

参赛密码 _____

(由组委会填写)



第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 机动目标的跟踪与反跟踪

摘 要：

本文主要研究了机动目标建模、航迹起始、数据关联以及机动逃逸与反逃逸问题，根据 5 个问题的不同要求，建立了相应的数学模型并求解，实现了测量数据的空间同步、多雷达单目标的跟踪、航迹起始、数据关联、变加速度的机动目标跟踪、机动逃逸与反逃逸等。主要工作包括：

(I) 针对问题 1，在利用地心坐标系的空间匹配算法（ECEFA）实现不同观测雷达空间数据同步的基础上，建立了机动目标跟踪的“当前”统计（CS）模型，通过 Kalman 滤波，实现了机动目标的有效跟踪。针对混合量测阶段，提出了集中式融合算法，实现了航迹的有效估计；对于机动目标观测断裂问题，提出了航迹粘联算法，有效地提高了航迹的连续性，降低目标状态估计误差。最终给出了目标机动发生的时间范围，统计了加速度的大小和方向。

(II) 问题 2：针对所提供的机动目标本身特征，提出了基于修正的 Hough 变换的机动目标航迹起始策略。在此基础上，利用欧氏距离和基于统计标准欧式距离分别对所提数据进行判决，并分析了两种判决结果，指出了两类距离在机动目标数据关联中所存在的不足：只考虑了目标空间距离之间的相互关系，但忽略了目标自身运动状态的影响。进而提出了一种基于概率数据关联（PDA）的机动目标数据关联算法，该算法不仅考虑了量测值在空间距离是渐行的差异，还综合考虑了目标运动速度和加速度的变化规律以及前一时刻目标运动对后一时刻的影响，更能反映目标的真实运动规律，通过问题一建立的机动目标模型，实现了各目标的有效数据关联，确定了最终的两条航迹。

(III) 问题 3: 在坐标转换的基础上, 通过量测数据分析了机动目标的加速度随时间变化规律: 加速度先增大、再变小, 最终趋于零的变化过程。直接利用问题一建立的机动目标跟踪模型对该机动目标进行跟踪, 估计出其轨迹, 结果表明该机动目标在初始的较长一段时间内估计值与量测值存在较大差异, 滤波收敛很慢, 通过对问题一建立的机动目标跟踪模型的分析, 发现导致这一现象的原因是: 机动的加速度过大, 超出了 CS 模型的中预先设置的加速度门限。

(IV) 问题 4: 为了解决第三问的问题, 提出了一种可变步长的 CS-Jerk 模型, 同 CS 模型相比, 由于加加速度的引入, 使得该模型更能反映实际, 同时具备 CS 模型的“当前”统计思想: 目标在某个时刻的机动范围是有限, 即目标的加加速度是一个时间相关过程。因此 CS-Jerk 模型对目标的复杂机动具有较高的跟踪精度, 不仅解决了当目标机动过大时 CS 模型跟踪较差的缺陷, 还有效地对间隔不等的量测数据进行了处理。观察发现, 雷达的最后一个量测数据, 与前面的数据, 不但周期异常, 而且目标的加速度发生了巨变, 从数据分析的角度可以认为该量测数据为野值, 应该剔除; 但也可能是目标在该时刻进行比较强的机动, 同时缺少足够的先验信息, 若盲目地剔除该点可能会对结果造成重大影响。因此, 为了更好了对该目标的着落点进行估计, 分别进行了两个处理。

使用最后一个量测数据时: 着落点坐标: 北纬 39.7992°、东经 116.0184°;

剔除最后一个量测数据时: 着落点坐标: 北纬 39.8946°、东经 115.9447°。

最后分析了所提出的算法的复杂度: $O(n^2)$ 。仿真环境为: Lenovo Y550 Core i5 M430 2.27GHz 双核笔记本, 经过 100 次 Monte Carlo 仿真实验, 算法的平均运行时间为 0.8029s。

(V) 问题 5: 明确了目标机动逃逸的定义: 跟踪模型无法通过雷达探测到的数据对其进行精确跟踪或者雷达探测到目标的虚假位置。因此分别从目标的机动跟踪模型与雷达自身属性的角度出发, 针对 CS 模型的缺陷, 提出了目标最优机动逃逸策略: 目标以超出 CS 模型预先设定的加速度门限值进行机动。针对雷达波束范围与扫描周期的特点, 在建立相应的多目标函数优化模型后, 制订了机动目标的最佳逃逸策略: 目标在一个雷达周期内以最小的代价, 逃出的雷达扫描波束范围。最后又分别从机动目标跟踪模型与雷达探测调整两个方面提出了参数自适应调整的 CS 模型与雷达扫描调整的反逃逸策略。

关键词: 坐标转换, CS 模型, kalman 滤波, Hough 变换, 概率数据关联, 步长可变的 CS-Jerk 模型, 参数自适应调整的 CS 模型

目录

一、问题重述	1
二、问题假设	3
三、符号说明	4
四、问题分析	5
五、模型的建立与求解	8
5.1 问题一的建模与求解	8
5.1.1 基于地心坐标系的空间配准算法	8
5.1.2 CS 模型	11
5.1.3 计算结果及分析	16
5.2 问题二的建模与求解	18
5.2.1 基于修正的 Hough 变换的航迹起始策略	18
5.2.2 数据关联	19
5.3 问题三的建模与求解	24
5.3.1 空间机动目标轨迹变化规律分析	24
5.3.2 基于 CS 模型的目标轨迹预测	26
5.4 问题四的建模与求解	28
5.4.1 步长可变的 CS-Jerk 模型	28
5.4.2 目标轨迹实时预测	30
5.4.3 目标着落点估计	32
5.5 问题五的建模与求解	33
5.5.1 目标最优机动逃逸策略模型	33
5.5.2 反逃逸策略	37
六、模型优缺点分析	40

一、问题重述

目标跟踪是根据传感器（如雷达等）所获得的对目标的测量信息，连续地对目标的运动状态进行估计，进而获取目标的运动态势及意图。目标跟踪理论在军、民用领域都有重要的应用价值。在军用领域，目标跟踪是情报搜集、战场监视、火力控制、态势估计和威胁评估的基础；在民用领域，目标跟踪被广泛应用于空中交通管制，目标导航以及机器人的道路规划等行业。

目标机动是指目标的速度大小和方向在短时间内发生变化，通常采用加速度作为衡量指标。目标机动与目标跟踪是“矛”与“盾”的关系。随着估计理论的日趋成熟及平台能力提升，目标作常规的匀速或者匀加速直线运动时的跟踪问题已经得到很好的解决。但被跟踪目标为了提高自身的生存能力，通常在被雷达锁定情况下会作规避的机动动作或者释放干扰力图摆脱跟踪，前者主要通过自身运动状态的快速变化导致雷达跟踪器精度变差甚至丢失跟踪目标，后者则通过制造假目标掩护自身，因此引入了在目标进行机动时雷达如何准确跟踪的问题。

机动目标跟踪的难点在于以下几个方面：(1) 描述目标运动的模型，即目标的状态方程难于准确建立。通常情况下跟踪的目标都是非合作目标，目标的速度大小和方向如何变化难于准确描述；(2) 传感器自身测量精度有限加之外界干扰，传感器获得的测量信息如距离、角度等包含一定的随机误差，用于描述传感器获得测量信息能力的测量方程难于完全准确反映真实目标的运动特征；(3) 当存在多个机动目标时，除了要解决(1)、(2)两个问题外，还需要解决测量信息属于哪个目标的问题，即数据关联。在一定的测量精度下，目标之间难于分辨，甚至当两个目标距离很近的时候，传感器往往只能获得一个目标的测量信息。由于以上多个挑战因素以及目标机动在战术上主动的优势，机动目标跟踪已成为近年来跟踪理论研究的热点和难点。

不同类型目标的机动能力不同。通常情况下战斗机的飞行速度在 $100\sim 400\text{m/s}$ ，机动半径在 1km 以上，机动大小一般在 10 个 g 以内，而导弹目标机动，加速度最大可达到几十个 g ，因此在对机动目标跟踪时，必须根据不同的目标类型选择相应的跟踪模型。

目标跟踪处理流程通常可分为航迹起始、点迹航迹关联（数据关联）、航迹滤波等步骤。如果某个时刻某雷达站（可以是运动的）接收到空间某点反射回来的电磁波，它将记录下有关的数据，并进行计算，得到包括目标相对于雷达站的距离、方位角和俯仰角等信息。航迹即雷达站在接收到某一检测目标陆续反射回来的电磁波后记录、计算检测目标所处的一系列空中位置而形成的离散点列。航迹起始即通过一定的逻辑快速确定单个或者多个离散点序列是某一目标在某段时间内首先被检测到的位置。点迹航迹关联也称同一性识别，即依据一定的准则确定雷达站多个回波数据（点迹）中哪几部分数据是来自同一个检测目标（航迹）。航迹滤波是指利用关联上的点迹测量信息采用线性或

者非线性估计方法(如卡尔曼滤波、拟合等)提取所需目标状态信息，通常包括预测和更新两个步骤。预测步骤主要采用目标的状态方程获得对应时刻（被该目标关联上的点迹时间）目标状态和协方差预测信息；更新步骤则利用关联点迹的测量信息修正目标的预测状态和预测协方差。

现有 3 组机动目标的测量数据，数据分别包含在 Data1.txt，Data2.txt，Data3.txt 文件中，其中 Data1.txt 为多个雷达站在不完全相同时刻获得的单个机动目标的测量数据，Data2.txt 为某个雷达站获得的两个机动目标的测量数据，Data3.txt 为某个雷达站获得的空间目标的测量数据。

数据文件中观测数据的数据结构如下：

目标 距离 (m)	目标 方位 (°)	目标 俯仰 (°)	测量 时间 (s)	传感器 标号
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------

其中 Data1.txt 和 Data2.txt 数据的坐标系表示如下：原点 O 为传感器中心，传感器中心点与当地纬度切线方向指向东为 x 轴，传感器中心点与当地经度切线方向指向北为 y 轴，地心与传感器中心连线指向天向的为 z 轴，目标方位指北向顺时针夹角（从 y 轴正向向 x 轴正向的夹角，范围为 $0\sim 360^\circ$ ），目标俯仰指传感器中心点与目标连线和地平面的夹角（即与 xOy 平面的夹角，通常范围 -90° 到 90° ）。

Data1.txt 中的雷达坐标和测量误差如下：

雷达标号	经度(°)	纬度(°)	高度(m)	测距误差 (m)	方位角误差(°)	俯仰角误差(°)
1	122.1	40.5	0	50	0.4	0.4
2	122.4	41.5	0	40	0.3	0.3
3	122.7	41.9	0	60	0.5	0.5

Data2.txt 雷达坐标为[0,0,0]。对应两个目标的测量误差如下：

目标	测距误差(m)	方位角误差(°)	俯仰角误差(°)
1	100	0.3	0.3
2	100	0.6	0.6

Data3.txt 的雷达坐标和测量误差为：

经度(°)	纬度(°)	高度(m)	测距误差(m)	方位角误差(°)	俯仰角误差(°)
118	39.5	0	100	0.5	0.5

其余格式与 Data1.txt 和 Data2.txt 相同。需要完成的问题包括：

1. 根据 Data1.txt 数据，分析目标机动发生时间范围，并统计目标加速度的大小和方向。建立对该目标的跟踪模型，并利用多个雷达的测量数据估计出目标的航迹。
2. 附件中的 Data2.txt 数据对应两个目标的实际检飞考核的飞行包线。完成各目标的数据关联，形成相应的航迹，并阐明所采用或制定的准则。若出现雷达一段时间只有一个回波点迹的状况，怎样使得航迹不丢失？给出处理结果。

3. 根据附件中 Data3.txt 的数据, 分析空间目标的机动变化规律(目标加速度随时间变化)。若采用第 1 问的跟踪模型进行处理, 结果会有哪些变化?

4. 请对第 3 问的目标轨迹进行实时预测, 估计该目标的着落点的坐标, 给出详细结果, 并分析算法复杂度。

5. Data2.txt数据中的两个目标已被雷达锁定跟踪。在目标能够及时了解是否被跟踪, 并已知雷达的测量精度为雷达波束宽度为 3° ; 即在以雷达为锥顶, 雷达与目标连线为轴, 半顶角为 1.5° 的圆锥内的目标均能被探测到; 雷达前后两次扫描时间间隔最小为 0.5s 。为应对你们的跟踪模型, 目标应该采用怎样的有利于逃逸的策略与方案? 反之为了保持对目标的跟踪, 跟踪策略又应该如何相应地变换?

二、问题假设

根据题意, 可以进行如下假设:

1、地球公转周期远大于机动目标的观测弧段时长, 故本题在短时间内认定基础坐标系为惯性坐标系, 该基础坐标系不随地球旋转;

2、目标运动具有连续性和渐进性;

3、不考虑机动目标各点的速度差异;

4、假设不同目标之间相互独立, 彼此没有影响;

5、不考虑目标运动过程中发生的抖动;

6、假设三个传感器(雷达)相互独立, 彼此没有影响;

7、不考虑空间飞行器各点的速度差异。

三、符号说明

论文中涉及到的符号说明如下：

符号	含义	单位	备注
α	经度	°	
β	纬度	°	
R	地球半径	m	
e	离心率		
r'	目标距离	m	
θ	目标方位角	°	
φ	目标俯仰角	°	
O_s	雷达中心		
O_c	地心		
$\Delta r'$	测距误差	m	
$\Delta \theta'$	方位角误差	°	
$\Delta \varphi'$	俯仰角误差	°	
$w(k)$	离散时间白噪声序列		
$F(k)$	状态转移矩阵		
$X(k)$	状态向量		
$G(k)$	输入控制项矩阵		
$Q(k)$	协方差矩阵		
$P(k k)$	状态协方差矩阵		
$\hat{X}(k+1 k)$	状态一步预测矩阵		
σ	雷达波束宽度	°	

为方便理解，其余符号将在文中陆续引出。

四、问题分析

机动目标通常是指速度的大小和方向发生变化的目标。机动目标跟踪的实质是利用传感器（雷达）信息，通过建立准确的运动模型，实现对目标状态的估计和预测。单机动目标跟踪的基本原理如图4.1所示。

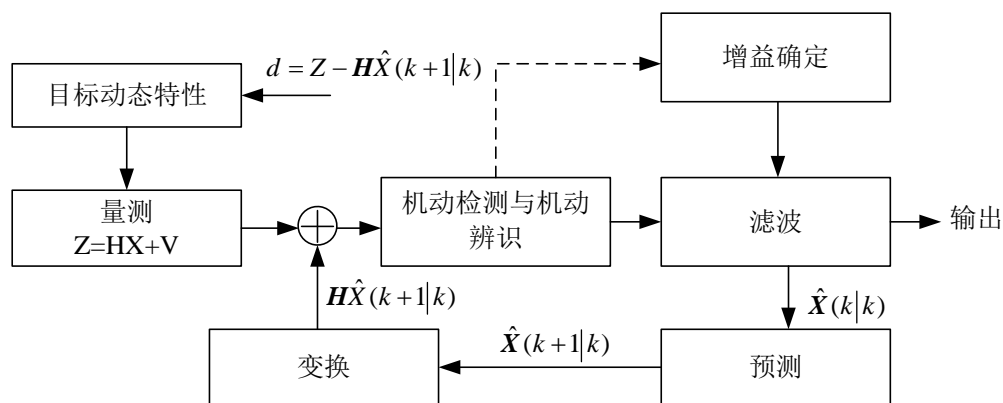


图4.1 单机动目标跟踪基本原理

图中， X 表示状态变量， Z 为量测量， V 是量测噪声， d 为残差向量。先由量测 Z 及其预测构成的残差向量 d ，再根据 d 的变化进行机动性能检测，按照某种准则或逻辑调整滤波增益及其协方差矩阵，或实时辨识目标的机动特性，最后通过滤波算法获得目标的状态估计和预测值，完成机动目标跟踪。

对于多个平台协同跟踪空中单机动目标的情况，多平台的量测值彼此相互独立，而平台间都要交换数据，以确定目标的位置和航迹，预测目标的运动方向。需要交换数据，以确定目标的位置和航迹，预测目标的运动方向。在某一时刻，并非所有的平台都可以探测到目标，也并不需要所有平台都同时参与跟踪，即使参与了目标跟踪，每个平台对运动目标状态估计的贡献大小也不尽相同，因此为了合理充分的利用平台资源，有必要对参与跟踪的平台进行初始化选择，然后进行数据融合以达到高精度目标跟踪的目的。

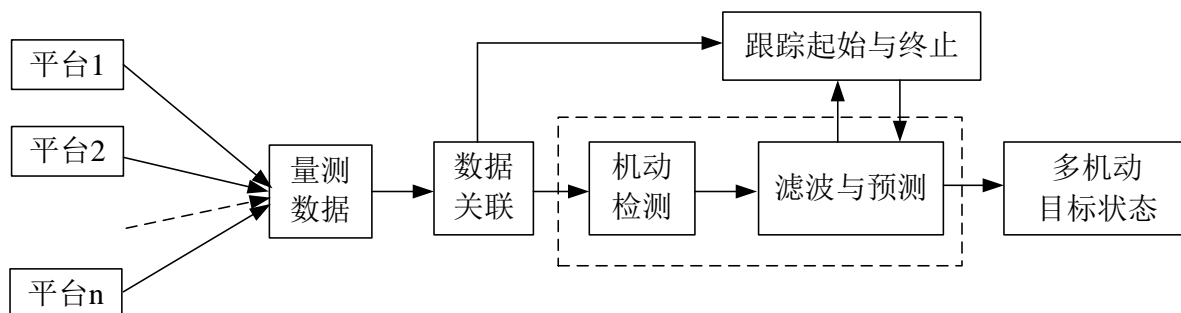


图4.2 多机动目标跟踪基本原理

多目标跟踪(Multiple Target Tracking, MTT)技术在许多军事及民用领域均有广泛应用，它可用于弹道导弹防御，空防(空载预警)，空中攻击(多目标攻击)，海洋监视(水面舰只或潜艇)，战场监视(地面车辆与军事设施)以及空中交通管制(民航飞机)等。多年来，该问题一直受到许多国家的密切关注。近些年来，频繁的局部战争中，以美国为首的多

国部队所使用的先进机载火控系统、空中预警系统和地面“爱国者”防空导弹系统等武器装备是多目标跟踪技术综合应用的典型例证。

多目标跟踪问题包括跟踪门的形成、数据关联与跟踪维持、航迹起始迹终结等许多方面。其中数据关联与跟踪维持是多目标跟踪的核心内容。数据关联主要解决量测与目标之间的关联匹配问题。跟踪维持则是利用各种滤波算法对各个机动目标进行状态估计。数据关联和跟踪算法研究主要困难在于求解杂波环境下对多个目标进行跟踪时出现的量测与航迹关联匹配问题，逻辑关系复杂，计算量大，多数情况下需要在复杂而庞大的搜索空间中寻找最优解或次优解。与此同时，现代战争环境发生了很大变化，出现了一系列对抗与反对抗措施，如有源电子干扰、反辐射导弹、隐身与反隐身技术和低空突防技术等等。在给雷达系统带来许多问题的同时，也对多目标跟踪算法提出了更高的要求。其中，目标的强机动性，强杂波、低信噪比、低检测率及高虚警率等特性都是较棘手的问题。例如，当目标运动的机动性较大时，其在空间飞行的速度、加速度和转弯率等参数不断变化，使得航迹具有高度的非线性性，导致在对机动目标跟踪过程中的计算量急剧加大。特别在对多个机动目标进行跟踪时，其数据关联及跟踪时间和计算量尤为庞大，而最终的效果却并不尽理想。因此，研究有效的数据关联算法，探讨先进的机动多目标跟踪技术，并尽快将MTT系统应用到军事和民用领域，不仅会使理论研究在更加坚实的基础上向前发展，而且对增强国防实力具有重要的意义。

通过雷达进行机动目标的航迹和轨迹预测，其整个问题的求解过程如图 4.1 所示。问题一通过坐标转换，建立 CS 模型实现对目标的跟踪；问题二通过航迹起始，用三种不同的方法进行了数据关联；问题三对机动目标机动变化规律进行了分析，并使用先前建立的跟踪模型进行了轨迹估计；问题四建立了变步长的 CS-Jerk 模型，重新估计了轨迹，并对着落点进行了预测，分析了算法复杂度；问题五制订了相应的最佳机动逃逸策略与反逃逸策略。

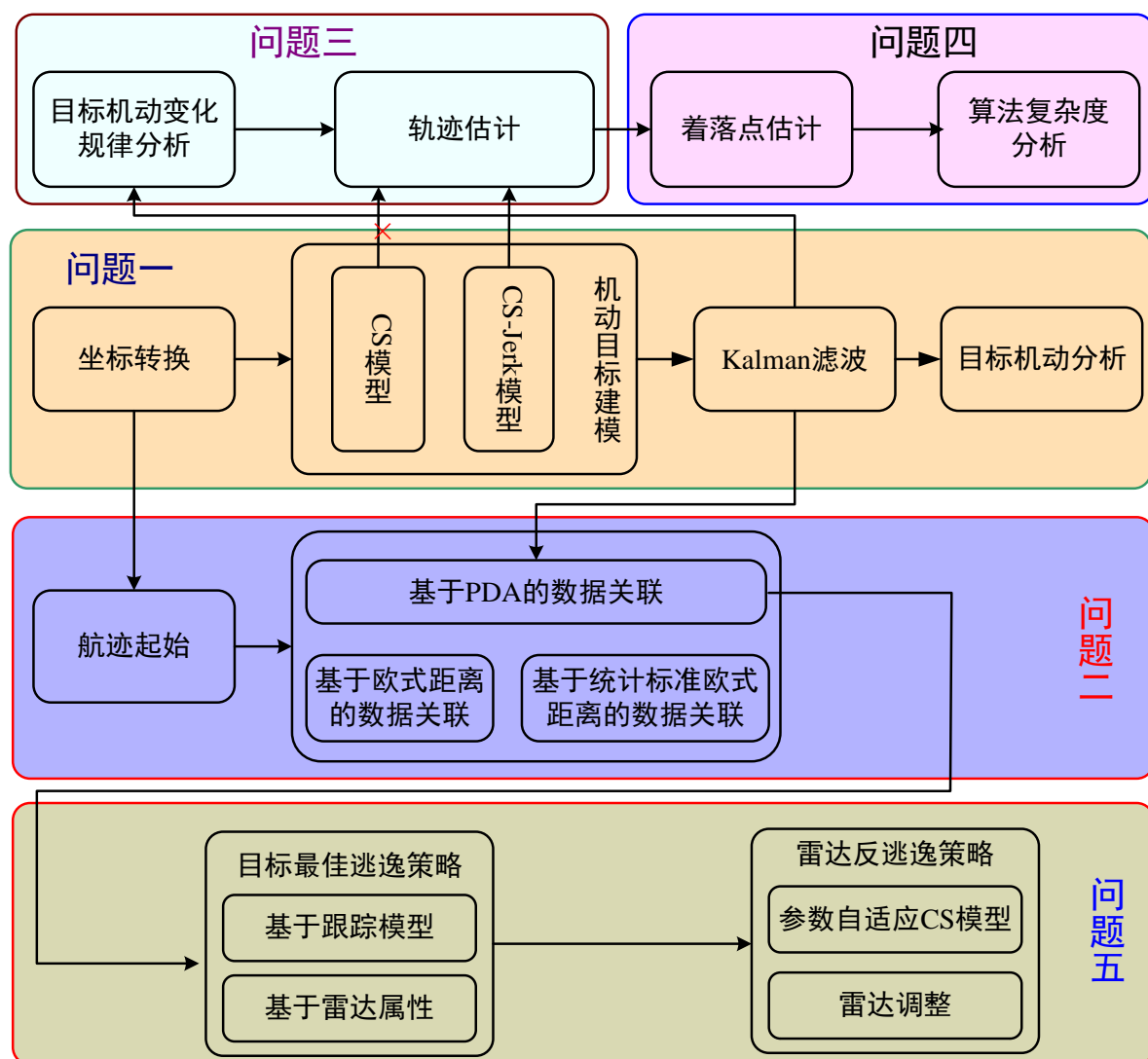


图 4.1 基于卫星无源探测的空间飞行器轨道估计

问题一需要解决的问题是：根据坐标转换关系，推出坐标转换矩阵；在三个观测雷达量测的基础上，建立机动目标的航迹跟踪模型，结合航迹粘联算法和集中式融合算法，利用 kalman 滤波进一步确定该机动目标的航迹。根据估计的加速度结果，分析目标机动发生的时间范围，统计该时间范围内目标的加速度大小和方向。

问题二需要解决的问题是，首先利用基于修正的 Hough 变换的航迹起始策略，实现两个机动目标的航迹起始；然后分别利用欧式距离、基于统计标准欧式距离和 PDA 方法对两条航迹进行关联，对比航迹确定效果，分析各关联结果的成因。

问题三需要解决的问题是：利用雷达的实测数据，分析加速度随时间的变化特征。利用第一问建立的跟踪模型，对其进行目标跟踪，并对跟踪结果进行分析。

问题四需要解决的问题是：通过对该目标的机动特性分析，建立适合强机动目标跟踪的 CS-Jerk 模型，提高对该机动目标的跟踪精度；利用该模型进一步估计该机动目标的着落点坐标，分析算法的复杂度。

问题五需要解决的问题是：在明确目标机动逃逸的定义后，分别从目标的机动跟踪模型与雷达探测的角度分析，制定最佳逃逸策略；在确定相应的最佳逃逸策略后，又分别从机动目标跟踪模型与雷达探测调整两个方面进行反逃逸策略的制定。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一的建模与求解

坐标转换是利用多个传感器（雷达）对单、多目标实现跟踪的基础，该问题的目的便是在坐标转换的基础上，利用三个雷达实现对单一目标的跟踪。在已知雷达的坐标和测量误差的基础上，建立“当前”统计模型。利用 Kalman 滤波算法实现对目标的跟踪，分别估计出三个雷达各自观测阶段的机动目标轨迹。对于量测缺失部分，提出了一种机动目标断裂的航迹粘连算法，以迭代期望最大化为策略对外推预测航迹进行判决，确定优化的预测航迹；对于双雷达观测阶段，提出了轨迹估计的集中式融合算法，确定了混合阶段的机动目标轨迹。

5.1.1 基于地心坐标系的空间配准算法

基于地心坐标系的空间配准算法（Earth-Centered Earth-Fixed Algorithm, ECEFA）就是将不同传感器（雷达）对机动目标的观测数据转换为地心坐标系下的观测值。由于各个雷达所观测的数据都是以自身为相对坐标原点的，因此利用 ECEFA 实现坐标转换是进一步估计机动目标航迹及其相关参数的基础。

建立地心坐标系如图 5.1.1 所示。其中 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 坐标系为地心坐标系。 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 为观测坐标系（雷达坐标系）。

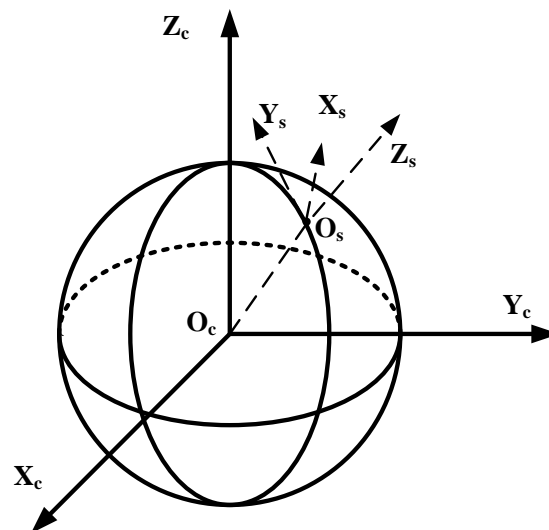


图 5.1.1 地心坐标系和观测坐标系示意图

1、经纬度与大地直角坐标的转换

在地心坐标系下，如图 5.1.1 所示。传感器在椭球形地球上的位置表示为 $(\alpha, \beta,$

R), 其中 α 为地理经度, β 为地理纬度, R 表示传感器相对于参考椭球的高度; ECEF 笛卡尔坐标系的原点位置位于地心, X 轴穿过 Greenwich 子午线, Z 轴与地球旋转轴重合, Y 轴位于赤道面。

若给定第 l 号传感器 (雷达) 的地心坐标为 (α_l, β_l, R_l) , 则其在 ECEF 笛卡尔坐标系下的坐标 (x_l, y_l, z_l) 为

$$\begin{cases} x_l = (C + R_l) \cos \beta_l \cos \alpha_l \\ y_l = (C + R_l) \cos \beta_l \sin \alpha_l \\ z_l = [C(1 - e^2) + R_l] \sin \beta_l \end{cases} \quad (5.1-1)$$

其中, e 表示地球的离心率, 其值为 0.016710220; 关于 C 的描述如下:

$$C \triangleq \frac{E_q}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \beta_l}} \quad (5.1-2)$$

其中, E_q 表示赤道半径, 为 6378.137km (6.378137×10^6 m)。

2、ECEFA

对于在地面上某一传感器 (雷达) 中心点 O_s , 在地心坐标系下的坐标为 (x_l, y_l, z_l) ,

$\overrightarrow{O_c O_s} = (x_l, y_l, z_l)$ 。对于观测坐标系下的三个方向的单位向量为

$$\vec{e}_{Z_s} = \begin{pmatrix} \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{y_l}{r_l} \\ \frac{z_l}{r_l} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{Y_s} = \begin{pmatrix} \frac{-x_l z_l}{r_l \rho_l} \\ \frac{-y_l z_l}{r_l \rho_l} \\ \frac{\rho_l}{r_l} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{X_s} = \vec{e}_{Y_s} \times \vec{e}_{Z_s} = \begin{pmatrix} -\frac{y_l}{\rho_l} \\ \frac{x_l}{\rho_l} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1-3)$$

其中 $r_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}$, $\rho_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$ 。

推导过程如下:

$$\vec{e}_{Z_s} = \frac{\overrightarrow{O_c O_s}}{|\overrightarrow{O_c O_s}|}, \quad \vec{e}_{Z_s} = \frac{(x_0, y_0, z_0)^T}{r_0}$$

点 $(0, 0, z_{Y_s})$ 表示以 $\overrightarrow{O_c O_s}$ 为法向量, 过 $O_s (x_l, y_l, z_l)$ 点的平面与 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 坐标系下的 $\overrightarrow{O_c Z_c}$ 的交点, 平面方程为^[1]

$$x_l (x - x_l) + y_l (y - y_l) + z_l (z - z_l) = 0 \quad (5.1-4)$$

计算得到 $z_{ys} = \frac{r_l^2}{z_l}$ ，由于观测坐标系对于 $\overline{O_s Y_s}$ 始终指向正北，因此，

$$\begin{aligned}\vec{e}_{ys} &= \frac{\left(-x_l, -y_l, \frac{r_l^2}{z_l} - z_l\right)}{\sqrt{(-x_l)^2 + (-y_l)^2 + \left(\frac{r_l^2}{z_l} - z_l\right)^2}} = \frac{(-z_l x_l, -z_l y_l, \rho_l^2)}{\sqrt{(-z_l x_l)^2 + (-z_l y_l)^2 + (\rho_l^2)^2}} \\ &= \frac{(-z_l x_l, -z_l y_l, \rho_l^2)}{r_l \rho_l}\end{aligned}\quad (5.1-5)$$

由上面坐标转换可以得到，对于某一雷达观测的机动目标的坐标 $M(x_s, y_s, z_s)$ ，它在观察坐标系下的向量为 $\overline{O_s M} = (x_s, y_s, z_s)^T$ ，则在基础坐标系下的向量为 $\overline{O_c M}$ ：

$$\begin{aligned}\overline{O_c M} &= \overline{O_c O_s} + \overline{O_s M} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} + (\vec{e}_{xs} \quad \vec{e}_{ys} \quad \vec{e}_{zs}) \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} + r' \mathbf{E} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.1-6)$$

其中 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{-y_l}{\rho_l} & \frac{-x_l z_l}{r_l \rho_l} & \frac{x_l}{r_l} \\ \frac{x_l}{\rho_l} & \frac{-y_l z_l}{r_l \rho_l} & \frac{y_l}{r_l} \\ 0 & \frac{\rho_l}{r_l} & \frac{z_l}{r_l} \end{pmatrix}$ ， r'_l 、 θ_l 、 φ_l 是题目所给出的某一雷达观测到的目标距离、目

标方位和目标俯仰。因此在观测坐标系下的坐标点 (x_s, y_s, z_s) 转换到基础坐标系下的点

(x_c, y_c, z_c) ，转换公式为：

$$\begin{cases} x_l = (C + R_l) \cos \beta_l \cos \alpha_l \\ y_l = (C + R_l) \cos \beta_l \sin \alpha_l \\ z_l = [C(1 - e^2) + R_l] \sin \beta_l \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} + \mathbf{E} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} (C + R_l) \cos \beta_l \cos \alpha_l \\ (C + R_l) \cos \beta_l \sin \alpha_l \\ [C(1 - e^2) + R_l] \sin \beta_l \end{pmatrix} + r' \mathbf{E} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}\quad (5.1-7)$$

其中， $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_l & -\sin \beta_l \cos \alpha_l & \cos \beta_l \cos \alpha_l \\ \cos \alpha_l & -\sin \alpha_l \sin \beta_l & \cos \beta_l \sin \alpha_l \\ 0 & \cos \beta_l & \sin \beta_l \end{pmatrix}$ ， r' 、 θ 、 φ 是题目所给出的第 l

雷达观测到的目标距离、目标方位和目标俯仰； α_l 、 β_l 分别表示为第 l 号雷达的经度和

纬度。 C 为式 (5.1-2) 所定义, E_q 为 6.378137×10^6 m。

3、ECEF 下的雷达观测与误差

由表 5.1 的三个观测雷达坐标和观测误差, 编程计算出三个雷达在地心坐标系下的单一目标观测轨迹如图 5.1.1 所示 (坐标轴单位为米)。结合原始数据, 由图可知, 雷达 2 与雷达 3 在时间和空间上所观测的目标都有重合部分。

表 5.1 Data1.txt 中的三个雷达坐标和测量误差

雷达标号	经度 ($^{\circ}$)	纬度 ($^{\circ}$)	高度(m)	测距误差 $\Delta r'$ (m)	方位角误差 $\Delta \theta'$ ($^{\circ}$)	俯仰角误差 $\Delta \varphi'$ ($^{\circ}$)
1	122.1	40.5	0	50	0.4	0.4
2	122.4	41.5	0	40	0.3	0.3
3	122.7	41.9	0	60	0.5	0.5

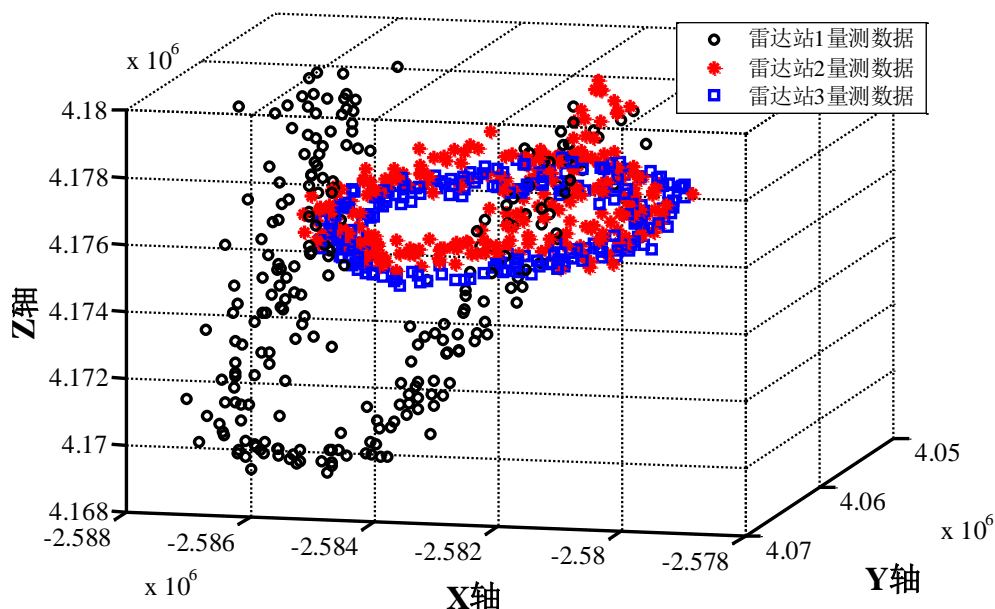


图 5.1.7 ECEF 坐标系下三个雷达所观测的曲线

5.1.2 CS 模型

首先通过雷达对观测数据进行了初步分析, 该过程为三个雷达在个阶段对目标进行了探测, 结合目标运动的统计特性, 建立“当前”统计模型 (CS 模型) [2]。继而利用坐标转换后的观测数据, 采用 kalman 滤波算法对目标进行实时跟踪, 估计出机动目标的航迹, 定义了目标发生机动的检测条件, 分析目标发生的时间范围, 统计出机动目标的加速度大小和方向。

1 CS 模型

研究表明 CS 模型具备了根据上一时刻的加速度估计值来自适应调整过程噪声的能力。CS 模型由于采用非零均值和修正的瑞利分布来表征机动加速度的特性，能更为真实、可靠地反映目标机动范围和强弱等的变化，具有响应快、跟踪精度较高等优点，对于强机动目标跟踪较为适用。“当前”统计模型实质上是一种非零均值噪声的时间相关模型，其机动加速度的“当前”统计概率密度用修正的瑞利分布描述，均值为“当前”加速度的预测值。假设加速度的模型满足如下条件：

$$a(k+1) = e^{-\alpha T} a(k) + (1 - e^{-\alpha T}) \bar{a}(k) + \omega(k) \quad (5.1-8)$$

CS 模型的离散状态方程为：

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{U} \bar{a}(k) + \mathbf{W}(k-1) \quad (5.1-9)$$

其中：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} - \frac{\alpha T - 1 + e^{-\alpha T}}{\alpha^2} \\ T - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 1 - e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \quad (5.1-10)$$

$\mathbf{W}(k)$ 是离散时间白噪声序列，且其协方差矩阵为

$$\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{W}(k) \mathbf{W}^T(k)] = 2\alpha\sigma_a^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (5.1-11)$$

其中：

$$\begin{cases} q_{11} = \frac{1}{2\alpha^5} [1 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T + \frac{2\alpha^3 T^3}{3} - 2\alpha^2 T^2 - 4\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{12} = q_{21} = \frac{1}{2\alpha^4} [e^{-2\alpha T} + 1 - 2\alpha T - 2e^{-\alpha T} + \alpha^2 T^2 + 2\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{13} = q_{31} = \frac{1}{2\alpha^3} [1 - e^{-2\alpha T} - 2\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{22} = \frac{1}{2\alpha^3} [4e^{-\alpha T} - 3 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T] \\ q_{23} = q_{32} = \frac{1}{2\alpha^2} [e^{-2\alpha T} + 1 - 2e^{-\alpha T}] \\ q_{33} = \frac{1}{2\alpha} [-e^{-2\alpha T} + 1] \end{cases} \quad (5.1-12)$$

CS 统计模型关键的一个假设是，前一时刻加速度的估计值与下一时刻加速度的均

值相等，即，并且 CS 模型假设任意时刻的机动加速度服从修正的瑞利分布，由此可得目标机动加速度的方差为

$$\sigma_a^2 = \begin{cases} \frac{4-\pi}{\pi} [a_{\max} - \hat{a}(k)]^2, \hat{a}(k) > 0 \\ \frac{4-\pi}{\pi} [a_{-\max} + \hat{a}(k)]^2, \hat{a}(k) \leq 0 \end{cases} \quad (5.1-13)$$

其中 a_{\max} 与 $a_{-\max}$ 分别为已知的目标加速度正、负极限。

2 kalman 滤波算法

CS 模型求解过程中，kalman 滤波算法起到了重要的作用^[3]。kalman 滤波算法是一种事变状态参数估计的有效方法。

设离散时间系统的动态方程（状态方程）可以表示为：

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{V}(k) \quad (5.1-14)$$

其中 $\mathbf{F}(k)$ 为状态转移矩阵， $\mathbf{X}(k)$ 为状态向量， $\mathbf{G}(k)$ 为输入控制项矩阵， $\mathbf{u}(k)$ 为已知输入和控制信号， $\mathbf{V}(k)$ 为零均值、白色高斯过程噪声序列，其斜方差为 $\mathbf{Q}(k)$ 。

离散时间序列的量测系统为

$$\mathbf{Z}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{X}(k+1) + \mathbf{W}(k+1) \quad (5.1-15)$$

其中 $\mathbf{H}(k+1)$ 为量测矩阵， $\mathbf{W}(k+1)$ 为具有协方差 $\mathbf{R}(k+1)$ 的零均值、白色高斯过程噪声序列。

动态条件下，最小均方误差估计可以定义为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{X}}(k|k) = \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)|\mathbf{Z}^k] \\ \mathbf{Z}^k = \{z(j), j=1, 2, \dots, k\} \end{cases} \quad (5.1-16)$$

状态误差协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{E} \left\{ [\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k|k)][\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k|k)]' | \mathbf{Z}^k \right\} \\ &= \mathbf{E} \left[\tilde{\mathbf{X}}(k+1)\tilde{\mathbf{X}}'(k+1) | \mathbf{Z}^k \right] \end{aligned} \quad (5.1-17)$$

以 \mathbf{Z}^k 为条件的期望算子应用到式(5.1-15)，可以得到状态的一步预测方程：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &\rightarrow \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{E} \left[\mathbf{X}(k+1) | \mathbf{Z}^k \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{V}(k) | \mathbf{Z}^k \right] \\ &= \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{X}}(k|k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (5.1-18)$$

预测值的误差为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) - \mathbf{X}(k+1) &= \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) - \mathbf{X}(k+1) \\ &= \mathbf{F}(k)\tilde{\mathbf{X}}(k|k) + \mathbf{V}(k) \end{aligned} \quad (5.1-19)$$

一步预测协方差：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xx} &\rightarrow \mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{E} \left[\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) \tilde{\mathbf{X}}'(k+1|k) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\left(\mathbf{F}(k) \tilde{\mathbf{X}}(k|k) + \mathbf{V}(k) \right) \left(\tilde{\mathbf{X}}(k|k) \mathbf{F}'(k) + \mathbf{V}'(k) \right) \right] \\
&= \mathbf{F}(k) \mathbf{P}(k|k) \mathbf{F}'(k) + \mathbf{Q}(k)
\end{aligned} \tag{5.1-20}$$

通过对式(5.1-15)取在 $k+1$ 时刻、以 \mathbf{Z}^k 为条件得期望值，可以得到预测：

$$\begin{aligned}
\bar{z} &\rightarrow \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) = \mathbf{E} \left[\mathbf{Z}(k+1) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\mathbf{H}(k+1) \mathbf{X}(k+1) + \mathbf{W}(k+1) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{H}(k+1) \hat{\mathbf{X}}(k+1|k)
\end{aligned} \tag{5.1-21}$$

继而求得预测值与量测值之间的差值

$$\begin{aligned}
\hat{z}(k+1|k) &= \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \\
&= \mathbf{H}(k+1) \mathbf{X}(k+1|k) + \mathbf{W}(k+1)
\end{aligned} \tag{5.1-22}$$

量测的预测协方差：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{zz} &\rightarrow \mathbf{S}(k+1) = \mathbf{E} \left[\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) \tilde{\mathbf{Z}}'(k+1|k) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\left(\mathbf{H}(k+1) \tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{W}(k+1) \right) \left(\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) \mathbf{H}'(k+1) + \mathbf{W}'(k+1) \right) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{H}(k+1) \mathbf{F}(k+1|k) \mathbf{H}'(k+1) + \mathbf{R}(k+1)
\end{aligned} \tag{5.1-23}$$

$\mathbf{S}(k+1)$ 是新息协方差，表示衡量新息的不确定性，其协方差越小，说明测量值越精准。

状态和量测之间的协方差为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xz} &\rightarrow \mathbf{E} \left[\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) \tilde{\mathbf{Z}}'(k+1|k) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\left(\tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) \left(\mathbf{H}(k+1) \tilde{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{W}(k+1) \right)' \right) | \mathbf{Z}^k \right] \\
&= \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}'(k+1)
\end{aligned} \tag{5.1-24}$$

进而，可求得 $k+1$ 时刻的状态估计（状态更新方程）为

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) \mathbf{v}(k+1) \tag{5.1-25}$$

其中： $\mathbf{v}(k+1)$ 为新息或量测残差^[5]：

$$\mathbf{v}(k+1) = \tilde{\mathbf{z}}(k+1|k) = \mathbf{z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \tag{5.1-26}$$

协方差更新方程为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k+1|k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}'(k+1) \mathbf{S}^{-1}(k+1) \mathbf{H}(k+1) \mathbf{P}(k+1|k) \\
&= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{K}'(k+1)
\end{aligned} \tag{5.1-27}$$

在 CS 模型的基础上初始化，利用 kalman 滤波算法可以实现机动目标的有效跟踪。这里结合实际的问题采用九维状态向量表示为 $\mathbf{X}(k) = [x, x', x'', y, y', y'', z, z', z'']$ ，因此需要利用前面四点量测计算得到对应时刻的位置、速度和加速度。

3 双雷达观测阶段轨迹的集中式融合算法

由于在 (37119.4s~37219.4 s) 时间范围内，对于雷达 1、雷达 2 在同一时刻得到的

量测值，进行并行滤波（量测扩维）结构的集中式融合算法，令

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = [(\mathbf{z}_{k+1}^1)^T, (\mathbf{z}_{k+1}^2)^T, \dots, (\mathbf{z}_{k+1}^N)^T]^T \\ \mathbf{H}_{k+1} = [(\mathbf{H}_{k+1}^1)^T, (\mathbf{H}_{k+1}^2)^T, \dots, (\mathbf{H}_{k+1}^N)^T]^T \\ \mathbf{v}_{k+1} = [(\mathbf{v}_{k+1}^1)^T, (\mathbf{v}_{k+1}^2)^T, \dots, (\mathbf{v}_{k+1}^N)^T]^T \end{cases} \quad (5.2-28)$$

则融合规则相应于接收到的所有传感器两侧的伪（广义）量测方程可以表示为^[6]

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (5.2-29)$$

由上式的已知条件可知

$$\begin{cases} E[\mathbf{v}_{k+1}] = \mathbf{0}, \mathbf{z}_{k+1} = [(\mathbf{z}_{k+1}^1)^T, (\mathbf{z}_{k+1}^2)^T, \dots, (\mathbf{z}_{k+1}^N)^T]^T \\ \mathbf{R}_{k+1} = \text{cov}[\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}]^T = \text{diag}[\mathbf{R}_{k+1}^1, \mathbf{R}_{k+1}^2, \dots, \mathbf{R}_{k+1}^N] \\ \text{cov}[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_k] = \mathbf{0}, \text{cov}[\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_k] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.2-30)$$

以(5.2-29)式为目标运动的状态方程，以(5.2-30)式为融合虚拟的传感器的量测方程，假设已知融合中心在 k 时刻对于目标运动状态的融合估计为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ，相应的误差协方差阵为 $\mathbf{P}_{k|k}$ ，则融合中心。

4 机动目标断裂的航迹粘连算法

从 Data1.txt 中的量测数据可知，雷达 1 的量测更新到 36874.4s，雷达 2 的量测从 36919.4s 才开始更新，两个传感器的量测之间存在着 45s 的量测航迹缺失问题。为了解决该问题，提出了量测确实下的三段三维航迹粘连算法。具体的算法过程如图 5.2 所示。

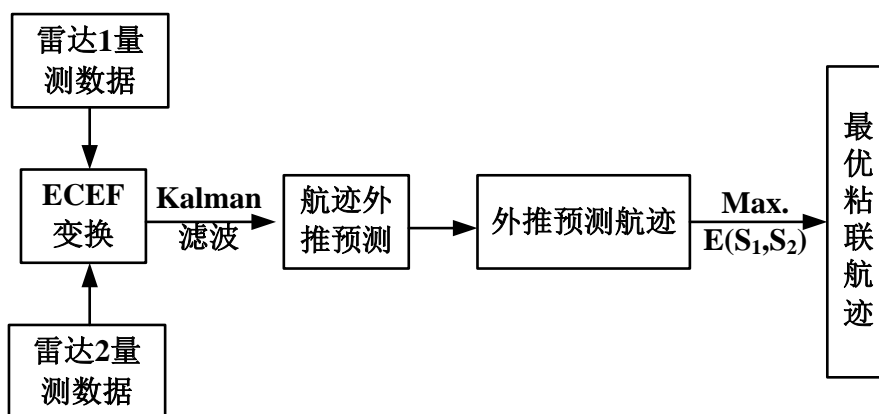


图 5.1.3 机动目标断裂的航迹粘联算法

首先，将雷达 1 和雷达 2 的相邻观测数据转换到地心坐标系下，取雷达 1 后 T 时间段 ECEF 下的测量结果，利用 CS 模型和 kalman 滤波算法推测出预测航迹 1；然后，利用雷达 2 后 T 时间段 ECEF 下测量的航迹外推预测，得出外推预测航迹 2；最后，以迭代期望最大化为策略对初始航迹和外推预测航迹进行判决，最终得到最优的航迹粘联。

设雷达 1 后 T 段或雷达 2 前 T 段的 ECEF 坐标为

$$\begin{bmatrix} S_l(1) \\ S_l(2) \\ \vdots \\ S_l(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l(1) & y_l(1) & z_l(1) \\ x_l(2) & y_l(2) & z_l(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_l(T) & y_l(T) & z_l(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (5.1-31)$$

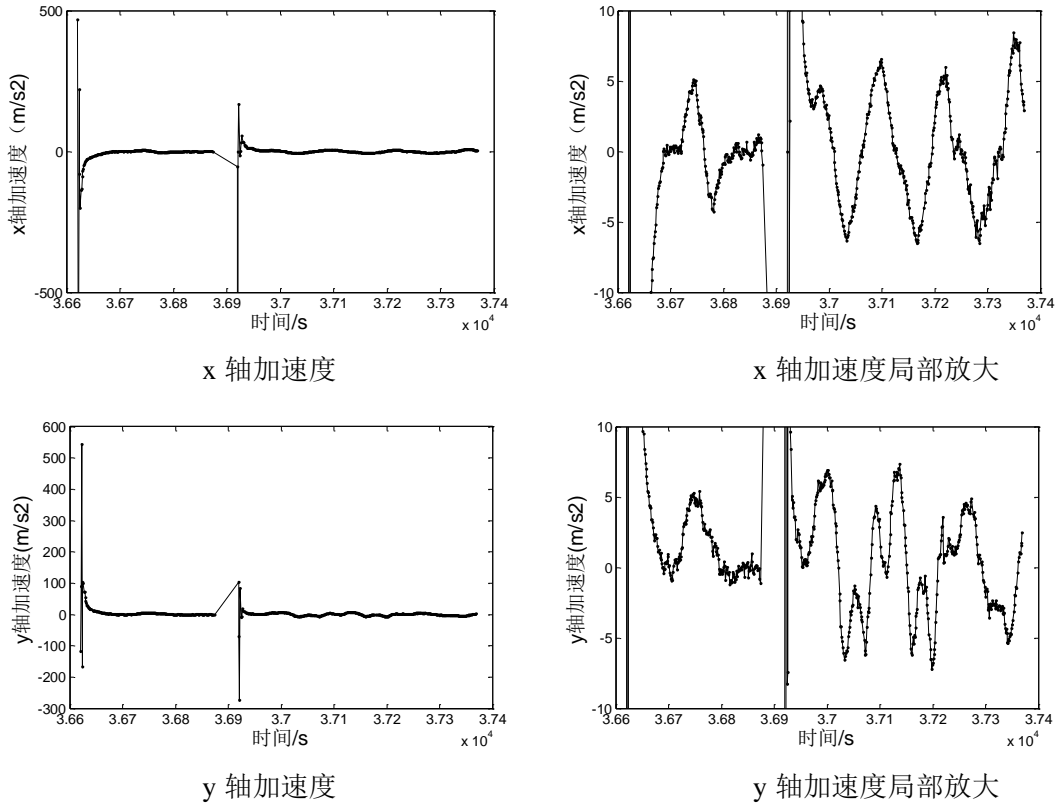
利用 CS 模型，结合 kalman 滤波算法可以得到雷达 1 最后时刻估计的速度、加速度。利用四点起始的 9 维起始方法，得到雷达 2 第一秒估计的速度、加速度。两条推测的航迹分别为

$$\begin{cases} F_1 = f_1(1), f_1(2), \dots, f_1(T) \\ F_2 = f_2(1), f_2(2), \dots, f_2(T) \end{cases} \quad (5.1-32)$$

以迭代期望最大化为策略对初始航迹和外推预测航迹进行判决，最终得到最优的航迹粘联。

5.1.3 计算结果及分析

利用 Kalman 滤波，结合量测和粘联的相关数据，求解 CS 模型，求解出的机动目标加速度如图 5.1.4 所示。利用模型 CS 模型估计出的航迹如图 5.1.5，由图可知，该算法能够实现在线跟踪的同时，能够有效的估计出机动目标的航迹。



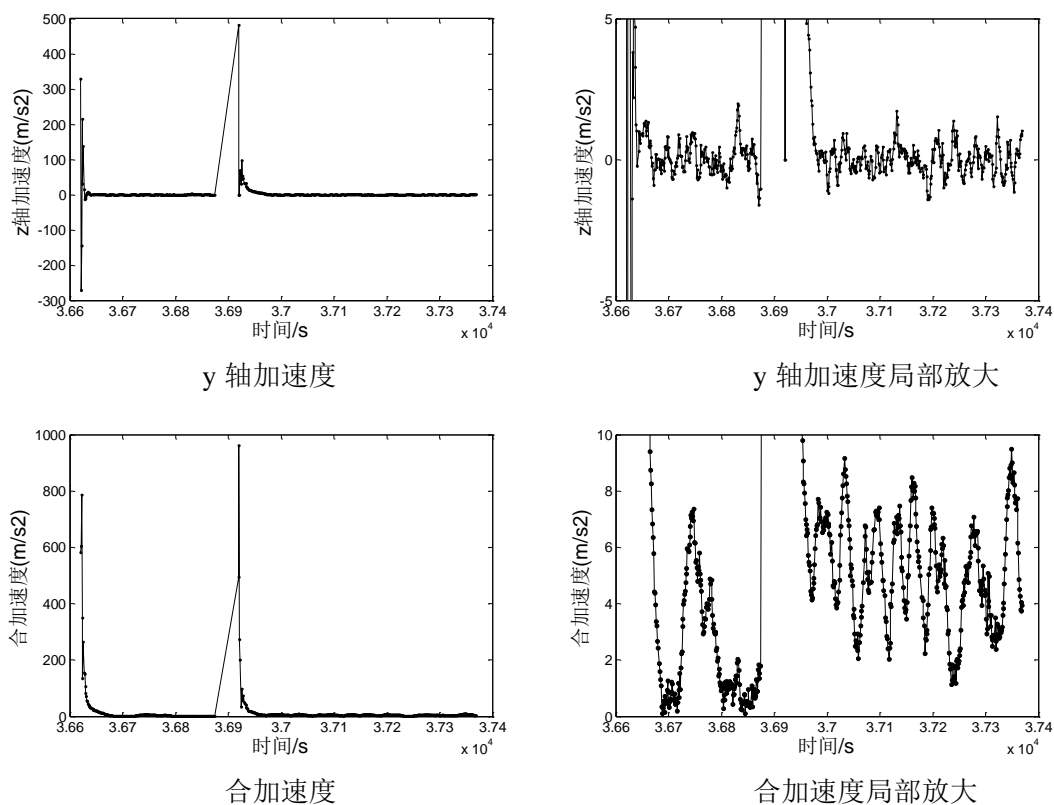


图 5.1.4 估计的加速度

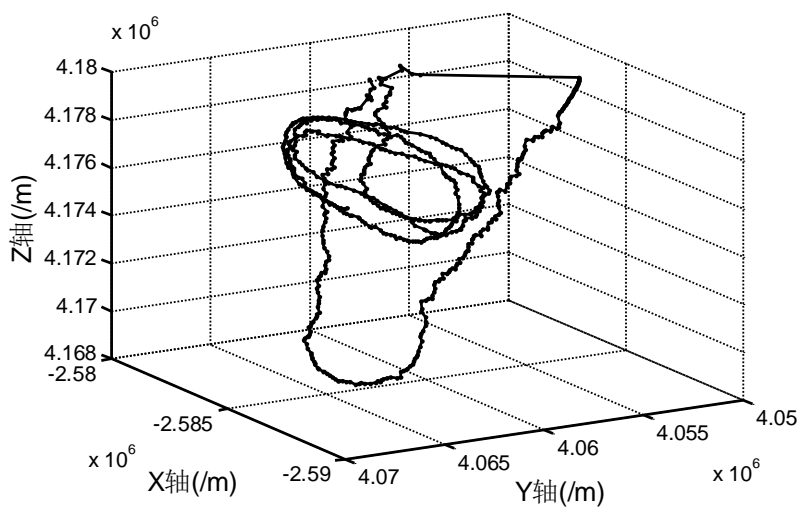


图 5.1.5 估计的机动目标航迹

以加速度的大小和方向作为检测目标是否产生机动的依据,统计目标机动的发生时间如图 5.1.6 所示,具体结果见表 5.2. 由图可知,发生机动的时刻主要集中在雷达 2 和雷达 3 的观测时间段。这一结论与图 5.1.5 的目标运动轨迹相一致。

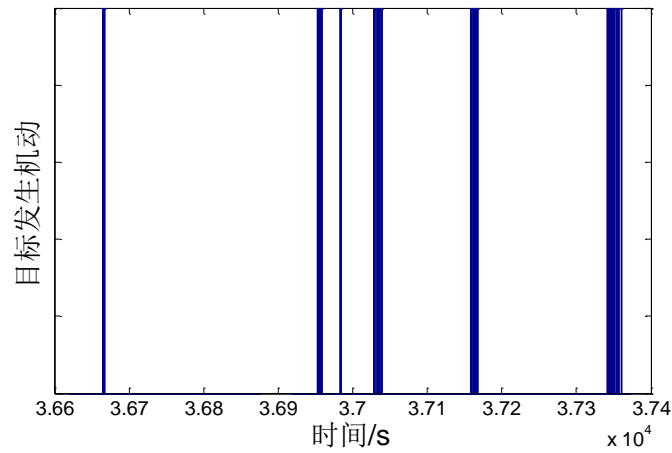


图 5.1.6 目标机动的发生时间统计

表 5.2 目标机动的发生时刻表

序号	机动起始时刻(s)	机动结束时刻(s)	机动持续时间(s)
1	3.6665×10^4	3.6667×10^4	3
2	3.6953×10^4	3.6958×10^4	6
3	3.6983×10^4	3.6984×10^4	2
4	3.7028×10^4	3.7029×10^4	2
5	3.7031×10^4	3.7031×10^4	1
6	3.7033×10^4	3.7036×10^4	4
7	3.7038×10^4	3.7039×10^4	2
8	3.7158×10^4	3.7159×10^4	2
9	3.7161×10^4	3.7167×10^4	
10	3.7341×10^4	3.7351×10^4	11
11	3.7353×10^4	3.7357×10^4	5
12	3.7360×10^4	3.7360×10^4	1

5.2 问题二的建模与求解

5.2.1 基于修正的 Hough 变换的航迹起始策略

在多目标航迹关联中，航迹起始是航迹处理的首要问题，常见的航迹起始算法有直观法、逻辑法和 Hough 变换法等^[8-14]。由于 Hough 变换对局部目标信息丢失不敏感，不需要目标先验信息并且适合多目标跟踪检测的优点，因此选用 Hough 变换进行航迹起始。Hough 变换法是将测量空间的一点，变换到参量空间中的一条曲线或曲面，而具有同一参量特征的点会在变换后参量空间中相交，通过判断交点处的积累程度来完成特征曲线的检测。Hough 变换法通过式(5.2-1)将笛卡儿坐标系中的点 (x, y) 变换为参量空间的坐标 (ρ, θ) ：

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (5.2-1)$$

假定雷达在第 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ 次扫描时刻分别接收到三组数据 \mathbf{r}_n 、 \mathbf{r}_{n+1} 、 \mathbf{r}_{n+2} ，通过式 (5.2-1) 可以将这三组数据转换到量测空间的三组曲线 ρ 、 $\rho+1$ 和 $\rho+2$ 。据此可得差分函数如下：

$$\Delta\rho_n = \rho_n - \rho_{n+1} \quad (5.2-2)$$

将零交汇点 $\Delta\rho_n$ 记为 $\Delta\rho_n(0)$ ，由 $\Delta\rho_n(0)$ 可知过零交点 $\theta_{\Delta\rho_n(0)}$ 和 $\theta_{\Delta\rho_{n+1}(0)}$ 必须非常接近，即：

$$\left| \theta_{\Delta\rho_n(0)} - \theta_{\Delta\rho_{n+1}(0)} \right| < \sigma_0 \quad (5.2-3)$$

式中 $\Delta\theta < \sigma_0 < m\Delta\theta$ 为允许误差， m 为任一正整数。此外通过零交点 $\theta_{\Delta\rho_n(0)}$ 和 $\theta_{\Delta\rho_{n+1}(0)}$ 处的斜率符号必须相同。除了满足上述要求外，还应判断第 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ 次扫描时刻形成的航迹与第 $n+2$ 、 $n+3$ 、 $n+4$ 次扫描时刻形成的航迹是否共线。定义 \mathbf{r}_{n+1} 和 \mathbf{r}_{n+2} 之间的距离为 $d_{n+1,n+2}$ ，定义向量 $(\mathbf{r}_{n+1}-\mathbf{r}_{n+2})$ 和 $(\mathbf{r}_{n+2}-\mathbf{r}_{n+3})$ 之间的夹角为 α_{n+2} 。由于目标的加速度收到目标最大加速度值的约束，则有：

$$\left| d_{n+1,n+2} \right| \leq c \times d_{n+2,n+3} \quad (5.2-4)$$

式中， c 由目标的最大加速度值决定。航迹之间的夹角 α_{n+2} 必须满足：

$$\beta_1 \leq \alpha_{n+2} \leq \beta_2 \quad (5.2-5)$$

选择的 β_1 和 β_2 值应防止起始 V 字形航迹。如果对于假定的航迹也满足式 (5.2-4) 和 (5.2-5)，那么 \mathbf{r}_{n+1} 、 \mathbf{r}_{n+2} 、 \mathbf{r}_{n+1} 、 \mathbf{r}_{n+2} 就可以形成一条航迹。

利用上述航迹起始策略，对附件 data2.txt 文件中的前 10 组量测数据进行处理，可以发现这些数据分别属于两条不同的航迹，具体处理结果如表 5.2-1 所示。

表 5.2-1 航迹起始结果

量测数据(距离/km, 方位角/°, 俯仰角/°)	航迹 1	航迹 2
(84626.83, 89.99, 1.74)	●	
(85016.58, 89.50, 3.07)		●
(84757.39, 90.34, 1.50)	●	
(84876.82, 89.28, 2.98)		●
(84495.60, 88.93, 2.13)		●
(84588.94, 90.56, 1.47)	●	
(84678.27, 89.03, 2.35)		●
(84653.03, 91.09, 2.07)	●	
(84608.30, 89.16, 2.40)		●
(84487.91, 90.83, 2.21)	●	
注：●表示此组量测数据属于该条航迹		

5.2.2 数据关联

1 基于欧式距离的数据关联

由上述分析可知，data2.txt 量测数据中包含有两条航迹，因此数据关联问题就是制

定合理的区分标准使得每一点的量测数据值尽可能准确地归属于某一条航迹。欧式距离(Euclidean Metric)是一个通常采用的距离定义，它指在 m 维空间中两个点之间的真实距离，或者向量的自然长度(即该点到原点的距离)。在二维和三维空间中的欧氏距离就是两点之间的实际距离^[13-21]。欧式距离(Euclidean Metric)具有简单易于实现等优点，常被应用于区别较为明显的数据聚类分析中。

将 data2.txt 中的数据转换成地心坐标系下的数据组，令 X 表示每一个数据的坐标，即 $X = \{x, y, z\}$ ， x 、 y 、 z 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴的坐标。假设两条航迹的观测数据集分别为 $S_1 = \{X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,n}\}$ 和 $S_2 = \{X_{2,1}, X_{2,2}, \dots, X_{2,m}\}$ ， $X_{i,j}$ 表示集合 S_i 的第 j 个元素， $X_{1,n}$ 和 $X_{2,m}$ 分别表示航迹 1 和航迹 2 中的最新更新元素。对于新到的观测数据值 $X_k(x_k, y_k, z_k)$ ，首先分别计算其与 $X_{1,n}$ 和 $X_{2,m}$ 的欧式距离，如式(5.2-6)、(5.2-7)：

$$d_{1,k} = \sqrt{(x_k - x_{1,n})^2 + (y_k - y_{1,n})^2 + (z_k - z_{1,n})^2} \quad (5.2-6)$$

$$d_{2,k} = \sqrt{(x_k - x_{2,m})^2 + (y_k - y_{2,m})^2 + (z_k - z_{2,m})^2} \quad (5.2-7)$$

若 $d_{1,k} < d_{2,k}$ ，说明 X_k 与 $X_{1,n}$ 的欧式距离小于 X_k 与 $X_{2,m}$ 的欧式距离，即 X_k 在空间上与 $X_{1,n}$ 距离较近，因此 X_k 将归于航迹 1，同时更新 $X_{1,n} = X_k$ ；若 $d_{1,k} > d_{2,k}$ ，则将 X_k 将归于航迹 2，同时更新 $X_{2,m} = X_k$ ；若 $d_{1,k} = d_{2,k}$ ，此时无法区分 X_k 应属于哪条航迹，因此将同时归属于 2 条航迹，同时更新 $X_{1,n} = X_k$ ， $X_{2,m} = X_k$ ，并在下一时刻以 $(X_{1,n} + X_{1,n-1})/2$ 和 $(X_{2,m} + X_{2,m-1})/2$ 作为比较值。按照上述方法对所有观测数据进行处理，可以得到属于不同航迹的两组数据，将这两组数据使用 Matlab 分别绘图，结果如图 5.2.1 所示。

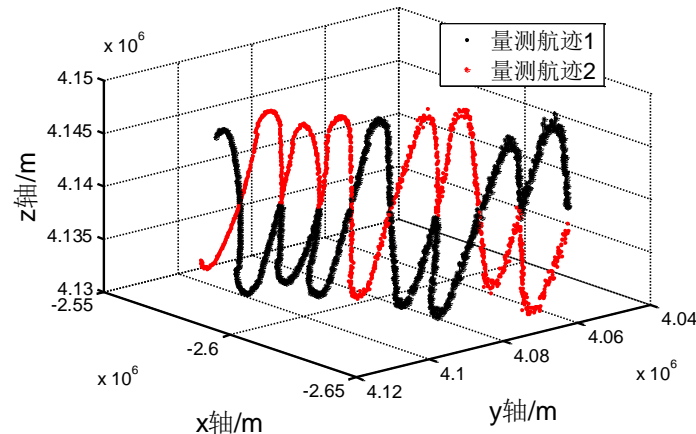


图 5.2.1 基于欧式距离的数据关联结果

2 基于统计标准欧式距离的数据关联

欧氏距离将所有元素的不同属性之间的差别等同看待，其区分精度和准确度常常不能满足实际应用要求^[18-22]。标准化欧氏距离(Normalized Euclidean Distance)是针对简单

欧氏距离的缺点而作的一种改进方案。基于标准欧式距离的数据关联的基本思路是：分别计算航迹集合 S_i 中相邻元素之间的欧式距离，并计算这些欧式距离的期望和方差，作为下一时刻待判决量测数据 X_k 的判别依据。

令当前时刻航迹 1 的观测数据集合 S_1 所有相邻元素之间欧式距离的期望值为 E_1 ，标准差为 σ_1 。相应地， E_2 与 σ_2 分别表示当前时刻航迹 1 的观测数据集合 S_2 相邻元素之间欧式距离的期望和标准差，则 E_1 、 σ_1 、 E_2 、 σ_2 分别可以计算如下：

$$E_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_{1,j+1} - x_{1,j})^2 + (y_{1,j+1} - y_{1,j})^2 + (z_{1,j+1} - z_{1,j})^2} \quad (5.2-8)$$

$$E_2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \sqrt{(x_{2,j+1} - x_{2,j})^2 + (y_{2,j+1} - y_{2,j})^2 + (z_{2,j+1} - z_{2,j})^2} \quad (5.2-9)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{(x_{1,j+1} - x_{1,j})^2 + (y_{1,j+1} - y_{1,j})^2 + (z_{1,j+1} - z_{1,j})^2} - E_1 \right)^2} \quad (5.2-10)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\sqrt{(x_{2,j+1} - x_{2,j})^2 + (y_{2,j+1} - y_{2,j})^2 + (z_{2,j+1} - z_{2,j})^2} - E_2 \right)^2} \quad (5.2-11)$$

对于待判决量测点 $X_k(x_k, y_k, z_k)$ ，首先利用式(5.2-6)、(5.2-7)计算出 X_k 与航迹集合 S_i 最新更新元素的欧式距离 $d_{i,k}$ ， $i=1, 2$ 。这里不再仅仅 $d_{i,k}$ 作为判别依据，而是以 X_k 与集合 S_i 的标准化后的 $d_{i,k}^*$ 距离来判断 X_k 应属于何条航迹。由标准化欧式距离的原理可知：

标准化后的值=(标准化前的值-分量的均值)/分量的标准差

因此标准化后的 $d_{1,k}^*$ 和 $d_{2,k}^*$ 分别可以计算如下：

$$d_{1,k}^* = \frac{d_{1,k} - E_1}{\sigma_1} \quad (5.2-12)$$

$$d_{2,k}^* = \frac{d_{2,k} - E_2}{\sigma_2} \quad (5.2-13)$$

为了更好地体现 X_k 与某条航迹的关联性，同时为了降低当 $d_{k,1}^*$ 与 $d_{k,2}^*$ 相差较小时的误判概率，选取当前时刻 X_k 与 S_i 的标准距离差与上一次计算出的标准距离的差值作为 X_k 的判决依据。定义 X_k 与 S_i 的标准欧式统计距离分别为 $D_{k,1}$ 、 $D_{k,2}$ ，则：

$$D_{1,k} = d_{1,k}^* - d_{1,k-1}^* \quad (5.2-14)$$

$$D_{2,k} = d_{2,k}^* - d_{2,k-1}^* \quad (5.2-15)$$

若 $D_{1,k} < D_{2,k}$ ，将 X_k 归于航迹 1，同时更新 $X_{1,n}=X_k$ ；若 $D_{1,k} > D_{2,k}$ ，则将 X_k 归于航迹 2，同时更新 $X_{2,m}=X_k$ ；若 $D_{1,k} = D_{2,k}$ ，此时无法区分 X_k 应属于哪条航迹，因此将同时归属于 2 条航迹，同时更新 $X_{1,n}=X_k$ ， $X_{2,m}=X_k$ ，并在下一时刻以 $(X_{1,n} + X_{1,n-1})/2$ 和 $(X_{2,m} + X_{2,m-1})/2$ 作为比较值。

根据上述模型，利用基于标准欧式距离的数据关联算法对 data2.txt 数据进行处理，需要注意的是此时模型所处理的数据是将雷达坐标系中的观测数据转换成以地心为坐

标的地心坐标系中的数据，并将航迹 1 和航迹 2 通过 Matlab 绘图如下：

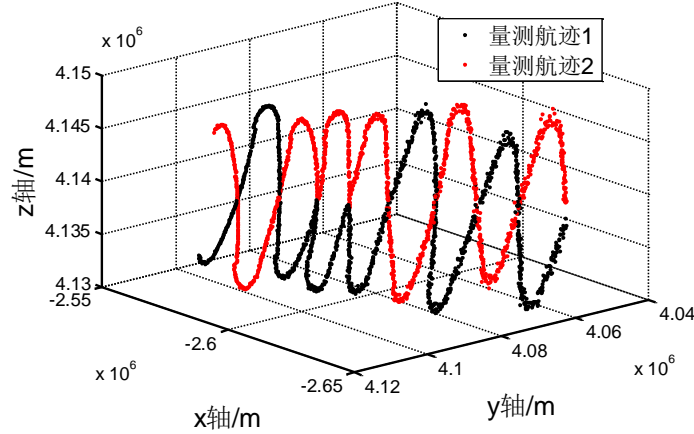


图 5.2.2 基于统计标准欧式距离的数据关联结果

3 基于 PDA 的数据关联

概率数据关联 (probability data association, PDA) 算法的工作原理是：在监测区域，只有一个跟踪目标存在^[21-25]。在杂波环境下，由于随机因素的影响，在任一时刻，该目标的有效回波往往不止一个。PDA 理论认为所有接收到的回波都有可能源于目标，只是每个有效回波以不同的概率从属于目标。此时，将所有候选回波都作为目标真实量测值进行考虑，并根据不同的相关情况，计算各自回波来自目标的概率，然后对跟踪门内不同的回波进行概率加权，作为目标的等效回波，从而对目标状态进行更新。

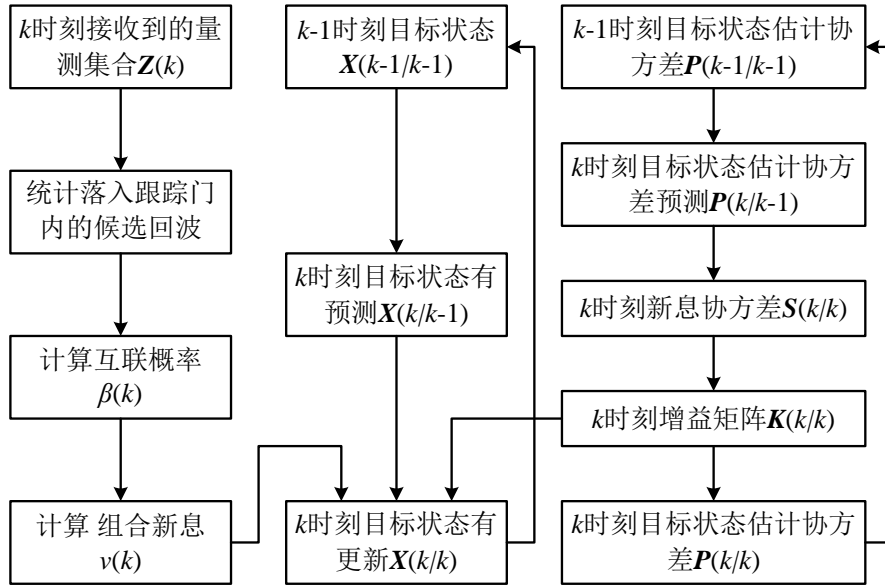


图 5.2.3 PDA 算法流图

假设 $Z(k)$ 表示 k 时刻落入某个目标相关波门内的候选回波集合， Z^k 表示直到 k 时刻的确认量测的累计集合，即：

$$Z^k = \{Z(j)\}_{j=1}^k \quad (5.2-16)$$

其中 $Z(k) = \{Z_i(k)\}_{i=1}^{m_k}$ ， m_k 是相关波门内的候选回波数。

定义事件 $\theta_i(k) \triangleq \{Z_i(k) \text{ 是源于目标的量测}\}$ ， $\theta_0(k) \triangleq \{\text{在 } k \text{ 时刻没有源于目标的量}\}$

测}。以确认量测的累计集合 Z^k 为条件，第 i 个量测 $Z_i(k)$ 源于目标的条件概率为：

$$\beta_i(k) \triangleq P\{\theta_i(k) | Z^k\} \quad (5.2-17)$$

由于这些事件是互斥的并且是穷举的，所以 $\sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) = 1$ ，则 k 时刻目标状态的条件均值可以写为：

$$\mathbf{X}(k | k) = \sum_{i=0}^{m_k} E[\mathbf{X}(k) | Z^k] P\{\theta_i(k) | Z^k\} = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \mathbf{X}_i(k | k) \quad (5.2-18)$$

其中 $\mathbf{X}_i(k | k)$ 是以 $\theta_i(k)$ 为条件的目标状态更新估计，即：

$$\mathbf{X}_i(k | k) = \mathbf{X}(k | k-1) + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}_i(k) \quad (5.2-19)$$

式中 $\mathbf{v}_i(k)$ 为该量测值对应的新息。如果一个量测是源于目标的正确量测，即 $i=0$ ，则无法进行状态更新，此时的状态更新值要用预测值来近似表达，即：

$$\mathbf{X}_0(k | k) = \mathbf{X}(k | k-1) \quad (5.2-20)$$

将式(5.2-20)和式(5.2-19)代入式(5.2-18)中，可得目标状态更新方程的表达式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k | k) &= \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \mathbf{X}_i(k | k) = \mathbf{X}(k | k-1) + \mathbf{K}(k) \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \mathbf{v}_i(k) \\ &= \mathbf{X}(k | k-1) + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (5.2-21)$$

其中 $\mathbf{v}(k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \mathbf{v}_i(k)$ 称为组合新息。与更新状态估计对应的误差协方差为：

$$\mathbf{P}(k | k) = \mathbf{P}(k | k-1) \beta_0(k) + [1 - \beta_0(k)] \mathbf{P}^c(k | k) + \mathbf{P}(k) \quad (5.2-22)$$

其中：

$$\mathbf{P}^c(k | k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{P}(k | k-1) \quad (5.2-23)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{K}(k) \left[\sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \mathbf{v}_i(k) \mathbf{v}_i'(k) - \mathbf{v}(k) \mathbf{v}'(k) \right] \mathbf{K}'(k) \quad (5.2-24)$$

利用上述数据关联策略，重新对 data2.txt 数据进行关联分析，结果如图 5.2.4 所示。

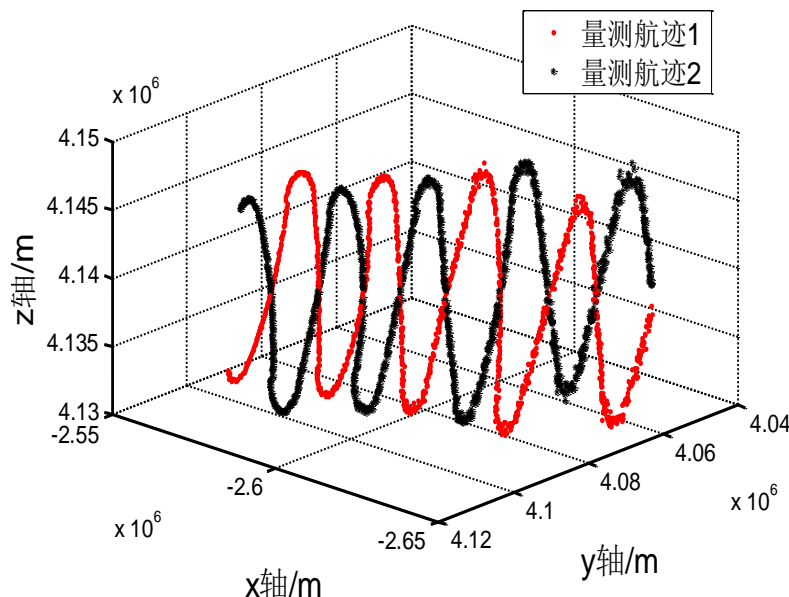


图 5.2.4 基于概率数据关联的数据关联

通过对比图 5.2.1、5.2.2 和 5.2.4 的数据关联仿真结果可以发现，基于概率数据关联的数据关联模型得到的仿真结果更加符合对目标运动规律的直观认识，基于统计标准欧式距离的数据关联模型效果次之，基于欧式距离的数据关联效果最差。这是由于基于概率数据关联的数据关联模型不仅考虑了量测值在空间距离是渐行的差异，还综合考虑了目标运动速度和加速度的变化规律以及前一时刻目标运动对后一时刻的影响，更能反映目标的真实运动规律；而基于统计标准欧式距离的数据关联模型效果只是从空间欧式距离变化角度出发，虽然考虑了目标空间距离之间的相互关系，但忽略了目标自身运动状态的影响；而基于欧式距离的数据关联模型只考虑了空间两点欧式距离的影响，数据关联结果与目标实际运动轨迹的差别理论上应该最大。

4 雷达一段时间内只有一个回波点迹的应对策略

若 $k-1$ 时刻的量测数据已知， k 时刻的量测数据未知，首先对 k 时刻的量测数据进行关联，在确定量测属于某一条航迹后，另一条使用前一时刻的数据进行预测，预测结果作为当前时刻的状态滤波值，即：

$$\hat{X}(k+1|k) = F(k) \cdot \hat{X}(k|k), \quad X(k+1|k+1) = \hat{X}(k+1|k)。$$

5.3 问题三的建模与求解

问题三的基本思路是：首先利用坐标转换模型将 Data3.txt 所提供的空间目标转换至地心坐标下，根据实际的观测轨迹，利用统计分析模型研究空间轨迹的变化规律。进一步利用第一问中的 CS 模型对 Data3.txt 所提供的空间目标进行跟踪，根据跟踪结果，进一步说明 Data3.txt 所提供的空间目标的特征和 CS 模型的应用条件。

5.3.1 空间机动目标轨迹变化规律分析

首先利用 Data3.txt 提供的雷达观测数据，将其利用公式(5.3-1)转换为该雷达直角坐标下的观测数据。

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = r' \mathbf{E} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5.3-1)$$

得到了观测轨道如图 5.3-1 所示。也可以利用公式(5.1-7)将测量数据转换到 ECEF 坐标系，如图 5.3.2 所示。由图可知，该轨迹经历了上升和抛物向下的阶段。在雷达直角坐标系下通过量测数据，根据速度、加速度的定义，求解出目标轨迹的加速度随时间变化的曲线如图 5.3.3 所示。

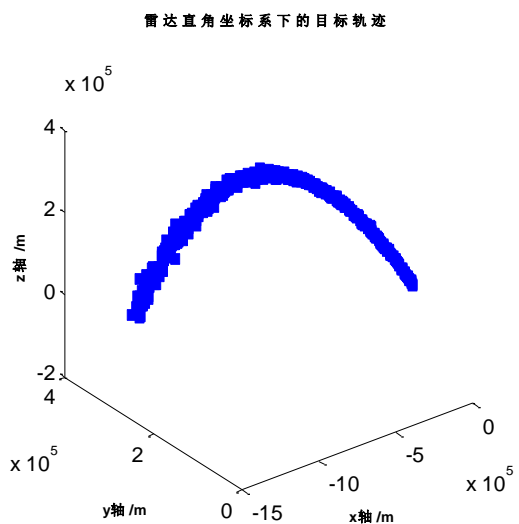


图 5.3.1 雷达坐标系下的目标轨迹

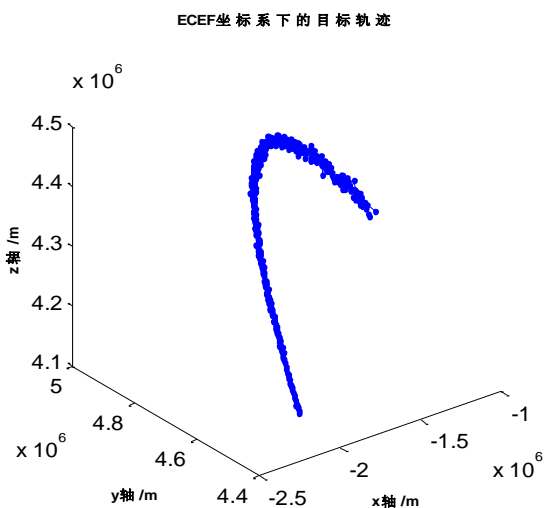
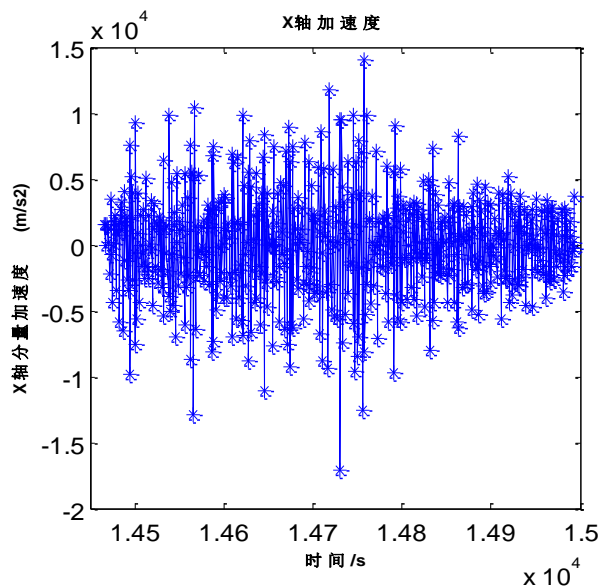
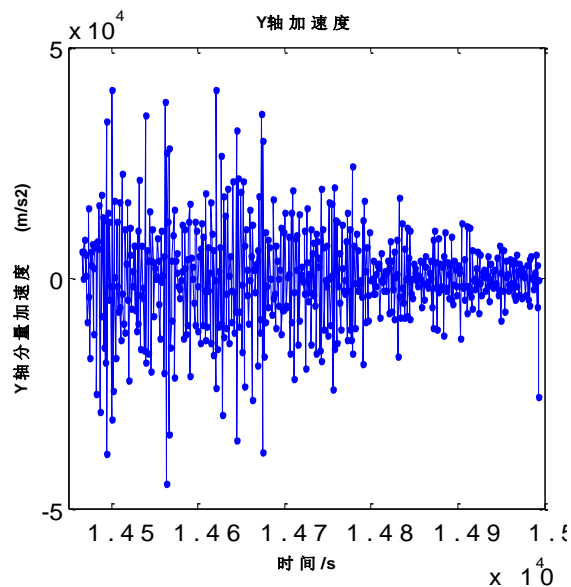


图 5.3.2 ECEF 坐标系下的



(a)



(b)

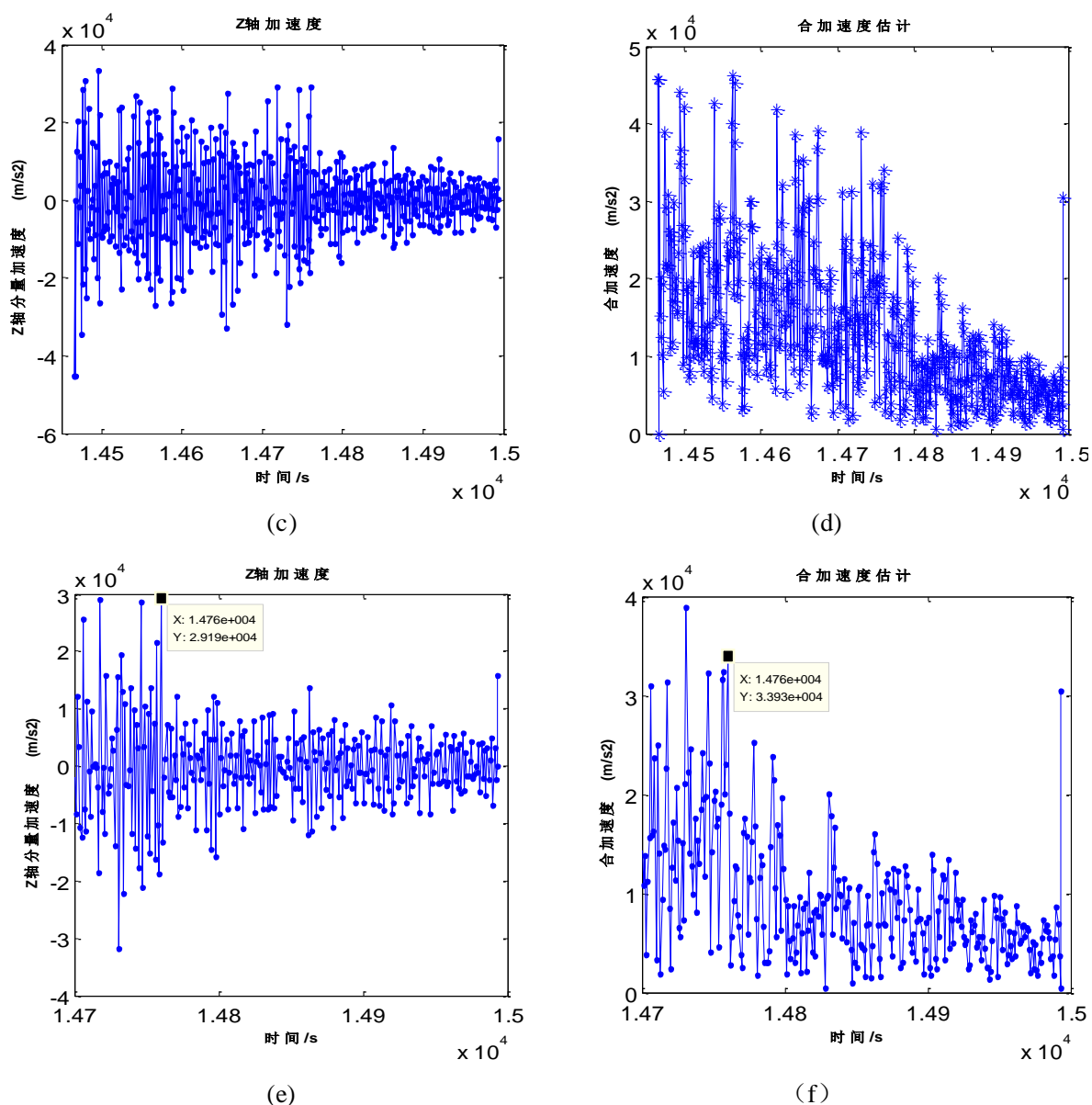


图 5.3.3 雷达的加速度随时间的变化轨迹

由图 5.3.3 可知，加速度在 X 轴和 Y 轴上的分量随着时间的推移，加速度的波动变化越来越小，在 Z 轴上的分量随着时间的推移加速度越来越小，同时在 14760 秒以后开始 Z 轴方向的加速度立刻在更小的范围内上下震动。机动目标的加速度随时间变化规律：加速度先增大、再变小，最终趋于零的变化过程。

5.3.2 基于 CS 模型的目标轨迹预测

利用 1 中提出的 CS 模型，结合 kalman 滤波算法估计出目标的轨迹。如图 5.3.4 所示。由图可知，一般的 CS 模型最终能直接估计后面时间段的机动目标轨迹，但在前期具有很大的偏差。估计出的速度在各坐标轴上的分量和合速度如图 5.3.5 所示。由图可知，在前期 250 秒，速度的变化幅度较大，随着时间的推移，速度变化越来越小。估计出的加速度在各坐标轴上的分量和合加速度如图 5.3.6 所示。由图可知，在前期时间加速度出现了突变，随着时间的推移，加速度也趋于零。

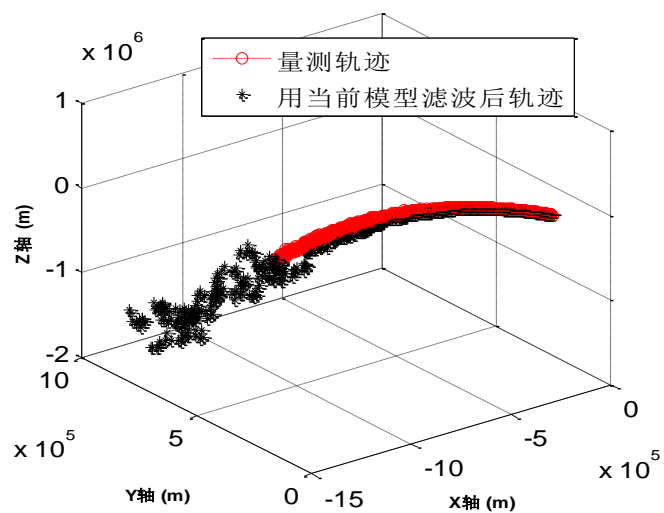


图 5.3.4 估计出目标的轨迹

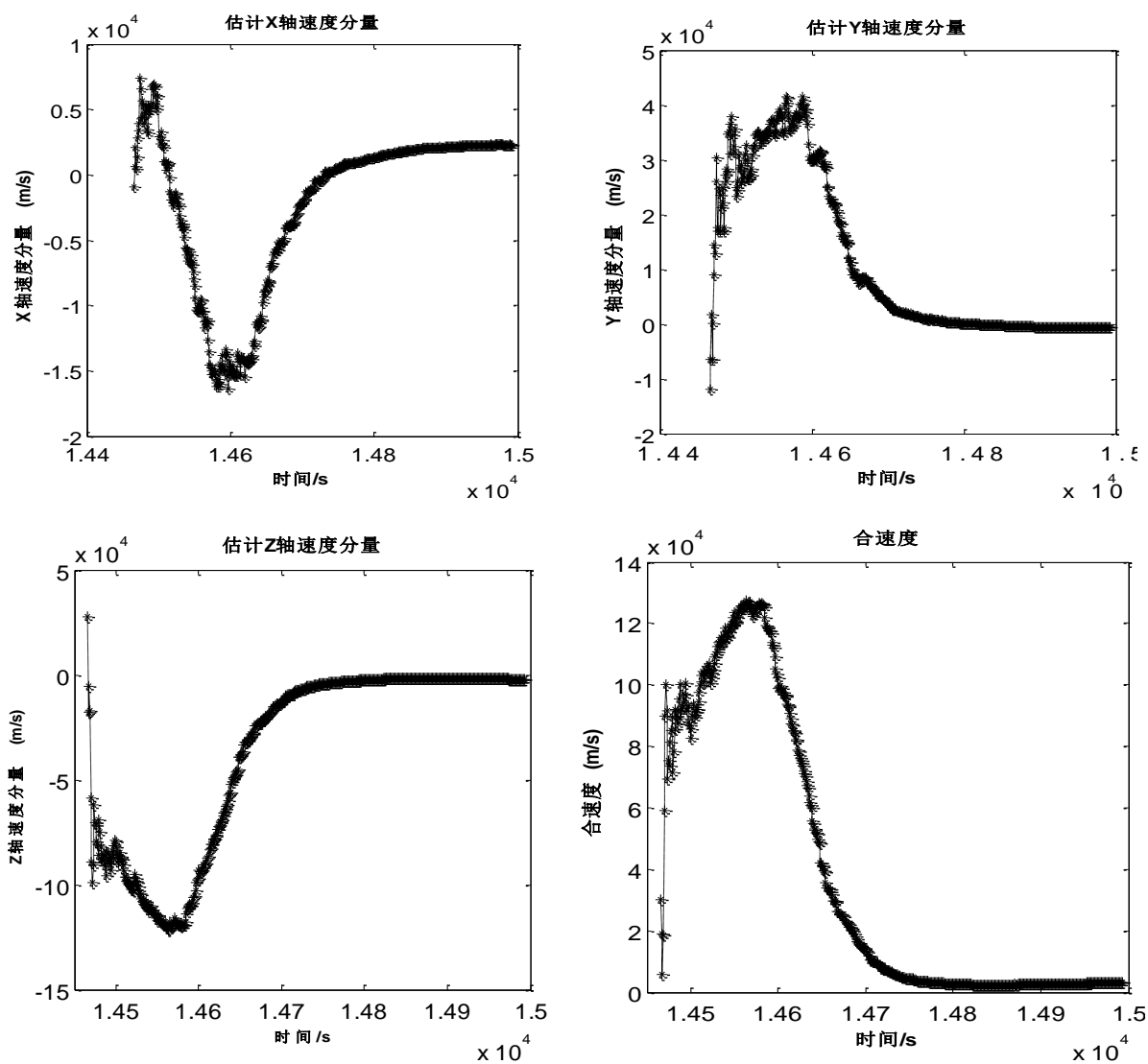


图 5.3.5 估计出目标的速度参数

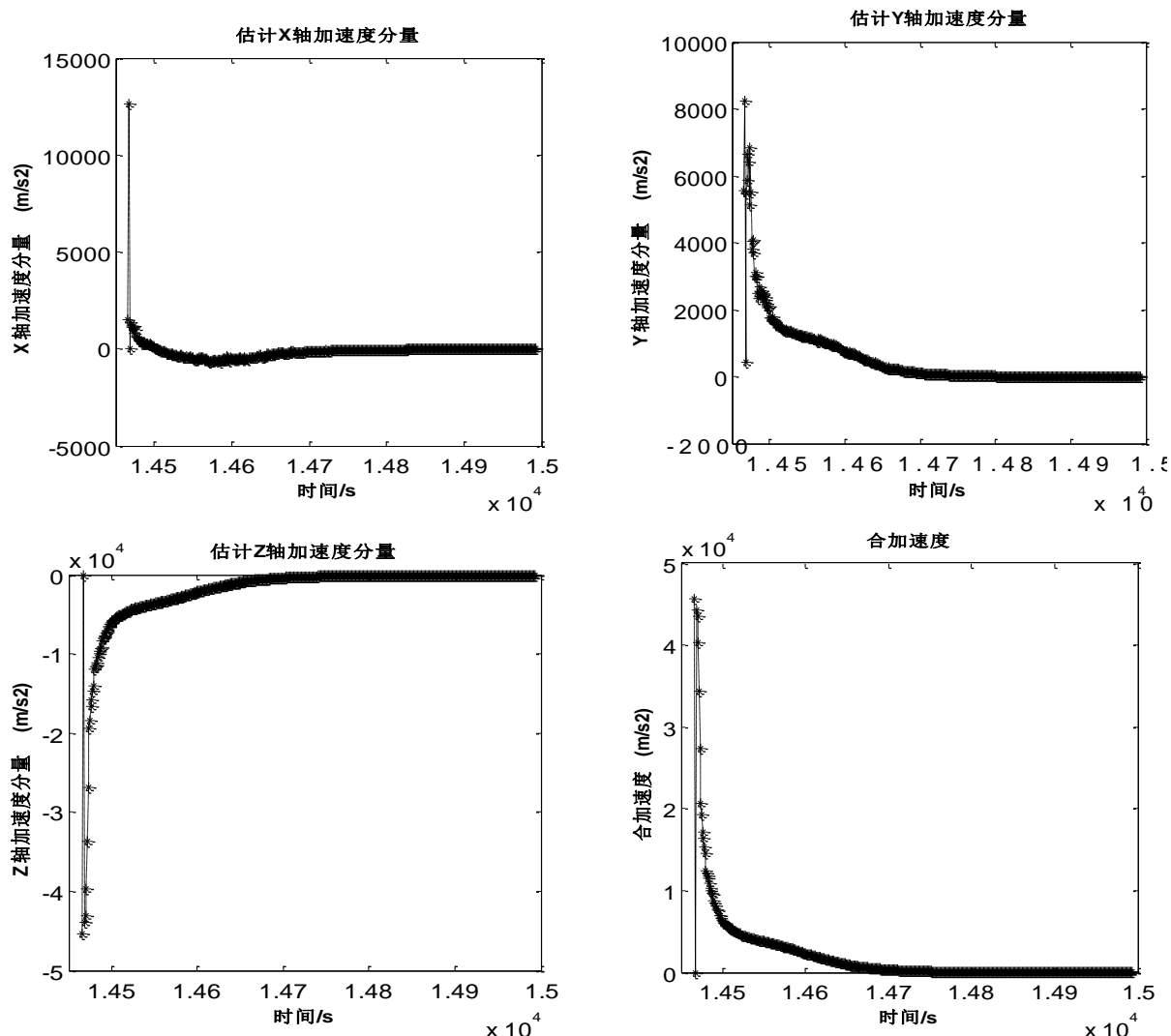


图 5.3.6 估计出目标的加速度

5.4 问题四的建模与求解

5.4.1 步长可变的 CS-Jerk 模型

由于采用 CS 模型对 Data3.txt 中的数据进行滤波后,量测轨迹与滤波轨迹误差过大,跟踪精度变低,因此需要寻求新的运动模型来对其进行跟踪。从问题三中分析的目标加速度的变化情况,可以得出机动目标在做加速度变化的强机动,因此单纯的 CS 模型已经无法准确的对其进行准确的跟踪。因为 CS 模型考虑的只是目标的速度机动(即目标位置的二阶导数),缺乏对某些高阶机动的表征能力^[22]。研究表明^[6]在跟踪各种复杂机动目标时,目标位置的高阶导数的影响已不能忽略,因此其对状态分量提高一阶,即引入目标的加速度变化率——加加速度或 Jerk (“急动”),相应的为 Jerk 模型^[23]。但是由于 Jerk 模型将目标的加加速度用均匀分布来描述,这不符实际的机动过程。所以为了进一步匹配实际机动目标的运动形式,利用 CS 模型的“当前”统计思想:目标在某个时刻的机动范围是有限,即目标的加加速度是一个时间相关过程,提出了步长可变的基于“当前”统计的 Jerk 模型——步长可变的 CS-Jerk。

CS-Jerk 模型目标的一维离散状态方程为

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{U}\bar{J} + \mathbf{W}(k) \quad (5.4-1)$$

式中 \bar{J} 为目标加加速度的均值， $\mathbf{U}(k)$ 为输入控制矩阵， $\mathbf{F}(k)$ 为状态转移矩阵，分别为：

$$\mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha^2} \left(2T - \alpha T + \frac{\alpha^2}{3} T^3 - 2 \frac{(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha} \right) \\ \frac{1}{\alpha} \left(-T + \frac{\alpha T^2}{2} + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \right) \\ T - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \\ 1 - e^{-\alpha T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 & p \\ 0 & 1 & T & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (5.4-2)$$

式中：

$$p = (2 - 2\alpha T + \alpha^2 T^2 - 2e^{-\alpha T}) / (2\alpha^3)$$

$$q = (e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T) / \alpha^2$$

$$r = (1 - e^{-\alpha T}) / \alpha$$

$$s = e^{-\alpha T}$$

过程噪声协方差为：

$$\mathbf{Q}(k) = 2\alpha\sigma_j^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \quad (5.4-3)$$

其中参数 σ_j^2 为机动目标加加速方差，参数 α 为“急动”频率。

$$q_{11} = \frac{1}{2\alpha^7} \left(\frac{\alpha^5 T^5}{10} - \frac{\alpha^4 T^4}{2} + \frac{4\alpha^3 T^3}{3} - 2\alpha^2 T^2 + 2\alpha T - 3 + 4e^{-\alpha T} + 2\alpha^2 T^2 e^{-\alpha T} - e^{-2\alpha T} \right)$$

$$q_{12} = \frac{1}{2\alpha^6} \left(1 - 2\alpha T + 2\alpha^2 T^2 - \alpha^3 T^3 + \frac{\alpha^4 T^4}{4} + e^{-2\alpha T} + 2\alpha T - 2e^{-\alpha T} - \alpha^2 T^2 e^{-\alpha T} \right)$$

$$q_{13} = \frac{1}{2\alpha^5} \left(2\alpha T - \alpha^2 T^2 - \frac{\alpha^3 T^3}{3} - 3 - 2e^{-2\alpha T} + 4e^{-\alpha T} + \alpha^2 T^2 e^{-\alpha T} \right)$$

$$q_{14} = \frac{1}{2\alpha^4} \left(1 + e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T} - \alpha^2 T^2 e^{-\alpha T} \right)$$

$$\begin{aligned}
q_{22} &= \frac{1}{2\alpha^5} (1 - e^{-2\alpha T} + \frac{2\alpha^3 T^3}{3} + 2\alpha T - 2\alpha^2 T^2 - 4\alpha T e^{-\alpha T}) \\
q_{23} &= \frac{1}{2\alpha^4} (1 + \alpha^2 T^2 - 2\alpha T + 2\alpha T e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T}) \\
q_{24} &= \frac{1}{2\alpha^3} (1 - e^{-2\alpha T} - 2\alpha e^{-\alpha T}) \\
q_{33} &= \frac{1}{2\alpha^3} (4e^{-\alpha T} - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T - 3) \\
q_{34} &= \frac{1}{2\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}) \\
q_{44} &= \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha T})
\end{aligned}$$

CS-Jerk 模型将“当前”加速度变化率 $\bar{J}(k)$ 等于加速度变化率的一步预测 $\hat{\ddot{x}}(k/k-1)$ ，利用 $\bar{J}(k)$ 对机动目标机动的预测、估计状态进行实时调整。

由于实际相邻几个量测更新数据的间隔不同，导致传统的模型跟踪算法不能有效处理。为了解决这一问题，采用变步长思想，认为雷达的扫描周期在实时变化，通过相邻量测数据的更新间隔来定义雷达的扫描周期，以此实现对不等间隔量测数据的处理。

5.4.2 目标轨迹实时预测

通过建立的 CS-Jerk 模型对 Data3.txt 中的数据进行实时预测，得到的跟踪结果如下图所示。

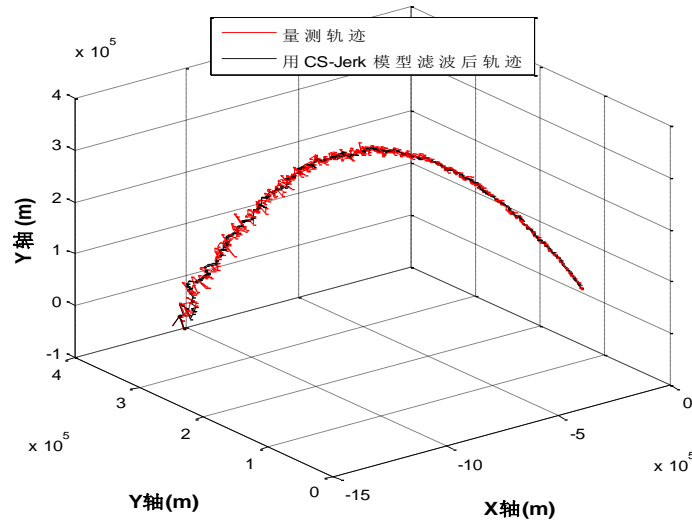


图 5.4.1 实时预测的目标轨迹

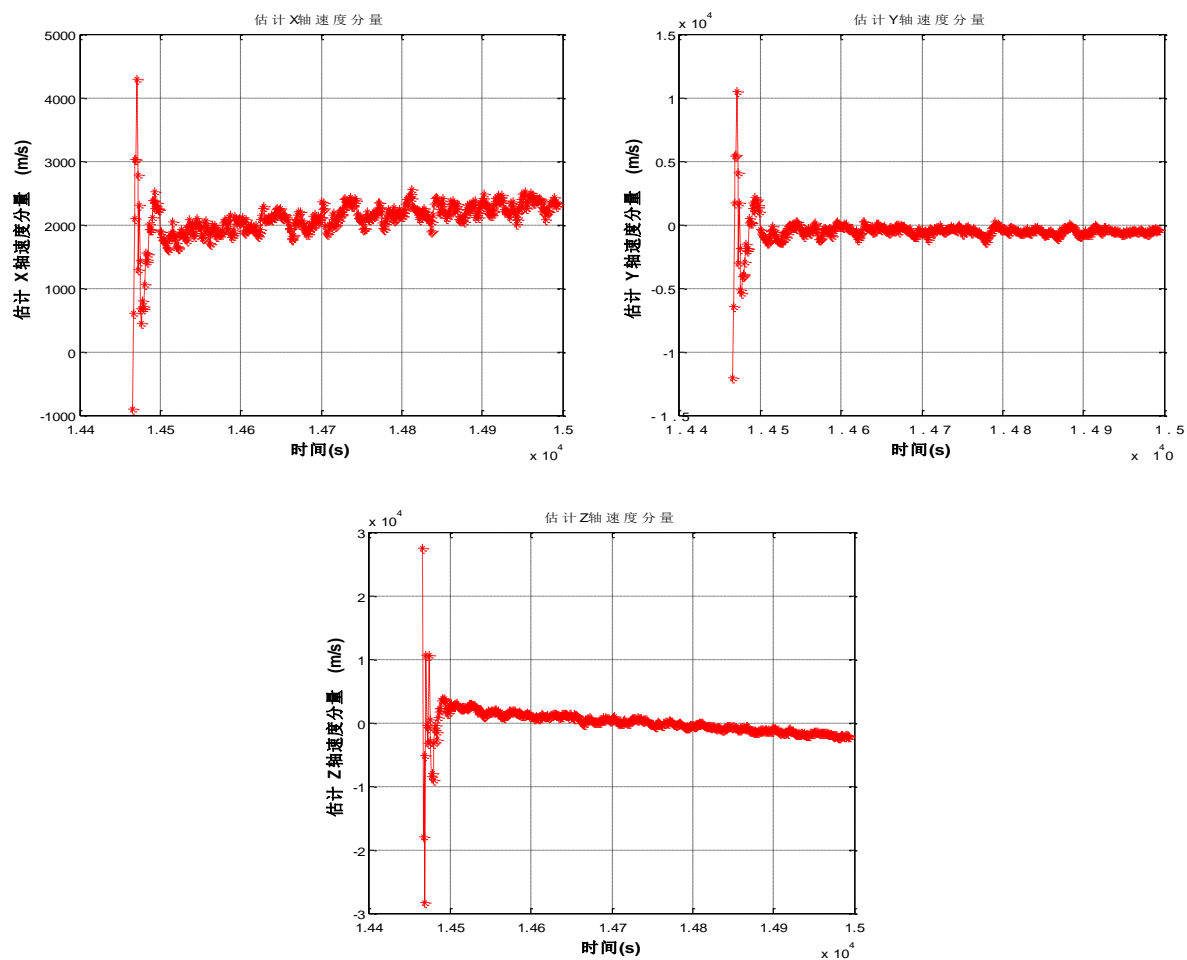
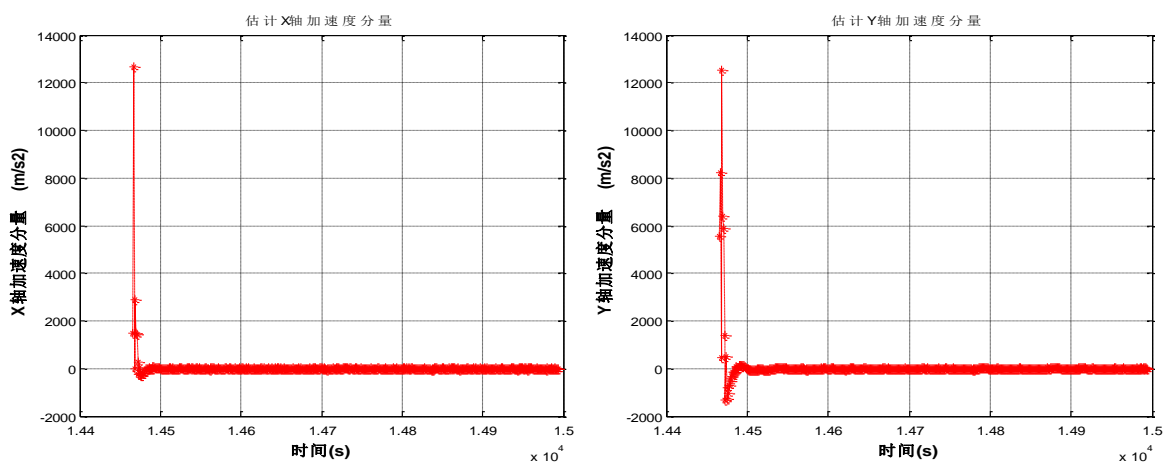


图 5.4.3 实时预测的目标速度



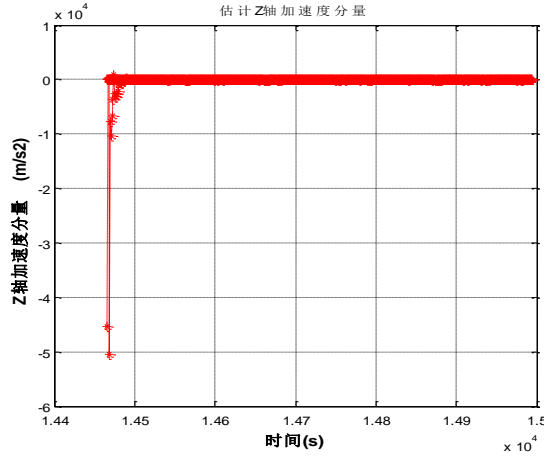


图 5.4.3 实时预测的目标加速度

由上述仿真结果图 5.4.3 可知，该章节建立的 CS-Jerk 模型较前面使用的 CS 模型对该机动目标具有较高的跟踪精度。

5.4.3 目标着落点估计

Data3.txt 数据中仅仅给出了观测时间在 14466.00~14993.23s 之间的数据，为了进一步估计目标的着落点，需要采用建立的 CS-Jerk 模型继续进行跟踪，但在进行跟踪的过程中，缺少量测数据。因此，为了实现对目标着落点的估计，可以将状态的一步预测值就当作滤波值，不断进行状态更新，直至找到着落点。

若 $k-1$ 时刻的量测数据已知， k 时刻的量测数据未知。那么通过 $k-1$ 时刻的滤波得到 k 时刻的状态滤波值 $\hat{\mathbf{X}}(k|k)$ 、状态估计的协方差矩阵 $\mathbf{P}(k|k)$ 。则第 k 时刻的滤波过程如下：

$$\text{状态的一步预测：} \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) \cdot \hat{\mathbf{X}}(k|k) \quad (5.4-2)$$

$$\text{状态更新：} \mathbf{X}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) \quad (5.4-3)$$

当满足 $\sqrt{\mathbf{X}_{(1,1)}(nk|nk)^2 + \mathbf{X}_{(4,1)}(nk|nk)^2 + \mathbf{X}_{(7,1)}(nk|nk)^2} = R$ 时，得出相应时刻的状态值，经过转换最终得到着落点的坐标。

从问题三分析的空间目标的机动变化规律，可以看出雷达的最后一个量测数据，与前面的数据，不但周期异常，而且目标的加速度发生了巨变，从数据分析的角度可以认为该量测数据为野值，应该剔除；但也可能是目标在该时刻进行比较强的机动，同时缺少足够的先验信息，若盲目地剔除该点可能会对结果造成重大影响。因此，为了更好的对该目标的着落点进行估计，分别进行了两个处理。预测结果如 5.4.4，5.4.5，由图可知所提出的模型可进行有效着落点估计。

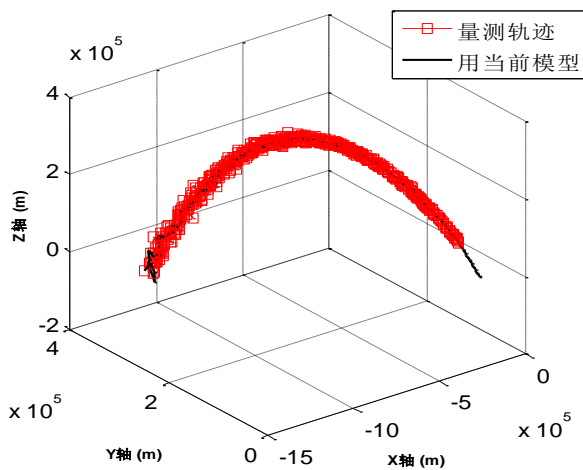


图 5.4.4 估计 1 的着陆点

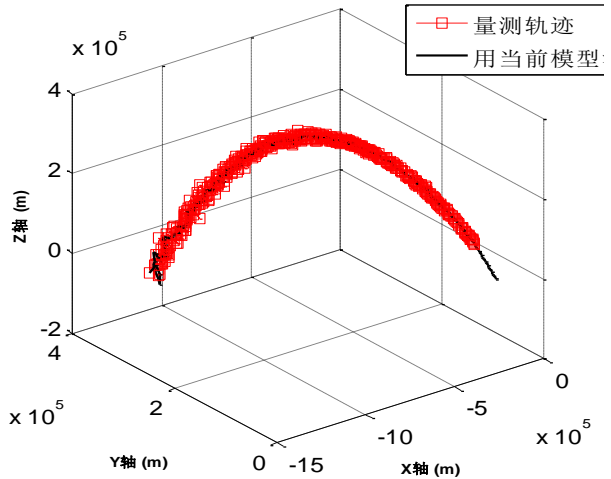


图 5.4.5 估计 2 的着陆点

估计 1:

使用最后一个量测数据时：估计的目标着落点的经纬度分别为：北纬 39.7992° 、东经 116.0184° 。

估计 2:

剔除最后一个量测数据时：估计的目标着落点的经纬度分别为：北纬 39.8946° 、东经 115.9447° 。

算法复杂度分析，程序中包含 for 循环语句，且该循环中有 if 判断命令，所以该算法的复杂度为 $O(n^2)$ ，仿真环境为：Lenovo Y550 Core i5 M430 2.27GHz 双核笔记本，经过 100 次 Monte Carlo 仿真实验，算法的平均运行时间为 $0.8029s$ 。

5.5 问题五的建模与求解

5.5.1 目标最优机动逃逸策略模型

被跟踪目标为了提高自身的生存能力^[25-29]，通常在被雷达锁定情况下会作规避的机动动作或者释放干扰力图摆脱跟踪，前者主要通过自身运动状态的快速变化导致雷达跟踪器精度变差甚至丢失跟踪目标，后者则通过制造假目标掩护自身，那么机动逃逸即为雷达探测到目标的虚假位置或者由雷达探测到的数据无法通过跟踪模型对其进行精确跟踪。

针对 CS 跟踪模型的逃逸策略

由于 CS 模型的一个重要思想是认为加速度的变化范围是有限的，即目标的加速度是一个时间相关过程。在目标加速度为正时，其加速度的概率密度函数通过修正的瑞利分布表征如下：

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a_{\max} - a}{\mu^2} \exp(-\frac{(a_{\max} - a)^2}{2\mu^2}) & 0 < a < a_{\max} \\ 0 & a > a_{\max} \end{cases} \quad (5.5-1)$$

$$E(a) = \bar{a} = a_{\max} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu \quad (5.5-2)$$

$$D(a) = \frac{4-\pi}{2}\mu^2 \quad (5.5-3)$$

同理，在目标加速度为负时：

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a - a_{-\max}}{\mu^2} \exp(-\frac{(a - a_{-\max})^2}{2\mu^2}) & 0 > a > a_{-\max} \\ 0 & a \leq a_{-\max} \end{cases} \quad (5.5-4)$$

$$E(a) = \bar{a} = a_{-\max} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu \quad (5.5-5)$$

$$D(a) = \frac{4-\pi}{2}\mu^2 \quad (5.5-6)$$

在目标加速度为零时： $p(a) = \delta(a)$

下面以目标加速度为正进行公式推导：

根据(5.5-4)式知道：

$$\int_0^{a_{\max}} a^2 p(a) da = E^2(a) + D(a) \leq a_{\max} \int_0^{a_{\max}} ap(a) da = a_{\max} E(a) \quad (5.5-7)$$

将(5.5-5)、(5.5-6)式带入式(5.5-4)，化简可得到 μ 的取值范围为：

$$0 \leq \mu \leq \frac{a_{\max}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (5.5-8)$$

联合式(5.5-8)和式(5.5-2)得：

$$(\frac{4-\pi}{4})a_{\max} \leq \bar{a} \leq a_{\max} \quad (5.5-9)$$

同理，可得到目标的“当前”加速度为负时的范围：

$$a_{-\max} \leq E(a) \leq (\frac{4-\pi}{4})a_{-\max} \quad (5.5-10)$$

由式(5.5-9)、(5.5-10)可以看出，CS模型只能描述加速度在 $[(\frac{4-\pi}{4})a_{\max}, a_{\max}]$ 和 $[a_{-\max}, (\frac{4-\pi}{4})a_{-\max}]$ 之间的机动目标，这揭示了该模型对弱机动目标具有很大跟踪误差的根本原因。

通过修正瑞利分布定义的加速的概率密度函数式(5.5-1)和式(5.5-2)是不严格的

$$\int_0^{a_{\max}} p(a) da = 1 - \exp(-\frac{a_{\max}^2}{2\mu^2}) \neq 1 \quad (5.5-11)$$

$$\int_{a_{\max}}^0 P(a) da = 1 - \exp\left(-\frac{a_{\max}^2}{2\mu^2}\right) \neq 1 \quad (5.5-12)$$

因此 CS 模型中 σ_a^2 的计算是不准确的。当 μ 较小时，即加速度的均值 \bar{a} 较大时，通过修正的瑞利分布来表征加速度误差较小，可以忽略不计，此时 CS 模型的跟踪效果较好。但当 μ 较大时，即加速度的均值 \bar{a} 较小时，若仍使用修正的瑞利分布就会导致误差很大，不能忽略不计，CS 模型的跟踪效果较差。同时由于 CS 模型有加速的门限，则对于超出强机动目标，其跟踪效果较差。

那么可以得出目标针对 CS 模型的最佳逃逸策略为进行匀速运动，或者加速度较小的运动。同时若目标机动性能很好，加速度可以超出 CS 模型中设置的加速度门限，那么目标以超过门限值的加速进行机动，则可实现逃逸。

针对雷达探测的逃逸策略

在雷达直角坐标系中，雷达的坐标为 $O(0,0,0)$ ，雷达的波束宽度为 $\sigma = 3^\circ$ ，雷达波束倾角即为观测目标的方位角与俯仰角。第 k 个时刻观测到的目标所在位置为 $A(x_k, y_k, z_k)$ 、速度为 $\mathbf{V}(k) = (v_x(k), v_y(k), v_z(k))$ 、加速度为 $\mathbf{a}(k) = (a_x(k), a_y(k), a_z(k))$ ，假设点 A 在雷达波束的中轴线上，如果目标要逃逸雷达跟踪，则需要目标在一个雷达扫描面周期内，机动出雷达扫描波束范围，即点 B 与雷达波束中轴线的最短距离 d 大于雷达波束在 O 点的横截面的半径 r ，其中点 $C(x, y, z)$ 为点 B 到雷达波束中轴线的最近距离点。如图 5.5.1 所示。

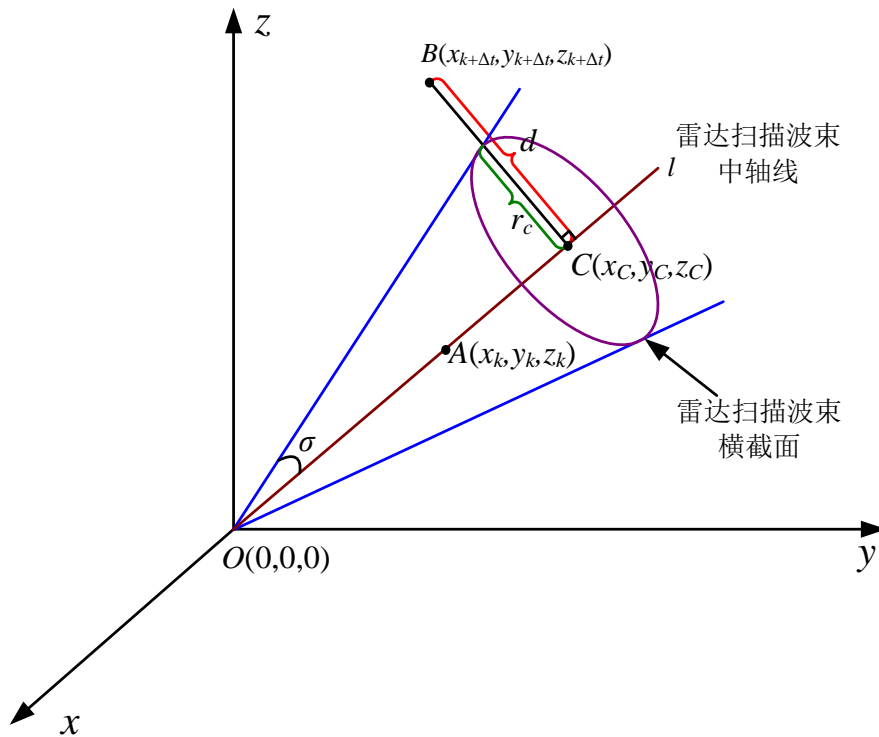


图 5.5.1 目标逃逸机动

为了选择最佳逃逸策略，建立如下的机动逃逸模型：

假设在第 k 时刻目标开始进行逃逸机动，目标的逃逸加速度为 $\mathbf{a}_e(k) = (a_{ex}(k), a_{ey}(k), a_{ez}(k))$ ，第 $k + \Delta t$ 时刻的目标运动的位置为 $B(x_{k+\Delta t}, y_{k+\Delta t}, z_{k+\Delta t})$ ，根据运动方程可以得出 B 点坐标为：

$$\begin{cases} x_{k+\Delta t} = x_k + v_x(k)\Delta t + \frac{1}{2}a_{ex}^2(k)\Delta t^2 \\ y_{k+\Delta t} = y_k + v_y(k)\Delta t + \frac{1}{2}a_{ey}^2(k)\Delta t^2 \\ z_{k+\Delta t} = z_k + v_z(k)\Delta t + \frac{1}{2}a_{ez}^2(k)\Delta t^2 \end{cases} \quad (5.5-13)$$

目标运动速度与逃逸加速度的夹角 ε 为：

$$\varepsilon = \arccos \left(\frac{\mathbf{V}(k) \cdot \mathbf{a}(k)}{|\mathbf{V}(k)| |\mathbf{a}(k)|} \right) \quad (5.5-14)$$

雷达波束中轴线的方程为：

$$\frac{x}{x_k} = \frac{y}{y_k} = \frac{z}{z_k} \quad (5.5-15)$$

那么根据空间几何关系得出点 C 的坐标为：

$$\begin{cases} x_C = \frac{x_k(x_k x_{k+\Delta t} + y_k y_{k+\Delta t} + z_k z_{k+\Delta t})}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ y_C = \frac{y_k(x_k x_{k+\Delta t} + y_k y_{k+\Delta t} + z_k z_{k+\Delta t})}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ z_C = \frac{z_k(x_k x_{k+\Delta t} + y_k y_{k+\Delta t} + z_k z_{k+\Delta t})}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \end{cases} \quad (5.5-16)$$

点 B 到雷达波束中轴线的最短距离点 $C(x_C, y_C, z_C)$ 的距离为：

$$d = (x_C - x_{k+\Delta t})^2 + (y_C - y_{k+\Delta t})^2 + (z_C - z_{k+\Delta t})^2 \quad (5.5-17)$$

过雷达波束中轴线 C 点的横截面半径为：

$$r_C = \tan\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2} \quad (5.5-18)$$

为了逃逸雷达的扫描波束，则需要满足： $d > r_C$ ， $d - r_C$ 的差值越大则下一时刻雷达重新捕获目标的难度越大，目标逃逸策略越有效。假定目标逃逸加速度方向与逃逸起始时刻的速度方向之间的夹角 $\varepsilon (0^\circ \leq \varepsilon \leq 180^\circ)$ 越小，目标实现成功逃逸所付出的代价越小。因此，所建立的机动目标逃逸模型的优化目标可以定义为：在 ε 尽可能小的条件下使得 $d - r_C$ 尽可能大。

理论上目标的机动加速度越大，实现成功逃逸的概率越高，但实际中由于受机动能力的限制，目标机动的最大速度 V_{\max} 和最大加速度 a_{\max} 有限，以战斗机目标为例：其飞行速度一般在 100~400m/s，机动半径在 1km 以上，机动大小一般在 10 个 g 以内；而导弹目标机动，加速度最大可达到几十个 g 。

综上所述，为了实现目标最佳逃逸可以建立如下多约束优化模型：

$$\begin{aligned} & \max \quad d - r_c, \min \quad \varepsilon \\ & s.t. \quad \begin{cases} \Delta t < 0.5 \\ (v_x + a_{ex}(k)\Delta t)^2 + (v_y + a_{ey}(k)\Delta t)^2 + (v_z + a_{ez}(k)\Delta t)^2 \leq V_{\max} V_{\max}^T \\ a_{ex}(k)^2 + a_{ey}(k)^2 + a_{ez}(k)^2 < a_{\max} a_{\max}^T \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5-19)$$

通过多目标函数最优化求解得出相应的每个时刻目标机动逃逸的最佳策略。

5.5.2 反逃逸策略

针对上述提出的机动目标的最佳逃逸策略，本文也从机动目标模型优化与雷达调整两个方面对其进行反逃逸方案的制定。

1 参数自适应调整

由问题三的分析可知，尽管 CS 模型机动目标跟踪中表现出良好的“追踪机动”特性，但仍存在一些不足。首先是其自相关时间常数选取比较困难；其次是需要预先设定加速度的极限值，而在实际中这是很难确定的。并且一旦目标的加速度超过预先设定的值，其跟踪性能明显恶化；再次，CS 对加速度较小，机动较弱的目标跟踪性能不高，误差较大。针对上述 CS 模型存在的缺陷，利用调整函数自适应的调整参数，并对加速度均值进行修正，同时将雷达数据处理中的雷达扫描周期减小，对于缺失的量测数据用状态的一步预测值表示，以此来进一步目标的机动过程，实现对目标逃逸机动的有效跟踪。

在 CS 模型中如果 a_{\max} 选得太大，虽然能够扩大跟踪滤波器的带宽，提高对机动目标的跟踪能力，但同时跟踪滤波器的稳态误差也会增大；如果 a_{\max} 选得太小，势必减小跟踪滤波器的带宽，虽然能够减小跟踪滤波器的稳态误差，但会降低对机动目标的跟踪能力。针对以上问题，引入调整因子来对各参数进行自适应调整，以此来提高机动目标跟踪性能。

自适应的构造大多基于残差序列，定义残差向量和预测残差向量分别为：

$$\mathbf{V}(k+1) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) - \mathbf{Z}(k+1) \quad (5.5-19)$$

$$\bar{\mathbf{V}}(k+1) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}(k+1|k) - \mathbf{Z}(k+1) \quad (5.5-20)$$

$\mathbf{V}(k+1)$ 与 $\bar{\mathbf{V}}(k+1)$ 所表示的信息量不同：残差向量 $\mathbf{V}(k+1)$ 是由 $k+1$ 时刻的已经融入相应的量测信息的滤波值 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1)$ 决定，而预测残差向量 $\bar{\mathbf{V}}(k+1)$ 由 $k+1$ 时刻的预测状态 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k)$ 决定。若量测信息 $\mathbf{Z}(k+1)$ 可靠，则预测残差向量 $\bar{\mathbf{V}}(k+1)$ 的大小主要反映 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k)$ 的可靠性，因而预测残差向量 $\bar{\mathbf{V}}(k+1)$ 比残差向量 $\mathbf{V}(k+1)$ 更能反映动态系统的扰动情况。

计算预测残差的范数

$$d(k+1) = \bar{\mathbf{V}}^T(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)\bar{\mathbf{V}}(k+1) \quad (5.5-21)$$

式中 $\bar{\mathbf{V}}(k+1)$ 为预测残差向量, $\mathbf{S}(k+1)$ 为新息协方差矩阵。当运动目标发生机动时, $d(k+1)$ 增大, 因此, 可以用前后两个时刻新息范数的差异, 即 $d(k)$ 与 $d(k+1)$ 的差异来表征目标发生机动的强弱。当目标机动较弱时, 前后两个时刻的预测残差范数差异较小, 模型参数也应较小并且变化较缓慢; 当目标机动较强时, 前后两个时刻的预测残差范数差异较大, 模型中的各参数也应随之迅速增大, 从而提高了对强机动目标的精确跟踪。因此基于预测残差范数的调整因子的值及其变化率应越大, 从而能够对模型参数和系统增益进行快速调整, 使模型更加贴近实际。相比于线性函数和对数函数, 指数函数在其区间内严格单调递增, 并且变化率在函数值较小时数值比较小, 随着函数值增大, 变化率的数值迅速增大, 这种性质符合上述的机动特性, 因此更适合作为调整因子。综合考虑上述各个特点, 调整因子具体选择为:

$$\lambda(k+1) = \exp[|d(k+1)/d(k)|] \quad (5.5-22)$$

假设目标初始机动频率为 α_0 , 加速度的正负极值分别为 $a_{\max 0}$ 、 $a_{-\max 0}$, 当目标运动形式发生变化时, 模型参数自适应调整的表达式为:

$$\alpha(k+1) = \lambda(k+1)\alpha_0 \quad (5.5-23)$$

$$a_{\max}(k+1) = \lambda(k+1)a_{\max 0} \quad (5.5-24)$$

$$a_{-\max}(k+1) = \lambda(k+1)a_{-\max 0} \quad (5.5-25)$$

在应用卡尔曼滤波算法进行目标跟踪时, 若目标机动较强, 系统需要较大的系统增益进行快速调整, 机动较弱时则需要较小的增益进行调整。当系统中量测噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}(k+1)$ 和前一时刻的状态预测协方差矩阵确定后, 卡尔曼滤波增益只取决于机动频率和加速度极限值^[4]。由式分析可知, 目标机动较强时, $\lambda(k+1) > 1$, 可以迅速增大加速度极限值和机动频率, 进而增大系统增益; 目标机动较弱时, $\lambda(k+1) < 1$, 减小了加速度极限值和机动频率, 进而减小了系统增益, 满足了系统需求, 提高了机动目标跟踪性能。

CS 统计模型的一个重要假设就是加速度均值为前一时刻加速度的估计值, 这只是在常加速度情形下的假设, 不适合于一般机动情况, 当前加速度均值不仅与当前的信息 $\hat{\mathbf{a}}(k|k)$ 有关还与 $\bar{\mathbf{a}}(k)$ 有关, 这样更符合实际情况^[7], 即

$$\bar{\mathbf{a}}(k+1) = E[\mathbf{a}(k+1)|\mathbf{Z}^k] = (e^{-T})\hat{\mathbf{a}}(k|k) + (1 - e^{-T})\bar{\mathbf{a}}(k) \quad (5.5-26)$$

2 雷达扫描调整

目标的机动逃逸有可能是在雷达的一个扫描周期 T 内, 目标已经机动出雷达的探测范围, 导致雷达丢失目标的量测数据, 致使目标逃逸。为了避免这种情况的发生, 可以减小雷达扫描周期 T , 这样使得在同一时间段内获得较多的量测数据对滤波值进行修正, 实现对目标逃逸机动的有效跟踪。但实际中, 雷达的扫描周期 T 往往难以随意改变, 因此为了实现对目标逃逸机动的精确跟踪, 需要对滤波数据进行相应的处理。

具体步骤如下:

为了等效实现雷达扫描周期 T 的减小, 在对雷达数据进行处理时, 将雷达数据的处理中的雷达扫描周期设置为 T/n , 其中 n 为正整数, 那么对于滤波过程中缺失的量测数

据，用直接用状态的一步预测值来代替。

若 $k-1$ 时刻的量测数据已知， k 时刻的量测数据未知。那么通过 $k-1$ 时刻的滤波得到 k 时刻的状态滤波值 $\hat{\mathbf{X}}(k|k)$ 、状态估计的协方差矩阵 $\mathbf{P}(k|k)$ 。则第 k 时刻的滤波过程如下：

$$\text{状态的一步预测： } \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k) \cdot \hat{\mathbf{X}}(k|k)$$

$$\text{状态更新： } \mathbf{X}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k)$$

根据状态更新值实时调整雷达扫描方向或扫描范围，从而有效应对目标的逃逸机动。

六、模型优缺点分析

模型的优点：

- 1、各模型的算法针对各问题的解决具有可行性，实时性和精度都能够满足实际机动目标的跟踪和估计的应用需要；
- 2、每一问的模型都给出了精确的表达式和推导；
- 3、第二问采用了三种数据关联方法，分别对量测数据进行了关联，并从得出的关联结果，分析各模型的特点，具有很高的实际意义。

模型的缺点：

CS 模型对初始参数的合理设定依赖性较高，若设置不合理会导致跟踪精度降低。

参考文献:

- [1] 范新南.现代数值计算[M].北京:人民邮电出版社,2009:225-240
- [2] 谢文龙.三次样条函数的构造方法[J].江南学院学报,2000,5(1).33-36
- [3] 王正明,易东云.测量数据建模与参数估计[M].长沙:国防大学出版社,1996.
- [4] 邓乃扬.无约束最优化算法[M].北京:科学出版社,1982.
- [5] 韩云瑞,刘庆华.高等数学[M].北京:清华大学出版社,2002.
- [6] 张信守.外弹道测量与卫星轨道测量基础[M].北京:国防工业出版社.1992.
- [7] 孙仲康,周一宇,何黎星.单多基地有源无源定位技术[J].北京:国防出版社.1996.
- [8] 李盾,周一宇,苗雨.空军预警探测子系统弹道导弹的监视与跟踪[J].系统工程与电子技术,200,24(3):248-251.
- [9] 贾沛然,陈克俊,何力.远程火箭弹道学[M].长沙:国防科技大学出版社,1993
- [10] 余明生.地球观测卫星的轨道捕获和轨道保持[J].中国空间科学技术,1982,8(3).
- [11] 张铮,杨文平,石博强,等. MATLAB 程序设计与实例应用[M].北京:北京邮电出版社,2003.
- [12] 孙继广.矩阵扰动分析[M].北京:科学出版社,1987.
- [13] 周宏仁,敬忠良,王培德.机动目标跟踪[M].北京:国防工业出版社,1998
- [14] 何友,王国宏等.多传感器信息融合及应用[M].北京:电子工业出版社,2000
- [15] 蔡庆宇,薛毅,张伯彦.相控阵雷达数据处理及其仿真技术[M].北京:国防工业出版社,1997
- [16] 韩崇昭,朱洪艳,段战胜等.多源信息融合(第二版)[M].北京:清华大学出版社,2010
- [17] 何友,修建娟,张晶炜等.雷达数据处理及应用[M].北京:电子工业出版社,2006
- [18] Somnath Deb, Krishna R. Pattipati and Yarkov Bar-shalom, A Multisensor-Multitarget Data Association Algorithm for Heterogeneous Sensors [J], IEEE Trans. AES, 1993, 26(3): 198-213
- [19] 周宏仁.机动目标当前统计模型与自适应跟踪算法[J].航空学报,1983,4(1):73~86
- [20] Kishore Mehrotra, R. Pravas Mahapatra. A Jerk Model for tracking highly maneuvering targets[J].IEEE transactions on aerospace and electronic systems,1997,35(4):1094-1105
- [21] 李菲,潘平俊.机动目标模型的研究进展[J].火力与指挥控制,2007,32(10):17-21
- [22] 魏纪锋.基于 Jerk 模型的高机动目标跟踪算法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工程大学,2010
- [23] 葛泉波,李文斌,孙若愚,徐姿.基于 EKF 的集中式融合估计研究[J].自动化学报,2013,39(6):816-825
- [24] R. A. Singer. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1970, 6(4): 473-483

- [25] 胡小平. 导弹飞行力学基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006
- [26] X. R. Li and V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking—Part IV: Decision-Based Methods," In: Proc. SPIE - Signal and Data Processing of Small Targets 2002, April 1–5, 2002, Orlando, FL, USA, pp. 511–534
- [27] X. R. Li and V. P. Jilkov, "Survey of Maneuvering Target Tracking, Part V: Multiple-Model Methods," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 41(4): 1255–1321, October 2005.
- [28] X. R. Li and V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking: Approximate Techniques for Nonlinear Filtering," In: Proc. SPIE- Signal and Data Processing of Small Targets 2004, April 13–15, 2004, Orlando, FL, USA, pp. 537–550.
- [29] X. R. Li and V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking—Part VIa: Density-Based Exact Nonlinear Filtering," Proc. 2010 SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets, Orlando, FL, USA, 6–8 April 2010
- [30] X. R. Li and V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking—Part VIb: Approximate Nonlinear Density Filtering in Mixed Time," Proc. 2010 SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets, Orlando, FL, USA, 6–8 April 2010
- [31] Julier S J, Uhlmann J K. A New Extension of The Kalman Filter to Nonlinear Systems[J].SPIE, 1997, (3068):182~193