

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 基于功能原理的有杆抽油系统的数学建模及诊断

摘 要

本文针对在原油开采中广泛使用的有杆抽油系统，分析悬点运动规律，根据悬点处的实测位移数据和荷载数据，绘制悬点示功图。并通过建立数学模型，将悬点示功图转化为杆上任意点的示功图，由此确定地下深处的泵功图。进而提取泵功图的特征信息，进行油井产量预测与混入气体故障诊断。并通过分析抽油杆重力为分布载荷改进 Gibbs 模型，同时建立了基于能量守恒的阻尼系数计算模型。具体工作包括：

针对问题一，本文基于驴头圆周运动弧长与悬点上下运动位移的等量关系，得到了悬点位移与游梁旋转角度之间的函数关系，确立了悬点运动的精确规律，进而得到了悬点运动的速度和加速度函数。

同时，计算了文献^[1]中将游梁与连杆连接点运动简化为简谐运动、四连杆机构简化为曲柄滑块机构的两种悬点运动模型的结果。并对三种方法的求解结果的进行了对比（图 4.5-4.7），分析了差异产生的原因。

针对问题二，基于微元体受力分析推导了 Gibbs 波动方程模型，并应用文献^[3]中原始数据、边界条件、初始条件的处理方法，采用傅里叶级数展开与分离变量法进行 Gibbs 波动方程的求解，实现了由悬点示功图计算一级杆和三级杆的泵功图，并分析了级数项数的高频滤波的物理意义。其中阻尼系数的计算，本文采用了直接读取阻尼因子^[3]和利用摩擦功^[5]两种方法，并针对两种方法计算得到的泵功图进行了对比（图 5.2-5.9）。

对于由摩擦功计算阻尼系数的方法，本文根据固液接触面积相同的原则，

建立了将多级杆等效为侧面积相同的一级杆模型，利用一级杆实现多级杆阻尼系数的计算，拓展了该方法的适用范围，并通过将一级杆分为三段一级杆对模型的有效性进行了验证。

针对问题三，本文根据对资料中典型泵功图的特征，建立了基于泵功图曲线曲率及其变化率判别游动阀和固定阀开闭点的数学模型，由此确立冲程的四个阶段。我们首先对泵功图的数据进行归一化处理，并由位移-载荷参数方程计算提前泵功图曲率极大值点特征信息，选取距离四角最近的曲率极大值点为游动阀和固定阀开闭的临界特征点。

由泵功图中提取的临界特征点信息，本文给出了基于游动阀闭合段有效功和有效冲程的游动阀两种方法得到的游动阀位移计算产液体积。方法一由游动阀开闭临界特征点，基于游动阀闭合对液体举升作用做功计算位移，得到抽去的液体体积的方法。方法二由上下两对特征点距离短的点对确立有效冲程，进而计算游动阀位移得到抽出液体体积。并由原油体积系数和水的体积系数计算混合液体体积系数，进而得到两种方法算得的产液量（表 6.2），两种方法得到的结果较吻合。

两种算法的油井产量计算结果（单位为吨）

	有效功算法	有效冲程算法
一级杆油井	90.5764	84.8659
三级杆油井	26.8476	26.6821

通过分析泵内气体将延迟游动阀开启，导致对应泵功图的右下角缺失，提出泵内充气的面积判别模型。面积判别法中，利用泵功图特征点信息，将泵功图分为四部分，并通过分析右下部分面积与其余面积关系进行计算机自动判别，对附件数据进行了计算机诊断：一级杆对应油井泵内充气，三级杆对应泵内无充气。

针对问题四，考虑到 Gibbs 模型直采集杆重量悬点处集中载荷的缺陷，本文采用重力杆上分布载荷，通过微元受力分析建立了将重力处理为分布载荷的改进模型。并基于时间和抽油杆离散化，采用有限差分方法求解改进后的模型，得到了抽油杆上各位置、各时刻的位移和载荷数据，并与 Gibbs 模型求解结果进行了对比（图 7.2-7.4）。

同时，基于泵功图面积对应有效功的物理意义，本文沿用微元体受力分析方法，建立了抽油杆在一个周期内阻尼力做功的二重积分表达式，建立了基于能量守恒的阻尼系数计算模型。并利用有限差分方法，结合泵功图有效功和油井产液量数据，设计了阻尼系数求解的迭代算法，计算阻尼系数，且分析了迭代算法对不同初值均能够快速收敛（图 7.6-7.7）。针对附件数据，我们求得的一级杆阻尼系数为 2.168，三级杆的阻尼系数为 1.840。该方法改进了 Gibbs 模型只考虑了抽油杆与油管内液体的阻尼，而不考虑油管内液体与油管的阻尼作用。

关键词：能量守恒 泵功图曲线曲率 微元体受力分析 有限差分方法 重力分布载荷 冲程临界特征点

目 录

1 问题重述.....	4
1.1 研究背景	4
1.2 问题一：光杆悬点运动规律	4
1.3 问题二：泵功图计算	4
1.4 问题三：泵功图的应用	4
1.5 问题四：深入研究的问题	5
2 问题分析.....	5
3 模型的假设及符号说明.....	6
3.1 模型假设	6
3.2 符号说明	6
4 光杆悬点运动规律.....	7
4.1 简化为简谐运动时悬点运动规律	7
4.2 简化为曲柄滑块机构时悬点运动规律	7
4.3 悬点实际运动规律	9
5 泵功图的计算与绘制.....	13
5.1 基于 Gibbs 模型的泵功图的计算	13
5.2 示功图与泵功图的绘制	18
6 泵功图的应用.....	22
6.1 泵功图确立固定阀和游动阀开闭临界点	22
6.1.1 泵功图的预处理	22
6.1.2 固定阀和游动阀开闭临界点的确立	22
6.2 利用泵功图估计油井产量	24
6.2.1 功转化分析估算油井产量	25
6.2.2 利用有效冲程估算油井产量	26
6.3 利用泵功图诊断泵内是否含有气体	27
6.3.1 气体对泵功图的影响分析	27
6.3.2 面积判别法	27
7 问题的进一步研究.....	28
7.1 Gibbs 模型的改进	28
7.1.1 基于重力分布载荷的改进 Gibbs 模型	29
7.1.2 有限差分法求解	29
7.2 基于能量守恒的阻尼系数模型与求解	33
8 模型的评价.....	36
参考文献.....	37

1 问题重述

1.1 研究背景

在原油开采中，有杆抽油系统被广泛使用。电机旋转运动转化为抽油杆上下往返周期运动，带动设置在杆下端的泵的两个阀的相继开闭，从而将地下上千米深处蕴藏的原油抽到地面上来。

钢制抽油杆有一级杆和多级杆，描述抽油杆中任意一水平截面处基本信息的通用方法是示功图，其函数关系表现为位移-荷载关于时间的参数方程。抽油杆上端点称为悬点，在一个冲程期间，仪器以一系列固定的时间间隔测得悬点处的一系列位移数据和荷载数据，据此建立悬点的示功图称为悬点示功图。

“泵”是由柱塞、游动阀、固定阀、部分油管等几个部件构成的抽象概念，泵中柱塞处的示功图称为泵功图。由于受到诸多因素的影响，在同一时刻 t ，悬点处的荷载及相对位移与柱塞的都是不相同的，因此悬点示功图与泵功图是不同的。示功图包含了很多信息，可通过示功图特征分析判断油井的工作状态。

通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况，如产量、气体影响、阀门漏液、沙堵等，而泵功图能更精确诊断油井的工作状况。然而，泵在地下深处，使用仪器测试其示功数据实现困难大、成本高。因此，建立模型，把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图并最终确定泵功图，以准确诊断该井的工作状况，是一个很有价值的实际问题。

1.2 问题一：光杆悬点运动规律

请按附录 4 给出四连杆各段尺寸，利用附件 1 的参数，求出悬点 E 的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与有荷载的附件 1 的悬点位移数据进行比较。

1.3 问题二：泵功图计算

请使用 Gibbs 模型，给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；附件 1 是只有一级杆的油井数据，附件 2 是有三级杆的另一油井数据，利用它们分别计算出这两口油井的泵功图数据；并分别绘制出两油井的悬点示功图和泵功图。

1.4 问题三：泵功图的应用

1) 建立 2 个不同的由泵功图估计油井产量的模型，其中至少一个要利用“有效冲程”；并利用附件 1 和附件 2 的数据分别估算两口油井一天（24 小时）的产液量。（单位：吨，这里所指的液体是指从井里抽出来的混合液体）

2) 如图 1（C）形式的泵功图表示泵内有气体，导致泵没充满。请建立模型或算法，以由计算机自动判别某泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。并对附件 1、附件 2 对应的泵功图进行计算机诊断是否属于泵内充气这种情况。

1.5 问题四：深入研究的问题

1) 请对 Gibbs 模型进行原理分析,发现它的不足。在合理的假设下,重新建立抽油系统模型或对现有模型进行改进;并给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程,包括:原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法;利用附件 1、附件 2 的数据重新进行计算;对计算结果与问题二的计算结果进行比较,分析你的模型的优缺点。

2) Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$$

其中 a 为已知常数, c 称为阻尼系数,鉴于大多数的阻尼系数公式是作了诸多假设后推出的,并不能完整地反应实际情况。如果能从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数 c , 贡献是很大的。对此,请对 Gibbs 模型的阻尼系数进行研究,详细给出计算 c 的理论推导过程并尽可能求出 c 。

2 问题分析

现代油井开采中,能极大反映油井各项参数的是泵功图。它可以被用来诊断油井的工作状况,估计油井产量等。而泵埋在地底深处,描绘泵功图所需的数据难以测量。对于我们来说,有杆抽油系统地面部分的数据简单易测,便于绘制悬点示功图。建立将悬点示功图转化为泵功图的模型,这样我们就可以得到泵功图。

电机是整个系统的动力来源,它的各项参数皆已知。电机带动曲柄旋转,通过光杆连接,致使游梁上下摆动,驴头随之做圆弧运动,引发悬点波动。运用机械原理知识,对系统中各部分的运动规律作分析,是描绘悬点运动规律的基础。王鸿勋^[1]提出将游梁后臂与光杆的连接点的运动转化为简谐运动和将机构简化为曲柄滑块机构两种方式分析悬点的运动规律,而我们将对机械结构不做简化精确分析悬点运动规律。

有了悬点的运动规律,悬点处的载荷可由仪器直接测得,就可以描绘出悬点示功图。1966 年, Gibbs 提出了悬点示功图转化为泵功图的模型^{[3],[4]},并运用 Fourier 变换法和分离变量法给出其求解过程。利用附件 1 和附件 2 所给的数据,基于 Gibbs 模型,我们将能够分别绘制出两口油井的悬点示功图和泵功图。

在应用泵功图进行油井信息计算时,实际得出的泵功图载荷值范围可能远远大于位移值范围,需要首先对其进行归一化预处理。根据对资料中典型泵功图的观察和泵工作原理的分析,我们可以根据泵功图曲率来判别游动阀和固定阀开闭点,并确立泵的一个冲程的有效冲程。有效冲程就是泵实际用来抽油的有效做功部分,根据功转化分析,可以构建泵功图估计油井产量模型。分析气体对泵功图的影响,将实际绘制的泵功图与典型泵功图相较,就可判别泵内是否含气。

Gibbs 模型直接通过悬点处减去杆在液体中的重量,未能考虑重力分布载荷,可以通过微元受力分析建立了将重力处理为分布载荷的改进模型。为处理更为一般的载荷分布形式,可运用基于时间和抽油杆离散化有限差分方法求解

模型。文献中阻尼系数公式主要通过对系统的力学特性分析得到^[5]。分析 Gibbs 模型发现，原模型只考虑了抽油杆与油管内液体的阻尼，而未考虑油管内液体与油管的阻尼作用。因此，通过微元体受力分析，可以建立抽油杆在一个周期内阻尼力做功的积分表达式。从能量角度出发，根据有效功和产液量信息，便推导出计算阻尼系数计算公式。再利用有限差分方法，结合泵功图有效功和油井产液量数据，计算新的阻尼系数。

3 模型的假设及符号说明

3.1 模型假设

本文关于有杆抽油系统的研究基于以下假设：

1. 有杆抽油系统中的驴头外轮廓线为部分圆弧，故游梁带动驴头做圆弧运动，其运动半径为游梁前臂长度。
2. 假设有杆抽油系统中连接驴头和悬点的钢缆在运动过程中无弹性形变。
3. 假设油管是锚定的。
4. 不考虑柱塞与泵筒之间的漏失量。
5. 不考虑油管内液体与油管的阻尼作用。

3.2 符号说明

本文中的常用符号如表 3.1 所示：

表 3.1 符号说明

符号	定义
r	曲柄长度
l	连杆长度
m	游梁前臂长度
n	游梁后臂长度
t	时间
ω	曲柄角速度
E	光杆弹性模量（杨氏模量）
L	抽油杆柱总长度
ρ	抽油杆柱密度
A	一级杆油井抽油杆柱的截面积

4 光杆悬点运动规律

游梁式抽油机主要由游梁-连杆-曲柄机构、减速箱、动力设备和辅助装置等四大部分组成。工作时，动力机将高速旋转运动通过皮带和减速箱传给曲柄轴，带动曲柄做低速旋转。曲柄通过连杆经横梁带动游梁做上下摆动，挂在驴头上的悬绳器便带动抽油杆柱作往复运动。

本章将通过探讨的游梁B点的运动规律，来建立光杆悬点E的运动规律。采用将悬点转化为简谐运动，将机构简化为曲柄滑块机构，对机械结构不做简化精确求解三种方法，对悬点运动规律进行了分析求解。

4.1 简化为简谐运动时悬点运动规律

若 $r:l=0$ 及 $r:n=0$ ，即认为曲柄半径 r 比连杆长度 l 和游梁后臂 n 小很多，以致它与 l 和 n 的比值可以忽略。此时，游梁和连杆的连接点B的运动可看做简谐运动，那么B点的运动规律和D点做圆运动时在垂直中心线上的投影的运动规律相同^[1]。则B点经过时间 t 时的位移 S_B 为：

$$S_B = r(1 - \cos \omega t) = (1 - \cos \omega t)r \quad (4.1)$$

游梁前臂与驴头的连接点为A点，驴头上安装有悬绳器，缆绳下接抽油杆，其接点就是我们所说的悬点。我们假设驴头外轮廓线为部分圆弧，其半径为游梁前臂长度。游梁上下摆动引起驴头的圆弧运动，再带动悬点位移变换。考虑到驴头圆弧运动引起缆绳的伸缩量就等于悬点E的位移改变量，则悬点E的运动可看作与A点运动一致。那么，悬点E的运动规律就可以做如下刻画：

悬点E的位移函数、速度函数、加速度函数为：

$$S_E = S_A = \frac{m}{n} S_B = \frac{m}{n} r(1 - \cos \omega t) \quad (4.2)$$

$$V_E = \frac{dS_E}{dt} = \frac{m}{n} \omega r \sin \omega t \quad (4.3)$$

$$W_E = \frac{dV_E}{dt} = \frac{m}{n} \omega^2 r \cos \omega t \quad (4.4)$$

4.2 简化为曲柄滑块机构时悬点运动规律

实际抽油机的 r/l 值是不可忽略的，特别是冲程长度较大时，忽略后会引起很大误差。为此，取 r 与 l 的比值为有限值，如 $0 < r/l < 1/4$ ，并把B点绕游梁支点的弧线运动近似地看做直线运动，则可把抽油机的运动简化为图 4.1 所示的曲柄滑块运动^[1]。

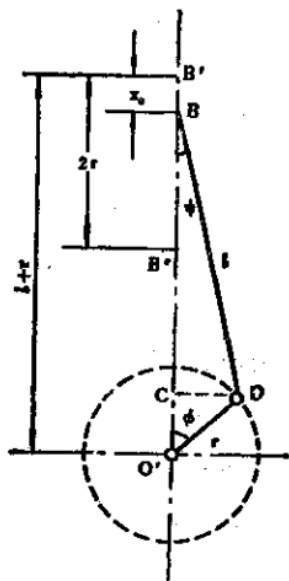


图 4.1 曲柄滑块机构示意图

$\phi = 0^\circ$ 时，游梁与连杆的连接点 B 在 B' 点，为距曲柄轴心最远的位置，相应于悬点 A 的下死点。

$\phi = 180^\circ$ 时，B 点 B'' 处，为距曲柄轴心最近的位置，相应于悬点 A 为上死点。

$$O'B' = l + r, \quad O'B'' = l - r$$

B 点的最大位移为 $2r$

B 点在任意时刻的位移（从 $\phi = 0^\circ$ 算起） S'_B 为：

$$S'_B = BB' = O'B' - O'B = l + r - O'B$$

由三角形 O'DB 得：

$$O'B = O'C + BC = r \cos \phi + l \cos \psi$$

则

$$S'_B = l + r - (r \cos \phi + l \cos \psi) = \left[(l + r) - r \cos \phi - l \cos \psi \right] \quad (4.5)$$

式中 $\lambda = r/l$ 。利用正弦定律，可得到 ψ 与 ϕ 的关系为：

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \approx 1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \phi}{2}$$

代入 (4.2) 式得：

$$S'_B = r \left(1 - \cos \phi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \phi \right) = r \left(1 - \cos \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \omega t \right) \quad (4.6)$$

悬点 E 的位移函数、速度函数、加速度函数为：

$$S'_E = S'_A = \frac{m}{n} S'_B = \frac{m}{n} r \left(1 - \cos \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \omega t \right) \quad (4.7)$$

$$V'_E = \frac{dS'_E}{dt} = \frac{m}{n} \omega r \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right) \quad (4.8)$$

$$W'_E = \frac{dV'_E}{dt} = \frac{m}{n} \omega^2 r (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) \quad (4.9)$$

4.3 悬点实际运动规律

附录 4 中指出，电机旋转带动游梁上下摆动，当游梁平行于水平面时，悬点 E 行至其下死点，如图 4.2 所示。

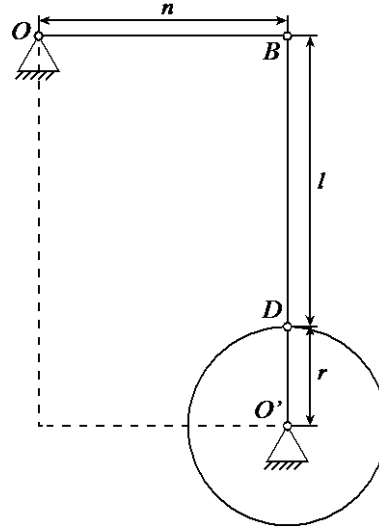


图 4.2 游梁平行于水平面对应机构图

注意到曲柄滑块 D 位于上顶点 ($\phi=0$) 时，AB 平行于水平面，即此时满足关系 $OB \perp O'D$ ，由于该位置对应于 E 的下死点，可推得 $OB \perp BD$ ，否则根据图 4.3，可构造 $O'D'$ 与 $D'B'$ 共线情形（如图虚线所示），与 E 下死点位置信息不对应。由此可以计算得到 O 与 O' 的位置关系。

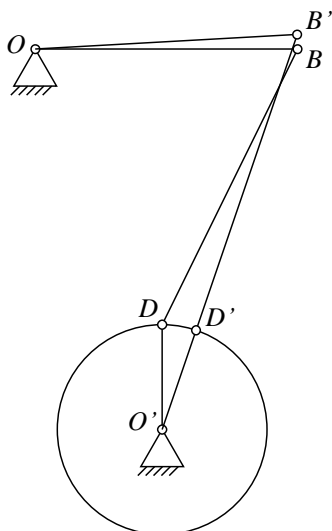


图 4.3 推导 O 与 O' 位置关系图

图中符号说明：

h ：游梁支点到曲柄轴中心的竖直距离

i ：游梁支点到曲柄轴中心的水平距离

由图可以得到 $h = l + r$ ， $i = n$ 。

当游梁摆动到其他位置时，如图 4.4 所示。

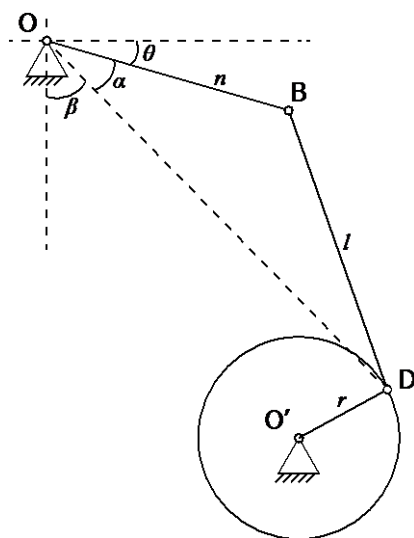


图 4.4 机构任意位置图

从图示可得：

$$|OD'| = l \cdot \cos \theta \quad (4.10)$$

$$|DD'| = l \cdot \sin \theta \quad (4.11)$$

$$|OD| = \sqrt{|OD'|^2 + |DD'|^2} \quad (4.12)$$

$$\alpha = \arccos \frac{n^2 + |OD|^2 - l^2}{2n|OD|} \quad (4.13)$$

$$\beta = \arctan \frac{|DD''|}{|OD''|} \quad (4.14)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \quad (4.15)$$

悬点 E 的位移函数为：

$$S_E'' = m\theta \quad (4.16)$$

m 为游梁前臂长度，悬点 E 的速度函数和加速速度函数分别为（4.16）式关于时间 t 的一阶导数和二阶导数。

由于精确计算结果知： $n+l < r+OO'$ ，四连杆机构不满足圆周运动条件。考虑到机械存在一定的间隙量，此时仍可以假设圆周运动条件满足，计算悬点 E 的位移、速度、加速度分别如图 4.5-4.7 所示：

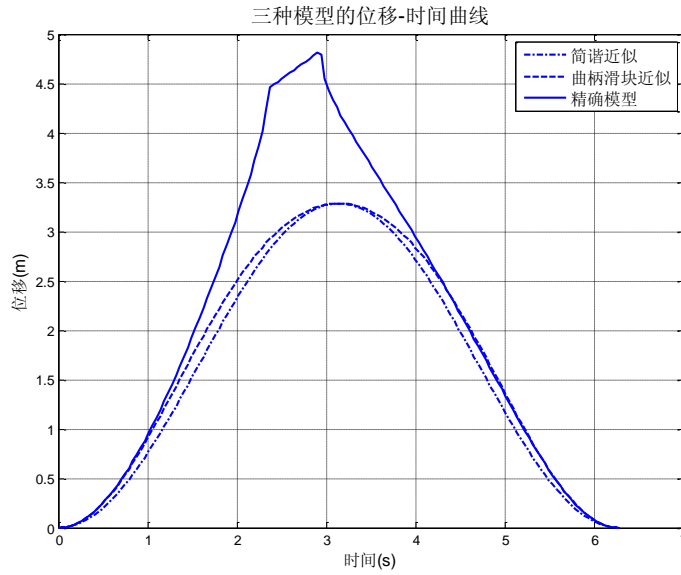


图 4.5 悬点 E 的位移图

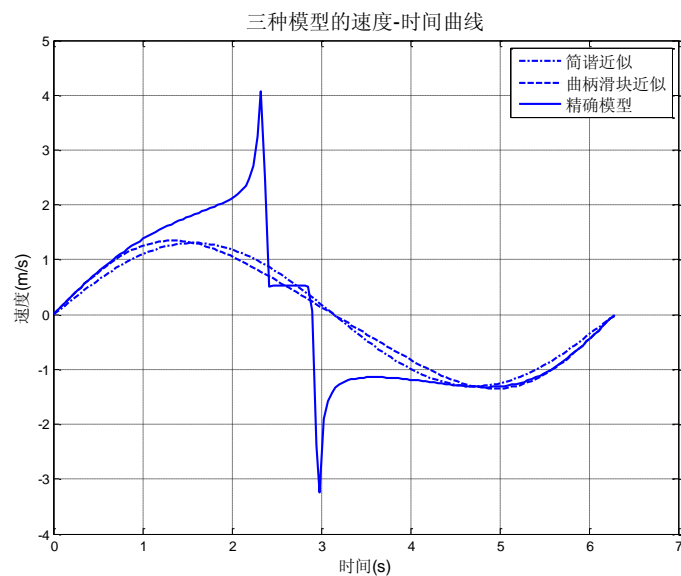


图 4.6 悬点 E 的速度图

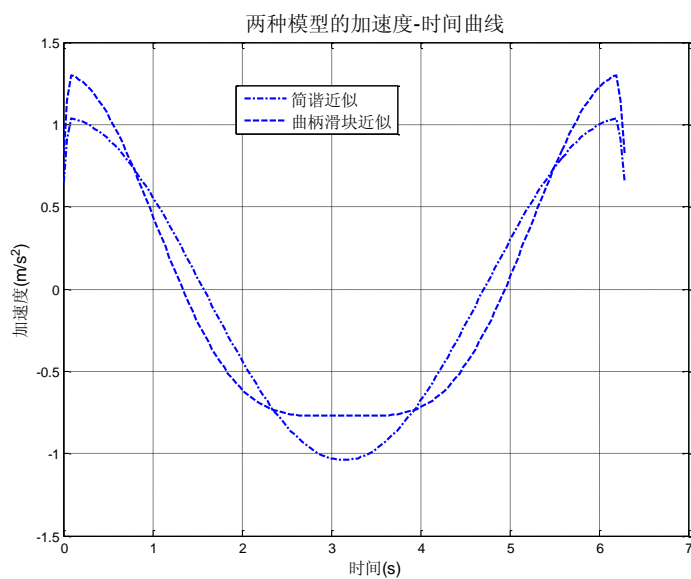


图 4.7 悬点 E 的加速度图

注意到点 D 圆周运动中, 当 D 点运动至接近 OO'线时, 机械机构实际无法完成运动, 在计算中产生了尖锐的部分。由于位移函数存在较为尖锐的曲线段, 求解速度和加速度时在此段位置会产生很大的误差。因此, 精确规律求解得到的加速度函数图意义不大, 本文不再给出。

5 泵功图的计算与绘制

泵功图是泵中柱塞处的示功图。虽然示功图对油井的工作状态可以进行初步诊断，但是泵功图更接近抽油系统的核心，能更精确反应油井的实际状况。受仪器效用的限制，泵功图的测试非常困难，而且花费高。1966 年，S.G.Gibbs^[3]首先给出了悬点示功图转化为泵功图的波动方程模型。

本章基于微元体受力分析推导 Gibbs 模型。采用级数方法求解该波动方程，将示功图转换为泵功图。采用直接读取阻尼因子和利用摩擦功两种方法分别计算阻尼系数。对采用摩擦功计算阻尼系数的方法进行拓展，分析泵功图面积具有有效功的物理意义，为通过能量法计算阻尼系数提供了基础。利用附件中所提供的实际数据，依据已有计算过程分别绘制出两口油井的示功图与泵功图。

5.1 基于 Gibbs 模型的泵功图的计算

若把悬点当做振源，可将悬挂在悬点下的细长抽油杆的振动视为一个由悬点上下往复运动引起的受迫振动。

抽油杆柱的一段截取示意图如图 5.1 所示。这里假设以悬点为原点，沿井方向为位移方向，沿杆柱纵向截取一点 x 和另一点 $x + \Delta x$ ， F_d 为微元所受阻尼，其方向与位移方向相反， F_b 为微元在 x 的张力， F_t 为微元在 $x + \Delta x$ 的张力。

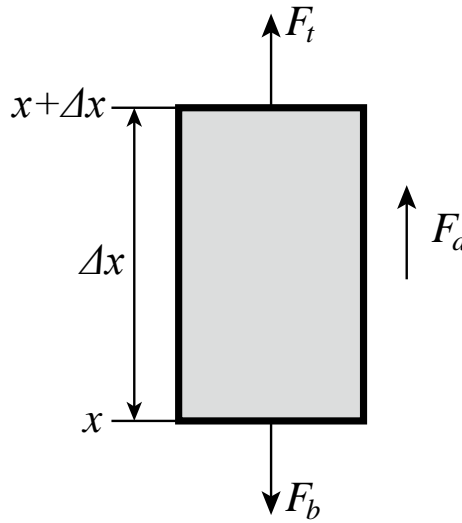


图 5.1 微元受力示意图

根据牛顿第二定律由：

$$F_b - F_t - F_d = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

$$F_b - F_t = EA \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

$$F_d = c \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$

代入公式 (5.1) 可得 Gibbs 模型^[3]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

式中:

$u(x,t)$: 在 x 断面不同时刻 t 的位移函数; a : 应力波在抽油杆柱中的传播速度, 由材料力学知识: $a = \sqrt{E/\rho}$; c : 阻尼系数。

运用 Gibbs 模型求解泵功图的过程如下:

第一步, 获得光杆动载荷函数

将地面示功图数字化, 或使用数字式动力仪, 取得光杆总载荷与时间的函数 $L(\omega t)$ 及光杆位移与时间的函数 $U(\omega t)$ 。由光杆总载荷函数可得到光杆动载荷函数 $D(\omega t)$ 如下:

$$D(\omega t) = L(\omega t) - W_r \quad (5.4)$$

式中, W_r : 光杆在液体中的重量。

将这两个函数用傅里叶级数展开可得:

$$\begin{aligned} D(\omega t) &= \frac{1}{2} \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_1\sigma_n \cos n\omega t + {}_1\tau_n \sin n\omega t) \\ U(\omega t) &= \frac{1}{2} V_0 + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_1\nu_n \cos n\omega t + {}_1\delta_n \sin n\omega t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

式中, \bar{n} : Fourier 级数所取项数, 本文取为 10。

分析可知, Fourier 级数所取项数 \bar{n} 表示在计算过程中将频率高于 \bar{n} 倍抽吸频率的杂波滤除。

式中的傅里叶系数由 $D(\omega t)$ 和 $U(\omega t)$ 曲线数值积分求得:

$$\begin{aligned} {}_1\sigma_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \\ {}_1\tau_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} D(\omega t) \sin n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \\ {}_1\nu_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega t) \cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \\ {}_1\delta_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega t) \sin n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (5.6)$$

第二步, 计算阻尼系数 c

方法一：Gibbs 提供 c 的一种计算方式^{[3][4]}：

$$c = \frac{\pi a \gamma}{2L} \quad (5.7)$$

γ 是一个无量纲的阻尼因子； $L = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ 是多级抽油杆柱中各级杆长之和。

γ 由图直接读取(文献[3]图 4)。

方法二：运用摩擦功建立的阻尼系数^[5]。其公式表达如下：

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho A} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{2}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{2}{(\omega L/a)/\sin(\omega L/a) + \cos(\omega L/a)} \right] \right\} \quad (5.8)$$

式中： $m = D_t/D_r$ ， $B_1 = \frac{m^2 - 1}{2 \ln m} - 1$ ， $B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{\ln m}$ ； D_t ：油管内径； D_r ：

抽油杆直径； μ ：液体粘度。

钢制抽油杆一般由很多节连接而成，具有相同直径的归为同一级。多级杆抽油系统的直径难以确定，而公式中含有参数抽油杆直径 D_r ，这也就将通过公式 (5.8) 而得出的阻尼系数的应用局限于一级杆抽油系统。针对这一缺陷，根据固液接触面积相同的原则，提出计算多级抽油杆 (m 级) 等效直径的方法：

$$\begin{aligned} \frac{\pi D_{eq}^2 L}{4} &= \sum_{i=1}^m \frac{\pi D_i^2 L_i}{4} \\ D_{eq} &= \sqrt{(\sum D_i^2 L_i) / L} \end{aligned} \quad (5.9)$$

式中， $D_i (i=1, 2, \dots, m)$ ：抽油杆柱各级直径。

公式 (5.8) 是运用摩擦功求解阻尼系数，摩擦功最重要的就是受力面积的确定，这也是公式中会用到抽油杆柱直径的原因。多级抽油杆柱与一级杆柱的区别就在于杆柱直径，若我们将多级杆柱抽象成与其等表面积的一级杆柱，这并不影响抽油系统中摩擦功的计算，反而给我们提供一种计算多级抽油杆中直径的方法，就是公式 (5.9)。

第三步，求解光杆断面 x 处在 t 时刻的位移函数 $u(x, t)$ 和动载荷函数

$F(x, t)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5.10)$$

$$\alpha_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}}$$

$$\beta_n = \frac{n\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2}}$$
(5.11)

$${}_1\kappa_n = \frac{{}_1\sigma_n\alpha_n + {}_1\tau_n\beta_n}{EA_1(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

$${}_1\mu_n = \frac{{}_1\sigma_n\beta_n - {}_1\tau_n\alpha_n}{EA_1(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$
(5.12)

$${}_1O_n(x_1) = ({}_1k_n \cosh \beta_n x_1 + {}_1\delta_n \sinh \beta_n x_1) \sin \alpha_n x_1$$

$$+ ({}_1\mu_n \sinh \beta_n x_1 + {}_1\nu_n \cosh \beta_n x_1) \cos \alpha_n x_1$$

$${}_1P_n(x_1) = ({}_1k_n \sinh \beta_n x_1 + {}_1\delta_n \cosh \beta_n x_1) \cos \alpha_n x_1$$

$$- ({}_1\mu_n \cosh \beta_n x_1 + {}_1\nu_n \sinh \beta_n x_1) \sin \alpha_n x_1$$
(5.13)

$${}_1O'_n(x_1) = \left[\frac{{}_1\tau_n}{EA_1} \sinh \beta_n x_1 + ({}_1\delta_n \beta_n - {}_1\nu_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_1 \right] \sin \alpha_n x_1$$

$$+ \left[\frac{{}_1\sigma_n}{EA_1} \cosh \beta_n x_1 + ({}_1\nu_n \beta_n + {}_1\delta_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_1 \right] \cos \alpha_n x_1$$

$${}_1P'_n(x_1) = \left[\frac{{}_1\tau_n}{EA_1} \cosh \beta_n x_1 + ({}_1\delta_n \beta_n - {}_1\nu_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_1 \right] \cos \alpha_n x_1$$

$$- \left[\frac{{}_1\sigma_n}{EA_1} \sinh \beta_n x_1 + ({}_1\nu_n \beta_n + {}_1\delta_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_1 \right] \sin \alpha_n x_1$$
(5.14)

式中 $n=1,2,\dots,\bar{n}$, \bar{n} 表示 Fourier 级数所取项数。

如果抽油杆柱只有一级, 则位移函数 $u(x,t)$ 和动载荷函数 $F(x,t)$ 计算如下:

$$u(x_1, t) = \frac{{}_1\sigma_0 x_1}{2EA_1} + \frac{{}_1\nu_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_1O_n(x_1) \cos n\omega t + {}_1P_n(x_1) \sin n\omega t)$$
(5.15)

$$F(x_1, t) = EA_1 \left[\frac{{}_1\sigma_0}{2EA_1} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_1O'_n(x_1) \cos n\omega t + {}_1P'_n(x_1) \sin n\omega t) \right]$$
(5.16)

在油田的实际生产过程中, 一般采用多级杆, 所以对抽油杆柱的动载荷需要分级计算, 逐级消除抽油杆柱动载荷。首先计算第一级杆柱末端载荷与位移; 然后以第一级杆柱末端为第二级初始及边界条件, 划分第二级抽油杆, 再计算其末端载荷与位移。以此类推, 直至求出最后一级末端的载荷与位移, 得出最终的泵功图。

第四步，计算连接点处过渡关系

根据连续性关系，计算下一级杆柱载荷与位移所需的系数与计算上一级杆柱的系数的关系如下：

$$\begin{aligned}
 {}_{j+1}V_0 &= \frac{{}_j\sigma_0 x_j}{EA_j} + {}_jV_0 \\
 {}_{j+1}V_n &= {}_jO_n(x_j) \\
 {}_{j+1}\delta_n &= {}_jP_n(x_j) \\
 {}_{j+1}\sigma_0 &= {}_j\sigma_0 \\
 {}_{j+1}\sigma_n &= EA_j {}_jO'_n(x_j) \\
 {}_{j+1}\tau_n &= EA_j {}_jP'_n(x_j)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{j+1}\kappa_n &= \frac{{}_{j+1}\sigma_n \alpha_n + {}_{j+1}\tau_n \beta_n}{EA_{j+1}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \\
 {}_{j+1}\mu_n &= \frac{{}_{j+1}\sigma_n \beta_n - {}_{j+1}\tau_n \alpha_n}{EA_{j+1}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{j+1}O_n(x_{j+1}) &= ({}_{j+1}k_n \cosh \beta_n x_{j+1} + {}_{j+1}\delta_n \sinh \beta_n x_{j+1}) \sin \alpha_n x_{j+1} \\
 &\quad + ({}_{j+1}\mu_n \sinh \beta_n x_{j+1} + {}_{j+1}v_n \cosh \beta_n x_{j+1}) \cos \alpha_n x_{j+1} \\
 {}_{j+1}P_n(x_{j+1}) &= ({}_{j+1}k_n \sinh \beta_n x_{j+1} + {}_{j+1}\delta_n \cosh \beta_n x_{j+1}) \cos \alpha_n x_{j+1} \\
 &\quad - ({}_{j+1}\mu_n \cosh \beta_n x_{j+1} + {}_{j+1}v_n \sinh \beta_n x_{j+1}) \sin \alpha_n x_{j+1}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{j+1}O'_n(x_{j+1}) &= \left[\frac{{}_{j+1}\tau_n}{EA_{j+1}} \sinh \beta_n x_{j+1} + ({}_{j+1}\delta_n \beta_n - {}_{j+1}v_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_{j+1} \right] \sin \alpha_n x_{j+1} \\
 &\quad + \left[\frac{{}_{j+1}\sigma_n}{EA_{j+1}} \cosh \beta_n x_{j+1} + ({}_{j+1}v_n \beta_n + {}_{j+1}\delta_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_{j+1} \right] \cos \alpha_n x_{j+1} \\
 {}_{j+1}P'_n(x_{j+1}) &= \left[\frac{{}_{j+1}\tau_n}{EA_{j+1}} \cosh \beta_n x_{j+1} + ({}_{j+1}\delta_n \beta_n - {}_{j+1}v_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_{j+1} \right] \cos \alpha_n x_{j+1} \\
 &\quad - \left[\frac{{}_{j+1}\sigma_n}{EA_{j+1}} \sinh \beta_n x_{j+1} + ({}_{j+1}v_n \beta_n + {}_{j+1}\delta_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_{j+1} \right] \sin \alpha_n x_{j+1}
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

式中 $j=1,2,\dots,m-1$, $n=1,2,\dots,\bar{n}$ 。

抽油杆柱最末端的动载荷与位移函数为

$$u(x_m, t) = \frac{{}_m\sigma_0 x_m}{2EA_m} + \frac{{}_mV_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_mO_n(x_m) \cos n\omega t + {}_mP_n(x_m) \sin n\omega t) \tag{5.21}$$

$$F(x_m, t) = EA_m \left[\frac{m\sigma_0}{2EA_m} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} ({}_m O'_n(x_m) \cos n\omega t + {}_m P'_n(x_m) \sin n\omega t) \right] \quad (5.22)$$

5.2 示功图与泵功图的绘制

Gibbs 模型的计算过程最终推导出抽油杆柱最末端的动载荷与位移函数，运用两种求解阻尼系数的方法，由附件 1 和附件 2 所提供的数据，我们给出了一级杆油井的悬点示功图和泵功图（由阻尼因子 γ 计算阻尼系数），如图 5.2 所示：

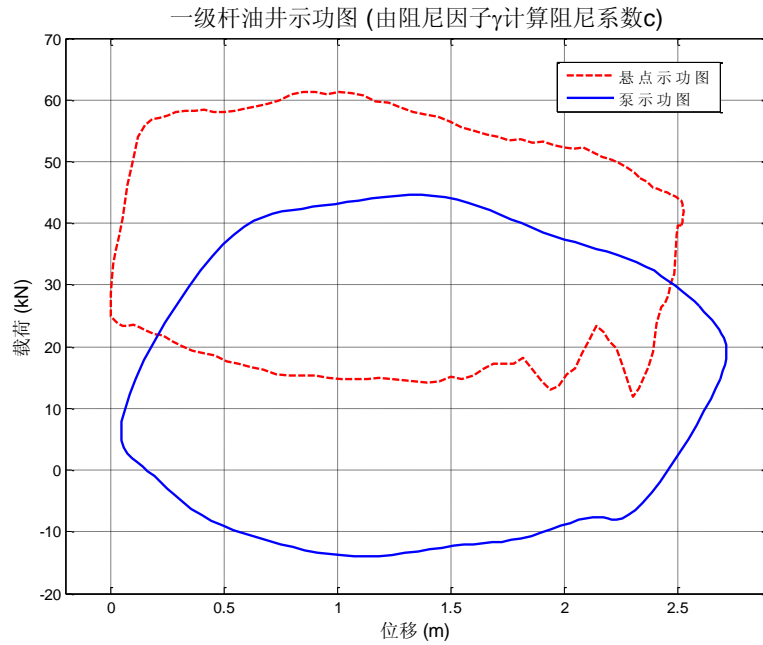


图 5.2 一级杆油井由阻尼因子计算阻尼系数对应示功图

从图中可以看出，泵示功图的载荷整体小于悬点示功图，这是由于悬点处的载荷还包括抽油杆本身的重量。此外，泵示功图中下冲程的一部分载荷为负，这是泵向下运动时，受到摩擦阻力引起的。

示功图不能描述位移与载荷随时间的变化规律，因此我们分别给出了位移-时间曲线与载荷-时间曲线，如图 5.3 所示：

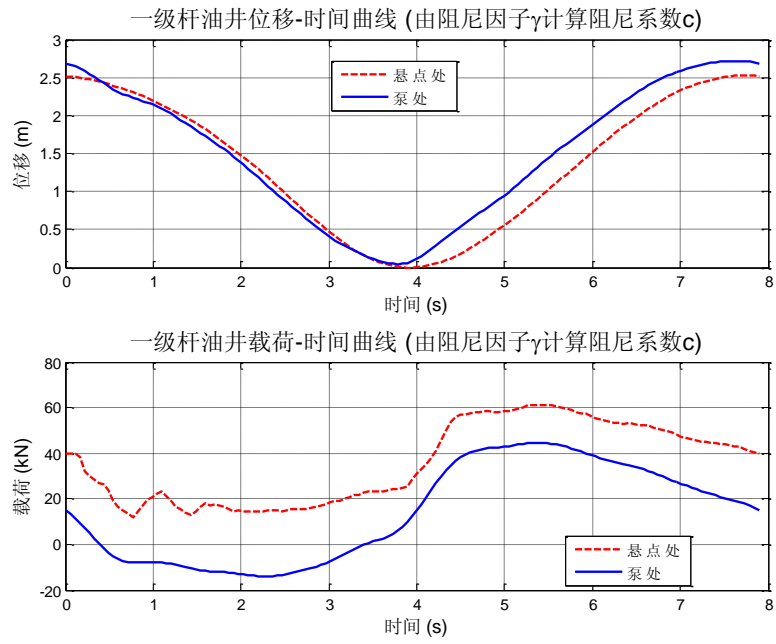


图 5.3 一级杆油井位移、载荷随时间变化曲线图

图 5.4 为一级杆油井的悬点示功图和泵功图 (由摩擦功计算阻尼系数), 图 5.5 为一级杆油井的位移-时间曲线与载荷-时间曲线。

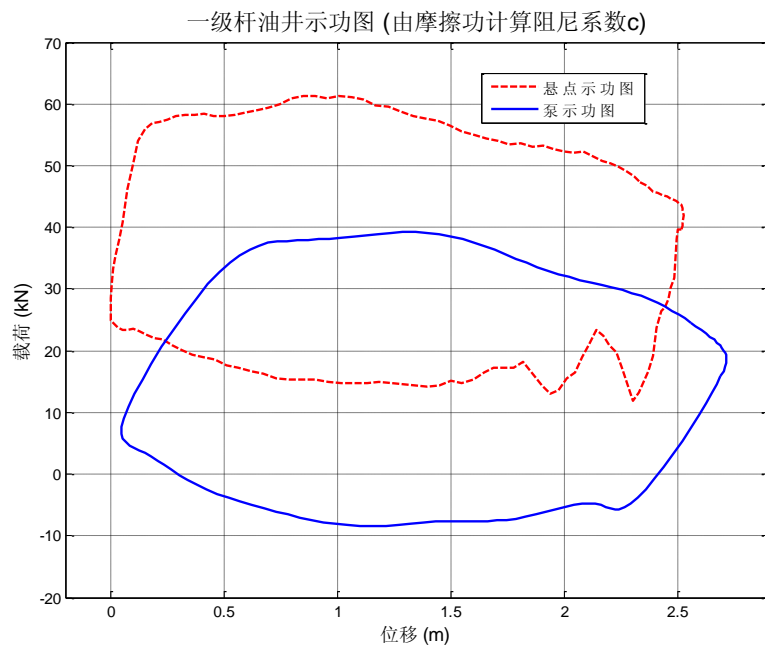


图 5.4 一级杆油井由摩擦功计算阻尼系数对应示功图

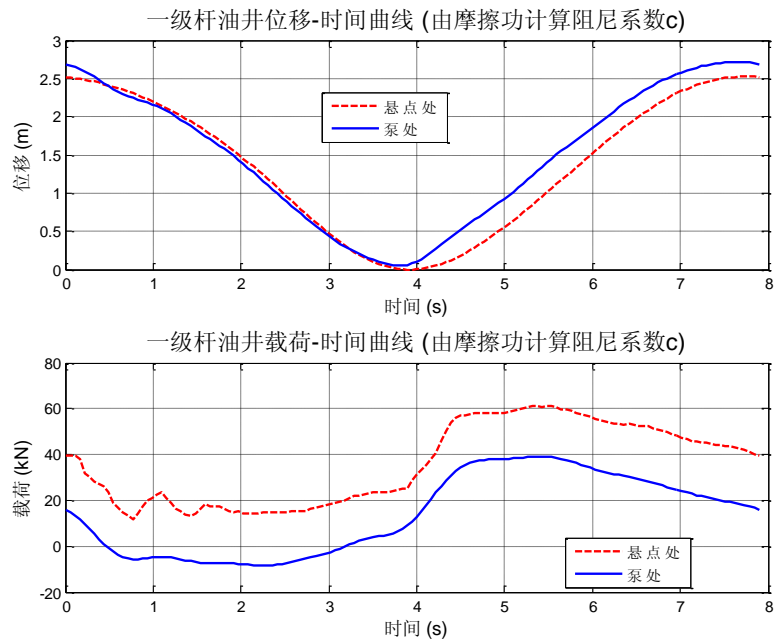


图 5.5 一级杆油井位移、载荷随时间变化曲线图

通过将该一级杆分为三段一级杆进行计算，发现两种方法计算结果一致，从而验证了模型的有效性。

图 5.6 为三级杆油井的悬点示功图和泵功图(由阻尼因子 γ 计算阻尼系数)，图 5.7 为三级杆油井的位移-时间曲线与载荷-时间曲线。

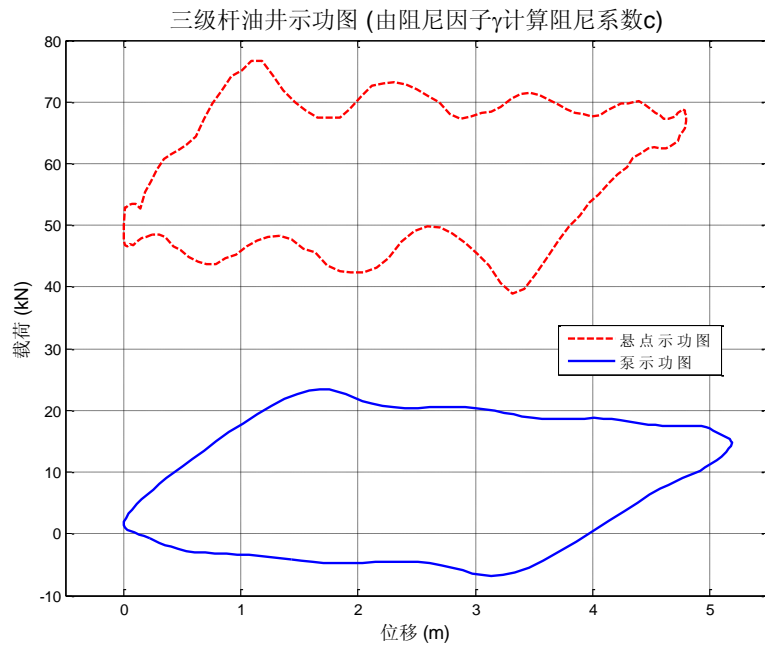


图 5.6 三级杆油井由阻尼因子计算阻尼系数对应示功图

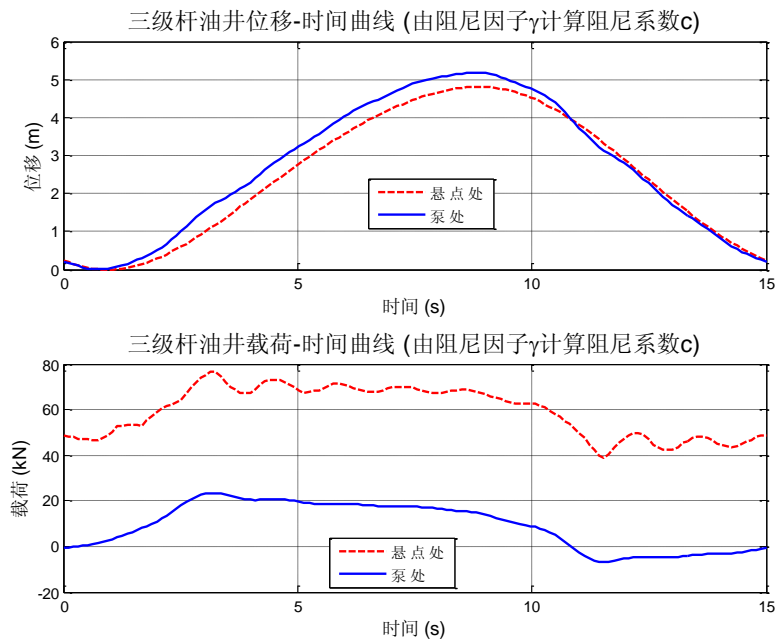


图 5.7 三级杆油井位移及载荷随时间变化曲线图

图 5.8 为三级杆油井的悬点示功图和泵功图（由摩擦功计算阻尼系数），图 5.9 为三级杆油井的位移-时间曲线与载荷-时间曲线。

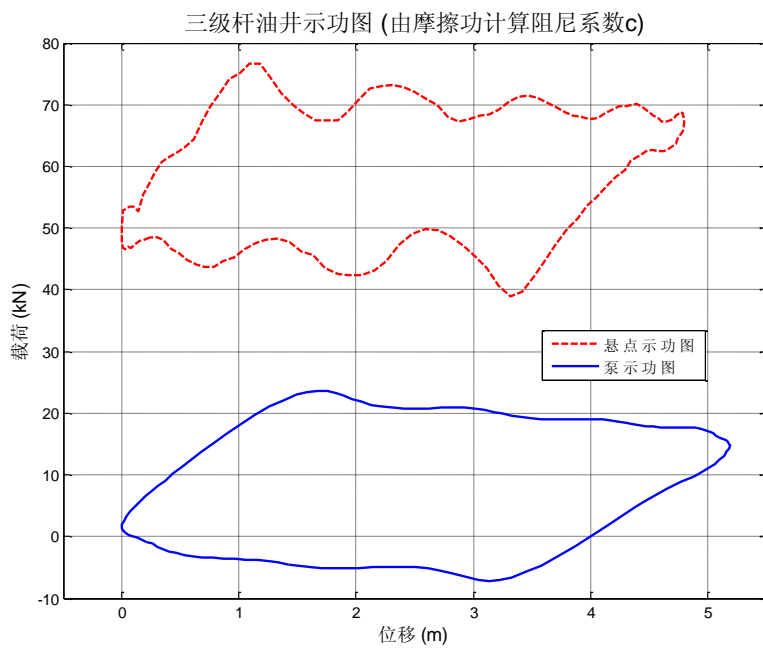


图 5.8 三级杆油井由摩擦功计算阻尼系数对应示功图

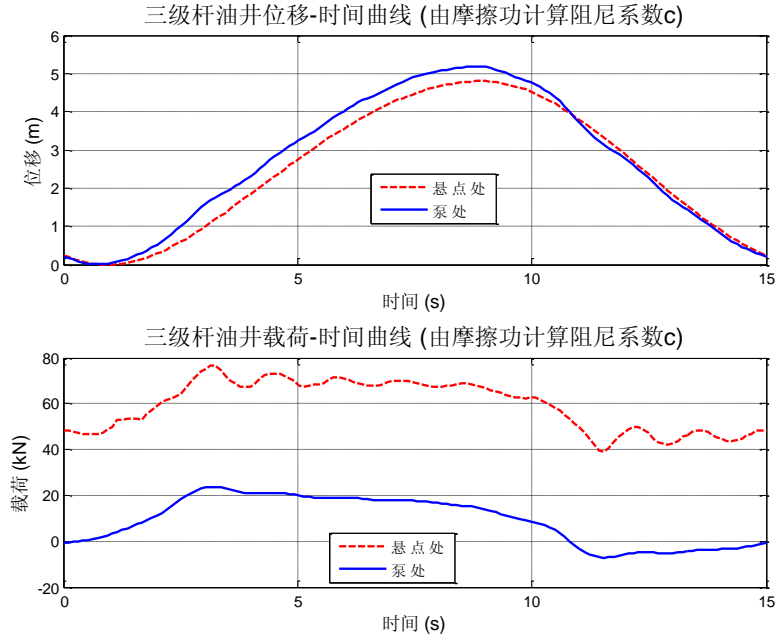


图 5.9 三级杆油井位移及载荷随时间变化曲线图

对比上图发现，采用两种阻尼因子计算得到的泵示功图形状基本相同，这说明从悬点示功图转化为泵示功图的过程对阻尼因子不敏感。

6 泵功图的应用

泵功图是一条封闭曲线，它包含了油井的许多信息。本部分中，通过对泵功图预处理，然后基于参数方程求解曲率以及曲率对弧长的变化率，根据曲率来判别游动阀和固定阀开闭点，并确立泵的有效冲程。基于有效冲程，建立估计油井产量的模型。分析泵内含气时泵功图的表现形式，以此由泵功图判别泵内是否含气。

6.1 泵功图确立固定阀和游动阀开闭临界点

6.1.1 泵功图的预处理

实际得到的泵功图其载荷值范围远远大于位移值范围，在计算曲率等信息时会产生较大的偏差，因此计算之前需要对泵功图原始数据进行归一化处理。

6.1.2 固定阀和游动阀开闭临界点的确立

问题二中得到载荷—时间函数 $F(t)$ 和位移—时间函数 $D(t)$ ，曲率计算公式为：

$$\kappa(t) = \frac{|D'(t)F''(t) - D''(t)F'(t)|^2}{|D'^2(t) + F'^2(t)|^{3/2}}$$

由此可求解出泵功图上各点的曲率，绘制出曲率—时间函数关系图和曲率

对弧长变化率—时间函数关系图。

图 6.1 给出一级杆油井泵功图中各点曲率及曲率变化率，从中找出数个（10 个以下即可，本文取 5 个）曲率较大的峰值点，在泵功图上标示出，如图 6.2 所示。图 6.3 是三级杆油井泵功图中各点曲率及曲率变化率随时间的变化函数图，同样找出 5 个曲率较大的峰值点，其在泵功图上标示如图 6.4 所示。对于图 6.2 和图 6.4，将距离泵功图坐标框四角距离最近的 4 个点取出，作为泵功图的特征点。载荷较大的两点为固定阀的开闭点，其中位移较小者为固定阀的打开点；载荷较小的两点为游动阀的开闭点，其中位移较小者为游动阀的闭合点。

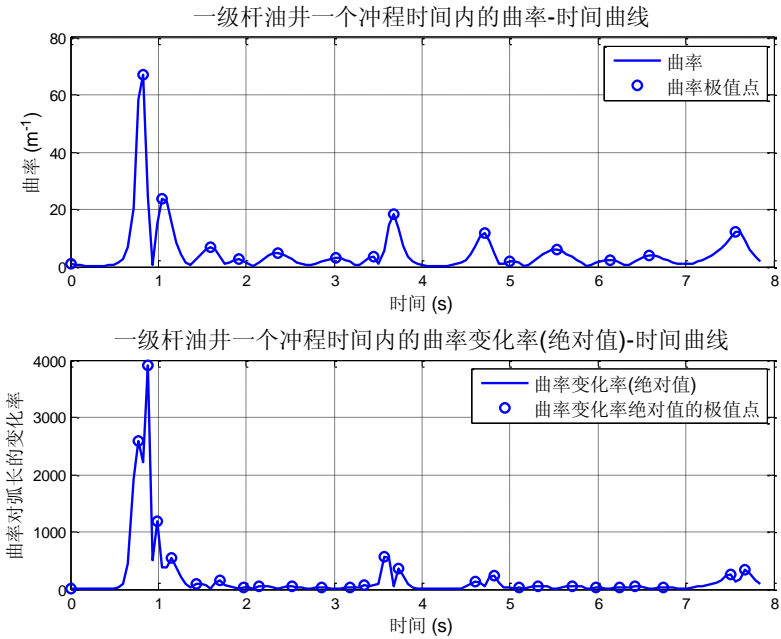


图 6.1 一级杆油井曲率变化图

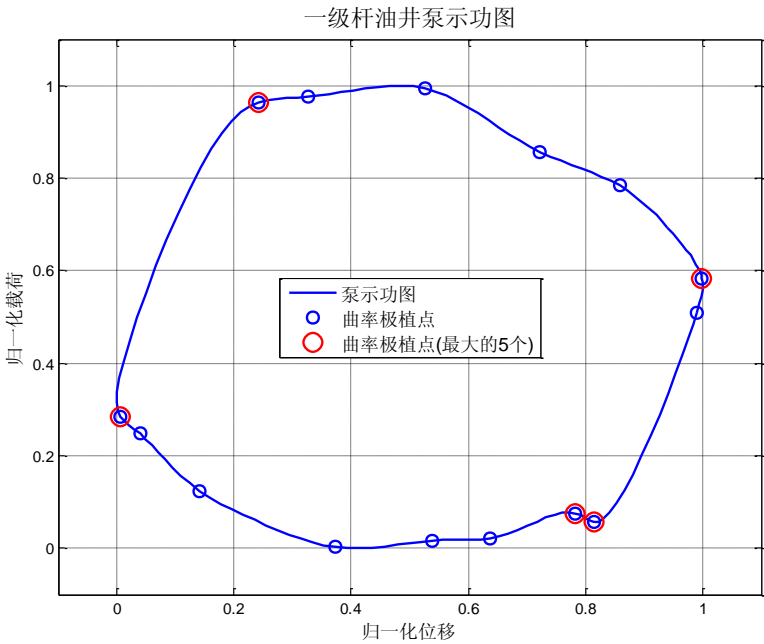


图 6.2 一级杆油井泵功图曲率极值点

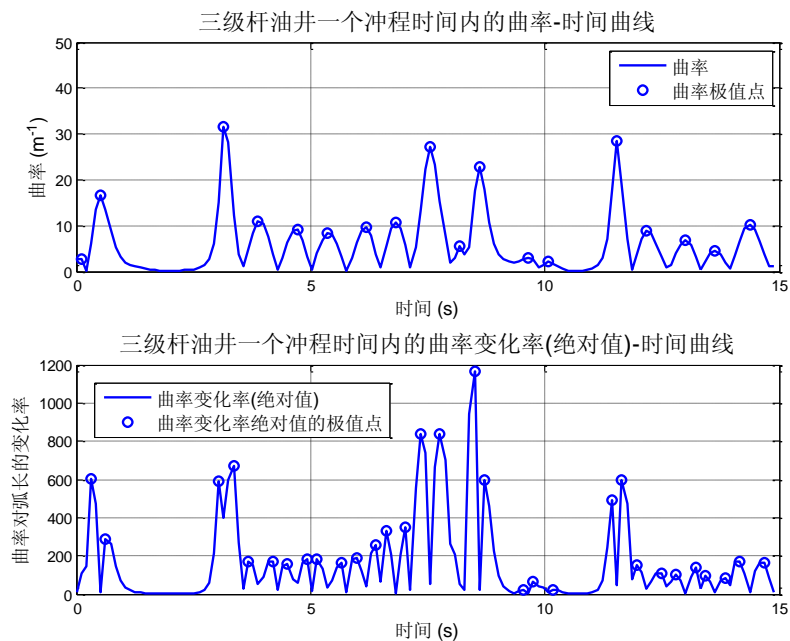


图 6.3 一级杆油井曲率变化图

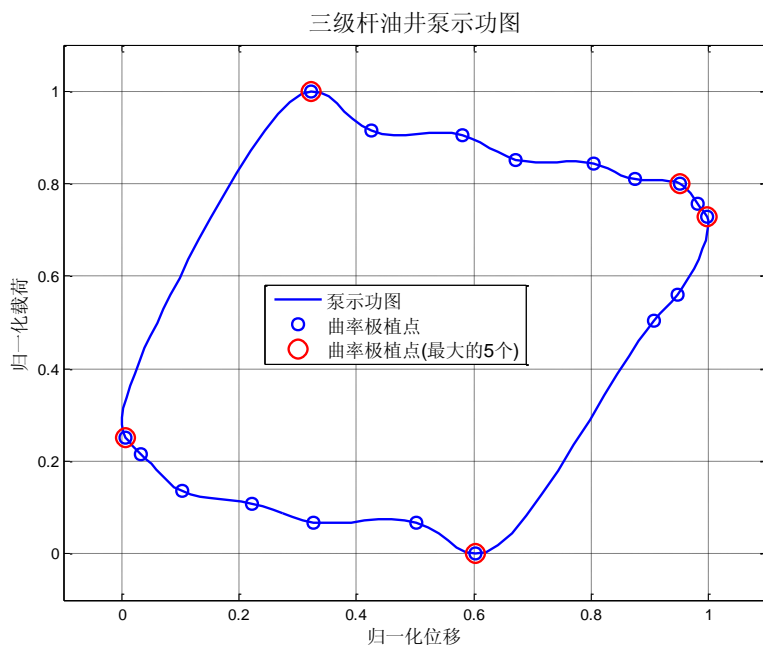


图 6.4 三级杆油井泵功图曲率极值点

通过观察上图发现，曲率能够更好地反映特征点的位置，因此采用曲率而不是使用曲率变化率进行判断。

6.2 利用泵功图估计油井产量

油管混合物体积系数 η_v 是指地面液体体积与在 (p, T) 条件下油管内混合液

体积的比值，与压力 p 、温度 T 、原油体积系数 B_0 、油田水的体积系数 B_w 、溶解气油比 n_s 等参数有关。在不考虑井下气体对计算产液量的影响下，混合物体积系数 η_v 的计算公式如下：

$$\eta_v = \frac{1}{(1-n_w)B_0 + n_w B_w} \quad (6.1)$$

式中， n_w ：混合液的含水率。

式中的参数原油体积系数 B_0 为附件中给出的数据，水的体积系数 B_w 通过井下压力和温度计算得到^{[6][7]}，其计算公式如下^[7]：

$$B_w = C_0 + C_1(145.03p) + C_2(145.03p)^2 \quad (6.2)$$

式中， p ：井下压力，查图可得（文献[6]的 5.2.2 节图 5-9(1)）；

$C_i = q + \phi + \phi^2$ ， $i=0, 1$ ，查表可得（文献[6]的 4.5.4 节表 4-3）；

θ ：井下温度，查图可得（文献[7]的 6.1.4 节图 6.9）。

6.2.1 功转化分析估算油井产量

我们介绍了在泵功图上，通过寻找曲率峰值点来确立游动阀闭合点 A 、固定阀的打开点 B 、固定阀的闭合点 C 以及游动阀打开点 D 。

泵功图上这四点所确立的四段曲线中固定阀和游动阀的状态如表 6.1 所示。

表 6.1 泵功图各段两阀状态

	AB	BC	CD	DA
游动阀	闭合	闭合	闭合	打开
固定阀	闭合	打开	闭合	闭合

只有当游动阀闭合时，抽油杆柱的上下移动做功才能改变泵内柱塞以上混合液的势能。由表 3 可知，在泵功图的 AB 、 BC 和 CD 段，游动阀是闭合的，期间，抽油杆的位移改变量为 $h = (x_B - x_A) + (x_C - x_B) + (x_D - x_C)$ ，根据能量守恒可得：

$$Q_e H = A_p H \eta_v \rho_l g h$$

式中， Q_s ：一个冲程的产液量； H ：泵深； ρ_l ：混合液的密度； A_p ：柱塞横截面积。

油井的日产液量为

$$Q = 1440 N_s Q_e .$$

6.2.2 利用有效冲程估算油井产量

有效冲程（记为 S_{pe} ）指泵中柱塞在一个运动周期内真正实现从出油口排油的那段冲程。抽油泵的吸入过程从固定阀打开时开始到固定阀关闭时结束，柱塞在这一段时间走过的距离即为固定阀开闭点之间的距离，记为： S_{foc} ；排出过程从游动阀打开时开始到游动阀关闭时结束，柱塞在这一段时间走过的距离即为游动阀开闭点之间的距离，记为： S_{moc} 。柱塞的有效冲程总是等于 S_{foc} 与 S_{moc} 中的较小值^[6]，即 $S_{pe} = \min(S_{foc}, S_{moc})$ 。

抽油机井井口产液量的计算与抽油机的冲次、冲程、抽油泵的参数、原油物性参数等有关。由抽油机井的产液量与有效冲程之间的关系以及液体的 PVT 关系，我们可以建立如下估算油井日产液量 Q 的模型：

$$Q = 1440 N_s (S_{pe} A_p - \Delta Q_p) \eta_v \quad (6.3)$$

式中， N_s ：抽油机的冲次； A_p ：柱塞的横截面积； ΔQ_p ：抽油泵一个冲次的漏失量。

抽油机的冲次和柱塞的横截面积都是抽油机井自身的参数，属已知数据。下面，我们给出漏失量和油管内混合物体积系数的计算公式。

漏失量 ΔQ_p 的计算

抽油泵的漏失有很多原因造成，如柱塞与泵筒的间隙漏失、阀漏失和油管漏失等，只考虑柱塞与泵筒的间隙漏失的计算公式如下：

$$\Delta Q_p = \frac{\pi D_p \delta^3 (p_d - p_s)}{12 \mu l_z} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{e}{\delta} \right)^2 \right] - \frac{\pi D_p \delta \bar{v}_u}{2} \quad (6.4)$$

式中， D_p ：柱塞直径； l_z ：柱塞长度； δ ：柱塞与泵筒之间半径方向的平均间隙； e ：柱塞与泵筒轴线之间的偏心距； μ ：井内液体的动力粘度； p_d ：抽油泵排出压力； p_s ：抽油泵吸入压力； \bar{v}_u ：柱塞上冲程平均速度。

尽管我们可以给出柱塞与泵筒的之间的间隙漏失量的计算公式，但是，由于许多数据实际测量困难或者无法准确度量，这都造成公式的应用困难。在本文中，我们需要假设漏失量为 0。

表 6.2 两种算法的油井产量计算结果（单位为吨）

	有效功算法	有效冲程算法
一级杆油井	90.5764	84.8659
三级杆油井	26.8476	26.6821

6.3 利用泵功图诊断泵内是否含有气体

6.3.1 气体对泵功图的影响分析

由于某种原因，在下冲程末余隙内还残存一定数量的溶解气和压缩气，导致泵未充满。上冲程开始后，泵内压力因气体的膨胀而不能很快降低，加载变慢，使吸入阀打开滞后，残存的气量越多，泵口压力越低，则吸入阀打开滞后的越多，此时光杆更大的提升后其载荷才达到最大点，在泵功图上的表现是上曲线增速减缓，也就是斜率逐渐减小。下冲程开始后，气体受压缩，泵内压力不能迅速提高，卸载变慢，使排出阀滞后打开，泵的余隙越大，进入泵内的气量越多，则排出阀打开滞后的也越多，泵功图卸载线的上凸抛物线越明显。

6.3.2 面积判别法

在前面，我们对气体影响下泵功图的表现形式已经做了详细分析。如何将实际测量绘制的泵功图与气体影响下典型的泵功图作对比，是我们诊断泵内是否含有气体需要解决的最重要的问题。如果泵内含有气体，其对泵功图的最大影响就是右下部缺失，我们根据泵功图上各点曲率可以确立游动阀闭合点 A 、固定阀的打开点 B 以及固定阀的闭合点 C 。

对泵功图作如下处理：

过 A 点作 BC 的平行线，过 C 点作 AB 的平行线，两组对边的平分线相较于点 E ，这样我们将两油井的泵功图分割成如图 6.5 和 6.6 所示的四块面积。

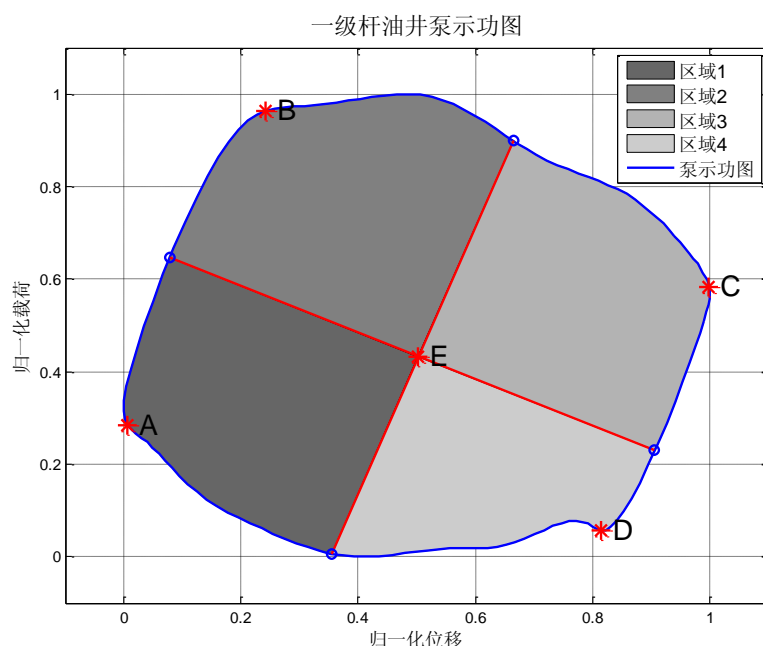


图 6.5 一级杆油井泵功图分割图

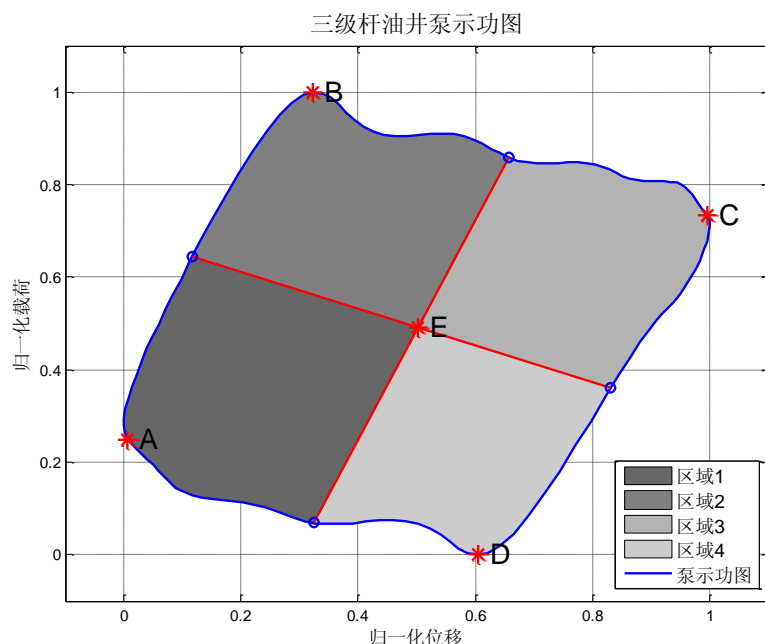


图 6.6 三级杆油井泵功图分割图

两口油井的泵功图分割后四块区域的面积如表 3 所示。

表 6.3 油井分割区域面积

油井	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4
一级杆	0.195344	0.212636	0.200255	0.142422
三级杆	0.181790	0.158841	0.158778	0.139850

由于气体影响下泵功图中区域 4 的面积较其余三个区域会有缺失，因此建立判别油井泵中是否含有气体的判据如下：

$$\begin{cases} S_4 > 0.8 \min(S_1, S_2, S_3) & \text{无泵内充气现象} \\ S_4 < 0.8 \min(S_1, S_2, S_3) & \text{有泵内充气现象} \end{cases}$$

认为当区域 4 的面积较其他区域面积缺失大于 20% 以上时，认为存在泵内充气，从表 6.3 中可以看出，一级杆油井泵功图分割后第四块区域面积明显比其他三块缺失很多，与气体影响下典型泵功图的表现形式对比之后，我们判定一级杆油井泵内**含有**气体。三级杆油井泵功图分割后四块区域面积并无显著差异，据此，我们判定三级杆油井泵内**不含有**气体。

7 问题的进一步研究

7.1 Gibbs 模型的改进

Gibbs 模型的建立过程是截取抽油杆柱的一段微元体进行受力分析，运用牛顿第二定律，最终得到描述抽油杆柱纵向振动的波动方程。在受力分析时，

Gibbs 模型考虑了该段抽油杆柱微元所受阻尼，其中微元所受阻尼主要是混合液与抽油杆柱的摩擦力，而不包含混合液与油管内壁的摩擦力对抽油杆柱的影响。Gibbs 抽油杆柱重力处理为悬点处的集中载荷，这与重力实际为分布载荷不相符。

7.1.1 基于重力分布载荷的改进 Gibbs 模型

忽略混合液与油管内壁的摩擦力对抽油杆柱的影响，在 Gibbs 模型的基础上，我们考虑了抽油杆柱重力的分散影响。记微元体所受重力为 G' ，微元体受力如图 7.1 所示：

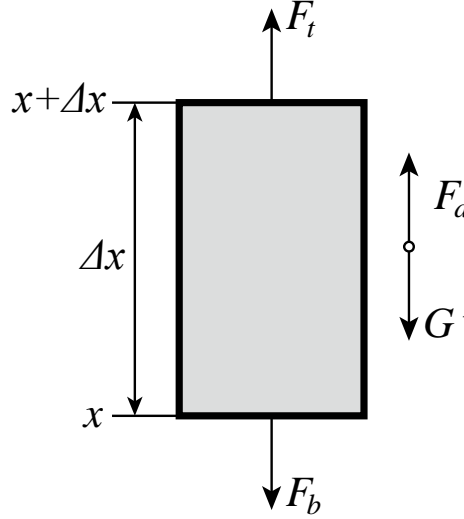


图 7.1 考虑重力分布载荷的微元受力示意图

根据牛顿第二定律有：

$$F_b - F_t - F_d + G' = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.1)$$

微元所受重力 G' 为：

$$G' = \rho A \Delta x g' \quad (7.2)$$

式中：

$g' = g\rho'/\rho$ ，即抽油杆柱在液体中考虑浮力进行等效的重力加速度

将 (5.2) 和 (7.2) 式代入 (7.1) 式中得到抽油杆柱新的带阻尼的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g' \quad (7.3)$$

7.1.2 有限差分法求解

为处理复杂的载荷分布形式，建立基于时间和抽油杆离散化有限差分方法。在均值杆段，将抽油杆柱轴线长 L 离散成等步长的 m 个单元，步长为 Δx ，各单元以下标 i 表示；将周期 T 离散成等长的 n 个时间段，时间步长为 Δt ，各单元以

下标 j 表示, 则 $u_{i,j}$ 表示抽油杆柱上第 i 个节点在时刻 j 的位移, 离散时选用二阶精度的差分公式^[8]:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t}\end{aligned}$$

代入原方程整理得:

$$u_{i+1,j} = \kappa(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \frac{\kappa\Delta t c}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + 2u_{i,j} - u_{i-1,j} - \kappa g' \Delta t^2 \quad (7.4)$$

式中 $\kappa = \Delta x^2 / a^2 \Delta t^2$ 。

注: 差分方程迭代步长应满足 CFL 条件: $\Delta x \leq a \Delta t$

在两级杆柱相接处应考虑变形协调及连续性条件构成的边界条件, 以第一、二级杆柱相接处为例, 应满足^[6]:

$$(P_{i,j})_1 = (P_{i,j})_2, \quad (u_{i,j})_1 = (u_{i,j})_2$$

同样运用差分法可得:

$$u_{i+1,j} = \frac{\alpha_s + \beta_s}{\nu_2} u_{i,j+1} - \frac{2\alpha_s - \nu_1 - \nu_2}{\nu_2} u_{i,j} + \frac{\alpha_s - \beta_s}{\nu_2} u_{i,j-1} - \frac{\nu_1}{\nu_2} u_{i-1,j} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\nu_2} g' \quad (7.5)$$

式中, $\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_s = \beta_1 + \beta_2$

其中 $\alpha_k = \frac{\Delta x E A_k}{2(a_k \Delta t)^2}$; $\beta_k = \frac{\Delta x E A_k c}{4a_k^2 \Delta t}$; $\gamma_k = \frac{\Delta x E A_k}{2a_k^2}$; $\nu_k = \frac{E A_k}{\Delta x_k}$ ($k=1,2$)

在抽油机悬点一个运动周期内, 地面悬点位移在不同时刻分别为 u_1, u_2, \dots, u_n ; 悬点动载荷为 D_1, D_2, \dots, D_n , 则波动方程的边界条件为:

$$u_{0,i} = u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$D_i = EA \frac{u_{0,i} - u_{1,i}}{\Delta x}, i = 1, 2, \dots, n$$

由此可得:

$$u_{1,i} = \frac{D_i \Delta x}{EA} + u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

由示功图是一个周期函数可知： $u_{j,n} = u_{j,0}, u_{j,1} = u_{j,n+1}$ ，即采用周期性边界条件，类似于计算流体力学中构造 ghost point 的方法^[8]。

运用波动方程计算差分网格图，如图 7.1，我们可以由已知边界条件点得到其他各点的位移。

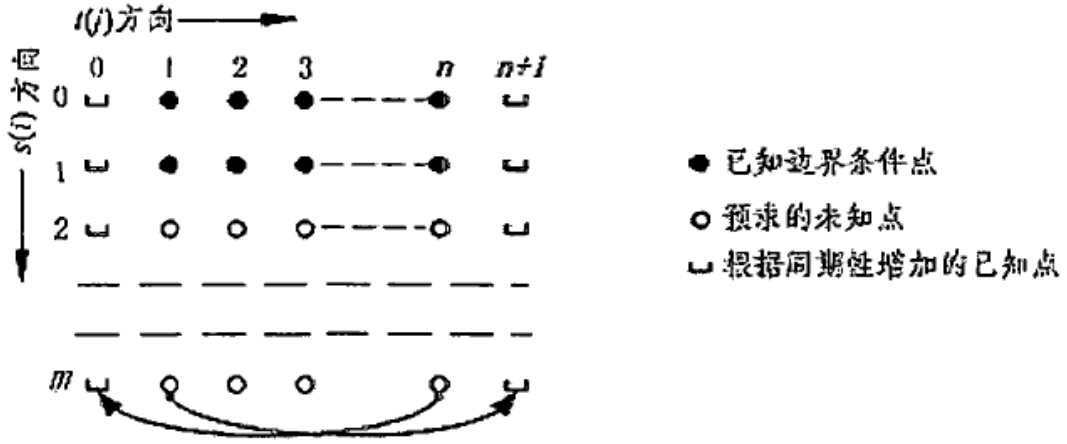


图 7.1 波动方程计算差分网格图

泵处载荷采用二阶精度的单侧差分：

$$F_{m,j} = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{m,j} = \frac{EA}{2\Delta x} (3u_{m,j} - 4u_{m-1,j} + u_{m-2,j})$$

有限差分方法可以得到抽油杆上各位置、各时刻的位移和载荷数据。采用有限差分方法离散并求解改进后的模型，并与 Gibbs 模型求解结果进行了对比。

一级杆改进模型与原始模型泵功图的对比如图 7.2 所示，计算中使用参数 $m = 901$ ， $n = 144$ 。由图可知，改进模型与原始模型求解结果较为相似，有限差分方法得到的泵示功图包含较多的高频信号，这是由于级数解法中取有限项 \bar{n} 意味着在计算过程中将频率高于 \bar{n} 倍抽吸频率的杂波滤除，相当于低通滤波器的作用。

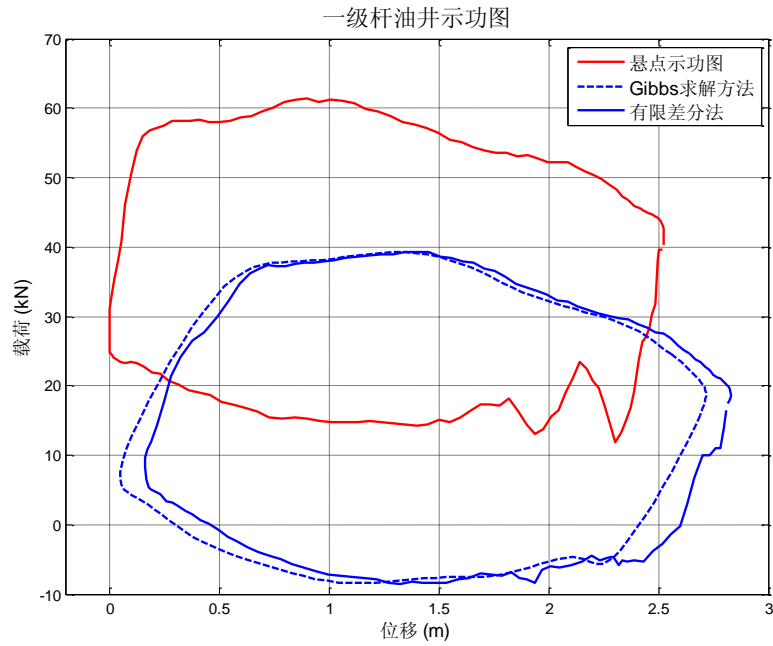


图 7.2 一级杆改进模型与原始模型泵功图的对比

图 7.3 给出了一级杆改进模型与原始模型相位图。可以看出，原模型和改进模型中，泵的相位均落后于悬点的相位。从波的传播角度分析，这种情况是合理的。

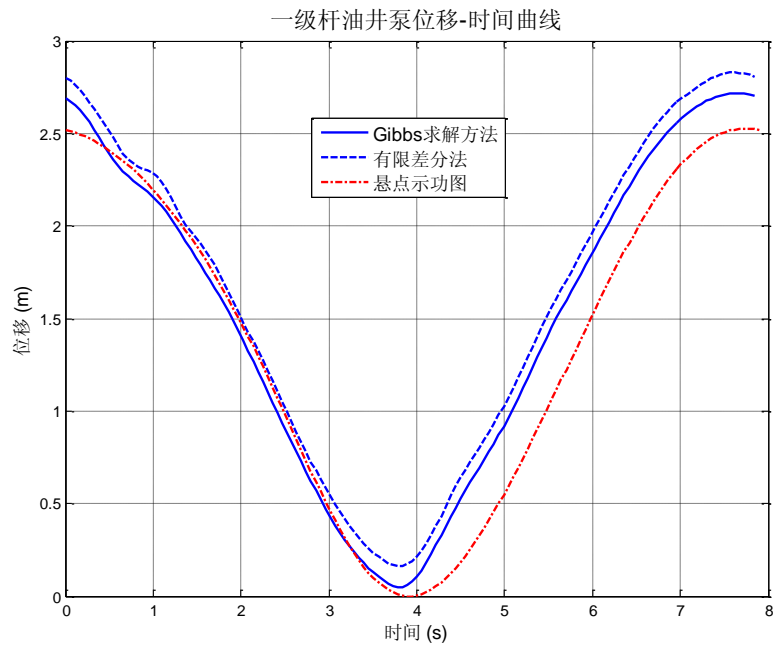


图 7.3 一级杆改进模型与原始模型相位对比

三级杆改进模型与原始模型泵功图的对比如图 7.4 所示，计算中使用参数 $m_1 = 301, m_2 = 301, m_3 = 301$ ， $n = 144$ ，原始模型与改进模型的计算结果非常相

似，有限差分方法保留较多的高频信号，原始模型的计算结果较为平滑。

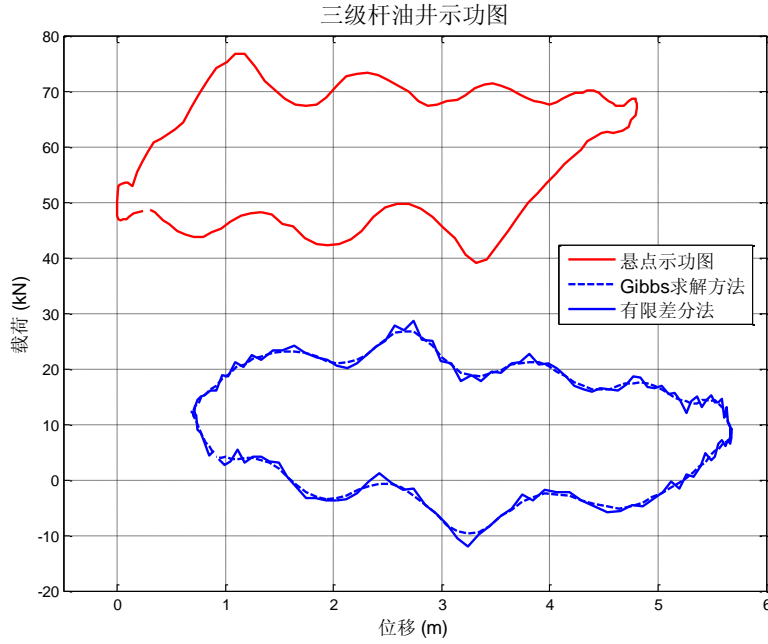


图 7.4 一级杆改进模型与原始模型泵功图的对比

7.2 基于能量守恒的阻尼系数模型与求解

在 Gibbs 模型的建立过程中，阻尼系数 c 出现在微元所受阻尼的表达式中，文献中阻尼系数公式主要通过对系统的力学特性分析得到。寻求新的阻尼系数 c 的求解方法，需要分析微元所受阻尼对应的功，我们通过对抽油杆柱所做功的转化分析来解决这一问题。

通过分析 Gibbs 模型发现，该模型只考虑了抽油杆与油管内液体的阻尼，而不考虑油管内液体与油管的阻尼作用。因此，本文通过微元体受力分析，建立了抽油杆在一个周期内阻尼力做功的积分表达式。从能量角度出发，利用前面得到的有效功和产液量信息，推导出计算阻尼系数计算公式。利用有限差分方法，结合泵功图有效功和油井产液量数据，计算新的阻尼系数。

抽油杆柱上下运动所做的功，一部分转化为已抽出混合液的势能，另一部分则损耗在克服摩擦力上，Gibbs 模型中这部分即是用来克服阻尼做功。

讨论抽油杆某处的一个抽油杆微元。该微元所受阻尼力微元为：

$$dF_d = c(dm) \frac{\partial u}{\partial t} = c\rho A dx \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.6)$$

A ：抽油杆柱截面积

阻尼力做功功率微元为：

$$dP = dF_d \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.7)$$

在整个抽油杆上对功率微元积分，得到某时刻阻尼力对整个抽油杆做功功率：

$$P(t) = \int_L dP = \int_L c \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (7.8)$$

在一个周期内阻尼力所做的功为：

$$W = \int P(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\int_L c \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \right) dt \quad (7.9)$$

如前所述，抽油泵做的总功 W_r 为泵功图封闭曲线的面积，根据能量守恒

$W = W_l + W_d$ 可得：

$$c = \frac{W - W_l}{\int_{t_0}^{t_0+T} \int_L c \rho A \left(\partial u / \partial t \right)^2 dx dt} \quad (7.10)$$

这样，即可泵功图计算的有效功和油井产液量数据，估计阻尼系数。

本文将有限差分法、特征点计算机自动判别系统、油井产液量信息组合成一个迭代求解阻尼系数的系统，对油井的阻尼系数进行了求解。

首先假定一个阻尼系数(或使用其他方法计算得到阻尼系数)作为初始值；然后将其应用于 Gibbs 模型中，利用有限差分方法计算得到泵功图；由泵功图计算油井产液量，得到抽出混合液的势能，同结合泵功图有效功数据一起代入 (7.10) 得出新的阻尼系数。如此迭代，直到前后两次所求阻尼系数之差小于一个预先设定的很小的数 (计算中取 0.0001)，计算流程如图 7.5 所示。

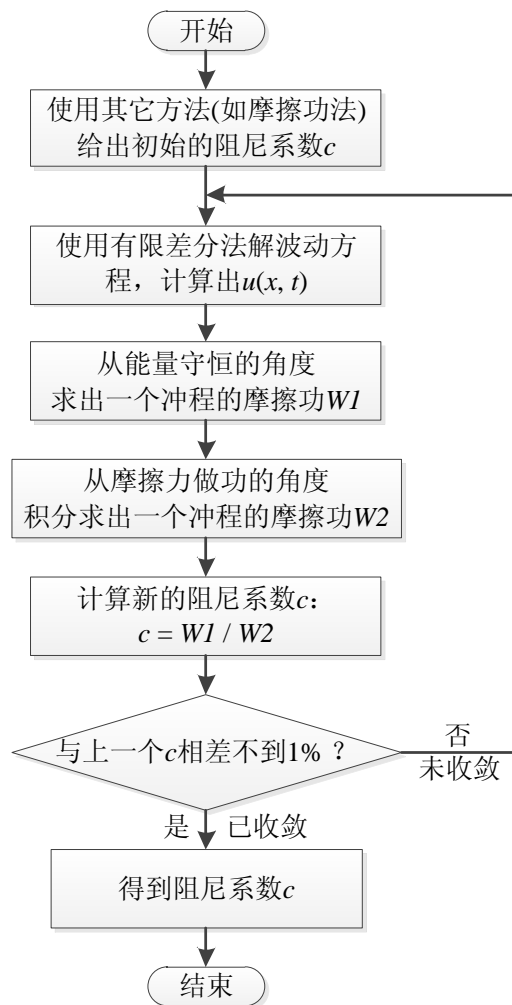


图 7.5 计算阻尼系数的迭代流程图

图 7.6 给出了一级杆油井阻尼系数迭代收敛曲线。

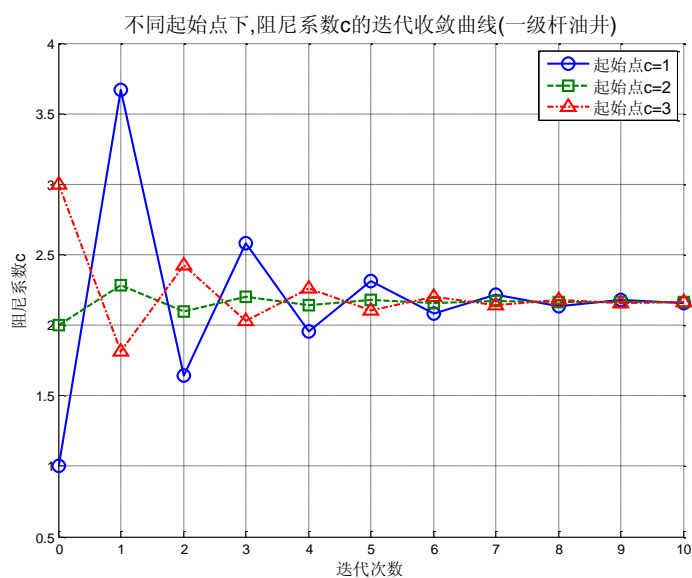


图 7.6 一级杆油井阻尼系数迭代收敛曲线

由图可以看出，对应于一级杆油井初始设定的阻尼系数 $c=1.0, c=2.0, c=3.0$ ，阻尼系数均能够在 10 步之内收敛，最后得到阻尼系数 $c=2.1680$ 。

图 7.7 给出了三级杆油井阻尼系数迭代收敛曲线。

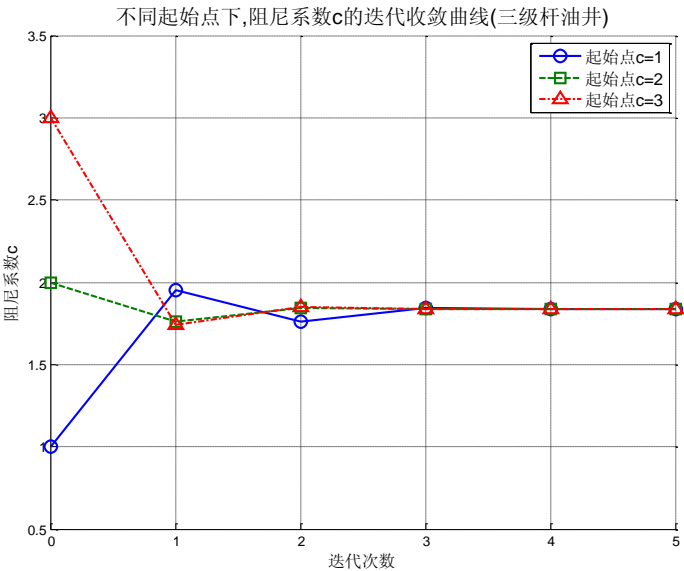


图 7.7 三级杆油井阻尼系数迭代收敛曲线

由图可以看出，对应于三级杆油井初始设定的阻尼系数 $c=1.0, c=2.0, c=3.0$ ，阻尼系数均能够在 5 步之内收敛，最后得到阻尼系数 $c=1.8396$ 。

表 7.1 给出了三种阻尼系数求解结果。

表 7.1 三种方式阻尼系数对比

	Gibbs 法	摩擦功法	迭代法
一级杆油井	2.2758	0.1123	2.1680
三级杆油井	0.9985	0.1126	1.8396

8 模型的评价

问题一，为求解悬点运动规律，本文提出了不做任何简化的四连杆机构运动学模型。计算结果应与实际情况完全相符。

问题二，在计算阻尼系数的摩擦功方法中，本文根据固液接触面积相同的原则建立了将多级杆等效为一级杆的模型，从而使利用摩擦功计算阻尼系数的

方法能够适用于多级抽油杆系统。

问题三，针对泵功图，描绘出任意点的曲率变化函数，基于曲率判断固定阀和游动阀的开闭点，这能够更好反映泵功图的特性，并实现了特征点提取过程的自动化，为之后采用迭代方法求解阻尼系数 c 打下了基础。我们所给出的两种估计油井产量的方式，都用到了功转化分析：第一种是考虑抽油泵在有效冲程内所做的功可以转化为多少混合液的势能；第二种是考虑抽油泵在一个冲程内的什么阶段所做的功用来改变混合液的势能。运用泵功图判别泵内是否含气，主要是将实际得到的泵功图与泵内含气时的典型泵功图作对比。通过对泵功图进行面积分割，计算机能更简便地计算出四块分割图各自的面积，相互比较，并将泵功图与典型泵功图对比以其异同之处来进行判别。

问题四的第一问中，文章对 Gibbs 模型进行了改进，将抽油杆重量当作分布载荷来考虑，更符合实际情况。另外，本文中求解波动方程的有限差分法能够处理更一般的载荷分布形式，同时可以更方便地进行精度与稳定性分析。此外，使用有限差分法可以求出一个冲程时间内，任一时刻、任一位置的位移与载荷数据，从而使我们能够在第二小问中用数值积分的方法求出一个冲程中摩擦力做的总功，进而使得采用迭代法计算阻尼系数 c 成为可能。缺点为计算量大，对计算机性能要求更高，且计算时占用的存储空间大。

问题四的第二问中，文章从功和能量角度分析了摩擦功与阻尼系数 c 的关系。从两种不同的角度算出摩擦功，从而修正阻尼系数 c 。重复该过程即是使用迭代法求解阻尼系数 c 。从实际求解效果来看，本文提出的迭代方法能够快速收敛，且对迭代初值不敏感，求解过程均能够实现自动化，具有一定的实用价值。缺点仍为计算量大，每次迭代都需要进行有限差分法求解波动方程、自动辨识 4 个特征点等运算。

参考文献

- [1] 王鸿勋，张琪，《采油工艺原理》，北京：石油工业出版社，1989.
- [2] 万仁溥，《采油工程手册》，北京：石油工业出版社，2000.
- [3] Gibbs. S.G, Neely. A.B, Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J. Pet. Tech, Jan.1966, pp.93-98.
- [4] Gibbs. S.G, Method of Determing Sucker Rod Pump Performance, United States Patent Office, 3343409, Patented Sept.26, 1967.
- [5] 张琪，吴晓东，抽油机井计算机诊断技术及其应用，华东石油学院学报，8（2），1984: 144-159.
- [6] 高银中，用示功图计算抽油机井井口产液量方法研究，北京交通大学，硕士论文，2007.
- [7] 石颖，油井井下温度场的数值模拟，大庆石油学院，硕士论文，2004.
- [8] Anderson. J. D. Fundamentals of Computational Dynamics, M. C Hill, 2004.