

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 小麦发育后期茎秆抗倒伏性的数学模型

摘 要：

本文共 8 章，对小麦发育后期茎秆抗倒伏性提出了数学模型，给出了数值解及分析，最后提出了建议。

针对问题一，首先对题目所给出的原始抗倒伏指数模型进行量化，得出了 07 年各品种小麦的抗倒伏公式。然后，根据其它年份数据缺失的特点，建立了基于茎秆密度和机械强度的改进型抗倒伏指数模型。最后，得出了缺失数据 08 年及 11 年抗倒伏指数的数值解。

针对问题二，首先建立了倒伏指数与外部形态的关联性分析模型；进一步，使用改进后的通径分析法模型，对于抗倒伏指数及外部形态关系进行分析。最后，用灰色关联分析法进行详细数值运算，并对 08 年两种倒伏原因进行了分析。

针对问题三，提出了理想株型结构的定义，提出了一个双目标优化模型，并探讨各种穗重情况下的理想模型的数值解。

针对问题四，首先建立了茎秆分布模型，然后对于该模型进行简化，分别从茎秆线密度线性变化、分节几何性质均匀以及分节物理性质均匀的情况下获得三个抗倒伏模型。并分别确定了不同条件下的挠曲线方程。通过定义抗折断余量、抗倒伏余量以及倒伏角，采用物理性质均匀模型，分别刻画了不同品种小麦的抗倒伏特性，以及发生倒伏的程度。

问题五依据问题四建立的模型，以 07 年数据为基础，分别计算了不同品种的抗折断余量、抗倒伏余量、倒伏角、最大抗倒伏风速以及临界重力值。结果表明矮抗具有最优的抗倒伏性能，周麦次之，新麦最差。

问题六，根据前面模型，提出了 7 个需要解决的问题，进一步为 2012 年制定了试验和数据分析方案，提出了一些建议。

目录

1	问题引入	1
2	问题一、基于茎秆机械强度的倒伏指数模型.....	2
2.1	符号说明与假设.....	2
2.1.1	符号说明	2
2.1.2	假设	2
2.2	模型的准备：现有研究结果与数据预处理.....	2
2.2.1	现有研究的局限性	2
2.2.2	数据标准化预处理	3
2.3	原始茎秆倒伏指数模型及对 07 年的数据分析.....	3
2.3.1	原始茎秆倒伏指数公式	3
2.3.2	07 年各品种的倒伏指数的数值结果	4
2.4	改进的倒伏指数模型及对 08 年和 11 年得数据分析.....	6
2.4.1	影响茎秆机械强度的重要因素：茎秆密度分析.....	6
2.4.2	影响倒伏指数的重要因素：机械强度模型.....	6
2.4.3	倒伏指数模型	8
2.4.4	08 年倒伏指数的数据分析	8
2.4.5	11 年倒伏指数的数据分析.....	10
3	问题二、倒伏指数和茎秆外部形态特征的关系：相关性分析.....	11
3.1	符号说明与假设.....	11
3.1.1	符号说明	11
3.1.2	假设	11
3.2	模型的准备	12
3.2.1	现有研究情况	12
3.2.2	最易引起倒伏期的判定	12
3.3	模型 I：基于相关系数的数学模型	12
3.4	模型 II：通径分析.....	13
3.4.1	通径分析原理	13
3.4.2	倒伏指数与茎秆形态特征的通径分析.....	14
3.5	模型 III：灰色关联分析法.....	15
3.5.1	灰色关联分析原理	16
3.5.2	倒伏指数与茎秆形态特征的灰色关联分析.....	16
4	问题三、基于多目标优化的小麦理想株型结构.....	18
4.1	符号说明与假设.....	18
4.1.1	符号说明	18
4.1.2	假设	18
4.2	什么是理想株型.....	18
4.3	理想株型的多目标优化模型.....	19
4.3.1	目标函数	19
4.3.2	变量选取与约束条件	20
4.3.3	理想株型多目标优化模型的表述	20
4.3.4	多目标优化模型的数值结果	21
5	问题四、基于力学、分析、几何的综合抗倒伏模型.....	22
5.1	符号说明	22

5.2	模型的准备对问题的理解与分析.....	22
5.2.1	现有研究情况	22
5.2.2	理论基础	22
5.3	小麦茎秆的挠曲线模型.....	23
5.4	挠曲线模型的简化.....	25
5.4.1	简化模型 1: 线密度线性减小情况下的抗倒伏模型.....	25
5.4.2	简化模型 2: 几何变换简化下的模型.....	28
5.4.3	简化模型 3: 分节均匀弹性情况下的抗倒伏模型.....	31
5.4.4	基于简化模型 3 的茎秆抗倒伏模型:	33
6	问题五、抗倒伏风速、自重模型及数值解.....	35
6.1	问题分析	35
6.2	求解结果	37
7	问题六、关于小麦抗倒伏的问题、方案及建议.....	38
7.1	从问题 1~5 得出所需解决的问题.....	38
7.2	抗倒伏试验建议.....	39
7.2.1	试验对象设计	40
7.2.2	形态特征信息收集	40
7.2.3	数据统计分析	40
7.3	小麦育种建议.....	41
8	总结	42
9	参考文献	43

小麦发育后期茎秆抗倒伏性的数学模型

——数值分析及建议

1 问题引入

小麦高产、超高产的研究始终是小麦育种家关注的热点问题。随着产量的增加,小麦的单茎穗重不断增加。但穗重的增加同时使茎秆的负荷增大,导致容易倒伏。倒伏不但造成小麦减产,而且影响小麦的籽粒品质。因此要实现小麦高产优质的跨越,就必须解决或尽量减少小麦的倒伏问题。

小麦倒伏从形式上可分为“根倒”和“茎倒”,一般都发生在小麦发育后期。“根倒”主要与小麦种植区域的土壤品种与结构特性有关,本题不做讨论。“茎倒”是高产小麦倒伏的主要形式,尤其是发生时间较早的“茎倒”,往往造成大幅度的减产。“茎倒”的原因是茎秆与穗的自重和风载作用的迭加超过了小麦茎秆的承受能力。

解决倒伏问题的方法之一就是针对不同的产量,寻找小麦抗倒伏能力最佳的茎秆性状(包括株高、茎长、各节间长、各节茎外径、壁厚、茎秆自重、穗长、穗重等)。各方面的专家通过分析影响小麦倒伏的各种因素,目前已经得到了一些结果,但是对抗倒伏能力最佳的茎秆性状还没有定论。通过物理力学类比研究小麦抗倒伏性是一个新方向,已有一些成果,值得我们进行深入探讨。

本文现根据已有研究成果和实验数据解决以下几个问题:

(1) 依据已有抗倒伏指数公式建立各品种小麦的茎秆抗倒指数公式,并求解茎秆机械强度与茎秆粗厚的关系。

(2) 研究抗倒伏指数与茎秆外部形态特征之间的关系,并判断小麦茎秆性状的各个因素之间有无相关性。根据前面结论对 2008 年国信 1 号与智 9998 品种的小麦都发生倒伏,其他品种没有发生倒伏的原因给出判断。

(3) 探讨单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时小麦的理想株型结构。

(4) 将茎秆按刚/弹性材料处理,研究小麦茎秆在麦穗自重和风载作用下应力的基本规律,建立小麦茎秆抗倒伏的数学模型。

(5) 应用(4)力学模型中的抗弯刚度 EI ,麦穗自重下和风载作用下的公式计算在 2007 年数据中腊熟期各品种的抗倒伏风速。

(6) 总结所建模型及分析结果,提出值得考虑的问题。为 2012 年制定完整的试验方案及数据分析方法,并给小麦育种家在育种实践中提出合理的建议。

2 问题一、基于茎秆机械强度的倒伏指数模型

2.1 符号说明与假设

2.1.1 符号说明

表 2-1 符号预定与含义

I_d	茎秆倒伏指数
G	茎秆鲜重
H	茎秆重心高度
P	茎秆机械强度
l_i	基部第 <i>i</i> 茎节节长
g_i	基部第 <i>i</i> 茎节鲜重
D_i	基部第 <i>i</i> 茎节外径
d_i	基部第 <i>i</i> 茎节壁厚
l_0	穗长
g_0	穗鲜重
ρ	茎节密度（不含穗）

2.1.2 假设

本小节主要解决问题（1），在解决问题前，我们阅读了大量作物抗倒伏方面的相关文献资料，并进行分类整理和分析，在此基础上初步形成了自己的观点。基于我们对问题的理解和建模的需要，做如下假设：

1. 只考虑“茎倒”，不讨论“根倒”，也就是假设即使产生“茎倒”小麦的根系仍然牢牢固定在地下。
2. 抗倒伏性是小麦的内在特性，仅与茎秆自身特征（壁厚、鲜重等）有关，而不考虑外界环境的影响。
3. 将小麦茎秆等效为空心圆柱体，且内外壁之间的填充物质呈均匀、连续分布。
4. 本小节研究的对象均为未倒伏小麦植株，因此假设茎秆和麦穗均为竖直向上生长。

2.2 模型的准备：现有研究结果与数据预处理

2.2.1 现有研究的局限性

小麦在田间的实际倒伏程度和面积是其抗倒伏能力的直接体现，但未发生倒伏时如何评价作物品种的抗倒伏性，目前尚未有统一的方法或指标。农业工作者

从作物品种、植株外部形态、内部组织结构、栽培条件、土壤、环境因素等各方面进行了许多相关研究，提出了一些抗倒伏的评价方法和评价指标^{[1][2]}。主要思路是先综合考虑几项与茎秆倒伏有关的小麦外部形态特征，分析这些形态特征与抗倒伏性能关联系数，再通过试验验证。本文认为这些方法虽然取得了一定的效果，但亦有很大弊端。关联性的提出往往建立在一些简单经验的基础上，经常是在其理论科学性还未被证明的情况下，就直接应用到具体育种实践中。因此，这些研究的理论基础易于受到置疑。此外，对于与倒伏的关系多采用计算相关性或回归分析的办法，至于具体的产生机理和细节问题则很少探讨，这就增加了其理论的不确定性。

因此，若要研究倒伏产生机理，应在传统意义上定性分析的基础上，从理论上寻找对倒伏进行量化分析的途径。

2.2.2 数据标准化预处理

通过对试验收集到数据的初步观察可发现，表征小麦茎秆外部形态特征的指标纷繁复杂，有长度、粗数、重量等等，这些数据含义不同、大小不一、计量单位也不统一，难以直接用于做运算，为方便数据处理，根据可接近性和可比性原则，需要对原始数据进行无量纲的标准化处理。考虑到 07、08 和 11 年三年收集到的数据各不相同，因此以年为单位进行标准化处理。

设对某项指标，在一年里所有小麦品种共收集到 n 个试验数据，原始数值向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]$ ，归一化后数值向量 $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n]$ ，采用标准化公式

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - \min_{i \in [1, n]} \{x_i\}}{\max_{i \in [1, n]} \{x_i\} - \min_{i \in [1, n]} \{x_i\}} \quad (1)$$

经标准化处理后，表征小麦茎秆外部形态特征所有指标的数据变为无量纲的置于 $[0, 1]$ 区间上的值，这样便可对各项指标随意进行比较、运算。

注：对数据缺失的小麦样本个体，本文在计算中直接进行剔除，而不作补充。

2.3 原始茎秆倒伏指数模型及对 07 年的数据分析

2.3.1 原始茎秆倒伏指数公式

文献[3]在对小麦倒伏做了大量研究的基础上提出用品种倒伏指数来衡量单株的抗倒伏性能，是一个动态的综合评价方法，受到了该领域专家的好评。鉴于本文已有数据的支撑和高可靠性，我们选取此方法。该方法涉及到茎秆抗折力、地上部鲜重及茎秆重心高度，茎秆倒伏指数的量化公式为：

茎秆倒伏指数 = 茎秆鲜重 \times 茎秆重心高度 / 茎秆机械强度，即

$$I_d = \frac{G \cdot H}{P} \quad (2)$$

其中， G 为茎秆鲜重，指一个小麦单茎所有在地面上长出的部分（包括穗、

秆、叶和稍) 未经烘干的质量, H 为茎秆重心高度, P 表示茎秆机械强度即抗折力。显然, 对于单茎小麦 I 的值越大越易倒伏, 即其抗倒伏性能越差。

2.3.2 07 年各品种的倒伏指数的数值结果

观察 07、08 和 11 年三年的数据, 只有 07 年的数据齐全, 可直接计算茎秆倒伏指数值, 根据公式 (2) 得到 07 年矮抗 58、新麦 208 和周麦 18 三个小麦品种的倒伏指数见 excel 附件 “result” 工作表 ti1。

结论:

1. 图 2-1 给出了矮抗 58、新麦 208 和周麦 18 三个小麦品种的倒伏指数曲线 (横坐标并非指时间, 而是对每类品种的倒伏指数都由小到大进行了排序)。矮抗 58 的倒伏指数最小, 抗倒伏能力最强。虽然周麦 18 倒伏指数小的样本没有新麦 208 多, 但周麦 18 的倒伏指数都集中在相对较小的区间内, 而新麦 208 的倒伏指数却参差不齐、两级分化严重。由于倒伏指数越大抗倒伏能力越差, 所以判断周麦 18 抗倒伏能力整体上稍优于新麦 208。所以三类品种抗倒伏能力的排序为: 矮抗 58>周麦 18>新麦 208。

2. 表 2-2 给出了在不同发育时期三个品种的倒伏指数均值, 图 2-2 给出了新麦 18 倒伏指数随时间变化情况, 可发现小麦在发育至成熟期间, 抗倒伏能力逐渐下降, 在腊熟期抗倒伏能力最差。

3. 同一品种、同一时期的个别样本倒伏指数与均值相去甚远 (表 2-2 中开花期就有这样一个样本), 我们猜想这是由于样本在田间所受光照、水分有所差异造成的。

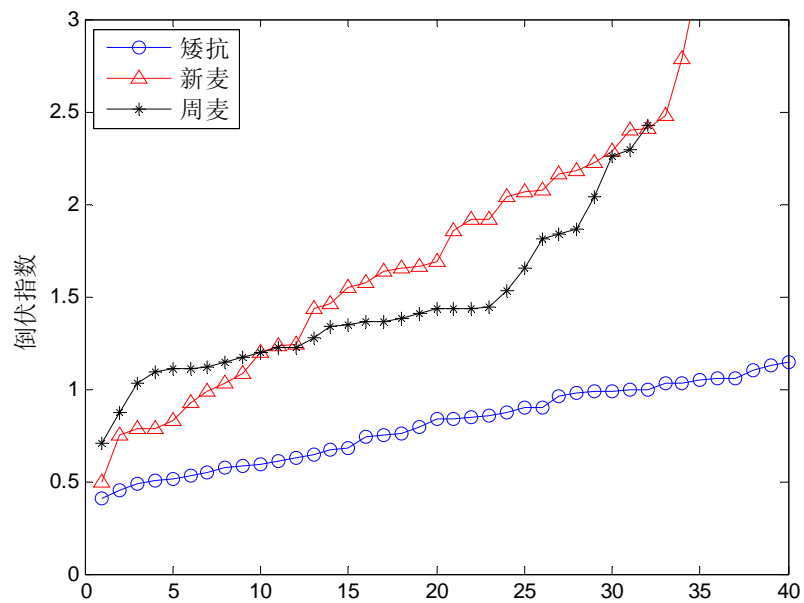


图 2-1 2007 年小麦倒伏指数

表 2-2 2007 年不同时期小麦倒伏指数均值

时期 品种	开花期	灌浆期	乳熟期	腊熟期
矮抗 58	0.6887	0.8220	1.3204	1.513
新麦 208	0.9578	1.4955	1.7516	2.3604
周麦 18	1.023	1.3258	1.5466	1.8966

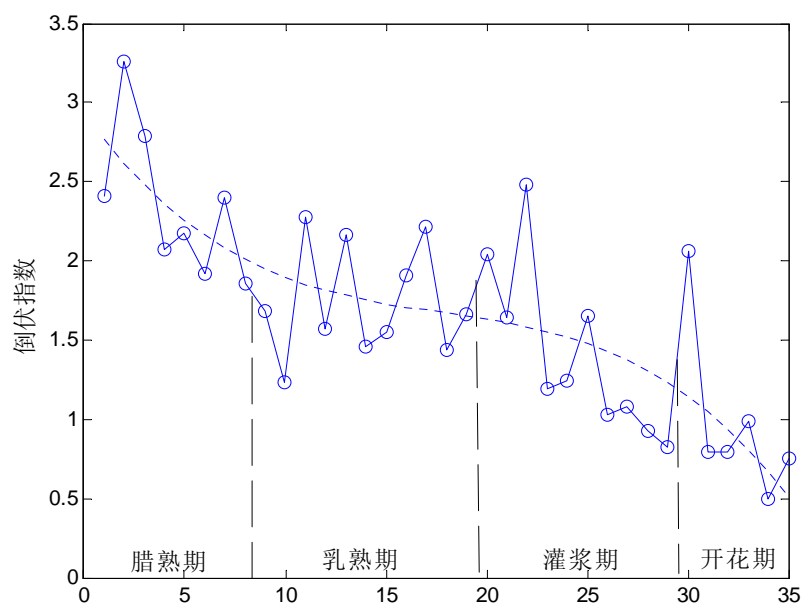


图 2-2 2007 年新麦 18 倒伏指数随时间变化图

2.4 改进的倒伏指数模型及对 08 年和 11 年得数据分析

由于 08、11 年的数据中缺少通过试验方法测试得到的茎秆机械强度，所以无法根据公式（2）直接计算茎秆倒伏指数。本文计划首先分析影响机械强度的各项形态指标，进而根据 07 年数据建立机械强度表达式。

2.4.1 影响茎秆机械强度的重要因素：茎秆密度分析

许多育种工作者在小麦抗倒性育种中主张既考虑茎秆高度又兼顾茎秆的刚度和强度，从提高茎秆的机械强度入手^{[4][5]}。小麦植株倒伏程度最终取决于茎秆机械强度的大小^[6]，而我们通过查找文献发现，就目前对小麦抗倒伏研究的进展来看，尚未有对机械强度定量分析的成果，只有依据实验而得出的定性或称之为是经验性结论。以下便是两个典型的结论，小麦茎秆的壁厚度与外径之比与小麦的茎秆机械强度相一致^[7]，小麦茎秆近似一个中空圆柱体，该形状的抗弯折能力和其外径立方与内径立方之差成正比^[8]。由此可见，茎秆的壁厚与外径可能是评价机械强度中首选的并且可信的形态指标。

然而，小麦茎秆机械强度是硬性和弹性的综合体现，弹性和硬性则通过茎秆密度（茎秆单位体积贮存物质量）得到体现，而茎秆密度又与茎秆截面积、节间长度和质量体现，因此在求解机械强度模型时，除了考虑截面积（壁厚和外径）外，还要考虑节长和质量的影响。

综合考虑第二茎节的节长、质量、外径和壁厚，建立基于以上四项指标的机械强度回归模型，

$$P = f(g_2, l_2, D_2, d_2) \quad (3)$$

注：大量实验及文献研究发现小麦茎秆抗倒伏性能与基部第二茎节的形态特征密切相关，2007 年试验获取机械强度时也截取了基部第二茎节，因此，在本文分析中忽略其他茎节即麦穗对机械强度的影响，认为机械强度由基部第二茎节的形态特征决定。

2.4.2 影响倒伏指数的重要因素：机械强度模型

07 年提供的数据只包含了节长、外径和壁厚三个指标，因此首先需要根据其他已知数据求解基部第二茎节的质量。将小麦茎秆看作中空圆柱体，由于表征基部第二茎节体积的参数已知，求出密度质量便可知，因此本小节先研究密度问题。

定义小麦茎节密度（不含麦穗）为 ρ ，指小麦单位茎节体积上（不含髓腔）茎节的质量。之前已经假设小麦是连续且均匀的空心圆柱体，则该密度和基部各个茎节的密度是相等的，称之为密度均匀性原理。

则对所有茎节，有如下质量和密度、体积的关系表达式：

$$g_i = \rho \cdot \frac{\pi}{4} l_i (2D_i d_i - d_i^2) \quad (4)$$

其中， g_i 表示基部第 i 节鲜重， l_i 表示基部第 i 节节长， D_i 、 d_i 则分别表示基部第 i 节外径和壁厚。

由生活常识知小麦茎秆是严重中空的，也就是说茎秆外径远大于壁厚。07 年的数据验证了这一常识，小麦粗数（即外径 D_i ）通常是壁厚 d_i 的 5~10 倍，因此公式（4）可省去掉 d_i^2 项。此外，07 年数据中同一株小麦的各茎节壁厚又是一样的，因此可在此基础上进一步得到茎节鲜重和茎秆长度、外径呈正相关的特性，即：

$$g_i \propto l_i D_i \quad (5)$$

如图 2-3 所示，设重心以上茎秆质量（不含麦穗）占有所有茎节鲜重的比例系数为 α ，重心以下茎秆质量占有所有茎节鲜重的比例系数为 β 。各茎节长度 l_i 和茎节外径 D_i 都已知，则可根据以下公式求解比例系数 α 和 β ：

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sum_{\text{茎节} i \text{ 在重心以上}} l_i D_i}{\sum_{\text{茎节} i \text{ 在重心以下}} l_i D_i} \end{cases} \quad (6)$$

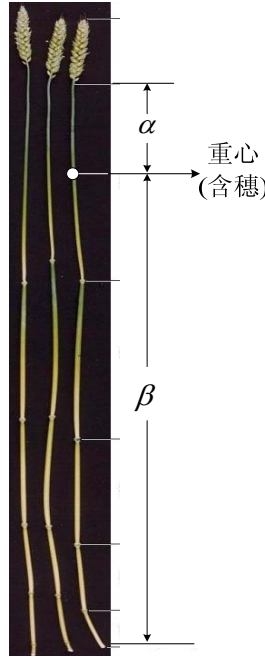


图 2-3 小麦茎秆结构图

已知茎秆鲜重为 G ，重心高度 H ，穗鲜重为 g_0 ，则可根据下公式求得穗鲜重：

$$\alpha(G - g_0) = \beta(G - g_0) + g_0 \quad (7)$$

求得穗鲜重后，便可得知所有茎节的质量，即茎秆鲜重减去穗鲜重，这样我们便得了茎秆密度 ρ 的表达式：

$$\rho = \frac{G - g_0}{\frac{\pi}{4} \sum_{\text{所有茎节}i} l_i (2D_i d_i - d_i^2)} \approx \frac{G - g_0}{\frac{\pi}{4} \sum_{\text{所有茎节}i} l_i 2D_i d_i} \quad (8)$$

根据公式（8）求得的茎秆密度见 excel 附件“result”工作表 ti1。

结论：通过求解发现各小麦品种茎秆密度基本上随时间呈递减趋势，开花期的均值最大，腊熟期的均值最小，且最大值出现在开花期，最小值出现在蜡熟期。矮抗 58 在开花和灌浆期的茎秆密度最高，明显高于新麦 208 和周麦 18 两个品种。将这一结论与前面求出的 07 年倒伏指数结论比较可知，抗倒伏性强的品种茎秆密度较高，反之则较低。在小麦灌浆过程中，茎秆贮存物质逐渐向穗部的运输，茎秆密度处于动态变化中，密度最低值出现在蜡熟期，这与文献[6]、文献[9]的研究结果是一致的。由上述分析可见，茎秆密度对小麦茎秆抗倒伏能力有着重要影响。

2.4.3 倒伏指数模型

根据上一小节密度均匀性原理，可以得到基部第 k 茎节的质量计算公式：

$$g_k = \frac{\frac{\pi}{4} l_k (2D_k d_k - d_k^2)}{\frac{\pi}{4} \sum_{\text{所有茎节}i} l_i (2D_i d_i - d_i^2)} \cdot (G - g_0) \approx \frac{l_k D_k}{\sum_{\text{所有茎节}i} l_i D_i} \cdot (G - g_0) \quad (9)$$

通过公式（9）就可以计算得到基部第二茎节的质量，根据公式（3）机械强度的回归模型，我们使用最小二乘法分别进行了线性、二次、三次以及含倒数项的拟合，其中线性拟合的方差最小，结果如下：

$$P = 0.4069g_2 - 0.4197l_2 + 0.3968D_2 + 0.3291d_2 \quad (10)$$

根据公式（2）和公式（10）得到小麦倒伏指数的细化表达式：

$$I_d = \frac{G \cdot H}{P} = \frac{G \cdot H}{f(g_2, l_2, D_2, d_2)} = \frac{G \cdot H}{0.4069g_2 - 0.4197l_2 + 0.3968D_2 + 0.3291d_2} \quad (11)$$

2.4.4 08 年倒伏指数的数据分析

首先，我们通过比较三年的数据得到结论：08 年小麦各茎节质量和穗重均为干重。为计算小麦茎秆倒伏系数，首先应寻找小麦茎秆、麦穗的鲜干重之比，

然后根据干重求得鲜重，进而确定重心，最后应用公式（11）求解。

（1）茎秆的鲜干重比

文献[9]对小麦基部节间茎秆鲜、干密度与抗倒性的关系进行了研究，在大量实验的基础上，得到了不同小麦品种在抽穗至成熟期间茎秆鲜密度和干密度的值。文章数据详实、可靠性高，因此我们选取这篇文章求解茎秆鲜干重之比。分析这些值发现，鲜干密度比大都分布在 6~7 之间，因此认为小麦茎秆鲜干密度比是一个常数，求解得到鲜干密度比的平均值为 6.26。在本节假设的条件下，密度之比即质量之比，因此小麦茎秆鲜干重比值同样为 6.26。

（2）麦穗的鲜干重比

麦穗的质地为籽粒，其鲜干重比显然不同于秸秆质地的茎秆鲜干重比，通过 07 年和 08 年数据可分别求出秆穗鲜重比、秆穗干重比，茎秆的鲜干重比又已经计算得到，通过这三个比值的关系计算得到麦穗的鲜干重比为 1.26。

（3）重心高度

08 年收集到的数据中并没有直接给出小麦茎秆重心高度。通过（1）和（2）的分析，茎秆、麦穗的鲜干重之比都已明确，根据干重数据计算得到鲜重数据，依据茎秆均匀性原则，求得重心高度。

通过以上求解得到了所有用于计算小麦茎秆倒伏指数的形态特征数值，根据公式（11）计算得到 08 年数据各小麦品种的倒伏指数见 excel 附件“result”工作表 ti1。

结论：

图 2-4 给出了 2008 小麦各品种的倒伏指数，这一年各小麦品种的倒伏指数差异较为明显，六类品种抗倒伏能力排序为：矮抗 58>联丰 85>周麦 18>TM>智 9998 早>国信。

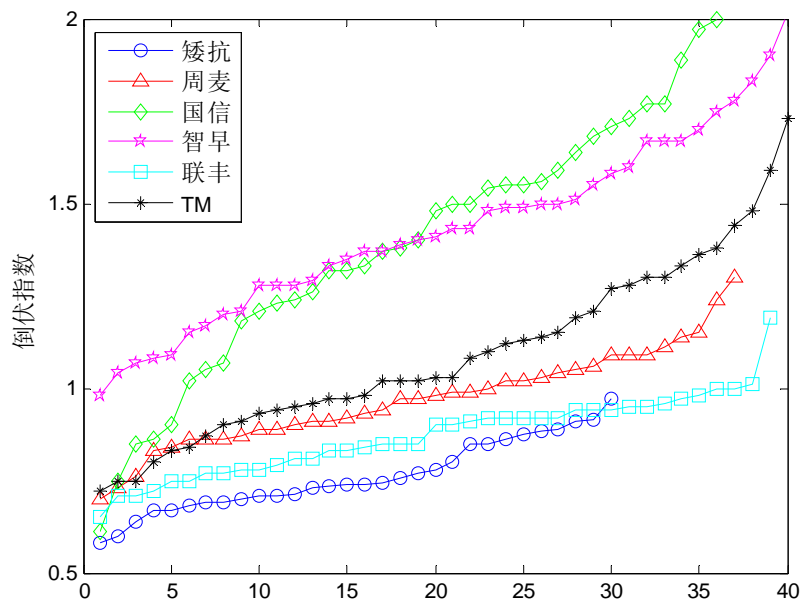


图 2-4 2008 年小麦倒伏指数

2.4.5 11 年倒伏指数的数据分析

11 年数据中，所有用于计算小麦茎秆倒伏指数的形态特征数值都已给出，直接根据公式（11）计算得到 11 年各小麦品种的倒伏指数见 excel 附件“result”工作表 ti1。

结论：

1. 图 2-5 给出了 2011 小麦各品种的倒伏指数，2011 年收集到的小麦品种数较前两年多，各品种倒伏指数在不同区间内大小不一。矮抗 58、周麦 18、周麦 22、温麦 6 号抗倒伏能力相对较好，豫麦 18 样本数较少抗倒伏能力居中，平安 6 和郑麦 9023 抗倒伏能力则较差。

2. 综合 07、08 和 11 年三年的数据，与其他品种相比，矮抗 58 和周麦 18 都表现出了较好的抗倒伏能力，尤其是矮抗 58 在各年抗倒伏性能中都是稳居第一，也就是说其抗倒伏能力比较稳定，是较为优良的抗倒伏品种。

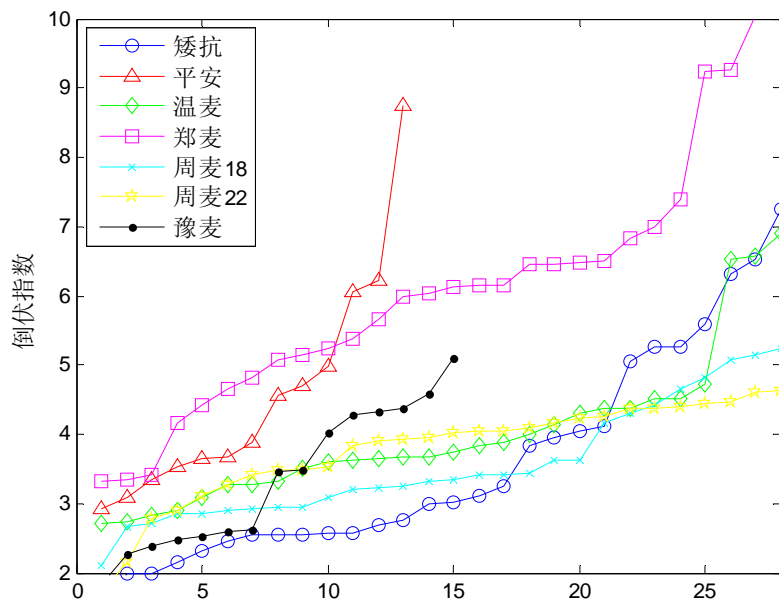


图 2-5 2011 年小麦倒伏指数

注：由于在文章开始数据标准化处理过程中以年为单位，所以每年标准化程度不一样。因此，本节计算得到的 07、08 和 11 年小麦倒伏指数，只可在同一年内不同小麦品种之间以及同一小麦品种的不同时期进行比较，而不同年份的同一或不同小麦品种的倒伏指数没有可比性。

3 问题二、倒伏指数和茎秆外部形态特征的关系：相关性分析

3.1 符号说明与假设

3.1.1 符号说明

表 3-1 符号约定与说明

r	相关系数
R	相关系数矩阵
γ	关联系数
ξ	关联度
Γ	关联度矩阵
p	通径系数
H	通径系数矩阵

3.1.2 假设

(1) 2011 年小麦各形态特征数据比较齐全，因此本节计算采用 2011 年的数据。

(2) 同一品种的小麦不同年份抗倒伏性能不出现大的变化，这一假设的合

理性已在第二节结论中得到证实。

3.2 模型的准备

3.2.1 现有研究情况

本节着力解决问题（2）。在小麦抗倒伏性能研究进程中，小麦茎秆形态特征与倒伏性的相关性研究引一度引起了广泛关注，如今相关性研究成果、文献已是数不胜数^{[5][10][11]}。这些相关性分析的理论依据多都是相关系数公式：

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}} \quad (12)$$

3.2.2 最易引起倒伏期的判定

问题要求在最易引起倒伏期分析茎秆倒伏指数与形态特征的相关性，通过查阅资料发现，目前农学工作者认为腊熟期是小麦茎秆最易发生倒伏的时期，文献[9]通过分析茎秆密度得出了同样的结论，本文在上一节求解得到的 07 年小麦茎秆倒伏指数也验证了这一结论，因此我们认为腊熟期为最易引起倒伏时期，本节下文分析皆是基于腊熟期的数据进行求解的。

3.3 模型 I：基于相关系数的数学模型

设小麦的倒伏指数数列为 $Y = \{y(k), k = 1, 2 \dots n\}$ ；

选取株高、穗长、各节间长、各节壁厚、穗重、鲜重七类形态特征共 19 个指标 $X_i = \{x_i(k), k = 1, 2 \dots n\}, (i = 1, 2 \dots 19)$ 。

各形态特征与倒伏指数的相关性以及形态特征之间的相关性，组成相关系数矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} r_{y1} & r_{y2} & \cdots & r_{y19} \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{119} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{191} & r_{192} & \cdots & r_{1919} \end{bmatrix}$$

根据公式（12）求解得到相关系数矩阵见 excel 附件“result”工作表 ti2。

结论：

1. 比较相关系数矩阵第一行即各形态特征与倒伏指数的相关系数，株高与倒伏指数的相关系数最大（0.7959）。这一结论是合理的，因为植株矮化可降低重心高度，从而提高植株的抗倒伏能力。基部第二茎节节长与倒伏指数的相关系数次之（0.7183）。因此可得结论株高、基部第二茎节节长是影响小麦抗倒伏性能的重要因素，两者与倒伏指数皆成正相关，因此株高越高、节长越长，小麦的抗倒伏性能越差，反之亦然。

2. 比较相关系数矩阵剩余各行即各形态特征之间的相关系数，发现株高、穗

长、各节长之间的相关性较大，鲜重、各节壁厚、各节粗之间的相关性较大。

3.4 模型 II：通径分析

虽然相关分析在一定程度上反映了小麦茎秆各形态特征对倒伏指数的相关程度，以及各形态特征之间的相关性，但是，要弄清楚小麦茎秆各形态特征对倒伏指数的作用大小，还必须作进一步的分析。

通径分析可将相关系数分解为直接作用和间接作用，能够清楚地显示各因素的相关关系大小和相对重要性^[14]。通径分析一方面能够有效地表示相关变量之间原因对结果的直接影响效应，另一方面还能够估计出因变量对自变量的间接效应，适合用于进一步对小麦茎秆各形态特征和倒伏指数的相关性研究。

3.4.1 通径分析原理

通径分析（Path Analysis）是继回归分析之后发展起来的一种统计方法，是由美国群体遗传学家 Sewall Wright 教授首次提出的，作为通过分析变量间的相关结构来定量地研究和解释变量间的因果关系或相关关系的一种工具。

通径分析是多元回归分析的扩展，常用来分析和探索系统内部多变量间复杂的因果关系及其变量间作用程度的大小，在农学、生物学、医学等多个领域有广泛的应用^{[15][16][17]}。通径分析是在研究观察变量间协方差矩阵和相关矩阵基础上，从定量的角度建立模型来探索和分析系统内部变量间因果关系的一种统计方法。与传统的回归模型相比，后者所假设的因果关系并不存在多环节的因果结构，尽管可以包含多个自变量，各个自变量被假设处于并列的相同地位，回归分析得到的回归系数只表示在控制其他自变量的条件下某个自变量对因变量单独的净作用。通径模型可以利用通径系数以及中间变量的传递过程来分析变量的间接效应，挖掘隐藏在系统内部的大量信息，分析其内部的错综复杂的因果关系，用来指导和解决实际问题。

通径分析基本理论由三部分组成：通径图，通径分析的数学模型及通径系数的确定，通径模型的效应分析。通径分析要经过五个步骤：模型设定、模型识别、模型估计、模型评价、模型调试及修改。实际工作者根据专业知识先构建一个通径图求出各个可测变量的协方差矩阵与由样本资料获得的可测变量的协方差矩阵进行拟合，并计算拟合统计量，通过比较两个或多个模型并挑选出最适合专业理论的通径模型。通径分析的优点在于：其一能够通过相关系数来衡量变量间的相关程度或通过通径系数来确定变量间的因果关系；其二它不仅能说明变量间的直接效应，而且能够说明变量间的间接效应。

k 个自变量 $x_i, (i=1, 2, \dots, k)$ 和一个因变量 y 组成的通径模型的通径系数定义是，把自变量 x_i 的标准差与因变量 y 的标准差之比，称为 x_i 到 y 的通径系数：

$$p_{iy} = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y} \quad (13)$$

可以证明[18]任意自变量 x_i 与 y 的相关系数 r_{iy} 可以分为两部分，一部分为通径系数 p_{iy} ，表示 x_i 对 y 的直接效应，另一部分 $\sum r_{ij} p_{jy}$ ，表示 x_i 通过其他自变量 x_j 对 y 的间接效应。即下式：

$$r_{iy} = p_{iy} + \sum_{j=1 \sim k, j \neq i} r_{ij} p_{jy}, (i=1, 2 \dots k) \quad (14)$$

对于通径分析的基部模型，可以建立以下方程组：

$$\begin{cases} p_{1y} + r_{12} p_{2y} + \dots + r_{1k} p_{ky} = r_{1y} \\ r_{21} p_{1y} + p_{2y} + \dots + r_{2k} p_{ky} = r_{2y} \\ \dots\dots\dots \\ r_{k1} p_{1y} + r_{k2} p_{2y} + \dots + p_{ky} = r_{ky} \end{cases} \quad (15)$$

3.4.2 倒伏指数与茎秆形态特征的通径分析

假设小麦茎秆形态特征与倒伏指数的因果关系是单方向的，不包括各种形式的反馈作用，则可以通过通径分析求解通径系数，形成通径系数矩阵判断倒伏系数与茎秆形态特征以及形态特征内部之间的通径系数矩阵。算法步骤如下：

Step1. 变量选定。

以倒伏指数 $Y = \{y(k), k=1, 2 \dots n\}$ 为因变量；

以 3.3 节相关系数分析法中选取的 19 个形态特征数列 $X_i = \{x_i(k), k=1, 2 \dots n\}, (i=1, 2 \dots 19)$ 为自变量。

Step2. 求解相关系数矩阵。

定义各自变量间的相关系数阵为 R ：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{119} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{219} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{191} & r_{192} & r_{193} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

定义自变量与因变量之间的相关系数矩阵为 S ：

$$S = \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \\ \vdots \\ r_{19y} \end{bmatrix}$$

Step3. 求解直接通径系数

令 $p = [p_{1y} \quad p_{2y} \quad \dots \quad p_{19y}]^{-1}$ ，则公式 15 变为 $Rp = S$ ，那么直接通径系数

$$p = R^{-1}S。$$

Step4. 求解通径系数矩阵。

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} p_{1y} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{2y} & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{19y} \end{bmatrix}, \text{ 则 } H = RA = \begin{bmatrix} p_{1y} & r_{12}p_{2y} & \cdots & r_{119}p_{19y} \\ r_{21}p_{1y} & p_{2y} & \cdots & r_{219}p_{19y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{191}p_{1y} & r_{192}p_{2y} & \cdots & p_{19y} \end{bmatrix}。$$

H 矩阵为通径系数矩阵，求解结果见 excel 附件“result”工作表 ti2。通径系数阵的主对角线元素为直接通径系数，反映了各形态特征对倒伏指数的影响；非主对角线元素为间接通径系数， H_{st} 反映了第 s 个形态特征通过第 t 个形态特征对倒伏指数的影响。

结论：

1. 分析通径系数矩阵主对角线上的元素，发现穗重（0.4875）、基部第二茎节节长（0.3250）、基部第二茎节壁厚（-0.2176）对倒伏系数的直接影响相对较大。因此可得结论穗重，基部第二茎节节长、壁厚是影响小麦抗倒伏性能的重要因素，穗重、节长与倒伏指数皆呈正相关，壁厚与倒伏指数呈负相关。

2. 株高对倒伏指数的直接影响很小（-0.1299），且成负相关，然而株高通过各节长对倒伏指数的间接影响却很大，从而使得株高整体对倒伏指数的影响很大，这与 3.3 节相关系数分析得出的结论是一致的。

3.5 模型 III：灰色关联分析法

需要指出的是，无论是相关系数分析还是通径分析，都是基于线性回归的。这有一个明显的缺点，即它接近于 1 的程度与数据的组数 n 相关，这容易给人一种假象。因为，当 n 较小时，相关系数的波动较大，对于有些样本，相关系数的绝对值易接近于 1；当 n 较大时，相关系数的绝对值容易偏小。因此，在样本容量较小时，仅凭相关系数大就判断两个变量有密切的线性关系是不妥的。换言之，相关系数属于统计范畴的分析，需要大量的数据做支撑。

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授于 1982 年首次提出的，灰色关联分析应运而生^[12]。灰色关联度分析对于一个系统发展变化态势提供了量化的度量，因此我们认为非常适合小麦抗倒伏指数与形态特征相关性的动态历程分析。

文献[13]正是采用灰色关联法分析了四项生物力学指标与抗倒性之间的关系，取得了一定的研究。本文要处理将近 20 个数据之间的相关性，对算法性能提出了更高的要求。然而需要指出的是，灰色关联法只强调两个时间序列所形成的空间曲线形态的相似程度，或者说是动态形态发展趋势的一致性程度，而不考虑两条曲线之间距离的大小，即着重考虑了相近性而忽略了相似性，因此存在一

定的风险。

3.5.1 灰色关联分析原理

在系统发展过程中，若两个因素变化的趋势具有一致性，即同步变化程度较高，即可谓二者关联程度较高；反之，则较低。因此，灰色关联分析方法，是根据因素之间发展趋势的相似或相异程度，亦即“灰色关联度”，作为衡量因素间关联程度的一种方法。灰色系统理论提出了对各子系统进行灰色关联度分析的概念，意图透过一定的方法，去寻求系统中各子系统（或因素）之间的数值关系。

灰色系统关联分析的具体计算步骤如下：

（1）确定参考数列和比较数列

反映系统行为特征的数据数列，称为参考数列。影响系统行为的因素组成的数据数列，称比较数列。

（2）无量纲化处理

由于系统中各因素的物理意义不同，导致数据的量纲也不一定相同，不便于比较，或在比较时难以得到正确的结论。因此在进行灰色关联度分析时，一般都要进行无量纲化的数据处理。

（3）求参考数列与比较数列的灰色关联系数

所谓关联程度，实质上是曲线间几何形状的差别程度。因此曲线间差值大小，可作为关联程度的衡量尺度。

（4）求关联度

因为关联系数是比较数列与参考数列在各个时刻（即曲线中的各点）的关联程度值，所以它的数不止一个，而信息过于分散不便于进行整体性比较。因此有必要将各个时刻（即曲线中的各点）的关联系数集中为一个值，即求其平均值，作为比较数列与参考数列间关联程度的数量表示。

3.5.2 倒伏指数与茎秆形态特征的灰色关联分析

根据上述灰色关联分析原理的 4 个步骤，本文应用灰色关联分析研究小麦茎秆倒伏指数和形态特征的具体计算步骤如下：

Step 1. 确定参考数列和比较数列。

以小麦的抗倒伏指数为参考数列 $Y = \{y(k), k = 1, 2 \dots n\}$ ；

以株高、穗长、各节间长、各节壁厚、穗重、鲜重七类形态特征共 19 个指标为比较数列 $X_i = \{x_i(k), k = 1, 2 \dots n\}, (i = 1, 2 \dots 19)$ 。

Step 2. 去量纲。描述茎秆形态特征的数据在文章一开始便进行了标准化处

理，因此这一步只需根据公式（1）对参考序列进行标准化处理。

Step 3. 求差数列。参考序列 Y 和比较序列 X_i 的差数列 $\Delta x_i(k)$ 为：

$$\Delta x_i(k) = |Y(k) - X_i(k)| \quad (16)$$

Step 4. 求差数列最小差与最大差。

$$\Delta_{ik} \min = \min_i \min_k \Delta x_i(k) \quad (17)$$

$$\Delta_{ik} \max = \max_i \max_k \Delta x_i(k) \quad (18)$$

Step 5. 求解关联系数。参考序列 Y 和比较序列 X_i 的关联系数 $\gamma_i(k)$ 为：

$$\gamma_i(k) = \frac{\Delta_{ik} \min + \rho \Delta_{ik} \max}{\Delta_i(k) + \rho \Delta_{ik} \max} \quad (19)$$

Step 6. 求解关联度

$$\xi_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_i(k) \quad (20)$$

以上就是使用灰色关联分析法求小麦倒伏指数与外部形态特征相关性的步骤，求解得到关联度矩阵 $\Gamma = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_{19}]$ 见 excel 附件 “result” 工作表 ti2。

结论：

1. 与倒伏指数关联度最大的三个指标是基部第三茎节粗（0.8274）、基部第二茎节粗（0.7947）和基部第三茎节长（0.7778），可见基部二、三茎节形态特征对小麦抗倒伏性能有较大影响。
2. 总结相关系数分析、通径分析以及灰色关联分析三种方法得出的结论，株高、基部第二、三茎节（尤其是第二茎节）、穗重是影响小麦抗倒伏性能的主要因素。
3. 根据结论 2 分析 2008 年各小麦品种抗倒伏性能的差异，表 3-2 给出了 2008 年各小麦品种株高和壁厚情况，可以得出结论：国信 1 号与智 9998 早两个品种的小麦发生倒伏的原因主要是株高较高、基部第二茎节壁厚较薄的原因造成的。

表 3-2 2008 年各小麦品种株高和壁厚情况

品种 \ 指标	平均株高（cm）	基部第二茎节壁厚（mm）
矮抗	67.04	0.65
联丰	64.56	0.625
周 18	71.49	0.575
TM	87.45	0.475
智早	74.99	0.425

国信	84.33	0.45
----	-------	------

注：表格中品种是按倒伏指数由小到大排序的。

4 问题三、基于多目标优化的小麦理想株型结构

4.1 符号说明与假设

4.1.1 符号说明

表 4-1 符号约定与含义

C	单穗重
V	茎秆体积（不含穗）

4.1.2 假设

本节主要解决问题（3），基于对问题的初步分析，我们在设计小麦理想株型结构时，在第 2 节假设的基础上，进一步做如下假设：

1. 只对小麦地上部的形态特征进行设计，不考虑根系的影响。
2. 忽略叶片和叶形态的影响。
3. 不考虑小麦植株内部的生物学形状，如光能利用能力、防涝抗旱能力等等。
4. 不考虑植株在空间的排列方式，如田间作物密集程度等。
5. 不考虑小麦发育的过程，以腊熟期小麦为研究对象，仅设计腊熟期小麦的理想株型结构。
6. 小麦茎秆的每一茎节内粗、厚相等。

4.2 什么是理想株型

文献[19]中指出株型是指植株地上部的形态特征，在传统意义上，农学中株型的概念是广义的，是指产量形成的综合的外部形态特征的组配形式及整体表达，它不仅包括植株的形态特征、空间排列方式，而且包括与群体光能利用直接相关联的某些机能形状。因此是具有明显综合性的整体概念。

农学中传统意义上的理想株型与本文所研究的理想株型在含义和研究方法上存在一定区别，具体有以下两点：

（1）在理想株型含义方面，传统意义上研究理想株型是为了获得尽可能高的籽粒产量，所以重点放在了研究叶和茎秆的空间存在状态上，即植物的受光姿势。有大量文献通过研究小麦透光性与产量的关系设计理想株型，例如文献[20]提出了一种理想株型模式：矮秆、强秆、独秆，少而小的直立叶片，有芒大穗，繁茂的种子，根，穗茎较短。然而，随着产量水平的进一步提高及生产条件的不断改善，高产与倒伏的矛盾日益突出。本问题是在籽粒产量给定的情况下研究理想株型问题，那么研究理想株型的最终落脚点应在小麦抗倒伏性能上。

(2) 在研究方法上, 传统方法是通过试验发现优势品种, 总结优势品种的形态特征, 育种并再次进行试验验证。然而, 尽管国内外对小麦株型育种进行了有益的探索, 取得了不少进展, 但令人失望的是那些认为具有理想株型的品种, 往往产量并不高, 而目前实际生产上高产品种里同时并存着各种株型结构^[20]。这与前面解决几个问题时遇到的情况是一样的, 即现有问题解决方法是基于试验经验, 缺乏理论上严谨的研究与分析。

综合上述分析, 得到本问题中小麦理想株型的定义:

定义 4.1 小麦理想株型: 使抗倒伏性能达到最佳的小麦茎秆形态特征定量标准设计 (包括株高、穗长、各节间长、节间长度比、各节壁厚、穗重、鲜重等)。

注: 4.1 小节中的几点假设也是基于此定义下的理想株型给出的。

4.3 理想株型的多目标优化模型

4.3.1 目标函数

小麦理想株型优化的最终目的是在给定单穗重的条件下, 尽可能地减小自身倒伏指数。倒伏指数必然是优化的目标函数之一, 然而若一味地追求倒伏性能的提高, 结果必然是产生矮秆品种。然而, 品种的矮秆是有限度的, 过份强调矮秆还可能影响品种的产量潜力的提高, 给超高产育种带来困难: 如果小麦植株高度降低了, 根系也将缩短, 势必影响其抗根倒伏和抗旱能力; 矮化程度和干粒重降低的比率成正比例^[21]。通过 4.2 节的分析不难发现, 传统意义上的理想株型研究和本文理想株型研究分歧恰好是小麦高产和抗倒伏两者之间的矛盾, 3.3 节途径分析得到的结论 1 也验证了这一事实。因此, 如果结合传统理想株型研究, 考虑株型对产量的影响, 再加入一个表征产量的目标函数, 便可建立一个完整而更合理的综合性优化模型。

胡婷在其博士论文中指出, 茎秆鲜重越小, 茎秆的生物消耗越小, 重量与体积成正比 (假设密度是均匀的), 那么减小总体积就相当于减小重量^[22]。作者以总体积为目标函数对茎秆的几何尺寸 (基部第一、二茎节的外径和壁厚) 进行了优化, 对本文选取目标函数有一定的借鉴意义。如果我们选取茎秆体积为目标函数, 由于产量是给定的, 那么体积越小, 作物的生物消耗越小, 即使用化肥等投入越小, 那么体积实际上表征的是投入产出比, 也就是产量。

综合上述分析, 以 5 节小麦植株为研究对象, 选取倒伏指数 I 和茎秆体积 V 为目标函数。倒伏指数公式使用第 2 节所建模型, 具体见公式 (11); 根据密度均匀性原理, 5 节小麦的茎秆体积为:

$$V = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^5 l_i (2D_i d_i - d_i^2) \quad (21)$$

4.3.2 变量选取与约束条件

4.3.2.1 变量选取

选取与倒伏指数密切相关的茎秆形态特征为变量，分别是穗下各节节长 l_i (单位: cm)、重量 g_i (单位: g)、外径 D_i (单位: mm)、壁厚 d_i ($i=1,2,3,4,5$) (单位: mm)，穗长 l_0 (单位: cm)，茎秆鲜重 G (单位: g) 共 22 个变量。

4.3.2.2 约束条件

(1) 单穗重

在 22 个变量中，单穗重与穗长有显而易见的关联性；在茎秆形态的选择上，选择茎秆较高的株系会增加产量^[23]，可见株高 $L = \sum_{i=0}^5 l_i$ 与单穗重密切相关；此外，

小麦作物完整的植株，从遗传学角度分析，茎秆外径 $D = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 D_i$ 和秆鲜重 $g = \sum_{i=1}^5 g_i$ 与穗重关系密切。

综合上述分析，根据 11 年矮抗 58、郑麦 9023 和周麦 22 三个品种的数据（这些数据较为齐全），选取株高、穗长、秆平均外径和秆鲜重为变量，通过回归分析得到单穗重的线性表达式：

$$C = 0.0223L + 0.2879l_0 + 1.7508D - 0.2611g - 6.6869 \quad (22)$$

(2) 各形态特征需满足各自的约束范围：

$$x_k \in M_k (k=1,2...22) \quad (23)$$

(3) 各形态特征有自身的约束范围，同时，一种形态特征的确定也会影响其他形态特征的取值，因此不能孤立的选取每个形态特征，而忽略它们之间的联系。因此，各个形态特征的选取应满足以下条件概率：

$$P\left\{\left\{x_1, x_2 \dots x_{22}\right\} \in \Omega \middle/ x_k\right\} \geq 95\%, (k=1,2...22) \quad (24)$$

(4) 小麦是中空圆柱体， $D_i \geq 2d_i (i=1,2,3,4,5)$

4.3.3 理想株型多目标优化模型的表述

综上所述，理想株型结构的多目标优化模型可以表示为：

$$\text{sub.} \begin{cases} \min I, I = \frac{G \cdot H}{0.4069g_2 - 0.4197l_2 + 0.3968D_2 + 0.3291d_2} \\ \min V, V = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^5 l_i (2D_i d_i - d_i^2) \end{cases} \quad (25)$$

$$s.t. \begin{cases} C = 0.0223L + 0.2879l_0 + 1.7508D - 0.2611g - 6.6869 \\ x_k \in M_k (k=1,2,...22) \\ P\left\{\frac{\{x_1, x_2 \dots x_{22}\} \in \Omega}{x_k}\right\} \geq 95\%, (k=1,2,...22) \\ D_i \geq 2d_i (i=1,2,3,4,5) \end{cases} \quad (26)$$

4.3.4 多目标优化模型的数值结果

在多目标优化算法中，对多目标进行线性加权，由于倒伏指数和体积数值差距较大，因此在加权前分别对倒伏指数和体积进行标准化处理。根据多目标优化模型求解得到理想株型结构如表 4-2 所示。

表 4-2 小麦理想株型结构指标

单穗重(g) 株型结构	1.19	2.06	2.46	2.56	2.75	2.92
一节长	17.88571	18.30795	19.6718	20.01276	23	23.18
二节长	12.52	12.81557	13.77026	14.00893	13.4	16.226
三节长	6.199999	6.2	6.200001	6.199999	6.2	6.200001
四节长	4.599999	4.600001	4.600001	4.599999	4.6	4.636
五节长	1.788571	1.830795	1.96718	2.001276	2.3	2.318
一节厚	0.458481	0.461905	0.461905	0.461905	0.485328	0.547317
二节厚	0.366785	0.40235	0.480534	0.50008	0.576327	0.649939
三节厚	0.586856	0.64376	0.768854	0.800128	0.922124	1.039902
四节厚	0.96281	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
五节厚	1.145	1.145	1.145	1.145	1.145	1.145
一节重	1.202952	0.8942	1.109471	1.081393	1.240262	1.316933
二节重	1.082657	0.80478	0.998524	0.973254	1.116236	1.18524
三节重	0.49321	0.447281	0.454883	0.641684	0.508507	0.539943
四节重	0.360886	0.26826	0.332841	0.324418	0.372079	0.39508
五节重	0.120295	0.103257	0.110947	0.108139	0.124026	0.131693
一节粗	2.47592	2.633333	2.572458	2.61737	2.633334	2.648462
二节粗	2.723512	2.896666	2.829704	2.879107	2.958896	2.913308
三节粗	3.961472	4.213333	4.115933	4.187792	4.213334	4.237539
四节粗	2.723512	3.127109	4.45	4.45	4.45	4.449999
五节粗	4.456656	4.739999	4.630424	4.711266	4.740001	4.74
穗长	6.6	7.292384	7.70154	7.803829	8.25	8.76

株高	49.59429	51.04669	53.91078	54.6268	57.75	61.32
茎秆鲜重	4.45	4.577778	5.466667	5.688889	6.111111	6.488889

注：表格中各节从穗下开始计，如一节即为穗下第一节。

5 问题四、基于力学、分析、几何的综合抗倒伏模型

5.1 符号说明

q_{cr}	临界状态时茎秆单位长度的自重
P_{cr}	临界状态时的穗重
E	弹性模量
I	惯性矩
M	弯曲力矩
v	挠度
δ	位移参数

5.2 模型的准备对问题的理解与分析

5.2.1 现有研究情况

本小节主要解决问题（4），从力学、几何的角度综合研究小麦抗倒伏性能。在小麦抗倒伏性评价方面，农学家大多采用直观法由株高、茎粗、茎秆形态，还有提出用倒伏指数、弯曲度、稳定系数等指标来评价小麦抗倒性，本文 2~4 节已经重点研究了小麦倒伏指数的问题。然而用农艺形状来作出评价的结果缺乏严密的理论分析，近年，人们逐渐注意到应用物理力学性能指标可以表达茎秆作物的抗倒伏特性，并相继展开了小麦茎秆的力学性质试验研究，获得了各节的拉、压强度极限，弹性模量，泊松比等指标^{[24][25][26]}。文献[26]运用农业生物力学的原理与方法，初步研究了小麦茎秆的组织结构、力学性质与倒伏的关系；文献[27]在进行了作物茎秆抗倒伏的力学分析后，提出了与茎秆抗倒伏性能有关的力学指标——临界力。总之，关于茎秆作物抗倒伏物理力学评价方面已经取得了一些成果，但还缺乏针对不同生长期，考虑不同因素，试验和理论相结合等方面进行全面的分析和研究。本小节主要依据前人已有研究成果，研究小麦茎秆在麦穗自重和风载作用下应力的基本规律。

5.2.2 理论基础

（1）挠曲线方程

令 q_{cr} 为临界状态时茎秆单位长度的自重， P_{cr} 为临界状态时的穗重。茎秆在临界力 q_{cr}, P_{cr} 作用下，在微弯状态下处于不稳定平衡，其挠曲线近似方程^[28]为

$$v = \frac{\delta}{2L^3} (3Lx^2 - x^3)$$

式中 δ ---位移参数, 它表示茎秆顶端处的水平位移; L ---茎秆的高度; x ---截面位置; v ---挠度, 表示 x 截面处的水平位移; L, δ, x, v 的单位为 cm 。

(2) 自由端的弹性梁

水平直梁, 一端固定在墙壁上, 另一端可自由偏转。设原点为梁在墙壁上的固定点, 梁的中轴为 x 轴。根据弹性理论和虎克定律, 弹性曲线的曲率 k 与弯动力矩 M 成正比。而 $k = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, 得弹性曲线的微分方程为

$$\frac{y'''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI} \quad (27)$$

其中 E 为梁的弹性系数(杨氏模数), I 为梁的横截面对重心(水平)线的惯性力矩。

因工程结构中, 梁的挠度很小, 弹性曲线的曲率也很小, 在方程中的 y'^2 往往可省略不计, 材料力学中梁的挠度的微分方程可简化为

$$EIy'' = M \quad (28)$$

5.3 小麦茎秆的挠曲线模型

小麦茎秆的挠曲线方程及解析表达, 关系小麦茎秆的应力规律, 是抗倒伏模型中的一个至关重要的问题。下面, 我们就先通过力学、几何等多种方法综合使用, 来获得小麦茎秆的挠曲线方程模型。

为确定小麦茎秆在自重和外力(风载作用)的共同作用下, 形态的变化特征, 需要首先明确麦秆自身形成的曲线结构。

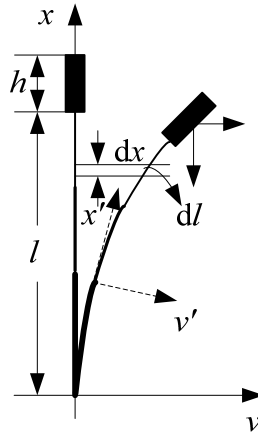


图 5-1 单株小麦变形示意图

此时茎秆 x 处的弯矩可以表示为:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_F(x) + M_{G_s}(x) + M_{G_g}(x) \\ &= -(\tilde{L} - x)F \cos \phi_{up} - (\delta - v(x))G_s - \int_x^{\tilde{L}} (v(u) - v(x))\tilde{\rho}(u) du \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$M_F(x)$ 、 $M_{G_s}(x)$ 和 $M_{G_g}(x)$ 分别表示顶端水平作用力 F ，麦穗重力 G_s 以及茎秆自重 G_g 在高度 x 处形成的弯矩； $v(x)$ 表示茎秆 x 截面处的挠度，即 x 处截面的水平位移； ϕ_{up} 表示茎秆根部与顶端的连线与竖直方向的夹角； \tilde{l} 表示茎秆弯曲后，顶端的垂直高度， L 表示茎秆长度，在该模型中认为满足关系式：

$$L = \int_0^{\tilde{l}} \frac{1}{\cos \theta(x)} dx = \int_0^{\tilde{l}} \sqrt{(v'(x))^2 + 1} dx, \quad L = l_g + l_0 / 2 \quad (31)$$

$\rho(u)$ 表示茎秆自重的线密度，则有：

$$\tilde{\rho}(u) = \frac{\rho(u)}{\cos \theta(u)} = \rho(u) \sqrt{(v'(u))^2 + 1} \quad (32)$$

$\theta(x)$ 表示茎秆在高度 x 处的转角，且

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \tan \theta(x) \quad (33)$$

$$\text{即 } \cos(\theta(x)) = \frac{1}{\sqrt{(v'(x))^2 + 1}}, \quad \sin(\theta(x)) = \frac{v'(x)}{\sqrt{(v'(x))^2 + 1}} \quad (34)$$

δ 表示茎秆顶端的水平位移， $\delta = v(\tilde{L})$ 。

挠曲线满足的精确微分方程为：

$$\frac{d\theta(x)}{dl} = -\frac{M(x)}{E(x)I(x)} \quad (35)$$

$E(x)$ 和 $I(x)$ 分别表示该位置的弹性模量以及惯性矩。由于茎秆线长度微元 dl 与高度微元 dx 之间满足：

$$\cos \theta(x) dl = dx \quad (36)$$

此外，

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = \frac{d}{dx} \tan \theta(x) = \frac{1}{\cos^2 \theta(x)} \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (37)$$

因此有：

$$\frac{d\theta(x)}{dl} = \frac{d\theta(x)}{dx} \frac{dx}{dl} = \cos \theta(x) \frac{d\theta(x)}{dx} = \cos^3 \theta(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (38)$$

综合得到：

$$\cos^3 \theta(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E(x)I(x)} \quad (39)$$

小麦茎秆挠曲线方程模型

$$\frac{E(x)I(x)}{\left(\sqrt{[v'(x)]^2+1}\right)^3} v''(x) = (\tilde{L}-x)F \cos \phi_{up} + (v(\tilde{L})-v(x))G_s + \int_x^{\tilde{L}} (v(u)-v(x))\rho(u)\sqrt{(v'(u))^2+1}du \quad (40)$$

对该模型，直接找到解析表达式比较困难，下面我们分三种情况，分别从线密度线性减小、几何变换、分节均匀三个角度，来讨论模型的解。并分别给出麦秆抗倒伏的数学模型。

5.4 挠曲线模型的简化

5.4.1 简化模型 1：线密度线性减小情况下的抗倒伏模型

5.4.1.1 挠曲线方程的求解

考虑秆在风力 F 、顶端麦穗重力、茎秆重力作用下的挠曲线方程。最大挠度发生在秆的自由端。在任意 x 横截面上，风力产生的弯矩为：

$$M_1(x) = -F \cdot (L-x)$$

麦穗重力产生的弯矩为：

$$M_2(x) = -G \cdot (\delta - v)$$

茎秆重力产生的弯矩为：

$$M_3(x) = -\int_x^L (v(u)-v(x))g\rho(u)du$$

总的弯矩作用为：

$$\begin{aligned} M(x) &= M_1(x) + M_2(x) + M_3(x) \\ &= -F \cdot (L-x) - G \cdot (\delta - v) - \int_x^L (v(u)-v(x))g\rho(u)du \end{aligned}$$

由挠曲线近似微分方程 $EIv'' = -M(x)$ 得到：

$$EIv'' = F \cdot (L-x) + G \cdot (\delta - v) + \int_x^L (v(u)-v(x))g\rho(u)du$$

假设 $\rho(x) = \rho_0 - \alpha x$ ，则有：

$$EIv'' = F \cdot (L-x) + G \cdot (\delta - v) + \int_x^L (v(u)-v(x))g(\rho_0 - \alpha u)du$$

求解上式的难度在于 $\int_x^L (v(u)-v(x))g(\rho_0 - \alpha u)du$ 的计算，所以在进行积分计算

时假设一个相对合理的 $v(x) = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3)$ 代入积分号内，对方程进行迭代求解

$$EIv'' = F(L-x) + G\delta(1 - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{2L^3}) + \frac{\delta g \alpha}{2L^3} \int_x^L (3Lu^2 - u^3 - 3Lx^2 + x^3)(\rho_0 - \alpha u)du$$

$$\begin{aligned}
EIv'' &= F(L-x) + G\delta(1 - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{2L^3}) + \\
&\frac{\delta g \alpha}{2L^3} \int_x^L \{ \alpha u^4 - (\rho_0 + 3\alpha L)u^3 + 3L\rho_0 u^2 + \alpha(3Lx^2 - x^3)u + (\rho_0 x^3 - 3L\rho_0 x^2) \} du \\
EIv'' &= F(L-x) + G\delta(1 - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{2L^3}) + \frac{\delta g \alpha}{2L^3} \{ \frac{3\alpha}{10} x^5 - (\frac{3}{4}\rho_0 + \frac{3}{4}\alpha L)x^4 \\
&+ (3L\rho_0 - \frac{1}{2}\alpha L^2)x^3 + (\frac{3}{2}\alpha L^3 - 3L^2\rho_0)x^2 + (\frac{3}{4}L^4\rho_0 - \frac{11}{20}\alpha L^5) \} \\
EIv'' &= \frac{3\delta g \alpha^2}{20L^3} x^5 - \frac{3\delta g \alpha}{8L^3} (\rho_0 + \alpha L)x^4 + [\frac{\delta g \alpha}{4L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{2L^3}]x^3 + \\
&[\frac{\delta g \alpha}{4L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{2L^2}]x^2 - Fx + \frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta
\end{aligned}$$

两次积分后可以得到

$$\begin{aligned}
EIv' &= \frac{3\delta g \alpha^2}{120L^3} x^6 - \frac{3\delta g \alpha}{40L^3} (\rho_0 + \alpha L)x^5 + (\frac{\delta g \alpha}{16L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{8L^3})x^4 + \\
&(\frac{\delta g \alpha}{12L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{6L^2})x^3 - \frac{1}{2}Fx^2 + [\frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta]x + C \\
EIv &= \frac{3\delta g \alpha^2}{840L^3} x^7 - \frac{3\delta g \alpha}{240L^3} (\rho_0 + \alpha L)x^6 + [\frac{\delta g \alpha}{80L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{40L^3}]x^5 + \\
&[\frac{\delta g \alpha}{48L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{24L^2}]x^4 - \frac{1}{6}Fx^3 + \frac{1}{2}[\frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta]x^2 + Cx + D
\end{aligned}$$

将边界条件 $v|_{x=0}=0$, $v'|_{x=0}=0$ 带入

可得

$$C=0, \quad D=0$$

于是

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{EI} \{ \frac{3\delta g \alpha^2}{840L^3} x^7 - \frac{3\delta g \alpha}{240L^3} (\rho_0 + \alpha L)x^6 + [\frac{\delta g \alpha}{80L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{40L^3}]x^5 + \\
&[\frac{\delta g \alpha}{48L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{24L^2}]x^4 - \frac{1}{6}Fx^3 + \frac{1}{2}[\frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta]x^2 \} \quad (41)
\end{aligned}$$

可以看出, 得到的挠曲线方程是一个更高阶的多项式函数关系。如果要求更精确, 可将上式代入积分号内进行二次迭代。

5.4.1.2 临界状态和临界力的求解

茎秆在微弯状态下的应变能为:

$$\begin{aligned}
U &= \int_0^L (v'')^2 dx = \frac{1}{EI} \{ \frac{3\delta g \alpha^2}{120L^3} L^6 - \frac{3\delta g \alpha}{40L^3} (\rho_0 + \alpha L)L^5 + [\frac{\delta g \alpha}{16L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{8L^3}]L^4 + \\
&[\frac{\delta g \alpha}{12L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{6L^2}]L^3 - \frac{1}{2}FL^2 + [\frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta]L \}
\end{aligned}$$

设茎秆在任意 x 截面处得轴向下移量为 $\lambda(x)$, 为

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \int_0^x \frac{1}{2} (v')^2 dx = \frac{1}{2(EI)^2} \int_0^x \left\{ \frac{3\delta g \alpha^2}{120L^3} x^6 - \frac{3\delta g \alpha}{40L^3} (\rho_0 + \alpha L) x^5 + \left[\frac{\delta g \alpha}{16L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{G\delta}{8L^3} \right] x^4 + \right. \\
&\quad \left[\frac{\delta g \alpha}{12L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{3G\delta}{6L^2} \right] x^3 - \frac{1}{2} F x^2 + \left[\frac{\delta g \alpha L}{40} (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta \right] x \left. \right\}^2 dx \\
&= \frac{1}{20800} \frac{\delta^2 g^2 \alpha^4}{L^6} x^{13} - \frac{1}{3200} \frac{\delta^2 g^2 \alpha^3}{L^6} (\rho_0 + \alpha L) x^{12} + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{20} \frac{\delta g \alpha^2}{L^3} \left(\frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{1600} \frac{\delta^2 g^2 \alpha^2}{L^6} (\rho_0 + \alpha L)^2 \right) x^{11} + \frac{1}{10} \left(-\frac{3}{20} \left(\frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) \frac{\delta g \alpha}{L^2} (\rho_0 + \alpha L) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{20} \frac{\delta g \alpha^2}{L^3} \left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right) \right) x^{10} + \frac{1}{9} \left(-\frac{3}{20} \left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\delta g \alpha}{L^3} (\rho_0 + \alpha L) - \frac{1}{40} \frac{\delta g \alpha^2}{L^3} F + \frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) x^9 + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{40} \left(F \frac{\delta g \alpha}{L^3} (\alpha L + \rho_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left(\frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) \left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{20} \frac{\delta g \alpha^2}{L^3} \left(\frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + G\delta \right) \right) \right) x^8 + \frac{1}{7} \left(\left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L^3} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{20} \frac{\delta g \alpha}{L^3} (\alpha L + \rho_0) \left(\frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + Gb \right) \right. \\
&\quad \left. - F \left(\frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) \right) x^7 + \frac{1}{6} \left(2 \left(\frac{1}{16} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (6\rho_0 - \alpha L) + \frac{1}{8} \frac{G\delta}{L^3} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + Gb \right) - F \left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right) \right) x^6 \\
&\quad + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} F^2 + 2 \left(\frac{1}{12} \frac{\delta g \alpha}{L^2} (3\alpha L - 6\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{G\delta}{L^2} \right) \frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + Gb \right) x^5 \\
&\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + Gb \right) F x^4 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{40} \delta g \alpha L (15\rho_0 - 11\alpha L) + FL + Gb \right)^2 x^3
\end{aligned}$$

设 P_{cr} 作用点处得轴向下移动量为 λ_1 , 为

$$\lambda_1 = \int_0^L \frac{1}{2} (v')^2 dx = \lambda(x)|_{x=L}$$

茎秆重力做的功:

$$W_1 = - \int_0^L q_{cr} \lambda(x) dx$$

顶端麦穗重力做的功

$$W_2 = -P_{cr} \lambda_1$$

风力认为只作用于麦穗, 风力做功

$$W_3 = -F\delta$$

因此秆的势能为:

$$\Pi = U - W_1 - W_2 - W_3$$

由势能驻值定理 $\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 0$ 求解临界力。

势能驻值定理【孙训方 材料力学】:

在 n 个集中力作用 P_1 、 P_2 、 \dots 、 P_n 作用下，势能表达式为

$\Pi = U - \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$ ， Π 为位移 δ_1 、 δ_2 、 \dots 、 δ_n 的函数，则当任一位移 δ_i 有一个

微小的增量 $d\delta_i$ 时，势能的该变量为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} d\delta_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i - P d\delta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i} - P \right) d\delta_i$$

卡是第一定理， $P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$ ，因此：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0 \quad (42)$$

进一步的研究表明，对于一个处于稳定平衡条件下的结构物，势能的驻值是最小值。上式即表达了势能驻值定理。

5.4.2 简化模型 2：几何变换简化下的模型

该简化模型的特点在于将单茎麦秆进行分节，重点从几何方面包括坐标平移和坐标旋转对原有模型进行简化。

假设每株单茎麦秆分为 n 节， $n=1,2,3,4,5$ 。首先从 $n=2$ 开始讨论， $n=3,4,5$ 方法类似。

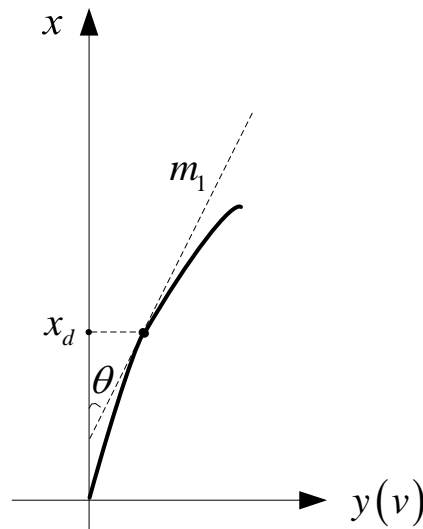


图 5-2 分节小麦茎秆坐标

Step1. m_1 表示在第一节在与第二节交点处的切线， θ 表示 m_1 与 x 轴的夹角。

易得知：

$$x_d = 1 + \frac{l^2}{\left(1 - l^2 + l^3 + \sqrt{l^4 - 2l^5}\right)^{1/3}} + \sqrt{l^4 - 2l^5}$$

那么,

$$\begin{aligned} \cot \theta &= y'(x_d) \\ &= \frac{d\left(\frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3)\right)}{dx} \Big|_{x=x_d} \\ &= \frac{\delta}{2L^3}(6Lx - 3x^2) \Big|_{x=x_d} \\ &= \frac{\delta}{2L^3}(6Lx_d - 3x_d^2) \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \theta = \arccot \left[\frac{\delta}{2L^3}(6Lx_d - 3x_d^2) \right]$$

Step2. 通过坐标旋转和平移变换来确定第二节曲线的方程表示。首先进行坐标平移变换。

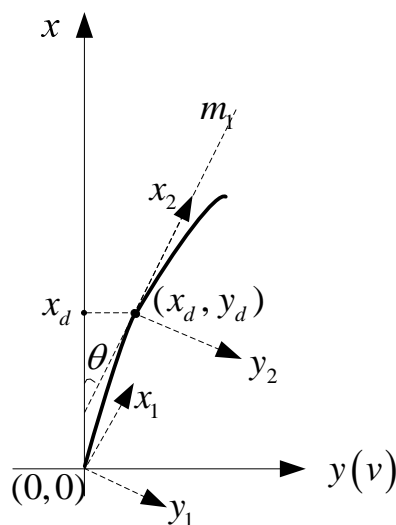


图 5-3 坐标平移变换

其中, (x_2, y_2) 为原点在 (x_d, y_d) 处以切线 m_1 为 x_2 轴的直角坐标系。然后再把 (x_2, y_2) 平移到以 $(0, 0)$ 为中心的位置形成 (x_1, y_1) 直角坐标系。

这样, 在 (x_2, y_2) 坐标下第二节麦秆满足原方程曲线, 即:

$$y_2(x_2) = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx_2^2 - x_2^3)$$

将 (x_2, y_2) 平移到 (x_1, y_1) 处时有:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

带入上式有：

$$y_1(x_1) = \frac{\delta}{2L^3} \left[3L \left(x_1 + \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \right)^2 - \left(x_1 + \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \right)^3 \right]$$

Step3. 下面进行坐标旋转变换，考虑从 (x_1, y_1) 到 (x, y) 的简图：

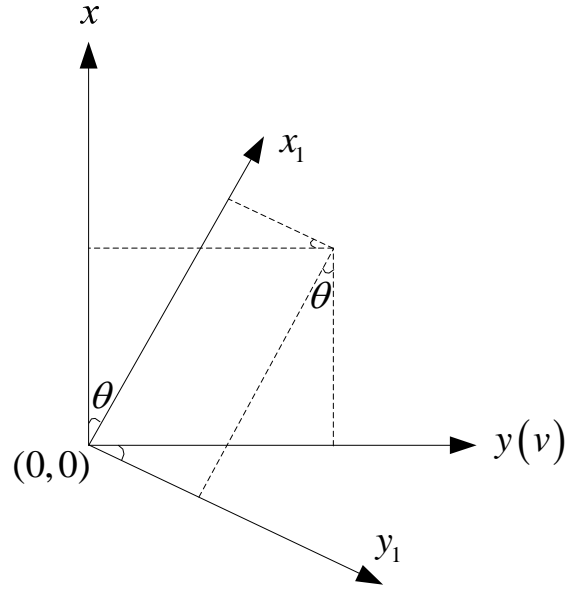


图 5-4 坐标旋转变换

从图 5-4 易有：

$$\begin{cases} \frac{y_1}{\cos \theta} + x \cdot \tan \theta = y \\ y_1 \tan \theta + \frac{x}{\cos \theta} = x_1 \end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} y_1 = y \cos \theta - x \sin \theta \\ x_1 = y \sin \theta + x \cos \theta \end{cases}$$

所以得到第二节麦秆的挠曲线为：

$$y \cos \theta - x \sin \theta =$$

$$\frac{\delta}{2L^3} 3L \left(\left((x \cos \theta + y \sin \theta) + \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \right)^2 - \left((x \cos \theta + y \sin \theta) + \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \right)^3 \right)$$

记为：

$$V_{\text{第二节}}(x, y) = V(x, y, \theta) = 0$$

Step4. 类似上述步骤可获得第三到第五节的曲线方程 V_3 ， V_4 ， V_5

这样，可以分段表达挠曲线方程：

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \\ V_{\text{第二节}}(x, y) = V(x, y, \theta) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (43)$$

Step5. 重复第一种方法中 $\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0$ 方法，获得临界值。这个表达式比文献[27]中更接近真实情况。

5.4.3 简化模型 3：分节均匀弹性情况下的抗倒伏模型

在该简化模型中，我们忽略麦秆重量对茎秆挠曲线的影响。为此，我们作出如下假设：

1. 地面是水平的；
2. 麦子的根部是稳固的，不发生“根倒”也不会产生位移，认为是固定端；
3. 风向始终沿水平方向，与地面没有夹角；
4. 在小麦腊熟期，叶片、叶鞘完全脱落，风载力(即外力)只作用在麦穗上，忽略风对麦秆本身的作用力；
5. 忽略小麦的生理弯曲，在水平放置(不计重力)、不受外力的状态下，认为麦秆各节直至麦穗都处在同一轴线上；
6. 认为麦秆为弹性材料，若外部作用力不超过麦秆本身的抗弯强度，则外力撤除后麦秆可恢复原状；
7. 每节麦秆的因自身弯曲形成的转角很小(各节的累计转角可能较大)，因此茎秆弯曲后的根与麦穗间的距离与茎秆长度的差值可以忽略；
8. 茎秆自重对茎秆挠曲线的形成没有影响；
9. 茎秆为质地均匀的弹性材料，即弹性模量 $E(x) = E$ ，惯性矩 $I(x) = I$ ，均为常数。

根据以上假设，有

$$\sqrt{[v'(x)]^2 + 1} \approx 1, \quad \cos \phi_{up} \approx \frac{\sqrt{L^2 - \delta^2}}{L}, \quad M_{G_s}(x) \approx 0 \quad (44)$$

5.4.3.1 外力与重力共同作用的挠曲线方程

考虑外力与麦穗自重的作用，式(40)可以近似表示为

$$EIv''(x) = (L-x)F \frac{\sqrt{L^2 - \delta^2}}{L} + (\delta - v(x))G_s$$

解该微分方程，并利用边界条件 $v(0) = 0$ ， $v'(0) = 0$ ，得

$$v(x) = \sqrt{\frac{EI}{G}} \frac{\tilde{F}}{G} \sin\left(\sqrt{\frac{G}{EI}}x\right) - \left(\frac{\tilde{F}L}{G} + \delta\right) \cos\left(\sqrt{\frac{G}{EI}}x\right) - \frac{\tilde{F}}{G}x + \frac{\tilde{F}L}{G} + \delta$$

$$\text{其中, } \tilde{F} = F \cos \phi_{up} = \frac{\sqrt{L^2 - \delta^2}}{L} F。$$

$$\begin{aligned} v(x) \Big|_{x=\sqrt{L^2-\delta^2}} &= \delta \\ &= \sqrt{\frac{EI}{G}} \frac{\tilde{F}}{G} \sin\left(\sqrt{\frac{G}{EI}}\sqrt{L^2-\delta^2}\right) - \left(\frac{\tilde{F}L}{G} + \delta\right) \cos\left(\sqrt{\frac{G}{EI}}\sqrt{L^2-\delta^2}\right) - \frac{\tilde{F}}{G}\sqrt{L^2-\delta^2} + \frac{\tilde{F}L}{G} + \delta \end{aligned}$$

可得

$$\delta \approx \frac{\tilde{F}}{G} \sqrt{\frac{EI}{G}} \tan\left(L\sqrt{\frac{G}{EI}}\right) - \frac{\tilde{F}L}{G}$$

δ 与 $v(x)$ 分别表示在茎秆顶端受到水平力 F 以及麦穗重力 G_s 的作用下, 顶端的水平位移以及挠曲线方程。

5.4.3.2 临界力计算

引用 5.2.2 节中挠曲线近似方程 $v(x) = \frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2 - x^3)$, 此茎秆在微弯状态下的应变能为:

$$U = \int_0^L v'' dx = \frac{3EI\delta^2}{2L^3}$$

式中, E 为茎秆的弹性模量, I 为截面惯性矩, $I = \frac{\pi}{32}[D^4 - (D-2t)^4]$, D 为横截面的直径。

设茎秆在任意 x 截面处得轴向下移量为 $\lambda(x)$, 为:

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(v')^2 dx = \frac{9\delta^2}{8L^6} \left(\frac{4}{3}L^2x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5}x^5 \right)$$

设顶端竖直向下作用力处的轴向下移量为 λ_1 , 为:

$$\lambda_1 = \int_0^h \frac{1}{2}(v')^2 dx = \frac{9\delta^2}{8L^6} \left(\frac{4}{3}L^2h^3 - Lh^4 + \frac{1}{5}h^5 \right)$$

由此可得, 秆的重力做功为

$$\begin{aligned} W_1 &= -\int_0^L q_{cr}(x)\lambda(x)dx = -\int_0^L q_{cr}(x) \frac{9\delta^2}{8L^6} \left(\frac{4}{3}L^2x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) dx \\ &= -\frac{9\delta^2}{8L^6} \int_0^L q_{cr}(x) \left(\frac{4}{3}L^2x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{令 } \tilde{q}_{cr} = \int_0^L q_{cr}(x) \left(\frac{4}{3}L^2x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) dx, \text{ 则 } W_1 = -\frac{9\delta^2}{8L^6} \tilde{q}_{cr}$$

因为秆为分段线性的, 即 $q_{cr}(x)$ 在每一段都为常数值 ρ_i 。

$$\tilde{q}_{cr} = \int_0^L q_{cr}(x) \left(\frac{4}{3} L^2 x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) dx = \sum_i \rho_i (q_{cr}^i - q_{cr}^{i-1})$$

$$q_{cr}^i = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \rho_i \left(\frac{4}{3} L^2 x^3 - Lx^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) dx = \rho_i \left(\frac{1}{3} L^2 l_i^4 - \frac{l_i^5}{5} + \frac{1}{30} l_i^6 \right), \quad i=1,2,\dots,5$$

$$q_{cr}^0 = 0$$

忽略风力对小麦茎秆作用，那么风力只作用于麦穗。风力与麦穗重力作用于同一点，简化处理，令 F_{cr} 为风力与麦穗重力的合力。

$$\vec{F}_{cr} = \vec{F} + \vec{G}$$

其中风力 F 可以为任意方向。

将 F_{cr} 进行水平和竖直方向的分解

水平方向力 $F_1 = F_{cr} \cos \varphi$ ，竖直方向力 $F_2 = F_{cr} \sin \varphi$ （ φ 为合力 F_{cr} 与水平方向的夹角）

水平方向分力做功：

$$W_2 = -F_1 \delta = -\delta F_{cr} \cos \varphi \quad (\text{假设水平风力在茎秆发生弯曲过程中保持恒定})$$

竖直方向分力做功：

$$W_3 = -F_2 \lambda_1 = -\frac{9\delta^2}{8L^6} \left(\frac{4}{3} L^2 h^3 - Lh^4 + \frac{1}{5} h^5 \right) F_{cr} \sin \varphi$$

因此，茎秆的势能为：

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W_1 - W_2 - W_3 \\ &= \frac{3EI\delta^2}{2L^3} - \frac{9\delta^2}{8L^6} \tilde{q}_{cr} - \delta F_{cr} \cos \varphi - \frac{9\delta^2}{8L^6} \left(\frac{4}{3} L^2 h^3 - Lh^4 + \frac{1}{5} h^5 \right) F_{cr} \sin \varphi \end{aligned}$$

由势能驻值定理 $\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 0$ ，

$$\frac{3EI\delta}{L^3} - \frac{9\delta}{4L^6} \tilde{q}_{cr} - F_{cr} \cos \varphi - \frac{9\delta}{4L^6} \left(\frac{4}{3} L^2 h^3 - Lh^4 + \frac{1}{5} h^5 \right) F_{cr} \sin \varphi = 0$$

可得，茎秆临界力的表达式

$$F_{cr} = \frac{\left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{9}{4L^6} \tilde{q}_{cr} \right) \delta}{\cos \varphi + \frac{9\delta}{4L^6} \left(\frac{4}{3} L^2 h^3 - Lh^4 + \frac{1}{5} h^5 \right) \sin \varphi}$$

5.4.4 基于简化模型 3 的茎秆抗倒伏模型：

5.4.4.1 抗倒伏余量

5.1 抗倒伏余量

$$\gamma_{left} = G_{cr} - G$$

当重力大于临界力时, $\gamma_{left} = G_{cr} - G < 0$, 茎秆发生倒伏。当重力小于临界力时, $\gamma_{left} = G_{cr} - G > 0$, 且 γ_{left} 越大, 茎秆抗倒伏能力越强。

当重力恰好等于临界力时, 由于只有重力作用, 有

$$EIv''(x) = (\delta - v(x))G$$

将上式移项, 并简化得

$$v'' + k^2 v = k^2 \delta, \quad \text{式中, } k^2 = \frac{G}{EI}。$$

该微分方程的通解为

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + \delta$$

上式中的待定常数 A 、 B 、 k 可由挠曲线的边界条件来确定,

$$v|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=0} = 0$$

将 $x=0$ 处边界条件代入, 可得 $A=0$, $B=-\delta$ 。于是 $v(x) = \delta(1 - \cos kx)$ 。

在 $x = \sqrt{L^2 - \delta^2}$ 处, $v = \delta$ 。代入上式即得:

$$\delta = \delta(1 - \cos k\sqrt{L^2 - \delta^2})$$

$$\text{所以, } k\sqrt{L^2 - \delta^2} = \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$\text{由其最小解 } k\sqrt{L^2 - \delta^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{即得 } k = \frac{\pi}{2\sqrt{L^2 - \delta^2}}$$

$$\text{可得挠曲线方程 } v(x) = \delta(1 - \cos \frac{\pi}{2\sqrt{L^2 - \delta^2}} x)$$

$$\text{同时, } \sqrt{\frac{G}{EI}(L^2 - \delta^2)} = \frac{\pi}{2}$$

于是, 可得临界状态下临界力与顶端位移关系为

$$G = \frac{\pi^2 EI}{4(L^2 - \delta^2)}, \quad \text{即 } \delta = \sqrt{L^2 - \frac{4G}{\pi^2 EI}}$$

定义 5.2 倒伏角 θ_d

表示茎秆根部到顶点的连线与竖直方向的夹角, $\sin \theta_d = \delta/L$ (δ 为顶端位移, L 为秆长), 即 $\theta_d = \arcsin(\delta/L)$ 。该角度用以度量倒伏严重程度。

5.4.4.2 抗折断余量

茎秆第 i 节的抗弯强度表示为 σ_{\max}^i :

$$\sigma_{\max}^i = \frac{M_{\max}^i}{W_i}$$

根据机械强度的测定实验, $M_{\max}^i = \frac{P_i l_{\text{test}}}{4}$, 其中 P_i 表示第 i 节的机械强度, l_{test}

表示三点实验时测试的跨度, $W^i = \frac{\pi}{32D_i} (D_i^4 - (D_i - 2t_i)^4)$, 表示第 i 节的抗弯截面系数。

当茎秆单端固定时, 由于受到麦秆自重 G_g 、麦穗自重 G_s 以及风载力 F 的影响, 其在高度 x 处的弯矩表示为:

$$M(x) = -F(L-x) - G_s(\delta - v(x)) - \int_x^L \rho(u)(v(u) - v(x)) du$$

由于假设茎秆是分段均匀的, 经过分段积分可得:

$$-M(x) = F(L-x) + G(\delta - v(x)) + \int_x^{l_k} \rho_k(v(u) - v(x)) du + \sum_{i=k+1}^5 g_i$$

其中

$k=1, \dots, 5$, 且满足 $l_{k-1} \leq x < l_k$, l_k 表示第 k 节上端点的高度, $l_0=0$, $l_5=L$ 。

相应的, 该位置的正应力可以表示为:

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{W(x)} = \frac{M(x)}{W^i}, \quad i=1, 2, \dots, 5, \quad \text{且满足 } l_{i-1} \leq x < l_i。$$

当 $\sigma(x)$ 超过该节的抗弯强度时, 即弯矩在该点形成的正应力超越其所能承受的最大应力时, 茎秆将在该处折断。

定义 5.3 抗折断余量

$$\sigma_{\text{left}}(x) = \sigma_{\max}^i - \sigma(x), \quad i=1, 2, \dots, 5, \quad \text{且满足 } l_{i-1} \leq x < l_i$$

抗折断余量越大, 则茎秆抗折断能力越强。且麦秆的抗折断性能由最小余量决定。

6 问题五、抗倒伏风速、自重模型及数值解

6.1 问题分析

若茎秆顶端分别受到水平方向的力 F 以及垂直方向的穗重 G_s 的作用, 风压的贝努力公式

$$w = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{\gamma}{2g} v^2 = \frac{v^2}{1630} (kN/m^2)$$

因腊熟期小麦叶片、叶鞘多已脱落, 可设风力仅对单穗穗头起作用, 暂时忽略风力对小麦茎秆作用。假设穗头的形状为矩形, 面积为 S 。

压力为 $F = wS \sin \theta$ ，其中 θ 为风力与受力面的夹角， $0 < \theta < \pi/2$ 。

$S = 0.4841 + 0.2238G$ ，其中 G 为单穗鲜重。

根据问题四的讨论，本问题的求解模型为

$$M(x) = -F(L-x) - G_s(\delta - v(x)) - \int_x^l \rho(u)(v(u) - v(x)) du$$

$$M_{\max}^i = \frac{Pl_{test}}{4}$$

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{W(x)} = \frac{M(x)}{W^i}$$

$$\sigma_{left}(x) = \sigma_{\max}^i - \sigma(x)$$

$$G = \frac{\pi^2 EI}{4(L^2 - \delta^2)}$$

$$\gamma_{left} = G_{cr} - G$$

$$F = wS \sin \theta$$

本节主要对麦穗自重下和风载作用下的公式对 2007 年腊熟期各品种数据进行计算，需要求解以下变量：

- (1) 抗折断余量，抗折断余量是与风速有关的。
- (2) 抗倒伏余量，抗倒伏余量是小麦内在特性与风速无关。
- (2) 倒伏程度刻画，即倒伏角 θ_d 。

为了求解上述变量，需要首先计算以下几项指标：

- (1) 各节机械强度

机械强度与杨氏模量成正比，以基部第二茎节的机械强度为参考，其他各节计算公式为：

$$P_i = P_2 \frac{E_i}{E_2}$$

- (2) 各节线密度，根据密度均匀性原理：

$$\rho_i = \frac{g_i}{l_i}$$

- (3) 作用力臂长：

$$l_t = l_g + \frac{l_s}{2}$$

- (4) 倒伏角：

$$\theta_d = \arcsin \frac{\delta}{l_t - l_s/2}$$

2007 年数据更新后的杨氏模量计算出的结果是无论风速多大，小麦都不倒，究其原因是数据中给出的乳熟期杨氏模量与事实差距太大，下图给出了部分硬性

材料的杨氏模量，相比之下，小麦 1000 多 GPa 的杨氏模量显然不合理，因此选用完熟期间的杨氏模量数据。

表 6-1 硬性材料的杨氏模量[29]

材料	杨氏模量（GPa）
碳钢	206
铸钢	202
铸锡青铜	103
铸铅青铜	103

6.2 求解结果

折断余量、抗倒伏余量及倒伏角的求解结果见 excel 附件“result”工作表 ti5。表 6-2 给出了不同风速下小麦的折断样本个数，6-3 给出了各品种倒伏的临界风速，表 6-4 给出了各品种倒伏的平均临界力，表 6-5 给出了各小麦品种的折断余量、抗倒伏余量及倒伏角。

结论：

1. 风速越大，小麦折断数越多，这是符号实际情况的。
2. 在小麦茎秆上均匀地去 50 个点，研究这 50 个点的抗折断性和抗倒伏特性。从表 6-3 可看出，矮抗的抗折断余量和抗倒伏余量最大，这与文章前面分析到的矮抗抗倒伏能力最强是一致的。

表 6-2 不同风速下的小麦折断样本个数

风速	0.1	9	15	20	24	28	35
折断个数	0	0	0	2	9	19	31

表 6-3 各品种倒伏的临界风速

品种	风速
矮抗	22.566
新麦	21.309
周麦	18.999

表 6-4 各品种倒伏的平均临界力

品种	风速
矮抗	0.0663
新麦	0.0178
周麦	0.0255

表 6-5 折断余量、抗倒伏余量及倒伏角

样本	品种	抗折断余量（每十个取一个）	抗倒伏	倒伏角
----	----	---------------	-----	-----

编号							余量	
1	矮抗	6.6515 35	30.931 57	20.091 78	114.82 07	121.82 87	0.03911 7	—
2	矮抗	5.3950 14	14.718 73	17.068 91	18.684 5	204.33 27	0.04677 3	—
3	矮抗	3.5966 04	19.805 34	14.540 82	153.37 53	168.37 29	0.02809 6	—
4	矮抗	7.8788 97	23.950 09	21.146 03	22.714 71	115.40 33	0.04479 4	—
5	矮抗	1.7490 87	14.972 18	12.560 01	15.339 72	84.445 32	0.02192 8	—
6	周麦	-0.002 47	23.212 88	12.612 25	228.55 89	297.96 56	—	—
7	周麦	-0.964 09	6.3827 56	6.3096 73	9.3915 88	18.367 17	—	—
8	新麦	2.4508 25	17.784 79	15.746 08	19.457 89	107.52 72	-0.0088 8	0.0001 23

注：倒伏角空白表示未发生倒伏，抗折断余量为负表示小麦茎秆已折断。

7 问题六、关于小麦抗倒伏的问题、方案及建议

7.1 从问题 1~5 得出所需解决的问题

小麦抗倒伏并不是一个新的问题，关于小麦抗倒伏性能的研究也由来已久，然而依然缺乏十分明朗的结论，通过本文研究我们列出了抗倒伏研究中几项亟待解决的问题。

(1) 关于倒伏指数公式。题目给的倒伏指数公式是一个经验公式，没有经过理论验证，只考虑了小麦茎秆鲜重、茎秆重心高度和机械强度三项指标，不尽合理，有待进一步改进。本文做的工作是对公式进行了细化，加入了更多形态特征使公式内容更加丰富，然而这是远远不够的，我们期待更加合理的倒伏指数公式。

(2) 关于茎秆密度分布。本文假设小麦茎秆是均匀且连续的空心圆柱体，即假设密度是均匀分布的。事实上，茎秆密度应该是连续但不是均匀分布的。文中多次用到了茎秆密度均匀分布的假设，例如在计算茎秆重量、体积关系时，定义两个余量时，那么，茎秆密度不均匀这些会有怎样的结果。

(3) 关于产量和抗倒伏的矛盾。在研究过程中我们发现产量和抗倒伏性能是相互矛盾的，我们关心的是能否培育出使产量和抗倒伏能力同步提高的品种。本文认为随着生产水平的提高，加上国家政策对农业试验的支持，这一问题应该可以得到解决，而且我们猜测未来高产且抗倒伏的优良小麦品种会由矮秆向强秆发展。

(4) 关于茎秆弹性模量。现有研究都将弹性模量看作常数,这是不尽合理的,下一步应该研究如何设计弹性模量的表达式,使之更加接近实际情况。

(5) 关于挠度 $v(x)$ 。根据公式(34),我们无法求得 $v(x)$ 的显式方程,本文做的工作是用不同的方式进行了简化。我们关心的是是否存在显式方程如果存在,该公式可否用微积分方程的数值方法来求解。

(6) 关于秆的风载。秆的风载是大家共同关心的问题,应该对秆的风载进行合理考虑。

(7) 目前研究中公认将小麦茎秆近似一个中空圆柱体,这一假设在计算倒伏指数时没有问题,然而在本文由研究倒伏指数向力学分析过渡时,从材料力学角度进行了分析,茎秆性状抗弯折能力是基于刚性材料的胡克定律及杨氏模量推导的静态模型,而小麦茎秆明显为典型的组成复杂的生物材料,与刚性材料有着明显不同,再者茎秆倒伏属于塑性力学范畴,因而不能用材料力学和结构力学的理论求解。而关于茎秆受力后发生的伤害,也就是受力后恢复情况,也不能简化为弯折来解释,小麦茎秆受力后表现为明显的反弹性,属于流变学的研究范畴,其具体抗弯折能力显然不能简单用静态受力模型衡量。

(8) 以茎秆常规物理力学性质作为评价指标探索茎秆作物抗倒伏特性评价方法和抗倒伏途径,主要从常规性质易测和应用方便进行了考虑。若从机理上分析还应全面考查外界影响下物理力学性质的影响和变化,茎秆受压和弯曲临界载荷与抗倒伏性的关系以及茎秆材料的流变性能等;研究这些方面能更加深入了解抗倒伏特性和生物力学性质的关联关系,探索相应的工程手段,但最终评价分析的基点还应落到实测方便的常规性质和作物某些突出性状的关系上,才能获得有效可行的评价方法。关于茎秆作物物理力学评价方法还有许多需要深入探讨的问题,如各物理力学性质指标与作物形态或性状的关系,评价指标实测的测试方法和手段,应力与生长的规律等。专业从事这些方面研究的课题组应尽快展开工作,以求实现物理力学性能指标对茎秆作物抗倒伏的定量评价。

7.2 抗倒伏试验建议

试验最主要的目的是选拔农作物优良品种,为农业产业、农民和农业产业化服务,是品种利用和推广的前提,是育种家培育出的品种从实验室、小面积试验田到大面积生产的必经桥梁。因此必须给予高度重视。

通过本文的数据不难看出,目前我国小麦品种纷繁复杂,产量和抗倒性能力强弱不一。为了选出优良品种,需要有一套鉴定程序,就是试验的筛选,试验就像个大筛子,将这些小麦品种过筛子分类。总之,试验的最终目标是根据产量和抗倒伏性综合指标来制定规则 and 标准从而选出优良小麦品种。没有经过试验的多方面、多层次、多区域的大范围筛选、鉴定、检测和基本评价,难以说品种的优劣和利用价值如何。

本文在数据处理和模型建立的过程中遇到了这样一些现象：部分数据缺失、不完整；机械强度原是可测的这里却成了要拟合求解的对象等等。作为建模人员这些问题的出现无可厚非，可以在合理假设的基础上进行间接求解；然而对农学工作者来说，这样的问题无疑会增加工作量，降低可靠性。鉴于此，我们结合建模中遇到的问题，从试验对象设计、形态特征信息收集和数据统计分析三个方面为 2012 年的小麦抗倒伏试验提以下几点建议。

7.2.1 试验对象设计

（1）一年多品种，一品种多年。每年要种植丰富的小麦品种，以便于对比分析，同一种小麦也要进行多年试验，以便于观察其抗倒伏能力的稳定性。

（2）优胜劣汰。对于之前已经试验过的品种，抗倒伏能力差的可直接淘汰来年不再进行试验，抗倒伏能力好的品种要给予重点观察。

（3）可以根据遗传学原理，将产量高的小麦品种和抗倒伏能力强的小麦品种合理进行杂交，以期获得综合性能好的新型品种。

（4）尽量克服外界环境的差异，使造成小麦特征差异的外界影响（光照、水分等）尽可能小。

7.2.2 形态特征信息收集

在小麦形态特征信息收集的过程中要注意把握完整性和可靠性的原则。

（1）统计分析需要大量的样本空间作为支撑，所以首要的就是要收集足够多的样本的信息。

（2）可试验测出的数据尽量用试验测量，一方面减小间接计算的工作量，另一方面提高数据可靠性。研究小麦抗倒伏性能需要试验测量的数据有各小麦品种不同时期的：

- 小麦各节节长、重量、粗、壁厚，穗长、穗重，株高，鲜重，重心高度，用于计算倒伏指数；
- 实际倒伏情况，作为倒伏指数计算的参考；
- 各节机械强度，用于计算抗折断余量；
- 麦穗的体积特征，用于计算风的作用力；
- 农田风速，用于研究抗倒伏风速。

（3）小麦农情信息采集目前大多基于传统的物理原理，现场手工采集与事后实验室分析相结合，能够实现现场快速实施自动采集的较少，这对工作人员来说是一项大的挑战。本文建议推广新兴的数据采集智能终端采集作物信息，省时又省力。

7.2.3 数据统计分析

（1）对不同的小麦形态特征要进行合理的归一化。

（2）使用具有代表性的样本数据，那些距离该品种均值差距较远的直接剔

除，以减小计算误差。

(3) 要重点观察影响小麦抗倒伏能力的主要因素，如株高、第二基节形态特征、穗重等。

(4) 注意分析相关性大的数据，降低复杂度。如株高、穗长、各节长之间的相关性较大，在分析时可只选取株高、穗长进行研究。

最后需要指出的是，试验工作不是完全靠数据来说话的，一个品种的好坏搞试验的工作人员最有发言权。从业人员不仅要有广泛的专业知识，还要热爱本行工作，具备勤奋、敬业精神，通过试验把优良品种选出来、推出去。

7.3 小麦育种建议

解决问题的过程就是了解、学习的过程，在解决小麦抗倒伏问题的过程中，我们一步步了解了该领域的研究现状，包括成果和瓶颈，逐渐形成思路后，完成了模型建立与求解。根据模型求解结果和得到的结论，为小麦育种提以下几点建议。

(1) 根据文章第 2 节对倒伏指数和机械强度的分析，从改善机械强度指标角度来提高茎秆的抗倒伏能力。农艺上应采取一定的措施以达到相应目标，如适当施加水肥，不同形式、不同肥效的肥料追加可改变（增强）茎秆材料性质和截面几何参数（如壁厚等），或改变茎秆材料的组织结构密度及茎秆高度等。

(2) 在文章第 2 节求解倒伏指数的过程中，我们发现茎秆密度对小麦茎秆抗倒伏能力有着重要影响。茎秆密度基本上随时间呈递减趋势，开花期的均值最大，腊熟期的均值最小。建议在早代选择时以茎秆密度进行选择，通过茎秆密度的选择为在早代实现抗倒性和高产性的同步提高提供了可能。

(3) 根据文章第 3 节对小麦倒伏指数与茎秆外部形态特征、外部形态特征内部之间关系的分析，从相关性的角度看，株高，基部第二、三茎节的形态特征（节长、重量、粗和厚），穗长是影响小麦品种茎秆抗倒伏能力的主要因素。所以在选育小麦抗倒伏品种时，应特别重视上述主要特征的选择。尤其是株高的选择，事实上，品种矮化的过程（在约束下）就是抗倒伏性能逐渐提高的过程。

(4) 根据文章第 4 节对理想株型的分析，我们发现了产量与抗倒伏之间的矛盾。在现有高产的基础上进一步提高单产，是小麦育种的主攻目标，也是小麦生产发展的必由之路。但随着产量水平的进一步提高及生产条件的不断改善，高产与倒伏的矛盾日益突出，成为制约小麦高产、超高产育种的瓶颈。本文认为要实现小麦由高产到超高产的跨越，必须首先解决品种的倒伏问题，抗倒伏是超高产的前提和保障。

(5) 通过文章第 2 节倒伏指数计算和第 5、6 节抗倒伏力学模型的建立与计算，得到矮抗和周麦抗倒伏性能较好，是值得推广的品种。

8 总结

论文主要对小麦发育后期茎秆的抗倒伏特性进行了研究，主要完成的工作有：

1. 题目给的倒伏指数公式只考虑了小麦茎秆鲜重、茎秆重心高度和机械强度三项指标，本文通过回归模型求解得到机械强度表达式，对倒伏指数公式进行了细化，加入了更多茎秆形态特征使公式内容更加丰富，据此得到小麦抗倒伏能力：（1）2007 年，矮抗 58>周麦 18>新麦 208；（2）2008 年，矮抗 58>联丰 85>周麦 18>TM>智 9998 早>国信；（3）2011 年，矮抗 58、周麦 18、周麦 22、温麦 6 号抗倒伏能力相对较好，豫麦 18 居中，平安 6 和郑麦 9023 较差。在此过程中发现茎秆密度对茎秆抗倒伏能力有重要影响。茎秆密度基本上随时间呈递减趋势，开花期的均值最大，腊熟期的均值最小。

2. 逐步递进地采用相关系数、通径分析和灰色关联分析三种方法分析小麦倒伏指数与茎秆外部形态特征、外部形态特征内部之间的关系，发现

- 株高，基部第二、三茎节（尤其是第二茎节）的节长、节长、粗、壁厚，穗重是影响小麦抗倒伏能力的主要因素；
- 株高、穗长、各节长之间的相关性较大，总重、各节壁厚、各节粗之间的相关性较大
- 国信与智 9998 两个品种的小麦发生倒伏主要是株高太高、基部第二茎节壁厚太薄造成的。

3. 考虑到高产与抗倒伏的矛盾，以倒伏指数最小和体积最小（表征投入产出比）为目标函数建立多目标优化模型，通过对优化目标线性加权求解得到了单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时的理想株型结构，包括各节长、重、粗、厚，穗长，株高，总重。

4. 根据物理力学原理，研究了小麦茎秆在麦穗自重和风载作用下应力的基本规律，对建立的力学模型进行了不同角度的简化，定义了抗倒伏余量、抗折断余量和倒伏角三个指标来描述风载能力和倒伏程度。并在简化模型的基础上，对 07 年小麦进行了求解。

5. 对在模型建立中遇到的问题进行了总结；根据在数据分析和模型建立中遇到的问题，以数据完整性和可靠性为原则，为 2012 年小麦抗倒伏试验提出了建议；根据模型求解结果，以高产和抗倒伏同步提高为原则，为小麦育种提出了建议。

倒伏是制约小麦高产和优质的主要因素之一，但要实现小麦由高产到超高产的跨越，首先必须解决倒伏问题。高产与倒伏的矛盾是目前小麦高产及超高产育种中的突出问题。本文深入研究了不同小麦品种的抗倒性，重点从倒伏系数和物理力学两个方面进行了分析，对实现小麦高产、稳产、优质有一定的借鉴的意义。

9 参考文献

- [1]龚有锐, 小麦的倒伏和防止措施 [J]。湖北农业科学, 1984 (9): 4~7
- [2]阮仁武、傅大雄、戴秀梅, 小麦显性矮源对主要农艺性状的影响 [J]。麦类作物学报, 2002, 22 (2): 33~37
- [3]王勇、李晴祺, 小麦品种抗倒性评价方法的研究[J]。华北农学报, 1995, 10 (3): 84~88
- [4]刘天华、龚继续、冯启明, 川西平原小麦倒伏原因的初步研究 [J]。西北农业学报, 1995 8 (3): 12~14
- [5]余则高、李志新, 小麦茎秆机械强度与若干形状的相关性研究[J]。湖北农业科学, 2003 (4) 11~14
- [6]王勇、李斯深、李安飞等, 小麦种质抗倒性的评价和抗倒性状的相关与通径分析[J], 两北植物学报, 2000 20 (1): 79~85
- [7]王健、朱锦懋, 小麦茎秆结构和细胞壁化学成分对抗压强度的影响[J]。科学通报, 2006 51 (6): 679~685
- [8]杨桂通, 弹塑性力学引论。北京: 清华大学出版社, 2004
- [9]徐磊、王大伟, 小麦基部节间茎秆密度与抗倒性关系的研究[J]。麦类作物学报, 2009 29 (4): 673~679
- [10]梁莉、郭玉明, 作物茎秆生物力学性质与形态特性相关性研究[J]。农业工程学报, 2008 24 (7): 1~6
- [11]蒲定福、李邦发、周俊儒等, 小麦抗倒性评价方法研究初报[J]。绵阳经济技术高等专科学校学报, 1999 16 (2): 2~5
- [12]罗庆成, 灰色关联分析与应用[M]。江苏: 科学技术出版社, 2005
- [13]郭玉明、袁红梅等, 茎秆作物抗倒伏生物力学评价研究及关联分析[J]。农业工程学报, 2007, 23 (7): 14~17
- [14]盖钧镒, 试验统计方法[M]。北京: 中国农业出版社, 2004
- [15]赵倩等, 山东省区试小麦产量与产量构成因素的相关和通径分析。中国农学通报, 2011, 27 (7): 42~45
- [16]赵铁牛, 通径分析及其在医学中的应用。硕士论文, 山西医科大学, 2004
- [17]王庆斌、张玉波, 杨树新品种生长形状遗传相关及通径分析[J]。林业科技, 2011 36 (1): 5~7
- [18]张伦俊, 通径分析在税收研究中的应用。数理统计与管理, 中国现场统计研究会主办, 2003 22 (2): 26~29
- [19]刘兆晔、于经川、姜鸿明等, 小麦理想株型的探讨[J]。中国农学通报, 2010 26 (8): 137~141
- [20]吴兆龙, 小麦育种学。北京: 农业出版社, 1900

- [21]莱利 J 著, 庄巧生, 杨作民等译, 小麦育种理论与实践。北京: 农业出版社, 1928: 111~123
- [22]胡婷, 小麦茎秆抗倒伏的力学原理探讨。博士论文, 中国农业大学, 2007
- [23]徐磊, 小麦抗倒性状的评价与早代选择研究。硕士论文, 山东农业大学, 2009
- [24] 康福华, 矮丰三号小麦茎秆的力学性质初探[J]。西北农业大学学报, 1986, 14 (3): 17~29
- [25]袁红梅、郭玉明等, 小麦茎秆弯折力学性能的试验研究[J]。山西农业大学学报, 2005, 25 (2): 173~176
- [26]刘后森, 魏俊止, 小麦茎的组织结构力学性能与倒伏的力学问题[J]。八一农学院, 1992, 15 (2): 91~96
- [27]袁志华、冯宝萍等, 作物茎秆抗倒伏的力学分析及综合评价探讨。农业工程学报, 2002, 18 (6): 30~31
- [28]孙训方等, 材料力学(下), 高等教育出版社, 1987: 238~256
- [29]<http://wenku.baidu.com/view/2c0a2cbec77da26925c5b0ca.html>, 2011-9-28