

债券组合投资方案设计

2020 年，新冠肺炎全球蔓延，严重影响了世界福祉。为刺激经济发展，M 国计划发行各类代号为“拯救地球”的国家紧急债券（SEB）。债券到期年限有 2、3、4、5、9、12、15、18、20、25 年等十种，债券每年初发行，发行时间为 2021-2049 年。债券每年末兑现，兑现有效截止时间为 2050 年。债券服务范围涵盖医药健康、交通运输、科技研发、装备制造、国民福利五大领域。债券到期后，允许债券购买者所在的地方政府收取税率不等的税收。债券类型、到期年限、收益率、税收比率等见表 1。

未来教育基金会（以下称 FFE）计划在 2050 年前（含 2050 年）向 M 国部分高等院校捐助一笔经费以帮助贫困学生。为了增加捐助金额，FFE 将现有的 8000 万美元资金进行债券投资。为谨慎起见，FFE 委托风险机构对各类债券进行了风险等级评估。同时，FFE 还制定了投资要求：①医药健康债券购买金额不得少于债券购买总金额的 20%，其余每个行业的债券购买总金额不得少于债券购买总金额的 10%；②所购债券的平均风险等级不得低于 2.5，等级数字越大，风险越低；③要求所购买的债券的平均到期年限不超过 10 年；④要求捐助活动结束后 FFE 继续保留 8000 万美元资金。

请你建立数学模型，解决下列问题：

1. 若 SEB 债券投资只允许在第一年初进行，那这些投资将分别在第 2、3、4、5、9、12、15、18、20、25 年收回本金和收益。请问，8000 万美元资金如何分配，使得 15 个产品的总收益达到最大？

2. 假定可以进行重复投资，即当债券到期后，只要在 2050 年前（包含 2050 年）能够回收本金和收益就可以进行再次投资。请你帮助 FFE 拟定一个 2021-2049 年的投资债券详细方案，使得 2050 年末的一次性捐款金额达到最大。

3. FFE 改变捐助方式，计划从 2021 开始，在未来 30 年内每年年初向 M 国部分高等院校捐助一笔每年金额固定的经费。允许重复投资。请你再次帮助 FFE 拟定一个 2021-2049 年的投资债券详细方案，使得每年捐助的金额达到最大。

4. FFE 为了帮助疫情防控，决定在每年捐助给高校的金额尽量不低于第 3 问的金额的前提下，投资尽量向医药健康和科技研发上倾斜。原则上规定：医药健康的投资额，尽量与科技研发相等，尽量是交通运输的 1.2 倍，尽量是装备制造的 1.5 倍，尽量是国民福利的 2 倍。允许重复投资。请你重新为 FFE 设计投资策略。

表 1 各类债券及其属性

债券领域	风险等级	地方政府税率（%）	到期年限	到期税前总收益（%）
医药健康	5	0	2	4.45
			9	39.89
			20	232.11
交通运输	2	20	3	8.0
			12	58.27
			25	300.54
科技研发	4	0	4	12.55
			15	180.09
			20	232.11
装备制造	3	10	4	12.55
			9	39.89
			18	206.12
国民福利	1	30	2	4.45
			5	18.77
			18	206.12

注：，假定单张债券金额无限小。