

全国第五届研究生数学建模竞赛



题 目 汶川地震中唐家山堰塞湖泄洪问题研究

摘 要：

本文首先根据库容量和水位高程的变化关系建立了一个库容量计算模型，得出库容量和水位高程符合指数关系，再根据降水量和水位高程变化的关系建立了降水量模型，分析了降水量对堰塞湖水位的影响，并给出了 50%、80%、100%、150%各种降水情形下的水位变化。

然后利用新闻媒体搜集的数据建立了一个逐渐溃坝模型，该模型包括溃口计算模型，水流量计算模型和库容计算模型，包含了溃口宽度、深度、水流速度、水量、水位高程，时间等变量，并根据该模型计算了唐家山堰塞湖发生漫顶逐渐溃坝时的各种变量的数据。

根据河道内质量守恒定律和能量守恒定律，在假设河道分段逐渐变化的前提下推导得到了溃坝推演模型，并给出了模型的离散形式，在已知河道信息和溃坝处信息情况下的迭代推算方法，并将溃坝推演模型用来推测唐家山发生 1/3 溃坝时的水流速度变化和水面高度变化，并提示了可能被洪水淹没的地区。

最后根据本文中的模型分析了当时采取的政策和方案，并提出了我们的建议。

一、问题的提出

2008 年 5 月 12 日 14:28 在我国四川汶川地区发生了 8.0 级特大地震，给人民生命财产和国民经济造成了极大的损失。地震引发的次生灾害也相当严重，特别是地震造成的 34 处高悬于灾区人民头上的堰塞湖，对下游人民的生命财产和国家建设构成巨大威胁。加强对震后次生灾害规律的研究，为国家抗震救灾提供更有力的科学支撑是科技工作者义不容辞的责任。

唐家山堰塞湖是汶川大地震后山体滑坡后阻塞河道形成的最大堰塞湖，位于岷河上游距北川县城 6 公里处，是北川灾区面积最大、危险最大的堰塞湖，其堰塞体沿河流方向长约 803 米，横河最大宽约 611 米，顶部面积约为 30 万平方米，主要由石头和山坡风化土组成。由于唐家山堰塞湖集雨面积大、水位上涨快、地质结构差，溃坝的可能性极大，从最终的实际情况看，从坝顶溢出而溃坝的可能性比其它原因溃坝的可能性大得多。

经过专家分析，采取有效措施，最终完成了唐家山堰塞湖的成功泄洪。当时的科技工作者记录了大量的珍贵数据，新闻媒体也对唐家山堰塞湖进展情况进行了及时的报道，通过对这些数据的收集（由于数据来源不同，数据有些冲突，以新华社报道的相关数据为准），我们对堰塞湖及其泄洪规律进行了初步研究，完成以下工作：

1. 建立唐家山堰塞湖以水位高程为自变量的蓄水量的数学模型，并以该地区天气预报的降雨情况的 50%，80%，100%，150% 为实际降雨量预计自 5 月 25 日起至 6 月 12 日堰塞湖水位每日上升的高度（不计及泄洪）。（由于问题的难度和实际情况的复杂性及安全方面的考虑，没有充分追求模型的精度，以下同）；

2. 唐家山堰塞湖泄洪时科技人员记录下了大量宝贵的数据。我们在合理的假设下，利用这些数据建立堰塞湖蓄水漫顶后在水流作用下发生溃坝的数学模型，模型中包含缺口宽度、深度、水流速度、水量、水位高程，时间等变量。

3. 根据数字地图，给出坝体发生溃塌造成堰塞湖内 $\frac{1}{3}$ 的蓄水突然下泻时（实际上没有发生）的洪水水流速度及淹没区域（包括洪水到达各地的时间），并在此基础上考虑洪水淹没区域中人口密集区域的人员撤离方案。

4. 根据我们所建立的数学模型分析当时所采取对策的正确性和改进的可能性。讨论应对地震后次生山地灾害（不限堰塞湖），科技工作中应该设法解决的关键问题，并提出有关建议。

二、符号说明

W : 堰塞湖内蓄水量, 即总库容, 单位: 亿立方米

$H(t)$: 坝前水位高程, 单位: 米

H_{b0} : 堰塞湖底部高程, 常数 = 667.4 米

$h_L(t)$: 堰塞湖内水深, 单位: 米

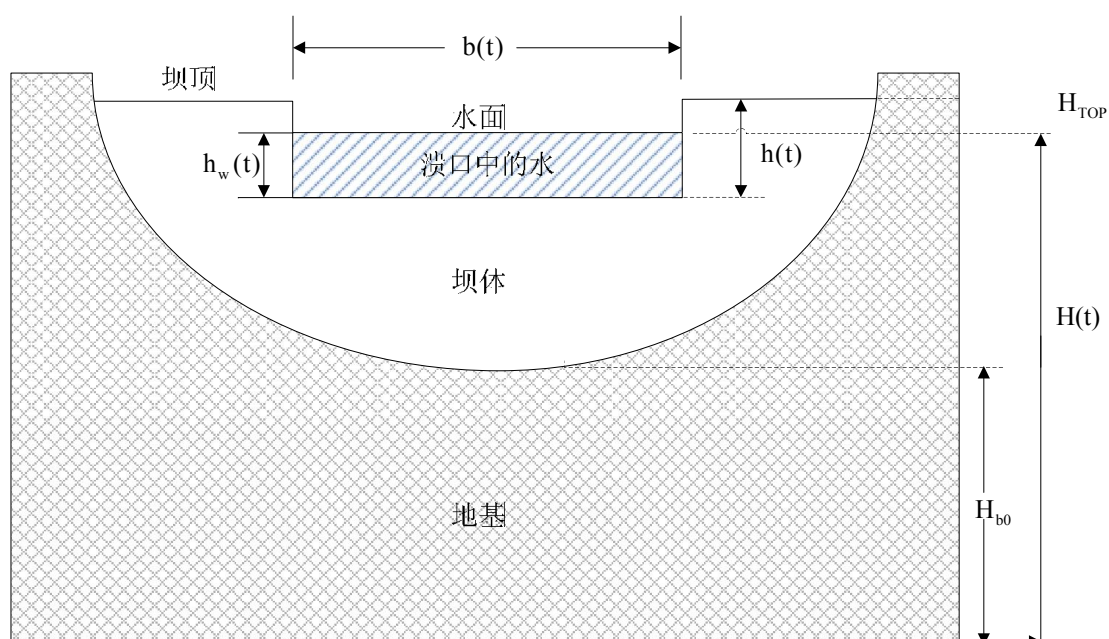
$R(t)$: 堰塞湖每天的新增水量, 单位: 亿立方米

$J(t)$: 第 t 天的降雨量, 单位: 毫米

$b(t)$: 泄流槽的宽度, 单位: 米

$Q_{IN}(t)$: t 时刻的单位入湖流量, 单位: 立方米/秒

$Q_{OUT}(t)$: t 时刻的单位泄流量, 单位: 立方米/秒



三、模型的建立与求解

1. 总蓄水量与坝前水位高程的数学模型

1.1 一般模型

一般情况下，在截面积规则的情况下，蓄水量可用水深的二次方或三次方来进行描述，但由于唐家山堰塞湖湖体结构复杂，其蓄水量不能用其水深的二次方或三次方进行简单描述。根据报道中搜集的所有数据，可以基本确定总蓄水量 W 与水深 h_L 存在指数关系，假定：

$$W = ah_L^n \quad (1.1)$$

其中， a 与 n 为库容特性系数。

根据新华社报道“唐家山堰塞湖坝顶高程 750.2 米，坝高 82.8 米”，可以假设堰塞湖的底部高程 $H_{b0} = 750.2 - 82.8 = 667.4$ 米，从而可以得出湖内水深与坝前水位高程 H 的关系为：

$$h_L = H - H_{b0} \quad (1.2)$$

由方程 (1.1)、(1.2) 联立可以得出总蓄水量与坝前水位高程的数学模型为：

$$W = a(H - H_{b0})^n \quad (1.3)$$

将方程 (1.3) 两边取对数，方程变换为：

$$\ln(W) = \ln(a) + n \times \ln(H - H_{b0}) \quad (1.4)$$

根据所给的总蓄水量 W 与相应坝前水位高程 H 的实际数据，计算相应的 $\ln(W)$ 与 $\ln(H - H_{b0})$ ，对方程 (1.4) 进行线性拟合，可以得出参数 a 与 n 的最优解。

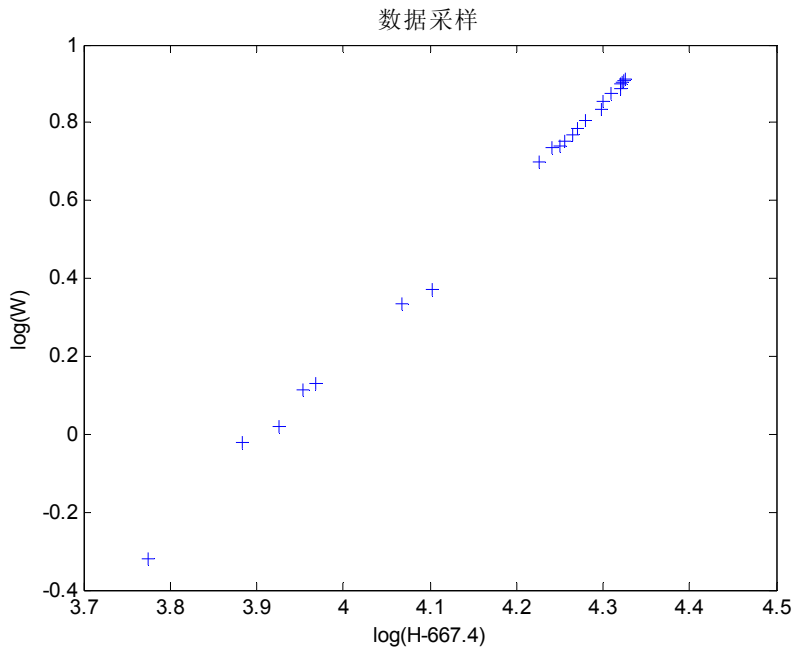


图 1 蓄水量与水位高程采样点数据（取对数处理后）

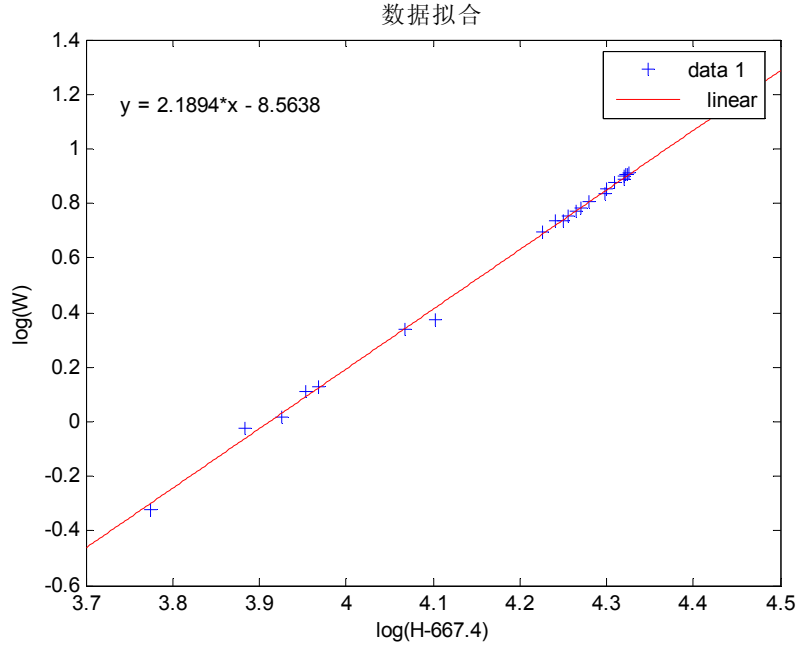


图 2 采样点数据的数据拟合

拟合结果：

$$n = 2.1894$$

$$\ln(a) = -8.5638 \Rightarrow a = 1.9089 \times 10^{-4}$$

$$\text{残差} = 0.07455$$

故可以得出最终的总蓄水量 W 与坝前水位高程 H 的数学模型为：

$$W = 1.9089 \times 10^{-4} \times (H - 667.4)^{2.1894} \quad (1.5)$$

1.2 降雨模型

为了预测降雨给堰塞湖水位带来的影响，首先根据实际的降雨量建立降雨-水位模型。经过分析，我们认为，第 n 天（假设 5 月 25 日是第 1 天）之后堰塞湖每日的新增水体主要来自于以下几个方面：

- (1) 前 24 小时直接落在堰塞湖面的降雨 $R_a(t)$ ；
- (2) 周围山体的降雨经过一定的延时后汇入堰塞湖而形成的水体 $R_b(t)$ ；
- (3) 上游地区的积雨经过一定的延时后流入堰塞湖的水体 $R_c(t)$ ；
- (4) 河流上游正常流入湖体的水体 $R_d(t)$ ；

根据附件 1 提供的数据，我们采用了每天早上 8 点的堰塞湖水位数据，这样 (1)、(2) 部分主要考虑的是前一天晚上和前一天白天的降雨带来的影响，而假设 (3) 部分即上游的积雨要经过一天的时间汇入堰塞湖，这样，(4) 部分主要考虑的是前 48 小时到前 24 小时的降雨带来的影响。附件一给出的降雨量值，有的分为白天和晚上的降雨量，这里均转换成了一天的降雨量。

每部分的模型分别如下：

(1) 对于 $R_a(t)$ ，假设堰塞湖面积为 S_1 ，前 24 小时的降雨量为 $J_1(t-1)$ ，那么可得以下关系式：

$$R_a(t) = S_1 \times J_1(t-1) \quad (1.6)$$

这里，由于堰塞湖处于北川境内，所以 $J_1(t)$ 用北川的降雨量来计算。

(2) 对于 $R_b(t)$ ，假设周围山体集雨面积为 S_2 ，前 24 小时的降雨量为 $J_2(t-1)$ ，最终汇入堰塞湖的雨水占山体总集雨的比例为 η_2 ，那么：

$$R_b(t) = \eta_2 \times S_2 \times J_2(t-1) \quad (1.7)$$

这里，山体和堰塞湖同处一个地区，所以 $J_2(t)$ 仍用北川的降雨量来计算。而且由下面的卫星照片看出山体的面积远远大于堰塞湖本身的面积，所以这一部分的雨量对于堰塞湖水位上涨的贡献量较大。



图3 唐家山卫星图片

(3) 对于 $R_c(t)$ ，由下面的行政图可以看出，茂县处于唐家山堰塞湖的上游。设其面积为 S_3 ，一天前的降雨量为 $J_3(t-2)$ （这里假设上游的雨水经过了一天的流程到达唐家山，所以用的是前 48 至前 24 小时的降雨量），最终汇入唐家山的雨水占茂县总集雨的比例为 η_3 ，得到：

$$R_c(t) = \eta_3 \times S_3 \times J_3(t-2) \quad (1.8)$$



图4 唐家山地区行政图

(4) 对于 $R_d(t)$ ，这里定义的是上游河流的正常流入量（即不考虑降雨因素），

所以假设它是一个不随时间变化的常数。即

$$R_d(t) = C \quad (1.9)$$

这样，堰塞湖每天的新增水量为：

$$\begin{aligned} R(t) &= R_a(t) + R_b(t) + R_c(t) + R_d(t) \\ &= S_1 \times J_1(t-1) + \eta_2 \times S_2 \times J_2(t-1) + \eta_3 \times S_3 \times J_3(t-2) + C \\ &= (S_1 + \eta_2 \times S_2) \times J_1(t-1) + \eta_3 \times S_3 \times J_3(t-2) + C \end{aligned} \quad (1.10)$$

上式中， S_1 、 η_2 、 S_2 、 η_3 、 S_3 、 C 均为常量，令

$$\begin{aligned} p_1 &= S_1 + \eta_2 \times S_2 \\ p_2 &= \eta_3 \times S_3 \\ p_3 &= C \end{aligned} \quad (1.11)$$

则式(1.10)变为：

$$R(t) = p_1 \times J_1(t-1) + p_2 \times J_3(t-2) + p_3 \quad (1.12)$$

而堰塞湖每天新增水的体积与湖水的水位有关，根据式(1.3)可得：

$$\begin{aligned} R(t) &= a \times [H(t) - H_{b0}]^n - a \times [H(t-1) - H_{b0}]^n \\ &= p_1 \times J_1(t-1) + p_2 \times J_3(t-2) + p_3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

根据附件一中的数据，可以得到一系列 $H(t)$ 、 $J_1(t)$ 、 $J_2(t)$ 的实际数值，通过与蓄水量-水位高程曲线拟合，得到参数 p_1 、 p_2 、 p_3 的最佳值分别为 0.0025，0.0028，0.0649。

经过转换可以得到 $H(t)$ 与降雨量之间的关系为：

$$H(t) = e^{\frac{\ln[s + (H(t-1) - H_{b0})^n]}{n}} + H_{b0} \quad (1.14)$$

$$\text{其中：} \quad s = \frac{p_1 \times J_1(t-1) + p_2 \times J_3(t-1) + p_3}{a}$$

$$p_1 = 0.0025, p_2 = 0.0028, p_3 = 0.0649$$

$$a = 1.9089 \times 10^{-4}, n = 2.1894$$

$$H_{b0} = 667.4$$

由式(1.14)，通过迭代可以预测出降雨量为实际降雨量的 50%、80%、100%、150%时的水位高程变化情况。

下面分别是预测出的每日水位高程图：

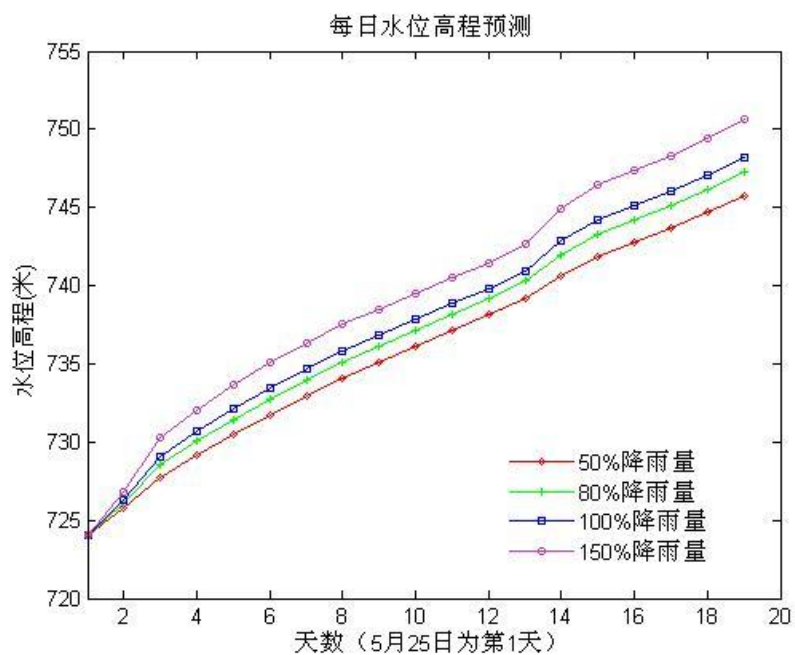


图5 各个降雨量时水位高程预测图

由上图可以看出，当降雨量为实际的100%时，至6月12日，水位高程已经达到了坝顶。而当降雨量为实际的150%时，水位高程会超过750.2米的坝顶，这时很容易造成溃坝的发生。

下面分别是预测出的每日水位上升图：

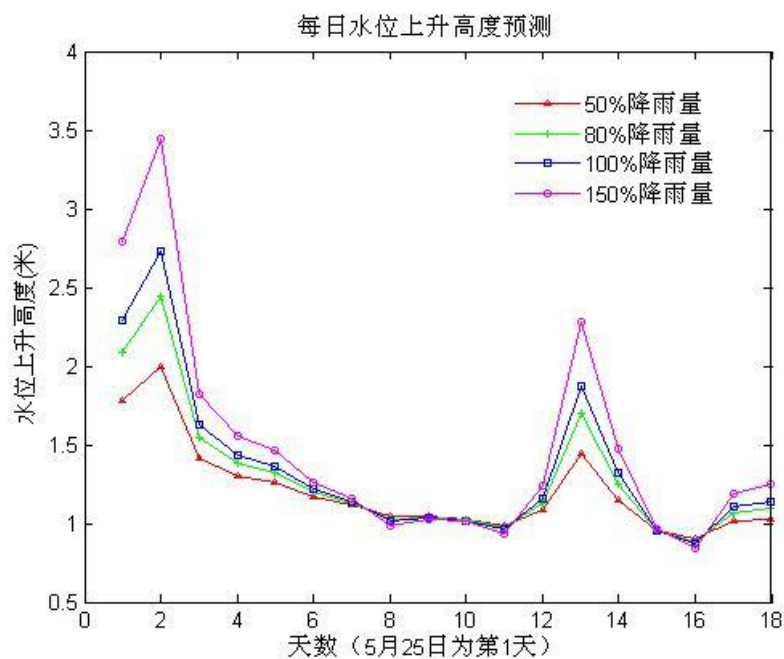


图6 各个降水量时每日水位上升预测图

2. 蓄水漫顶后发生溃坝的数学模型

在这里，我们要根据唐家山堰塞湖泄洪时科技人员记录下的大量宝贵数据，在合理的假设下建立堰塞湖蓄水漫顶后在水流作用下发生溃坝的数学模型，模型包括缺口宽度、深度、水流速度、水量、水位高程，时间变量。

溃坝过程可以简单描述如下：

在上游不断的有水流和雨水流入堰塞湖的作用下，湖内水位不断上升，当水位超过坝顶时，湖内的水将漫过坝顶不断向下游流去。在水流流过坝顶时，水流也会逐渐的侵蚀大坝，带走部分土石，从而形成一个的缺口，即泄流槽，为简化后面的计算，这里我们假设泄流槽的截面形状为矩形。随着泄流槽内水流的不断加大，泄流槽也会不断地加宽加深，从而进一步促进了泄流流量的增大，形成了一个正反馈的机制，即泄流槽的宽度与深度变化量与泄流流量成正比例关系，但是堰塞湖内的水量会随着泄流量的增大而不断减少，最终限制了泄流量的进一步增加。

另外，泄流槽在增大到一定宽度和高度时，会因为大坝本身的结构限制其进一步加宽或加深，由附件二中的数据发现，当大坝宽度达到 145 米时，宽度不再增加，而是逐步加深。这里我们假设在逐渐溃坝时泄流槽的宽度极限为 145 米。

在单位时间内，堰塞湖中的水量的变化等于入水量与出水量之差，即

$$\frac{\partial W(t)}{\partial t} = Q_{IN}(t) - Q_{OUT}(t) \quad (2.1)$$

其中： $W(t)$ 表示总水量；

Q_{IN} 表示单位时间内流入堰塞湖的水量；

Q_{OUT} 表示单位时间内流出堰塞湖的水量，即泄流量；

溃坝时，水流不断冲刷着坝体，并带走坝体的泥沙，造成泄流槽缺口的不断地拉宽、变深，根据带走泥沙的量可以列出以下方程式：

$$\rho \int_0^t Q_{OUT}(t) dt = c \times b(t) \times h(t) \quad (2.2)$$

其中： $Q(t)$ 表示 t 时刻的泄流量；

ρ 表示泄出水量的平均含砂量；

$b(t)$ 、 $h(t)$ 、 c 分别表示 t 时刻泄流槽的宽度、深度和顺河长度，顺河长度为一常数，由实际数据可知 $c = 803$ 米

另外，泄流量可以用泄流槽的宽度与高及相应的水流速度的乘积来表示：

$$Q_{OUT}(t) = v(t) \times b(t) \times h_w(t) \quad (2.3)$$

其中： $v(t)$ 表示 t 时刻的水流速度；

$b(t)$ 表示 t 时刻的泄流槽宽度；

$h_w(t)$ 表示 t 时刻的泄流槽中的水深；

将式 (2.1)、(2.2)、(2.3) 与式 (1.3) 联立可以得到初步的蓄水漫顶后发生溃坝的数学模型

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = Q_{IN}(t) - Q_{OUT}(t) \\ \rho \int_0^t Q_{OUT}(t) dt = c \times b(t) \times h(t) \\ Q_{OUT}(t) = v(t) \times b(t) \times h_w(t) \\ W = a(H - H_{b0})^n \end{cases} \quad (2.4)$$

蓄水漫顶后发生溃坝的数学模型分以下几个部分：

(1) 水位高程计算模型

将方程组 (2.4) 中的方程 4 代入方程 1 中，另外 $Q_{IN}(t)$ 每天的变化率并不大，这里假设 $Q_{IN}(t)$ 为常数，根据附件二中的数据（6 月 9 日 8 时的数据），取为 $115 \text{ m}^3/\text{s}$ ，可以得到坝前水位高程与泄流量的关系式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= a \times n \times (H - H_{b0})^{n-1} \times \frac{\partial H}{\partial t} = Q_{IN} - Q_{OUT}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{Q_{IN} - Q_{OUT}(t)}{a \times n \times (H - H_{b0})^{n-1}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

由于 $Q_{OUT}(t)$ 相对时间的变化不是特别的明显，所以假设单位时间内（这里取为 1 分钟） $Q_{OUT}(t)$ 的值为常数，上式两边同时乘以单位时间得到：

$$\Delta H = H(t+1) - H(t) = \frac{(Q_{IN} - Q_{OUT}) \times \Delta t}{a \times n \times (H(t) - H_{b0})^{n-1}} \quad (2.6)$$

(2) 泄流槽形状计算模型

将方程组 (2.4) 中的方程 2 两边对 t 求导可得：

$$\begin{aligned} \rho \times Q_{OUT}(t) &= \frac{d(c \times b(t) \times h(t))}{dt} \\ &= c \times b(t) \times \frac{d(h(t))}{dt} + c \times h(t) \times \frac{d(b(t))}{dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

根据附件二中附件中所提供的的缺口数据，得出泄流槽的宽度变化率 $\frac{d(b(t))}{dt}$ 与深度变化率 $\frac{d(h(t))}{dt}$ 之间有如下关系：

$$\frac{d(b(t))}{dt} = 6 \times \frac{d(h(t))}{dt} \quad (2.8)$$

将式 (2.8) 代入式 (2.7) 中可得

$$\rho \times Q_{OUT}(t) = c \times (6 \times h(t) + b(t)) \times \frac{d(h(t))}{dt} \quad (2.9)$$

ρ 为平均含砂量，可以根据附件二中所给数据求出，以下为求 ρ 值得简单过程

$$\rho = \frac{c \times b(t) \times h(t)}{\int_0^t Q_{OUT}(t) dt} \quad (2.10)$$

将实际数据代入式（2.10）中，可以得到各点的 ρ 值，具体见图7

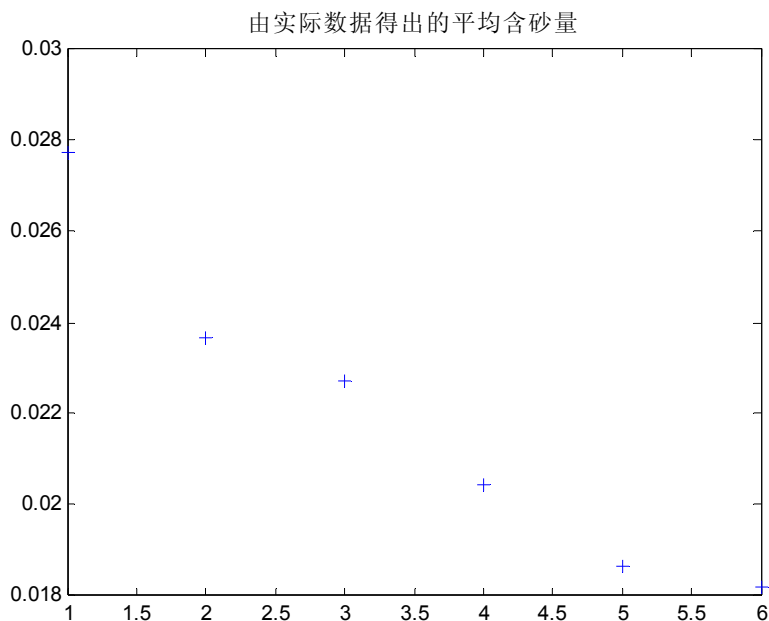


图7 平均含砂量

观测各点 ρ 值，并通过理论分析，可以发现 ρ 值与泄流槽内的水深成线性关系，经过线性拟合^[1]，得到：

$$\rho = 9.5717 \times 10^{-4} \times h(t) + 0.016442 \quad (2.11)$$

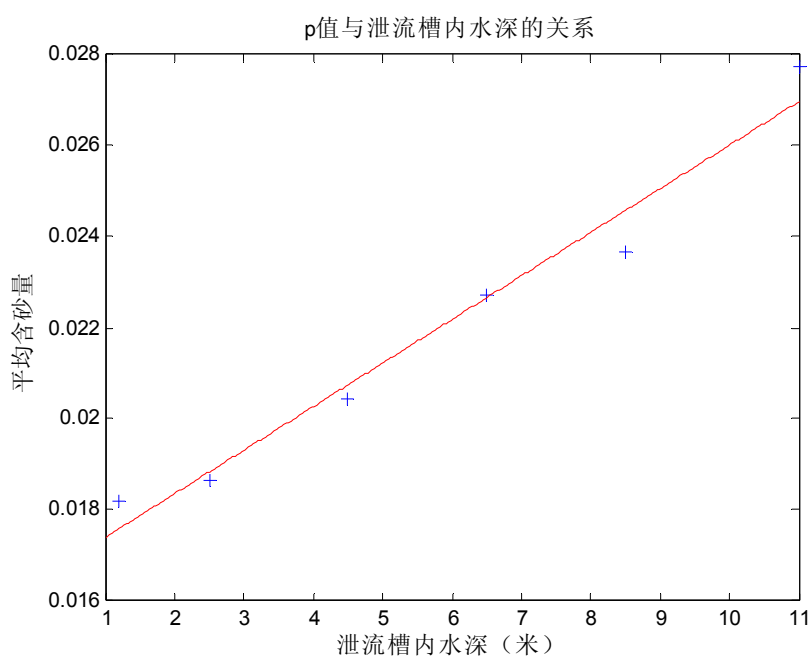


图 8 泄流槽深度示意图

将 ρ 值代入到式 (2.9) 中, 并整理得:

$$\frac{d(h(t))}{dt} = \frac{\rho \times Q_{OUT}(t)}{c \times (6 \times h(t) + b(t))} \quad (2.12)$$

考虑在单位时间内的变化不大, 从而得到

$$\begin{aligned} \Delta h(t) &= h(t+1) - h(t) = \frac{\rho \times Q_{OUT}(t)}{c \times (6 \times h(t) + b(t))} \\ \Delta b(t) &= b(t+1) - b(t) = 6\Delta h(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

(3) 流量计算模型

对于方程组中的方程 3, 可以进行以下变换:

$v(t)$ 是一个随着 $h_w(t)$ 变化的量, 显然, $h_w(t)$ 增大时, 水流速度 $v(t)$ 也会随之增大。根据物理知识, 物体下落的速度 v 与它下落的高度 h 的开方成线形关系, 设系数为 λ_1 , 得到

$$v(t) = \lambda_1 \times \sqrt{h_w(t)} \quad (2.14)$$

进而得到^[2]

$$Q_{OUT}(t) = \lambda_1 \times b(t) \times h_w^{\frac{3}{2}}(t) \quad (2.15)$$

由附件二中的泄流时的泄流槽的宽度、高度、泄流量数据, 可以拟合出 $\lambda_1 \approx 1.66$ 。

将计算公式联立, 可以得到最终的蓄水漫顶后发生溃坝的数学模型:

$$\begin{cases} H(t+1) = H(t) + \frac{(Q_{IN} - Q_{OUT}(t)) \times \Delta t}{a \times n \times (H(t) - H_{b0})^{n-1}} \\ h(t+1) = h(t) + \frac{\rho \times Q_{OUT}(t)}{c \times (6 \times h(t) + b(t))} \\ b(t+1) = b(t) + 6\Delta h(t) \\ Q_{OUT}(t) = \lambda_1 \times b(t) \times h_w^{\frac{3}{2}}(t) \\ W(t) = a(H(t) - H_{b0})^n \end{cases} \quad (2.16)$$

此模型详细的描述了缺口宽度、深度、水流速度、水量、水位高程、时间的变化规律。模型通过迭代可以进行数据求解, 流程图如下:

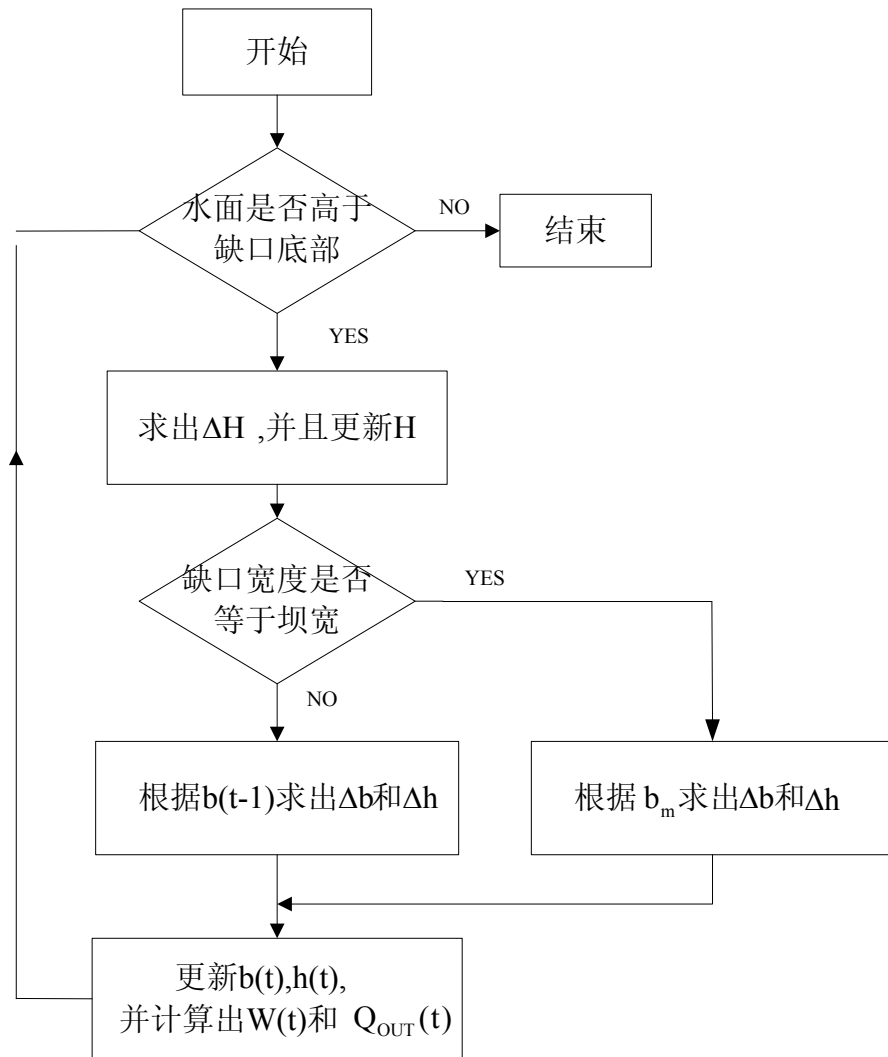


图9 蓄水漫顶数学模型数值求解流程图

在实际情况中，人工挖泄洪槽到 740 米高程，泄流槽最大宽度为 145 米，给定这些特定条件，得到结果如下图：

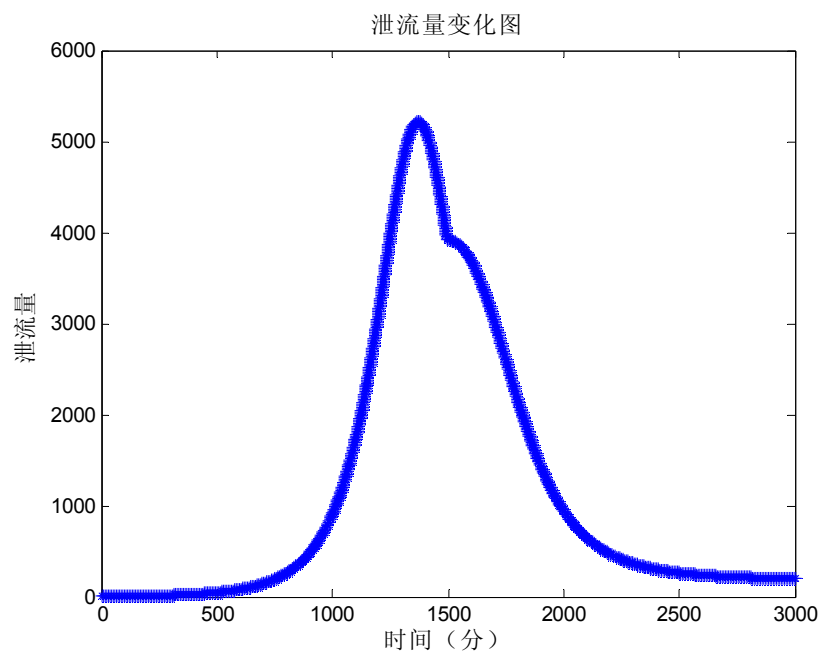


图 10 泄流量变化图

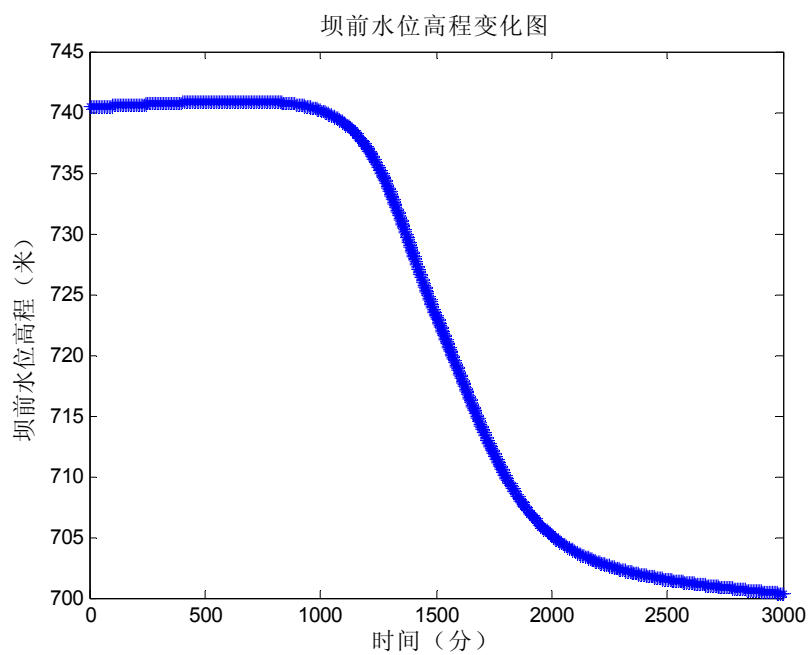


图 11 坝前水位高程变化图

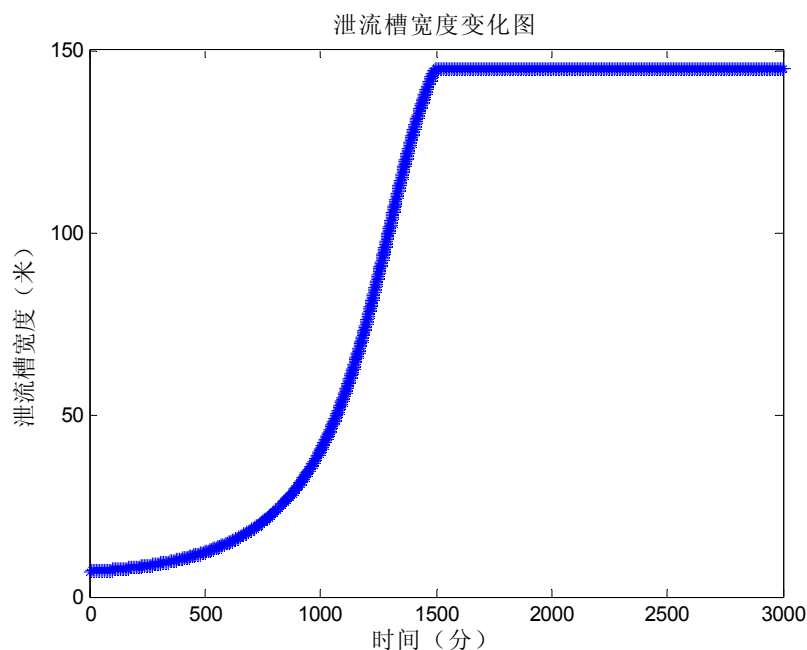


图 12 泄流槽宽度变化图

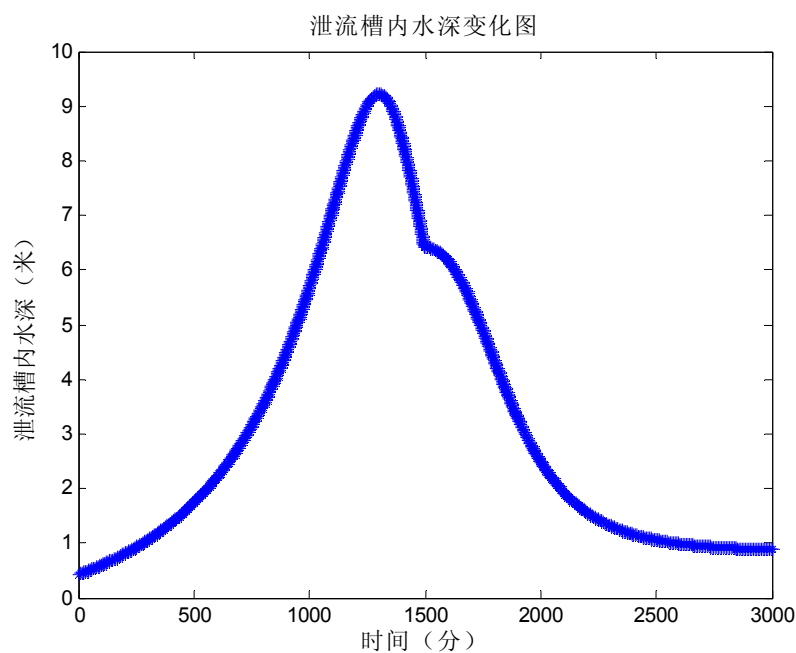


图 13 泄流槽水深变化图

结果分析：由模型解出的结果与实际数据趋势相符，但是模型解出的最大泄流量与泄流槽内最大水深均小于实际数据，这些可能与实际中使用炸药炸坝有关，另外，由于关于泄流槽宽度与水深的数据相对较少，仅有 6 组有效数据，从而导致模型精度较差。泄流量与泄流槽内水深在峰值流量后有一小波折，这与实际泄流槽的宽度在达到 145 米后不再增加有关，实际上与坝体的实际结构有关。

3. 坝体溃塌的影响及相应人员撤离方案

3.1 溃坝处的运算

如果要推算溃坝后的洪水水流速度和淹没区域，则需要计算出溃坝处的流量变化、洪水速度变化、水位高程变化、水流速度变化等信息。下面首先推算这些信息。

(1) 溃口推算

堰塞湖发生 1/3 溃坝时，坝内蓄水的 1/3 容量突然下泻。可以根据模型库容量模型计算溃口。溃口的宽度使用堰塞湖的总宽度 611 米。高度根据容量计算

$$W = \frac{2}{3}W_0 \quad (3.1)$$

$$a(H - 667.4)^n = \frac{2}{3}a(H_0 - 667.4)^n \quad (3.2)$$

算得 1/3 溃坝时溃口海拔 $H = 735.79$ m，这样溃口深度为 $750.2 - 35.79 = 14.41$ m。

(2) 溃口状态信息

使用上节中的程序计算了 5000 分钟内溃口的状态信息，初始条件为水位高程 750.2m，溃口大小为宽度 611m，深度 14.21m。假设溃口不再被扩大。

计算结果如图 1-4 所示。

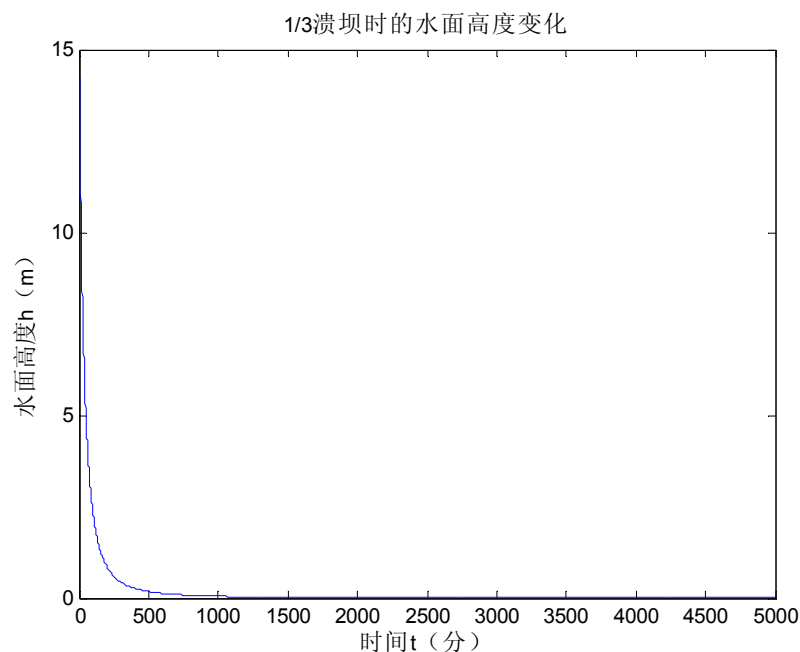


图 14 1/3 溃坝时的水面高度变化

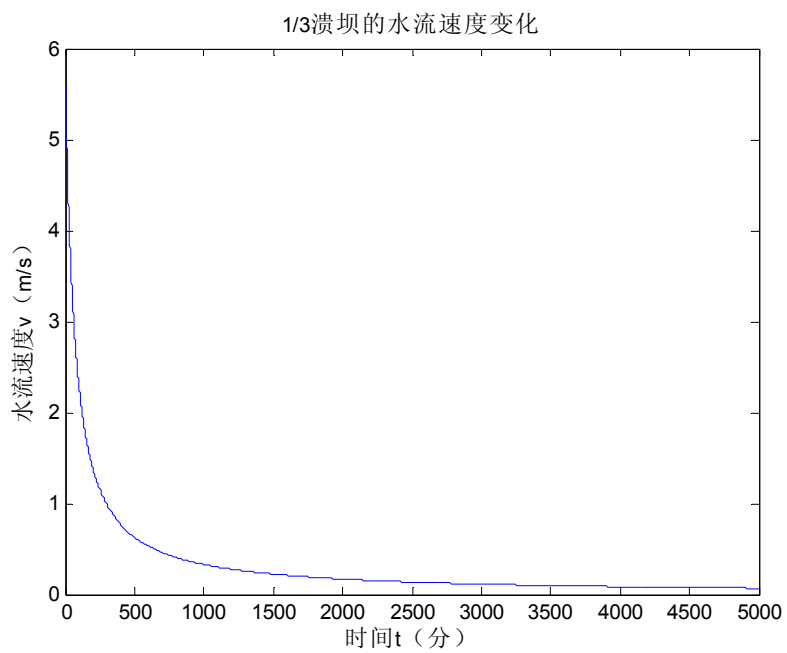


图 15 1/3 溃坝时的水流速度变化

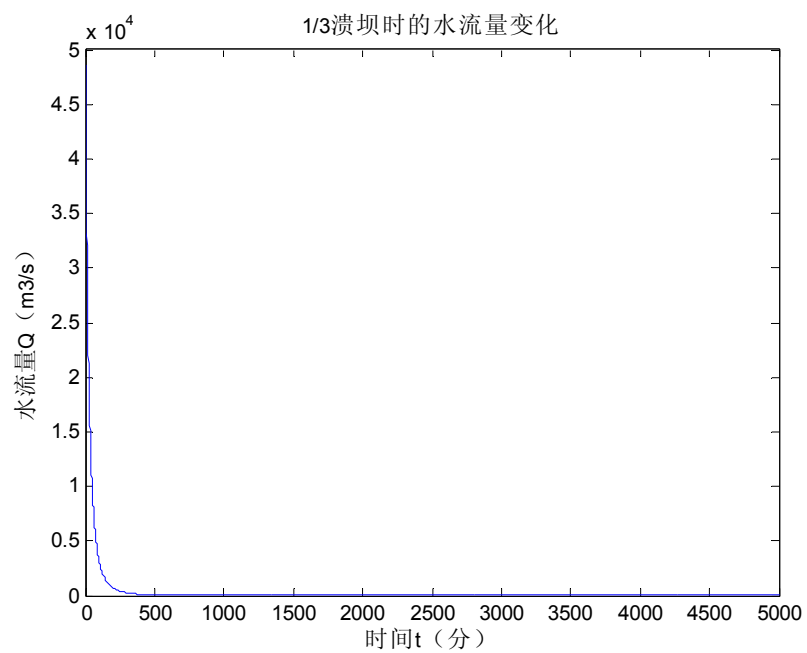


图 16 1/3 溃坝时的水流量变化

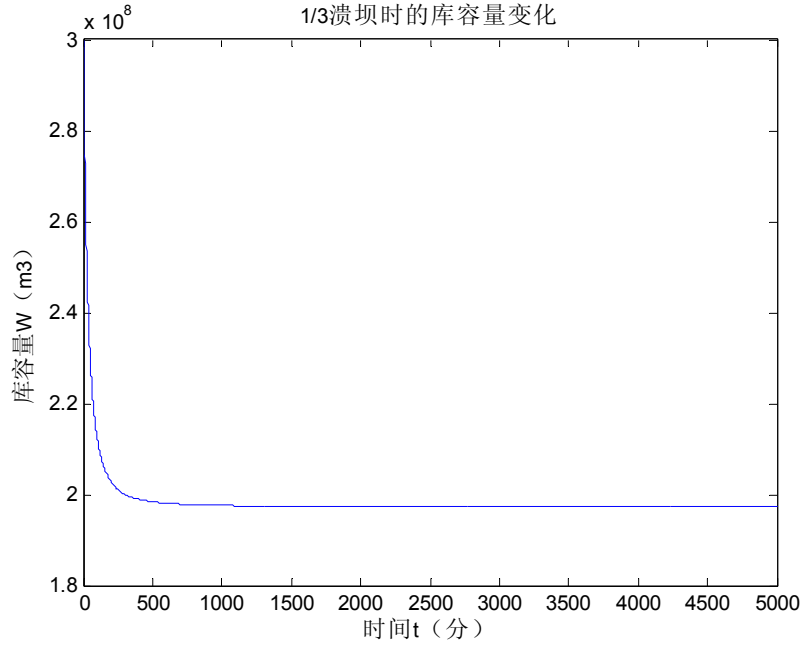


图 17 1/3 溃坝时的库容量变化

3.2 溃坝推演模型

根据质量守恒定律和能量守恒，可以得到沿岸水面高度 h 和水流速度 v 随位移变化的推演方程。我们把河道分成许多小段进行运算。

模型假设：

- (1) 水流在流动过程中没有支流流入或流出、没有蒸发、没有渗透等可能影响水流总量变化的情况发生，即在河道中的水流量守恒；
- (2) 河道宽度在一定距离内可以假设保持恒定的变化率，均匀地由一宽度变化到另一宽度；
- (3) 河道底部海拔高度在一定距离内可以假设保持恒定的变化率，均匀地由一高度变化到另一高度；
- (4) 水流中没有旋流、波浪，在某段河道中水面保持水平；
- (5) 河道底部平整，除摩擦引起能量损失外，没有其他因素可以带来能量的损失。

假设某段河道的出水流速为 Q_{out} ，如水流速为 Q_{in} ，河道宽度为 B ，河道长度为 s ，水的密度 ρ ，引起的水面高度变化为 Δh ，根据质量守恒定律，

$$(Q_{out} - Q_{in})t = \rho B s \times \Delta h \quad (3.3)$$

两边同除以 ts ，

$$(Q_{out} - Q_{in})/s = \rho B \times \Delta h / t \quad (3.4)$$

假设河道宽度 B 不随时间变化，即 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ ，两边取极限 $s \rightarrow 0$ ， $t \rightarrow 0$ ，得到

$$-\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\rho B \times \partial h}{\partial t}$$

整理得到

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\rho B \times \partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

由于 $Q = Bhv$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = B \left(v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} \right) + hv \frac{\partial B}{\partial s} \quad (3.6)$$

代入式(3.5)，整理得

$$Bv \frac{\partial h}{\partial s} + Bh \frac{\partial v}{\partial s} + hv \frac{\partial B}{\partial s} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

计算可得

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{Bh} \left(B \left(v \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) + hv \frac{\partial B}{\partial s} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{Bv} \left(B \left(h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) + hv \frac{\partial B}{\partial s} \right) \quad (3.9)$$

假设某质量为 m 的水从海拔 H 的地方流到海拔 H' ，相应水面高度由 h 变化为 h' ，速度由 v 变化为 v' ，

损失的重力势能为

$$mg \left(H + \frac{h}{2} - H' - \frac{h'}{2} \right) \quad (3.10)$$

增加的动能为

$$0.5m(v'^2 - v^2) \quad (3.11)$$

损失的摩擦能量为

$$\mu m \bar{v} s \quad (3.12)$$

其中， $\bar{v} = 0.5(v + v')$ ， μ 是摩擦能量损失系数，表示单位质量的水以单位速度流经单位长度的河道所损失的由于摩擦带来的能量损失， μ 根据实际泄洪时各水文站的峰值流量及测得的相应河道信息计算后求平均值所得。

根据能量守恒定律，损失的重力势能等于动能的增加量加上损失的摩擦能，

$$mg \left(H + \frac{h}{2} - H' - \frac{h'}{2} \right) = 0.5m(v'^2 - v^2) + \mu m \bar{v} s \quad (3.13)$$

两边除以 m ，再对位移 s 求极限，得到

$$sg \frac{\partial H}{\partial s} + 0.5sg \frac{\partial h}{\partial s} + 0.5 \left(\left(v + s \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 - v^2 \right) + \mu s \left(v + 0.5s \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0 \quad (3.14)$$

将式(3.9)代入上式，整理得

$$s \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(2v + \mu s - \frac{gh}{v} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \left(2\mu v + 2g \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{g}{v} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gh}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right) = 0 \quad (3.15)$$

至此，得到了溃坝推演微分方程：

$$\begin{cases} Bv \frac{\partial h}{\partial s} + Bh \frac{\partial v}{\partial s} + hv \frac{\partial B}{\partial s} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ s \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(2v + \mu s - \frac{gh}{v} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \left(2\mu v + 2g \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{g}{v} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gh}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3 溃坝离散模型

假设 $f(i, j)$ 为第 i 截面的某参数在 j 时间的数值^[3]，那么

$$\frac{\partial f(i, j)}{\partial t} = \frac{f(i+1, j) - f(i, j)}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial f(i, j)}{\partial s} = \frac{f(i, j+1) - f(i, j)}{\Delta s} \quad (3.18)$$

将上面两式代入溃坝推演方程得到

$$\begin{aligned} & s_i \left(\frac{v(i+1, j) - v(i, j)}{s_i} \right)^2 + \left(2v(i, j) + \mu s_i - \frac{2gh(i, j)}{v(i, j)} \right) \left(\frac{v(i+1, j) - v(i, j)}{s_i} \right) + \\ & \left(2\mu v(i, j) + 2g \frac{H(i+1) - H(i)}{s_i} - \frac{g}{v(i, j)} \frac{h(i, j+1) - h(i, j)}{s_i} - \frac{gh(i, j)}{B(i)} \frac{B(i+1) - B(i)}{s_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

式中 $B(i)$ 为第 i 段河道的宽度， s_i 为第 i 段河道的长度。

设定

$$a = s_i \quad (3.20)$$

$$b = 2v(i, j) + \mu s_i - \frac{2gh(i, j)}{v(i, j)} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} c = & 2\mu v(i, j) + 2g \frac{H(i+1) - H(i)}{s_i} - \frac{g}{v(i, j)} \frac{h(i, j+1) - h(i, j)}{s_i} \\ & - \frac{gh(i, j)}{B(i)} \frac{B(i+1) - B(i)}{s_i} \end{aligned} \quad (3.22)$$

这样根据式 (3.19-3.22) 可得，

$$v(i+1, j) = v(i, j) + s_i \times \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.23)$$

经过实际测试，程序实现时，

$$v(i+1, j) = v(i, j) + s_i \times \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.24)$$

再代入式 (3.9) 的差分形式可以求得 $h(i+1, j)$

$$h(i+1, j) = h(i, j) - \frac{s_i}{Bv} \left(B \left(h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{h(i, j+1) - h(i, j)}{\Delta t} \right) + hv \frac{B(i+1) - B(i)}{s_i} \right) \quad (3.25)$$

推算所需条件:

(1) 溃坝处的任意时刻的水流速度 $v(1, j)$ 以及水位高度变化 $h(1, j)$

(2) 第 i 段河道的宽度 $B(i)$, 长度 s_i , 底部海拔 $H(i)$ 。

使用已知条件可以使用式 (3.24) 和式 (3.25) 推得第 2 段河道截面所在地的水流速度变化 $v(2, j)$ 和高度变化 $h(2, j)$, 再以 $v(2, j)$ 和 $h(2, j)$ 推算 $v(3, j)$ 和 $h(3, j)$, 以此类推, 可以得到所有段河道的水流速度变化和水位高度变化。

3.4 模型运算结果及分析

我们沿唐家山的下游河道选取了 15 个横截面, 再根据 3.1 节中运算到的溃坝处水流速度和水位高度变化, 使用 3.4 节中的推演速算法求得结果如下表所示。

表 1 模型运算结果

河道段编号	长度 (公里)	到达时间 (分钟)	最大水位 (米)	到达时水流速度 (米/分钟)
唐家山	0	0	0	336.52
1	1.3	3.8883	14.247	337.17
2	2.6	7.8274	25.22	337.14
3	3.6	10.897	34.007	337.48
4	8.4	25.82	25.171	336.23
5	11.1	31.172	27.781	336.38
6	15.1	43.926	14.289	334.79
7	19.6	58.454	26.874	333.58
8	25.6	71.529	34.185	332.73
9	27.7	84.765	30.283	331.68
10	29.4	91.799	28.503	330.37
11	31.4	97.563	42.447	331.03
12	33.4	99.279	45.189	331.79
13	35.4	101.01	31.026	331.89
14	38.4	102.77	32.45	331.81
15	40.1	109.88	29.283	331.16

可以看到发生 1/3 溃坝后, 洪峰在不到两个小时后就可以到达唐家山下游 40 公里处, 按此趋势, 推断大约 4 小时洪峰就可到达唐家山下游 70 公里处的绵阳。根据沿岸各地的具体人口密度、水位高度、周边地形等因素考虑, 第 5, 8, 10, 11, 12, 13 河段比较危险, 存在被淹没的危险, 如图 18 所示。制定各部分的撤

退方案的目标是最快地到达周边海拔较高的地方，如图 18 所示。

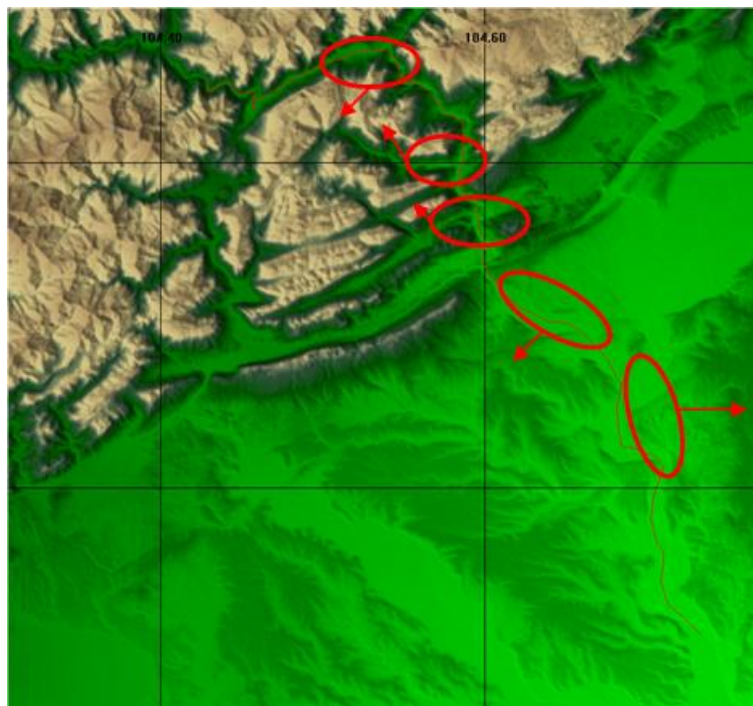


图 18 受灾地区及人员撤退方案示意图

3.5 模型优缺点

模型从理论上根据质量守恒定律和能量守恒定律得到了发生溃坝时的推演方程，从理论上说，只要获知河道的详细信息，使用此模型可以计算任意河段任意时间的水流速度和水位。模型又提供了离散的差分方程形式，易于计算机运算。根据本模型可以大致推断出溃坝下游地区的水位高度和水流速度，进而计算得到水流量等信息。

但是，本模型还存在以下缺陷：

（1）由于建立离散模型的原始数据较少，模型的个别参数，比如摩擦能损耗参数只能使用已有数据大致估算，由于微分方程模型对于运算的初始条件和相关参数十分敏感，导致模型的准确性不足。如果参数 μ 可以根据河道动态调整，模型运算精度会得到提高。

（2）本模型只考虑了上游节点数据对下游节点的影响，但是没有反过来考虑下游节点数据对于上游节点数据运算的影响。在实际中，河道某处的流量是上下游共同作用的结果。

（3）模型的离散运算使用迭代方法运算，优点是从现在的状态可以推知将来的状态，缺点是会带来误差积累。导致模型的适用范围、可以推算的里程都会受到限制。

（4）本模型本质上是一维模型，暂时没有考虑汉口的运算（本模型不涉及）。模型的运算需要河道的具体信息，这在某些情况下比较困难很快做到。如果建立二维或三维模型，使用有限元方法将地图上所有网格的信息都输入运算，就可能得到很好的运算结果。

综上，如果详细考虑河道和沿岸地区的详细数据，迭代算法使用合适的时间

步长和空间步长，模型的精度和适用范围都会得到极大地增强。但是建模比赛时间较紧张，加上团队成员水力学基础知识的匮乏，无法从科学的层次对溃坝问题做出完美的解决。

4. 总结

虽然汶川大地震和堰塞湖险情已经过去了，但是中国人民在灾难面前的坚强不屈和团结友爱的精神，党中央在灾情面前的得力指挥和果断决策，在最大程度上挽救了人民群众的生命财产安全。这点在我们参与本次建模大赛中有了更深的体验。

根据我们的数学模型可以得到如下结果和启示：

(1) 堰塞湖的存在对于下游的地区是个巨大的威胁，堰塞湖的蓄水量和水位高程成指数增长，一旦发生溃坝，水流量将急剧上涨，后果不堪设想。所以必须在堰塞湖刚生成时就要及早预测，及早准备预案。我们看到，在堰塞湖刚生成时，党和政府高度重视，制定了 1/3 溃坝、1/2 溃坝和全溃坝的三套预案，并派遣大量科技人员深入湖区，实地测量。气象部门积极配合，准确预测了灾区的降雨量。人民子弟兵不畏艰险，前往坝顶开辟泄洪槽。这些都为及时地防灾减灾打下了坚实的基础。

(2) 在坝顶开挖合适的泄洪槽是解决堰塞湖危险的得力方案，使用我们的漫顶模型，可以看到在短期内泄流槽将很快扩大，库容量也随之减少。但是需要注意两点，一是科学决策，开挖泄流槽的大小要掌握合适，太大则造成初期水流量过快增长，对下游存在潜在危险，太小则泄流太慢，耽误宝贵的救灾时间；二是尽早行动，一旦确定采用此方案，必须尽早开挖，否则发生漫顶溃坝后，下游流量将会很大。我们看到这两点党和政府在此次救灾中都注意到了。在确定开挖泄洪槽后，军队使用直升机运送了大量挖掘机器，人民子弟兵日夜奋战，挖掘土石几十万方，终于挖开了这个救命槽。

(3) 如果溃坝不可避免，必须科学准备地预测溃坝的规模、流量大小、洪峰到达时间等关键信息。预测过低将会带了严重的人员和财产损失；预测过高将给人员疏散工作带来压力。我们看到，在此次堰塞湖危机中，政府制定了详细了溃坝应对方案，并且细致地标明了各种溃坝的淹没标志线。而且，就算发挥僧突然溃坝，政府还公布了报警形式。这样，即使发生溃坝，损失也会降低到最低程度。

经过此次溃坝模型的建模过程，根据我们在建模过程中遇到的问题和困难，为了更好的预测和研究相似灾害事件，科学工作者需要注意以下问题：

(1) 测绘工作必须及时；山体形状、河道形状对于本模型的准确性和稳定性至关重要。根据提供的地图，我们无法准确辨别出这些信息，这为模型和建立和灾害预测带来了极大困难。

(2) 原始数据十分珍贵；本次建模过程中，我们大量使用了媒体记录的原始数据，这些数据直接或间接决定了模型的各个参数。溃坝事件不是频发事件，相关原始数据比较少，做实验又太昂贵。所以，虽然我们不希望在此发生此类事

件，但如果发生了，需要注意积累原始数据。

(3) 要加强灾害的预测能力；灾害的及早预测能够给救灾工作争取大量的时间，而时间对于救灾来说也许就意味一切。要通过对于地质活动的观测、天气的监测等方式，结合如应用遥感(RS)、地理信息系统(GIS)等技术的支持，进一步提升灾害预测能力。

参考文献

- [1] 赵东方，数学模型及计算，北京：科学出版社，2007 年，143-145 页
- [2] 谢任之，溃坝水力学，济南：山东科学技术出版社，1993 年，15 页
- [3] 韩中庚，数学建模方法及其应用，北京：高等教育出版社，2005 年，57-64 页