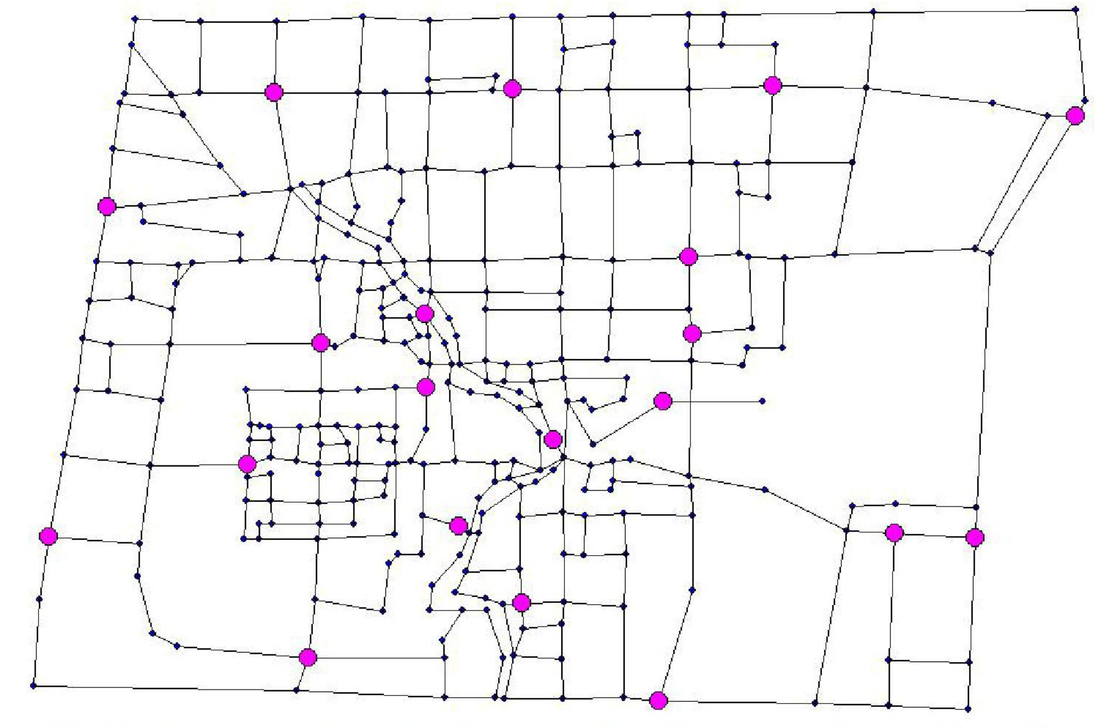

图 4　警车停放的最佳位置

在得到的最优解集合中，警车应该停放的路口的编号及路口实际坐标如下表。

表 5　最优解编号及坐标

	编号	坐标值
1	168	（8802，3168）
2	255	（432，2106）
3	253	（11952，2142）
4	257	（13505，2088）
5	304	（8748，252）
6	40	（14418，6840）
7	291	（3960， 738）
8	24	（10296，7182）
9	84	（9162，5256）
10	123	（9198，4392）

11	67	（1224，5814）
12	22	（6750，7146）
13	30	（3510，7110）
14	279	（6876，1350）
15	198	（3132，2916）
16	132	（4140，4284）
17	249	（6012，2214）
18	185	（7308，3186）
19	118	（5562，4608）
20	156	（5580，3780）

现在再考虑重点部位的覆盖问题，题中要求警车必须能在两分钟之内赶到重点部位。我们在上面得到的一组最优解中，找出离重点部位最近的警车停放位置，计算两分钟内警车能行驶的距离 $d_3 = 40\times 2/60 \approx 1.33\,(\mathrm{km})$，然后同样利用限定搜索长度为 d_3 的广度优先算法，计算出离重点部位最近的三辆警车的影响范围。如果重点部位落在这三辆警车的影响范围内，我们则认为此组解能满足问题 1 的全部要求，否则需要在重点部位处额外配置警车。

通过计算得出离重点部位最近的三辆警车的位置分别为：计算出距该三个位置路程小于 d_3 的其它点的位置，在图 5 中用大圆表示离重点位置最近的三辆警车，小圆表示这三辆警车路程小于 d_3 的影响范围内的点，正方形表示重点部位所在的位置。

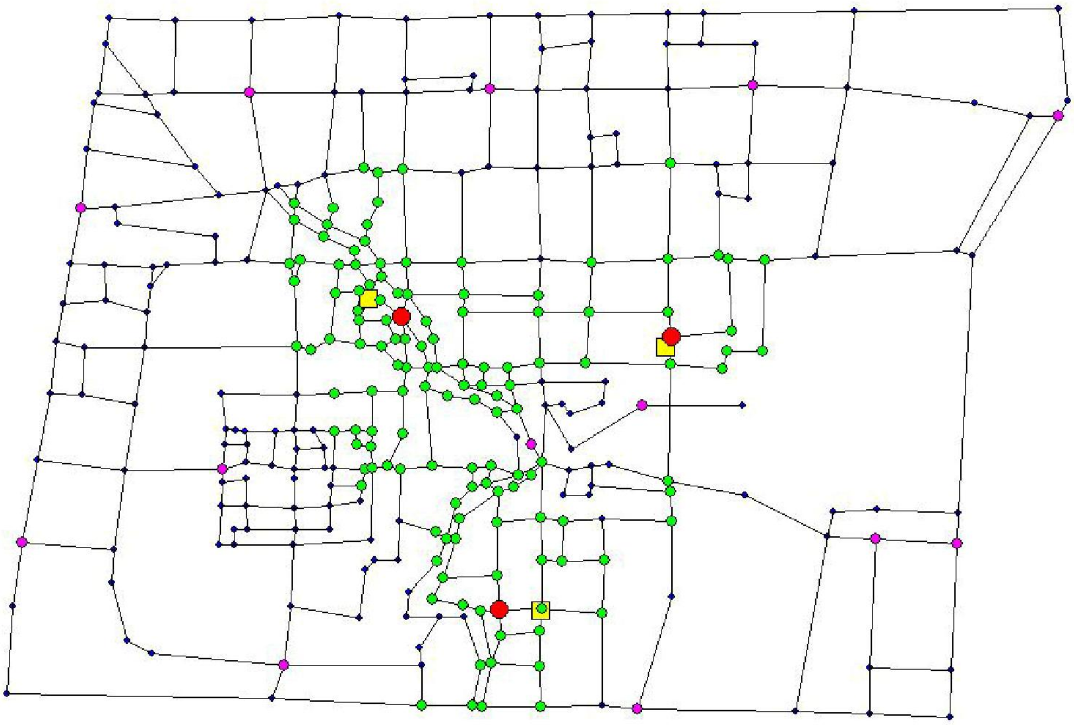

图 5　重点部位覆盖图

从图 5 中很容易观察出，三个重点位置均落在警车路程小于d_3的影响范围内，因而不需要再添加警车覆盖重点位置，表 5 的解即为满足问题 1 要求的最优解，即至少需要配置 20 辆警车。

5.3 巡逻效果评价指标

5.3.1 数据准备

为了更方便的计算巡逻效果各项评价指标，我们需要适当的简化问题模型，对原始的道路路口之间插入加密点，加密间距取警车巡逻时每分钟行驶的路程$d_2 = 20 \times 1/60 \approx 333.33$（m），得到离散化的道路数据，如图 6 所示。

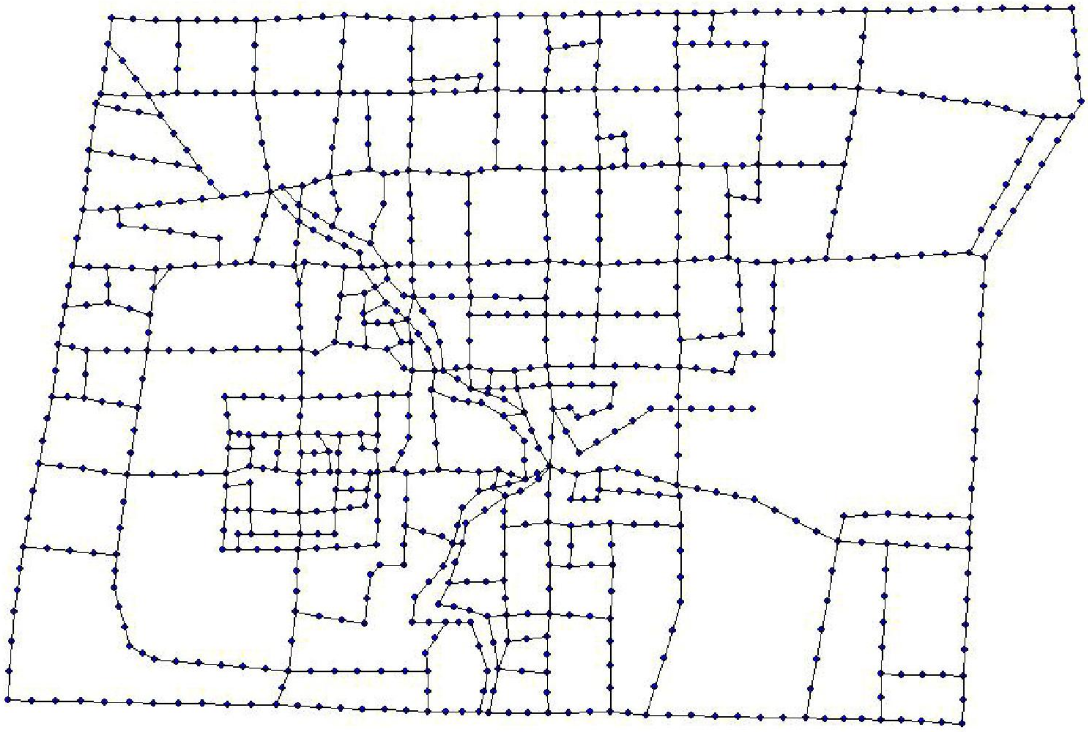

图 6 加密点后的道路网图

数据离散化之后，将所有的原始道路结点与新加密的点一同作为结点全集 S，将所有的道路结点编号，接下来的所有问题均采用此离散模型来考虑。假定所有事件均发生在结点上。

5.3.2 评价指标分析

110 警车在街道上巡弋，既能够对违法犯罪分子起到震慑作用，降低犯罪率，又能够增加市民的安全感，同时也加快了接处警（接受报警并赶往现场处理事件）时间，提高了反应时效，为社会和谐提供了有力的保障。

首先，我们假定每辆警车仅在自己的管辖范围内巡逻。显然，如果单位时间内，警车增加对某一街道的巡逻次数，则能够起到降低该街道犯罪率，增加市民安全感的作用。

同时，如果某个巡逻方案总的巡逻频率较高，但经常出现对某条街道巡逻次数过多而其他街道巡逻次数过少的情况，显然也是不可取的，为了避免这种情况，

所以需要提出一个指标值用来衡量该巡逻方案的平衡情况，即评价该方案对每条街道的巡逻次数是否做到了尽可能相等。

警车在巡逻期间也要执行一定的接警任务，能否做到最快到达任意现场也将作为一个巡逻方案重要评价指标。

最后，我们通常希望警车在单位时间内巡逻的区域尽可能的广，警车辐射的范围尽可能的大，由于在本题中警车均只能在道路上行驶，因而问题即转化为单位时间内巡逻方案使警车在巡逻时覆盖的不同的道路条数尽可能的多。

5.3.3 评价指标的建立

通过上一部分的巡逻目的的分析，拟确定以下四项评价指标来衡量某个巡逻方案的优劣：

指标 1　单位时间内每条道路被巡查平均次数

$$f_{avg} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \tag{3}$$

指标 2　单位时间内每条道路被巡查次数的标准差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{c}\left(L_j - f_{avg}\right)^2}{c}} \tag{4}$$

指标 3　事件发生后警车赶到现场所用的平均时间

$$M_i = \min\{K_{i1}, K_{i2}, K_{i3}, \cdots, K_{in}\},\quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$\bar{t} = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{c} M_i \tag{5}$$

指标 4　单位时间内所有警车对全部道路巡逻的覆盖率

$$\eta = \frac{\left|\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right|}{|I|}\text{，}\ |I|\text{表示集合 } I \text{ 中包含元素的个数} \tag{6}$$

以上四项指标，从巡逻的频率、平衡性、接处警时间以及完备性等四个方面对巡逻方案给出了全面评价。若通过改变巡逻方案能使上述指标达到更优，则说

巡逻效果更显著。

5.4 模型Ⅱ（基于结点优先级巡逻方案模型）

5.4.1 模型 II 的分析

我们结合 5.3 中提出的四个指标来考虑如何设计最优巡逻方案。

1、指标 1 要求巡逻要有较高的频率，在真实情况下，该项指标最能显著改善巡逻效果，而在本问题中，由于警车平均巡逻速度 v_0 恒定，不管选择何种巡逻方案，警车单位时间内巡查的道路数量不会有太多变动，所以该项指标在本问题中评价效果不明显，故暂不考虑此项指标对巡逻方案的影响。

2、指标 2 反映出对不同街道巡查次数的波动情况，该指标值越高说明不同街道巡查次数的公平性越差，即出现某些道路巡查过多而某些街道巡查过少的情况，因而我们设计的巡逻方案要尽可能的降低指标 2 的值。

3、由于各结点处发生事件的概率相等，要使接处警的平均时间最短，则要求各警车在动态巡逻的过程中，尽可能的分散覆盖在整个城区，联想到在问题 1 中，警车已求出一个较分散的初始位置，所以为了降低指标 3 的值，我们可以限定每辆警车仅在问题 1 中的影响范围内巡逻。

4、指标 4 从一个侧面反映出巡逻路线重复多少，一个较优的巡逻方案应该是在一定时间内尽量不重复的巡查最多的道路，从某种程度上来说，指标 4 可作为指标 2 的一个补充。

5.4.2 模型 II 的建立

综合上考虑上述评价指标在计设巡逻方案上的影响，将某一个警车影响范围提取出来单独对该辆警车巡逻方案做设计，如果能得到较优的评价指标，则将该模型推广至设计其他警车的巡逻方案，我们认为如果每辆警车均能在自己影响范

围内有一个较好的巡逻方案，则可近似认为对于全局所有警车的巡逻方案较优。

设计一个模型中每个结点一个都包含一个优先级，警车在结点上行驶，每次行驶至于其相邻的下一个结点，当警车离开某个结点后，将该结点的优先级降 1，然后警车寻找相连的优先级最高的点作为下一个要到达的点。

图 7 给出一个简单模型示例，假设从黑点处开始巡逻，每个结点的优先级初始值为 10。如果与该点相邻的结点存在多个以上优先级并列最高且的情况，则按照左上右下（顺时针）的先后顺序在优先级并列最高的点中选择下一个要到达的点。

在该示例中，从 A 点出发，由于相邻点 B、C、I 的优先级均为 10，按照左上右下的先后顺序选择选择点 B，同时 A 点的优先级减 1 变为 9。

与 B 点相邻只有 A 点，故 A 点优先级最高，选择 A 作为下一个要到达的结点。

到达 A 点后，比较相邻结点 B、C、I 的优先级，存在 C、I 两个并列优先级最高的结点，按照左上右下的先后顺序选择 C 作为下一个要到达的结点。

到达 C 点后，比较相邻结点 A、D 的优先级，显然 D 的优先级较高，故选择 D 作为下一个要到达的结点，其他情况以此类推。

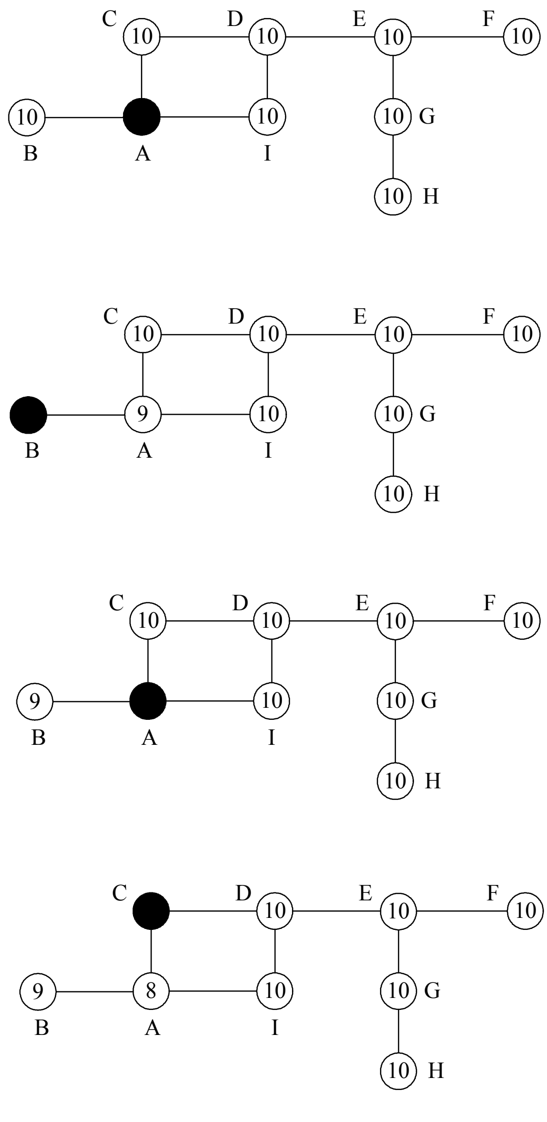

图 7　简易巡逻方案模型

由于结点每经过一次，该点的优先级就会下降，所以该方案模型迫使从某个结点出发，每次去寻找经过次数最少的结点，因而保证了经过每个结点的次数尽可能的相等，一定步数内能覆盖最多的点，使得指标 2、4 尽可能达到最优。同时，易知在连通图上采用此种巡逻方案模型，在一定步数下，总能覆盖所有的结点，不会出现某些结点的饿死现象。

每个警车的巡逻范围均为无向连通图，因而此模型适用于本问题求解，假设警车赶往下一个结点为 P'，具体实现步骤如下：

初始化每个结点的优先级为 $P_i = 0$，根据模型Ⅰ给出 20 辆警车的初始位置。

第一步：每辆警车所在结点的优先级减 1，即 $P_i = P_i - 1$；

第二步：找出每辆警车所在结点与影响范围内相邻结点中优先级最大的结点，即 $P' = \max\{P_1, P_2, \cdots, P_i\}$，如果出现多个并列优先级最大的情况，则按编号从小到大的顺序选出下一时间到达的结点；

第三步：更新每辆警车的位置，如果到达停止巡逻时间，则算法结束，否则返回第一步。

5.4.2 模型 II 的应用

利用模型 II 我们求出 20 辆警车在四个小时内的巡逻方案，每隔 1 分钟记录一次警车的位置，表 6 列出了前 24 分钟内的位置。

表 6　某辆警车针对问题 3 的部分巡逻方案

时间	警车位置	时间	警车位置
1	(10296, 7182)	13	(11604, 7446)
2	(10332, 7650)	14	(11574, 7164)
3	(9963, 7650)	15	(11508, 6882)
4	(9594, 7650)	16	(11442, 6600)
5	(9630, 7992)	17	(11376, 6318)

6	(9969, 7995)	18	(10998, 6318)
7	(10308, 7998)	19	(10620, 6318)
8	(10647, 8001)	20	(10242, 6318)
9	(10986, 8004)	21	(9810, 6300)
10	(11325, 8007)	22	(9495, 6309)
11	(11664, 8010)	23	(9180, 6318)
12	(11634, 7728)	24	(9171, 6732)

图 8 是表 6 对应到该警车在其巡逻范围内的巡逻路线。

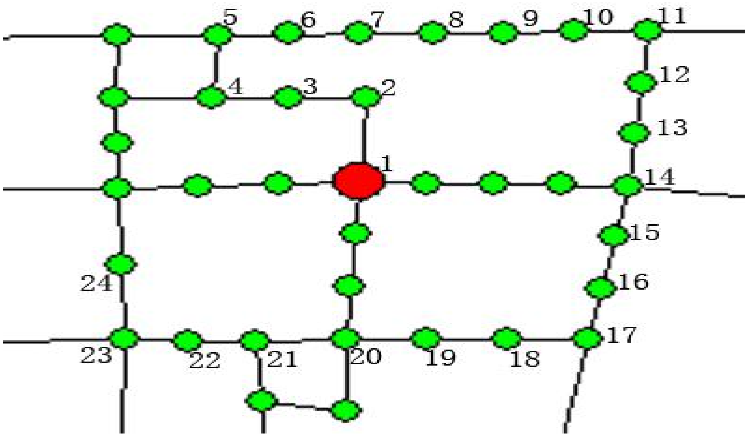

图 8　某辆警车针对问题 3 的部分巡逻路线

5.5 隐蔽性巡逻方案

5.5.1 隐蔽性巡逻方案分析

在问题 4 中，除了尽可能的满足问题 3 的条件外，还需要考虑巡逻方案的隐蔽性问题。为了避免警车的巡逻方案轻易被犯罪分子识破，所以我们设计的巡逻方案应当尽可能的复杂同时无规律可循。

由于 5.3 中提出的各项评价标准依然是衡量巡逻方案优劣的重要指标，所以在设计带隐蔽性的巡逻方案的问题上，仍可以以模型 II 为基础，通过对该模型适当改进来使巡逻更具隐蔽性。

按照模型 II 设计具体巡逻方案时，如果当前每辆警车所在结点与之相邻结点

中出现多个并列优先级最大的情况，则按编号从小到大的顺序选出下一个到达的结点。通过分析不难发现，由于每次遇到此种情况对下一个结点的选取有规律可循，如果按照此模型来设计巡逻方案，犯罪分子可以通过一段时间的观察统计来掌握警方的巡逻方案，将很大程度的影响巡逻效果。

在模型Ⅱ的基础上，要实现巡逻路线的无规律性，在遇到多个并列优先级最大的结点时，应当打破模型Ⅱ中的规律，进行随机选择，一旦随机选择了下一个到达结点，接下来的巡逻路线也会一同随机的发生改变，而这个随机选择的过程必须依赖于一个合适的随机模型。

考虑到对城区每个地点的巡逻应当等概率，因此，需要一系列服从均匀分布的离散型随机变量。因为其他分布的随机数可以利用均匀分布函数来产生，所以我们可以先建立（0, 1）均匀分布随机模型，然后再推导出均匀分布的离散型随机变量模型。

5.5.2 模型Ⅲ的建立（服从均匀分布的离散型随机模型）

产生（0, 1）均匀分布随机数的递推公式为：

$$\begin{cases} x_i = (\lambda x_i + c)(\operatorname{mod} M) \\ r_{n+1} = \dfrac{x_n}{M} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

由公式(7)可知$\{x_n\}$、$\{r_n\}$最多有 M 个相异值，即$0 \le x_n \le M$，$0 \le r_n \le M$，这表明$\{x_n\}$，$\{r_n\}$具有周期L，且$L \le M$。其中，λ、M 的选取与计算机的字长有关，种子始值x_0取奇数（如$x_0 = 1$），c是非负整数，一般取作小于 M 的任意奇数正整数，最好使其与模 M 互素。通过适当选取参数c可以改善随机数的统计性质。一般可选择如下数值：$x_0 = 1$，$\lambda = 7$，$M = 2^{36}$（$L = 2^{34} \approx 2 \times 10^{10}$）。

解决问题 4 的方案是在模型Ⅱ的基础上，如果出现多个并列优先级最大的结

点时，我们再利用模型III随机选择一个结点作为下一个到达的结点，设并列优先级最大的结点总数为 N ，所以我们在利用模型III得到（0, 1）区间上均匀分布的连续随机数后，还需要将其转化成服从均匀的离散型随机变量，变化范围从 1 到 N 。

设 $r_1, r_2, \cdots, r_N$ 是（0, 1）上均匀分布的随机数，令

$$x_i = \begin{cases} 1 & 0 < r_i \le 1/N \\ 2 & 1/N < r_i \le 2/N \\ \cdots & \cdots\cdots \\ j & (j-1)/N < r_i \le j/N \\ \cdots & \cdots\cdots \\ N & (N-1)/N < r_i \le 1 \end{cases} \tag{8}$$

则 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 服从均匀分布的离散型随机数。

5.5.2 模型III的应用

在模型II的基础上利用模型III对具有相同优先级的结点进行随机选择来实现巡逻方案的隐蔽性。我们求出 20 辆警车在四个小时内的巡逻方案，每隔 1 分钟记录一次警车的位置，表 7 列出了前 24 分钟内的位置。

表 7　某辆警车针对问题 4 的部分巡逻方案

时间	警车位置	时间	警车位置
1	(10296, 7182)	13	(10998, 6318)
2	(9918, 7170)	14	(11376, 6318)
3	(9540, 7158)	15	(11442, 6600)
4	(9162, 7146)	16	(11508, 6882)
5	(9171, 6732)	17	(11574, 7164)
6	(9180, 6318)	18	(11604, 7446)
7	(9495, 6309)	19	(11634, 7728)
8	(9810, 6300)	20	(11664, 8010)
9	(9846, 5976)	21	(11325, 8007)

10	(10242, 5922)	22	(10986, 8004)
11	(10242, 6318)	23	(10647, 8001)
12	(10620, 6318)	24	(10308, 7998)

图 9 是表 7 对应到该警车在其巡逻范围内的巡逻路线。

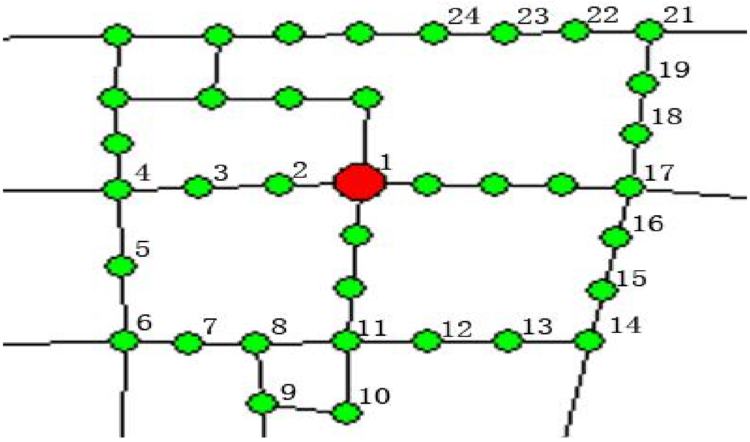

图 9　某辆警车针对问题 4 的部分巡逻路线

5.6 针对问题 5 的巡逻方案

5.6.1 问题 5 巡逻方案的建立

若在该城市仅配置 10 辆警车且能尽量满足 D1、D2，则给出警车初始点必须是均匀散布在城区。首先根据模型 I，通过实验计算，适当增大搜索路长至 $d_1 = 3250\,\text{m}$，可以得到$|S_{cvr}|$=10，此时 10 辆警车均匀分布在城区。考虑到警车在巡逻时能尽量满足 D1、D2，在设计巡逻方案的时候应该从全局考虑，即任意时刻 10 辆警车应尽量均匀分布改地区，所以在模型II的基础上提出一种全局巡逻方案。

该方案改进的方面在于 10 辆警车不再有固定的巡逻范围S_i，实际上此时每辆车的S_i均为S，即每辆警车的巡逻范围都为整个城区。为简化算法描述，下面给出其中一辆警车巡逻方案的建立，假设警车赶往下一个结点为P'具体实现步骤如下：

初始化每个结点的优先级为 $P_i = 0$，根据模型 I 给出 10 辆警车的初始位置。

第一步：每辆警车所在结点的优先级减 1，即 $P_i = P_i - 1$；

第二步：找出道路网图中每辆警车所在结点与之相邻结点中优先级最大的结点作为下一时间到达的结点，即 $P^{'} = \max\{P_1, P_2, \cdots, P_i\}$；

第三步：更新每辆警车的位置，如果到达停止巡逻时间，则算法结束，否则返回第一步。

5.6.2 问题 5 巡逻方案的应用

与 5.3 提出的算法相比该改进算法从全局考虑巡逻策略，尽可能的去满足在警车不足的情况下，能够均匀巡逻每个街道。

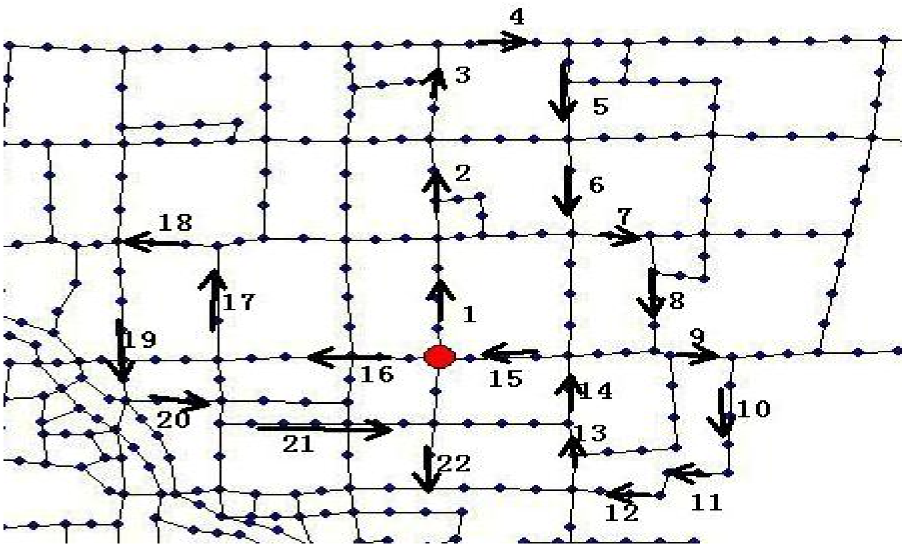

图 10　某辆警车针对问题 5 的部分巡逻路线

5.7 问题 6 的分析与求解

问题 6 中警车接警后的平均行驶速度由原来的 40km/h 提高到 50km/h，则需要重新计算 $d_0 = v_0 \times t = 50 \times 3/60 = 25\,(\text{km})$，$d_1 = d_0/90\% \approx 2.78\,(\text{km})$。根据模型 I 求解得所需警车数目为 15 个。具体巡逻位置数据见附件。评价指标将在模型的评价与推广中给出。

5.8 其它待考虑的因素及解决方案

5.8.1 待考虑因素

本文为了简化问题模型，在问题没作要求的情况下，假定在每条道路发生事件的概率相等，而现实生活中，往往存在某些地段的犯罪事件发生概率高于其它地区的情况。考虑到以上分析的模型在道路上发生的事件是等概率的，而在现实生活中，存在着某些地段的事件发生概率要比其他地方较高的情况。在频发事件的地点，如果在警车数量配置和巡逻路线上采取与普通路段一样的策略巡弋，而不偏重于该频发地点，则很难达到降低犯罪率的目的，因此在对巡逻方案建模时，还需考虑此因素。

5.8.2 解决方案

为了使巡逻效果更加显著，我们可以统计出一段时间内每条道路上发生犯罪事件的次数a_i，这段时间内整个城区发生犯罪事件的次数记为A，则每条道路上发生的犯罪事件在总事件中的比例为$c_i = \frac{a_i}{A}$。

在对模型Ⅰ建模时，我们可将c_i作为权值引入。在整个解空间中，选择某个使$v = \min \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} x_j$最小的解作为最优解。

在考虑巡逻方案的评价指标时，可以调整某些评价函数，使得评价指标更能客观的反映出巡逻方案的优劣，如可将指标 3 的公式(5)调整为$\bar{t} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{c} c_i M_i$。

6 模型的评价与推广

6.1 模型的评价

6.1.1 巡逻方案评价指标结果分析

根据图 2 统计平均值，在对下面各项指标值的计算中，均取 72 分钟为单位时间。根据 5.3.3 中的公式(3)~(6)，分别计算出问题 3、4、5、6 各项指标值如表 8 所示。

表 8　各种巡逻方案的评价指标值

	警车数目	指标 1 (f_{avg})	指标 2 (σ)	指标 3 ($\bar{t}$)	指标 4 (η)
问题 3	20	2.066	1.972	1.464	0.786
问题 4	20	2.066	1.798	1.481	0.801
问题 5	10	2.066	1.678	2.284	0.900
问题 6	15	2.066	2.092	1.788	0.749

观察表 8 可知，问题 4 中的指标 2、4 均优于问题 3，说明问题 4 采用的巡逻方案使对每条街道的巡逻次数更均匀，而且一定时间内能巡查更多的街道。由此可以认为模型III的随机模型对巡逻方案设计的优化产生了显著的影响。

在设计问题 3、4、6 的巡逻方案中，采用了分区巡逻的方式，通过局部最优来实现全局最优。在设计问题 5 的巡逻方案时，考虑到给定的警车数目较少，所以每辆警车不再采用分区巡逻的方式，在模型 II 的基础上，问题 5 的巡逻方案让警车实现了整个城区范围内的自由巡逻，使指标 2、4 优于问题 3、4、6 的相应指标，但由于警车数目较少，问题 5 给定的条件导致指标 3 的值较差。

问题 6 中，因为警车接警后的行驶速度提升，在满足 D1、D2 的条件下，所需的警车数目比问题 3、4 少，在警车数目减少而平均巡逻速度不变的情况下，导致巡逻方案指标 2、3、4 均劣于问题 3、4 的相应指标。

6.1.2 问题 5 方案中存在的问题

问题 5 中采用的方案让每辆警车在整个城区范围内的自由巡逻，由于限定的警车数目较少，一般不会出现同一时刻同一结点上有多辆警车巡逻的现象，但是算法中没有排除这种可能。如图 11 所示，当前时刻警车 C1-C5 欲巡逻结点 D~H， C6、C7 欲巡逻 A 结点，显然此时出现同时刻 C6 与 C7 同时巡逻结点 A 的现象。

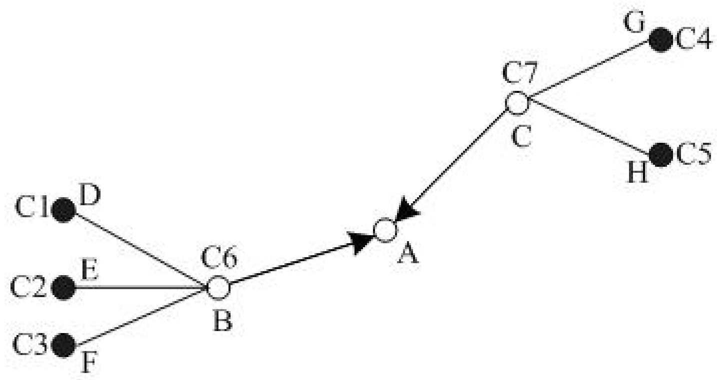

图 11　巡逻冲突示意图

理论上可以得出，警车比较少且地区道路拓扑比较紧密的情况下，可以在全局巡逻算法基础上加上解决可能出现这种情况的策略，用以避免出现同一时刻同一结点上有多辆警车巡逻的现象。解决策略比如在上述算法步骤三中添加判断是否存在重复结点，若存在可让存在冲突的警车再选取其他结点的方法来避免。

6.2 模型的推广

在设计模型 I 时，把实际问题转化成集合覆盖模型，采用启发式 SCHF 算法求解主要基于以下两个优点：

1、时间复杂度低。文献[1]中给出了对该算法时间复杂度上限为 $O\left(mn^2+n^3\right)$ 的证明，其中 m 为 S_i 基数的最大值，n 为 S 中包含集合的个数。在问题 1 中 $m<307$，$n=307$。相比其它求解算法，如利用 Floyd 求解问题 1 时间复杂度将达到 $O\left(n^4\right)$，因而本算法有较高的求解效率。

2、适用于一般性此类问题的求解。该方法不针对特定数据，对于任何一般性此类问题，均能得到最优解或近似最优解。如在问题 6 中，由于提高了接警后警车的行驶速度，搜索路长改变后，该方法依然可以求得所需警车的最小数目，为了进一步论证该方法对问题适用的普遍性，我们统计出问题 1 中随着搜索路长的变化，所需警车最小数目的变化情况，如表 9 所示。

表 9　模型 I 中出搜索路长与警车数目的关系

搜索路长	警车数目	搜索路长	警车数目
0	307	2000	20
200	242	2200	19
400	147	2400	16
600	95	2600	16
800	72	2800	13
1000	53	3000	12
1200	44	3200	11
1400	35	3400	9
1600	28	3600	8
1800	22	3800	8

利用此表的信息得到的 MATLAB 统计图如图 12 所示。

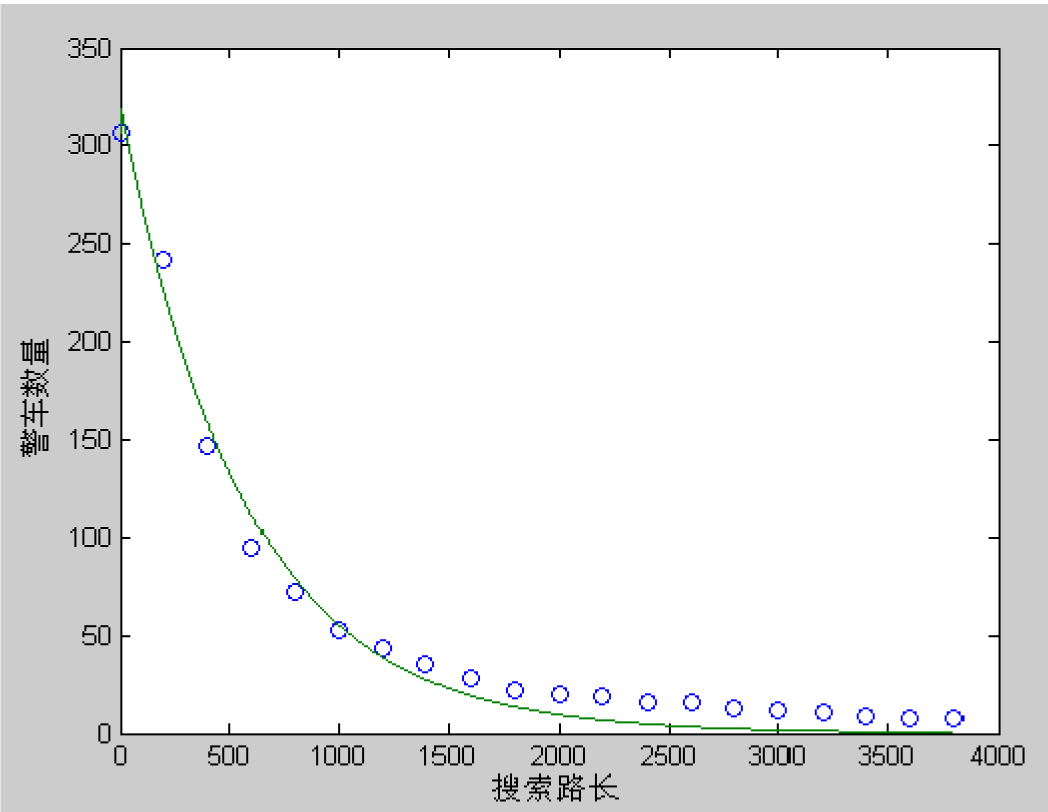

图 12　模型 I 中出搜索路长与警车数目关系统计图

图中小圆圈代表搜索路长与警车数目关系的原始数据，曲线代表拟合后的搜

g

索路长与警车数目的非线性回归方程$n = 321.2904 \times \mathrm{e}^{-0.0018 d_1} - 14.2904 \times \mathrm{e}^{-d_1}$，可见随着搜索路长的增加，所需要的警车数量快速收敛于 1，验证了模型Ⅰ的正确性与普遍性，因而可以推广到对任意给定的搜索路长的求解。

参考文献

[1] 权光日、洪炳熔、叶风等，集合覆盖问题的启发函数算法，软件学报，9(2)：156-160，1998。

[2] 陈端兵、黄文奇，一种求解集合覆盖问题的启发式算法，计算机科学，34(4)：133-136，2007。

[3] 薛毅，数学建模基础，北京：北京工业大学出版社，2004。