

# “华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

## 题 目                      多无人机对组网雷达的协同干扰

---

### 摘                      要：

本文针对多无人机对组网雷达的协同干扰问题，分析了无人机和雷达之间空间几何以及运动状态的关系，综合运用了图论法、数值计算方法、和现代智能优化算法，建立了求解无人机航迹和虚假航迹的非线性规划模型，并基于仿真计算与编程优化，得到了满足目标航迹点的无人机飞行轨迹和附加产生的虚假航迹。

针对问题一：首先根据雷达站与虚假目标航迹三维视图及位置关系，结合无人机的飞行速度，将问题简化为一架无人机至多干扰一部雷达的模型。以无人机使用数量最少为优化目标，以无人机飞行速度、高度、间距以及匀速直线运动的运动状态为约束条件，建立非线性规划模型。最后利用搜索算法确定了单架无人机所能覆盖的最多航迹点，进而确定了无人机的最少使用数量为 31 架，并给出了每架无人机的运动规律和相应的协同策略。

针对问题二：借助问题一建立的模型，首先考虑到尽可能少的俯冲和爬升，确定了先爬升后平飞再俯冲的运动形式，以此作为判断依据得到了能够恢复目标航迹所需的最少无人机架数。然后结合几何关系以及飞行高度、速度和飞行半径的限制，移动剩下自由的无人机，通过搜索算法来找到可能的虚假航迹点，由此求得最多可以再形成 3 条虚假航迹。

针对问题三：首先确定了雷达受到干扰情况下，可能存在的雷达工作和作用状态，然后在第二题的基础上，以最大化虚假航迹数目为优化目标，以飞行高度、速度、加速度、半径以及受干扰雷达数等为限制条件，建立非线性规划模型。最后利用蚁群算法搜索得到新的可能的虚假航迹点，由此求得最多还可以产生 3 调虚假的航迹。

**关键词：**协同干扰 虚假航迹 非线性规划模型 搜索算法

## 一 问题重述

### 1.1 问题背景

近年来，随着军事技术的不断发展，世界各国逐渐意识到单部雷达在信息化条件下作战存在诸多局限性，进而开始大力发展雷达组网技术。组网雷达系统是利用多部空间位置分布不同而覆盖范围相互重叠的雷达的观测或判断来实施搜索、跟踪和识别目标的系统。组网雷达系统目标检测概率更高，抗干扰能力更强，可在军事防御系统中发挥重要作用。因此，如何有效干扰组网雷达系统，突破其检测防线，成为当今电子对抗界亟待解决的问题。

对雷达的各种干扰方式中，欺骗干扰是一种常见的有效干扰方式。欺骗干扰按照欺骗参数的不同可以分为距离欺骗干扰、速度欺骗干扰、角度欺骗干扰和 AGC 欺骗干扰等。其中，距离欺骗干扰是一种应用较为广泛的欺骗方式，其基本原理如图 1 所示。干扰机基于侦察到的敌方雷达发射电磁波的信号特征，结合常用脉冲体制雷达的测距原理，对电磁波信号进行相应处理，延迟（或超前）一定时间后再转发出去，使雷达接收到一个或多个比干扰机真是距离靠后（或靠前）的回波信号，从而在雷达上形成假目标点。每一时刻假目标点都位于雷达与干扰机连线的延长线上。随着干扰机的运动，累计的假目标点形成假目标航迹，从而成功实现距离欺骗。

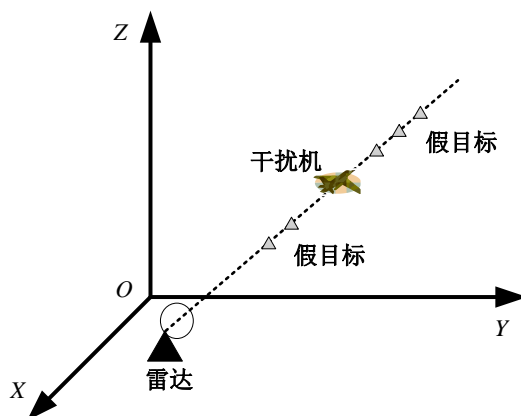


图 1 对雷达实施多距离多假目标欺骗干扰示意图

而组网雷达系统克服了单一雷达的这一缺点。组网雷达系统中的每一部雷达所在位置不同，均会对空域中的目标进行探测，并利用其信息融合机制对探测目标进行同源检验。这使得真目标和有源假目标在雷达系统所体现出的空间状态中表现出明显的差异：真目标在不同雷达探测下的状态信息，汇集到统一坐标系中后是基本一致的，可通过检验并认为是源自于同一目标；有源假目标在不同雷达中被探测的假信息在统一坐标系中一般不一致，无法通过检验，有理由认为其来自于不同目标，并利用这种不一致性在信息融合中心将假目标有效剔除。

为了对组网雷达系统实施有效得干扰,则需要利用多架无人机按照一定的飞行轨迹对系统进行协同干扰。协同干扰的原理如图 2 所示。无人机搭载的干扰设备对接收到的雷达信号进行相应处理后转发回对应的雷达,雷达接收到转发回的干扰信号形成目标航迹点信息,传输至组网雷达信息融合中心。由于多无人机的协同飞行,因此在融合中心就会出现多部雷达在统一坐标系的同一空间位置上检测到的目标信号,基于一定的融合规则就会判断为一个合理的目标航迹点,多个连续的合理目标航迹点就形成了目标航迹,即实现了一条虚假航迹。通过协同控制无人机的飞行航迹,可在敌方的组网雷达系统中形成一条或多条欺骗干扰航迹,迫使敌方加强空情处理,达到欺骗目的。

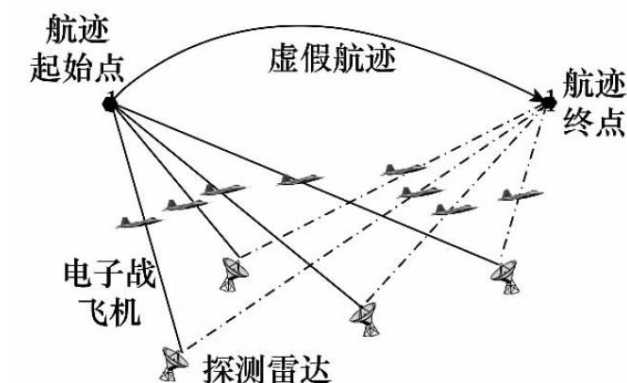


图 2 多无人机协同干扰组网雷达原理示意图

## 1.2 问题提出

现有某组网雷达系统,由 5 部雷达组成,地理坐标分别为雷达 1 (80,0,0),雷达 2 (30,60,0),雷达 3 (55,110,0),雷达 4 (105,110,0),雷达 5 (130,60,0) (单位: km)。雷达最大作用距离均为 150km。雷达将检测到的回波信号传输至融合中心并进行同源检验。同源检验的规则是:至少 3 部雷达同一时刻解算出的目标空间位置相同,即认为是一个合理的航迹点;20 个连续的合理航迹点形成的合理航迹被系统认为是一条真实的目标航迹。合理的航迹是指运动速度、转弯半径等运动状态指标均符合正常的运动规律。

现考虑无人机对组网雷达系统的协同干扰问题。无人机的飞行限制和无人机与雷达间作用有如下规则:

(1) 无人机的飞行速度范围为 120km/h~180km/h,飞行高度范围为 2000m~2500m,最大加速度不超过 10m/s<sup>2</sup>,无人机间距需控制在 100m 以上。

(2) 无人机采用若干隐身技术使得无需考虑无人机产生的真实目标回波,且干扰设备产生的干扰信号能保证被雷达有效检测到;每架无人机均搭载干扰设备并可独立工作。

(3) 同一时刻一架无人机只能干扰一部雷达,但可在该部雷达接收机终端产生多个目标点,这些目标点均位于雷达与无人机连线以及延长线上,距离雷达超过 150km 的假目标信息直接被雷达系统删除;同一时刻多架无人机可干扰同一部雷达。雷达同一时刻接收的多个目标点的状态信息均同时传送到信息融合中心。

(4) 每架无人机不同时刻可干扰不同雷达。同一条航迹不同时刻的航迹点,可以由组网雷达系统中不同的三部雷达检测确定。

基于以上条件，考虑一下 3 个问题。

问题一：附件 1 给出了一条拟产生的虚假目标航迹数据，该虚假航迹数据包含 20 个时刻的虚假目标位置坐标信息，时间间隔为 10s。限定每架无人机在该空域做匀速直线运动，航向、航速和飞行高度可在允许范围内根据需要确定。请讨论如何以最少数量的无人机实现附件 1 要求的虚假目标航迹，具体分析每一架无人机的运动规律和相应的协同策略。

问题二：对雷达实施有源假目标欺骗干扰时，干扰设备可同时转发多个均位于雷达与无人机连线以及延长线上的假目标信息。一架无人机同一时刻至多产生 7 个假目标信息。该组网雷达系统的每一部雷达的数据更新率为 10 秒。协同无人机编队可产生出多条虚假航迹，以实现更好的干扰效果。实际中无人机可机动飞行，但为控制方便，无人机尽可能少做转弯、爬升、俯冲等机动动作，转弯半径不小于 250m。讨论由 9 架无人机组成的编队在 5 分钟内，完成附件 1 要求的虚假航迹同时，至多还可产生出多少条虚假的航迹。给出每一架无人机的运动规律，并分析每一条虚假航迹的运动规律和合理性。

问题三：当组网雷达系统中的某部雷达受到压制干扰或其他因素的干扰时，可能在某些时刻无法正常获取回波信号，此时组网雷达系统信息融合中心可以采用下面的航迹维持策略：若之前与受干扰的雷达联合检测到目标的另 2 部雷达没有受到干扰，正常检测到回波信号，那么在融合中心就对两部雷达检测的目标航迹点信息进行同源检验，若通过亦视为是合理的目标航迹点；若一条航迹中这类航迹点的个数不超过 3 个时（该航迹的其余航迹点仍需通过前面规定的“同源检验”），该航迹就被继续保留。针对上述航迹维持策略，协同无人机编队的飞行，有可能产生更多的虚假航迹。该组网雷达系统的每一部雷达的数据更新率仍为 10 秒。讨论由 9 架无人机组成的编队在 5 分钟内，完成附件 1 要求的虚假航迹的同时，至多还可以产生出多少条虚假的航迹。给出每一架无人机的运动规律和协同策略，分许每一条虚假航迹的运动规律和合理性。

## 二 问题分析

### 2.1 问题一分析

问题一要求根据附件 1 给出的拟产生的虚假目标航迹数据,在限定每架无人机做确定航向、航速和飞行高度的匀速直线运动的前提下,设计出所需无人机数量最少的协同策略。

本题中我们结合了运筹学中图论的方法,对无人机的路线进行了规划。首先,借助可视化软件将无人机虚假目标航迹和雷达位置直观地表示在三维坐标中,由于受到无人机飞行速度的限制,分析出一架无人机在虚假航迹产生时间(200 秒)内只能对一台雷达进行干扰。然后,以无人机飞行速度、航向固定、无人机间距以及雷达探测时间间隔固定为约束,以无人机使用数量最少为优化目标,建立非线性规划模型,探求在不同高度平面上无人机的航行路径。最后,利用 MATLAB 编程求解得到无人机的最少使用数量,以及每架无人机的航迹。

### 2.2 问题二分析

问题二不再要求无人机做匀速直线运动,在产生附件 1 中既定虚假航迹点的同时,产生尽量多的虚假航迹。首先,将问题转化为优化无人机飞行航迹使得较少无人机即可完成规定航迹,那么,更多的无人机将被用来产生新的虚假航迹。接着,从无人机飞行速度与相邻采样时刻点的飞行距离的关系出发,对无人机飞行航迹进行优化,探求理想化飞行轨迹及与实际轨迹的差别,完善飞行轨迹模型。

将无人机飞行轨迹离散化,并结合不同轨迹情况对爬升、俯冲情况进行分析,分别建立近似处理模型。对优化得到的无人机航迹进行可行性判断,并通过增加无人机数目的方式进行调整,规划得到完成已知虚假航迹点所需的最少无人机数。

接下来,建立三维立体模型分析,通过几何关系分析,确定自由的无人机所能生成的最多的虚假航迹,并对最多虚假航迹产生情况下的无人机-雷达进行配对。最后,通过对应的无人机的运动状态判断最多航迹的可行性。

### 2.3 问题三分析

问题三在问题二的基础上,进一步考虑雷达受到干扰收不到回波的情况,提出了一种“弱化”的同源检测:如果在某一时刻之前与受干扰的雷达联合检测到目标的另外两部雷达接受到的回波满足同源检测,则依旧认为该航迹点是合理的航迹点;同时,当一条航迹中仅满足这种“弱化”的同源检测的目标航迹点不超过三个的时候,该航迹则是可以被接受的航迹。在这种情况下,如果有 3 个时刻仅需满足这种“弱化”的同源检测,每个时刻就会产生更多的航迹点,这样能够产生的虚假航迹也就会更多。

本题中我们首先根据受到干扰情况下的同源检测原理,分析了可能出现的雷达作用情况;然后以无人机飞行速度、飞行高度、无人机间距、加速度以及受干扰雷达数为限制条件,以虚假航迹最多为优化目标,建立非线性规划模型;考虑到本题中的变量非常多,而且主要的分析对象为受干扰雷达的组合情况,我们希望采用蚁群优化算法简化寻优的步骤,能够较为简单的分析受干扰雷达的组合情

况对虚假航迹条数的影响，针对这个问题，我们设计了干扰雷达的组合因素、安全性因素和变化量来构成启发函数，并设计了相应的求解算法，最后利用 MATLAB 编程求解得到可能的虚假航迹。

### 三、符号说明及模型假设

#### 3.1 符号说明

$(x_p, y_p, z_p)$	假目标的位置坐标
$(x_E, y_E, z_E)$	无人机的位置坐标
$u_{p1}、u_{p2}、u_{p3}$	假目标的加速度、航迹偏角速度、航迹倾角速度
$u_{E1}、u_{E2}、u_{E3}$	无人机的加速度、航迹偏角速度、航迹倾角速度
$v_E / v_p$	假目标/无人机的速度
R	雷达到假目标的距离
$\phi$	雷达与假目标连线的方位角
$\theta$	雷达与假目标连线的倾角
H	无人机的高度
D	无人机的间距
T	雷达探测时间间隔
N	无人机的数量

#### 3.2 模型假设

- 1、假设无人机和雷达都是质点。
- 2、假设无人机在整个飞行中不存在突然发生故障的情况。
- 3、假设匀速直线运动只能在水平面内。
- 4、假设每一时刻的航迹点都相同才能判断为同一航迹。

## 四 模型建立与求解

### 4.1 多机协同轨迹欺骗模型

距离拖引技术通过对回波进行延迟,就可以使雷达看到一个无人机距离之外的虚假目标。多机协同轨迹欺骗,即是通过多架战机对组网雷达进行距离欺骗,且使每架战机产生的假目标重合为一个虚假目标,通过对每架战机的航迹速度航向进行计算规划,使己方战机在协同突防过程中产生的假目标保持真实目标的运动特性,使组网雷达无法识别假目标,从而增加己方突击编队的突防成功率。已有相关论文对多机协同轨迹欺骗的无人机、虚假轨迹点的三维模型进行了研究<sup>[1]-[5]</sup>。下面将从距离欺骗干扰的基本模型入手,分析在题目要求情况下无人机的航行轨迹。

#### 4.1.1 单机干扰单部雷达模型

为了准确描述雷达、突击战机和假目标之间空间位置及其运动状态的关系,首先建立单机干扰单部雷达的模型,如图 4.1 所示,描述了单机干扰单部雷达时的空间位置关系。

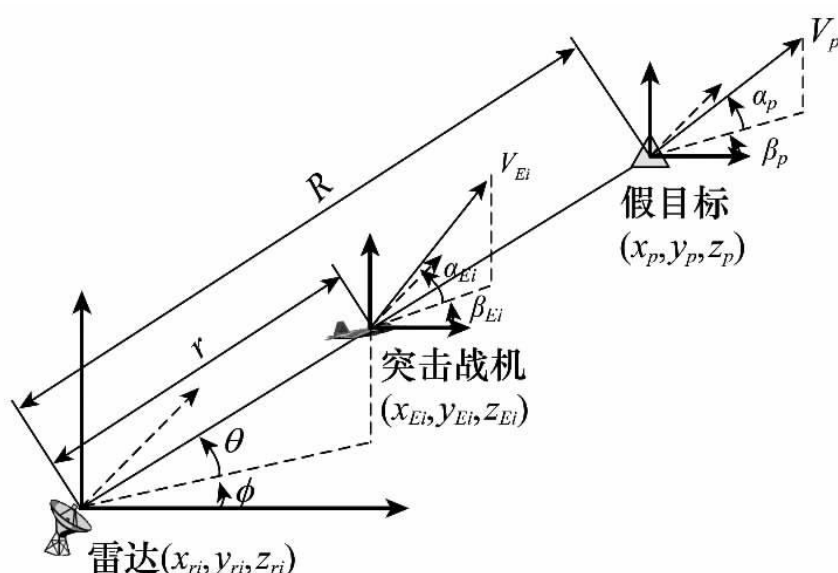


图 4.1 单机干扰假目标位置关系示意图

直角坐标系下, 假目标的运动方程为:



$$\begin{cases} \dot{x}_p = v_p \cos \beta_p \cos \alpha_p \\ \dot{y}_p = v_p \cos \beta_p \sin \alpha_p \\ \dot{z}_p = v_p \sin \beta_p \\ \dot{v}_p = u_{p1} \\ \dot{\alpha}_p = u_{p2} \\ \dot{\beta}_p = u_{p3} \end{cases} \quad (4-1)$$

式 4-1 中,  $(x_p, y_p, z_p)$  表示假目标的位置坐标,  $v_p$  为假目标的速度,  $\beta_p$  为假目标的航迹倾角,  $\alpha_p$  为假目标的航迹偏角,  $u_{p1}$ 、 $u_{p2}$ 、 $u_{p3}$  为控制量, 分别为加速度、航迹偏角速度和航迹倾角速度。

在以雷达为坐标原点的球坐标系下, 假目标有如下位置关系:

$$\begin{cases} x_p = R \cos \theta \cos \phi \\ y_p = R \cos \theta \sin \phi \\ z_p = R \sin \theta \end{cases} \quad (4-2)$$

式 4-2 中,  $R$  为雷达到假目标的距离,  $\phi$  为雷达与假目标连线的方位角,  $\theta$  为雷达与假目标连线的倾角。

对上式 4-2 求导, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{R} \cos \theta \cos \phi - R \sin \theta \cos \phi \dot{\theta} - R \cos \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_p = \dot{R} \cos \theta \sin \phi - R \sin \theta \sin \phi \dot{\theta} + R \cos \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{z}_p = \dot{R} \sin \theta + R \cos \theta \dot{\theta} \end{cases} \quad (4-3)$$

改写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} \\ R \cos \theta \dot{\phi} \\ R \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{R} \\ R \cos \theta \dot{\phi} \\ R \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

将上式展开并结合式 4-1 为:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{R} &= v_p (\cos \theta \cos \phi \cos \beta_p \cos \alpha_p + \cos \theta \sin \phi \cos \beta_p \sin \alpha_p + \sin \theta \sin \beta_p) \\ &= v_p (\cos \theta \cos \beta_p \cos(\alpha_p - \phi) + \sin \theta \sin \beta_p) \\ \dot{\phi} &= \frac{v_p}{R \cos \theta} (-\sin \phi \cos \beta_p \cos \alpha_p + \cos \phi \cos \beta_p \sin \alpha_p) \\ &= \frac{v_p \cos \beta_p \sin(\alpha_p - \phi)}{R \cos \theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{v_p}{R} (-\sin \theta \cos \phi \cos \beta_p \cos \alpha_p - \sin \theta \sin \phi \cos \beta_p \sin \alpha_p + \cos \theta \sin \beta_p) \\ &= \frac{v_p}{R} (-\sin \theta \cos \beta_p \cos(\alpha_p - \phi) + \cos \theta \sin \beta_p) \end{aligned} \right. \quad (4-6)$$

与虚假目标航迹类似，在直角坐标系下无人机的运动方程为：

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_E &= v_E \cos \beta_E \cos \alpha_E \\ \dot{y}_E &= v_E \cos \beta_E \sin \alpha_E \\ \dot{z}_E &= v_E \sin \beta_E \\ \dot{v}_E &= u_{E1} \\ \dot{\alpha}_E &= u_{E2} \\ \dot{\beta}_E &= u_{E3} \end{aligned} \right. \quad (4-7)$$

式 4-7 中， $(x_E, y_E, z_E)$  表示无人机的位置坐标， $v_E$  为无人机的速度， $\beta_E$  为无人机的航迹倾角， $\alpha_E$  为无人机的航迹偏角， $u_{E1}$ 、 $u_{E2}$ 、 $u_{E3}$  为控制量，分别为加速度、航迹偏角速度和航迹倾角速度。

将式 4-7 转换到以雷达为原点的球坐标系中：

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ r \cos \theta \dot{\phi} \\ r \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

将上式 4-8 展开并结合式 4-7 为：

$$\begin{cases} \dot{r} = v_E (\cos \theta \cos \phi \cos \beta_E \cos \alpha_E + \cos \theta \sin \phi \cos \beta_E \sin \alpha_E + \sin \theta \sin \beta_E) \\ \quad = v_E (\cos \theta \cos \beta_E \cos(\alpha_E - \phi) + \sin \theta \sin \beta_E) \\ \dot{\phi} = \frac{v_E}{r \cos \theta} (-\sin \phi \cos \beta_E \cos \alpha_E + \cos \phi \cos \beta_E \sin \alpha_E) \\ \quad = \frac{v_E \cos \beta_E \sin(\alpha_E - \phi)}{r \cos \theta} \\ \dot{\theta} = \frac{v_E}{r} (-\sin \theta \cos \phi \cos \beta_E \cos \alpha_E - \sin \theta \sin \phi \cos \beta_E \sin \alpha_E + \cos \theta \sin \beta_E) \\ \quad = \frac{v_E}{r} (-\sin \theta \cos \beta_E \cos(\alpha_E - \phi) + \cos \theta \sin \beta_E) \end{cases} \quad (4-9)$$

由于实施距离欺骗时，无人机和雷达、虚假目标在一条直线上，在期望的假目标轨迹约束下，无人机的自由度降为一维。

由式 4-9 可以导出，

$$\tan \beta_E = \frac{\cos \theta \sin \theta \cos(\alpha_E - \phi) \dot{\phi} + \sin(\alpha_E - \phi) \dot{\theta}}{\cos^2 \theta \dot{\phi}} \quad (4-10)$$

再将式 4-7 带入到式 4-9 中的第一式：

$$\dot{r} = r \dot{\phi} [\cos^2 \theta \cot(\alpha_E - \phi) + \tan \beta_E \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin(\alpha_E - \phi)}] \quad (4-11)$$

无人机的控制方程：

$$\dot{\alpha}_E = \mu_{E2} \quad (4-12)$$

无人机的速度可由式 4-6 导出：

$$v_E^2 = (\dot{r})^2 + (r \cos \theta \dot{\phi})^2 + (r \dot{\theta})^2 \quad (4-13)$$

综上所述，单机欺骗单部雷达的系统模型可以由式 4-1~式 4-13 描述，明确了在可以完成虚假轨迹欺骗的前提下，无人机、虚假轨迹点的位置坐标和运动状态。

#### 4.1.2 多机协同欺骗多部雷达模型

多架无人机采用距离延迟技术协同干扰组网雷达时，其模型是基于 4.1.1 中单机干扰单部雷达模型。当多机协同干扰时，需要将假目标的运动模型在以不同雷达为坐标原点的坐标系中进行转换，使得干扰不同雷达产生的假目标重合成一个目标。

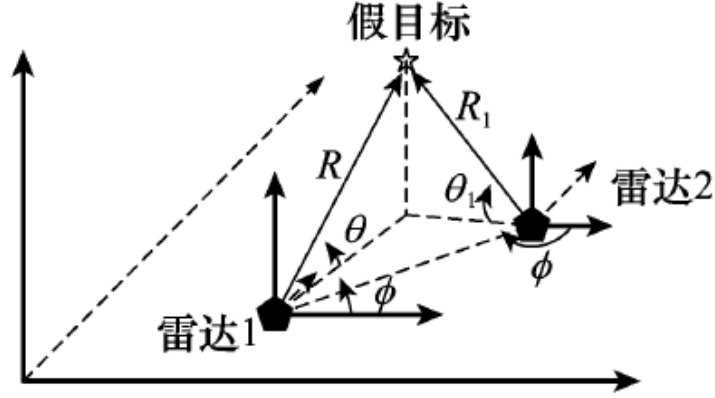


图 4.2 多机协同欺骗时假目标的状态转换

如图 4.2 所示, 将假目标的运动模型在以雷达 1 为中心的球面坐标系下转换到相应的以雷达 2 为中心的球面坐标系中。可以看出, 假目标与无人机的  $\theta$ 、 $\phi$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\phi}$ , 可以通过下式计算:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{z_p - z_o}{R}\right) \quad (4-14)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y_p - y_o}{x_p - x_o}\right) \quad (4-15)$$

将式 4-14 和式 4-15 分别求导, 得:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_p - z_o}{R}\right)^2}} \cdot \frac{\dot{z}_p R - \dot{R}(z_p - z_o)}{R^2} \\ \dot{\phi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_p - y_o}{x_p - x_o}\right)^2} \cdot \frac{(x_p - x_o)\dot{y}_p - (y_p - y_o)\dot{x}_p}{(x_p - x_o)^2} \\ \dot{\theta} = \frac{\dot{z}_p \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}}{R^2} - \frac{(z_p - z_o)}{R^2} \left[ \frac{(x_p - x_o)\dot{x}_p}{R_{xy}} + \frac{(y_p - y_o)\dot{y}_p}{R_{xy}} \right] \\ \dot{\phi} = \frac{(x_p - x_o)\dot{y}_p - (y_p - y_o)\dot{x}_p}{R_{xy}^2} \end{cases} \quad (4-16)$$

式 4-16 中,  $R_{xy} = \sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2}$ 。由此可见,  $\theta$ 、 $\phi$ 、 $\dot{\theta}$  和  $\dot{\phi}$  可以根据已知的雷达位置  $(x_o, y_o, z_o)$  和预先设定的假目标运动轨迹  $(x_p(t), y_p(t), z_p(t), \dot{x}_p(t), \dot{y}_p(t), \dot{z}_p(t))$  通过式 4-14、4-15 和 4-16 求出。

综上所述，多机协同欺骗多部雷达的模型可由单机欺骗干扰模型，耦合关系式 4-16，以及假目标位置计算公式 4-1 组成。

## 4.2 模型一的建立与求解

分析问题一，已知由 20 个时间间隔为 10s 的假目标组成的虚假航迹，限定每架无人机在确定航向、航速和飞行高度下做匀速直线运动，则 4.1 中多机协同欺骗多部雷达模型得到简化。

基本模型建立步骤（流程图）如下：

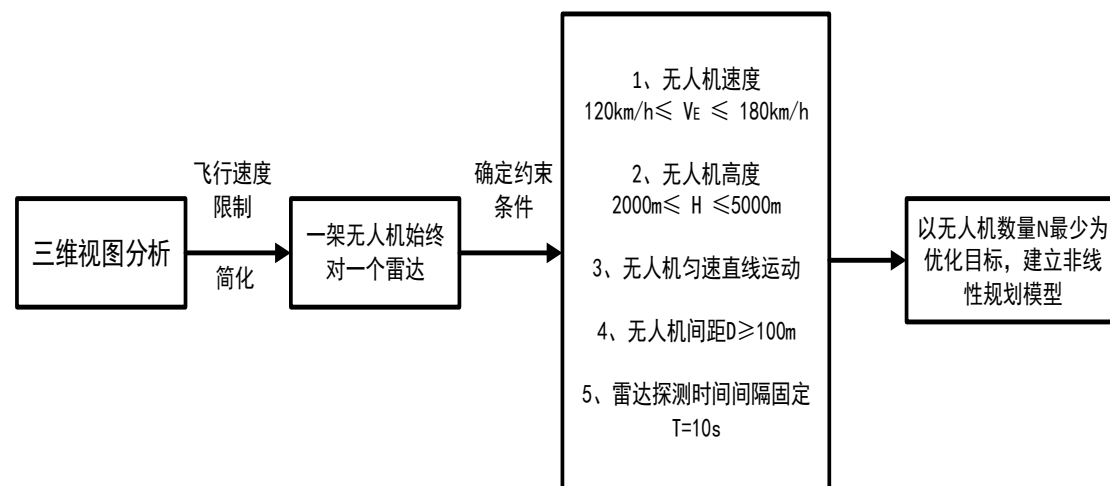


图 4.3 模型一建立流程

### 4.2.1 雷达站与虚假目标航迹三维视图分析

为了对题目中所给雷达站的空间位置和附件 1 中给出的一条虚假目标航迹在三维空间中更直观的判断，我们首先在 MATLAB 软件中建模，将雷达站坐标以及虚假目标航线数据输入到 MATLAB 中，在三维直角坐标系下确定雷达站与虚假航线的位置，并对雷达站编号 A~E，对虚假目标航迹按时间先后编号 1~20。根据距离假目标欺骗干扰的原理，雷达、无人机及假目标应处在同一条直线上。将任一虚假航线上的假目标所在位置点与任一雷达站所在位置点连接起来，所得直线上在相应的假目标点对应的时刻，应有无机存在，对雷达站发射虚假位置信息。

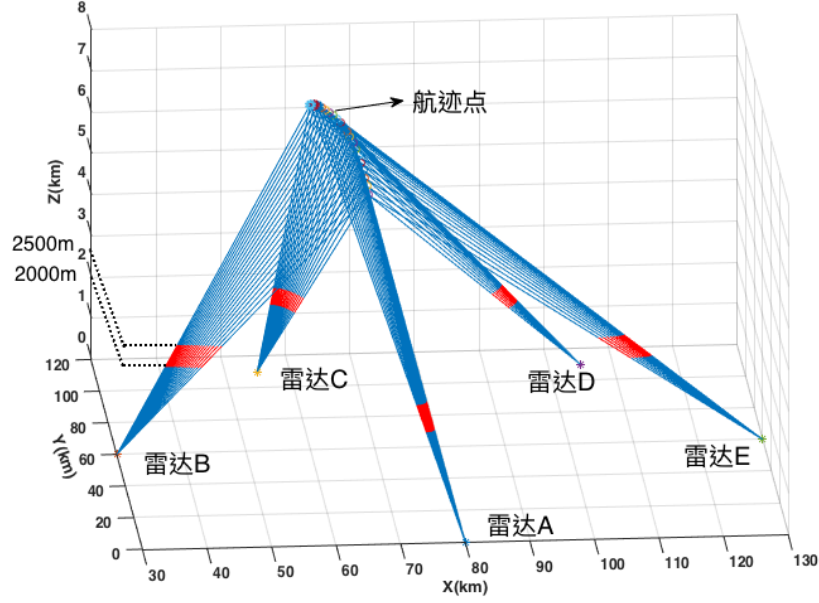


图 4.4 雷达站与虚假航迹三维视图

#### 4.2.2 模型简化

如图 4.4 所示，由于虚假目标航迹集中在五个雷达站中心区域上空，故不同雷达站到虚假航迹点连线上无人机航迹点相距较远。考虑到无人机在高度为 2000m~2500m 的平面上做匀速直线运动，故其在水平面上 20 个虚假航迹点产生的时间段中，无人机在水平面运动的距离存在最大最小值。

$$\begin{cases} d_{\max} = V_{E\max} \cdot T \\ d_{\min} = V_{E\min} \cdot T \end{cases} \quad (4-17)$$

在雷达与虚假航迹连线的三维视图中，我们可以看出，随着水平高度的升高，不同雷达站对应连线（无人机所在直线）与水平面相交点之间的距离在减小。因此当无人机在高度为 2500m 水平面做匀速直线运动时，一架无人机从干扰一个雷达站到干扰另一个雷达站所需要飞行的距离最短。分别计算在 2500m 高空平面上无人机对 A~E 雷达进行干扰所需要飞行的距离，得到最小距离为

$$l_{\min} = l_{A \sim B} = 29.16km \quad (4-18)$$

考虑到

$$d_{\max} < l_{\min} \quad (4-19)$$

因此一架无人机在 20 个虚假航迹点完成过程中，无法从干扰一台雷达的航线上飞到干扰另一台雷达的航线上，所以确定了一架无人机至多只能对一台雷达

进行干扰的模型，模型得到简化。

### 4.2.3 模型一建立

根据 4.2.2，将不同高度平面与雷达和虚假航迹点连线的交点连接起来的线段即为无人机的航行轨迹所在直线，而线段的条数即为所需无人机的数量。那么问题转化成在无人机速度、飞行高度、做匀速直线运动和间距保持大于 100m 等约束下，寻求能产生附件 1 中 20 个虚假航迹点所需要的最少无人机数目的非线性规划问题：

$$\begin{aligned} & \text{目标:} && \min \quad N \\ & \text{约束:} && \begin{cases} 1、120\text{km/h} \leq V \leq 180\text{km/h} (\text{无人机速度}) \\ 2、2000\text{m} \leq H \leq 2500\text{m} (\text{无人机高度}) \\ 3、D \geq 100\text{m} (\text{无人机间距}) \\ 4、\text{对于任一架无人机 } V、H \text{ 保持不变} \\ 5、T = 10\text{s} (\text{雷达探测时间间隔}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-20)$$

### 4.2.4 模型一求解

由于每架无人机只能够作用于一个雷达，所以问题转化成一个雷达最少需要多少架无人机就能够完全遮挡 20 个航迹点。理论上，一架匀速直线运动的无人机最少可以遮挡 2 个航迹点，所以第一步我们要先确定一架无人机最多可以遮挡几个航迹点；然后，针对 5 个雷达，分别求出最少的无人机个数，由于同一时刻的航迹点只需要三个雷达遮挡住即可，因此选取其中最少的三个雷达即可，流程图如下：

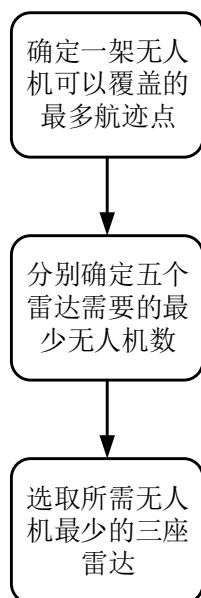


图 4.5 模型一求解流程图

#### 4.2.4.1 确定单架无人机覆盖最多航迹点数算法

Step1: 选取一座雷达, 记为雷达  $i$

Step2: 针对雷达  $i$ , 假定某一高度  $H$ , 利用三角形相似的比例关系, 确定该高度上无人机的 20 个可能位置, 记为  $w_j$  ( $j=1, \dots, 20$ );

Step3: 初始化  $m=1, n=m+1, q=n+1$ ,

Step4: 先让  $w_m$  和  $w_n$  共线, 判断  $w_q$  和  $w_n$  是否共线, 如果是, 则  $n=q, q=q+1$ , 继续重复执行 Step4, 输出单架无人机覆盖最多航迹点数  $N=q-1$ , 当  $n \geq 21$  的时候说明用一架无人机可以覆盖所有航迹点, 则直接执行 Step5; 如果否, 输出单架无人机覆盖最多航迹点数  $N=q-1$ , 执行 Step5。

Step5:  $i=i+1$ , 重复执行 Step1~Step4。

经过这样的计算得到, 每座雷达单架无人机覆盖最多航迹点数最多为 2。

#### 4.2.4.2 确定最少无人机数量算法

Step1: 选取一座雷达, 记为雷达  $i$

Step2: 针对雷达  $i$ , 假定某一高度  $H$ , 利用三角形相似的比例关系, 确定该高度上无人机的 20 个可能位置, 记为  $w_j$  ( $j=1, \dots, 20$ );

Step3: 初始化  $m=1, n=m+1$ ;

Step4: 初始化集合  $U=\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ;

Step5: 判断  $w_U(m)$  与  $w_U(n)$  之间的距离  $D_x$ , 则该区间的速度  $v=D_x/(10*(n-m))$ , 判断  $33.334 < v \leq 50$  是否成立, 如果是, 则说明  $w_U(m)$  与  $w_U(n)$  可以用一架无人机覆盖, 同时把  $U(m)$  和  $U(n)$  从集合  $U$  中剔除, 重复执行 Step5, 直至集合  $U$  为空为止, 执行 Step6; 如果否, 令  $n=n+1$  重复执行 Step5。

Step6: 当  $n \geq 21$  的时候说明该高度  $w_U(m)$  必须单独用一架无人机来覆盖, 此时令  $H=H+0.5$ , 重复执行 Step2~Step4; 当  $H \geq 2500$  时,  $w_U(m)$  必须单独用一架无人机来覆盖, 同样把  $U(m)$  从集合  $U$  中剔除, 当集合  $U$  为空集时, 执行 Step6;

Step7:  $i=i+1$ , 重复执行 Step1~Step5。

#### 4.2.4.3 求解结果

经过算法求解, 发现 A 雷达需要用 14 架无人机, B 雷达需要 10 架无人机, C 雷达需要 10 架无人机, D 雷达需要 11 架无人机, E 雷达需要 16 架无人机。因此选取 B、C 和 D 号雷达, 则最少需要  $10+10+11=31$  架无人机。

图 4.6~图 4.8 为 B、C、D 雷达对应的无人机航迹图, 并给出了对应的飞行高度。表 1 给出了 31 架无人机的协同策略。



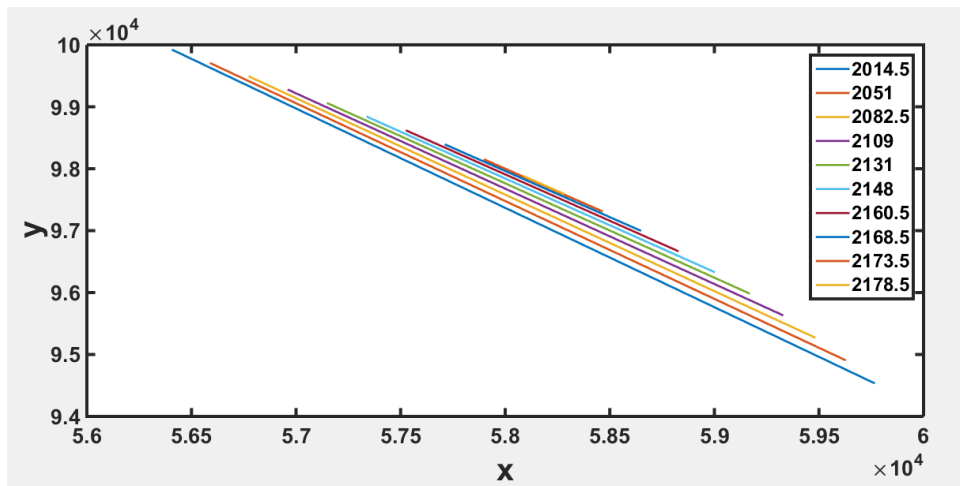


图 4.6 B 雷达对应无人机航迹图

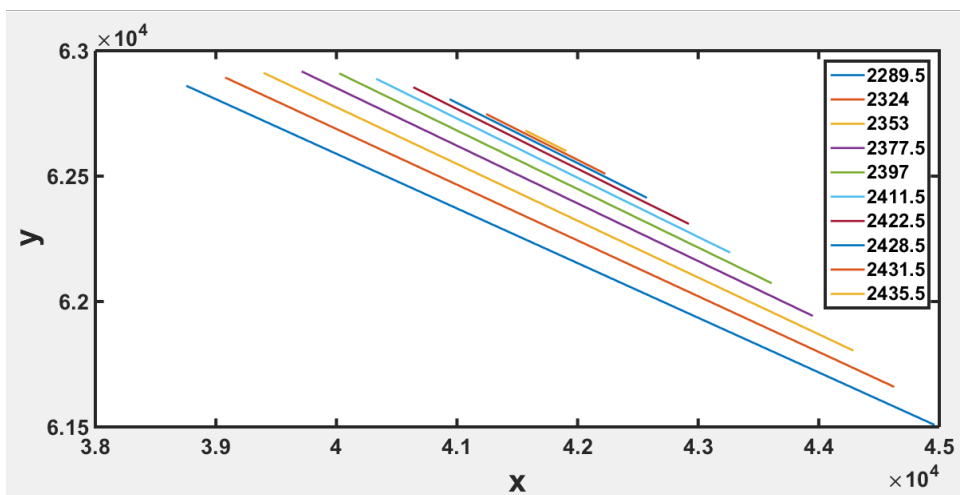


图 4.7 C 雷达对应无人机航迹图

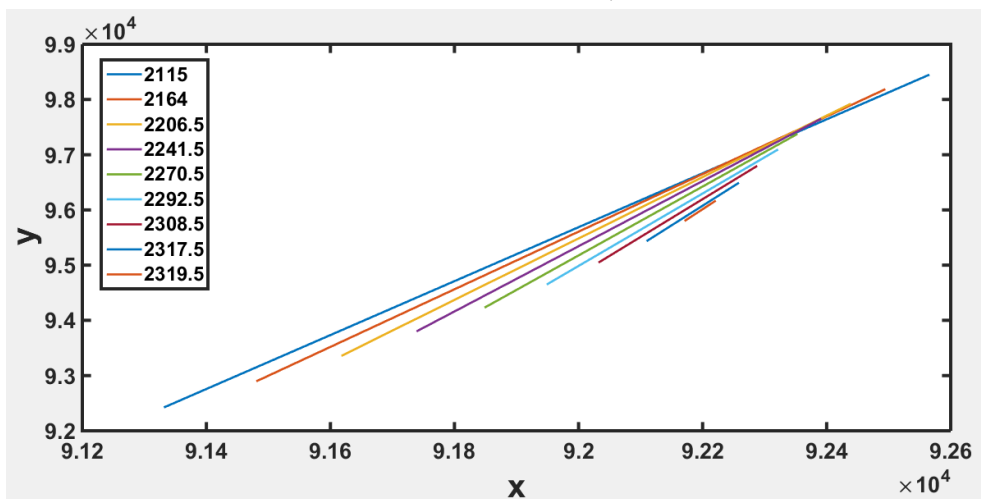


图 4.8 D 雷达对应无人机航迹图

无人机协同策略：

表 1 无人机协同策略（对应雷达、对应假目标、速度）分配表

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
雷达	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
假目标	1,20	2,19	3,18	4,17	5,16	6,15	7,14	8,13	9,12	10,11	1,20
速 度 (m/s)	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34
编号	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
雷达	C	C	C	C	C	C	C	C	C	D	D
假目标	2,19	3,18	4,17	5,16	6,15	7,14	8,13	9,12	10,11	3,20	4,19
速 度 (m/s)	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34
编号	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
雷达	D	D	D	D	D	D	D	D	D		
假目标	5,18	6,17	7,16	8,15	9,14	10,13	11,12	1	2		
速 度 (m/s)	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	33.34	50	50		

4.3 模型二的建立与求解

相较于问题一模型，问题二中不再规定无人机的航向、航速、飞行高度以及匀速直线运动的运动状态。在需要同样地完成附件 1 中 20 个时刻的虚假目标位置坐标点过程中，每一架无人机的速度、航向可以改变，这也使更少数量的无人机即可完成附件一中虚假航线。

但题目对于无人机运动状态做出了尽可能少做转弯、爬升、俯冲等机动动作，转弯半径不能过小等要求。在完成规定虚假航线的前提下，由于每一架无人机同一时刻可产生多个假目标信息，所以还可以产生多条虚假航迹。

考虑到如果更少的飞机可以完成规定虚假航迹，则更多的无人机为更多的虚假航迹的产生提供了可能。因此将问题二中产生更多虚假航迹的目标转化成先做出完成规定虚假航迹所需的最少无人机数量的规划，再利用自由无人机做出产生更多虚假航线的最优规划。

4.3.1 已知航迹恢复模型

尝试利用一架无人机完成附件 1 中规定虚假航迹，首先由于无人机的运动状态应尽量避免爬升和俯冲，所以对无人机的轨迹采用先爬升后同一平面内飞行最后俯冲的方式，并尽量减少爬升与俯冲的高度。接着对无人机弧形轨迹进行离散化处理，针对无人机运动速度的要求，对轨迹弦长进行了优化。最后对爬升与俯冲过程的轨迹进行优化，尝试寻找可由一部无人机完成虚假轨迹的飞行轨迹。模型建立步骤（流程图）如下：

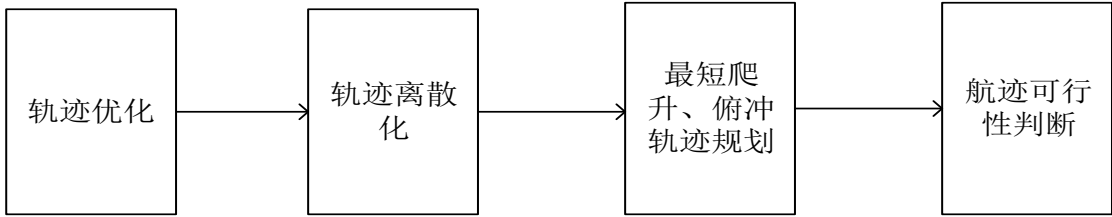


图 4.9 已知航迹恢复模型流程图

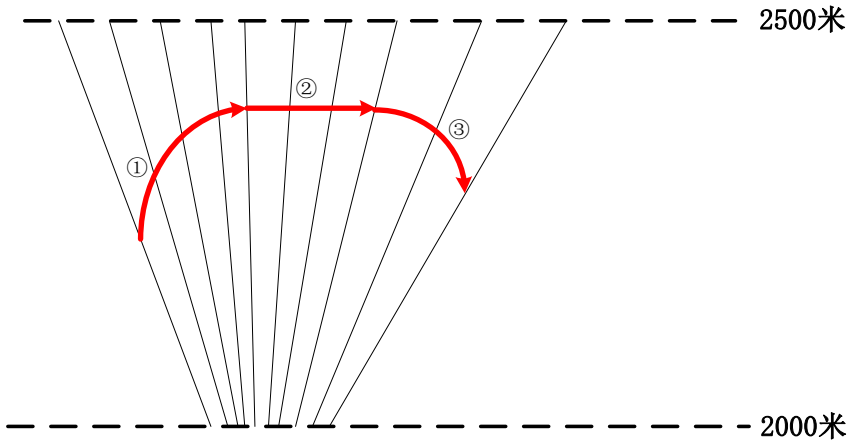


图 4.10 无人机轨迹选取示意图

4.3.1.1 轨迹优化

如图 4.10 所示，图示直线为一部雷达与虚假点连接线，不同雷达探测时刻对应不同直线。要使无人机尽量少做爬升、俯冲，则希望尽可能在同一高度水平面飞行更长的时间。又因为无人机在同一高度飞行时，要求两相邻直线间的距离较大。从上图可以看出两条相邻直线之间的间距随着高度升高逐渐增大，所以在高度较高的平面上才能实现水平飞行。

但是，在实际规划情况中，并不能实现无人机全程在同一高度水平飞行。例如，在上图中①、③处，两相邻直线间的间距过短或过长，因此存在无人机飞行高度的变化过程。图中红线表示无人机普遍运动轨迹。

4.3.1.2 轨迹离散化

为了简化任意两条直线之间无人机运动轨迹，用线段连接两间隔直线，直线

的长度由无人机的飞行速度决定。由于无人机的飞行速度：

$$120\text{km/h} \leq V_E \leq 180\text{km/h} \quad (4-21)$$

故在一个时间间隔  $T=10\text{s}$  内，无人机飞过的直线距离为  $333\text{m} \sim 500\text{m}$ 。

#### 4.3.1.3 最短爬升、俯冲轨迹规划

在反推爬升航迹的过程中，应使图 4.10 中①过程经历更小的高度变化。那么在①过程的轨迹规划中，期望以较短的线段连接两条相邻直线。即以无人机在一个时间间隔 ( $T=10\text{s}$ ) 内飞行的最短距离  $333\text{m}$  作为上述线段的长度。

在规划俯冲航迹的过程中，应使图 4.10 中③过程经历更小的高度变化。那么在③过程的轨迹规划中，期望以较长的线段连接两条相邻直线。即以无人机在一个时间间隔 ( $T=10\text{s}$ ) 内飞行的最长距离  $500\text{m}$  作为上述线段的长度。

按照以上规则，把航迹简化成了折线段，但是，在实际的飞行过程中，无人机的运动轨迹是平滑连续的曲线，所以在一个检测区间内无人机的实际飞行距离大于理论的线段长度。因为在①过程中取最短线段长度，即对应最慢的无人机飞行速度。所以在实际飞行过程中，无人机可通过提高速度完成此段飞行。而对③过程而言，以无人机最快速度飞行，无法通过加速完成实际航线，因此需要对俯冲时所采用的线段长度进行调整。

#### 4.3.1.4 航迹可行性判断

根据以上过程建立的航迹，可以满足在每个检测点时，无人机处于雷达-假目标连线上，但是，无人机的飞行高度需满足：

$$2000\text{m} \leq H \leq 2500\text{m}$$

因此需要对无人机航迹高度进行判断，若满足要求，则沿该航迹可实现一架无人机对规定虚假航迹的实现。若不满足则需增加无人机数量。

#### 4.3.2 虚假航迹规划模型

根据 4.3.1 得到的无人机恢复虚假航线的结果，对无人机的状态进行具体安排以求获得最多的虚假航线。有以下考虑：使用最少数量的无人机完成附件 1 中要求的虚假航迹，以使有最多数量的自由无人机进行机动安排，这样应能产生最多的虚假航线。其次，9 架无人机所能生成的虚假航线的最大数量应是确定的，具体可由几何关系推导而得。最后，在安排无人机位置分布时，应使每个雷达周围的对其进行欺骗的无人机数量尽可能少，这样可减小无人机距离小于安全距离这一事件发生的可能性。

基于以上考虑，设计下述流程进行求解。首先，根据 4.3.1 所得结果，以使用最少无人机为前提，恢复附件 1 中的虚假航迹。其次，进行立体几何分析，确定 9 架无人机所能生成的最多的虚假航迹，并根据所能产生最多虚假航迹的情况进行无人机-雷达配对。最后，确定无人机具体的运动状态，判断生成最多虚假航迹的可行性，并对产生的其余虚假航迹进行分析，判断其合理性。该模型流程图如下所示。

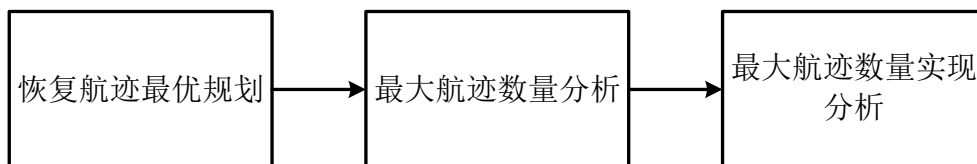


图 4.11 虚假航迹规划模型建立流程图

#### 4.3.2.1 恢复航迹最优规划

由 4.3.1 中已得到了每台雷达周围使得附件 1 虚假航迹得以覆盖的无人机的数量，且每个虚假航迹点至少需要三台雷达共同检测才可得以确认，那么就寻找三台使用无人机数量最少的雷达作为组合，以作用在这些雷达上的无人机来恢复附件 1 中虚假航迹。这时，可得到已经使用了的无人机的数量，剩下的即为自由的无人机，可根据情况任意安排以获得最多的虚假航线。根据 4.3.1 中模型的求解结果，得到每台雷达均仅受 1 架无人机的作用便可使无人机位于雷达与规定假目标的连线上。那么选取 3 架无人机，分别作用于一台雷达，便可恢复规定虚假航迹，剩余 6 架无人机为自由无人机。

#### 4.3.2.2 最大航迹数量分析

9 架无人机代表着 9 条雷达与虚假航迹的连线。虽然无人机不一定每一时刻均作用于雷达，但更多的无人机进行工作意味着能产生更多的雷达-假目标连线，使得尽可能多的产生虚假航线。所以我们期望在每一个检测时刻，所有 9 架无人机均作用于雷达。由于 3 条雷达-假目标连线才能确定一个假目标，这一现象可简化为三棱锥进行体现，如图 4.11 (a) 所示。容易考虑到 9 条连线可分为 3 组，组成 3 个三棱锥，即产生 3 个顶点  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ，代表可产生三个假目标。但是，根据题目给定的条件，一架无人机可作用于雷达产生多个均位于雷达-无人机连线上的目标。这转化为立体几何的描述即为，不同的三棱柱可共用棱，且锥顶点不同。在可共用棱的条件下可以考虑到，不应使两个三棱锥共用两条棱，因为这样这两个三棱锥的锥顶点共点  $O$ ，如图 4.11 (b) 所示，相当于无法产生更多的假目标，这显然是与本题的目标不一致的。

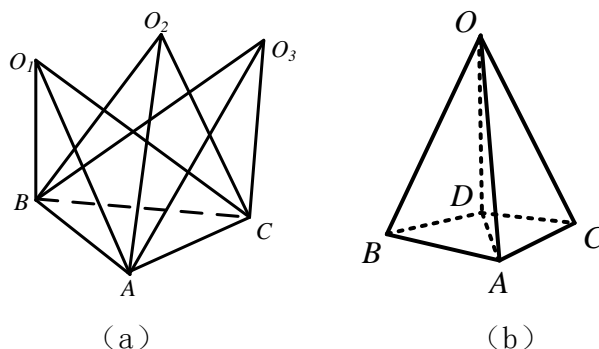


图 4.12 三棱锥的立体几何分析图

因此，两三棱锥之间共用一条棱，这样可使得原本存在的一个三棱锥（即规定假目标）的每条棱再与新的两条棱配对形成新的三棱锥。这样规划使得 9 条棱

产生 4 个锥顶点，这是可产生最多假目标的情况。根据以上描述，并结合每个雷达周围分配尽可能少的无人机，得到如图 4.12 所示的无人机初步位置分布情况。图中，A，B，C，D，E 分别代表 5 个雷达，共形成 4 个锥顶点  $O_1$ ， $O_2$ ， $O_3$ ， $O_4$ ，即代表 4 个假目标。A，B，C，D 雷达附近均有 2 架无人机，E 雷达附近有 1 架无人机。

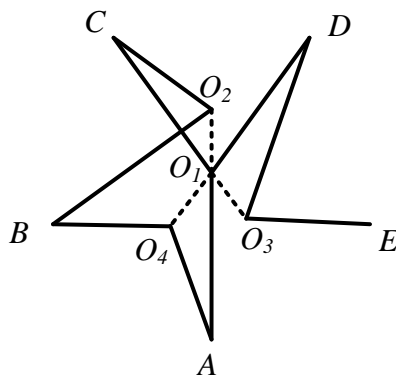


图 4.13 一种某一时刻形成 4 个假目标的无人机-雷达分配方式俯视图

#### 4.3.2.3 最大航迹数量实现分析

确认初步的无人机位置分配后，需要具体确定无人机的运动状态以及对应的虚假航迹的运动状态。但无人机运动状态过于繁杂，若给定某种无人机运动方式，得到的虚假航迹可能极不合理。在此同时，容易认识到这一步骤的主要目的是判断生成 4 条虚假航线是否可行。那么便可从设置其他 3 条合理的虚假航线出发，反推无人机的运动状态。若无人机运动状态合理，那么便可得到结论：9 架无人机在某种运动状态下，在恢复附件 1 虚假航线的情况下，最多还可生成 3 条不同的虚假航线。

#### 4.3.3 模型二的求解

根据以上模型，构建了以下算法用于虚假航迹的恢复和重新规划。

##### 4.3.3.1 虚假航迹恢复算法

Step1: 绘出 20 个虚假航迹点，并分别与各雷达相连，由此每个雷达可引申出 20 条线段。

Step2: 对某一雷达，选取某一高度为  $H$  的水平面，即可得到该平面与 20 条线段相交形成的 20 个交点。

Step3: 根据无人机速度  $120\text{km/h} \leq V \leq 180\text{km/h}$  的限制，计算出 10 秒（前后两次检测的间隔时间）内无人机的飞行距离范围为  $333.3\text{m} \leq D \leq 500\text{m}$ 。计算 Step2 中确定的相邻两点之间的距离，并确定符合无人机飞行距离范围的起始区间（第  $i$  个）和终止区间（第  $j$  个），那么符合范围的区间个数  $N$  满足  $N=j-i+1$ 。

Step4: 改变高度  $H$ ，得到不同高度对应的不同区间个数  $N$ 。选取  $N$  最大时所对应的高度  $H$  作为无人机水平飞行的高度。

Step5: 倒推爬升轨迹。取第  $i$  个区间的起点  $p_i$ , 做一条长为 333.4m 的线段, 该线段需交第  $i-1$  个区间的起始点所在的雷达-假目标连线于一点, 记为  $p_{i-1}$ 。

Step6: 以点  $p_{i-1}$  为起点, 重复 Step5 的步骤, 直到得到第 1 个区间的起始点所在的雷达-假目标连线上的点  $p_1$  为止, 爬升轨迹倒推完毕。

Step7: 顺推俯冲轨迹。取第  $i$  个区间的终点  $p_{i+1}$ , 做一条长为 450m 的线段, 该线段需交第  $i+1$  个区间的终点所在的雷达-假目标连线于一点, 记为  $p_{i+2}$ 。

Step8: 以点  $p_{i+2}$  为起点, 重复 Step7 的步骤, 直到得到第 19 个区间的终点所在的雷达-假目标连线上的点  $p_{20}$  为止, 俯冲轨迹顺推完毕。

Step9: 对点  $p_1$  和点  $p_{20}$  的高度进行判断, 看是否满足 2000m-2500m 的高度范围。若均满足范围, 则得到无人机航线。若任一点不满足范围, 则需要更多无人机来协助。

#### 4.3.3.2 虚假航迹规划算法

Step1: 根据虚假航迹恢复算法, 确认可实现附件 1 中虚假航迹恢复的最少无人机架数。

Step2: 建立立体几何模型, 分析 9 架无人机理论上最多可产生的虚假航线条数。

Step3: 根据雷达位置, 并依据同一雷达附近无人机架数尽量小的原则, 确定可实现最多虚假航线的无人机-雷达位置分配, 绘出分配示意图 (如图 4.13), 确定附件 1 中虚假航线的恢复由雷达 A, 雷达 C 和雷达 D 完成。

Step4: 根据附件 1 中的虚假航线, 按照一定比例得到一条航迹类似的新虚假航迹  $L_1$ , 该虚假航迹位于原有虚假航迹和雷达 A 的延长线上。

Step5: 根据新虚假航线  $L_1$ , 以及无人机-雷达分配示意图, 采用与前述虚假航迹恢复算法相同的方法来计算  $L_1$  所对应的无人机飞行规则。

Step6: 重复 Step4 和 Step5, 分别得到雷达 C 与其对应的新虚假航线  $L_2$ , 雷达 D 与其对应的新虚假航线  $L_3$ , 以及他们相应的实现虚假航迹的无人机飞行规则。

Step7: 判断无人机的飞行高度是否满足 2000m-2500m 的范围; 讨论产生的 3 条新虚假航迹  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  的合理性。若无人机满足飞行规则, 且新虚假航线合理, 则证明实现附件 1 虚假航线的同时最多能产生 3 条航线。

#### 4.3.3.3 求解结果

根据以上构建的算法, 利用 MATLAB 进行计算, 求得 4 条可能的虚假航迹, 如图 4.14 所示, 其中一条与附件二中的目标轨迹重合, 与理论相符合。

由于题中给出了 9 架无人机, 图 4.14 对应其分别的运动轨迹, 具体数据见附件 3, 因为每条轨迹都是根据理论分析加上算法求出的, 所以其一定是符合运动规律的, 具体的运动规律在前文已经进行了详细阐述。

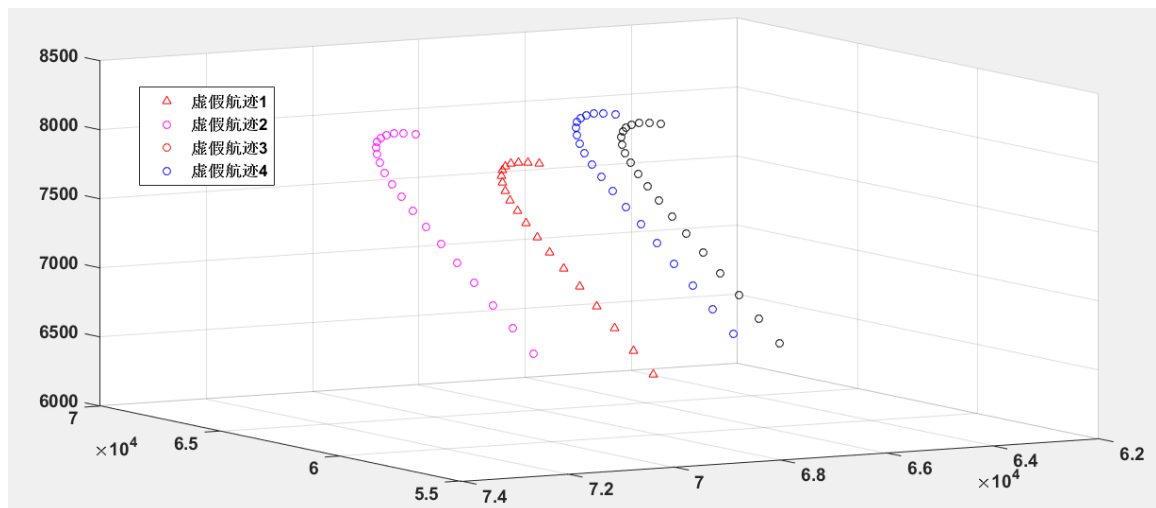


图 4.14 虚假航迹图

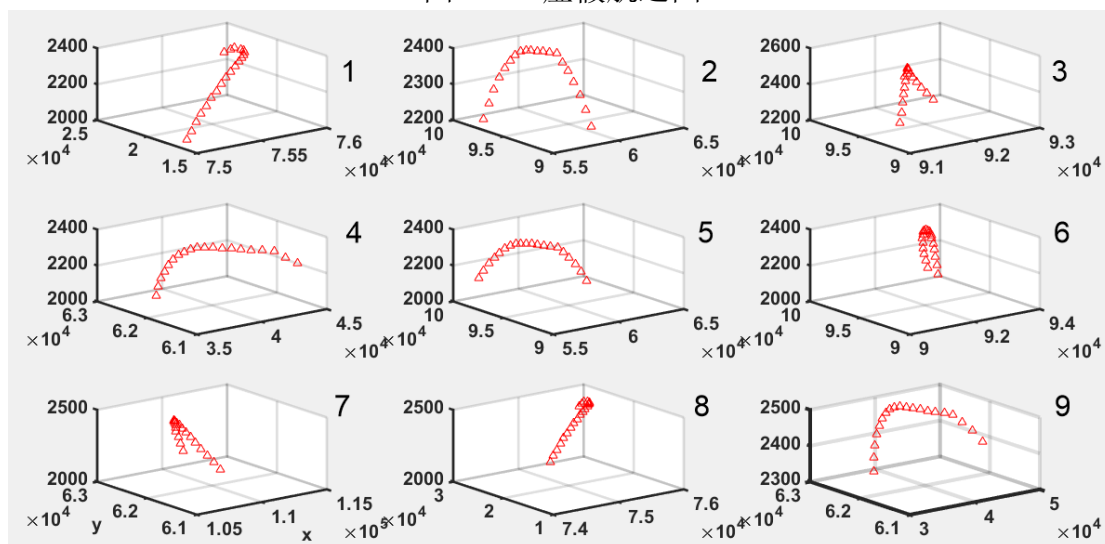


图 4.15 无人机轨迹图

#### 4.4 模型三的建立与求解

相较于问题二，问题三进一步考虑雷达受到干扰收不到回波的情况，提出了一种“弱化”的同源检测：如果在某一时刻之前与受干扰的雷达联合检测到目标的另外两部雷达接受到的回波满足同源检测，则依旧认为该航迹点是合理的航迹点；同时，当一条航迹中仅满足这种“弱化”的同源检测的目标航迹点不超过三个的时候，该航迹则是可以被接受的航迹。在这种情况下，如果有 3 个时刻仅需满足这种“弱化”的同源检测，每个时刻就会产生更多的航迹点，这样能够产生的虚假航迹也就会更多。

##### 4.4.1 “弱化”的同源检验

相比于三台雷达所需满足的同源检验，“弱化”的同源检验所需满足的条件更加松弛，在某些时刻只需两台雷达满足同源即可，可能存在的情况如图 4.16 所示，五座雷达分别标号为 A、B、C、D 和 E。



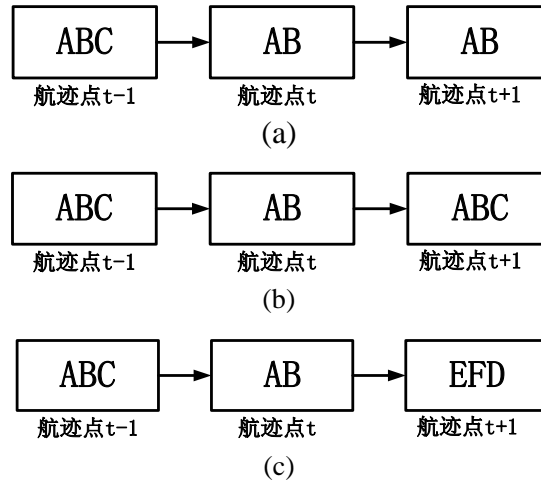


图 4.16 雷达作用图

但是题目中限制要想这条航迹被接受，这样的时刻在一条航迹中不能超过 3 个，而这三个具体分配在航迹的哪个位置以及哪几个雷达被干扰是不定的，所以可能的情况如表 X 所示，其中为“1”表示该雷达作用，“0”表示该雷达没有作用，其中要保证每一列一般要至少存在 3 个“1”，如果一列中仅存在两个“1”，这样的列不能超过三列，如果这样的列相邻，则必须满足这两列完全相同。

表 2 航迹中五座雷达的作用图

	航迹点 1	航迹点 2	航迹点 2	航迹点 2	.....	航迹点 N
A	1	1	1	0		0
B	1	1	1	1		0
C	1	0	0	0		1
D	0	0	0	1		1
E	0	0	0	1		1

#### 4.4.2 模型三的建立

本问题要求出在满足前文所述的“弱化”的同源检测的基础上，还原出附件一的虚假航迹，并且构成的其他虚假航迹条数最多；由于附件 1 给出的航迹只有 20 个航迹点，需要的时间为 190 秒，而问题三中需要考虑的时间区间为 300 秒，因为我们只需要在 300 秒的区间内有 190 秒的区间能够构造出目标航迹即可。

由于需要对比航迹是否相同，所以即要求虚假航迹之间具有可比性，而目标航迹是虚假航迹中的一条，因此所有问题必须在同一时间维度下考虑，因此我们只考虑 190s 内无人机以及航迹的变化，在第二问的基础上构建以下的非线性规划模型：

$$\text{目标: } \max M$$

$$\text{约束:} \left\{ \begin{array}{l} 120 \text{ km/h} \leq v \leq 180 \text{ km/h} \\ 2000 \text{ m} \leq H \leq 2500 \text{ m} \\ D \geq 100 \text{ m} \\ R \leq 150 \text{ km} \\ n \leq 3 \\ a \leq 10 \text{ m/s}^2 \\ K = 20 \\ T = 10 \text{ s} \\ Q \geq 3 \\ 1 \leq P \leq 5 \end{array} \right. \quad (4-20)$$

其中， $M$  为虚假航迹的条数， $v$  为无人机的速度， $D$  为无人机的间距， $R$  为航迹点到雷达的距离， $n$  为仅满足“弱化”的同源检验的航迹点数， $a$  为加速度， $K$  为航迹的点数， $T$  为每两个航迹点间的时间间隔， $Q$  为一般航迹点需要满足同源检测的雷达数， $p$  为干扰作用的雷达标号。

#### 4.4.3 基于蚁群算法的优化求解

由于该问题中的变量和限制条件较多，如果遍历所有的变量会使得求解变得非常困难，因此考虑采用智能算法蚁群算法来求解该问题。

蚁群算法的算法流程：

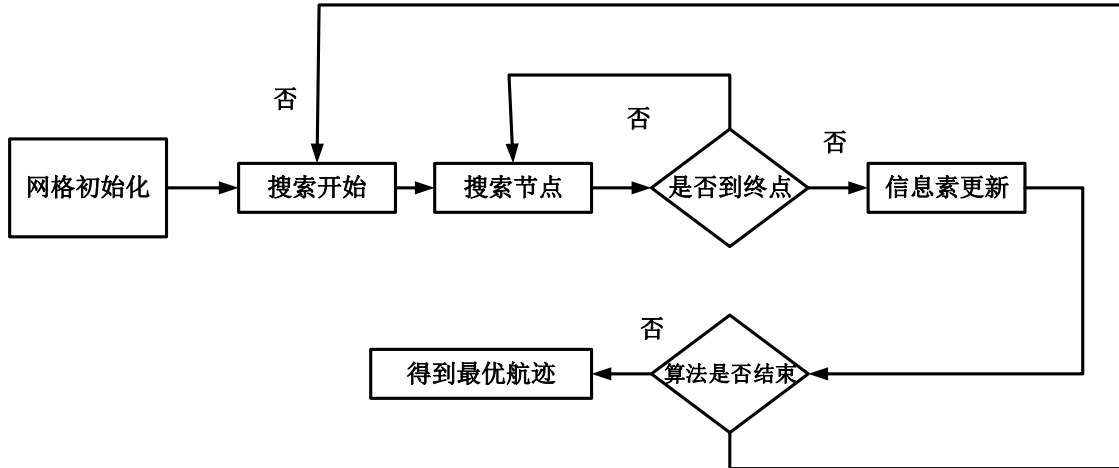


图 4.17 蚁群算法流程图

在优化过程中，变量有  $v$ 、 $H$ 、 $n$ 、 $q$  和  $R$ ，由于仅满足“弱化”的同源检验的航迹点数越多就可能产生越多的可能航迹点，因此设置  $n=3$ ，能够增加我们实现目标函数的可能性；而满足同源检测需要的雷达数越少，就会提高空闲无人机的自由度，越有利于形成更多的虚假航迹，因此设置  $Q=3$ ；而  $v$ 、 $H$ 、 $R$  中仅有两个变量是独立的，其中两个变量确定之后，第三个变量自然而然就确定下来，这

里假定变量是  $H$  和  $R$ 。这样，在优化过程中的变量仅剩  $H$ 、 $R$  和被干扰的雷达标号  $P$  ( $1 \leq P \leq 5$ )，这样就能够以这三个变量作为抽象的“空间直角坐标”，即  $(H, R, P)$ ，运用蚁群算法寻优。

寻优过程的启发函数如下所示：

$$E(H, R, P) = D(H, R, P)S(H, R, P)Q(H, R, P)$$

其中  $D(H, R, P)$  为变化量，表达式为：

$$D(H, P, R) = (H_a - H_b)^2 + (R_a - R_b)^2$$

$S(H, R, P)$  为安全性因素，当该点已经到达过时，该值等于 0，表达式为：

$$S(H, P, R) = \frac{(Num - UNum)}{Num}$$

其中  $Num$  为所有可以到达的点， $UNum$  为不可到达的点。

$Q(H, R, P)$  为干扰雷达的组合因素，表达式为：

$$S(H, P, R) = \frac{(Gum - GNum)}{Gum}$$

其中  $Gum$  为已经计算过的组合， $GNum$  为还没计算的组合。

整个寻优的算法过程为：

Step1: 根据变量  $H$ 、 $R$  的范围和  $P$  的组合情况，确定可行点的集合。

Step2: 给定  $H$ 、 $R$  设定初值，并初始化一种受干扰雷达的组合情况，记录该情况下虚假航迹的条数。

Step3: 计算初值到集合内所有可行点的启发函数值  $E(H, P, R)$ 。

Step4: 计算初值点到集合内任一可行点的选择概率  $p_i$

$$p_i = \frac{E_i}{\sum E_i}$$

Step5: 根据各点的选择概率采用轮盘读法计算下一个点，记录虚假航迹的条数，然后执行 Step3~Step5 直至干扰雷达的组合因素为 0 为止。

#### 4.4.4 求解结果

据以上构建的算法，利用 MATLAB 进行计算，求得 4 条可能的虚假航迹，如图 4.18 所示，其中一条与附件二中的目标轨迹重合，与理论相符合。

由于题中给定了 9 架无人机，图 4.19 对应其分别的运动轨迹，因为每条轨迹都是根据理论分析加上算法求出的，所以其一定是符合运动规律的，具体的运动规律在前文已经进行了详细阐述。

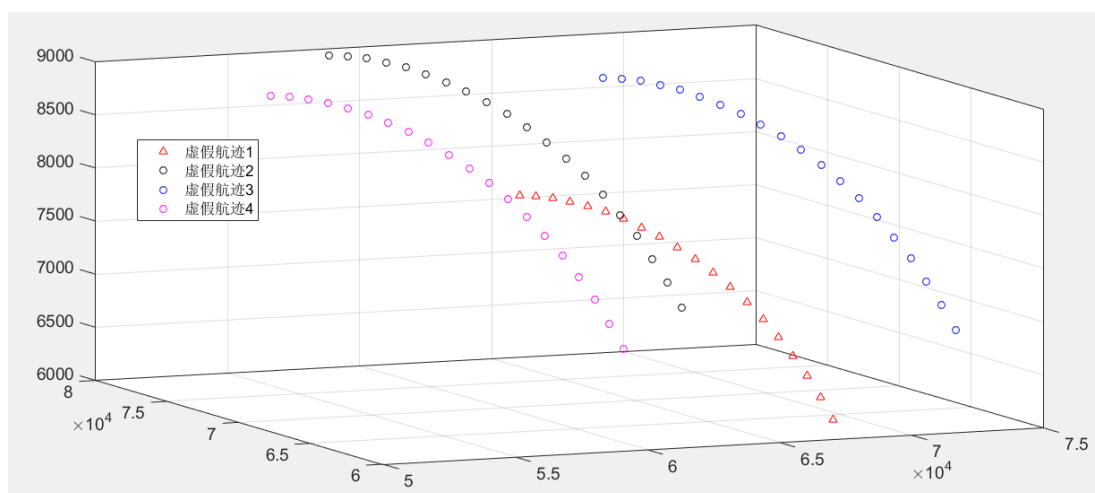


图 4.18 虚假航迹图

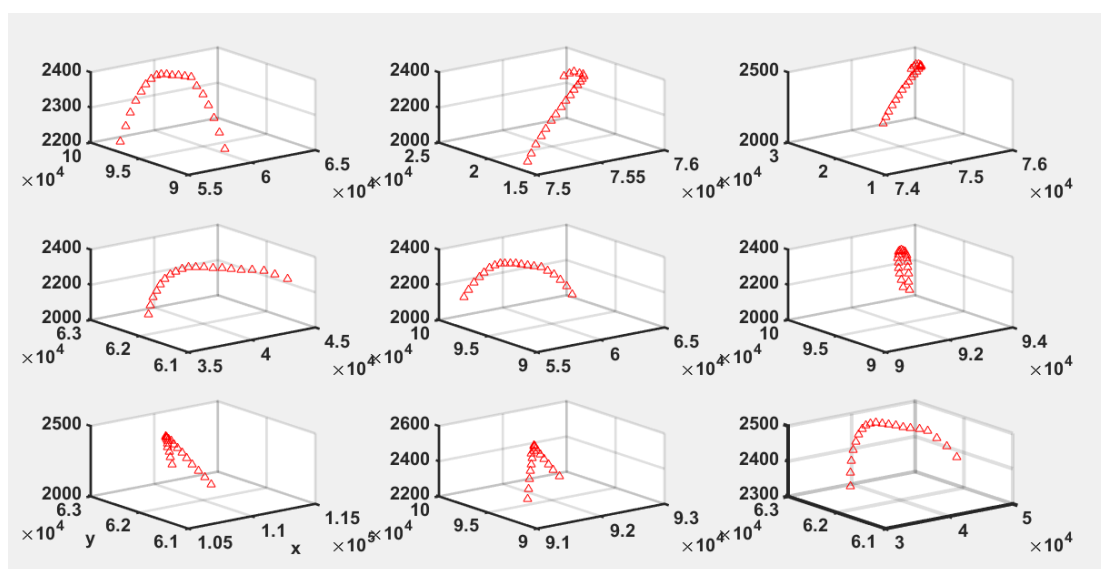


图 4.19 无人机航迹图

## 五、 模型总结

本文针对多无人机对组网雷达的协同干扰问题,分析了无人机和雷达之间空间几何以及运动状态的关系,综合运用了图论法、数值计算方法、和现代智能优化算法,建立了求解无人机航迹和虚假航迹的非线性规划模型,并基于仿真计算与编程优化,得到了满足目标航迹点的无人机飞行轨迹和附加产生的虚假航迹。

针对问题一,首先结合三维关系,将问题简化为一架无人机至多干扰一部雷达的模型。其次以无人机使用数量最少为优化目标,以无人机飞行速度、高度、间距以及匀速直线运动的运动状态为约束条件,建立非线性规划模型。

针对问题二,借助问题一建立的模型,首先考虑到尽可能少的俯冲和爬升,确定了先爬升后平飞再俯冲的运动形式,以此作为判断依据得到了能够恢复目标航迹所需的最少无人机架数。然后结合几何关系以及飞行高度、速度和飞行半径的限制,移动剩下自由的无人机,通过搜索算法来找到可能的虚假航迹点,由此求得最多的虚假路线。

针对问题三,首先确定了雷达受到干扰情况下,可能存在的雷达工作和作用状态,然后在第二题的基础上,以最大化虚假航迹数目为优化目标,以飞行高度、速度、加速度、半径以及受干扰雷达数等为限制条件,建立非线性规划模型。最后利用蚁群算法搜索得到新的可能的虚假航迹点。

## 参考文献

- [1] 李飞, 周中良, 苟新禹, 陈中起, 基于多机协同航迹欺骗的组网雷达突防技术, 系统工程与电子技术, 第 35 卷, 第 11 期, 2013 年 11 月;
- [2] 吴健平, 王国宏, 孙殿星, 谭顺成, 集中式雷达网鉴别虚假航迹的假设检验方法, 西安交通大学学报, 第 49 卷, 第 2 期, 2015 年 2 月;
- [3] 李小波, 孙琳, 周青松, 单凉, 多机协同的组网雷达欺骗干扰航迹优化, 现代防御技术, 第 44 卷, 第 2 期, 2016 年 12 月;
- [4] 范振宇, 王磊, 苏建春, 多机协同控制下的航迹欺骗技术, 信息与电子工程, 第 8 卷, 第 3 期, 2010 年 6 月;
- [5] 孙龙祥, 赵波, 邱卫军, 严华, 一种具有航迹特征的雷达假目标产生技术, 雷达科学与技术, 第 4 期, 2005 年 8 月;
- [6] D.H.A. Maithripala, S. Jayasuriya, Feasibility Considerations in Formation Control: Phantom Track Generation through Multi-UAV Collaboration, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9-11, 2008;
- [7] Keith B. Purvis, Karl J. A strom, Mustafa Khammash, Online Control Strategies for Highly Coupled Cooperative UAVs, Proceedings of the 2007 American Control Conference, Marriott Marquis Hotel at Times Square, New York City, USA, July 11-13, 2007;
- [8] D. H. A. Maithripala, Suhada Jayasuriya, Radar Deception through Phantom Track Generation, 2005 American Control Conference, June 8-10, 2005. Portland, OR, USA;

## 附录

无人机最小数目时的航迹

```
% %
clc;clear;close all;
leida=1000*[80,30,55,105,130;
            0,60,110,110,60;
            0,0,0,0,0].';
data=load('data.mat');
data=data.data;
% jihe=1:20;
jihe=3:20;
H=zeros(1,10);
suoyin=zeros(2,10);
suiyin(1,:)=1:10;
suiyin(2,:)=20:-1:11;
ii=1;
% saoa=1000;
% xxx=1000;
% yyy=1000;
% %
xx=zeros(5,20);
yy=zeros(5,20);
distance3W=zeros(5,20);
distance2W=zeros(5,20);
distanceX=zeros(5,20);
distanceY=zeros(5,20);
number=4;
height=2000;
dis20_X=jihe(1);
dex=0;
while dex==0
    for j=1:20
        deltaX=-leida(number,1)+data(j,2);
        deltaY=-leida(number,2)+data(j,3);
        deltaZ=-leida(number,3)+data(j,4);
        distance3W(number,j)=sqrt(deltaX^2+deltaY^2+deltaZ^2);
        distance2W(number,j)=sqrt(deltaX^2+deltaY^2);

        xx(number,j)=height/data(j,4)*distance2W(number,j)/distance2W(number,j)*de
        ltaX+leida(number,1);
```

```

yy(number,j)=height/data(j,4)*distance2W(number,j)/distance2W(number,j)*de
2W(number,j)*deltaY+leida(number,2);
end
figure(10)
plot(xx(number,:),yy(number,:), 'b.')
hold on;
figure(10)
plot(xx(number,dis20_X),yy(number,dis20_X), 'rx');
hold on;
sb=2;
dui=jihe(sb);
dex1=0;
while dex1==0

dis=sqrt((xx(number,dui)-xx(number,dis20_X))^2+(yy(number,dui)-yy(number
,dis20_X))^2);
v=dis/(dui-dis20_X)/10;

%
saoa=sqrt((height-H(ii))^2+(xxx-xx(number,dis20_X))^2+(yyy-yy(number,dis2
0_X))^2);
%
if v>33.33334&&v<=50&&saoa>100
if v>33.33334&&v<=50
dex1=1;
dex=1;
out=sb;
H(ii)=height;
ii=ii+1;
fprintf([num2str(dui),'\n']);
fprintf([num2str(out),'\n']);
fprintf([num2str(height),'\n']);
fprintf([num2str(dis),'\n'])
fprintf([num2str(v),'\n']);

figure(10)
plot(xx(number,dui),yy(number,dui), 'ko');
hold on;
else
dex1=0;
dex=0;
sb=sb+1;

```



```

        if sb>length(jihe);
            break;
        end
        dui=jihe(sb);
    end
end
height=height+0.5;
if height>2500;
    break;
end
hold off;
end
hold on;
xxx=(xx(number,dui)-xx(number,dis20_X))/(dui-dis20_X)+xx(number,dis
20_X);
yyy=(yy(number,dui)-yy(number,dis20_X))/(dui-dis20_X)+yy(number,dis
20_X);
xxx1=(xx(number,dui)-xx(number,dis20_X))/(dui-dis20_X)*(dui-dis20_X
-1)+xx(number,dis20_X);
yyy1=(yy(number,dui)-yy(number,dis20_X))/(dui-dis20_X)*(dui-dis20_X
-1)+yy(number,dis20_X);
figure(10)
% plot(xxx,yyy,'co');
% hold on;
jihe(out)=[];jihe(1)=[];

```

```

恢复虚假航迹最小无人机数、无人机航迹、虚假轨迹的求解程序
%%
clc;clear;close all;
leida=1000*[80,30,55,105,130;
            0,60,110,110,60;
            0,0,0,0,0].';
data=load('data.mat');
data=data.data;
xout=zeros(20,1);
yout=zeros(20,1);
zout=zeros(20,1);
v_first=100/3;
v_last=40;
x_last1=(50-v_last)^2/2/10+(10-(50-v_last)/10)*v_last;
%%
number=1;
jihe=1:20;
height0=2500;
xx=zeros(20,1);
yy=zeros(20,1);
for jj=1:20
    [xx(jj),yy(jj)]=xy(number,jj,height0);
end
plot(xx,yy,'.');
hold on;
plot(xx(1),yy(1),'ro');
hold on;
plot(xx(end),yy(end),'ko');
hold on;
cha=zeros(1,19);
dex=zeros(1,19);
for ii=1:19
    cha(ii)=sqrt((xx(ii)-xx(ii+1))^2+(yy(ii)-yy(ii+1))^2);
    if cha(ii)>334&&cha(ii)<500
        dex(ii)=1;
    end
end
% figure()
nn=find(dex==1);first=nn(1);last=nn(end)+1;
for h=first:last

```

```

xout(h)=xx(h);
    yout(h)=yy(h);
    zout(h)=height0;
end
xxfirst=xx(first);xxlast=xx(last);
yyfirst=yy(first);yylast=yy(last);
heightfirst=height0;
%%
aa=0;
while aa==0
    height=heightfirst;
    bb=0;
    jj=first-1;
    if jj<1
        break;
    end
    while bb==0
        [xo,yo]=xy(number,jj,height);
        dis=sqrt((xxfirst-xo)^2+(yyfirst-yo)^2+(heightfirst-height)^2);
        if abs(v_first*10-dis)<1
            bb=1;
            fprintf(['\n','first','\n',num2str(jj),'\n']);
        end
    end
    fprintf(['\n',num2str(xo),'\n',num2str(yo),'\n',num2str(height),'\n']);
    xout(jj)=xo;
    yout(jj)=yo;
    zout(jj)=height;
    heightfirst=height;
    first=first-1;
    xxfirst=xo;
    yyfirst=yo;
else
    bb=0;
    height=height-0.1;
    if height<2000
        first=1;
        break;
    end
end
end
end
%%
heightfirst=height0;

```

```

while bb==0
    [xo,yo]=xy(number,jj,height);
    dis=sqrt((xxlast-xo)^2+(yylast-yo)^2+(heightfirst-height)^2);
    if abs(x_last1-dis)<1
        bb=1;
        fprintf(['\n','last',num2str(jj),'\n']);

fprintf(['\n',num2str(xo),'\n',num2str(yo),'\n',num2str(height),'\n']);
        xout(jj)=xo;
        yout(jj)=yo;
        zout(jj)=height;
    else
        bb=0;
        height=height-0.1;
        if height<2000
            break;
        end
    end
end
heightlast=height;
last=last+1;
xxlast=xo;yylast=yo;
%%
aa=0;
while aa==0
    height=heightlast;
    bb=0;
    jj=last+1;
    if jj>20
        break;
    end
    while bb==0
        [xo,yo]=xy(number,jj,height);
        dis=sqrt((xxlast-xo)^2+(yylast-yo)^2+(heightlast-height)^2);
        if abs(v_last*10-dis)<1
            bb=1;
            fprintf(['\n','last',num2str(jj),'\n']);

fprintf(['\n',num2str(xo),'\n',num2str(yo),'\n',num2str(height),'\n']);

```

```

fprintf(['\n',num2str(xo),'\n',num2str(yo),'\n',num2str(height),'\n']);
        xout(jj)=xo;
        yout(jj)=yo;
        zout(jj)=height;
        heightlast=height;
        last=last+1;
        xxlast=xo;
        yylast=yo;
    else
        bb=0;
        height=height-0.1;
        if height<2000
            last=20;
            break;
        end
    end
end
end
figure(2)
plot3(xout,yout,zout,'ro');
hold on;
plot3(xout(1),yout(1),zout(1),'b*');
hold on;
plot3(xout(end),yout(end),zout(end),'k*');
axis equal;

```