

摘要：为了精确求解落水重物的运动轨迹，本文首先根据力学原理建立一个数学模型，接着利用最优化理论求解该模型，并与试验的结果进行对照。结果表明，数值模拟所得重物的下沉轨迹与试验存在一定的差距。为此，本文提出了一种改进模型的办法，即在原来模型的基础上加入噪声。带噪声的模型拟合所得值与试验吻合较好，从而验证了模型的可靠性和精度，可应用于实际的溃口封堵重物运动过程的数值模拟。

关键词：封堵溃口；运动过程；最优化理论；噪声

1 引言

我国经常发生洪水，溃坝溃堤进而引发泥石流灾害造成国家和人民生命财产的严重损失。历年来的洪灾，溃坝、泥石流险情给了我们深刻的教训：必须有效地开展封堵溃口的研究。在通常情况下，投放重物到尚存的坝体会产生一定的保护作用。然而，在实际操作中投入溃口的重物落水后受到溃口水流的作用会向下游漂移。为了使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置，必须掌握重物落水后的运动过程。

由于溃坝溃堤的高度危害性、不可重复性和经济损失过大，肯定无法通过相关实物试验去研究封堵用重物落在溃口后的运动过程，而只能先通过理论分析和小型试验获取相关数据的方法进行研究，特别后者具有客观、经费省、风险小、时间短、易重复、条件可以改变等优点。分析实验结果并结合相关模型，我们可以掌握重物在水中运动的规律，并最终应用于实际抢险行动。

2 模型的建立及求解

2.1 影响因素

根据水力学已经有的知识以及参考相关资料^[1]，我们可以判断出影响重物在水中运动的主要因素有：

- ①重物本身性质（重量 mg 、体积 V 、形状）；
- ②溃口及水面状况（水深 H 、流速 \bar{v} ）；
- ③投放重物的方法（投放高度 h 、投放方向）。

2.2 建立模型

建立一个关于物体在水中运动的数学模型，需要从一定的假设开始。对此，本文主要提出了三个重要的假设。首先，水流速度视为恒定的；其次，重物从空中落到水底的过程中，没有发生能量损失；最后，重物在水中不发生翻转。

从力学原理去考虑问题，是本文的理论基础。一个刚体，当外部因素对其施加的合力为零时，就会处于平衡。流体的平衡条件则似乎并不如此简单，因为流体的不同部分可以彼此做相对运动，因此必须各处都处于平衡才行^[2,3]。我们在这里着重考虑水平与垂直方向的受力情况。

重物在水中的运动轨迹为：

$$L = (L_x, L_y) \quad (1)$$

在水平方向，物体受到水的推力和水的阻力共同作用；而在垂直方向，物体受到重力，浮力以及水的阻力共同作用。因此，根据能量守恒定律和牛顿力学第二定律，我们可以建立如下的方程：

$$\begin{cases} k_1 \bar{v} - k_1 \frac{dL_x}{dt} = m \frac{d^2 L_x}{dt^2} \\ L_x(0) = 0, L'_x(0) = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} mg - \rho g V - k_2 \frac{dL_y}{dt} = m \frac{d^2 L_y}{dt^2} \\ L_y(0) = 0, L'_y(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

求解以上的常微分方程，可得：

①水平方向

$$L_x = \alpha_1 e^{-k_1 t/m} + \bar{v} t - \alpha_1 \quad (4)$$

$$\text{其中, } \alpha_1(k_1, \bar{v}, m) = \frac{\bar{v}}{k_1} m$$

②垂直方向

$$L_y = \alpha_2 e^{-k_2 t/m} + \beta_2 t - \alpha_2 \quad (5)$$

$$\text{其中, } \alpha_2(k_2, v_0, m, V) = \frac{mg - \rho g V - v_0 k_2}{k_2^2} m; \quad \beta_2(k_2, m, V) = \frac{mg - \rho g V}{k_2} m$$

令 $L_y = H$ 得 $t = t_0$ ，为重物沉到水底的时间，再代入得 $L_x = L_x(t_0)$ ，即为投放重物所需要提前的距离。

2.3 求解模型

根据所建模型的特点，本文利用最优化理论求解该模型。最优化理论，是从一些不能用古典的微分法和变分法解决的最优化问题，逐渐发展、形成的一种的数学方法^[4]。典型最优化问题的提法是：

$$\begin{cases} \min f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_i(x) = 0, i = m+1, \dots, p \end{cases} \quad (6)$$

即在约束条件 $g_i(x) \leq 0$ 和 $h_i(x) = 0$ 下，求得最小的 $f(x)$ 。

物体在水中所受到阻力的大小是由水的阻力系数 k 所决定的， k 与速度 v 呈正比，即 $F_R \propto kv$ ， k 的取值对模型有至关重要的意义—— k 是模型中唯一不能观

测得到的因素。 k 确定后, 就能得到完整的模型。不妨把 k 看作一个已知的参数, 设 k_1, k_2 分别为水平方向和垂直方向上的阻力系数, 对应 $L_x = \varphi(k_1), L_y = \varphi(k_2)$ 为这两个方向上的模拟值, 另设两个方向上的试验观测值为 P 和 Q 。而我们需要寻找出最优的 k , 使得观测值与模拟值的误差最小, 即

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^{N_1} (P_i - \varphi_i(k_1))^2 \tag{7}$$

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^{N_2} (P_i - \psi_i(k_2))^2 \tag{8}$$

其中, $N_j, j=1,2$ 为试验值观测得到的最大个数。

步骤 1 去噪: 剔除一些不合理的数据或填补少量缺失的数据;

步骤 2 确定目标函数: $\min z_1 = \sum_{i=1}^{N_1} (P_i - \varphi_i(k_1))^2$;

步骤 3 求解: 通过多次迭代计算, 求得满足以上目标函数的 k_1 ;

步骤 4 仿照步骤 1~3, 可求得使目标函数(8)成立的 k_2 。

2.4 实例验证

试验中设计了多种形状(如大\小实心方砖, 大\小空心方砖, 大\小正四面体等等)的物体, 在不同的流速(如 0.34m/s, 0.40m/s, 0.47m/s, 0.55m/s)以及不同的投放高度(如 $h=0$, $h=0.05m$, $h=0.12m$)下, 进入水中的运动过程。考虑到它们之间的相似, 这里只分析大实心方砖在水中运动过程, 其他的情况类似可到。

值得注意的是, 试验所得的数据并不能直接引入到模型当中。这是由于试验观测值并不能完全反映物体在水中运动的真实过程。因此, 在实例验证之前, 有必要对试验数据进行预处理。主要有两个方面: 其一, 为了便于运算, 对实验数据的纵坐标进行倒置变换, 即把重物视为从 (0, 0) 点开始运动; 而对于那些离水面一定高度投放的情形, 则把重物视为从 (0, -h) 点开始运动。其二, 重物在水中的运动轨迹是通过一层钢化玻璃折射到摄影机中, 所以摄影机上的数值应当加上一定的补偿距离才是真正的试验观测值。

表 1 大实心方砖在流速为 0.34m/s, $h=0$ 时, 平放和竖放的试验数据

位移\时间 m\s	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.44
平 横	0.027	0.029	0.031	0.035	0.039	0.044	0.056	0.07	0.085	0.095	0.11
纵	0.014	0.025	0.04	0.06	0.081	0.1	0.135	0.16	0.19	0.225	0.247
竖 横	0.02	0.021	0.023	0.025	0.028	0.029	0.031	0.04	0.053		
纵	0.01	0.023	0.039	0.057	0.089	0.115	0.155	0.2	0.219		

数据来源: 第七届研究生数学建模大赛 B 题资料

对于大实心方砖在水中水平方向的运动轨迹，按照步骤 1~3，我们可以得到 k 值如下：

表 2 大实心方砖水平方向 k 的取值

大实心方砖 ($h=0$) k	平 放	竖 放
0.34m/s	5.2737	2.2539

大实心方砖在水中水平方向的运动轨迹如下：

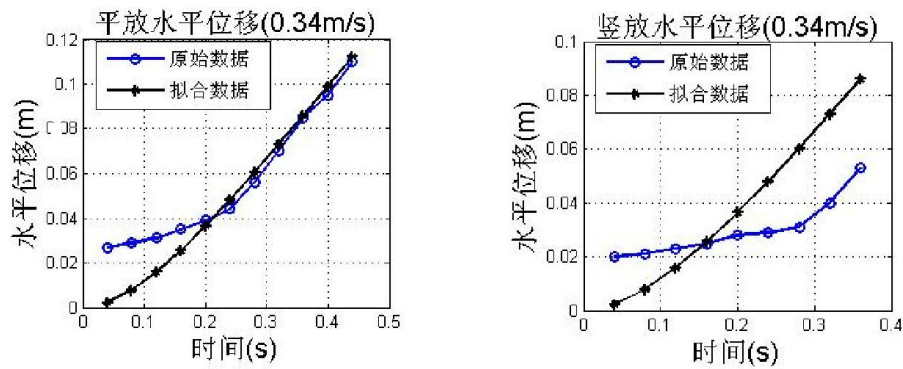


图 1 水流速度为 0.34m/s 以及 $h=0$ 时，水平位移模型预测数据与实验数据对比图

对于大实心方砖在水中垂直方向的运动轨迹，按照步骤 4，我们可以得到 k 值如下：

表 3 大实心方砖垂直方向 k 的取值

大实心方砖 ($h=0$) k	平 放	竖 放
0.34m/s	3.760646	1.765621

大实心方砖在水中垂直方向的运动轨迹如下：

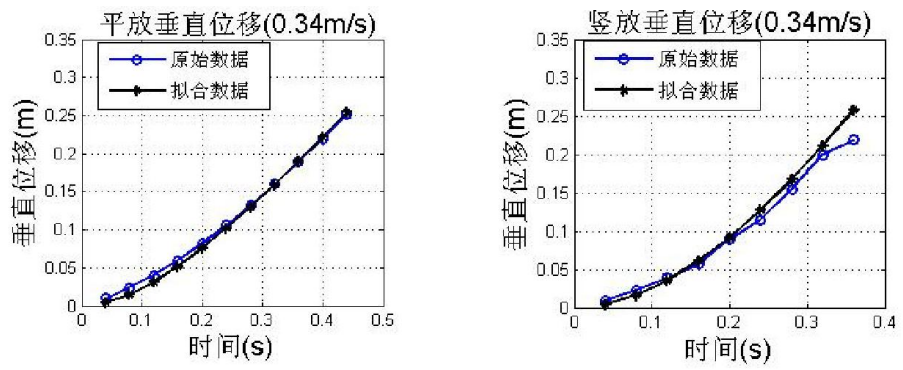


图 2 水流速度为 0.34m/s 以及 $h=0$ 时，垂直位移模型预测数据与实验数据对比图

3 模型的改进

分析上述的实例，我们可以看到模型所得的模拟值，特别是在水平方向的模

拟值，与实验值的误差较大。主要原因是：第一，我们根据力学原理建立的模型，只考虑了水平方向和垂直方向的受力情况，实际上，重物在水中受到的力是应该多方向的，因此会造成一定的误差；第二，上述建立的模型是在比较理想的情况下建立的，而物体在水中的运动状况是受到多种因素共同影响的，模型有自身所不能控制的误差也是在所难免的。

为了使模型得到的模拟值与实验值的误差尽可能的减少，我们有必要对原来建立的模型进行改进。参考仿真设计的相关原理，我们对原来的模型增加噪声 a_t ，即

$$L_x = \alpha_1 e^{-k_1 t/m} + \bar{v}t - \alpha_1 + a_t \quad (9)$$

$$L_y = \alpha_2 e^{-k_2 t/m} + \beta_2 t - \alpha_2 + a_t \quad (10)$$

这里的噪声 a_t 并非随机过程中的白噪声序列，它是非随机的，而且它的取值与时间 t 呈现一定的相关关系。我们优先考虑线性关系：

$$a_t = at + b \quad (11)$$

若 $a > 0$ ，则认为噪声 a_t 与时间 t 呈正相关关系；若 $a < 0$ ，则认为噪声 a_t 与时间 t 呈负相关关系。

对参数 a, b 进行拟合^[5]：

表 4 噪声的参数拟合值以及相关系数

投 放	坐 标	a	b	R ²
平	横	-0.0711	-0.0163	0.9674
	纵	0.6359	-0.02.92	0.9983
竖	横	-0.0874	-0.0651	0.9282
	纵	0.7311	-0.0309	0.9929

大实心方砖在水中水平方向的运动轨迹如下：

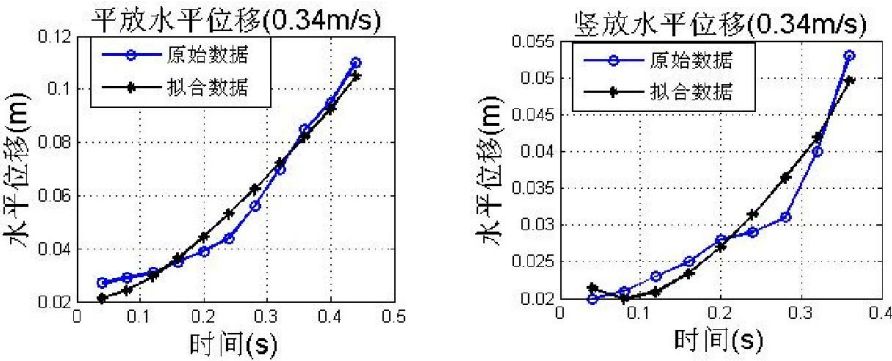


图 3 水流速度为 0.34m/s 以及 $h=0$ 时，水平位移模型预测数据与实验数据对比图

大实心方砖在水中垂直方向的运动轨迹如下：

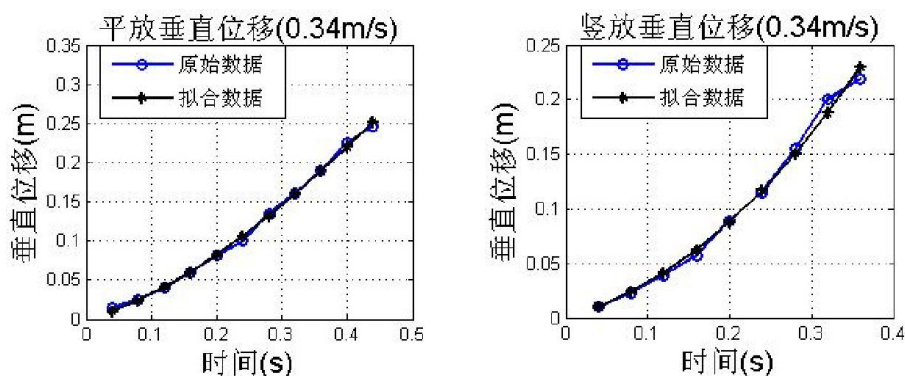


图 4 水流速度为 0.34m/s 以及 $h=0$ 时，垂直位移模型预测数据与实验数据对比图

4 模型的推广及应用

4.1 模型推广

上述建立的数学模型，已经能够较为精确地模拟出试验中重物落水后的运动过程。但是，由于水流运动非常复杂，至今一些水流现象还无法从小型试验得到，所以把模型应用到实际抢险行动中存在一定的困难。水力学理论研究的结论是：小型试验的流动与真实情况的流动具有一定的相似性时，小型试验的结果可用到原型中去。因此，解决困难的办法是，设计试验时必需满足一些相似准则。本文提及的小型试验满足了费劳德准则（重力相似准则）。

4.2 实际应用

利用所建模型，可将试验模拟结果应用到实际问题当中。例如，对于水深分别为 3m 和 4m，流速为 4m/s 和 5m/s 的溃口，重量为 1.5t 的重物分别需要提前 1.116m、1.395m、1.603m、2.005m 投放，才能沉底到预定位置。

5 结论

本文首先根据力学原理建立一个数学模型，接着通过实例验证，对模型模拟值与实验值做比较，发现模型与现实存在一定的差距。为此，我们对模型进行了改进，也就是在原来模型的基础上引入了噪声，而这种噪声是非随机的。改进后的模型比原来的模型更为精确。值得说明的是，本文只考虑了噪声与时间呈线性关系的情况，至于非线性关系需要进一步的探讨。另外，我们发现，无论是原来的模型还是改进后的模型，垂直方向的数值模拟比水平方向的要精确。

参考文献

- [1] White Frank M. Fluid Mechanics(Fifth Edition) [M]，北京：清华大学出版社，2004.
- [2] 巴切勒 G.K. 沈青, 贾复(译). 流体动力学引论[M]. 北京：科学出版社，1997.
- [3] 孙祥海. 流体力学[M]. 上海：上海交通大学出版社，2000.
- [4] 唐焕文, 秦学志. 实用最优化方法[M]. 大连：大连理工大学出版社，2004.

- [5] Richard A Johnson, Dean W Whichern. Applied Multivariate Statistical Analysis[M]. 北京：清华大学出版, 2008.

The movement of heavy objects in the water used to block breach

MO Xu-hua, ZHANG Ze-xin, SHEN Hui, ZENG Biao

(School of science, South China university of technology, Guangzhou510640,Guangdong,China)

Abstract: In order to accurately track the movement of heavy objects falling into the water, this paper based on a mathematical model of mechanics, and then uses optimization theory to solve the model as well as comparing the results with the test. The results show that the weight of the sinking from numerical simulation and test track there is a certain gap. To this end, this paper presents an improved model, that is, on the basis of the original model by adding noise. The model, fitted with a noise, is in good agreement with the experimental values obtained. Moreover, it verifies the reliability and accuracy of the model, which can be applied to the actual breach closure of the numerical simulation of heavy movement.

Keywords: block breach; movement; optimization theory; noise