

# “华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

题 目                      光传送网建模与价值评估

---

## 摘                      要：

本文对光纤通信的调制方式，光链路传输模型以及网络规划问题进行了建模、求解和分析。主要完成了如下工作：

对于问题 1：本文首先建立 MQAM 调制解调模型，得出 MQAM 的 BER 和 SNR 关系曲线。计算结果表明，BER=0.02 时，QPSK、8QAM 以及 16QAM 三种调制方式对应的 SNR 容限点分别为 6.2851dB，10.502dB 和 12.7108dB。其次，通过光链路传输模型，建立了 SNR 与光纤跨段数  $N$  之间的关系式。单跨距离为 80km 和 100km 两种情况下，三种调制方式的最远传输距离分别为 1760km，640km，400km 和 800km，300km，200km。

对于问题 2：本文分为三部分进行网络规划设计。第一部分首先构建最小生成树来连通 12 个城市节点，为了保证网络价值最大，在剩余未连接的 55 条链路中分别选取 5 条和 22 条价值最大的链路接入网络，得出 16 条、33 条连接数下最大网络价值分别为 5270.2331mTb/s 和 8677.9152mTb/s。第二部分采用 Dijkstra 算法将网络划分为若干个由起点、中间点、终点构成的最短路径，同时考虑了直接连接和间接连接两种情况，选择目标函数最大的连接方式。对网络单波传输容量和拓扑结构进行不断更新迭代，合理解决了有中间结点的网络规划问题。第三部分考虑到不同城市经济差异大，将 GDP 指标引入到链路权重矩阵，重新进行网络规划。

对于问题 3：本文采用控制变量法，分别建立了星座图的概率分布模型，位置分布模型以及联合分布模型。在调制格式信源熵保持 3bit 的题目要求下，我

们发现星座点的概率分布满足  $\left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, \dots \right\}$  时具有最佳的抗误码性

能。在此基础上，利用位置分布模型，通过梯度下降算法得到最佳星座图方案。

**关键词：**MQAM，SNR 容限，最小生成树，Dijkstra 算法，控制变量

目录

问题背景 ..... 1

1.1 研究背景 ..... 1

1.2 国内外研究现状 ..... 1

问题描述 ..... 3

专业术语及符号说明 ..... 4

专业术语 ..... 4

符号说明 ..... 4

问题一 ..... 6

4.1 问题分析 ..... 6

4.2 模型建立 ..... 6

4.2.1 子问题 1 模型建立 ..... 6

4.2.2 子问题 2 模型建立 ..... 9

4.3 实例求解 ..... 11

4.3.1 子问题 1 实例求解 ..... 11

4.3.2 子问题 2 实例求解 ..... 13

4.4 本章小结 ..... 16

问题二 ..... 17

5.1 问题分析 ..... 17

5.1.1 子问题 1 分析 ..... 17

5.1.2 子问题 2 分析 ..... 17

5.1.3 子问题 3 分析 ..... 18

5.2 模型建立 .....	18
5.2.1 子问题 1 .....	18
5.2.2 子问题 2 .....	20
5.2.3 子问题 3 .....	26
5.3 本章小结 .....	27
<b>问题三 .....</b>	<b>29</b>
6.1 问题分析 .....	29
6.2 模型建立 .....	29
6.2.1 星座点概率分布模型 .....	29
6.2.2 星座点位置分布模型 .....	31
6.2.3 星座点概率-位置联合分布模型 .....	32
6.3 实例求解 .....	32
6.4 本章小结 .....	33
<b>总结及展望.....</b>	<b>35</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>36</b>
<b>附录 .....</b>	<b>37</b>
A. 城市网络价值表 .....	37
B. 城市与人口/距离关系表 .....	38
B-1. 城市人口 .....	38
B-2. 城市距离 .....	39
<b>致谢 .....</b>	<b>41</b>

## 问题背景

### 1.1 研究背景

20 世纪末以来,随着电信通信网的日渐成熟、互联网的迅猛发展以及物联网技术的兴起,三网融合的时代悄然到来。光传送网的传输介质光纤提供大容量、长距离、高可靠的链路传输手段,在此传输介质上利用先进的电子、光子交叉技术,引入控制与管理机制,可实现多节点间的联网以及针对资源和业务的灵活配置。然而不断增多的全业务种类、持续扩大的网络规模、日益复杂的组网模式,对光传送网的通信容量提出了更高的要求和挑战。光网络的规划与优化,无论在如何高效可靠地提升网络传输业务能力的方面,还是在如何减少网络建设和运维成本的方面,一直以来都受到电信运行商、设备商和政府的重视。对光传送链路进行建模,分析不同调制格式下误码率与信噪比之间的关系,对提升光链路性能,降低误码率会有很好的建设性作用。

在光纤通信系统中,光纤就是信道,光纤传输的光波就是信息的载体。数字传输系统中,将任何消息数字化为一串“0101...”二进制比特序列,经过编码并调制为某个“载体信号”,由发送端通过信道传输到接收端,这过程中无法避免要引入干扰噪声,可能导致最终接受的二进制序列中比特出错,即产生误码。

光传输利用光波的复振幅承载信号,因此可用复平面上不同的点来对应不同的符号状态,这种将符号状态映射到复平面上的图称为“星座图”。星座图的编码分布模式也称为调制格式,对于给定的调制格式,误码率和信噪比呈一一对应的关系。误码率是衡量通信系统性能的最根本指标,因此子问题 1 和子问题 3 的关键就是对不同星座图下误码率与信噪比关系的研究,并且从中得到启发,改善星座图探索更高效率的调制方式。

此外,通信网络的目的是把更多的人更充分地连接到一起,网络规划的目标就是网络的建设者和运营者在真正地投资建设和运营实际的网络之前,通过建模来了解和预测网络 and 需要承载的业务的情况,做到业务传输可靠性和建网成本经济性之间的均衡。保证网络中业务的服务质量,同时提高网络资源的利用率,这也就意味着网络规划方案的制定必须在遵循流程和标准的前提下去最大限度地平衡高效性、可靠性、可实现性、以及经济性的要求。网络规划者需要在有限资源的条件下,综合考虑传输距离,传输容量,网络拓扑等各种因素,以最大化网络的价值。

### 1.2 国内外研究现状

从 20 世纪 90 年代开始,许多国家和地区规划了 WDM 光传送网,并建立了许多实验平台和现场试验,目前研究开发中的 WDM 全光传送网络主要集中在北美、欧洲和日本,其中包括下列重大项目:

(1) 美国 DARPA 实施的 WDM 光网络研究项目:

- ✧ 光网技术联盟 (ONTIC);
- ✧ 全光网络 (AON);
- ✧ 多波长光网 (MONET);

- ✧ 国家透明光网络 (NTONC);
- (2) 欧洲通信委员会设立的 RACE 和 ACTS 重大研究项目:
  - ✧ 多波长光网 (MWTN);
  - ✧ 泛欧光子传送网 (PHOTON);
  - ✧ 泛欧光网 (OPEN);
  - ✧ 城域光网络 (METON);
  - ✧ 波长捷变 (agility) 传送接入网 (WOTAN);
  - ✧ 光网络管理 (MOON)。
- (3) 加拿大研究和教育 Internet 骨干网 CA\*net3。
- (4) 日本 NTT 的企业光纤骨干网 COBNET 和光城域网 PROMETEO 等。
- (5) 中国国内 WDM 光网络研究:
  - ✧ “863” 计划项目: 全光通信试验网;
  - ✧ “863” 重大计划项目: 中国高速信息示范网 (CAINONET)。

光传送网 (OTN) 技术由国际电联 (ITU-T) 在 1998 年左右提出, 是同步数字体系 (SDH) 和波分复用 (WDM) 之后新一代基于更大带宽粒度的光网络传送和组网技术。OTN 技术并不是最近提出的创新概念, 但 OTN 逐步步入初具规模的应用并引起业界的关注则是最近 3-4 年的时间, 其中基于 ODUk 电交叉或光电混合交叉的 OTN 设备的推出和应用则是 OTN 技术发展过程中最为典型的事例, 而国内华为公司在此过程中的推动作用尤为明显。目前国内的华为、中兴、烽火, 国外的泰乐、阿朗 (宣布支持)、诺西 (宣布支持) 等支持基于 ODUk 电交叉或光电混合交叉的 OTN 设备, 其中最大的交叉容量已经达到 3.2Tb/s, 为 OTN 技术在大规模应用创造了积极有力的条件。

OTN 技术的国际国内标准目前趋于基本成熟, 最近几年已引起国内外运营商的强烈关注, 相应实际的网络应用也已初具规模。从今后的发展趋势来展, 作为高速传输大粒度调度传送网络的主要组网技术, OTN 技术的多个网络层面的规模应用将逐步全面展开, 同时将在新型接口规范 (OTUS)、光层性能监控与智能控制、与其他传送网技术融合等方面重点发展并规范。

光传送网技术近年来在大量的业务需求驱动之下, 也在不断地发展和演进过程中, 主要呈现三个方面的发展趋势: 一是大容量光传送系统, 如 DWDM, ROADM, OTN 等; 第二是分组传送, 面向更小颗粒的处理技术; 第三是智能化的发展方向, 主要在于控制平面的发展基于前两个方面述及的技术作为传送平面。

分组传送网 (PTN) 作为传送网满足下一代网络分组传送需求的解决方案, 目前主要关注的是 TMPLS 和 PBT 技术, T-MPLS 选择了 MPLS 体系中有利于数据业务传送的一些特征, 抛弃了 IETF 为 MPLS 定义的繁复的控制协议族, 简化了数据平面, 去掉了不必要的转发处理。PBT 技术则是关闭传统以太网的地址学习、地址广播以及 STP 功能, 以太网的转发表完全由管理平面 (将来控制平面) 进行控制。具有面向连接的特性, 使得以太网业务具有连接性, 以便实现保护倒换、OAM, QoS、流量工程等传送网络的功能。PBT 技术的缺点是标准化工作刚刚开始, 标准化的程度较低。未来分组传送网的技术拟在城域的汇聚和接入层开始应用, 同时还取决于产品化、实用化的程度和如何适应网络的应用。

光传送技术多年来进展相当之快, 将传送速率数十上百倍地提高, 为上层网络提供了大传输管道, 为此在大幅提高传输容量的基础之上, 传送网也开始面向更加精细的处理功能和智能化的方向发展, 但是向全光网络和分组传送过渡的过程中在技术等方面还面临着一些亟待解决的问题, 这也是今后传送网发展的热点。

## 问题描述

根据题目要求，本文需完成以下三方面工作：

1. 根据题目所给信息，建立 MQAM 的调制解调模型，在此基础上给出 QPSK、8QAM、16QAM 三种调制方式的 BER 与 SNR 之间的关系曲线，并且求出给定 BER 对应的 SNR 容限值。其次，问题还给出了光传输链路模型图，需要我们在此基础上建立 SNR 与传输距离的数学模型，进而求得三种调制方式在不同放大器制式（80km，100km）下可以传输的最远距离。

2. 对于间接连接，合理分割网络，对每一个小网络设计同时考虑容量和成本的目标函数，根据题目表格要求设计约束条件，找出目标函数值最优的方案，将其与直接连接的方案做比较，决定选择直接连接还是间接连接，如果选择间接连接则需要对网络价值分布进行更新。

3. 保持 16QAM 调制的信息熵下限（3bit）的前提下，通过改变 16QAM 星座点的位置、数量或概率以降低 16QAM 调制的 SNR 容限值，从而提高系统容忍噪声的能力，延长链路传输的长度。

## 专业术语及符号说明

### 专业术语

**AWGN:** 加性高斯白噪声 AWGN (Additive White Gaussian Noise) 是最基本的噪声与干扰模型, 它的幅度分布服从高斯分布, 功率谱密度服从均匀分布。

**QAM:** 正交振幅调制技术 QAM (Quadrature Amplitude Modulation) 用两路独立的基带信号对频率相同、相位正交的两个载波进行抑制载波双边带调幅, 并将已调信号加在一起进行传输。nQAM 代表 n 个状态的正交调幅。

**PAM:** 脉冲振幅调制技术 PAM (Pulse Amplitude Modulation) 是脉冲载波的幅度随基带信号变化的一种调制方式。

**MAP:** 最大后验概率

**ML:** 最大似然函数

### 符号说明

$s_m(t)$ : 发送信号

$g(t)$ : 基本信号波形

$\hat{c}$ :  $M_c$  元 PAM 信号的幅度判决变量

$D(r, s_c)$ : 发送信号矢量与接收信号矢量之间的欧式距离

$D(s_{c-1}, s_c)$ : 相邻两个发送信号矢量之间的欧式距离

$p_{M_c}$ : 加性高斯白噪声下  $M_c$  PAM 信号的误码率

$p_M$ : 加性高斯白噪声下 MQAM 信号的误码率

$N$ : 跨数

$d_0$ : 单跨距离

$\alpha$ : 单跨路径损耗

$P_{NL}$ : 单跨光纤等效非线性长度

$P_0$ : 发射机功率

$P_n$ : 放大器自发辐射噪声

$P_{i\_input}$ : 第 i 个放大器信号输入功率

$P_{i\_output}$ : 第 i 个放大器信号输出功率

$n_{i\_input}$  : 第 i 个放大器噪声输入功率

$n_{i\_output}$  : 第 i 个放大器噪声输出功率



## 问题一

### 4.1 问题分析

问题一首先给出光纤通信的大概传输机制及相关参数定义，然后分别给出 QPSK, 8QAM, 16QAM 三种可用于光纤通信的调制方式以及对应的星座图。QPSK 信号是一种最简单的 QAM 信号，所以这三种调制方式可以统称为 MQAM 调制。值得注意的是，问题一图 5 中 16QAM 和 8QAM 的星座图采用格雷编码的映射方式，而 QPSK 却并未采用格雷编码。子问题 1 要求给出三种调制方式的 BER 与 SNR 之间的关系曲线，并且求出 BER=0.02 时各自对应的 SNR 容限值；子问题 2 要求在问题 1 的 SNR 容限值基础上，联系光传输链路需要放大器的现实，求得三种调制方式在不同放大器制式（80km, 100km）可以传输的最远距离。针对子问题 1，我们的思路是首先建立 AWGN 信道条件下 MQAM 的调制和解调模型，然后利用此模型进行 BER 与 SNR 的理论推导，最后通过实验仿真验证模型的正确性，作出 BER 与 SNR 之间的关系曲线，并在图中标出 BER=0.02 时三种调制方式对应的 SNR 容限值。针对子问题 2，我们的思路是首先建立光传输链路的数学模型，然后在此模型基础上依据三种调制方式 BER=0.02 时的 SNR 容限值，反推出不同规格放大器条件下三种调制方式的最远传输距离。

### 4.2 模型建立

#### 4.2.1 子问题 1 模型建立

正交振幅调制（QAM）是一种振幅和相位的联合键控。在 QAM 调制体制中，信号的振幅和相位作为两个独立的参量同时受到调制。所以， $M$  进制的 QAM 信号可以表示为

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \text{Re}[(A_c + jA_s)g(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad 0 \leq t \leq T \\ &= A_c g(t) \cos 2\pi f_c t - A_s g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (4-1) \\ &= s_c(t) + s_s(t) \end{aligned}$$

由表达式可知，MQAM 信号可以看作两个正交的振幅键控信号的叠加，分别对应  $s_c(t)=A_c g(t) \cos 2\pi f_c t$  和  $s_s(t)=-A_s g(t) \sin 2\pi f_c t$ 。其中  $f_c$  表示的是载波频率， $A_c$  表示的是同相分量的幅值，有  $M_c$  种可能的取值情况， $A_s$  表示的是正交分量的幅值，有  $M_s$  种可能的取值情况，且  $M_c$  和  $M_s$  满足  $M = M_c \cdot M_s$ 。所以 MQAM 信号的产生可以看作一路  $M_c$  元 PAM 调制信号和一路  $M_s$  元 PAM 调制信号的叠加，两条链路之间相互独立。整个调制过程如图 1 所示。

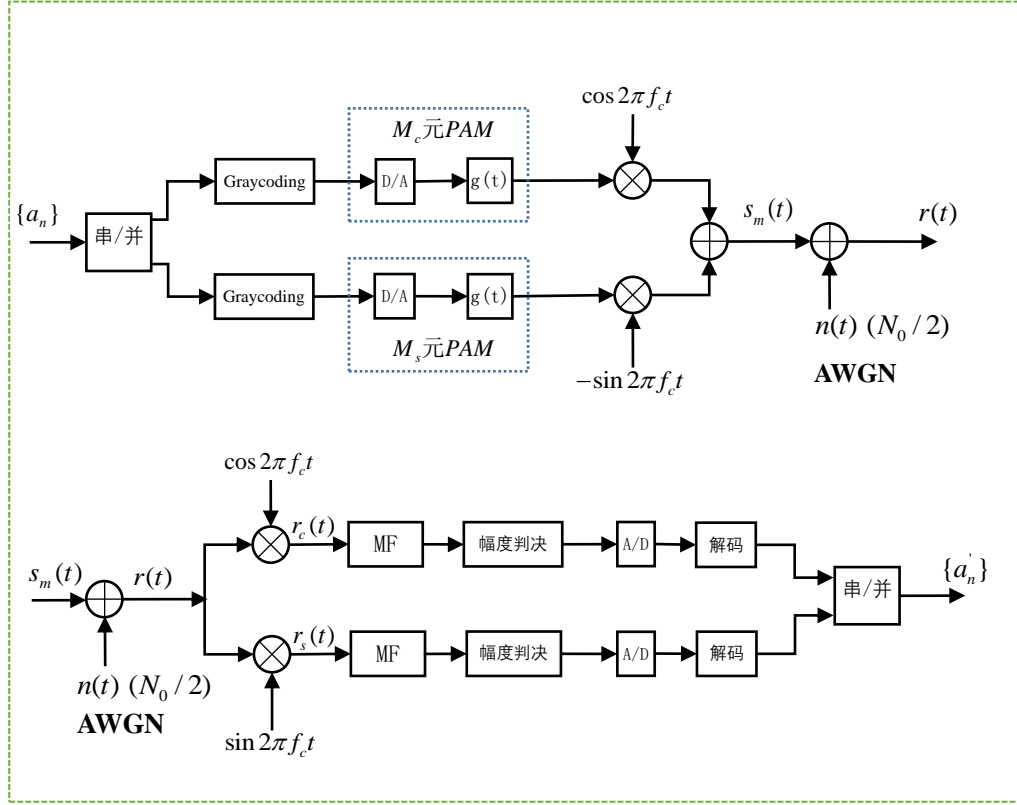


图 1 MQAM 调制解调模型

由图 1 可知, MQAM 调制信号经过 AWGN 信道之后, 输出信号为  $r(t) = s_m(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  为零均值高斯白噪声, 其双边功率谱密度为  $N_0/2$ 。同理, 经过相干解调之后, 两路 PAM 信号又分隔开来, 接收信号可以表示为  $r(t) = r_c(t) + r_s(t)$ 。

由于上下两路信号采用的调制解调方式相同, 所以此处只针对同相分路 ( $M_c$  元 PAM 信号分路) 进行输出信号的分析。已知同相分路的输出信号为

$$r_c(t) = s_c(t) + n(t) = A_c g(t) \cos 2\pi f_c t + n(t), \quad 1 \leq c \leq M_c, \quad (4-2)$$

其中  $g(t)$  为发送信号波形,  $A_c = (2c-1-M_c)d = \pm d, \pm 3d, \dots, \pm(M_c-1)d$ , 相邻幅度间隔为  $2d$ 。首先利用施密特正交化, 导出其标准正交基  $\{\phi_j(t), 1 \leq j \leq N_c\}$ , 然后根据标准正交基得到发送信号的矢量表达式  $\{s_c, 1 \leq c \leq M_c\}$ 。噪声不能以标准正交基底  $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{N_c}$  全部展开, 因此将  $n(t)$  分解为两个分量。一个分量 (记为  $n_N(t)$ ) 是噪声中以基底  $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{N_c}$  展开的部分, 即噪声在基底  $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{N_c}$  构建的空间的投影。另一个分量 (记为  $n'(t)$ ) 是噪声中不能以基函数表示的部分。根据此定义, 可以得到

$$\begin{aligned}
r_c(t) &= \sum_{j=1}^{N_c} (s_{cj} + n_j) \phi_j(t) + n'(t) \\
&= \sum_{j=1}^{N_c} r_j \phi_j(t) + n'(t)
\end{aligned} \tag{4-3}$$

其中  $r_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle$ ,  $\langle \rangle$  表示内积运算。由 (4-3) 可知, 同相分路的信道模型可以等效为  $N_c$  维矢量信道  $r = s_c + n$ ,  $1 \leq c \leq M_c$ 。  $r$  为接收信号在标准正交基  $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{N_c}$  下的矢量信号。接收端采用 MAP 检测器接收信号, 进行幅度判决的规则如下:

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} [p_c p(r | s_c)] \\
&= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} \left[ p_c \left( \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^{N_c} e^{-\frac{\|r - s_c\|^2}{N_0}} \right] \\
&= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} \left[ \ln p_c - \frac{\|r - s_c\|^2}{N_0} \right] \\
&= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} \left[ \frac{N_0}{2} \ln p_c - \frac{1}{2} (\|r\|^2 + \|s_c\|^2 - 2r \cdot s_c) \right] \\
&= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} \left[ \frac{N_0}{2} \ln p_c - \frac{1}{2} E_c + r \cdot s_c \right] \\
&= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} \left[ \frac{N_0}{2} \ln p_c - \frac{1}{2} E_c + r \cdot s_c \right]
\end{aligned} \tag{4-4}$$

其中  $p_c = 1/M_c$ ,  $E_c$  为发送信号能量,  $E_c = \int_0^T s_c^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T A_c^2 g^2(t) dt = \frac{1}{2} A_c^2 E_g$ 。在发送信号等概条件下, (4-4) 可以化简为

$$\hat{c} = \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} [r \cdot s_c - \frac{1}{2} E_c] \tag{4-5}$$

此外,  $r$  与  $s_c$  之间的欧式距离度量为

$$\begin{aligned}
D(r, s_c) &= \sum_{k=1}^{N_c} (r_k - s_{ck})^2 \\
&= \int_0^T [r(t) - s_c(t)]^2 dt \\
&= \int_0^T r^2(t) dt - 2 \int_0^T r(t) s_c(t) dt + \int_0^T s_c^2(t) dt
\end{aligned} \tag{4-6}$$

其中第一项与变量  $c$  无关, 可以舍去, 第三项为发送信号能量  $E_c$ 。从而可以得到相关度量 (判决变量)

$$C(r, s_c) = 2 \int_0^T r(t) s_c(t) dt - E_c = 2(r \cdot s - \frac{1}{2} E_c), \quad c = 1, 2, \dots, M_c \tag{4-7}$$

对比式 (4-5) 和 (4-7) 不难发现 (4-5) 可以写成如下形式

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} [C(r, s_c)] \\ &= \arg \max_{1 \leq c \leq M_c} [D(r, s_c)]^\circ\end{aligned}\quad (4-8)$$

从星座图上来看, 当接收信号和预期的发送信号之间的欧式距离大于相邻星座点欧式距离的一半时就会发生误判, 相邻两星座点之间的欧式距离为

$$D(s_{c-1}, s_c) = \sqrt{\frac{1}{2} E_g} (2d) = \sqrt{d^2 E_g} \quad (2d)$$

所以, 当  $|\hat{c}|^{1/2} > \frac{1}{2} D(s_{c-1}, s_c)$  时, 发生误判。所以  $M_c$

元 PAM 信号在发送信号等概条件下的误码率可以表示为

$$\begin{aligned}p_{M_c} &= (M_c - 2) \frac{1}{M_c} p(|r - s_c| > d \sqrt{\frac{1}{2} E_g}) + 2 \cdot \frac{1}{M_c} \cdot \frac{1}{2} p(|r - s_c| > d \sqrt{\frac{1}{2} E_g}) \\ &= \frac{M_c - 1}{M_c} p(|r - s_c| > d \sqrt{\frac{1}{2} E_g}) \\ &= \frac{2(M_c - 1)}{M_c} Q\left(\sqrt{\frac{d^2 E_g}{N_0}}\right)\end{aligned}\quad (4-9)$$

由于发送信号波形的能量  $E_g$  和信号平均功率 (能量)  $E_{av}$  之间存在

$$d^2 E_g = \frac{6}{(M - 1)^2} E_{av}$$

的关系, 所以 (4-9) 可以化简为

$$p_{M_c} = \frac{2(M_c - 1)}{M_c} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M_c - 1)^2 N_0}}\right)\quad (4-10)$$

对于 MQAM 信号, 只有当两路 PAM 信号都正确判决的条件下才能使得最终的接收信号正确判决。所以整个 MQAM 调制解调系统的误码率为

$$p_M = 1 - (1 - p_{M_c})(1 - p_{M_s})\quad (4-11)$$

$$p_b \approx \frac{1}{k} p_M, \quad k = \log_2 M$$

#### 4.2.2 子问题 2 模型建立

如图 2 所示, 光纤通信的传输链路由发射机、接收机和多个相同的跨段级联而成, 每个跨段的末尾放置一个放大器。放大器用于补偿光传输过程中的功率损失, 但同时链路中的噪声也会被放大。此外, 每增加一个跨段, 就会引入相应噪声。当跨段增加到一定数目时, 信道中的噪声也会累加到一定程度, 从而造成接收端误码严重, 达不到预期的通信质量。

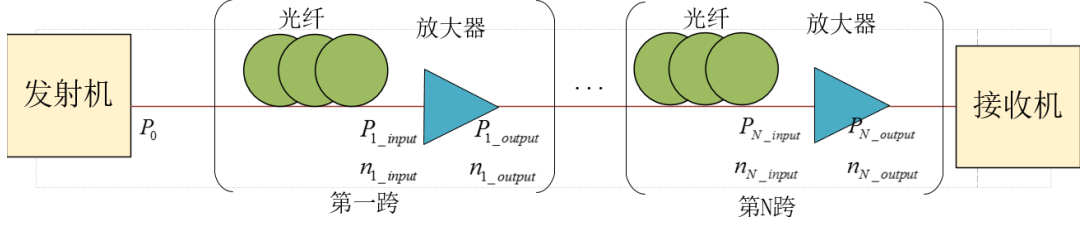


图 2 光纤通信链路传输模型

假设整条传输链路中共有  $N$  个跨段，单跨的传输距离为  $d_0$ ，则总的传输距离为  $d = N \cdot d_0$ 。当发射机的发射功率为  $P_0$  时，经过第一个跨段，达到第一个放大器输入端的功率为  $P_{1\_input}$ 。如果光纤传输一跨的功率损耗为  $\alpha$ ，则有  $\alpha = 10 \lg(\frac{P_0}{P_{1\_input}})$ 。

此外，放大器的目的是补偿光传输过程中的路径损耗，所以经放大器放大后，第一个放大器的输出功率应该满足  $P_{1\_output} = P_0$ 。已知放大器的功率增益为  $Gain$ ，则有

$$Gain = 10 \lg(\frac{P_{1\_output}}{P_{1\_input}}) = 10 \lg(\frac{P_0}{P_{1\_input}}) = \alpha. \quad (4-12)$$

所以为了补偿光每传输一跨的路径损耗，放大器的功率增益应该满足  $Gain = \alpha$ 。由于采用同一种放大器进行级联，所以每个放大器的功率增益都是  $Gain$ 。对于第  $i$  个跨段中的放大器，其输入和输出功率也满足

$$Gain = 10 \lg(\frac{P_{i\_output}}{P_{i\_input}}) = 10 \lg(\frac{P_{i-1\_output}}{P_{i\_input}}) = \alpha. \quad (4-13)$$

如此，每个放大器的输入和输出应该满足如下关系，

$$Gain = \frac{P_0}{P_{1\_input}} = \frac{P_{1\_output}}{P_{1\_input}} = \dots = \frac{P_{i\_output}}{P_{i\_input}} = \dots = \frac{P_{N\_output}}{P_{N\_input}}. \quad (4-14)$$

所以，到达接收机的功率  $P_{N\_output} = P_0$ ，满足放大器补偿功率的需求。

光在光纤中传输时也不可避免地会受到一些噪声的干扰，噪声的主要来源为光纤的非线性噪声和放大器的自发辐射噪声，分别以  $P_{NL}$  和  $P_n$  表示。此处  $P_{NL}$  表示的是单跨长度的光纤引入的等效非线性噪声，与入纤功率近似成平方关系，则  $P_{NL} = k \cdot P_0^2$ ， $k$  为常系数。当  $P_0 = 1 \text{mW}$  时，有  $P_{NL} = \frac{2}{3} P_n = k \cdot (10^{-3})^2$ ，放大器的绝对噪声  $P_n$  为给定值，所以  $P_{NL}$  的一般表达式为  $P_{NL} = \frac{2}{3} 10^6 P_n \cdot P_0$ 。第一跨放大器输入噪声的来源只有非线性噪声，所以  $n_{1\_input} = P_{NL}$ 。经过第一个放大器，输入噪声被放大，同时放大器自身也产生噪声，所以第一跨放大器的输出噪声由两部分组成，表达

式如下：

$$\begin{aligned} n_{1\_output} &= n_{1\_input} \cdot 10^{(Gain/10)} + P_n \cdot 10^{(Gain/10)} \\ &= (P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)} \end{aligned} \quad (4-15)$$

噪声在传输过程中同样会受到功率损耗，所以第一跨的输出噪声到达第二跨放大器输入端时变成

$$\begin{aligned} n_{1\_output} \cdot 10^{(-\alpha/10)} &= (P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)} \cdot 10^{(-\alpha/10)} \\ &= P_{NL} + P_n \end{aligned} \quad (4-16)$$

与此同时第二跨的光纤也引入了非线性噪声，所以第二跨的输入噪声可以表示为：

$$\begin{aligned} n_{2\_input} &= P_{NL} + n_{1\_output} \cdot 10^{(-\alpha/10)} \\ &= P_{NL} + P_{NL} + P_n \end{aligned} \quad (4-17)$$

此噪声经过第二个放大器放大，同时也引入第二个放大器的自发辐射噪声，所以第二个放大器的输出噪声功率为

$$\begin{aligned} n_{2\_output} &= n_{2\_input} \cdot 10^{(Gain/10)} + P_n \cdot 10^{(Gain/10)} \\ &= (P_{NL} + P_{NL} + P_n + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)} \\ &= 2(P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)} \end{aligned} \quad (4-18)$$

依次类推，第  $N$  个放大器的输出噪声功率可以表示为

$$n_{N\_output} = N(P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)} \quad (4-19)$$

所以由  $N$  跨组成的光传输链路的总噪声功率为  $n_{N\_output}$ 。整条链路的信噪比可以表示为

$$SNR(N) = 10 \lg \left( \frac{P_0}{n_{N\_output}} \right) = 10 \lg \left( \frac{P_0}{N(P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)}} \right) \quad (4-20)$$

通过建立上述模型，我们建立了整个光传输链路的信噪比和跨段之间的关系，只要带入相应调制方式的最低 SNR 容限值，就可以得到最大的传输跨段数。

### 4.3 实例求解

#### 4.3.1 子问题 1 实例求解

首先我们对三种不同调制方式加噪前和加噪后的星座图进行仿真，以直观地探求噪声对于解调的影响，仿真结果如图 3 所示。

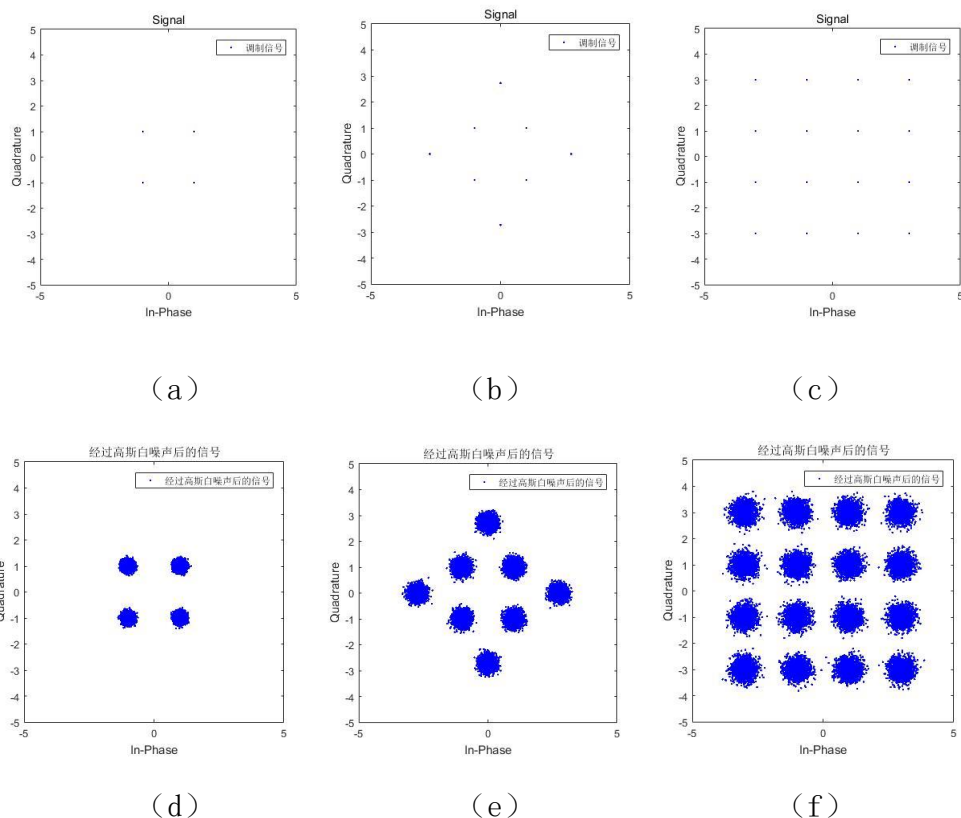


图 3 加噪前与加噪后星座图对比

(a)、(b)、(c) 分别对应 QPSK, 8QAM, 16QAM 加噪前的星座图, (d)、(e)、(f) 分别对应加噪后的星座图。加噪前三种调制方式的复信号集中于一点, 加噪后部分点偏离了原来位置, 这就造成解调时误判的可能性。

依据 4.2.1 建立的 MQAM 调制和解调数学模型, 得出了不同调制方式的 BER 与 SNR 关系表达式。我们就此表达式绘制出二者关系曲线图, 如图 4 所示。

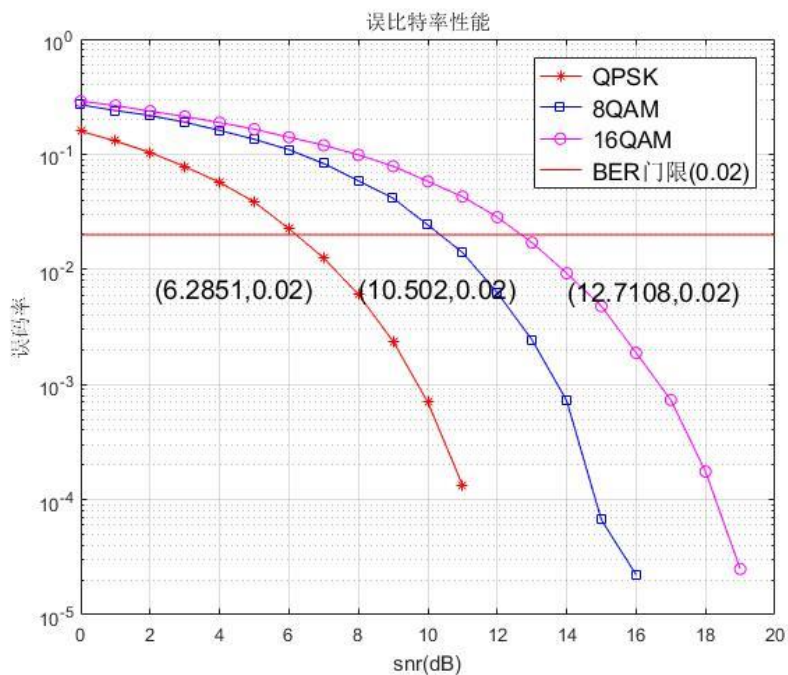


图 4 QPSK、8QAM、16QAM 误比特率性能

图 4 中的横坐标表示的是 SNR，其单位为 dB，纵坐标为 BER。三种不同颜色的曲线由下至上分别表示 QPSK、8QAM 以及 16QMA 的 SNR 与 BER 的关系曲线。图中的红色水平直线表示的是题目要求的 BER 值，即 0.02。当 BER=0.02 时，三种调制方式对应的 SNR 容限值如表 1 所示。

调制方式	SNR 容限 (BER=0.02)
QPSK	6.2851 dB
8QAM	10.502 dB
16QAM	12.7108 dB

表 1

值得注意的是，我们的 MQAM 调制解调模型中，星座图采用的映射编码方式为格雷编码，这使得相邻星座点之间只有一个 bit 位不同。考虑到星座点错判为相邻星座点的概率最大，格雷编码无疑使得相同 SNR 条件下解调的 BER 最低。然而，题目中图 5 给出的 QPSK 星座图并非采用格雷编码，我们对此映射关系下的误码率进行了仿真，如图 5 所示。可以看出 BER=0.02 时，采用非格雷编码的 QPSK 对应的 SNR 容限为 6.9277dB>6.2851dB。这表明为了达到相同的误码率性能，此种非格雷编码的映射方式需要的更大的发送功率，SNR 容限值更大。

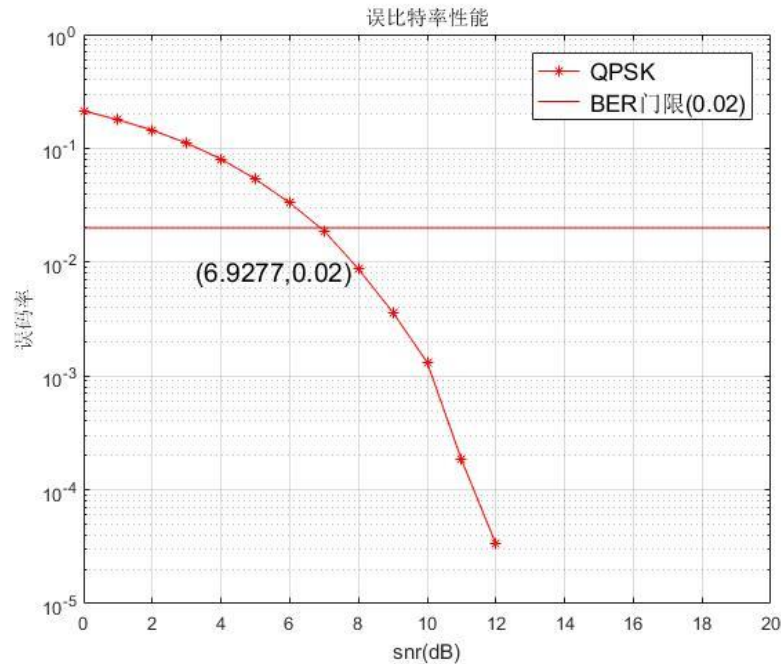


图 5 非格雷编码的 QPSK 调制误码率性能

#### 4.3.2 子问题 2 实例求解

4.2.2 给出了整条光链路的 SNR 与跨段数  $N$  之间的关系：



$$SNR(N) = 10\lg\left(\frac{P_0}{n_{N\_output}}\right) = 10\lg\left(\frac{P_0}{N(P_{NL} + P_n) \cdot 10^{(Gain/10)}}\right)。 \quad (4-21)$$

其中

$$P_n = 2\pi h f B (NF - 1 / Gain)， \quad (4-22)$$

$h = 6.62606896 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  为普朗克常数,  $f = 193.1 \text{ THz}$  为光波频率,  $B = 50 \text{ GHz}$  为带宽,  $NF = 4$  为噪声指数。令  $P_0 = 1\text{mW}$ , 即发射机的发射功率为  $1\text{mW}$ 。

当单跨的传输距离为  $d_0 = 80 \text{ km}$  时, 单跨传输的功率损耗为  $\alpha = 10\lg(2^{\frac{20}{3}}) \text{ dB} = 20.0687 \text{ dB}$ , 所以放大器的功率增益为  $Gain = \alpha = 20.0687 \text{ dB}$ 。将  $Gain$  带入式 (4-12) 中,  $P_n = 1.5878 \times 10^{-7} \text{ W}$ 。此外, 当  $P_0 = 1\text{mW}$  时, 单跨长度光纤引入的等效非线性噪声为  $P_{NL} = \frac{2}{3} 10^{-6} P_n \cdot P_0 = 1.0586 \times 10^{-7} \text{ W}$ 。将  $P_0, P_n, P_{NL}$  以及  $Gain$  带入式 (4-21), 表达式 (4-21) 可以写成

$$SNR(N) = -10\lg(0.0106 \cdot N), \quad (4-23)$$

单位为 dB。作出式 (4-23) 的曲线图, 如图 6 所示。

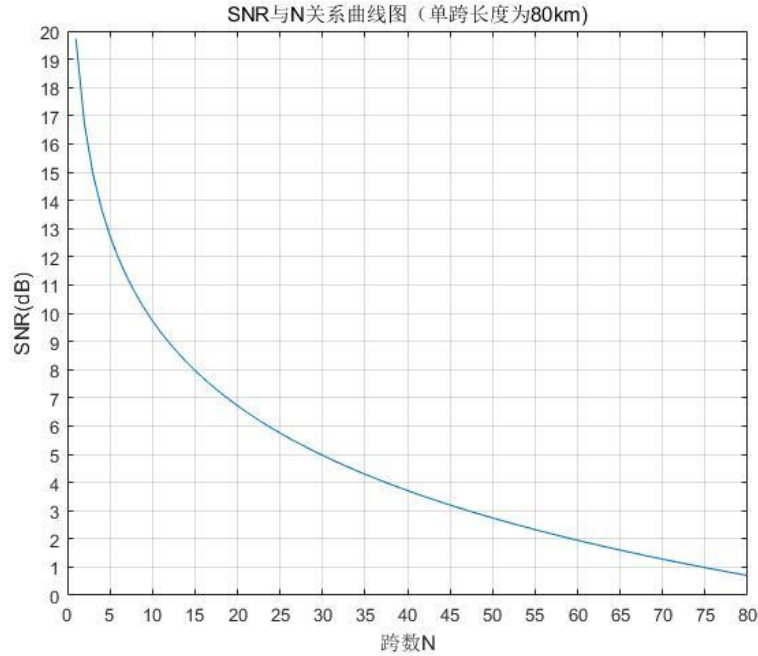


图 6 单跨长度为 80km 时 SNR 与跨段数  $N$  关系曲线

图 6 横坐标表示整条光传输链路上采用的跨段数, 纵坐标表示的是在单跨长度为  $d_0 = 80 \text{ km}$  时, 不同跨段数对应的光链路 SNR。BER=0.02 时, 将子问题 1 求出的三

种调制方式对应的 SNR 容限带入式（4-23）中，即可求出对应的跨数，进而求出最远传输距离，最终结果如表 2 所示。

调制方式	SNR 容限 (dB)	跨段数 (N)	最远传输距离 (km)
QPSK	6.2851	22	1760
8QAM	10.502	8	640
16QAM	12.7108	5	400

表 2

当单跨的传输距离为  $d_0=100$  km 时，单跨传输的功率损耗为

$$\alpha = -10\lg\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d_0}{15}} = 10\lg(2^{\frac{20}{3}}) \text{ dB} = 20.0687 \text{ dB}，\text{ 所以放大器的功率增益为}$$

$Gain = \alpha = 20.0687 \text{ dB}$ 。将  $Gain$  带入（4-12）中， $P_n = 1.5878 \times 10^{-7} \text{ W}$ 。此外，当

$P_0 = 1 \text{ mW}$  时，单跨长度光纤引入的等效非线性噪声为

$$P_{NL} = \frac{2}{3} 10^6 P_n \cdot P_0 = 1.0586 \times 10^{-7} \text{ W}。将 P_0, P_n, P_{NL} 以及 Gain 的值带入式（4-21），表达式（4-21）可以写成$$

$$SNR(N) = -10\lg(0.0269 \cdot N)， \quad (4-24)$$

作出式（4-24）的曲线图，如图 7 所示。

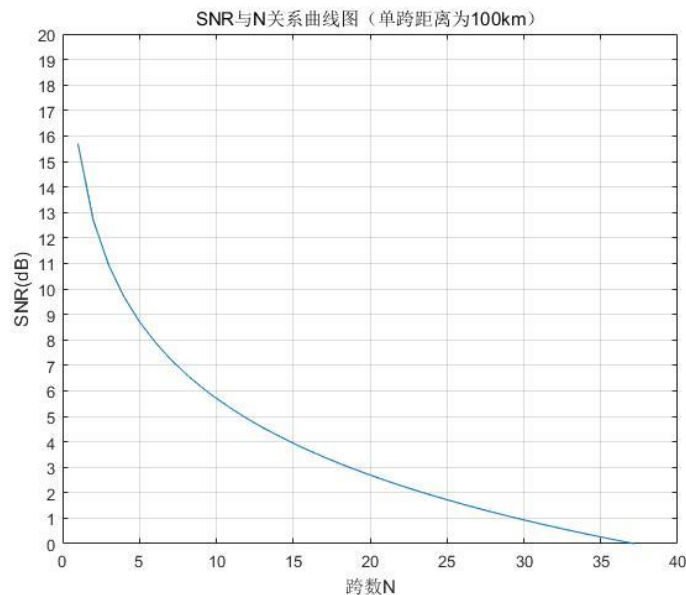


图 7 单跨长度为 100km 时 SNR 与跨段数  $N$  关系曲线

图 7 横坐标表示整条光传输链路上采用的跨段数，纵坐标表示的是在单跨长度为

$d_0 = 100 \text{ km}$  时，不同跨段数对应的光链路 SNR。BER=0.02 时，将子问题 1 求出的三种调制方式对应的 SNR 容限带入式（4-24）中，即可求出对应的跨数，进而求出最远传输距离，最终结果如表 3 所示。

调制方式	SNR 容限(dB)	跨段数 ( $N$ )	最远传输距离 (km)
QPSK	6.2851	8	800
8QAM	10.502	3	300
16QAM	12.7108	2	200

表 3

#### 4.4 本章小结

本章从题干出发，充分挖掘题目中所含信息，对光纤通信地传输机制进行了角为深入的分析。首先，通过查阅相关文献建立了 MQAM 的调制和解调模型，在此模型基础上建立了 MQAM 的 BER 和 SNR 之间的关系式。然后，基于此关系式绘制 BER 与 SNR 关系曲线图，并且得到 BER=0.02 时三种调制方式的 SNR 容限点。其次，我们根据题目所给信息建立了光传输链路模型图，建立了 SNR 与光纤跨段数  $N$  之间的关系式。最后，将子问题 1 得到的三种调制方式的 SNR 容限值带入子问题 2 中，得到 BER=0.02 时 QPSK、8QAM 以及 16QAM 三种调制方式的最远传输距离。由子问题 1 的结果，可以发现 MQAM 的抗误码性能和进制数  $M$  成反比，即 QPSK 调制性能最佳，8QAM 性能次之，16QAM 性能最差。由子问题 2 的结果，我们发现可以从选择链路调制方式以及选择合适跨段数来延长光纤通信的距离，这对未来光纤通信事业的进一步发展具有一定指导意义。

## 问题二

### 5.1 问题分析

光传送网络规划与优化是一项复杂的系统工程，它涉及面广，包括技术、组织、管理、经济性等多元性问题，因此对网络的设计必须遵守一定的系统分析和设计方法。其中网络的连接包括两种，一种是通过铺设光纤来直接连接两个城市/区域，另一种是通过中间城市进行中转的方法来间接连接。如果两个城市没有直接铺设光纤或者通过中转，则它们是无法进行通信的。网络的通信效率可以通过网络价值来衡量，网络价值的定义是所有连接（包括直接连接和间接连接）的加权和，

$$\text{网络价值} = \sum \text{权重} * \text{容量} * \text{人口}。 \quad (5-1)$$

在网络价值的表达式中可以看出，在人口、权重已知的条件下，如何合理规划网络拓扑结构、分配网络容量，是最大化网络价值的关键所在。虽然可以通过添加直接连接来增加网络价值，但是一味这样做会增加铺设光纤链路的成本，这就要求我们在进行网络设计中，对未通信的两地，同时考虑网络价值和两地距离来权衡直接连接还是间接连接。另外，对运营商来说，连接经济发达的地区会带来更多收入，而从政府的角度来说保障发展滞后地区的通信是均衡发展的要求，这就要求在光传送网络规划中，不仅要保证每个城市/区域都要接入光传送网络，而且对于沿海省市需要增加其链路价值的权重，重新进行规划，以满足运营商和政府的要求。

#### 5.1.1 子问题 1 分析

子问题 1 是在保证每个城市都接入网络的前提下，根据全国 12 个城市的人口、相互之间的距离来选择 16 条和 33 条直接连接链路。间接连接的主要目的是为了降低铺设光纤链路的成本，由于不考虑中间结点，即不考虑间接连接，所以在本题中，满足网络价值最大即可。

首先，进行数据预处理。假设所有直接连接的链路权重为 1，并且已知 12 个城市的人口和城市之间的距离矩阵。根据给定的三种典型光传输设备参数表将距离阵换算成总容量矩阵，再结合 12 个城市的人口得出任意两个城市之间链路的价值矩阵，以供下一步选择。

其次，布置 11 条链路连通 12 个城市。为了满足网络价值最大，我们构建最小生成树，从而保证连通图中网络价值最大。

最后，由于题目要求的是连接 16 条和 33 条链路。而通过最小生成树已经连接了 11 条链路，对于剩余的 5 条链路和 22 条链路如何选择，我们将剩余的 55 条链路按价值进行排序，选取价值最大的几条链路，这样就可以满足给定链路数条件下整个网络价值最大的要求。

#### 5.1.2 子问题 2 分析

对于问题 1 中 11 条链路连接的最小生成树，任意两个结点之间没有形成环路，

而当再添加任意一条直接链路时，则必然会形成环路。从整个网络角度出发进行设计比较困难，所以我们将问题简化，采用 Dijkstra 算法找出一条最短路径，连接最小生成树中没有直接相连的两个结点，作为一个小网络。根据题意，两个结点如果没有直接连接，它们是无法通信的。解决方法是在两个结点之间添加直接链路形成环路或者通过中间结点设计间接链路。使用间接链路虽然可以减少光纤铺设成本，但同时网络价值也会下降，这是一个直接链路和间接链路选择的问题，另一个问题是间接链路的单波传输容量分配。综合考虑上述两个问题，我们将优化目标调整为（网络价值/传输距离），并利用不同传输格式的传输距离表加以约束，建立模型。解决了直接连接、间接连接的选取和间接连接中传输容量分配的问题。

### 5.1.3 子问题 3 分析

子问题 3 需要是在问题 2 的基础上考虑不同地区经济的差异，为此，我们对每一条链路引入权重，权重的计算主要根据两城市的 GDP（取两城市的 GDP 乘积的 0.5 次方），并进行归一化，这样重新计算价值矩阵，根据问题 2 中算法重新规划直接链路和间接链路。

## 5.2 模型建立

### 5.2.1 子问题 1

在问题 1 中不考虑距离所带来的成本问题 and 经济差异问题，只需在保证所有城市都接入网络的前提下最大化网络价值即可。给定连接数  $N=16$  和  $33$ ，我们的方法主要就是使用 Prim 算法构建最小生成树，得到 11 条价值最大且连通的直接链路，然后从剩余的 55 条链路中选取价值最大的  $N-11$  条链路，保证网络价值最大。

#### 5.2.1.1 数据预处理

12 个城市的两两距离可以构成一个距离矩阵  $D$ 。根据给定表格，我们可以找出对应直连链路的最大传输总容量，得到容量矩阵  $C$ ，两个城市  $i$  和  $j$  之间的容量的计算方法如下：

$$C(i, j) = \begin{cases} 32Tb/s & 0km < D(i, j) \leq 600km \\ 16Tb/s & 600km < D(i, j) \leq 1200km \\ 8Tb/s & 1200km < D(i, j) \leq 3000km \\ 0Tb/s & 3000km < D(i, j) \end{cases} \quad (5-2)$$

再根据城市  $i$  的人口  $population_i$  和城市  $j$  的人口  $population_j$  得出链路价值矩阵  $W$

$$W(i, j) = C(i, j) * \sqrt{population_i * population_j} \quad (5-3)$$

这样就完成了构建最小生成树所需的邻接矩阵。

### 5.2.1.2 最小生成树

生成树是连接有连通无向图中所有顶点的子图，且任意两个结点只有一条单向路径。其中权重和最大的称为该图的最小生成树。这里我们首先介绍一下求解最小生成树的 Prim 算法的主要思想——Prim 算法从任意一个顶点开始，每次选择与当前顶点集最近的一个顶点，并将两顶点之间的边加入到树中，根据题目的要求，我们做出一些改进，这里我们选择的是与当前顶点集链路价值最大的一个顶点。

#### 最小生成树算法步骤：

- 1) 输入： 连通赋权图（结点集合  $V$ ，边集合  $E$ ）
- 2) 初始化：  $V_{new} = \{x\}$ ， $x$  为  $V$  中的任一结点（起始点）， $V_{new} = \{\}$  初始为空
- 3) 重复下列操作，直到  $V_{new} = V$ ：
  - a. 从  $E$  中选取边  $\langle u, v \rangle$ ，最大化价值矩阵  $W$ ； $u$  进入  $V_{new}$  而  $v$  不在  $V_{new}$  中，并且  $v \in V$ （如果存在又多条满足前述条件即具有相同权值的边，则可任意选取其中之一）；
  - b. 将  $v$  加入  $V_{new}$  中，将  $\langle u, v \rangle$  加入  $E_{new}$  中；
- 4) 输出：使用集合  $V_{new}$  和  $E_{new}$  来描述得到的最小生成树。

我们使用 matlab 实现最小生成树的 Prim 算法，首先画出 12 个城市的坐标，然后在图中画出连通的链路，结果如图 8 所示，网络价值为 3824.6494mTb/s。

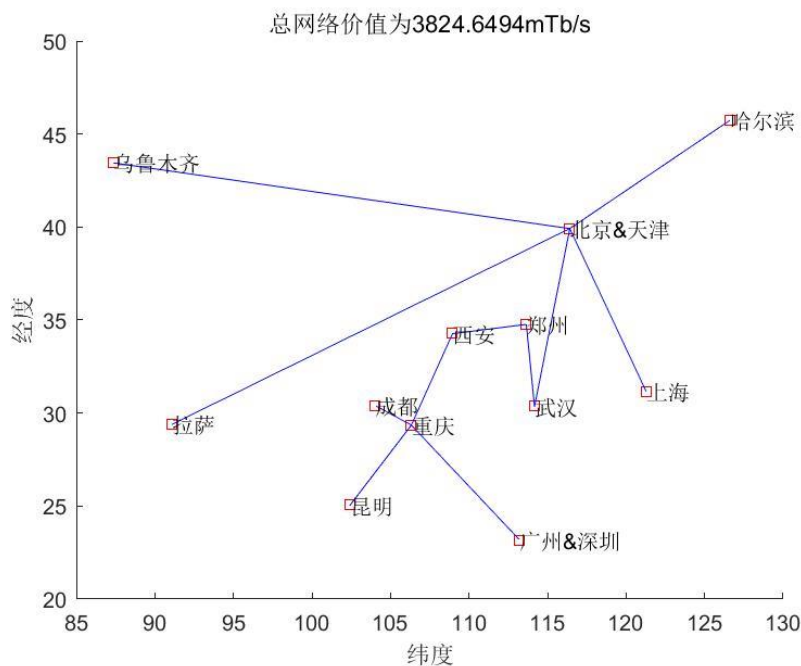


图 8 城市坐标及连接网络总价值

### 5.2.1.3 剩余链路选取

对于剩余还未连接的 55 条链路，为了使总的网络价值最大，我们对其链路价值进行排序，找出链路价值最大的  $N-11$ （5、22）条链路。其链路连接图如下

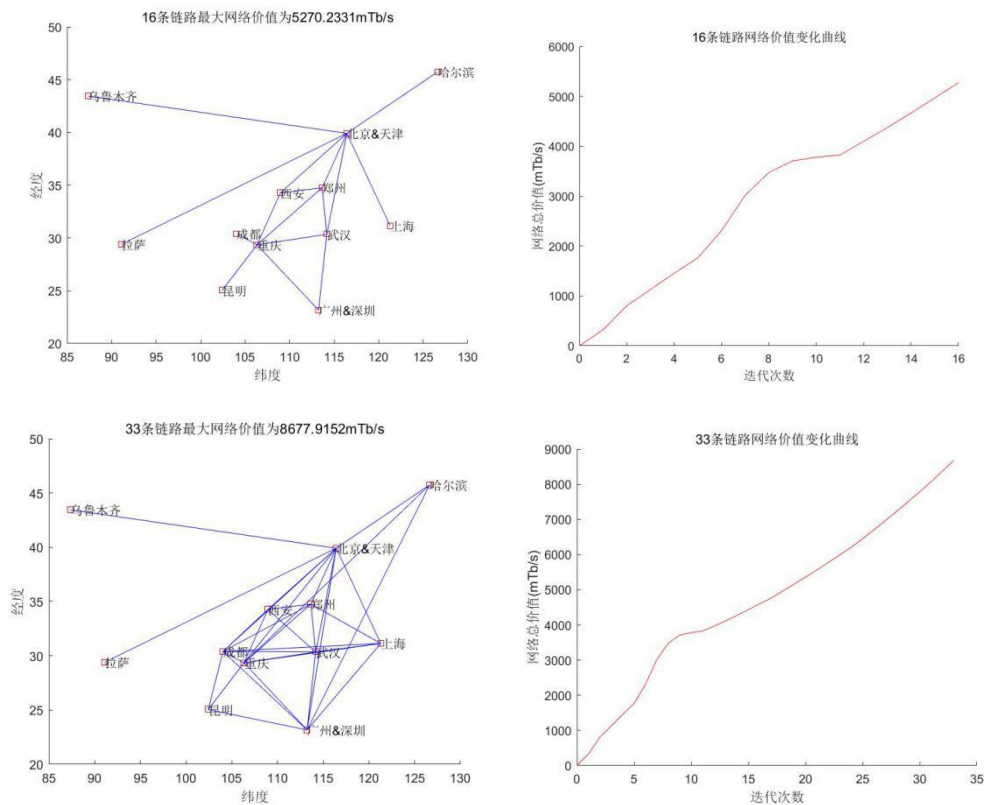


图 9 网络价值最大连接图

从图中可以看出,16 条直连链路的最大网络价值可以达到 5270.2331mTb/s, 33 条直接连接链路的最大网络价值可以达到 8677.9152mTb/s。

### 5.2.2 子问题 2

子问题 2 需要考虑中间结点。添加中间结点的主要目的是为了减少直连带来的成本增加问题，但使用中间结点作为间接连接的中转，必然会涉及到单波传输容量的分配问题。而总容量的取值要满足题中给出的不同传输格式的传输距离表，所以要权衡好直接连接和间接连接的选择以及间接连接中路径单波传输容量的分配。

#### 5.2.2.1 针对最小生成树的小网络分割

我们解决问题 2 的基础是问题 1 构造的最小生成树。通过在最小生成树上增加直接连接或间接连接以达到成本最小情况下的网络价值最大化。为了简化问题，我们将剩余的 55 条可用于直连的链路按链路价值进行排序，选取价值最大的一条链路，找出这条链路在已连接链路上从出发点到结束点的一条最短路径，作为一个小网路进行下一步规划，具体算法流程图如下：

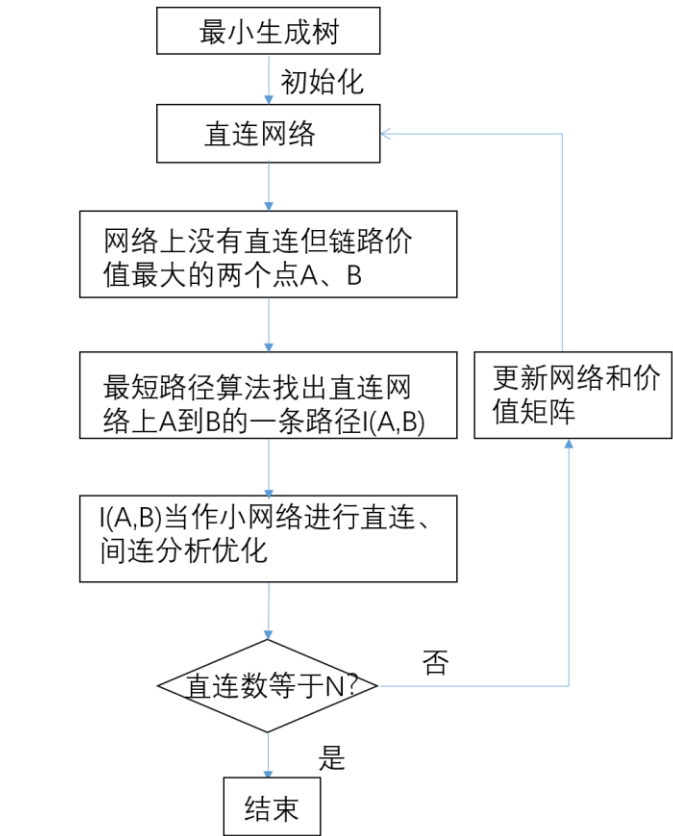


图 10 算法流程图

在当前网络中，我们所选取的 A 点与 B 点必然是没有直连。若是直连，链路价值  $V(A, B)$  必然最大。我们使用 Dijkstra 算法找到 A 到 B 的一条路径，Dijkstra 算法是从一个顶点到其余各顶点的最短路径算法，解决的是无向/有向图中最短路径问题。它的主要特点是以起始点为中心向外层扩展，直到扩展到终点为止，是一种广度优先搜索算法。

#### Dijkstra 算法步骤：

- 1) 初始条件：S 只包含源点，即  $S = \{v\}$ ；v 的距离为 0。U = {其余顶点}，若 v 与 U 中顶点 u 有边，则 u 的距离设置为相应的权值；若 u, v 之间不存在边，则 u 的距离设置为无穷大。
- 2) 从 U 中选取一个距离 v 最小的顶点 k，加入 S 中（该选定的距离就是 v 到 k 的最短路径长度）。
- 3) 以 k 为新考虑的中间点，修改 U 中各顶点的距离，若从源点 v 到顶点 u 的距离（经过顶点 k）比原来距离（不经过顶点 k）短，则修改顶点 u 的距离值，修改后的距离值为顶点 k 的距离加上边  $\langle k, v \rangle$  的权值。
- 4) 重复步骤 2) 和 3) 直到所有顶点都包含在 S 中。

通过 Dijkstra 算法我们找到了一条最短路径。起点 A 到终点 B 可以通过铺设光纤链路直接连接，也可通过最短路径进行间接连接。我们将 A 到 B 之间的最短路径作为一个小网络考虑，做下一步优化选择。如果最后选择了直接连接，则剩下要连接的链路数  $N-1-1$  减一并更新网络结构；如果选了间接连接，则需要对该最短路径进行单波传输容量进行规划并更新网络价值矩阵。下一次迭代时，选择尚未连接的网络价值最大的链路，获取起点和终点，重复上述步骤，直至直接连接



数满足条件。

#### 5.2.2.2 小网络的规划

对于起点 A 到终点 B 的最短路径构成的小网络，考虑到光纤链路的铺设成本，我们提出（链路价值/传输距离）作为目标优化函数。针对间接连接，约束条件为每一条链路都要满足不同传输格式的“传输距离表”中所要求的单波传输容量和最大传输距离的关系。

假设 A 代表北京，B 代表广州，经最短路径算法在当前直连网络中找出北京到广州的最短路径为北京——>武汉——>广州，这样将其作为一个小网络，进行如下优化：

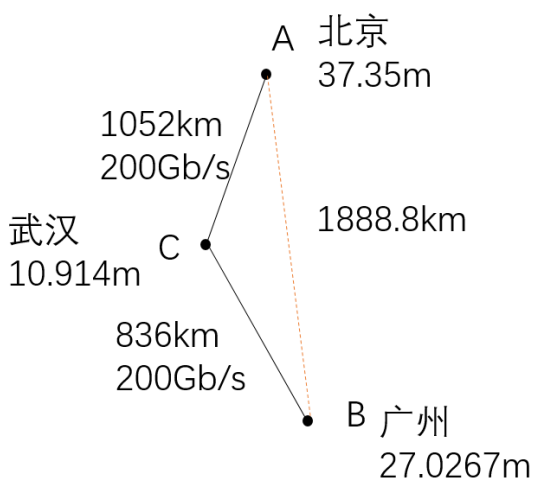


图 11 北京、广州、武汉连接示例图

$$\max Q = \frac{\sqrt{37.35 \times 27.0267} \times \frac{x}{100} \times 8 + \sqrt{37.35 \times 10.914} \times \frac{200-x}{100} \times 8 + \sqrt{10.914 \times 27.0267} \times \frac{200-x}{100} \times 8}{1052 + 836} \quad (5-4)$$

$$0 < x \leq f(d_{AB})$$

$$200 - x > 0$$

$$x = 100, 200, 400$$

约束条件为：

$$f(d) = \begin{cases} 100 & 1200 < d \leq 3000 \\ 200 & 600 < d \leq 1200 \\ 400 & 0 < d \leq 600 \end{cases}$$

在该最优化问题中，变量 x 代表间接连接 AB 之间的单波传输容量，这里我们认为单波传输容量 x 只能选取 100Gb/s, 200Gb/s, 400Gb/s 三个值， $f(d)$  表示的是直连链路的距离与直连情况下的单波传输容量的换算关系。在目标函数 Q 中，

$\frac{x}{100} \times 8$  表示将单波传输容量换算成总容量。由于  $x$  的取值有限，对每个  $x$  的取值进行计算，得到最大  $Q$  值，如果  $x$  不存在，则设  $Q=0$ 。这样即可得到间接连接的单波传统容量的分配和最大  $Q$  值，记为  $Q_{indirect}$ 。

针对直接连接，则直接添加直连链路，无需进行单波传输容量分配，约束目标函数变为

$$\max Q = \frac{\sqrt{37.35 \times 27.0267} \times \frac{f(d_{Ab})}{100} \times 8 + \sqrt{37.35 \times 10.914} \times \frac{200}{100} \times 8 + \sqrt{10.914 \times 27.0267} \times \frac{200}{100} \times 8}{1052 + 836 + d_{AB}} \tag{5-5}$$

$$\text{约束条件为: } f(d) = \begin{cases} 100 & 1200 < d \leq 3000 \\ 200 & 600 < d \leq 1200 \\ 400 & 0 < d \leq 600 \end{cases}$$

由上述公式得到最大  $Q$  值，记为  $Q_{direct}$ 。

最后，比较  $Q_{direct}$  与  $Q_{indirect}$  的大小， 如果选择直接连接，则添加直接链路，更新网络结构，如果选择间接连接，则有小网络的单波传输容量分配更新整体网络的价值网络，供下一步迭代选择最大价值链路。

16 条连接结果如下：

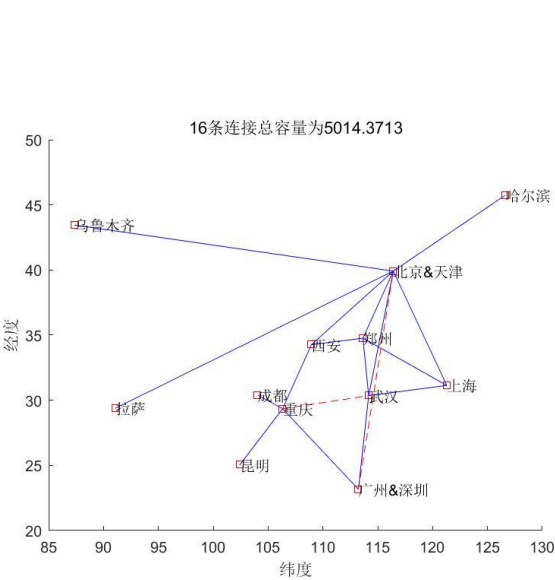


图 12 16 条连接网络连接图

城市A	城市B	网络价值
北京&天津	拉萨	46.447
北京&天津	乌鲁木齐	73.011
武汉	广州&深圳	137.4
北京&天津	武汉	161.52
重庆	昆明	229.12
郑州	西安	230.23
上海	郑州	243.48
郑州	武汉	245.27
上海	武汉	260.03
北京&天津	郑州	302.48
北京&天津	西安	303.23
哈尔滨	北京&天津	323.26
西安	重庆	410.9
广州&深圳	重庆	459.22
上海	北京&天津	481.03
重庆	成都	707.66

表 4

城市A	城市B	单波传输容量
武汉	郑州	300
郑州	西安	300
西安	重庆	300
重庆	武汉	100

表 5A

城市A	城市B	单波传输容量
北京&天津	武汉	100
武汉	广州&深圳	100
广州&深圳	北京&天津	100

表 5B

其中图 12 为 16 条连接网络连接图，总的网络容量为 5014.3713mTb/s，实线代表直接连接，虚线代表间接连接，表 4 为直接连接的链路价值表，表 5 是两个间接连接的单波传输容量分配图，即（1）重庆和武汉之间通过郑州、西安进行间接连接，每条链路的单波传输容量见表 5 A（2）北京&天津和广州&深圳之间通过武汉进行间接连接，每条链路的单波传输容量见表 5 B。

33 条连接结果如下：

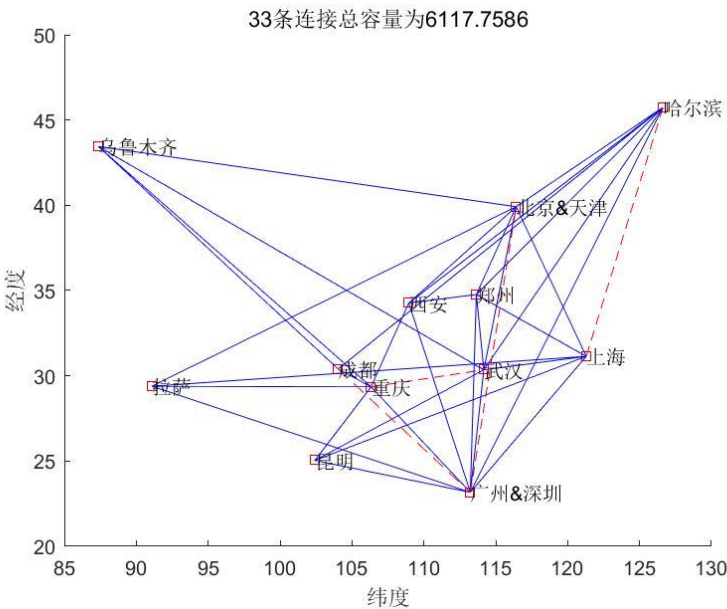


图 13 33 条连接网络连接图

城市A	城市B	单波传输容量
武汉	郑州	300
郑州	西安	300
西安	重庆	300
重庆	武汉	100

表 6A

城市A	城市B	单波传输容量
北京&天津	武汉	100
武汉	广州&深圳	100
广州&深圳	北京&天津	100

表 6B

城市A	城市B	单波传输容量
广州&深圳	重庆	100
重庆	成都	300
成都	广州&深圳	100

表 6C

其中图 13 为 33 条连接网络连接图，总的网络容量为 6117.7586mTb/s, 实线代表直接连接，虚线代表间接连接，附录 A 为直接连接的链路价值表，表 6 是三个间接连接的单波传输容量分配图，即（1）重庆和武汉之间通过郑州、西安进行间接连接，每条链路的单波传输容量见表 6 A（2）北京&天津和广州&深圳之间通过武汉进行间接连接，每条链路的单波传输容量见表 6 B（3）成都和广州&深圳之间通过重庆进行间接连接，每条链路的单波传输容量见表 6 C。

### 5.2.2.3 当扩大为省之后的影响及结果

我们认为扩大为省之后，各结点人口会增加，从而造成每条链路价值变大，通过上网查询每个省的人口（见附录），重新按照子问题 2 中算法进行计算，得到的结果如下：

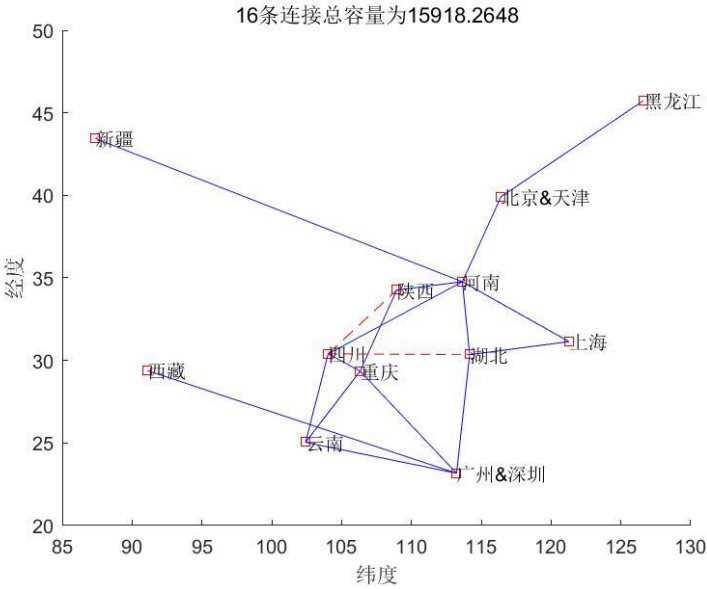


图 14 省网络价值最大连接图（16 条）

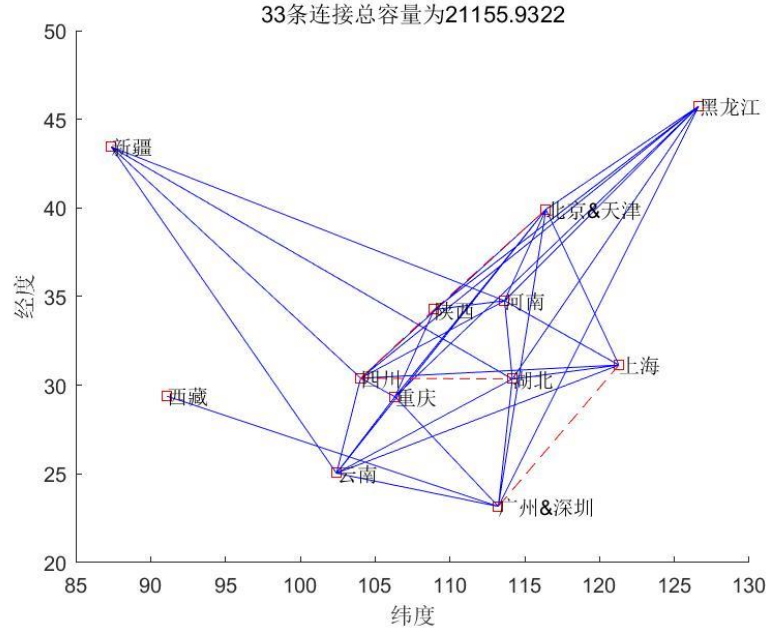


图 15 省网络价值最大连接图（33 条）

以上结果表明，当扩大到省时，16 条链接的网络容量为 15918.2648mTb/s，33 条链接的网络容量 21155.9322mTb/s

### 5.2.3 子问题 3

从运营商角度来看，连接经济发达的地区会带来更多的收入，经济发达的地区 GDP 较高，所以我们的思路是在问题 2 基础上引入权重，即增加经济发达地区的权重来合理分配链路，这里我们参考 2017 年各市 GDP 值，并进行归一化，则链路的权值我们设为

$$weight(i, j) = \sqrt{GDP(i) \times GDP(j)} \quad (5-6)$$

则链路价值更新为

$$W(i, j) = weight(i, j) \times C(i, j) \times \sqrt{population(i) * population(j)} \quad (5-7)$$

基本算法仍采用问题 2 中算法，得出结果见下图

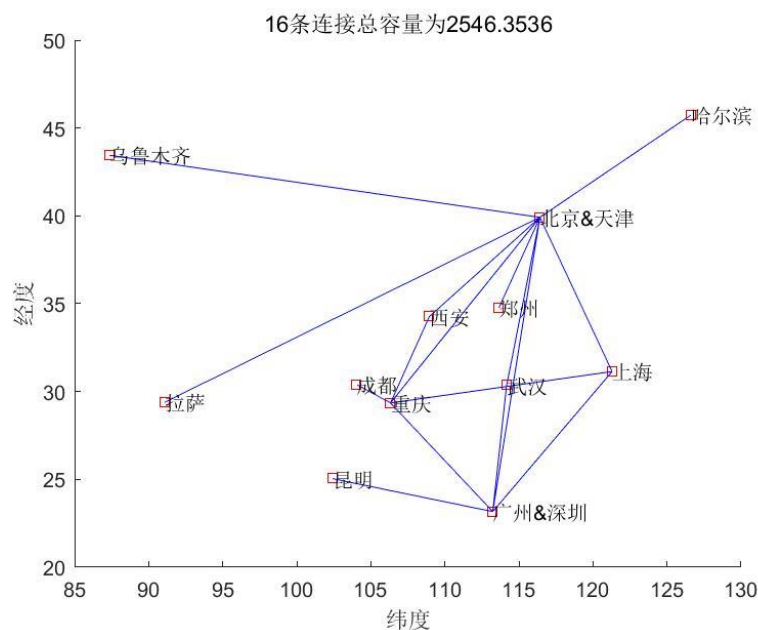


图 16 网络价值最大连接图（16 条）

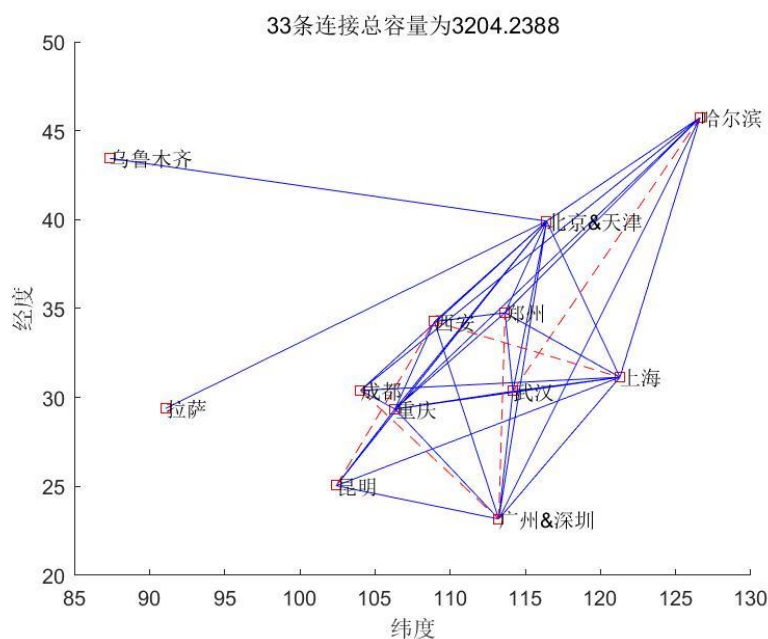


图 17 网络价值最大连接图（33 条）

### 5.3 本章小结

综上所述，针对光传送网络的规划，如果只考虑直接链路，则是在保证所有节点都连接的情况下网络价值最大，求解较为简单，我们的方法主要是先使用最小生成树来连通所有节点，然后针对对剩余链路的选择，选取那些价值最大的链路，结果 16 条链路网络价值可以达到 5270.2331mTb/s，33 条链路网络价值可以达到 8677.9152mTb/s。若同时考虑直接链路和间接链路，我们首先在最小生成树上找出剩余未直接连接的两点，使用最短路径算法找出中间点，由起始点、终点和中间点组成一个小网络，则需要面临两个小问题，一个是起始点和终点之间直

接链路和间接链路的选择，另一个是间接链路单波传输容量的分配问题，在这里我们综合考虑链路容量和传输距离，找出合理的优化目标，根据题目要求对间接链路单波传输容量进行约束，较好地满足了规划需求，针对城市扩大成省的问题，我们改变人口数量，重新利用上述算法进行重新规划。针对运营商的规划需求，我们引入 GDP 参数，将链路价值权值设置为两地归一化 GDP 值的几何平均，使用问题 2 中算法，这样既保证了运营商需求，又满足全连通、成本低的要求。

### 问题三

#### 6.1 问题分析

题中给出了信息熵的一般化定义，问题要求在保持 16QAM 调制的信息熵不低于 3bit 的前提下，通过改变 16QAM 星座点的位置、数量或概率以降低 16QAM 调制的 SNR 容限值，从而提高系统容忍噪声的能力，延长链路传输的长度。我们的思路是将此问题转化为有约束的最优化问题——在信息熵下限 3bit 的约束下，通过改变星座点的三种参数，最小化 16QAM 的 SNR 容限值。具体求解的时候，考虑到参数数目太多，我们首先采用控制变量法，分别求解概率、位置和数量这三个因素单独影响下的最优星座图，然后再求解三种因素综合影响下的最优解。

#### 6.2 模型建立

为了寻找更为一般化的规则，此题可以重新描述为：改变  $M$  QAM ( $8 \leq M \leq 16$ ) 星座图中各星座点的概率或位置，寻找具有最佳抗误码性能的星座图。然后将不同  $M$  值对应的最佳星座图同题中 8QAM 星座图的 SNR 容限值相比较，寻找到性能更优的星座调制。在 6.2.1 部分我们首先给出了星座点数目以及位置固定时，星座点的概率分布和星座图 SNR 容限值的关系模型。然后，在 6.2.2 部分给出了概率分布和星座点数目固定时，星座点的位置分布对于 SNR 容限值的关系模型。最后，在 6.2.3 部分给出了综合考虑三种影响因素下最优化数学模型，模型最优解即为最佳星座图的方案。

##### 6.2.1 星座点概率分布模型

如图 18 所示，我们给出拥有 16 个星座点的星座图，每个星座点对应的概率为  $p_i$ ，且  $\sum_{i=1}^{16} p_i = 1$ 。假设图中最小欧式距离为  $d_{\min}$ ，则可以采用归一化平均能量指

标  $Q = \frac{d_{\min}^2}{E_{av}}$  来衡量星座图的抗误码性能。

$$E_{av} = \sum_{i=1}^{16} E_i p_i, \quad (6-1)$$

其中  $E_i$  表示第  $i$  个星座点的能量。星座点 1, 2, 3, 4 到坐标系的距离相等，星座点 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 以及星座点 13, 14, 15, 16 也具有相同的能量。



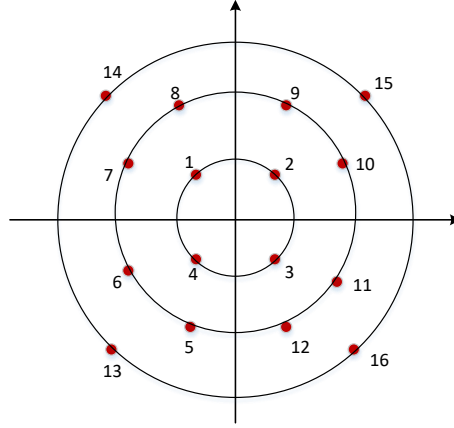


图 18

$Q$  值越大，星座图在给定 BER 下的 SNR 容限点越低，则星座图性能越好。此时，问题就转化为：在给定概率分布下，通过合理分配每个星座点的发送概率使得  $E_{av}$  的值最小。如果没有信源熵的下限约束，我们可以令任意信源符号发送概率为 1，其他信源符号发送概率为 0。所以当  $p_i=1$  且  $i = \arg \min_i \{E_i\}$  时， $E_{av} = \min_i E_i \leq 1$  达到最小值， $Q$  值亦为最大。

现题目要求信源熵保持 3bit，则信源熵  $\Omega = -\sum_{i=1}^{16} p_i \log_2 p_i \in [3, 4]$ 。当  $\Omega = 3\text{bit}$  时，只有一种概率分布，即  $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}$ 。当  $\Omega > 3$  时，假设对应的概率分布为  $\{p_i | i=1, 2, \dots, 16\}$ ，则一定有  $p_i \leq \frac{1}{8}$ ，且没有 8 个  $\frac{1}{8}$ 。 $\Omega = 3\text{bit}$  时， $E_{av} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i$ ； $\Omega > 3$ ， $E_{av}' = \sum_{i=1}^{16} p_i E_i$ 。又因为图 8 中各星座点对应的能量满足  $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{16}$ ，所以有  $E_{av} < E_{av}'$  成立。

显而易见，对于任意具有  $M$  ( $8 \leq M \leq 16$ ) 个星座点的星座图，当星座点位置和数量固定时，都有

$$E_{av} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 E_i < E_{av}' = \sum_{i=1}^{16} p_i E_i \quad (6-2)$$

其中  $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_M$ ，为各星座点能量从小到大排序。在满足 3bit 信源熵的前提

条件下，概率分布满足  $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, \dots\right\}$  时具有最小的平均能量，即

具有最大的 $Q$ 。自此，整个问题可以转化为：在个星座点等概的条件下，求解拥有8个星座点的最佳星座图。

### 6.2.2 星座点位置分布模型

图19表示的是拥有 $M$ 个星座点的局部星座图，图中红色的点表示星座点，规则的块区域表示对应星座点的判决区域。假设发射信号为 $s_n$ ，在最小欧式距离较大的情况下，我们认为 $s_n$ 只有可能错判为相邻区域的点。在此合理假设下，接收信号落在 $s_i$ 区域（图中蓝色区域）中的条件概率近似为

$$p(s_i | s_n) \approx \frac{\sqrt{2}}{\|s_i - s_n\|} \sqrt{\frac{N_0}{\pi}} \exp\left[-\frac{\|s_i - s_n\|^2}{8N_0}\right]。 \quad (6-3)$$

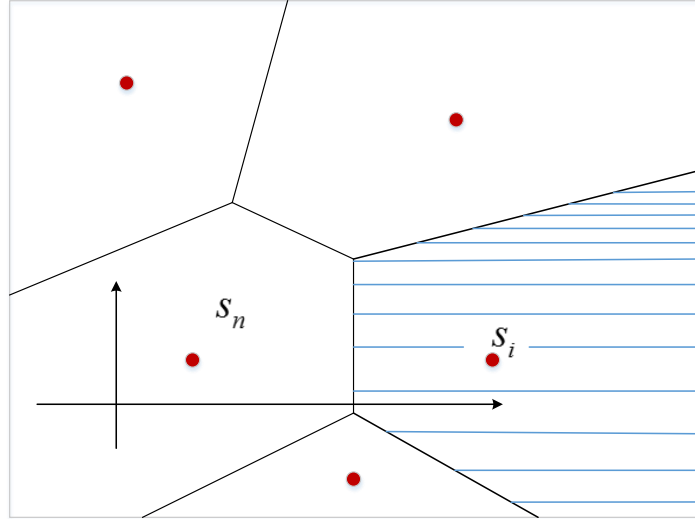


图 19

所以，发射 $s_n$ 信号时，出现误判的概率为

$$p(r \neq s_i | s_n) = \sum_k p(s_k | s_n) \quad (6-4)$$

其中 $s_k$ 表示的是所有与星座点 $s_n$ 邻接的其他星座点。最终的误码率为

$$\begin{aligned} p_M &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M p(r \neq s_n | s_n) \\ &\sim \frac{1}{M} \sqrt{\frac{N_0}{\pi}} \sum_n \sum_{k \neq n} \frac{\sqrt{2}}{\|s_k - s_n\|} \exp\left[-\frac{\|s_k - s_n\|^2}{8N_0}\right] \end{aligned} \quad (6-5)$$

式（6-5）即为需要优化的目标函数。 $p_M$ 关于信源集合并非凸函数，所以可以采

用梯度下降算法进行局部搜索，并且等价于全局搜索。此外，当噪声功率  $N_0$  较小时，

$p_M$  呈指数分布，即  $p_M \sim \exp\left(-\frac{1}{8N_0} \min_{i \neq j} \|s_i - s_j\|^2\right)$ 。

至此，问题就转化为：通过合理分配信源  $\{s_n\}_{n=1}^M$  的位置来最小化式（6-5）的

误码率。星座图的平均功率为  $E_{av} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \|s_n\|^2$ ，为了方便陈述我们的优化算法，此

处令  $E_{av} = \frac{1}{M}$ 。将初始星座图表示成向量形式  $S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_M]^T$ ，将经过  $m$  次迭代之

后的星座图表示为  $S_m = [s_1^m \ s_2^m \ \dots \ s_M^m]^T$ 。对星座向量进行梯度运算

$$S_{m+1} = S_m - \alpha_m \nabla p_M(S_m) \quad (6-6)$$

其中  $\alpha_m$  为迭代步长， $\nabla p_M(\bullet)$  为  $p_M$  关于  $S_m$  的梯度。在迭代过程中还需保持星座点

能量归一化，即将  $S_{m+1} = \frac{S_{m+1}}{\|S_{m+1}\|}$  作为下一次迭代的输入。当（6-6）达到收敛状态时，

即得到最优的星座图。

### 6.2.3 星座点概率-位置联合分布模型

根据 6.2.1 建立的星座点概率分布模型，可以将问题转化为 8 星座点的最优位置问题，即利用 6.2.2 中梯度下降算法求解最优星座点向量。得到的最优解  $S_{m+1}^*$

就是更改 16QAM 调制星座点概率、位置或数量的最优解。

### 6.3 实例求解

根据 6.2.3 的联合模型，我们运用梯度下降算法求出最佳星座图，如图 20 所示。

最优星座图各星座点归一化坐标为  $[0 \ 1 \ e^{\frac{2\pi}{7}j} \ e^{\frac{4\pi}{7}j} \ e^{\frac{6\pi}{7}j} \ e^{\frac{8\pi}{7}j} \ e^{\frac{10\pi}{7}j} \ e^{\frac{12\pi}{7}j}]$ 。原问题给出的 8QAM 星座点坐标为  $[-1+j \ 1+j \ -1-j \ 1-1+j \ -2.731 \ 2.731j \ -2.731j \ 2.731]$ 。

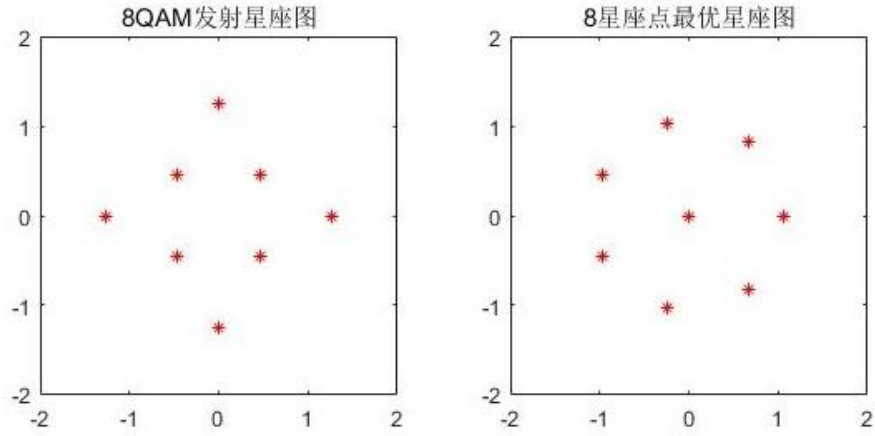


图 20 8QAM 星座图与 8 点最佳星座图对比

两种星座图的误码率性能如图21所示，可以看出相同BER条件下我们得出的星座图的SNR容限值要小于原题中的8QAM。

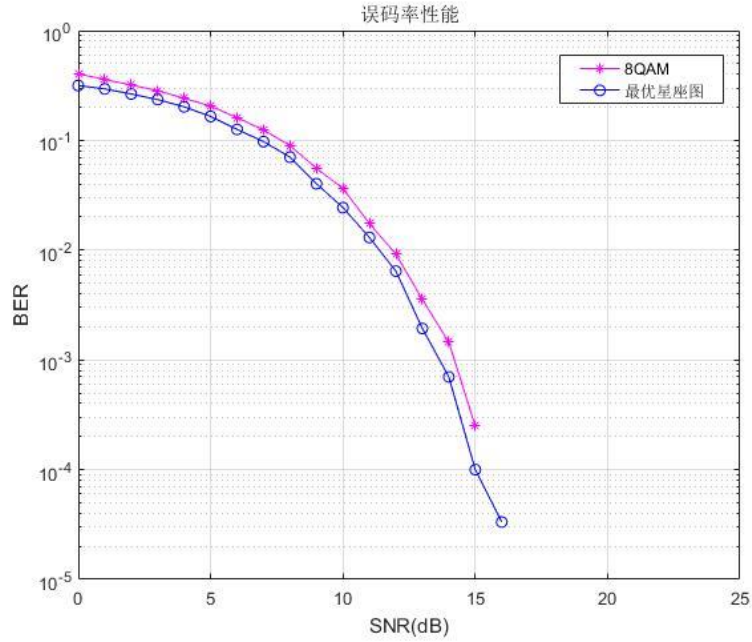


图 21 8QAM与8点最佳星座图抗误码性能对比

#### 6.4 本章小结

本章旨在探索最佳星座图的设计方案，我们采用控制变量法，分别建立了星座图的概率分布模型，位置分布模型以及联合分布模型。从概率分布模型我们发现当星座点的概率分布满足  $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, \dots\right\}$  时具有最佳的抗误码性能。在此基础上，利用位置分布模型，通过梯度下降算法就可以得到最佳星座

图方案。通过此章节研究，我们为光纤通信提供了新的星座调制方式，当未来硬件基础发展到一定程度时就可将此调制方式应用到实际通信环境中，以提高通信的质量。

## 总结及展望

本文的主要工作和创新如下：

1. 建立 MQAM 调制解调模型，得出 MQAM 的 BER 和 SNR 关系曲线。仿真结果表明 MQAM 的抗误码性能和进制数  $M$  成反比，即 QPSK 调制性能最佳，8QAM 性能次之，16QAM 性能最差。其次，通过光链路传输模型，建立了 SNR 与光纤跨段数之间的关系式。研究表明，通过选择合适跨段数来延长光纤通信的距离，这对未来光纤通信事业的进一步发展具有一定指导意义。

2. 将连通网络划分为小网络进行分析，对小网络的起点和终点选择直接连接还是间接连接进行最优化设计。每个小网络可以达到最优设计，进而整个网络达到最优。

3. 采用控制变量法，分别建立了星座图的概率分布模型，位置分布模型以及联合分布模型。采用梯度下降算法得到了最佳星座图方案，为光纤通信提出新的星座调制方式，当未来硬件基础发展到一定程度时就可将此调制方式应用到实际通信环境中，以提高通信的质量。

课题的一些工作还可以继续深入开展，主要有以下几个方面的展望：

1. 星座图的概率分布模型，位置分布模型以及联合分布模型建模方法还有很多借鉴的地方，由于时间限制，未对他们进行深入研究。

2. 改善算法，降低算法复杂度，提高算法效率。

## 参考文献

- [1] Tomasz Hrycak, etc. Low Complexity Equalization for Doubly Selective Channels Modeled by a Basis Expansion. IEEE Trans. Signal Processing, 2010,58(11):5706-57149.
- [2] Saptarshi Das. Mathematical Methods for Wireless Channel Estimation and Equalization. Dissertation, University of Vienna, 2009.
- [3] 樊昌信等, 通信原理, 国防工业出版社, 2013.8.
- [4] 吴伟凌等, 移动通信原理, 电子工业出版社, 2009.1.
- [5] Gkamas V, Christodouloupoulos K, Varvarigos E. A Joint Multi-Layer Planning Algorithm for IP Over Flexible Optical Networks. Lightwave Technol, 2015, 33(14):2965-2977.
- [6] Goldsmith, A. Wireless Communications. Cambridge University Press, 2005.
- [7] Fontan, F. P. and Espin eira, P. M. Modeling the Wireless Propagation Channel: A Simulation Approach with MATLAB. Wiley, 2008.
- [8] 韦岗, 季飞, 傅娟. 通信系统建模. 北京: 电子工业出版社, 2007.
- [9] 于风正, 张平. QAM调制与解调的全数字实现. 现代电子技术, 2005, (3): 53-55.

## 附录

### A. 城市网络价值表

城市A	城市B	网络价值
上海	拉萨	37.387
武汉	乌鲁木齐	39.467
广州&深圳	拉萨	39.51
重庆	拉萨	41.959
北京&天津	拉萨	46.447
成都	乌鲁木齐	47.853
重庆	乌鲁木齐	65.955
武汉	昆明	68.553
北京&天津	乌鲁木齐	73.011
哈尔滨	郑州	81.811
哈尔滨	西安	82.015
哈尔滨	武汉	87.372
上海	昆明	102.08
哈尔滨	成都	105.94
郑州	广州&深圳	128.65
广州&深圳	西安	128.97
武汉	广州&深圳	137.4
哈尔滨	广州&深圳	137.49
北京&天津	武汉	161.52
哈尔滨	北京&天津	161.63
上海	广州&深圳	204.59
广州&深圳	昆明	215.75
重庆	昆明	229.12
广州&深圳	重庆	229.61
郑州	西安	230.23
上海	北京&天津	240.52
上海	郑州	243.48
郑州	武汉	245.27
上海	武汉	260.03
北京&天津	郑州	302.48
北京&天津	西安	303.23
西安	重庆	410.9
重庆	成都	530.74



B. 城市与人口/距离关系表

B-1. 城市人口

城市	人口	百万级 (m)
哈尔滨	1092.9w	10.929
乌鲁木齐	223w	2.23
天津&北京	3735w	37.35
西安	961.67w	9.6167
郑州	956.9w	9.569
上海	2420w	24.2
武汉	1091.4w	10.914
重庆	3048w	30.48
成都	1604.47w	16.0447
昆明	672.8w	6.728
拉萨	90.25w	0.9025
广州&深圳	2702.67w	27.0267

## B-2. 城市距离

城市A	城市B	距离 (km)
哈尔滨	郑州	1640.9
哈尔滨	北京天津	1055.61
哈尔滨	上海	1675.28
哈尔滨	乌鲁木齐	3052.91
哈尔滨	西安	1961.22
哈尔滨	武汉	1994.67
哈尔滨	重庆	2507.08
哈尔滨	成都	2571.36
哈尔滨	广州深圳	2789.04
哈尔滨	昆明	3137.49
哈尔滨	拉萨	3555.15
北京天津	郑州	622.32
北京天津	哈尔滨	1055.61
北京天津	上海	1069.55
北京天津	乌鲁木齐	2408.02
北京天津	西安	905.63
北京天津	武汉	1052.81
北京天津	重庆	1457.23
北京天津	成都	1516.32
北京天津	广州深圳	1888.84
北京天津	昆明	2087.08
北京天津	拉萨	2559.48
郑州	哈尔滨	1640.9
郑州	北京天津	622.32
郑州	上海	828.96
郑州	乌鲁木齐	2442.2
郑州	西安	434.48
郑州	武汉	466.26
郑州	重庆	881.31
郑州	成都	1004.31
郑州	广州深圳	1292.94
郑州	昆明	1507.06
郑州	拉萨	2186.67
西安	哈尔滨	1961.22
西安	北京天津	905.63
西安	上海	1222.27
西安	乌鲁木齐	2110.76
西安	郑州	434.48
西安	武汉	652.64
西安	重庆	575.85
西安	成都	611.97
西安	广州深圳	1314.8
西安	昆明	1194.55
西安	拉萨	1753.44
武汉	哈尔滨	1994.67
武汉	北京天津	1052.81
武汉	上海	688.92
武汉	乌鲁木齐	2763.17
武汉	郑州	466.26
武汉	西安	652.64
武汉	重庆	752.08
武汉	成都	977.88
武汉	广州深圳	836.47
武汉	昆明	1294.76
武汉	拉萨	2225.42
重庆	哈尔滨	2507.08
重庆	北京天津	1457.23
重庆	上海	1440.97
重庆	乌鲁木齐	2306.47
重庆	郑州	881.31
重庆	西安	575.85
重庆	武汉	752.08
重庆	成都	269.62
重庆	广州深圳	976.47
重庆	昆明	630.42
重庆	拉萨	1490.64

成都	哈尔滨	2571.36
成都	北京天津	1516.32
成都	上海	1659.75
成都	乌鲁木齐	2056.96
成都	郑州	1004.31
成都	西安	611.97
成都	武汉	977.88
成都	重庆	269.62
成都	广州深圳	1235.81
成都	昆明	638.64
成都	拉萨	1247.55
广州深圳	哈尔滨	2789.04
广州深圳	北京天津	1888.84
广州深圳	上海	1212.39
广州深圳	乌鲁木齐	3281.9
广州深圳	郑州	1292.94
广州深圳	西安	1314.8
广州深圳	武汉	836.47
广州深圳	重庆	976.47
广州深圳	成都	1235.81
广州深圳	昆明	1090.82
广州深圳	拉萨	2314.69
昆明	哈尔滨	3137.49
昆明	北京天津	2087.08
昆明	上海	1961.39
昆明	乌鲁木齐	2496
昆明	郑州	1507.06
昆明	西安	1194.55
昆明	武汉	1294.76
昆明	重庆	630.42
昆明	成都	638.64
昆明	广州深圳	1090.82
昆明	拉萨	1252.11
拉萨	哈尔滨	3555.15
拉萨	北京天津	2559.48
拉萨	上海	2904.71
拉萨	乌鲁木齐	1605.11
拉萨	郑州	2186.67
拉萨	西安	1753.44
拉萨	武汉	2225.42
拉萨	重庆	1490.64
拉萨	成都	1247.55
拉萨	广州深圳	2314.69
拉萨	昆明	1252.11
乌鲁木齐	哈尔滨	3052.91
乌鲁木齐	北京天津	2408.02
乌鲁木齐	上海	3267.54
乌鲁木齐	拉萨	1605.11
乌鲁木齐	郑州	2442.2
乌鲁木齐	西安	2110.76
乌鲁木齐	武汉	2763.17
乌鲁木齐	重庆	2306.47
乌鲁木齐	成都	2056.96
乌鲁木齐	广州深圳	3281.9
乌鲁木齐	昆明	2496
上海	哈尔滨	1675.28
上海	北京天津	1069.55
上海	乌鲁木齐	3267.54
上海	拉萨	2904.71
上海	郑州	828.96
上海	西安	1222.27
上海	武汉	688.92
上海	重庆	1440.97
上海	成都	1659.75
上海	广州深圳	1212.39
上海	昆明	1961.39

## 致谢

四天的数学建模竞赛终于结束了，从选题到任务分工、再到算法设计和实际编程，我们从中逐渐掌握了解决问题的思路，评估模型的指标和方法，也深刻体会到了数学建模的乐趣。非常感谢小组成员对竞赛的全身心投入，虽然在做竞赛过程中可能一些问题还没有解决，一些漏洞还没有想到，但这已是我们目前已能交出的完美答卷。同时感谢南邮金栩老师，感谢她为我们答疑解惑，让我们的竞赛流程可以顺畅进行。