

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 重物落水后运动过程的动力学分析

摘 要:

当发生溃坝溃堤时,很难在短时间内将溃口彻底封堵,通过投放重物对尚存的坝体产生一定的保护作用,可以延缓溃坝过程,为人民群众的撤离争取更多的时间。本文建立了模型用于计算溃坝封堵时重物的抛投方式,以使重物达到溃坝口,减少无效投放。

本文采用动力学的方法,对物块在流场中的运动进行了受力分析,主要考虑了重力、浮力、拖曳力、上举力对物体速度和加速度的影响,其中摩擦力、附加阻力和其他流场力都修正在拖曳力和上举力的阻力系数中。通过动力学微分方程和边界条件分别得到物体静止进入水中和运动进入水中的物体运动轨迹方程。根据小型试验的四组数据,拟合了各种形状参数下的轨迹方程系数。对于复杂形状,通过工程中常用的体积等效和截面等效的方法获得当量直径,将物块等效为球形,并且引入了空心率的概念用于表征物块形状参数对流场中受力的影响。拟合试验数据得到了决定轨迹方程系数的拖曳力系数 C_D 和 C_L 与空心率 η 关系。用当量直径和空心率将复杂形状物块简化成球体,使计算方便,使可以推广到各种形状的块石和沙包中。

本文所述动力学模型,与小型试验结果吻合效果比较好,拟合相关系数接近于1。当实际溃坝流场进行重力相似准则转化后,可以通过本模型进行抛投物块的运动轨迹预测,使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置,尽可能减少无效投放,具有准确、经费省、风险小、时间短、易重复、条件可以改变等优点。

对于溃口封堵的真实流场,可以采用重力相似准则转化为模型适用的小型流场情况,通过相似的缩尺比例得到投放重物的水平距离。利用模型计算,得知对于洪水流速分别为 $v_p = 4\text{m/s}$ 和 $v_p = 5\text{m/s}$,水深分别为3m和4m时,在离水面2m投放重达1t的重物进行溃口封堵时,应该分别提前0.93086m和2.1534m投放重物。

关键词 封堵溃口 动力学模型 阻力系数 空心率 小型试验 相似定律

1. 问题的提出

我国经常发生洪水,溃坝溃堤进而引发泥石流灾害造成国家和人民生命财产的严重损失。溃口水流的流量和速度会比较大,在通常情况下很难在短时间之内将溃口彻底封堵,但如果通过投放重物对尚存的坝体产生一定的保护作用,目前常利用直升飞机投放堵口组件,封住溃坝缺口。但是投入溃口的重物落水后受到溃口水流的作用会向下游漂移。为了使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置,尽可能减少无效投放,必须掌握重物落水后的运动过程,在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积和重量的重物。

理论分析和小型试验获取相关数据的方法广泛用于研究溃口封堵中,在此基础上,根据水力学已经有的方法进行推广,在获得成功并掌握重物在水中运动的规律后才能够最终应用于实际抢险行动。因此,理论分析并建立数学模型研究不同形状重物在溃坝洪水中的运动规律是具有经费省、时间短、易重复、易推广的优点,具有重大的实际价值。本文将针对几种重物形状、四种不同速度的稳定水流、在三种不同的高度多次重复进行的小型试验进行数学建模分析,分析重物在水中的运动规律。

2. 模型假设及主要变量符号说明

2.1 假设

- (1) 水流流场等效于无界的均匀剪切流场,重物落水后,不影响流场的整体特性
- (2) 理想无粘性流体理论适用于小型试验分析
- (3) 作用于重物上的水流速度,用垂线平均流速代替
- (4) 真实溃坝流场与模型水槽的均匀流场满足运动相似

2.2 符号说明

F_D ——为水流流速方向拖曳力;
 f_D ——为水深方向上举力;
 P ——为有效重力;
 A_h ——为水平截面等效面积;
 A_p ——为竖直方向截面等效面积;
 u_0 ——为流场垂线平均流速;
 u ——为物体的水流方向速度;
 w ——为物体水深方向下沉速度;
 η ——为空心率;
 δ ——为边界层厚度;
 ρ ——为水的密度;
 ρ_g ——为物体的密度;
 u_c ——为重物入水时的水平方向初速度;
 ω_0 ——为物体入水时的垂直方向初速度。

3. 模型的建立

在运动的水中抛投重物，重物在下沉过程中受水流的阻力与冲击力的影响，在下落的同时将出现漂移。根据流体力学知识，水流拖曳力的影响因素主要有：流体的流速 u_0 ，流体的密度，流体的动力粘滞系数 μ ，边界层厚度 δ ，水深 H ，物体所处深度 h ，物体几何尺寸包括宽度 a 、高度 b 、顺水流方向上长度 L 等。对于空心的物体还得考虑空心率 η ，对于有一定角度倾斜的物体，还得考虑倾斜角 θ 。由流体动力力学的知识可以得到，物体在水流中的受力包括三类^{[1][2]}：

- (a). 第一类是与流体与块体的相对运动无关的力，有惯性力、重力和压差力等；
- (b). 第二类是依赖于流体与物体间相对运动的力，其方向沿着相对运动方向，有拖曳力，附加质量力，Basset 力，摩擦力等；
- (c). 第三类是依赖于流体与物体间相对运动的力，其方向垂直于相对运动方向，有上举力、Magnus 力和 Saffman 力等。

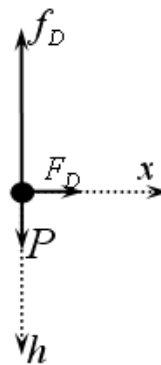


图1 物体质心受力图

对于本文的试验和真实溃坝堵截时的流场特性，溃坝时雷诺数 Re 比较大，暂不考虑 Basset 力，Magnus 力和 Saffman 力的影响，在不考虑稳定性的情况下，忽略造成物体翻转的摩擦力影响。主要考虑压差力（浮力）、重力和水流方向拖曳力 F_D ，水深方向上的上举力 f_D 的影响，物体在水中的受力图见图1。

图中物体在水中所受有效重力为 P （指有效重力，重力和浮力的合力）、水深方向上举力为 f_D 和水流方向拖曳力为 F_D 。根据流体力学，块体在粘性流体中运动或者流体绕过静止块体时，块体表面将产生表面力 \bar{F} 。一般来说，作用在单位面积上的微分力 $d\bar{F}$ 可分解为垂直和平行于该单元表面的压应力和切应力。合力 \bar{F} 也可以分解成平行和垂直于运动方向上的分力，平行于运动方向上的力为拖曳力 F_D ，垂直于运动方向上的分力为上举力 f_D ，也就是说拖曳力和上举力本质上是切应力和压应力的影响。在研究空心块体的实验中块体垂直水流方向，也就是说拖曳力是由前后两面的压强阻力与四周的摩擦阻力构成即

$$F_D = F_p + F_f = -\int_{A_1} p \cos \theta dA + \int_{A_2} \tau_0 \sin \theta dA$$

其中 A_1 包括块体前面积， A_2 包括块体四周侧面积， θ 对 A_2 值为 90° ，对 A_1 迎水流面为 180° ，背水流面为 0°

F_D 为上述各种因素的函数，工程上一般根据量纲分析的方法结合实际试验值予以给

$$F_D = f(U, \rho, \mu, \delta, H, h, L, a, b, \theta, \eta) \quad (1)$$

根据 Evett 等人总结有计算公式^{[3][4]}

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A_p (u_0 - u)^2 \quad (2)$$

$$\text{而上举力} \quad f_D = \frac{1}{2} \rho A_h C_L \omega^2 \quad (3)$$

$$\text{对于球形物体} \quad F_D = \frac{1}{8} \pi \rho C_D d^2 (u_0 - u)^2 \quad (4)$$

$$f_D = \frac{1}{8} \pi \rho C_L d^2 \omega^2 \quad (5)$$

$$\text{有效重力} \quad P = mg - \rho_g V, \text{ 其中 } m = \rho_g V \quad (6)$$

上述公式中， C_D 为流动方向阻力系数，即拖曳力系数； C_L 为下沉方向阻力系数，即上举力系数； m 为物体的质量； g 重力加速度； ρ 为水的密度； ρ_g 为物体的密度； u_0 为作用于物体处，流场的水流速度； u 为物体的水流方向速度； ω 为物体水深方向下沉速度； A_h 为水平截面等效面积； A_p 为竖直方向截面等效面积； V 为物体的体积。

根据动力学原理，对物体列出力的平衡关系式有：

$$x \text{ 向:} \quad F_D = m \frac{du}{dt} \quad (7)$$

$$h \text{ 向:} \quad P - f_D = m \frac{d\omega}{dt} \quad (8)$$

将 F_D 、 f_D 、 P 、 m 的表达式 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 代入 (7)、(8)，有

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\rho A_p C_D}{2 \rho_g V} (u_0 - u)^2 \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{(\rho_g - \rho)}{\rho_g} - \frac{\rho A_h C_L \omega^2}{2 \rho_g V} = \frac{\rho A_h C_L}{2 \rho_g V} \left(\frac{2(\rho_g - \rho)gV}{\rho A_h C_L} - \omega^2 \right) \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{令 } \alpha_1 = \frac{\rho A_p C_D}{2 \rho_g V} \text{ 其量纲为 } 1/m, \alpha_2^2 = \frac{2(\rho_g - \rho)gV}{\rho A_h C_L} \text{ 其量纲为 } m/s, \alpha_3 = \frac{\rho A_h C_L}{2 \rho_g V} \text{ 其量纲为 } 1/m,$$

则有方程：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha_1 (u_0 - u)^2 \\ \frac{d\omega}{dt} = \alpha_3 (\alpha_2^2 - \omega^2) \end{cases} \quad (10)$$

对时间 t 积分, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{u_0 - u} = \alpha_1 t + \beta_1 \\ \frac{1}{2\alpha_2} \ln \frac{\alpha_2 + \omega}{\alpha_2 - \omega} + \beta_2 = \alpha_3 t \end{cases} \quad (11)$$

为了求解该微分方程, 必须先确定边界条件, 边界条件按照重物落水的初始状态来考虑。现在将考虑物体落水的状态分为两类

3.1 当物体从运动状态中落水

考虑运动状态入水时的边界条件, 当 $t=0$ 时, $u=u_c$ 、 $\omega=\omega_0$, u_c 为重物入水时的水平方向初速度, ω_0 为物体入水时的垂直方向初速度, 由式(11)有

$$\beta_1 = \frac{1}{u_0 - u_c}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\alpha_2} \ln \frac{\alpha_2 + \omega_0}{\alpha_2 - \omega_0}$$

将 β_1 、 β_2 代入式(11)有

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_1(u_0 - u_c)u_0 t + u_c}{\alpha_1(u_0 - u_c)t + 1} \\ \omega &= \alpha_2 \frac{\alpha_2 \text{th}(\alpha_2 \alpha_3 t) + \omega_0 \text{ch}(\alpha_2 \alpha_3 t)}{\alpha_2 \text{ch}(\alpha_2 \alpha_3 t) + \omega_0 \text{sh}(\alpha_2 \alpha_3 t)} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$, $\text{cth}(x) = \frac{1}{\text{th}(x)}$

令 $\frac{\alpha_2}{\omega_0} = \text{th}\varphi = \frac{\text{sh}\varphi}{\text{ch}\varphi}$, 则式(12)可以简化为

$$\omega = \frac{\alpha_2}{\text{th}(\alpha_2 \alpha_3 t + \varphi)} \quad (13)$$

将式(14)对时间 t 进行积分, 且当 $t=0$ 时, 有 $x=0$ 、 $h=0$, 即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_1(u_0 - u_c)u_0 t + u_c}{\alpha_1(u_0 - u_c)t + 1} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{\alpha_2}{\text{th}(\alpha_2 \alpha_3 t + \varphi)} \end{cases} \quad (14)$$

可得方程组 I :

$$\begin{cases} x = u_0 t - \frac{1}{\alpha_1} \ln(\alpha_1(u_0 - u_c)t + 1) \\ h = \frac{1}{\alpha_3} \ln \left[\frac{\text{sh}(\alpha_2 \alpha_3 t + \varphi)}{\text{sh}\varphi} \right] \end{cases} \quad (15)$$

同时，消去方程组 I 中的时间 t ，可以得到运动状态下入水时物体运动的轨迹为

$$x = u_0 \frac{(\ln \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4}}{2} - \varphi)}{\alpha_2 \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left[\alpha_1 (u_0 - u_c) \frac{(\ln \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4}}{2} - \varphi)}{\alpha_2 \alpha_3} + 1 \right] \quad (16)$$

其中 $q = e^{\alpha_3 h} (e^{-\varphi} - e^{\varphi})$, $\frac{\alpha_2}{\omega_0} = th\varphi = \frac{sh\varphi}{ch\varphi}$, $\alpha_2^2 \alpha_3 = \frac{\rho_g - \rho}{2\rho_g} g$

从而，得到如上所述的 $x-h$ 关系式，不同形状的物体，其系数 α_1 , α_3 会发生变化，可以通过试验数据分析确定出方程的系数。

3.2 当物体从水面以静止状态落水

考虑静止状态入水时的边界条件，当 $t=0$ 时， $u=0$ 、 $w=0$ ，由式(11)有 $\beta_1 = \frac{1}{u_0}$, $\beta_2 = 0$ ，

再代入式 (11)，并根据 $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 作等式变换，有

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_1 u_0^2 t}{\alpha_1 u_0 t + 1} \\ \omega &= \alpha_2 th(\alpha_2 \alpha_3 t) \end{aligned} \quad (17)$$

即
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1 u_0 t / (\alpha_1 t + \frac{1}{u_0}) \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_2 th(\alpha_2 \alpha_3 t) \end{cases} \quad (18)$$

将式 (18) 进行积分，且当 $t=0$ 时，有 $x=0$ 、 $h=0$ ，可得方程组 II：

$$\begin{cases} x = u_0 t - \frac{1}{\alpha_1} \ln(\alpha_1 u_0 t + 1) \\ h = \frac{1}{\alpha_3} \ln[ch(\alpha_2 \alpha_3 t)] \end{cases} \quad (19)$$

同时，消去方程组 II 中的时间 t ，可以得到运动状态下入水时物体运动的轨迹为

$$x = u_0 \frac{\ln \frac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}}{\alpha_2 \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\alpha_1 u_0 \frac{\ln \frac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}}{\alpha_2 \alpha_3} + 1 \right)$$

其中 $\alpha_2^2 \alpha_3 = \frac{\rho_g - \rho}{2\rho_g} g$, $q = 2e^{h\alpha_3}$

从而，得到如上所述的 $x-h$ 关系式，不同形状的物体，其系数 α_1 , α_3 会发生变化，可以通过试验数据分析确定出方程的系数。

综上所述，重物在不同边界条件下进入流场的运动轨迹可以通过上述方程组 I、方程组 II 进行计算。对于各种形状的重物，为确定其运动轨迹，需要根据试验和理论确定方程的两个系数 α_1 , α_3 ，即确定各种形状重物在水中的拖曳力系数 C_D 和上举力系数 C_L 。

4 模型的求解

4.1 实心方砖的落水轨迹

实心方砖的几何尺寸见图 2

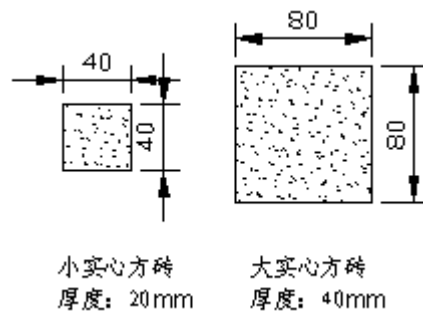


图 2 实心方砖几何尺寸

对于大的实心方砖，其几何参数包括高度 $a = 80cm$ 、厚度 $b = 40cm$ 、顺水流方向上长度 $L = 80cm$ ，将 $\rho = 1000kg/m^3$ ， $\rho_g = 2300kg/m^3$ 代入，则小实心方块和大实心方块的方程参数见表 1

表 1 实心方块轨迹方程参数

小实心	平放	立放	竖放	大实心	平放	立放	竖放
α_1	$0.272 C_D$	$0.272 C_D$	$0.217 C_D$	α_1	$0.272 C_D$	$0.272 C_D$	$0.217 C_D$
α_3	$0.217 C_L$	$0.272 C_L$	$0.272 C_L$	α_3	$0.217 C_L$	$0.272 C_L$	$0.272 C_L$
ξ	2	0.5	1	ξ	2	0.5	1

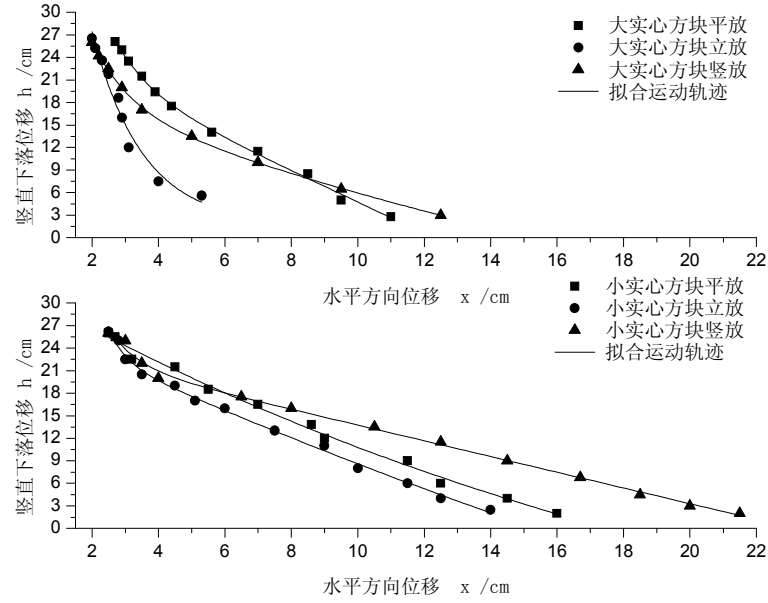


图2 实心方块轨迹（静止下落，0.34m/s 流速）

根据流体力学的研究基础，Evvett等人引用Raymond C.Binder(1973)的数据资料，认为块体在流体冲击下，拖曳力系数与顺流方向宽高比 ξ 有一定的关系，并且给出块体形状雷诺数 $Re>1000$ 时的拖曳力系数随宽高比两者呈正比，且 $\xi=1.0$ 时， $C_D=1.05$ ； $\xi \rightarrow \infty$ 时， $C_D=2.05$ ，对于实心方块的情况，根据他们的研究成果，当 $\xi=2.0$ 时， $C_D=1.33$ ，当 $\xi=0.5$ 时， $C_D=0.89$ ，当 $\xi=1.0$ 时， $C_D=1.05$ 。而对于实心方块， $C_L=0.63$ 。

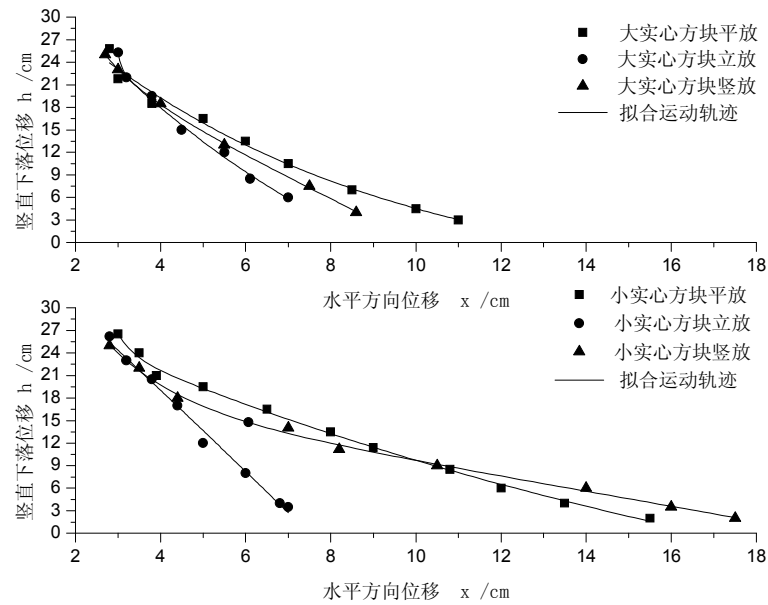


图3 实心方块轨迹（5cm 下落，0.34m/s 流速）

将 Evett 等人总结的系数，代入前述模型所推导的运动轨迹方程，可以得到实心块的运动轨迹。利用 Origin 软件的自定义非线性函数拟合的功能，用 C 语言编译了函数程序，将其和试验点值绘制在同一图上，可以发现，两者趋势一致，吻合效果不错。图 2，图 3 分别绘制

了实心方块静止下落和从 5cm 下落到水中的运动轨迹。其他的轨迹分析见附件。

4.2 其他形状重物的落水轨迹

对于其他形状的物体，关键在于根据其几何结构来分析其上举力 f_D 和拖曳力 F_D 的大小，也就是要构建形状结构与上举力系数 C_L ，拖曳力系数 C_D 的关系。对球体或接近于球体的泥沙、卵石等只需一个几何尺度便可确定物体的大小。对偏离球体的块体而言，其形状影响着压强力和摩擦力的大小，也影响着水流拖曳力的变化。而对于空心块体而言流场就更加复杂，于是，本文提出一种利用空心率计算拖曳力的方法。

4.2.1 空心率概念的提出

空心率 η 不仅仅指的是有真正中空结构的物体，它是一个形状参数，用于描述物体的形状，故又可以有内空心率、外空心率的概念。定义如下：空心的体积与空心块体的总体积比，或空心块体单位体积内空心的体积，以百分数表示，分别用符号 η 、 $\eta_{\text{内}}$ 、 $\eta_{\text{外}}$ 分别表示空心率、内空心率、外空隙率。则其表达式为：

$$\eta = \frac{V_v}{V}, \quad \eta_{\text{内}} = \frac{V_{v\text{内}}}{V}, \quad \eta_{\text{外}} = \frac{V_{v\text{外}}}{V}$$

其中 V_v 表示空心的体积、 V 表示总体积、 $V_{v\text{内}}$ 表示具有内空心的块体的空心体积、 $V_{v\text{外}}$ 表示具有外空隙的块体的空心体积。

试验块体的形状如图 4

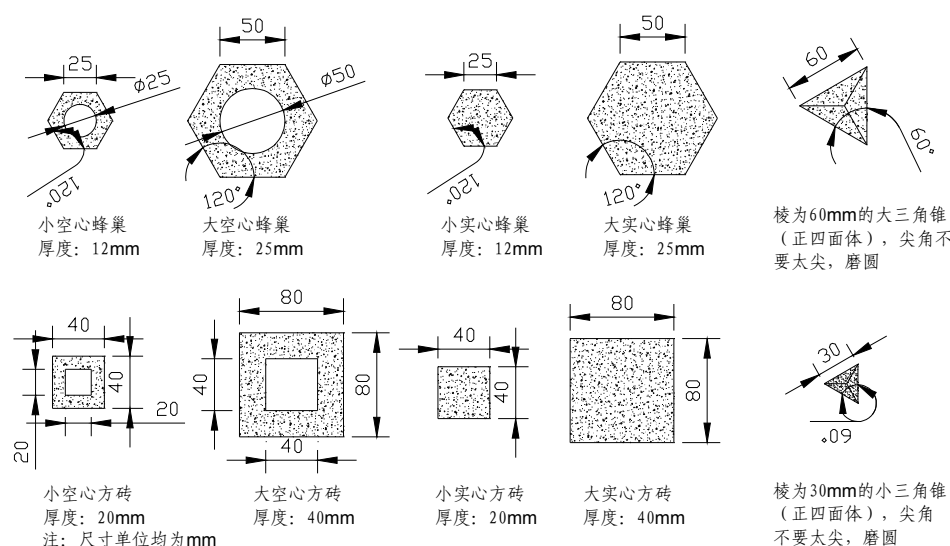


图 4 试验块体结构图

对于不同的试验体结构，它们的空心率是不同的，对应的空心率计算结果见表 2

4.2.2 空心率对拖曳力系数的影响分析

通过我们的试验结果和文献中的资料^{[5][6]}可以定性的分析出空心块体拖曳力大小的一些规律，比如：

- (a) 空心率的大小对拖曳力有较大的影响，相同流速条件下，块体的空心率越大，受到的拖曳力就越小。当空心率 $\eta = 0$ 时即为实心块体，受到的拖曳力最大。
- (b) 不同流速条件下，具有相同空心率的空心块受力也有所不同。流速越大，具有相同空心率的空心块受到的拖曳力就越大。
- (c) 内空心率与外空心率相同时，即 $\eta_{\text{内}} = \eta_{\text{外}}$ 时，所受到的拖曳力的大小并不相等，具有内空心的块体受到的拖曳力比外空隙的大。

显然，上举力系数 C_L 和拖曳力系数 C_D 与空心率 η 之间肯定存在一定的函数关系 $C_D = \lambda_1(\eta)$, $C_L = \lambda_2(\eta)$ 通过该函数将阻力系数与形状参数的关系表示出来。根据实验数据，我们可以拟合出块体在水中的运动轨迹，得到运动轨迹方程的系数 α_1 , α_3 ，进一步可以得到上举力系数 C_L 和拖曳力系数 C_D ，从而可以建立起来空心率与阻力系数的对应关系。有部分文献中，对这方面做了很多工作，他们的一些结论我们可以引用过来。

为了探索空心结构入水时的体积形状和截面形状，采用化工原理里常用的当量法来等效，设空心块体的当量体积为 V ，其体积当量直径为 d_v ，截面当量直径为 d_p 和 d_h 则当量直径 d_v 、 d_p 和 d_h 可计算如下

$$\text{等体积等效: } V = \pi d_v^3 / 6, \text{ 等面积等效: } A_p = \pi d_p^2 / 4, A_L = \pi d_L^2 / 4$$

$$\text{则有: } d_v = (6V / \pi)^{\frac{1}{3}}, d_p = \sqrt{4A_p / \pi}, d_L = \sqrt{4A_L / \pi} \text{ 块体上的拖曳力可表达为:}$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A_p (u_0 - u)^2 = \frac{1}{8} \pi \rho C_D d_p^2 (u_0 - u)^2$$

块体上的上举力可表达为 $f_D = \frac{1}{8} \pi \rho C_L d_h^2 w^2$ ，显然计算 f_D 和 F_D 的截面等效直径随平放、竖放、立放的情况变化是不一样的。

4.2.3 空心块体运动轨迹分析

为验证上述模型，考虑空心块体的运动轨迹和试验数据。对于试验用空心块体，其空心率 η 和当量直径 d_v 、 d_p 和 d_h 见表2

表2 空心块空心率和体积当量直径

	小空心巢	大空心巢	小实心巢	大实心巢	小空心块	大空心块	小三角	大三角
η	0.4767	0.4767	0.25	0.25	0.25	0.25	0.8917	0.8917
d_v	37.25	74.50	37.250	74.50	39.38	78.78	24.12	48.24

对于不同放置方式，其截面等效直径不一样，直接影响了受力面积，试验用空心块体的

截面当量直径见表 3，其中空心蜂巢和实心蜂巢的当量直径是一样的。

表 3 试验空心块体截面等效直径

	大蜂巢	小蜂巢	大空心砖	小空心砖	大三角	小三角
平放	$d_p = 105.0075$ $d_h = 52.5038$	$d_p = 52.5038$ $d_h = 25.7215$	$d_p = 90.2703$ $d_h = 63.8308$	$d_p = 45.1352$ $d_h = 31.9154$	$d_p = 65.7383$ $d_h = 65.7383$	$d_p = 32.8691$ $d_h = 32.8691$
立放	$d_p = 79.7885$ $d_h = 105.0075$	$d_p = 27.6395$ $d_h = 52.5038$	$d_p = 63.8308$ $d_h = 90.2703$	$d_p = 31.9154$ $d_h = 45.1352$	$d_p = 65.7383$ $d_h = 65.7383$	$d_p = 32.8691$ $d_h = 32.8691$
竖放	$d_p = 79.7885$ $d_h = 52.5038$	$d_p = 27.6395$ $d_h = 25.7215$	$d_p = 63.8308$ $d_h = 63.8308$	$d_p = 31.9154$ $d_h = 31.9154$	$d_p = 65.7383$ $d_h = 65.7383$	$d_p = 32.8691$ $d_h = 32.8691$

本文将小型试验获得的 12 组数据，对运动轨迹按照运动轨迹方程 I 或 II 进行拟合分析，空心块体都等效为球体，而平放、立放、竖放影响的是可以得到各自试验状态下的系数 α_1 , α_3 ，即 C_D 、 C_L 的拟合值，取其平均值，其结果见表 4

表 4 拖曳力系数和上举力系数拟合结果

	$\eta = 0.25$		$\eta = 0.4767$		$\eta = 0.8917$	
	C_D	C_L	C_D	C_L	C_D	C_L
0.34m/s	1.4923	0.7532	1.7628	0.8024	2.0453	0.9567
0.40m/s	1.5612	0.8217	1.7354	0.8145	1.9876	0.8456
0.47m/s	1.5061	0.7823	1.9521	0.7564	2.3473	1.0503
0.55m/s	1.5876	0.8014	1.9674	0.8521	2.3878	1.0245

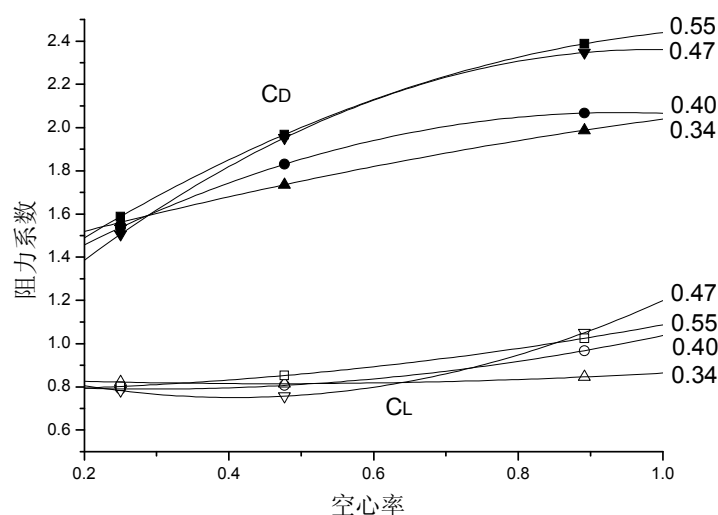


图 5 阻力系数与空心率的关系

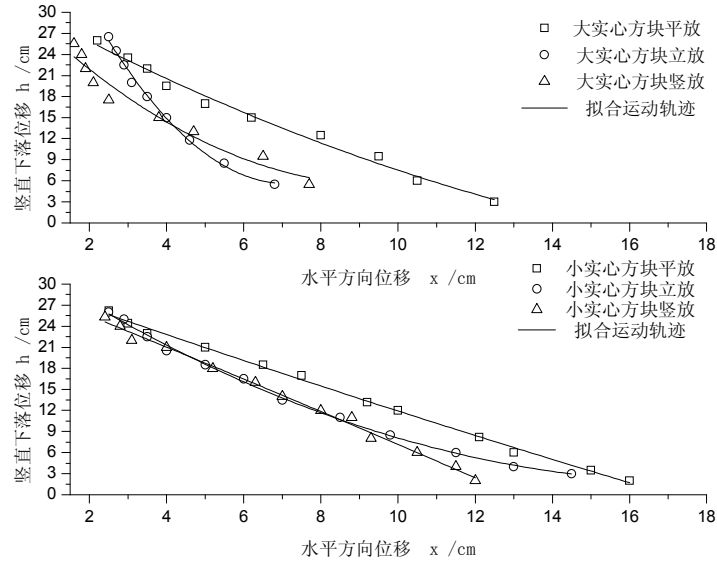


图6 空心方块轨迹（静止下落，0.34m/s 流速）

根据表 4，可以初步得出不同速度下 $C_D = \lambda_1(\eta)$ ， $C_L = \lambda_2(\eta)$ 的关系式。例如，用二次多项式来进行拟合，可以得到流速为 0.34m/s 时的阻力系数与空心率函数为：

$$C_D = \lambda_1(\eta) = 2.1052\eta^2 - 1.1202\eta + 1.0805$$

$$C_L = \lambda_2(\eta) = 0.49283\eta^2 - 0.28668\eta + 0.83107$$

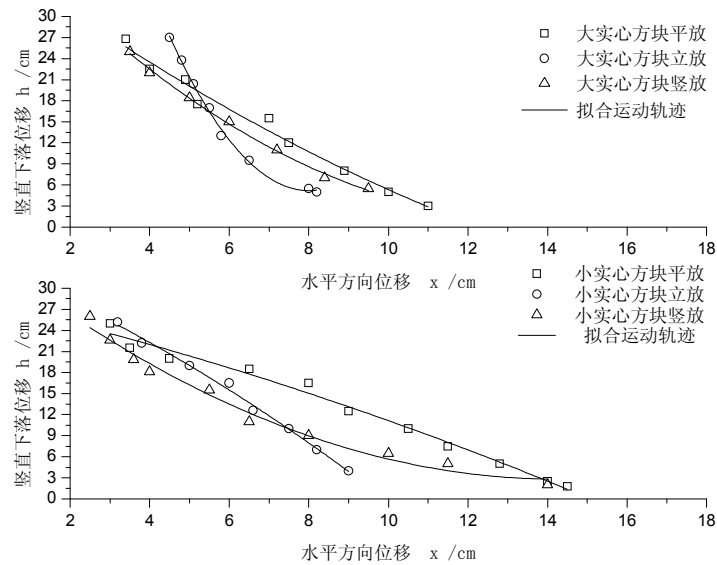


图7 空心方块轨迹（5cm 下落，0.34m/s 流速）

用该方法分析了静止下落和重心离水面 5cm 下落两种情况的空心方块运动轨迹，并和试验点画在一张图上，见图 6 和图 7，模型结果和试验结果还是比较吻合的。

4.3 模型结果验证

上述模型建立了用空心率来表征形状参数的方法，得到了拖曳力系数 C_D 和上举力系数 C_L 关于空心率的拟合关系式，可以根据该关系，确定不同空心率下的两个阻力系数，进而根据运动方程，获得运动轨迹。将该运动轨迹与试验点同时画在图上，可以很清晰的看到模型的结果与试验吻合度。

这里以三角形物体落水的情况为例进行分析。考虑静止落入流速为 0.34m/s 水中、5cm 落入流速为 0.47m/s 水中两种试验情况，其结果见图 8，其拟合误差分析见表 5

表 5 三角形 0.34m/s 运动轨迹误差

	流速为 0.34m/s					
	大三角形			小三角形		
下落方式	0cm	5cm	12cm	0cm	5cm	12cm
方差	3.8962	4.8272	9.2920	7.2394	11.7905	46.1909
相关系数	0.9875	0.9834	0.9665	0.9898	0.9625	0.9311

从表 5 中可以发现运动轨迹与试验点的相关性很不错，而且方差在可以接受的范围之内，可以认为模型对运动轨迹的描述是有效的。

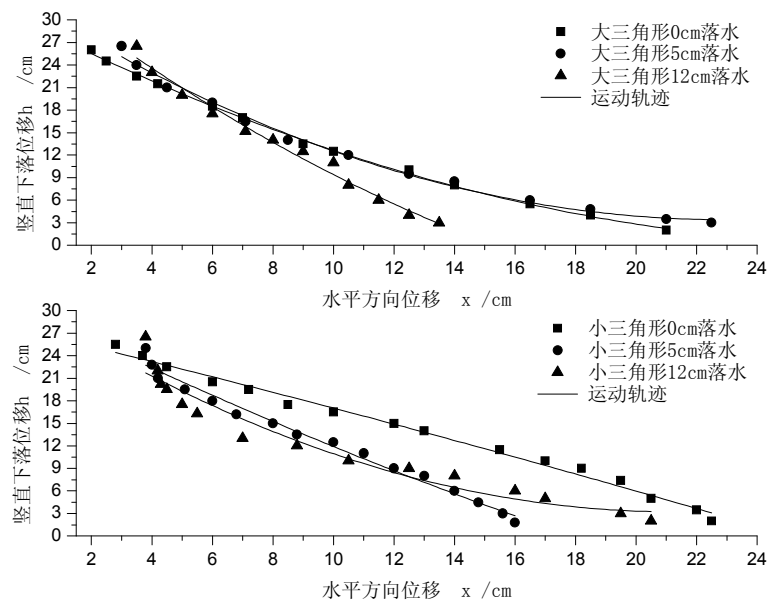


图 8 三角形在 0.34m/s 流速的运动轨迹

对于其他试验条件下的试验数据，其运动轨迹图见附件，附件给出了流速为 0.34m/s，0.40m/s，0.47m/s，0.55m/s 四组试验下不同形状，不同下落方式的运动轨迹图，涵盖了所有试验数据点。

5. 模型应用推广

通过本文的动力学分析模型，可以掌握重物落水后的运动过程。在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积，形状参数和重量的重物，重物会按照运动轨迹到达溃坝的位置。但是，模型的建立是基于不考虑稳定性的基础上，且其依据的试验结果也是根据均匀流场里的抛物试验，实际上封堵溃坝的真实情况比这个复杂很多。溃口的纵、横断面千差万别，而且都不是规则的矩形、梯形或 V 字形；溃口的底面也都不是水平或具有稳定斜率的平面，粗糙度各异；溃口各部分的流速分布肯定也是不均匀的；更值得注意的是，溃口形状和大小一般是不断变化的，流速、流量也随着水位和溃口形状的变化而变化。由于往往是就地取材，封堵用重物的形状、大小千变万化；重量、体积、面积各不相同，不可能一模一样。因此，

模型要运用到实际中，首先需要进行模型对投放位置预测的验证试验，用以验证模型通过小型试验数据获得的一些拟合系数是正确而有效的。因此，可以根据重力相似定律，设计几次固定位置触底试验，在水槽底部做好标记代表溃坝缺口，根据模型计算所得到的能够准确封堵的抛物距离，实施抛物试验，用以验证物块是否会预期到达预先标记好的位置。

其次需要对稳定性进行分析和设计试验，特别是当重物触底后还会翻转，离开预定位置（这个现象在试验录像和截图里可以发现）；再次，模型试验假设了真实溃坝流场与模型水槽的均匀流场运动相似，但是对溃坝的真实情况，可以设计新的小型试验进行模拟，在玻璃水槽中模拟真实的溃坝水流情况，设计规则的矩形、梯形或 V 字形溃坝缺口进行小型试验。

5.1 试验设计准则

实际小型试验的设计，应该符合流体力学中的相似原理，这样才能推广到实际溃坝封堵中，即模型和原型应满足：几何相似，运动相似，动力相似，初始条件和边界条件相似。试验设计时要求流动完全相似是困难的，定性准则数越多，小型试验的设计越困难，甚至根本无法进行。为了解决这方面的矛盾，在实际的小型试验中，一般只能满足某个或某些相似准则，忽略对过程影响比较小的相似准则，抓住问题的主要物理量，使问题得到简化。

5.2 模型试验相似性分析

流场相似的判断准则如下^[7]

几何相似准则，对于小型试验设计，需要将实际溃坝流场的特征尺寸按比例缩小就可以满足。

$$\frac{L_p}{L_m} = L_r, \frac{A_p}{A_m} = L_r^2, \frac{V_p}{V_m} = L_r^3,$$

对于溃坝的实际流场，其特征尺寸有水深和溃口形状参数如溃口宽度等

(1) 运动相似准则，要求试验流场和实际溃坝流场中，对应瞬时和对应空间点处流体质点的速度方向相同而大小成一定比例，即水流质点运动的流线相似。对于溃坝

流场模拟，要做到完全运动相似是很难通过试验实现的，在模型的小型试验中，采取了特征速度（绕流物体远端的来流速度）成比例的相似办法。在以后的试验设计中，需要改进流场的运动相似性，获得更好的试验模拟效果。且 $\frac{v_p}{v_m} = v_r$

(2) 动力相似，动力相似要求 5 个表征数相等。弗劳德数 F_r ，表示质点上惯性力与重力之比；雷诺数 Re 表示惯性力和粘性力之比；马赫数 Ma 表示惯性力与弹性力之比；欧拉数 Eu 表示压力与惯性力之比；韦伯数 We 表示惯性力与表面张力之比。若流场中同时有重力、压力、弹性力、摩擦力、表面张力、惯性力作用与质点上，则要求上述五个参数全部分别相等，两个流场才满足动力相似。实际工程中，可以根据情况考虑惯性力和某几种重要作用力满足特别相似定律，并不一定要求完全动力相似。 F_r 主要考虑重力对流场的影响，是溃坝流场的主要影响因素； Re 考虑不可压缩流体中物体受内部摩擦力影响下的运动，对于有粘流体在管道或者槽内的流动需要考虑； Eu 考虑压力对流场的影响，对于溃坝试验，没有外界施加压力，不予考虑； Ma 考虑弹性力的影响，对于不可压缩流体不需要考虑，很少用于水流场中； We 考虑表面张力，在流体表面研究和毛细管流动中影响大，对于水工试验，很少考虑。因此，对于溃坝流场的相似性设计，需要重点考虑的是重力相似准则，有时候需要对粘滞力相似准则进行修正。相关准则的判定标准有：

弗劳德数比例 $(F_r)_r = \frac{v_r}{\sqrt{g_r L_r}}$ ，同一个重力参照系 $g_r = 1$ ，若两个流场 $(F_r)_r = 1$ ，满足重力相似准则。

雷诺数比例 $(Re)_r = \frac{v_r L_r}{\mu_r}$ ，对于同一种流体 $\mu_r = 1$ ，若 $(Re)_r = 1$ ，满足粘滞力相似。即模型尺寸缩小后，必须增大流速才能满足雷诺相似。具有自由液面而流速低的层流，因受粘滞力影响大，需要满足该准则 $(Re)_r = 1$ ，但是，经比较，发现一般水工试验可以忽略此影响。

因此，小型模型试验在满足几何相似和运动相似的基础上，应该首先满足重力相似准则 $(F_r)_r = 1$ 。

溃坝时，水的流动主要依靠于重力，溃坝原型中的洪水流速分别为 $v_p = 4m/s$ 和 $v_p = 5m/s$ ，水深分别为 3m 和 4m 时，我们模型试验的相似性判定如表 6

表 6 模型试验与溃坝情况相似性分析

	$v_p = 4m/s \quad L_p = 3m$				$v_p = 5m/s \quad L_p = 4m$			
v_m	0.34m/s	0.40m/s	0.47m/s	0.55m/s	0.34m/s	0.40m/s	0.47m/s	0.55m/s
L_r	10.9	10.9	10.9	10.9	14.55	14.55	14.55	14.55
v_r	11.765	10	8.51	7.27	14.7	12.5	10.6	9.1
$(F_r)_r$	3.56	3.03	2.58	2.2	3.85	3.28	2.78	2.39
$(Re)_r$	128.2385	109	92.759	79.243	213.885	181.875	154.23	132.405

可以发现,对洪水流速 $v_p = 4m/s$,水深 $L_p = 3m$ 的真实流场,模型试验所采用的四组流速 v_m 都偏小,最理想的模型试验流速是 $v_m = 1.21m/s$;对洪水流速 $v_p = 5m/s$,水深 $L_p = 4m$ 的真实流场,模型试验所采用的流速 v_m 也偏小,最理想的模型试验流速是 $v_m = 1.31m/s$ 。如果将本文所提及的小型模型试验运用于上述两种实际溃坝截堵模拟中,所采用的模型试验流速偏小,只能说是近似满足重力相似准则。但是,对于不同速度和深度的洪水,需要按照重力相似进行小型试验的设计,而本文的小型试验和真实洪水流场基本满足重力相似定律。

本文重物运动轨迹的计算模型基于所设计的多组小型试验结果,模型给出了阻力系数与空心率和流场速度的关系。用模型预测实际物体运动时,可以先按照相似定律给出模型所需要的流场速度,然后根据流场速度和空心率找到合适的阻力系数,从而得到物体的运动轨迹。

5.3 真实溃坝抛物预测分析

将模型推广到洪水流速分别为 $v_p = 4m/s$ 和 $v_p = 5m/s$,水深分别为 $3m$ 和 $4m$,物块重 $1.5t$,离水面 $2m$ 处抛出的真实情况中,先按照重力相似定律求的,模型试验所需的流速,将物块等效成球,按照体积等效求得物块当量直径,和缩尺后下落高度,得到求解运动轨迹所需的模型参数,见表7。

表7 重力相似后的模型参数

	$v_p = 4m/s \quad L_p = 3m$					$v_p = 5m/s \quad L_p = 4m$				
	当量直径 m	下落高度 m	入水速度 m/s	水深 m	水流速度 m/s	当量直径 m	下落高度 m	入水速度 m/s	水深 m	水流速度 m/s
实际参数	1.076	2	6.26	3	4	1.076	2	6.26	4	5
模型参数	0.1	0.425	1.9	0.275	1.21	0.1	0.37	1.64	0.275	1.31
缩尺	$L_r = 10.9 \quad v_r = \sqrt{L_r} = 3.3$					$L_r = 14.55 \quad v_r = \sqrt{L_r} = 3.815$				

其中,实际当量直径 $d_v = \sqrt[3]{(6V/\pi)} = \sqrt[3]{6m/\pi\rho_g} = 1.076m$

(1) 洪水速度 $v_p = 4m/s$,深度 $L_p = 3m$ 时的投放距离

由表7可以得到,水流速度 $u_0 = 1.21m/s$,物块水平初速度 $u_c = 0m/s$,垂直初速度 $\omega_0 = 1.9m/s$,当量直径 $d = d_v = d_p = d_h = 0.1m$

$$\text{并且 } \alpha_1 = \frac{\rho A_p C_D}{2\rho_g V} = 0.326 \frac{C_D}{d}, \quad \alpha_2^2 = \frac{2(\rho_g - \rho)gV}{\rho A_h C_L} = \frac{17d}{C_L}$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho A_h C_L}{2\rho_g V} = 0.326 \frac{C_L}{d}, \quad \frac{\alpha_2}{\omega_0} = th\varphi = \frac{sh\varphi}{ch\varphi}, \quad \text{即 } \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \alpha_2/\omega_0}{1 - \alpha_2/\omega_0}$$

从前述模型得到，流速 $u_0 = 1.21 \text{ m/s}$ ，空心率 $\eta = 0$ 时， $C_D = 1.457$ ， $C_L = 0.695$ ，代入

$$\text{运动方程} \begin{cases} x = u_0 t - \frac{1}{\alpha_1} \ln(\alpha_1(u_0 - u_c)t + 1) \\ h = 0.26 - \frac{1}{\alpha_3} \ln \left[\frac{sh(\alpha_2 \alpha_3 t + \varphi)}{sh \varphi} \right] \end{cases}, \text{可以得到}$$

$$\text{运动轨迹} \begin{cases} x = 1.21t - \frac{1}{4.75} \ln(5.75t + 1) \\ h = 0.26 - \frac{1}{2.27} \ln \left[\frac{sh(3.55t + 1.16)}{sh(1.16)} \right] \end{cases}$$

其轨迹图见图 9

当竖直方向距离 $h = 0$ 时，物体触底，此时可以计算得到水平漂移距离 $X = 8.54 \text{ cm}$ ，故投放距离为

$$X_p = X \cdot L_r = 10.9 \times 8.54 = 93.086 \text{ cm} = 0.93086 \text{ m}$$

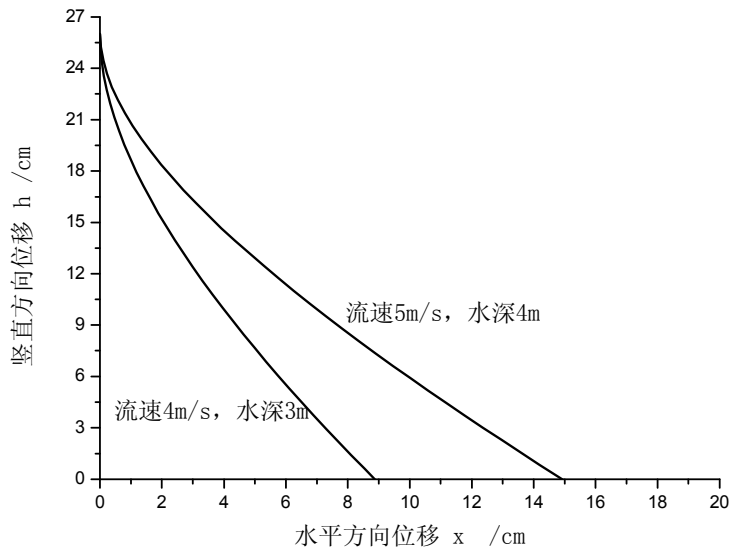


图 9 两种洪水情况的模型运动轨迹分析

(2) 洪水速度 $v_p = 5 \text{ m/s}$ ，深度 $L_p = 4 \text{ m}$ 时的投放距离

由表 7 可以得到，水流速度 $u_0 = 1.31 \text{ m/s}$ ，物块水平初速度 $u_c = 0 \text{ m/s}$ ，垂直初速度 $\omega_0 = 1.64 \text{ m/s}$ ，当量直径 $d = d_v = d_p = d_h = 0.1 \text{ m}$ 。和 (1) 同理，从前述模型得到，流速 $u_0 = 1.31 \text{ m/s}$ ，空心率 $\eta = 0$ 时， $C_D = 1.845$ ， $C_L = 0.745$ ，代入运动方程，得到

$$\text{运动轨迹} \begin{cases} x = 1.31t - \frac{1}{4.97} \ln(6.51t + 1) \\ h = 0.26 - \frac{1}{2.43} \ln \left[\frac{sh(5.54t + 0.91)}{sh(0.91)} \right] \end{cases}$$

其轨迹图也绘制于图 9 中

当竖直方向距离 $h=0$ 时, 物体触底, 此时可以计算得到水平漂移距离 $X=14.8\text{cm}$, 故投放距离为 $X_p=X\cdot L_r=14.55\times 14.8=215.34\text{cm}=2.1534\text{m}$

因此, 洪水流速分别为 $v_p=4\text{m/s}$ 和 $v_p=5\text{m/s}$, 水深分别为 3m 和 4m 时, 在离水面 2m 投放重达 1t 的重物时, 应该分别提前 0.93086m 和 2.1534m 投掷。

6. 模型总结

本文采用动力学的方法, 对物块在流场中的运动进行了受力分析, 主要考虑了重力、浮力、拖曳力、上举力对物体速度和加速度的影响, 其中摩擦力、附加阻力和其他流场力都修正在拖曳力和上举力的阻力系数中。通过动力学微分方程和边界条件分别得到物体静止进入水中和运动进入水中的物体运动轨迹方程。根据小型试验的四组数据, 拟合了各种形状参数下的轨迹方程系数。对于复杂形状, 通过工程中常用的体积等效和截面等效的方法获得当量直径, 将物块等效为球形, 并且引入了空心率的概念用于表征物块形状参数对流场中受力的影响因子, 这样用当量直径和空心率将复杂形状物块简化成球体, 使计算方便, 并且可以推广到各种形状的块石和沙包。拟合试验数据得到了决定轨迹方程系数的拖曳力系数 C_D 和 C_L 与空心率 η 关系。

本文所述动力学模型, 与小型试验结果吻合效果比较好, 拟合相关系数接近于 1。当实际溃坝流场进行重力相似准则转化后, 可以通过本模型进行抛投物块的运动轨迹预测, 使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置, 尽可能减少无效投放, 具有准确、经费省、风险小、时间短、易重复、条件可以改变等优点。当然, 模型忽略了摩擦力和其他与阻力形式不一样的流场力影响, 将所有力集中于质心和当量简化, 没有考虑翻转造成的阻力系数变化, 需要在进一步完善。

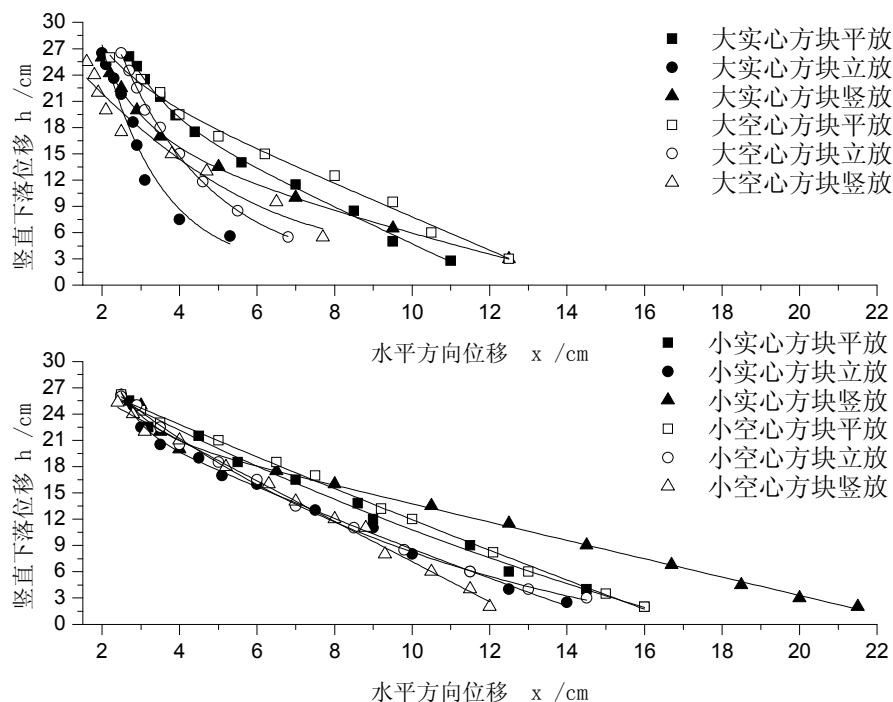
参考文献

- [1] 陈文义、张伟, 流体力学[M], 天津, 天津大学出版社, 2004
- [2] 郑洽馥、鲁钟琪, 流体力学[M], 北京, 机械工业出版社, 1980
- [3] 毛伟, 块体水平拖曳力相互影响试验研究[R], 河海大学 2006
- [4] 肖焕雄、唐晓阳, 江河截流中混合粒径群体抛投石块稳定性研究[J], 《水利学报》, 1994(03)
- [5] Zhu L J. Wang J Z. Cheng N S. Ying, Q Zhang, D.E Setting Distance and incipient motion of sandbags in open channel flows
- [6] 韩世娜, 空心块体水流拖曳力的试验研究[[R], 河海大学, 2007
- [7] 水利水电科学院, 水工模型试验[M], 水利电力出版社, 1984

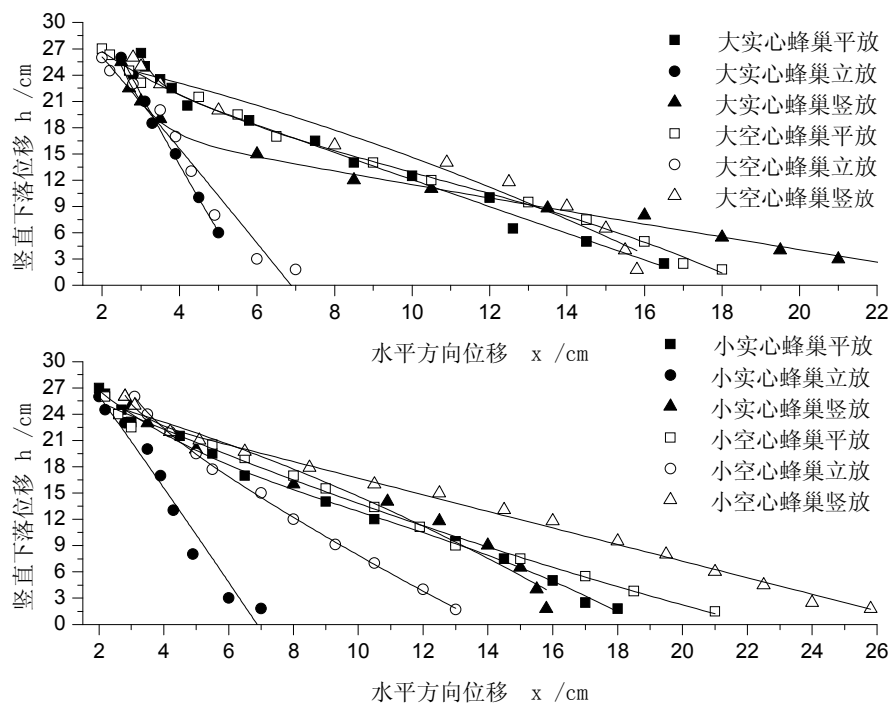
附录

附录一 四种速度流场，不同几何结构的试验数据图

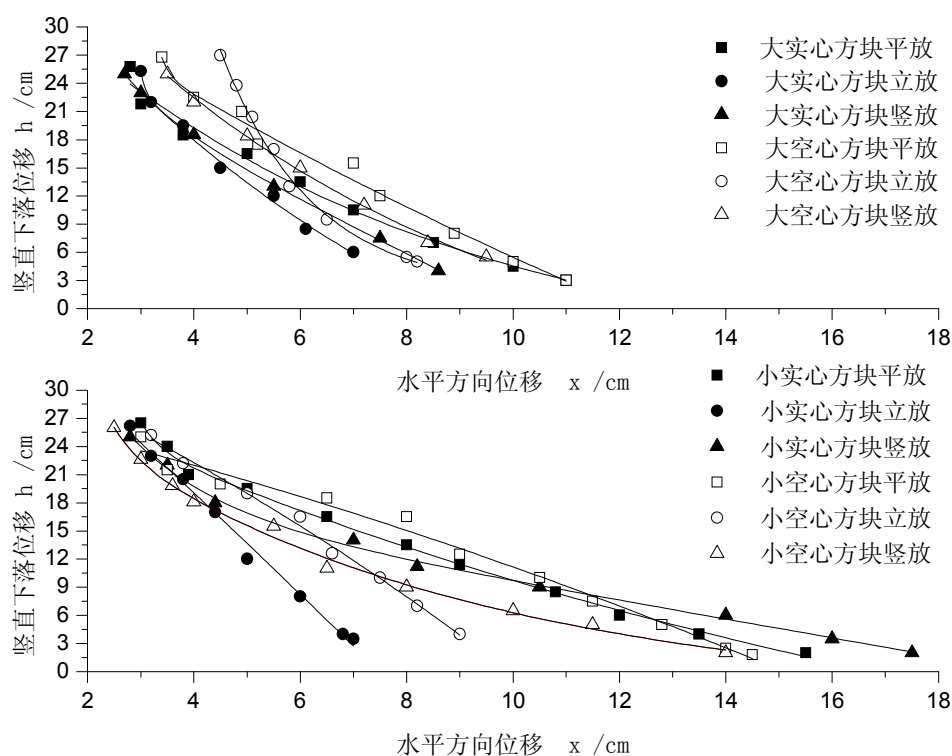
第一组 流速为 0.34m/s



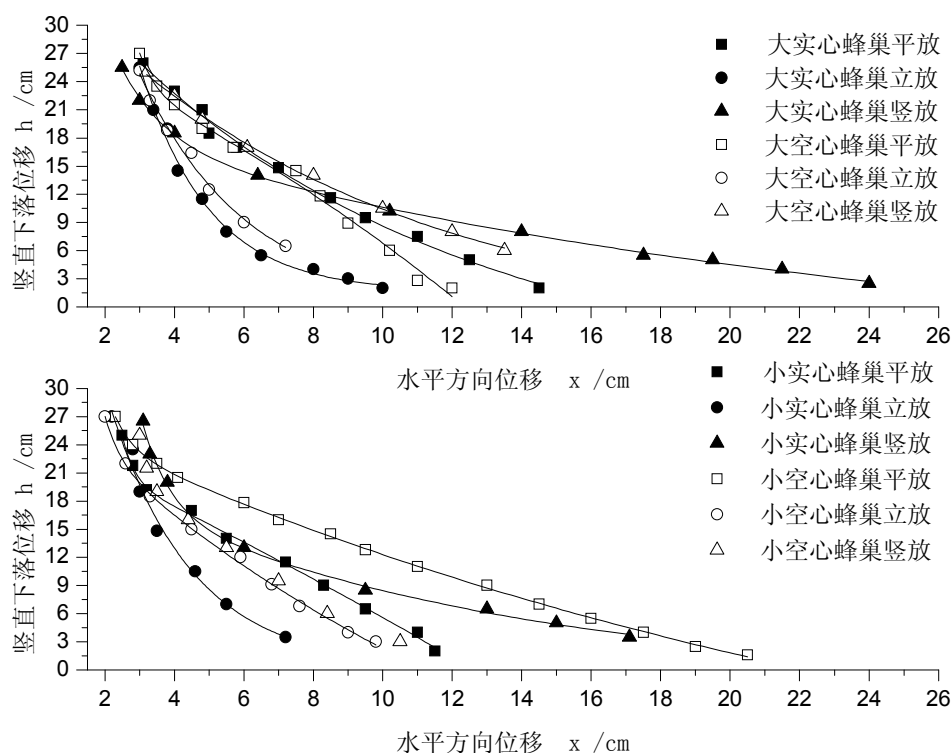
附图 1.1 方块静止下落，0.34m/s 时的运动轨迹



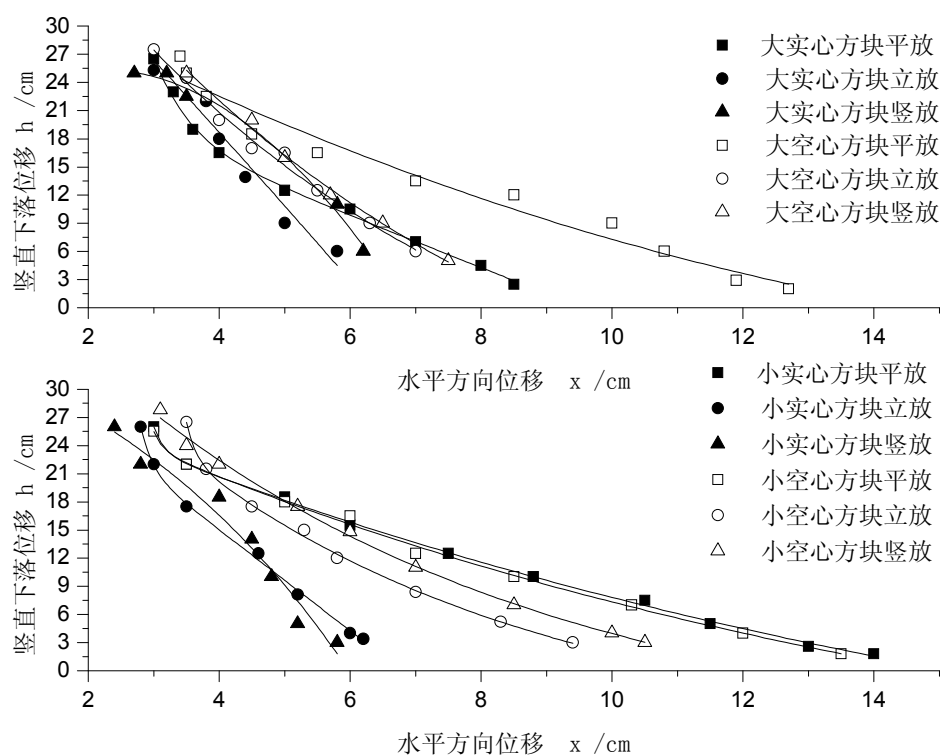
附图 1.2 蜂巢静止下落，0.34m/s 时的运动轨迹



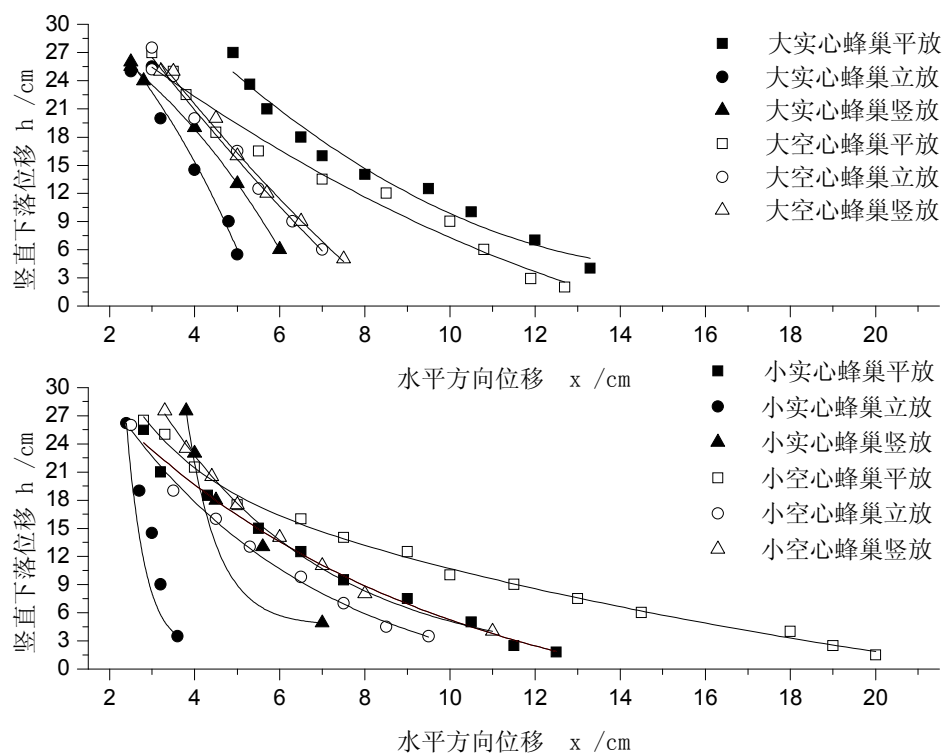
附图 1.3 方块 5cm 下落, 0.34m/s 时的运动轨迹



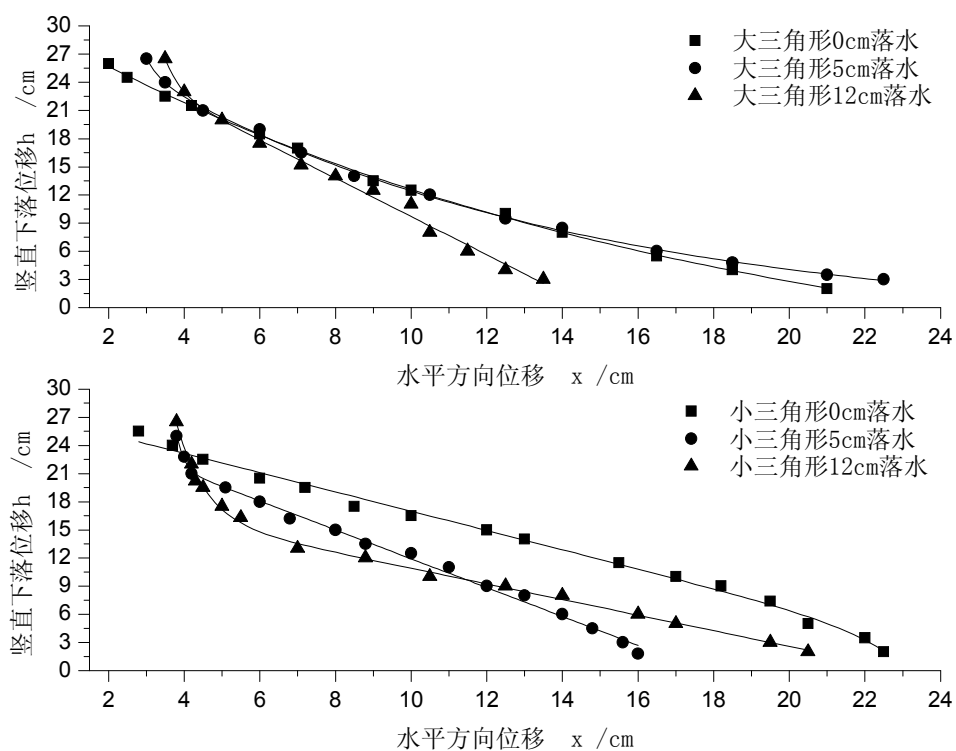
附图 1.4 蜂巢 5cm 下落, 0.34m/s 时的运动轨迹



附图 1.5 方块 12cm 下落, 0.34m/s 时的运动轨迹



附图 1.6 蜂巢 12cm 下落, 0.34m/s 时的运动轨迹



附图 1.7 三角形不同下落状态, 0.34m/s 时的运动轨迹

第二组 流速为 0.40m/s

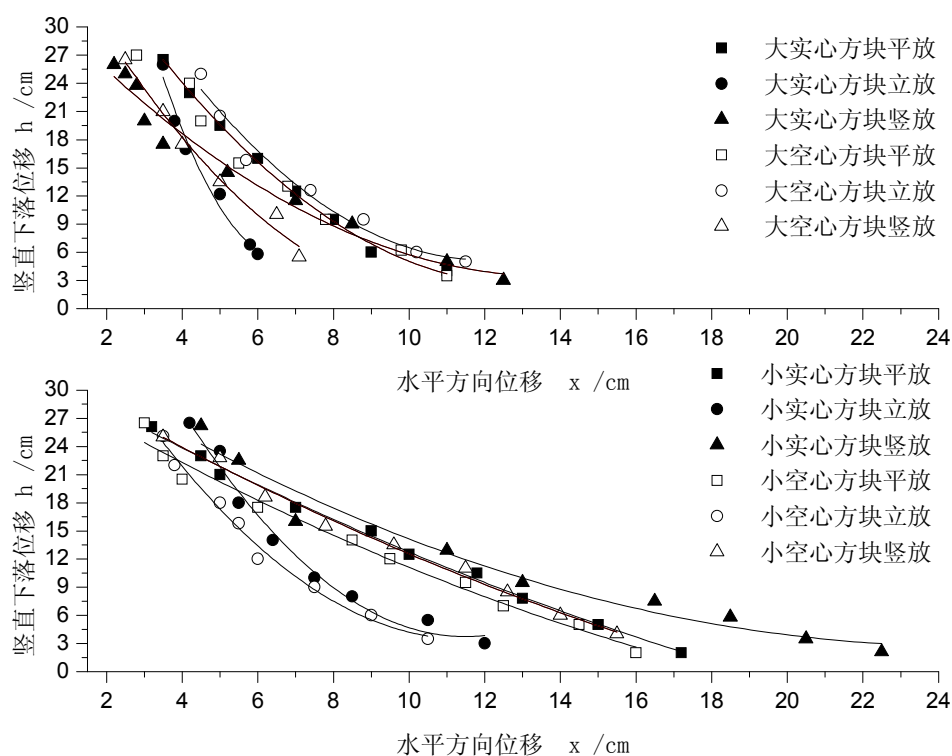
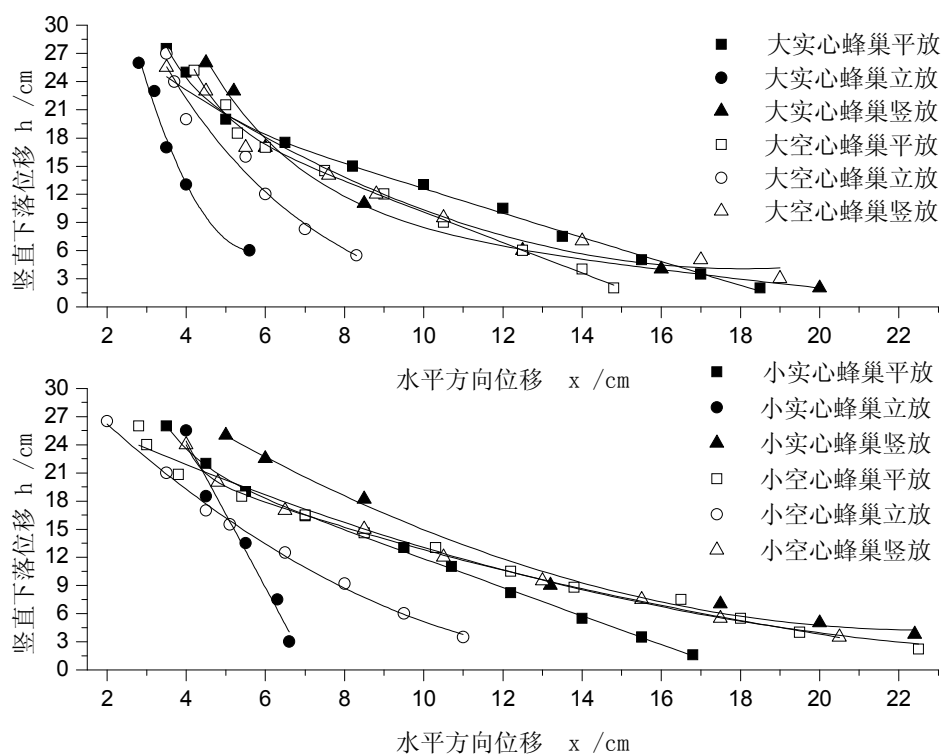


图 2.1 方块静止下落, 0.40m/s 时的运动轨迹



附图 2.2 蜂巢静止下落, 0.40m/s 时的运动轨迹

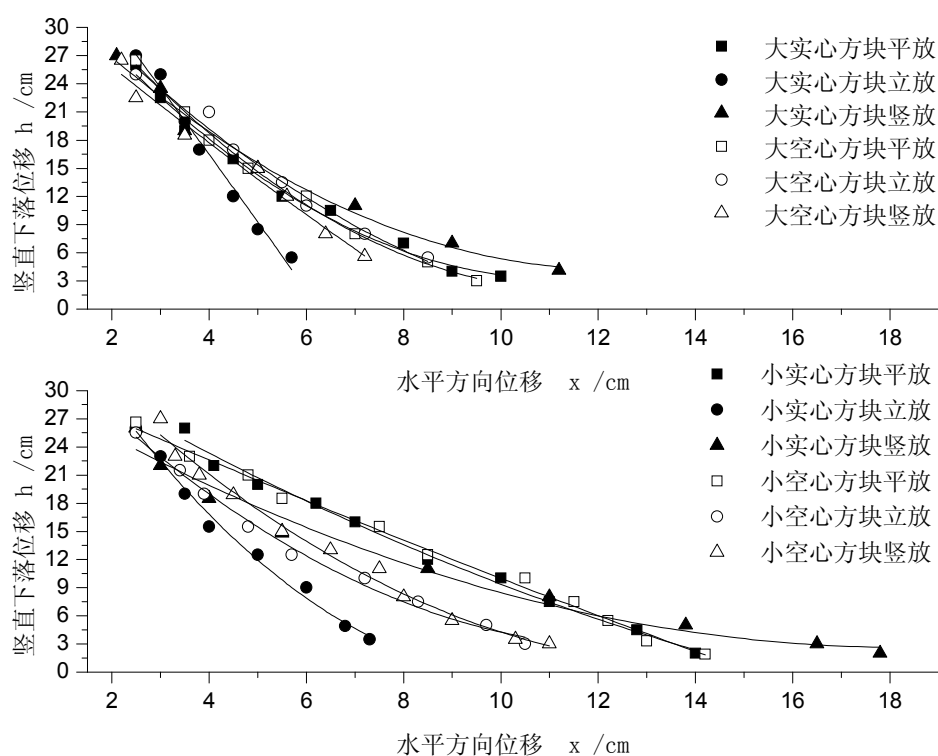
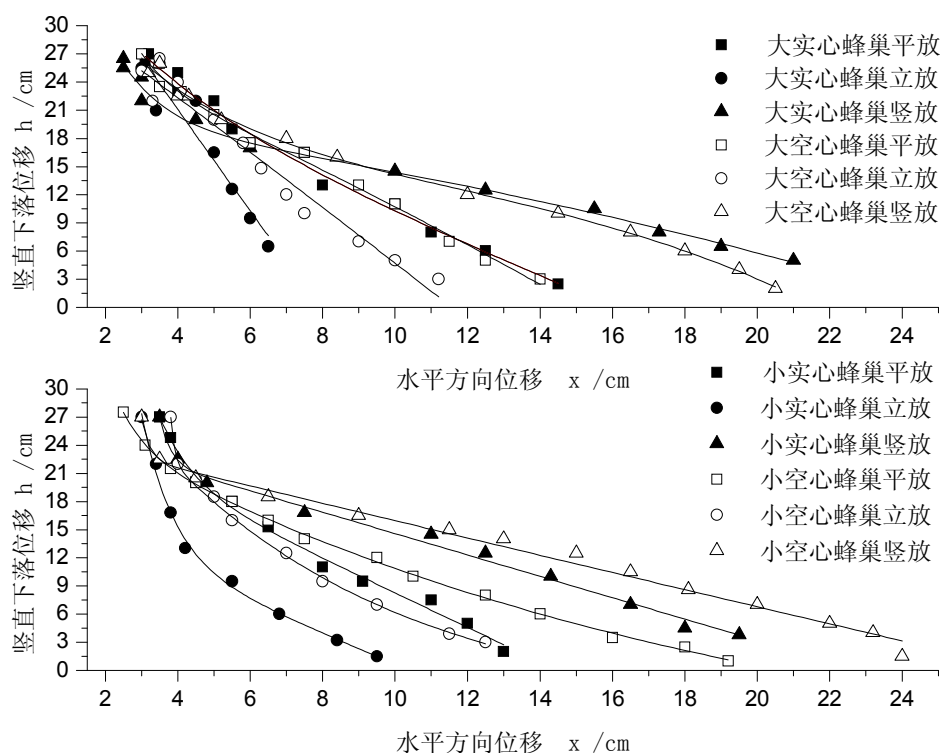
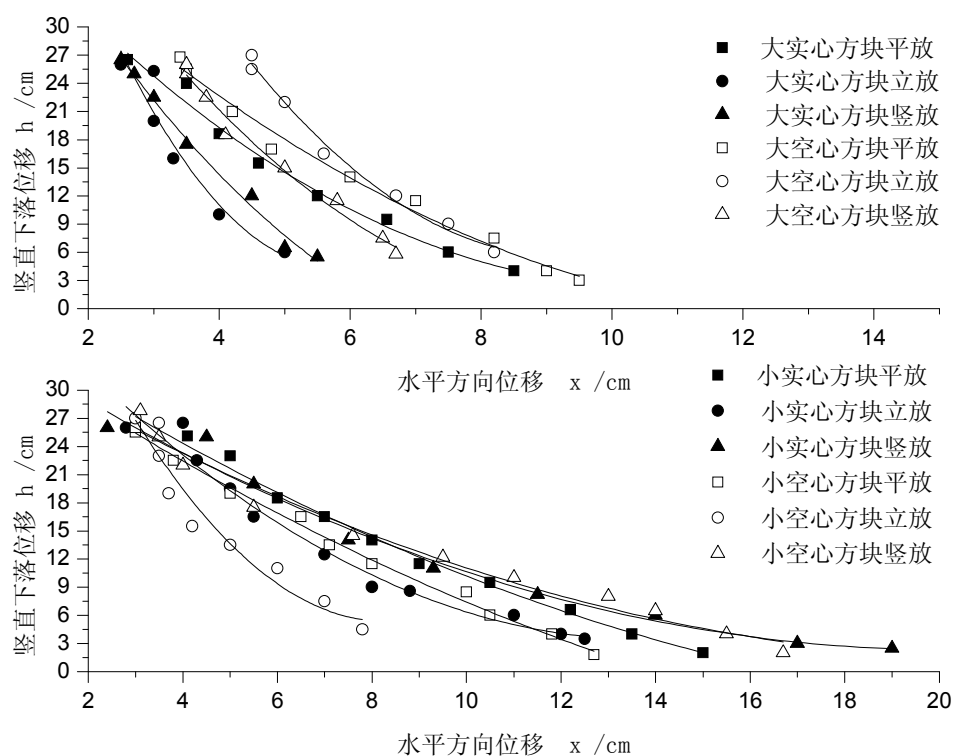


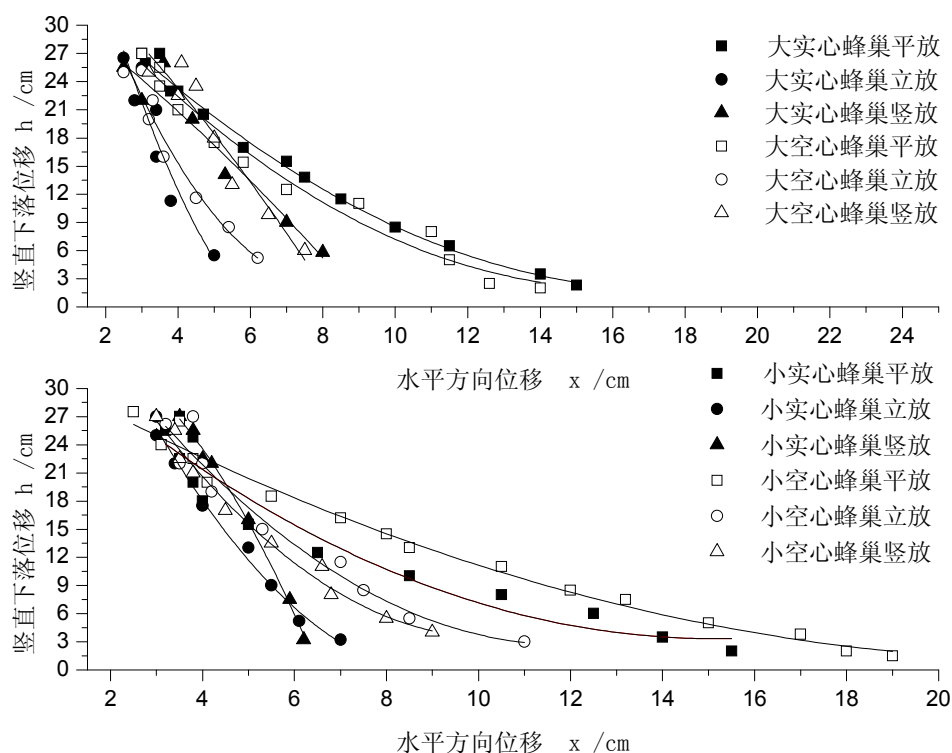
图 3 方块 5cm 下落, 0.40m/s 时的运动轨迹



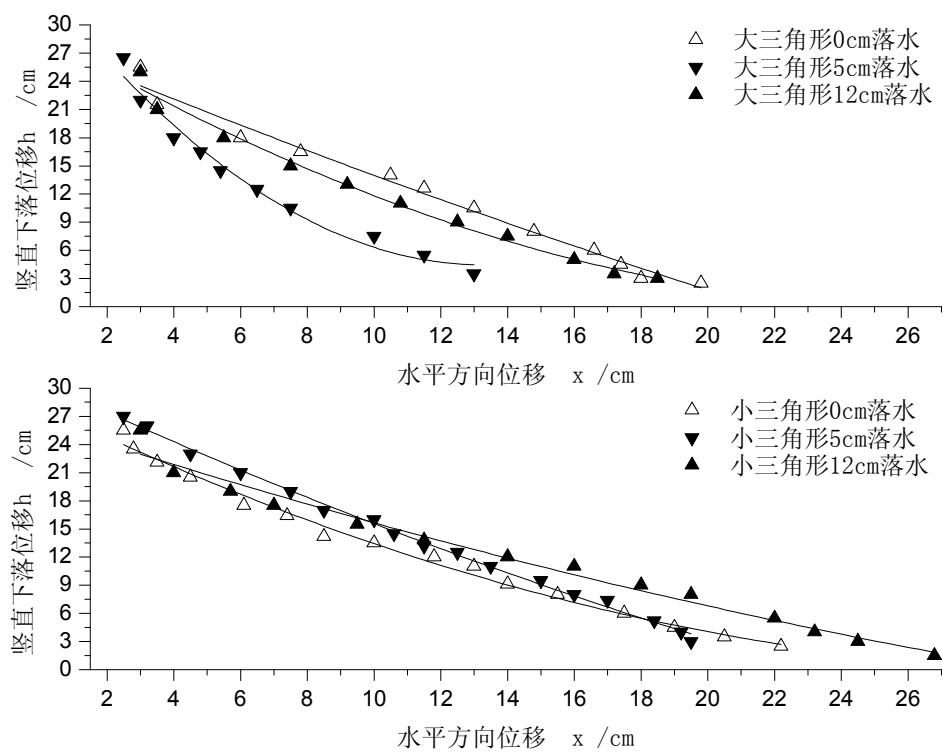
附图 2.4 蜂巢 5cm 下落, 0.40m/s 时的运动轨迹



附图 2.5 方块 12cm 下落, 0.40m/s 时的运动轨迹

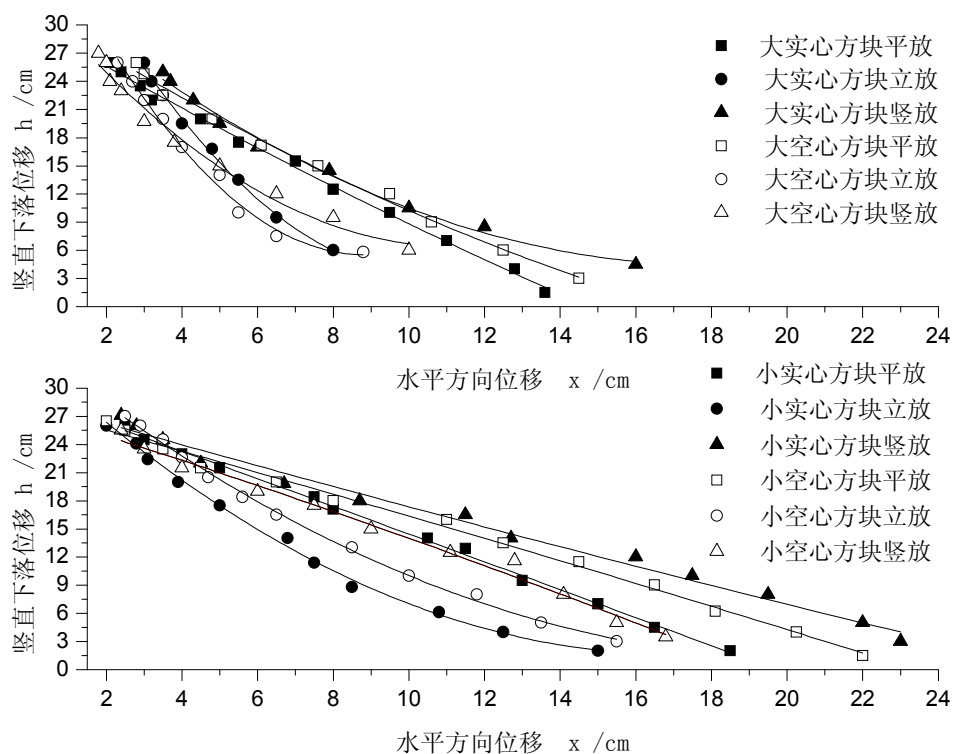


附图 2.6 蜂巢 12cm 下落, 0.40m/s 时的运动轨迹

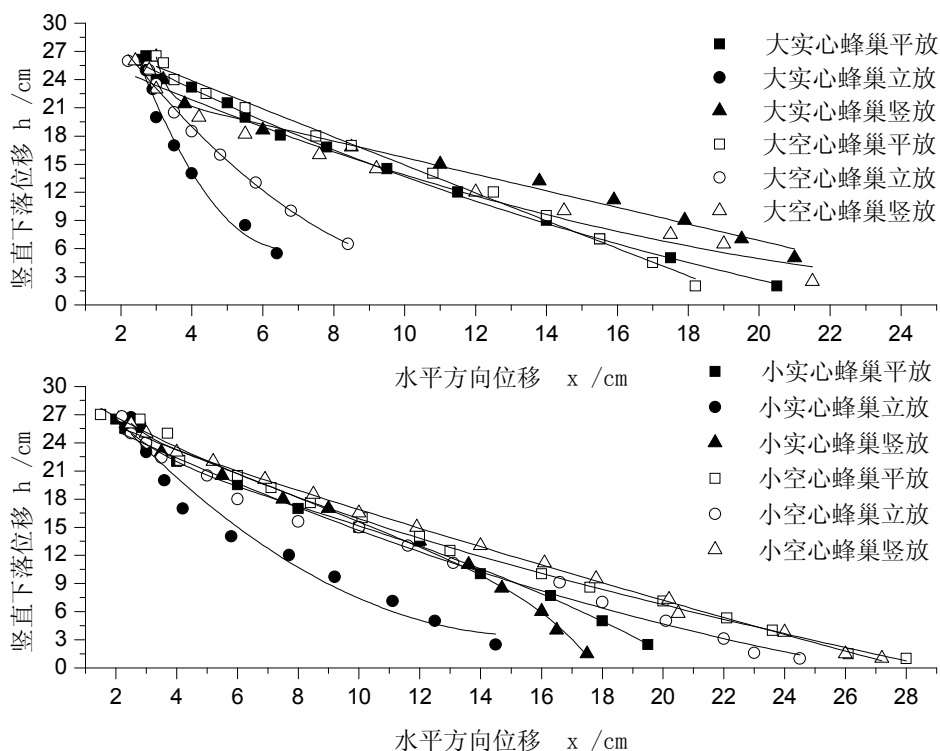


附图 2.7 三角形不同下落状态, 0.40m/s 时的运动轨迹

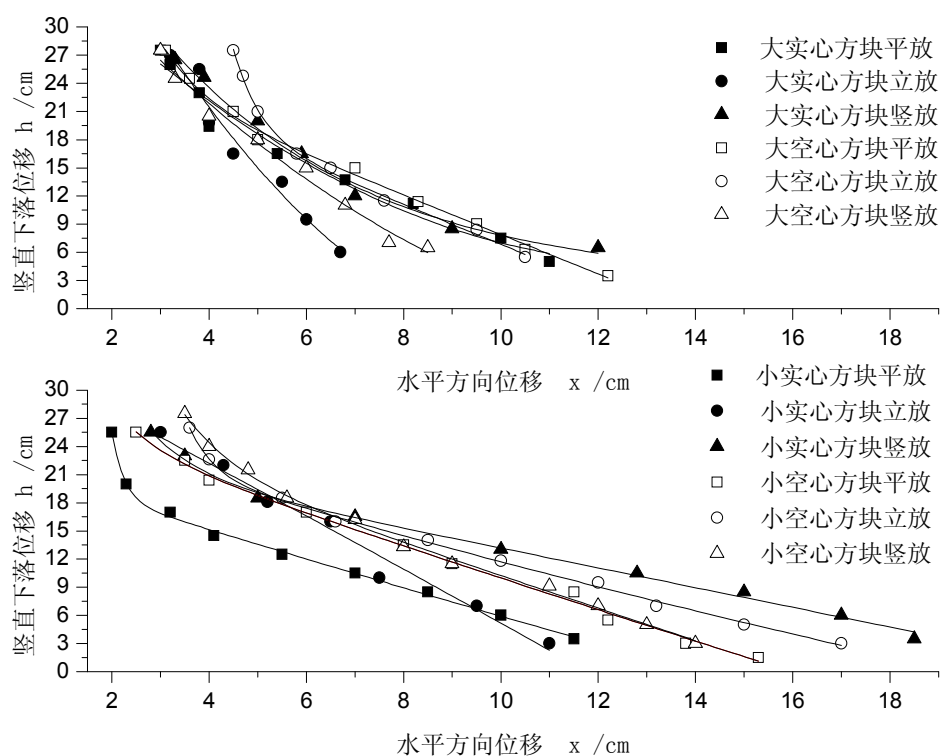
第三组 流速为 0.47m/s



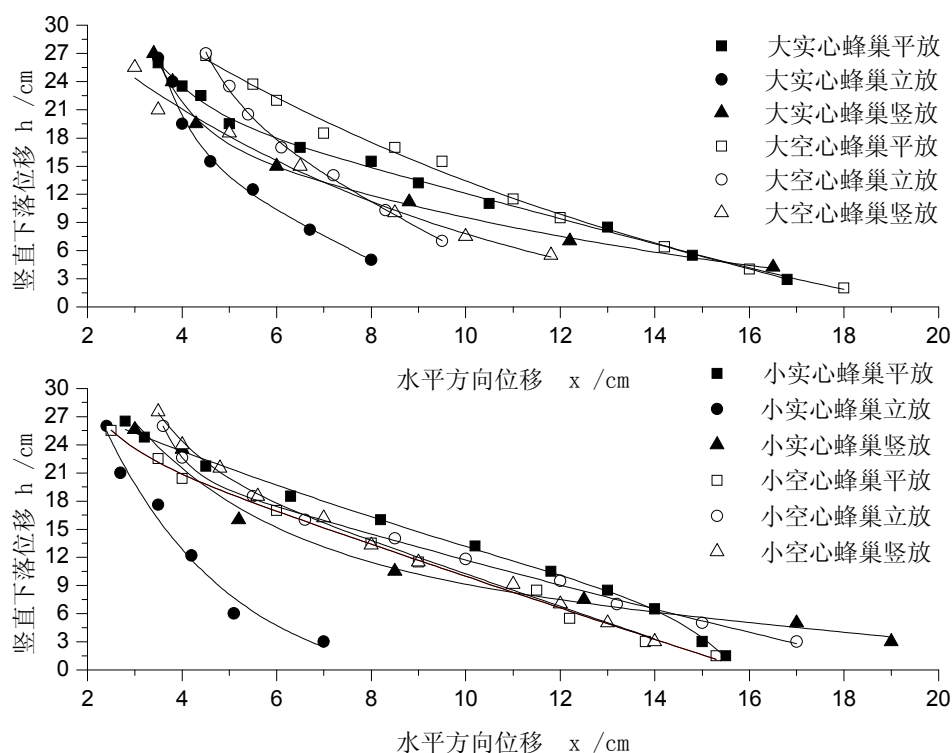
附图 3.1 方块静止下落, 0.47m/s 时的运动轨迹



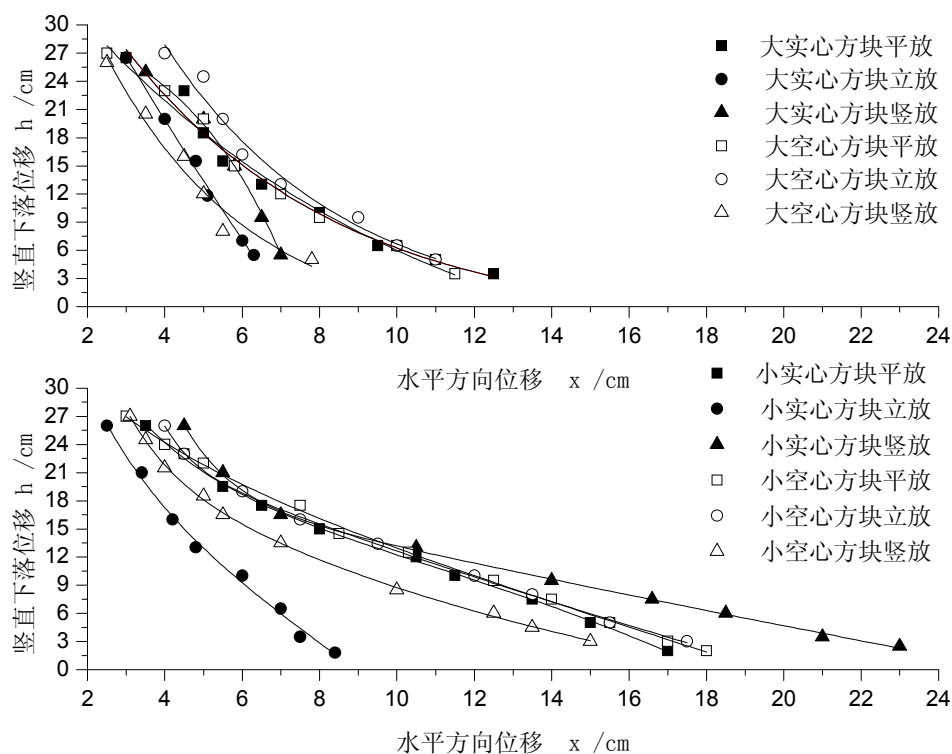
附图 3.2 蜂巢静止下落, 0.47m/s 时的运动轨迹



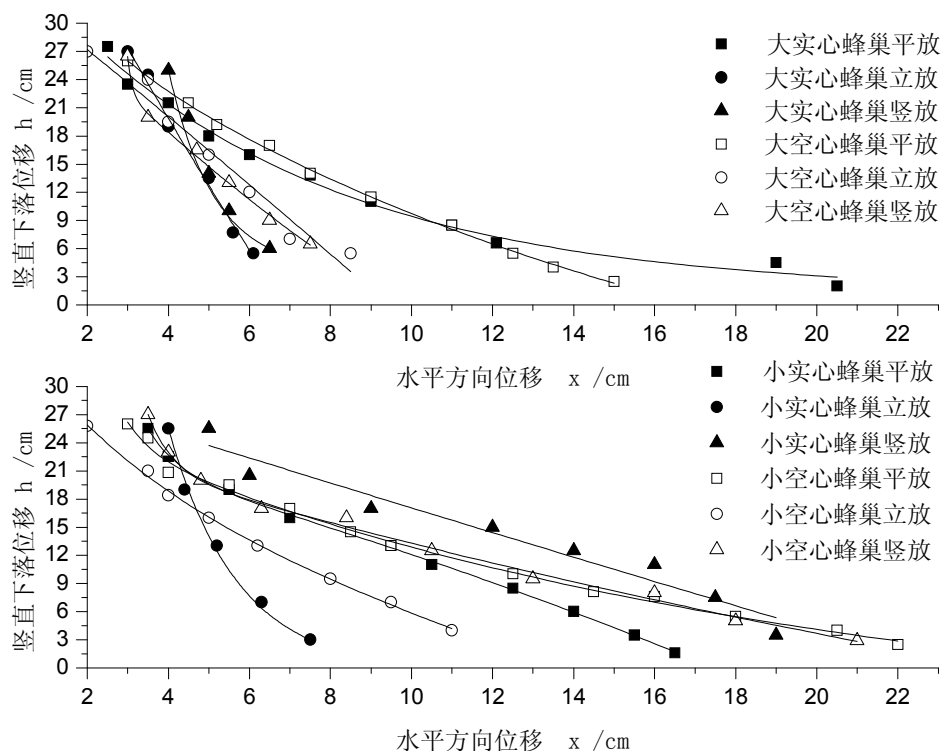
附图 3.3 方块 5cm 下落, 0.47m/s 时的运动轨迹



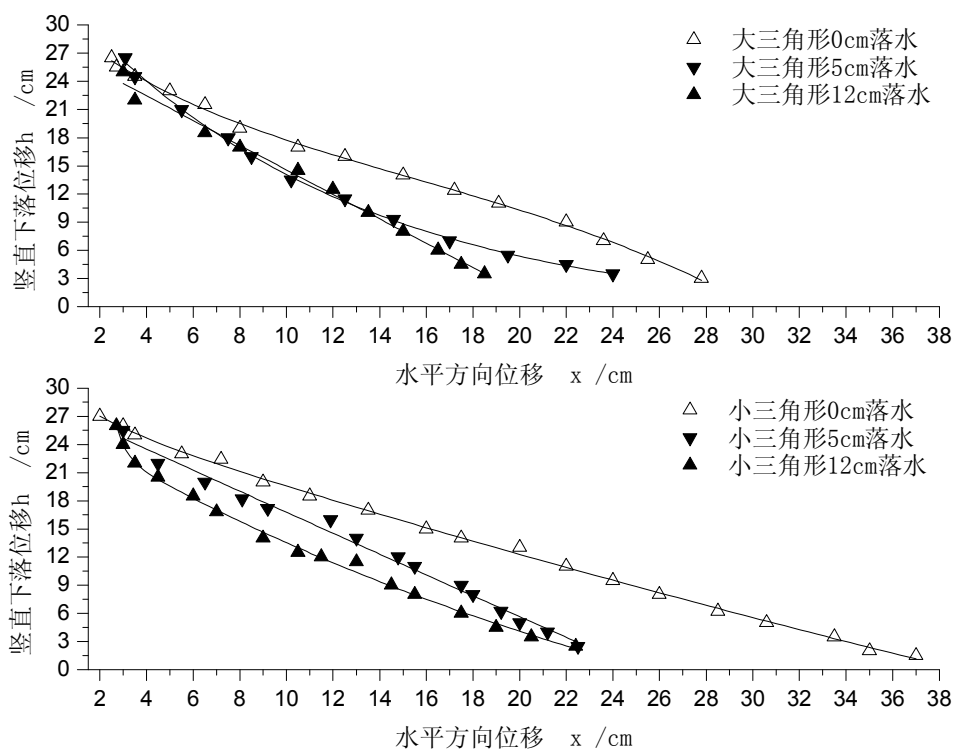
附图 3.5 蜂巢 5cm 下落, 0.47m/s 时的运动轨迹



附图 3.5 方块 12cm 下落, 0.47m/s 时的运动轨迹

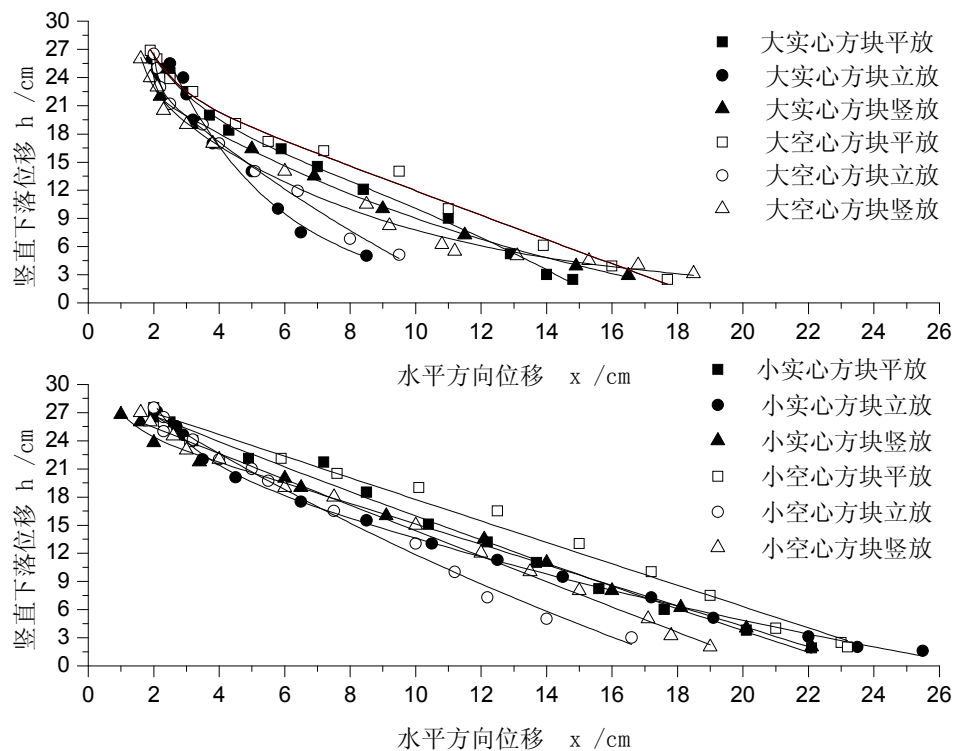


附图 3.6 蜂巢 12cm 下落, 0.47m/s 时的运动轨迹

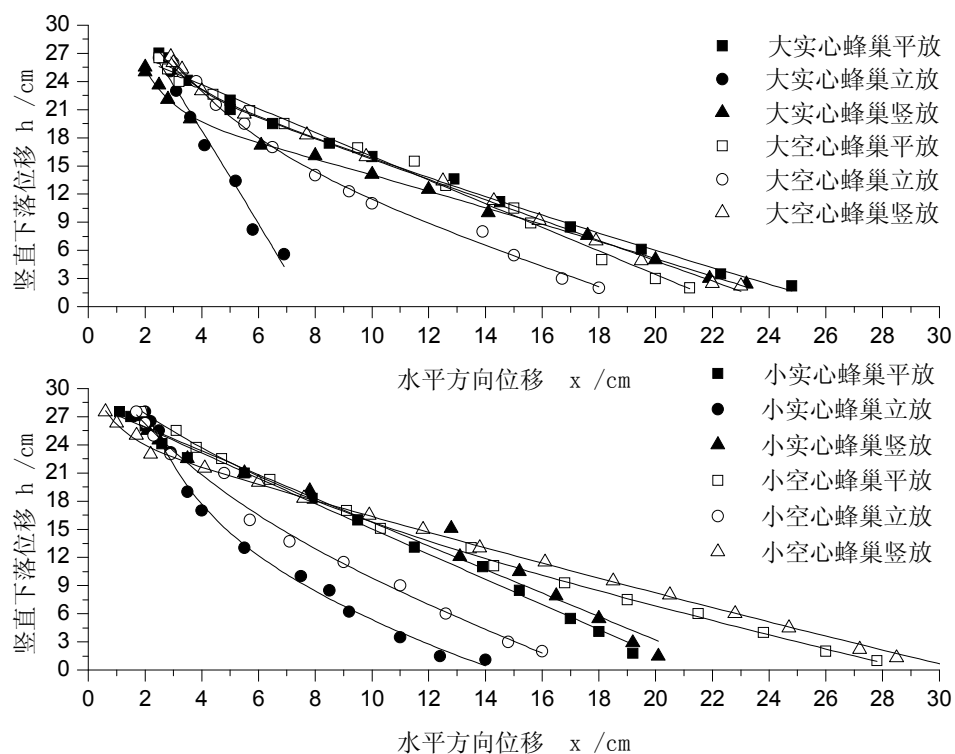


附图 3.7 三角形不同下落状态, 0.40m/s 时的运动轨迹

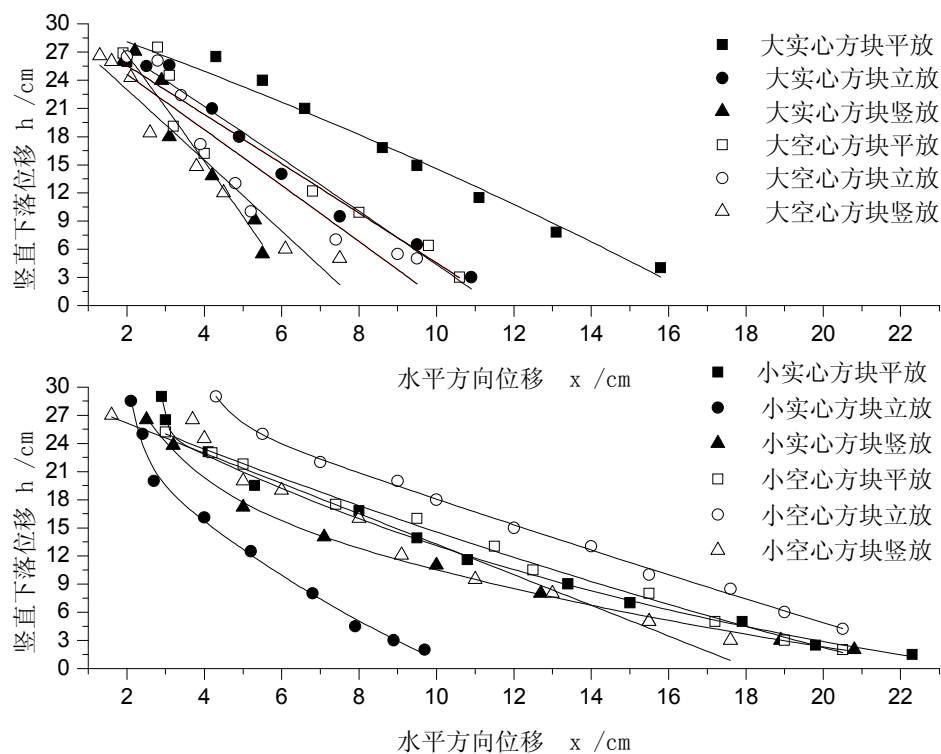
第四组 流速为 0.55m/s



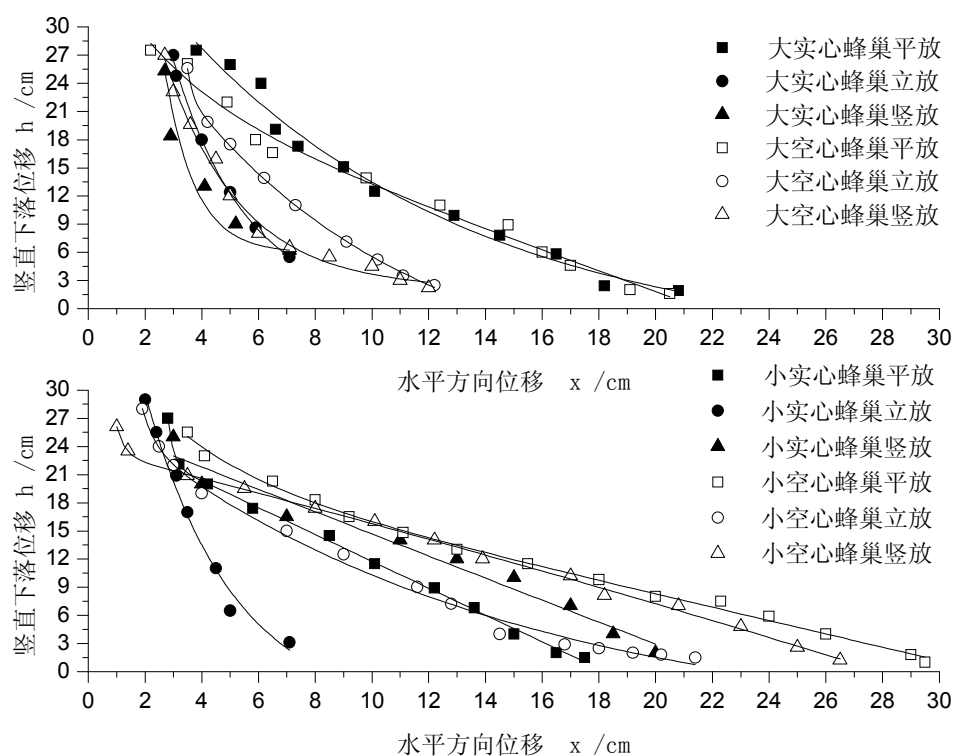
附图 4.1 方块静止下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



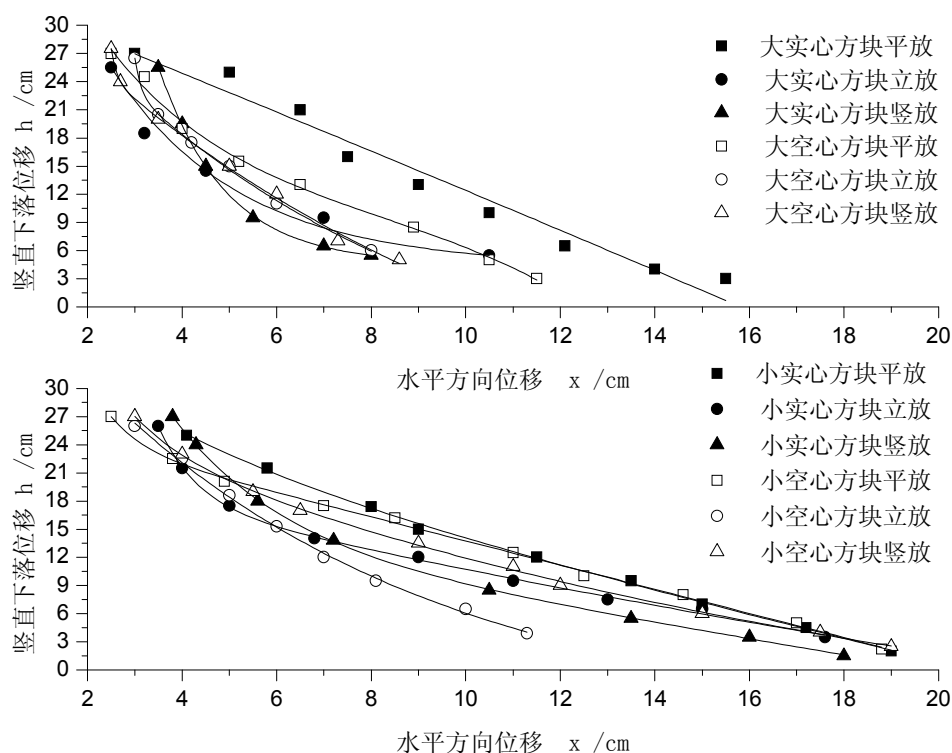
附图 4.2 蜂巢静止下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



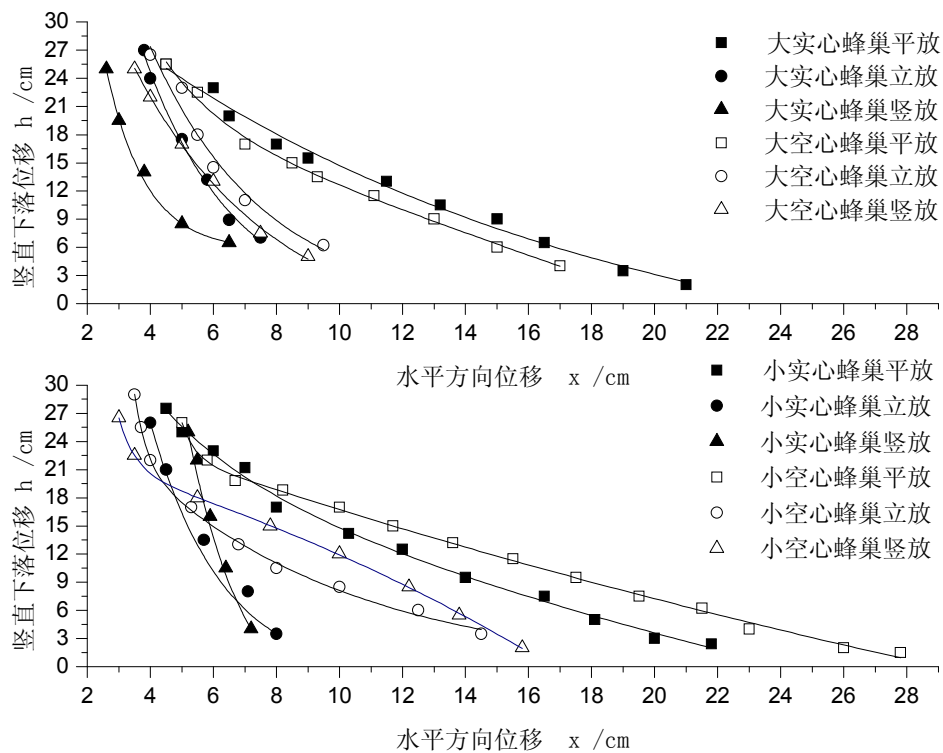
附图 4.3 方块 5cm 下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



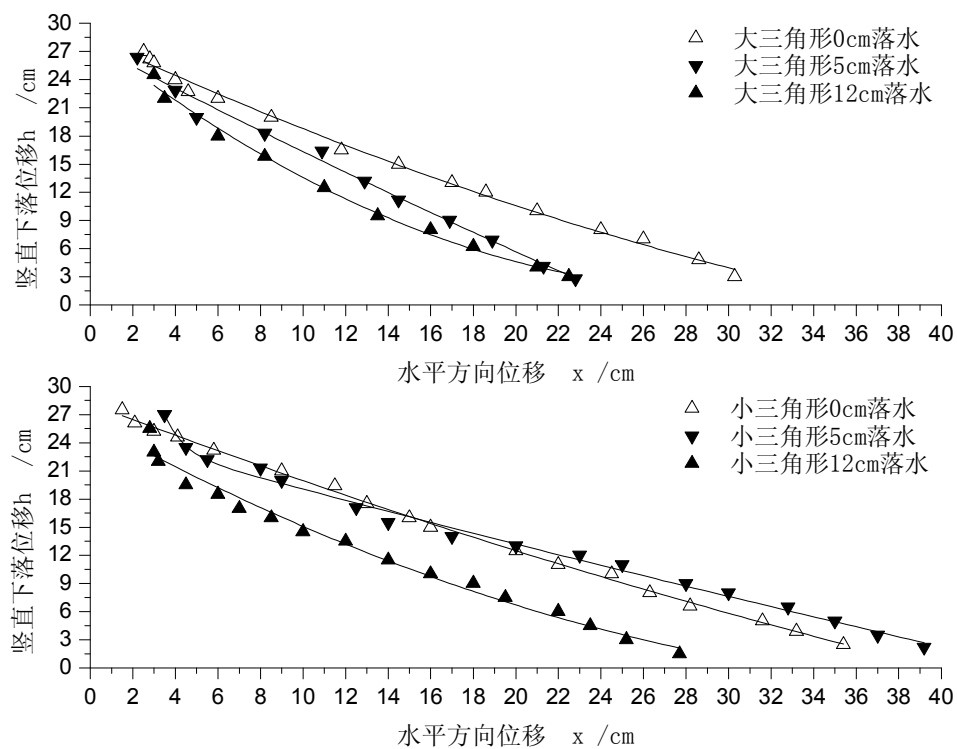
附图 4.4 蜂巢 5cm 下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



附图 4.5 方块 12cm 下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



附图 4.6 蜂巢 12cm 下落, 0.55m/s 时的运动轨迹



附图 4.7 三角形不同下落状态, 0.55m/s 时的运动轨迹