

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 特殊工件磨削加工的数学建模

摘 要：

本文主要是针对特殊工件进行磨削加工问题的数学建模。分析的对象为三个自由度的内外圆磨床。由于砂轮和工件都做绕某一轴的旋转运动，所以该磨削加工可以简化为一个二维的问题。

首先，在机床坐标系下，根据砂轮加工点位置和加工坐标系的几何关系，建立磨床的逆运动学模型，计算工件表面上任意一点按要求到达砂轮加工点时，各个工作台的运动量；

其次，建立步进电机的传动控制模型。根据题中图 3 和 4 两种传动方式建立移动和旋转单位脉冲进给模型，用各个工作台的运动量分别计算所需的脉冲数。

第三，建立磨床加工的正运动学误差模型。由于步进电机控制的特殊性，即每一次运动都存在小于单脉冲步进量的误差，将每组步进电机产生的误差通过正运动学模型计算出实际的加工位置，再由面积误差模型得到各加工点的加工误差，最后求出整个加工过程的加工误差百分比。

第四，分别针对圆柱体式和轮式砂轮建立砂轮的运动学模型。为了充分利用砂轮的可加工范围，在加工过程中不断变化砂轮的加工点，以提高加工质量。

针对该类型问题的求解，在所建立的模型基础上，采用 Delphi 软件开发出一套磨床加工仿真软件。通过在工件表面取一定数量的离散点来模拟磨削加工的动态过程，得到加工的磨削轨迹和各工作台的运动轨迹。分析题中四个问题得到其加工误差值分别为：0.000115%，0.000122%，0.000116%，0.000170%。

最后分析了步进电机脉冲频率变化的影响参数和步进电机脉冲频率的优化。得到最优进给量为每秒 1/7mm，加工时间为 4200s。

关键词：正运动学 逆运动学 磨削加工 步进电机 Delphi

目录

1 问题重述	2
2 模型假设和符号说明	3
3 模型建立	4
3.1 磨床逆运动学模型	4
3.2 砂轮的运动学模型	5
3.2.1 圆柱体式砂轮	6
3.2.2 轮式砂轮	6
3.3 步进电机传动控制模型	7
3.4 正运动学误差模型	8
4 模型求解	10
4.1 问题一求解	10
4.1.1 工件的外表面母线	10
4.1.2 加工方案	10
4.2 问题二求解	14
4.2.1 工件的外表面母线	14
4.2.2 加工方案	15
4.3 问题三求解	17
4.4 问题四求解	19
4.5 加工曲线的误差分析	21
5 步进电机脉冲频率变化影响因素及其优化	24
5.1 步进电机脉冲频率变化的影响因素	24
5.2 步进电机脉冲频率变化的优化	24
6 总结	25
7 参考文献	26

1 问题重述

磨削加工是为满足精加工和硬表面加工的需要而发展起来的用磨料磨具作为刀具对工件表面进行金属切削加工的一种比较精密的方法。

本文主要针对对特殊工件进行磨削加工的数学建模问题。这些工件具有硬度高、尺度大、加工精度高和母线为连续光滑曲线等特点。图 1-1 是几类加工工件示例，这些工件的最后精密成形工艺采用磨削加工。

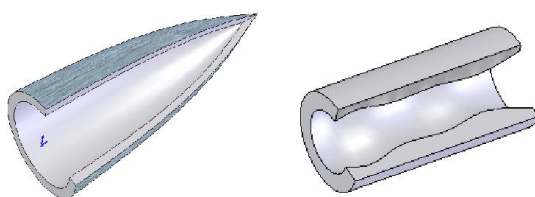


图 1-1 几类特殊加工工件示例

磨床、工作箱、工件以及砂轮的结构示意图如图 1-2 所示，其中驱动砂轮高速旋转的砂轮机箱安装在机床底座上，砂轮的旋转轴线与底座导轨方向保持平行。

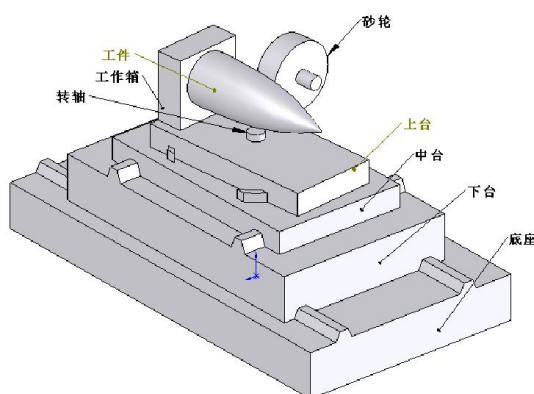


图 1-2 大型数控精密内外圆磨床的结构示意图

三个工作台的运动分别由三组步进电机控制，步进电机的输入脉冲根据本题所研究的加工方案由机床主计算机控制分配。磨床的磨削工具是能磨削高硬度材质的金刚砂轮。根据所给信息请依次研究下列 4 个问题（单位：mm）：

问题 1：加工外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$, $x \in [0, 600]$

的某旋转体工件，采用圆柱型砂轮加工，给出一个加工方案；对你的方案作误差分析。

问题 2：加工外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 的

某旋转体工件，采用轮式砂轮加工，给出一个加工方案；对你的方案作误差分析。

问题 3：在整个加工过程中，若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点（实际是点的一个邻域），随砂轮旋转形成一个圆周，那么砂轮在该圆周上的磨损会加大，从而影响加工质量。为此，希望

在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀，请结合上述第 1 问题，提出一个修整策略，给出一个合理的加工方案，作相应的误差分析。

问题 4：请结合上述第 2 问题，提出一个修整策略，给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案，作相应的误差分析。

2 模型假设和符号说明

针对这类复杂工程的建模问题，为了更有效地解决其中的主要问题，可根据实际情况，在不对问题结果造成重大影响情况下，对其做适当的假设。本文中所做的假设如下：

1. 不考虑各组步进电机、变速器，功放伺服机构和精密丝杠—螺母副的各种误差；
2. 认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级 (10^{-3} 秒)；
3. 三工作台的可移动范围足够大，能保证被加工工件的加工；
4. 工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形，砂轮尺寸可任意选择；
5. 砂轮与工件开始接触磨削前，工作台应有一小段预运动，以便与后续的磨加工运动平稳衔接，称这一小段运动为预动。题目要求的加工方案从预动后开始；
6. 砂轮是能磨削高硬度材质的金刚砂轮，所以在磨削过程中可忽略砂轮的磨耗。

本文中的符号说明如下：

序号	符号	符号说明
1	m	工件上某点在加工坐标系中横坐标
2	n	工件上某点在加工坐标系中纵坐标
3	A_x	砂轮在机床坐标系的横坐标
4	A_y	砂轮在机床坐标系的纵坐标
5	θ	上台的旋转角度
6	N	中台转轴的初始位置
7	N'	磨削状态下上台旋转中心位置
8	O	整体坐标系原点
9	O'	加工坐标系原点
10	Δx	机床坐标系下上台旋转中心的横坐标偏移量
11	Δy	机床坐标系下上台旋转中心的纵坐标偏移量
12	$\Delta \varphi$	机床坐标系下上台旋转中心的旋转角度
13	P	丝杆螺距
14	α	步进电机步进角
15	s	步进电机脉冲步进量
16	σ	各组变速器的传动比
17	φ	步进电机脉冲旋转量
18	δ_i	电机脉冲控制引起的运动误差
19	D_v	砂轮加工点运动方向
20	Δh	单位时间内加工点相对整体坐标系的横向位移

21	l	圆柱式砂轮加工区域长度
22	β	砂轮可加工角度
23	n	砂轮加工区域离散点数
24	R	轮式砂轮加工接触区圆弧的半径
25	$\Delta\psi$	单位时间内加工点相对整体坐标系的角位移

机床坐标系：固定在底座上，原点在夹具基准面中心， x 方向沿下台移动方向， y 方向沿中台移动方向的笛卡尔坐标系。

加工坐标系：固定在上台上，原点在夹具基准面中心， x 方向沿工件工作箱主轴方向， y 方向在砂轮和工件主轴平面内的笛卡尔坐标系。

3 模型建立

由于工件在砂轮上的磨削运动过程实际上是工件在机床坐标系的 x - y 平面内的运动过程，因此图 1-2 所示的机械加工系统可以简化为一个二维的问题。本文建立的模型基于第二节中的模型假设。

3.1 磨床逆运动学模型

如图 3-1 所示，整个磨床有三个自由度，分别为加工坐标系沿机床坐标系 x 、 y 方向的平动和沿自身点 N （中台转轴）的转动，可分别表示为 $(\Delta x, \Delta y, \Delta\phi)$ 。在磨削过程中砂轮在机床坐标系 x - y 平面内的坐标不变，工件表面上的点沿其切线平行于砂轮加工点切线的方向，通过不断改变 $(\Delta x, \Delta y, \Delta\phi)$ 依次通过砂轮加工点，完成整个加工过程。

由图 3-2 所示几何关系建立的磨床运动学模型如下：

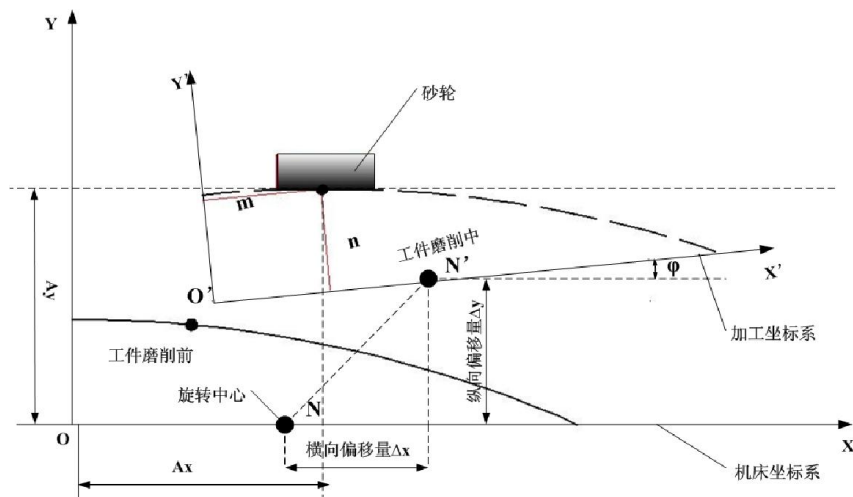


图 3-1 工件磨削过程中加工点坐标变换

3.2.1 圆柱体式砂轮

如图 3-3 所示的圆柱体式砂轮，其中心附近的可加工范围为一条平行于机床坐标系 x 方向的线段，砂轮加工点切线始终保持不变，因此只要改变砂轮加工点的 A_x 坐标即可实现动态加工。

若令圆柱体式砂轮最大纵截面（垂直于砂轮转轴的最大截面）厚度为 a ，砂轮可加工范围百分比为 η_a ，砂轮可加工范围离散点数为 N ，则砂轮加工点在机床坐标系下的坐标 (A_x, A_y) 如下：

$$\begin{cases} A'_x = A_x - a\eta_a/2 + n\Delta l \\ A'_y = A_y \end{cases} \quad (3-3)$$

其中 $\begin{cases} n = n + D_v \\ D_v = \begin{cases} -1, n > N \\ 1, n < 0 \end{cases} \\ \Delta l = a\eta_a/N \end{cases}$

n 为砂轮可加工范围内离散点内一点，取值范围为 $[0, N]$ ；

D_v 为当前离散点 n 的运动方向；

Δl 为相邻砂轮离散点间的距离。

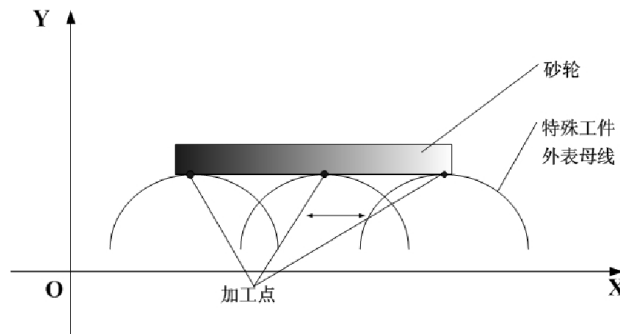


图 3-3 圆柱体式砂轮上加工点移动示意图

3.2.2 轮式砂轮

由于轮式砂轮横截面（通过砂轮转轴的截面）的外端轮廓线参数，理论上它可以是任一凸光滑曲线，但工程上常选用半径为 r 、张角 α 不大于 180° 的圆弧。砂轮的加工要求为：砂轮加工点切线与加工件表面切线平行。由于轮式砂轮加工表面为一圆弧，为了满足上述要求要不断调整砂轮加工点的 A_x 和 A_y 坐标，如图 3-3 所示。

若令轮式砂轮可加工角度为 β ，砂轮可加工范围内离散点数为 N ，则砂轮加工点在机床坐标系下的坐标 (A'_x, A'_y) 如下：

$$\begin{cases} A'_x = A_x - \sin(\beta/2 - n\Delta\alpha) \\ A'_y = A_y + r - \cos(\beta/2 - n\Delta\alpha) \end{cases} \quad (3-4)$$

其中 $\begin{cases} n = n + D_v \\ D_v = \begin{cases} -1, n > N \\ 1, n < 0 \end{cases} \\ \Delta\alpha = \beta/N \end{cases}$

n 为砂轮可加工范围内离散点内一点，取值范围为 $[0, N]$;

D_v 为当前离散点 n 的运动方向;

$\Delta\alpha$ 为相邻砂轮离散点间的夹角。

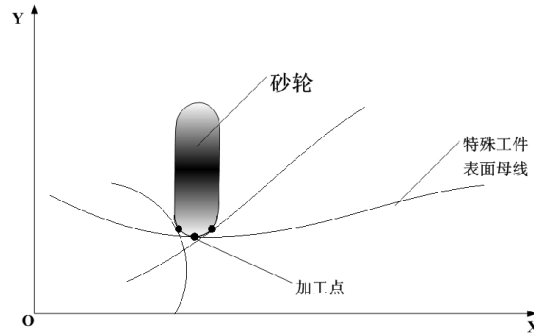


图 3-4 轮式式砂轮上加工点移动示意图

3.3 步进电机传动控制模型

由磨床逆运动学模型可分别计算出加工工件表面上相邻两点的下台、中台的总的位移量和上台总的旋转量，因此就可以计算出相邻两点间下台、中台的相对位移量和上台的相对旋转量。三个工作台的执行机构分别是三组步进电机。步进电机是一种精密数控电动机，每输入一个控制脉冲，电机主轴转动一个精确的步进角度，可输入适当个数的脉冲控制电机主轴的角位移量。因此必须建立一个模型将三个工作台的运动量转换为控制脉冲。

根据题中所给的步进电机参数和机械系统参数，可得到步进电机的单位脉冲步进量。

由于下台和中台采用题中图 3 的传动方式，因此下台和中台的单位脉冲进给量计算公式如下：

$$\Delta s = \frac{\alpha P}{360\sigma} \quad (3-5)$$

上台采用题中图 4 的传动方式，因此上台的单位脉冲进给量计算公式如下：

$$\Delta\phi = \arctan\left(\frac{\Delta s + R \tan\phi}{R}\right) \times 180 / \pi - \phi \quad (3-6)$$

式中 α 表示电机的步进角； P 表示导程即丝杆螺距； σ 表示各组变速器的传动比； R 为中台转轴到控制丝杠—螺母副中心线的距离； ϕ 表示上台相对于加工

坐标系的初始角位移。

3.4 正运动学误差模型

由假设 1、3 和 4 可以忽略磨削工艺系统热变形、丝杠受力变形、砂轮振动等因素对工件的磨削加工所造成的影响，因此只考虑步进电机的控制误差。

步进电机输入的为脉冲信号，通过脉冲信号的个数或频率控制电机主轴的角位移量，再通过相应的机械机构进行传动，得到所需的移动或旋转运动。步进电机只有周期误差而没有累积误差。

从步进电机传动控制模型中可以看出，步进电机单个脉冲步进量是固定不变的，因此根据所需要的位移和转角 $(\Delta x, \Delta y, \Delta \phi)$ 分别除以脉冲步进量 $(\Delta s, \Delta s, \Delta \phi)$ ，即可得到达到该位移或转角所需的脉冲数 $(\Delta n_1, \Delta n_2, \Delta n_3)$ (为整数)。每一次运动总有一个小于一个脉冲步进量的误差存在，放大最终的运动轨迹可以看出实际位移量呈阶梯状变化。

若三个工作台的实际的位移和转角位 $(\Delta x', \Delta y', \Delta \phi')$ ，则产生的加工误差为 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ，计算式如式 3-7 所示。这些加工误差直接影响工件的加工质量。

$$\begin{cases} \delta_1 = \Delta x - \Delta x' \\ \delta_2 = \Delta y - \Delta y' \\ \delta_3 = \Delta \phi - \Delta \phi' \end{cases} \quad (3-7)$$

对产生的误差 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ，分两种情况进行分析。

如图 3-5 所示，理论计算时上台的加工坐标系为 $X'O'Y'$ 坐标系，首先由于 δ_1, δ_2 两个加工误差的存在使得实际上台的加工坐标系变为 $X''O''Y''$ 坐标系。通过几何计算，得到砂轮加工点在 $X''O''Y''$ 坐标系下的坐标 (m', n') ，即为砂轮实际对工件进行加工的位置。

$$\begin{cases} m' = m - k \cos(\arctan \frac{\delta_2}{\delta_1} + \Delta \phi) \\ n' = n + k \sin(\arctan \frac{\delta_2}{\delta_1} + \Delta \phi) \end{cases} \quad (3-8)$$

其中 $k = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$

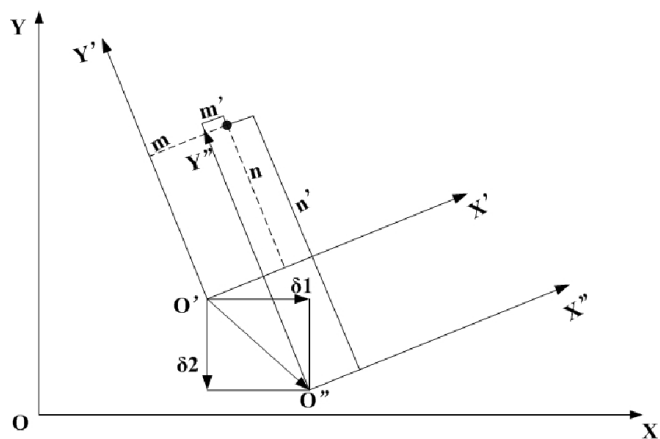


图 3-5 δ_1, δ_2 对工件加工点坐标的影响

其次，由于存在转误差 δ_3 ，使得上台坐标系沿其旋转中心（中台转轴）转动 δ_3 角度。通过几何计算，得到砂轮加工点在 $X''O''Y''$ 坐标系下的坐标 (m'', n'') ，即为砂轮实际对工件进行加工的位置。

$$\begin{cases} m'' = b - [n' - (b - m') \tan(\delta_3)] \sin(\delta_3) - (b - m') / \cos(\delta_3) \\ n'' = [n' - (b - m') \tan(\delta_3)] \cos(\delta_3) \end{cases} \quad (3-9)$$

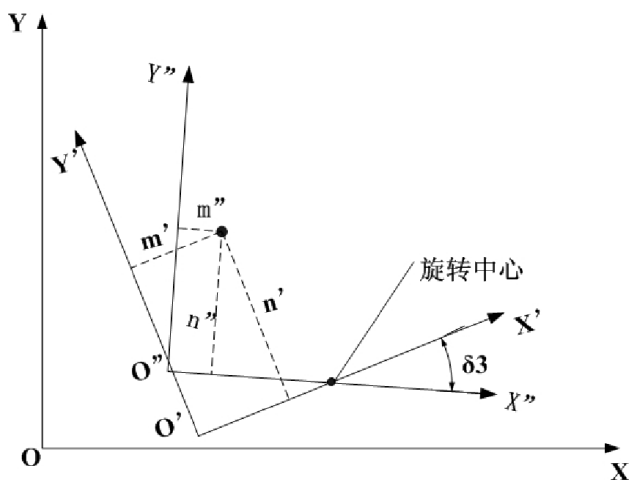


图 3-6 δ_3 对工件加工点坐标的影响

利用这个正运动学误差模型就可以对磨削过程中工件的加工误差进行准确的误差分析。

4 模型求解

4.1 问题一求解

问题一提出：外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3}(600-x)^2 + 0.45(600-x)$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件，利用圆柱体式砂轮对其进行加工。利用磨床逆运动学模型将其简化成二维问题，进行建模、求解。

4.1.1 工件的外表面母线

根据所给工件外表面母线方程得到其曲线图和曲率曲线图如下：

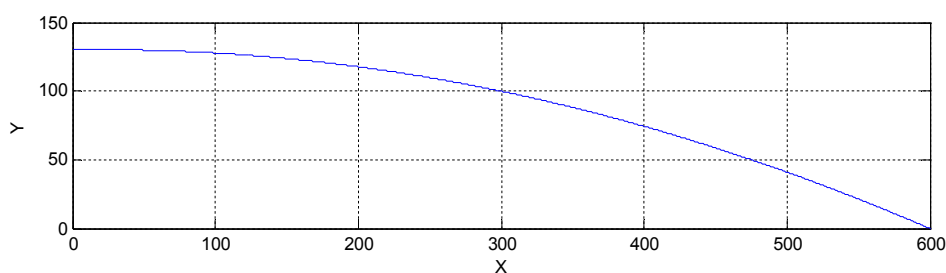


图 4-1-1 工件外表面母线的曲线图

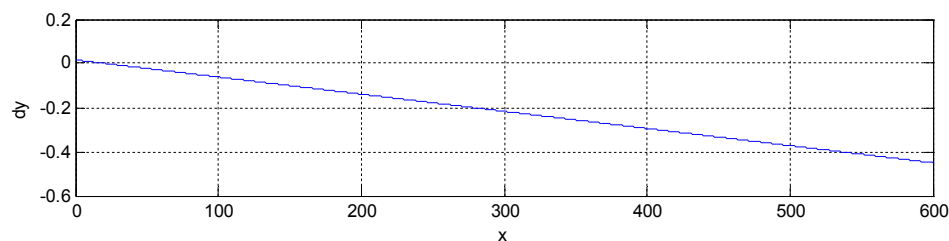


图 4-1-2 工件外表面母线曲率的曲线图

4.1.2 加工方案

由图 4-1-2 可以看出该工件的外表面母线斜率呈线性下降趋势，所以用圆柱体式砂轮磨削效果较好。对工件加工时要选取一些初始的参数，比如砂轮位置、步进电机参数等，本题所用参数如表 5-1 所示。由于题目要求砂轮的旋转轴线与底座导轨方向保持平行，且与工件工作箱的旋转主轴等高（即两旋转轴线位于同一水平面），而圆柱体式砂轮的加工面平行于主轴方向，因此磨床逆运动学模型中的工件转角 ϕ 的正切值即为工件上磨削点处的曲率值。由于问题一的模型不考虑砂轮加工点变动，所以先不考虑砂轮的尺寸，只要确定砂轮加工点位置即可。

表 4-1 磨削加工参数

砂轮加工点位置 (参考初始加工坐标系)	丝杆螺距	变速器的 传动比	工件主轴转速	步进角度
(310mm,260mm)	12mm	10:1	250 (转/分)	1°

加工基准：对工件的精加工首先对工件定位，以整个加工平台建立机床笛卡尔坐标系即沿着工件的纵向进给方向为 x 轴，横向进给方向为 y 轴。装夹工件时使其轴中心为机床坐标系零点。建立好机床坐标系后建立工件加工坐标系，本设备以工件进给的方式进行加工，因此以砂轮的旋转中心为加工基准。

砂轮与工件开始接触磨削前，工作台应有一小段预运动，以便与后续的磨加工运动平稳衔接，称这一小段运动为预动。磨削方式选择有顺磨和逆磨，顺磨（砂轮和工件旋转方向相反）时，冷却液容易进入磨削区，减少磨削热，缺点是磨削性能差。采用逆磨由于相对磨削速度加大，使磨削质量提高，单发热量也增大，相比较而言，采用逆磨是较好的一种方式，所以本题中选用逆磨。

利用 Delphi 软件编程，建立系统的三维实体模型，在数学模型的基础上，通过在工件表面取一定数量的离散点，来模拟磨削加工的动态过程，得到加工的磨削轨迹和各工作台的运动轨迹。该磨床加工仿真软件具有很高的实时性，能够再现磨床的整个磨削过程，参数化建模使其具有一定的通用性。图 4-1-3 是磨床加工仿真软件的部分界面截图，图 4-1-4、图 4-1-5 为模拟工件一磨削加工过程的软件截图。其中三维建模部分采用开源的 GLScene 控件。



图 4-1-3 磨削加工系统仿真软件的界面

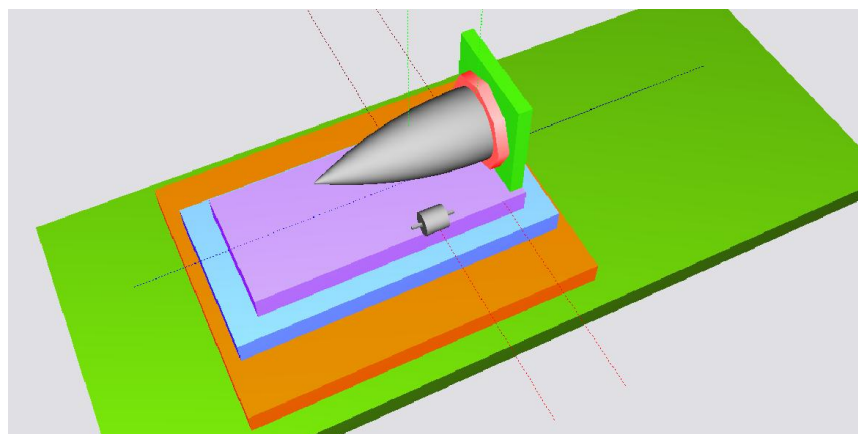


图 4-1-4 磨削加工系统的三维模型

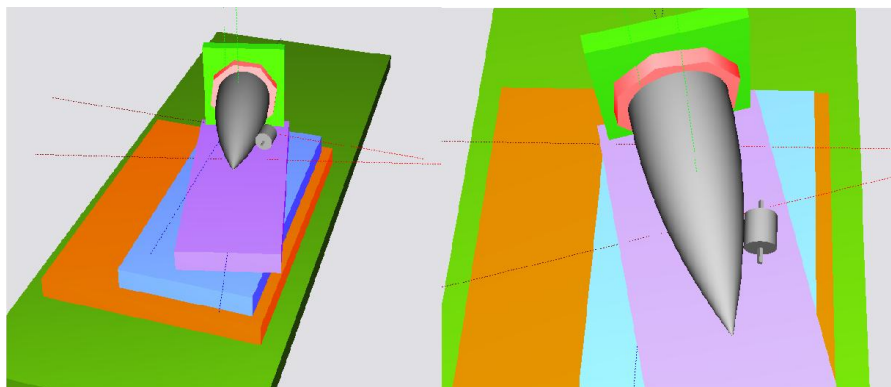


图 4-1-5 工件一磨削加工过程中的位置变化

工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250 转，为保证表面的加工质量，要求工件每转动 100 转，工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4 mm，因此磨削加工最大横向进给量 L_{\max} 为：

$$L_{\max} = \frac{250 \times 4}{100} \text{ mm/分} = 1/6 \text{ mm/s} \quad (4-1)$$

可取进给量 $L = 1/8 \text{ mm/s}$ 。

模型的求解步骤为：

【STEP1】主轴每进给 1/8mm，通过磨床逆运动学模型计算出各个工作台所要运动的位移或转角；

【STEP2】根据各个工作台所要运动的位移或转角，通过磨床逆运动学模型计算出各工作台步进电机实际控制位移、需要输出的脉冲个数和脉冲频率变化，并绘制相应曲线；

【STEP3】根据各个工作台所要运动的位移或转角，通过正运动学误差模型计算工件上实际加工点位置，并计算出加工误差，并绘制相应曲线；

【STEP4】重复【STEP1】直至整个加工过程结束。

通过磨床加工仿真软件仿真，得到工件的理论和实际加工曲线、下中上台的理论和实际运动曲线、脉冲次数和频率曲线如下图所示。

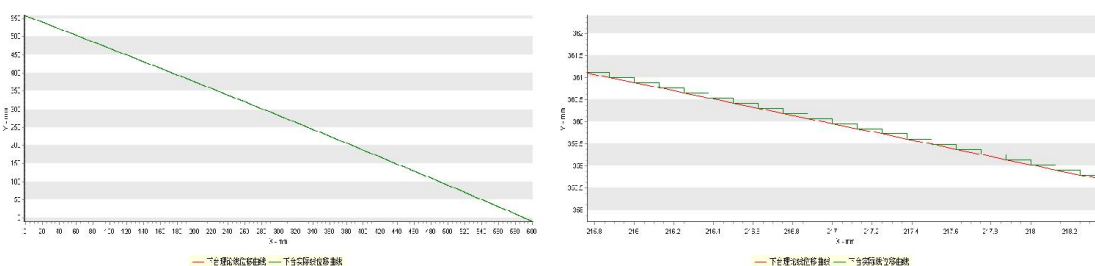


图 4-1-6 下台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

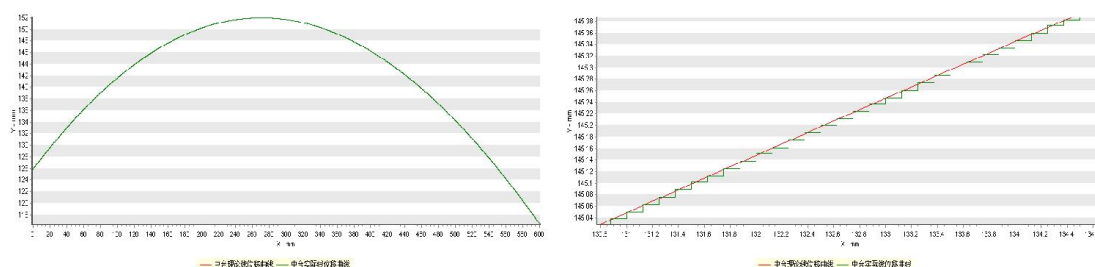


图 4-1-7 中台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

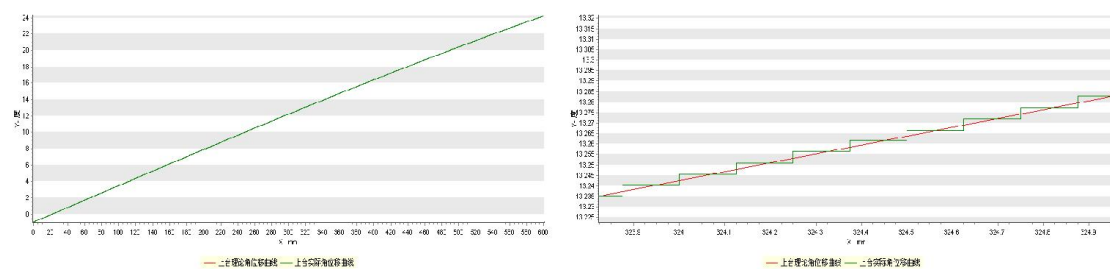


图 4-1-8 上台角位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

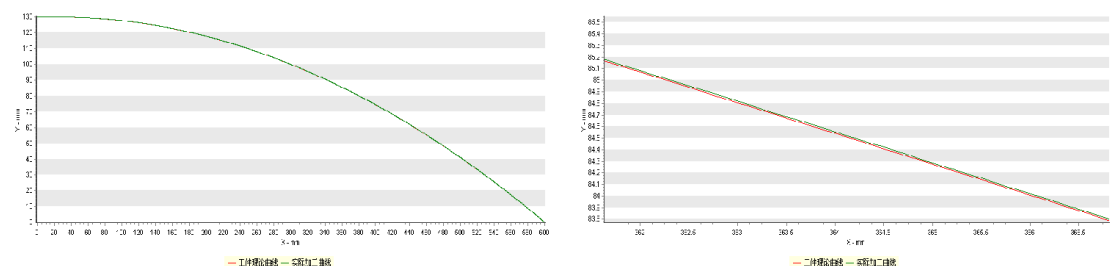


图 4-1-9 工件磨削的理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

从图 4-1-6 到 4-1-9 可以看出，工件加工的理论曲线和实际曲线、下台、中台以及上台的控制位移与理论位移曲线都基本上重合。放大下台、中台以及上台的控制位移与理论位移曲线可以看出，步进电机控制曲线呈阶梯状（始终与实际曲线存在一个脉冲步进量的误差），正如模型中所述的一样。由此可证明所建立的模型的准确性。

由磨床加工仿真软件得到的加工过程中步进电机发送脉冲数和相邻时间段内脉冲频率的变化曲线下图所示：

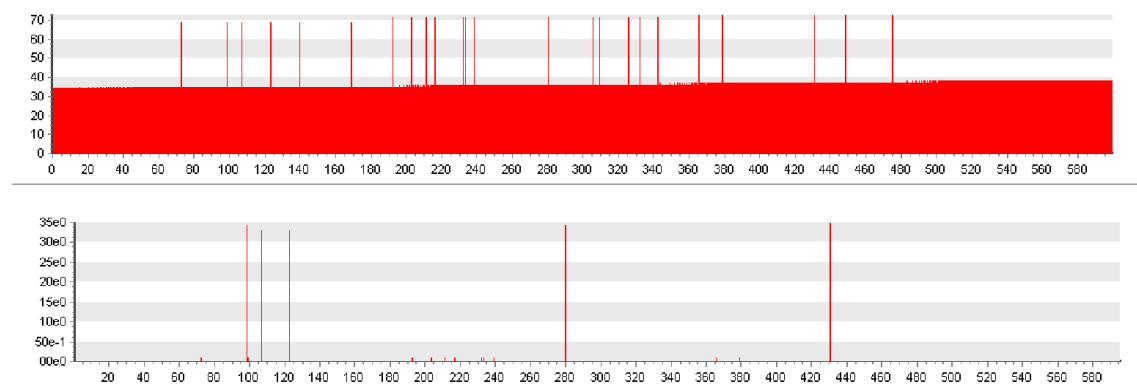


图 4-1-10 下台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

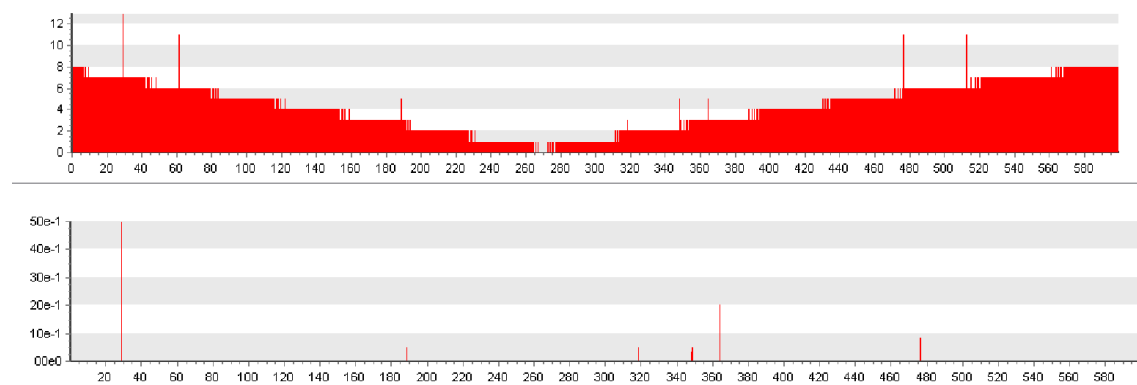


图 4-1-11 中台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

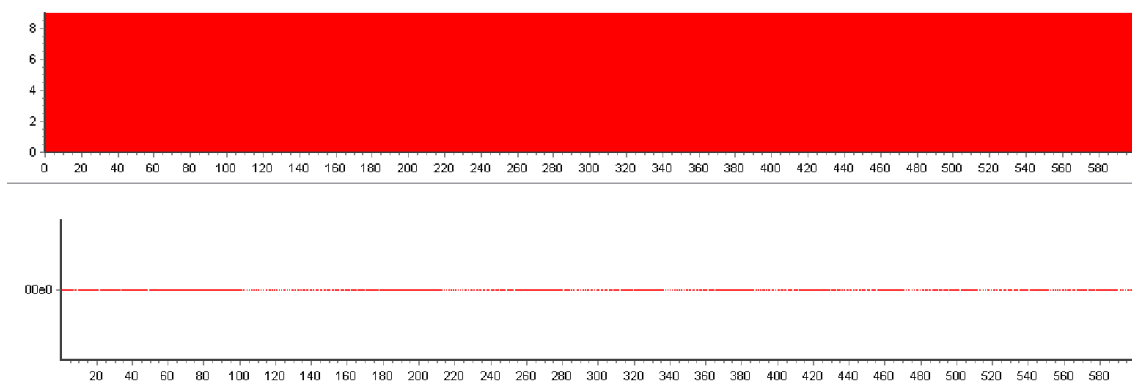


图 4-1-12 上台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

从图 4-1-10 到 4-1-12 中可以看出，在相同的步进电机控制参数下，下台步进电机单位时间所需的脉冲个数最多，大部分集中在 35 个，这个符合题目步进电机最大工作频率不超过 100Hz 的要求。相邻时间段内脉冲频率的变化峰值基本为

0，只是在个别点处由于计算机仿真精度和计算公式 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \varepsilon$ 中除法的原因会

发生突变，基本满足题目中 $\varepsilon \leq 0.1$ 的要求（其中 f_q, f_h, ε 分别指前后时段中的脉冲频率和脉冲频率变化）。

4.2 问题二求解

问题二提出：外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 的

某旋转体工件，利用轮式砂轮对其进行加工。利用第四节中提到的磨床逆运动学模型对其进行建模、求解，其基本的分析思路与问题一类似。

4.2.1 工件的外表面母线

根据所给工件外表面母线方程得到其外表面母线的曲线图和外表面母线的导曲线图如下：

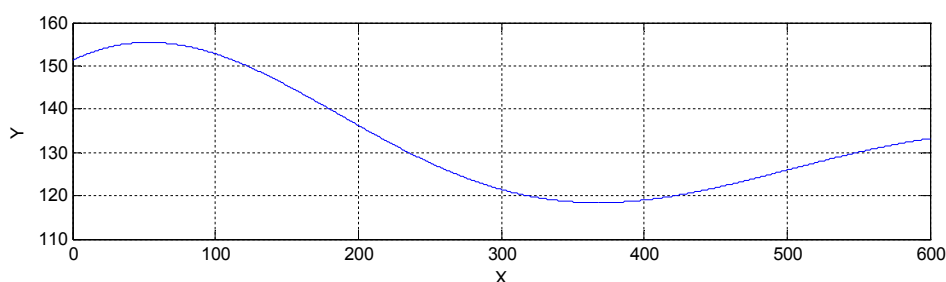


图 4-2-1 工件外表面母线的曲线图

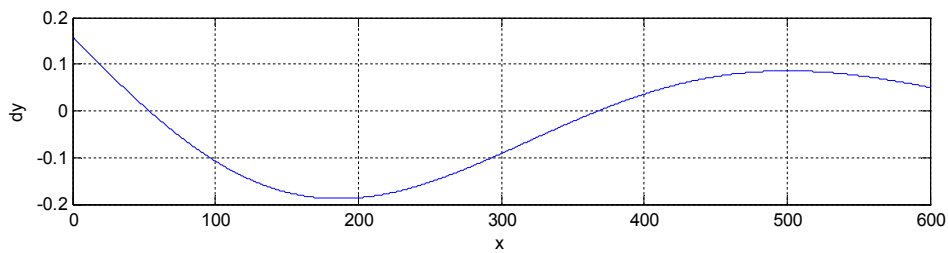


图 4-2-2 工件外表面母线的导曲线图

4.2.2 加工方案

由图 4-2-2 可以看出该工件外表面母线的导曲线是非线性的，在曲率变化较大的地方应用圆锥体式砂轮，由于砂轮自身的尺寸原因会难以实现磨削过程。所以如题所示这里采用轮式砂轮。在工件加工时所选取的初始参数如表 4-1 所示。跟问题一类似，问题二的模型中考虑的砂轮与工件的接触点的坐标是不变的，所以砂轮尺寸的选择在这里并没有什么意义，在标准范围内取一组尺寸数值即可。

而接触点选取砂轮外表面切线方向与加工坐标的 y 轴平行，因此，在磨床逆运动学模型中的工件转角 θ 的正切值其实就是工件外表面母线上磨削点处的曲率值。

因为都不考虑加工点相对机床坐标的变化，所以问题二中的加工基准、加工次序、磨削方式以及模型求解等都与问题一相同。

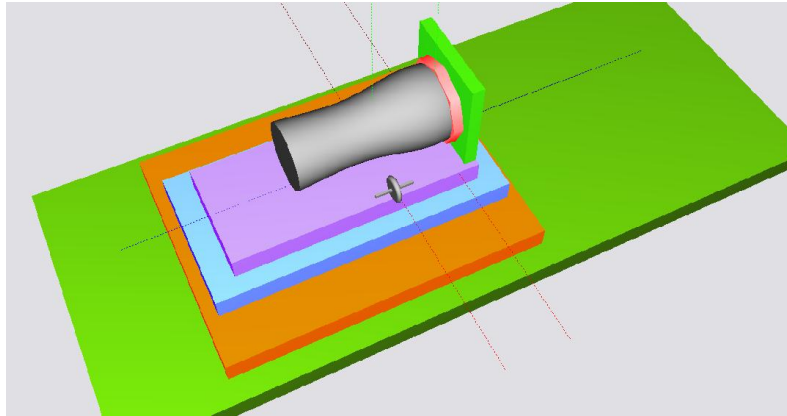


图 4-2-3 磨削加工系统的三维模型

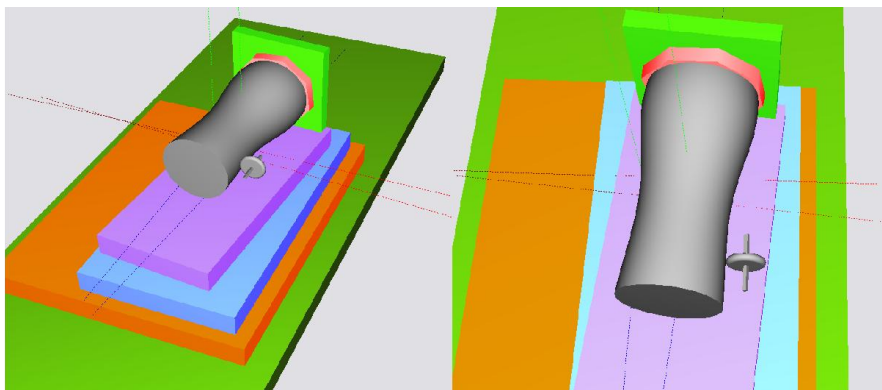


图 4-2-4 磨削加工过程中工件的位置变化

通过磨床加工仿真软件仿真，得到工件的理论和实际加工曲线、下中上台的理论和实际运动曲线、脉冲次数和频率曲线如下图所示：

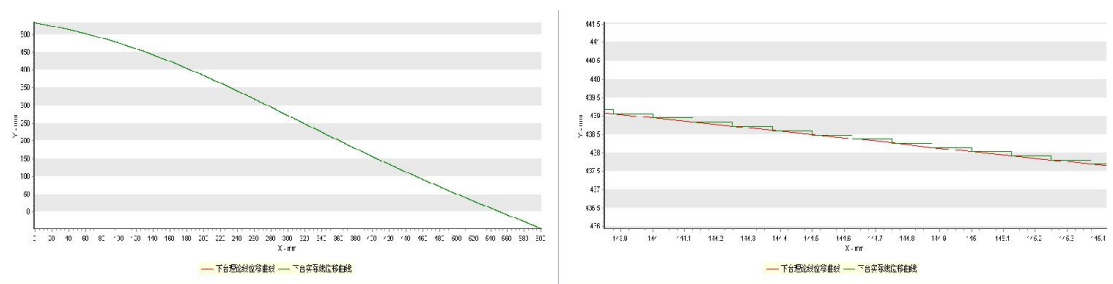


图 4-2-5 下台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

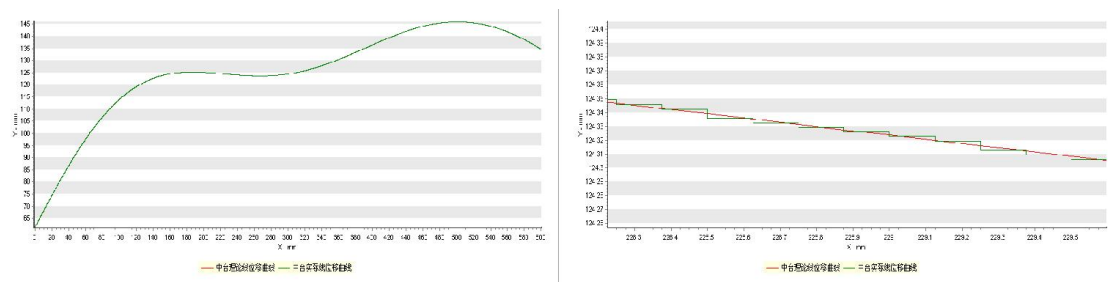


图 4-2-6 中台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

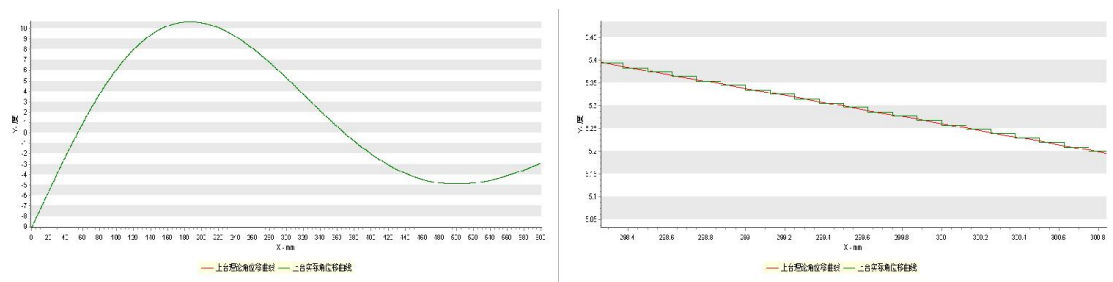


图 4-2-7 上台角位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

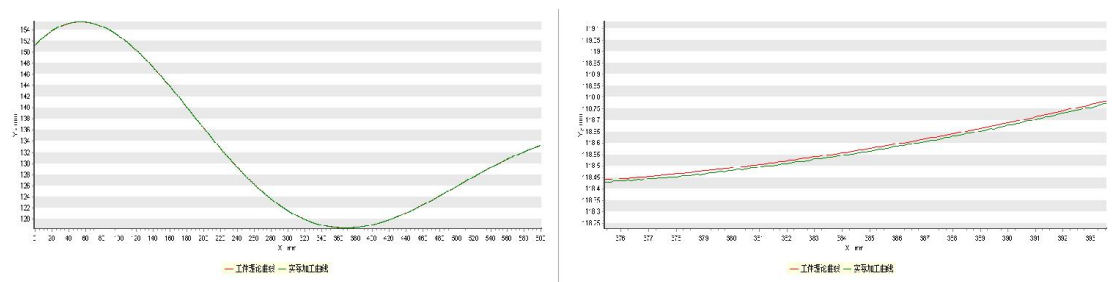


图 4-2-8 工件磨削的理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

通过上图可以看出，实际加工时对于下台、中台以及上台的控制位移与理论位移曲线已经非常吻合，对工件的实际加工曲线和理论曲线也非常接近，但放大图显示，还是有一定的误差存在。相比工件一，工件二的外表面母线相对复杂一些，所以不论是控制脉冲频率的变化率还是控制位移和加工曲线的误差都要明显大一些。

由磨床加工仿真软件得到的加工过程中步进电机发送脉冲数和相邻时间段内脉冲频率的变化曲线如下图所示：

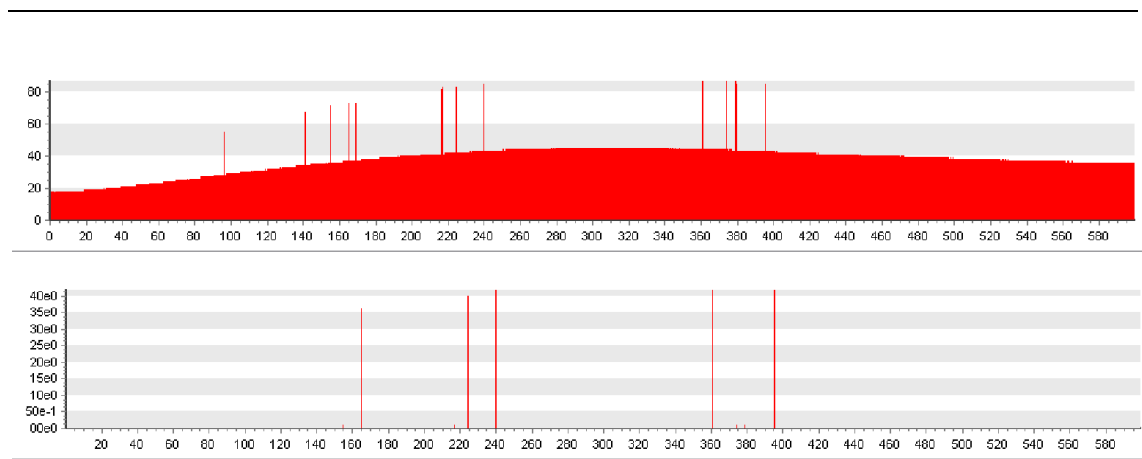


图 4-2-9 下台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

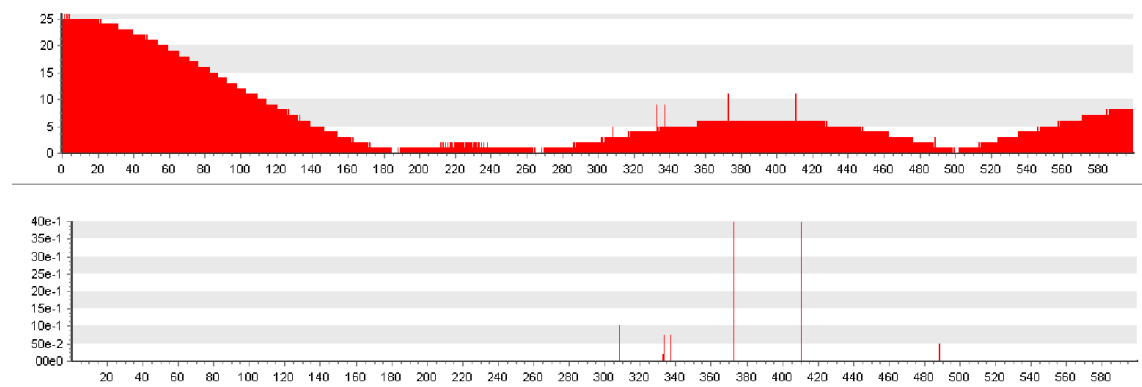


图 4-2-10 中台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

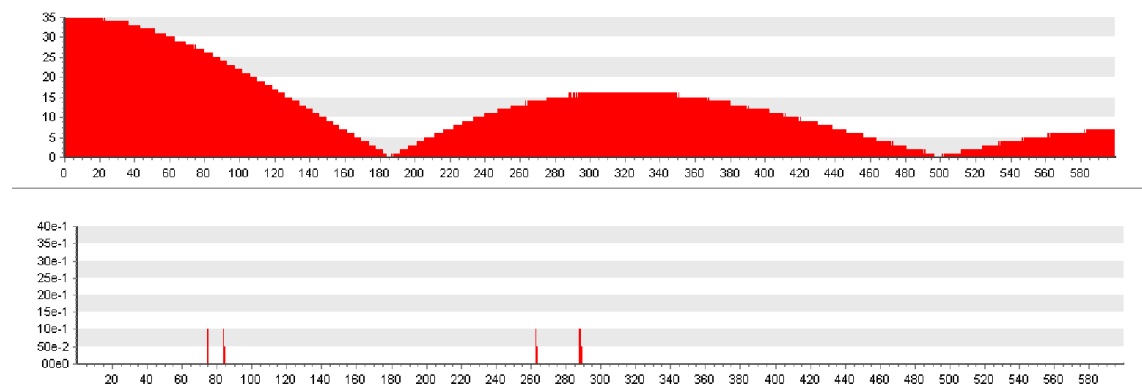


图 4-2-11 上台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

由上图很明显地可以看出，在所给参数下，单位时间内步进电机的脉冲个数在控制下台的电机上最大，除个别突出点之外其最大值小于 45 个，这个符合题目要求的步进电机最大工作频率不超过 100Hz。相邻时间段内脉冲频率的变化峰值基本为 0，只是在有些个别点处由于计算机仿真精度的原因有突起，基本满足题目要求。

4.3 问题三求解

在问题一的基础上，考虑加工点相对于圆柱体式砂轮匀速往复运动，以保证砂轮均匀磨耗，提高工件加工质量。

在问题一的基础上，采用相同的加工基准、加工次序和磨削方式，应用砂轮

的运动学模型（圆柱体式砂轮模型）对问题三进行求解。

通过磨床加工仿真软件仿真，得到工件的理论和实际加工曲线、下中上台的理论和实际运动曲线、脉冲次数和频率曲线如下图所示。

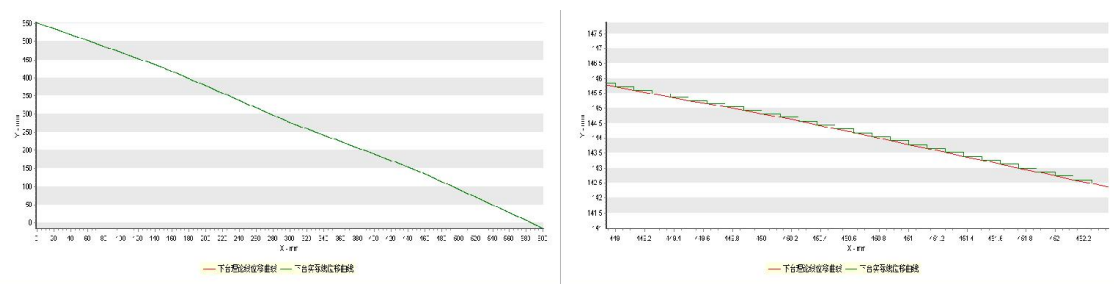


图 4-3-1 下台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

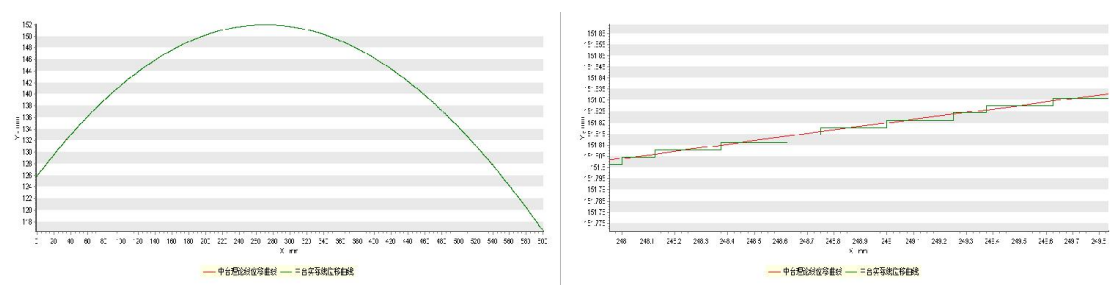


图 4-3-2 中台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

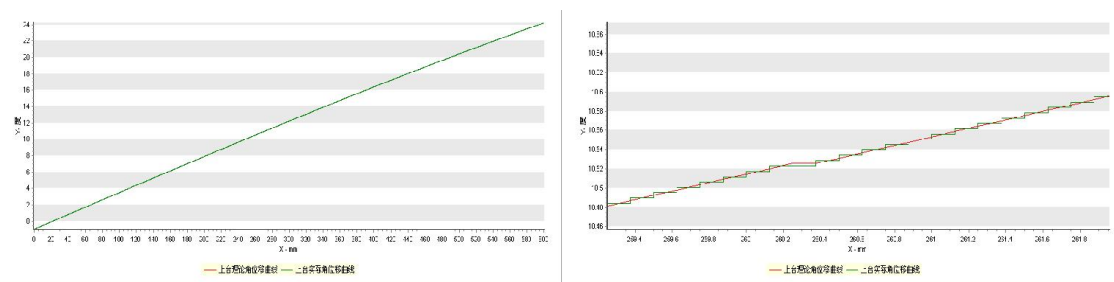


图 4-3-3 上台角位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

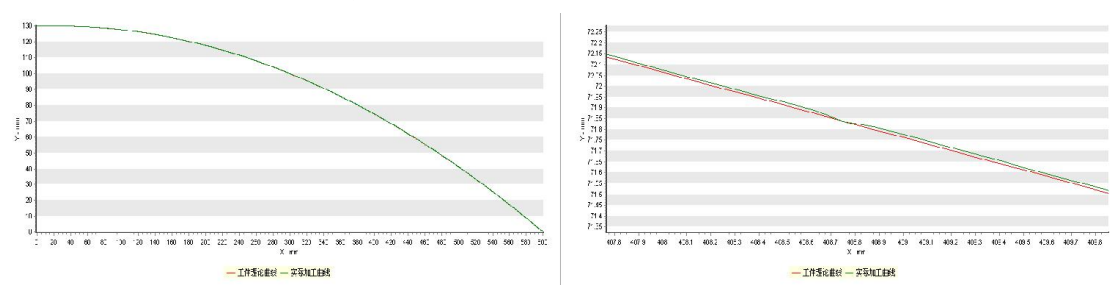


图 4-3-4 工件磨削的理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

通过上图可以看出，实际加工时对下台、中台以及上台的控制位移与理论位移曲线已经非常吻合，对工件的实际加工曲线和理论曲线也非常接近，但放大图显示，还是有一定的误差存在。与问题一的结果相比较，问题三中所做模型不论是控制脉冲频率的变化率还是控制位移和加工曲线的误差稍大一些，但问题三中考虑到了砂轮磨耗的影响，因此，在选择加工点在砂轮上的移动方式和速度上应该可以有所改进。

由磨床加工仿真软件得到的加工过程中步进电机发送脉冲数和相邻时间段内脉冲频率的变化曲线如下图所示：

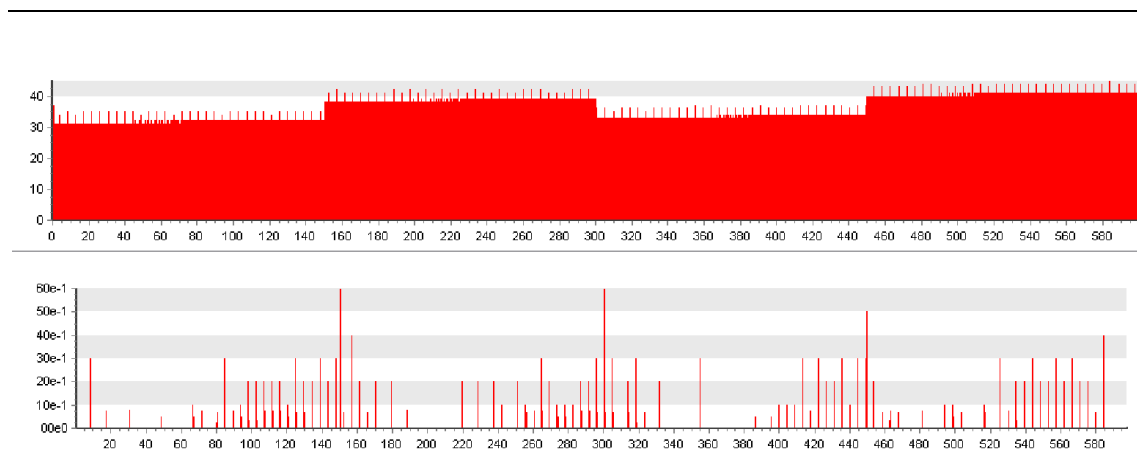


图 4-3-5 下台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

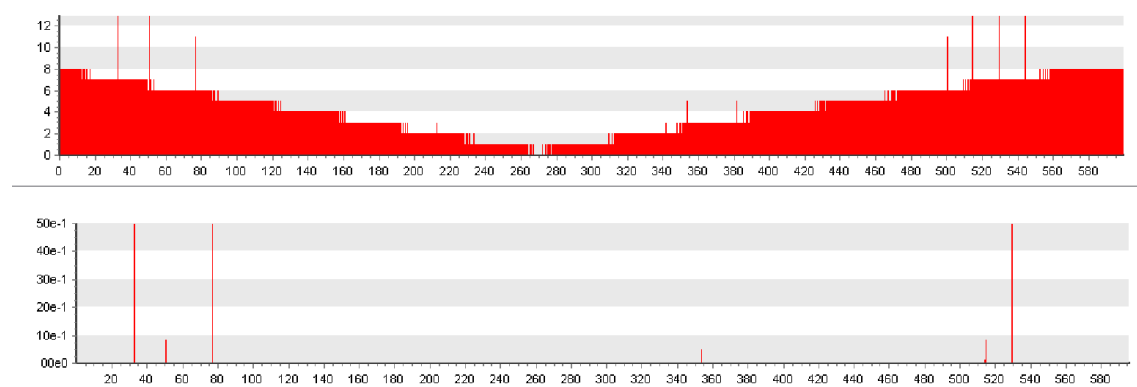


图 4-3-6 中台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

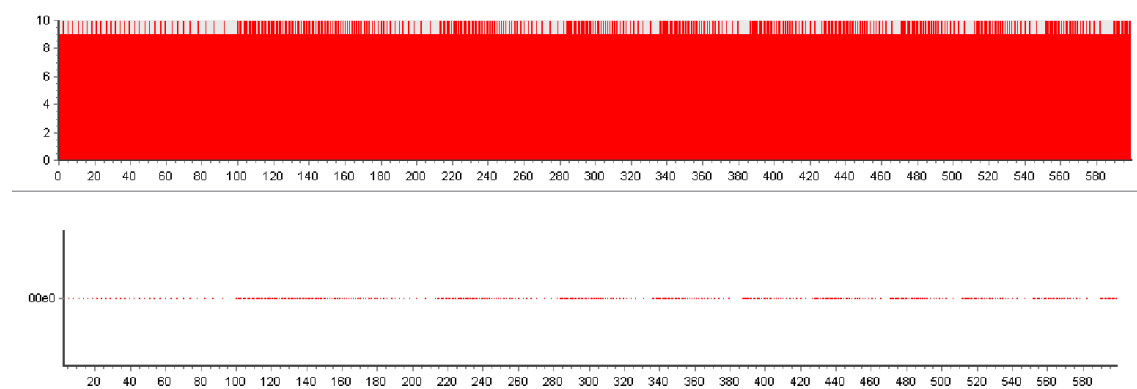


图 4-3-7 上台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

由上图很明显地可以看出，在所给参数下，单位时间内步进电机的脉冲个数在控制下台的电机上最大，除个别突出点之外其最大值小于 40 个，这个符合题目要求的步进电机最大工作频率不超过 100Hz。相邻时间段内脉冲频率的变化峰值基本为 0，只是在有些个别点处由于计算机仿真精度的原因有突起，基本满足题目要求。相比问题一，本题的突起变多，说明由于加工点在砂轮上的运动，使控制位移的难度加大，相当于工件外表面母线变复杂了。但砂轮能够更均匀地磨耗又能提高加工精度，二者相辅相成。

4.4 问题四求解

在问题二的基础上，考虑加工点相对于轮式砂轮的外表面曲线上匀速往复运

动，以保证砂轮均匀磨耗，提高工件加工质量。

在问题二的基础上，采用相同的加工基准、加工次序和磨削方式，应用砂轮的运动学模型（轮式砂轮模型）对问题四进行求解。

通过磨床加工仿真软件仿真，得到工件的理论和实际加工曲线、下中上台的理论和实际运动曲线、脉冲次数和频率曲线如下图所示：

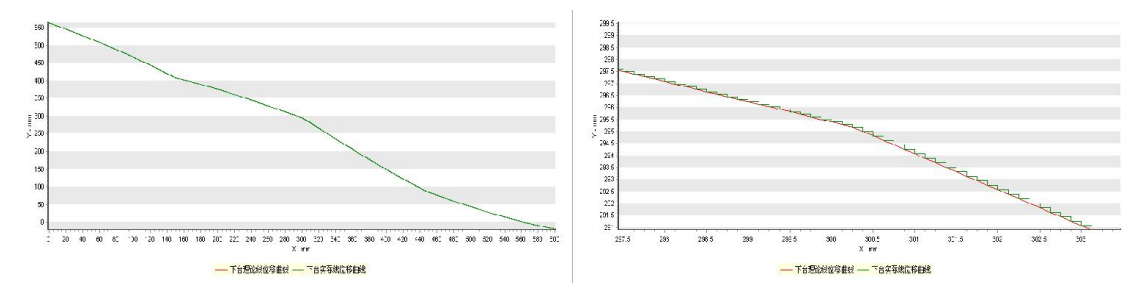


图 4-4-1 下台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

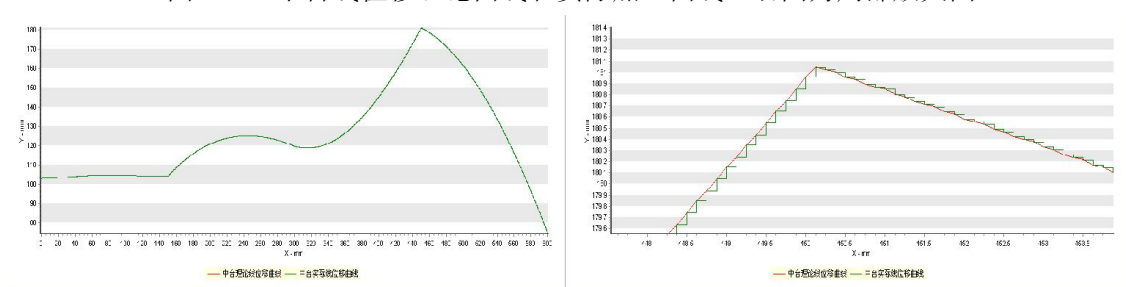


图 4-4-2 中台线位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

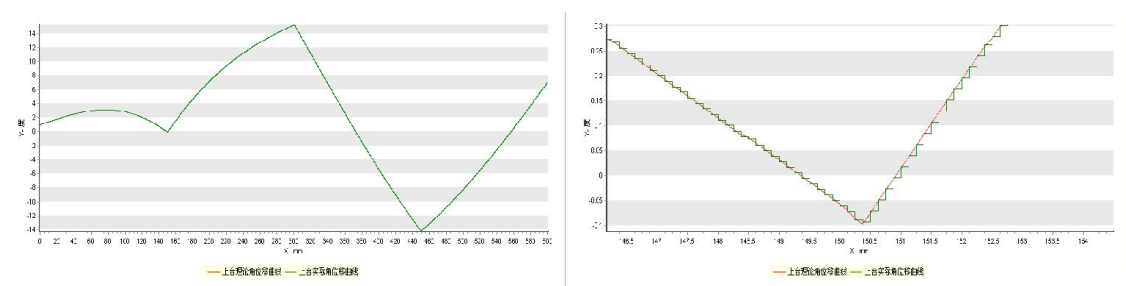


图 4-4-3 上台角位移理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

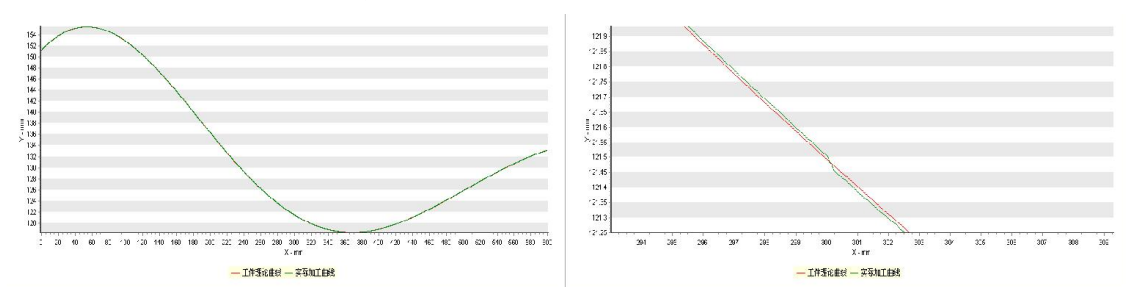


图 4-4-4 工件磨削的理论曲线和实际加工曲线（右图为局部放大图）

通过上图可以看出，实际加工时对下台、中台以及上台的控制位移与理论位移曲线已经非常吻合，对工件的实际加工曲线和理论曲线也非常接近，但放大图显示，还是有一定的误差存在。与问题二的结果相比较，问题四中所做模型不论是控制脉冲频率的变化率还是控制位移和加工曲线的误差较大，但问题四中考虑了到砂轮磨耗的影响，因此，在选择加工点在砂轮上的移动方式和速度上可以有所改进。

由磨床加工仿真软件得到的加工过程中步进电机发送脉冲数和相邻时间段内

脉冲频率的变化曲线如下图所示：

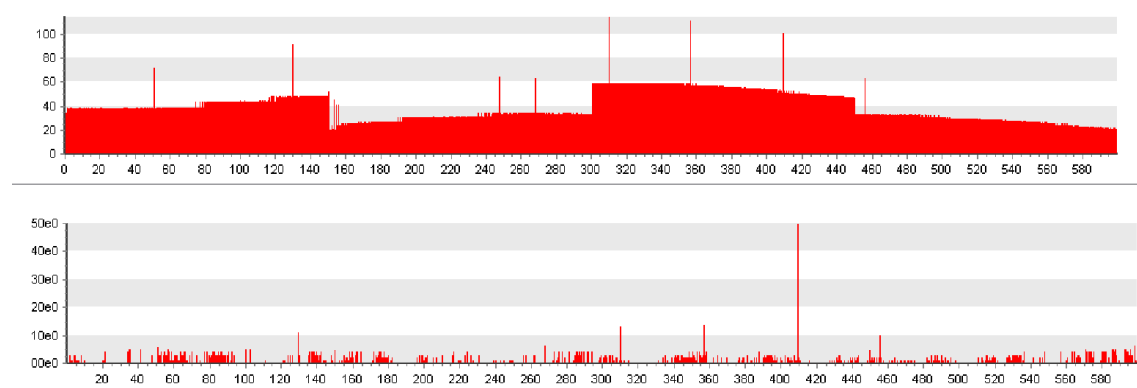


图 4-4-5 下台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

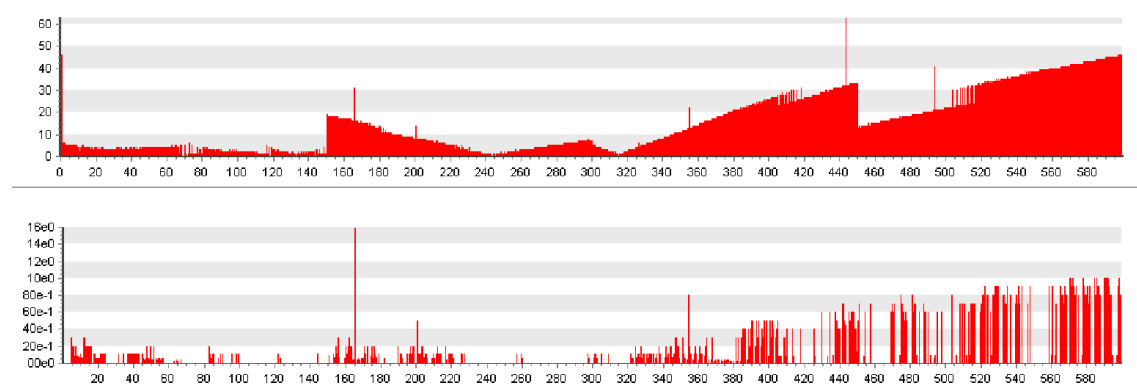


图 4-4-6 中台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

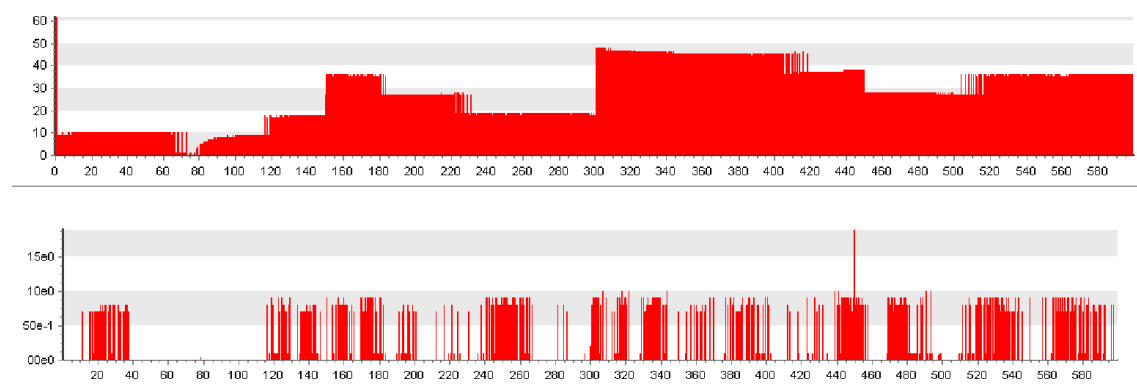


图 4-4-7 上台步进电机单位时间内输出脉冲的个数（上）和脉冲频率（下）

由上图很明显地可以看出，在所给参数下，单位时间内步进电机的脉冲个数在控制下台的电机上最大，除个别突出点之外其最大值小于 60 个，这个符合题目要求的步进电机最大工作频率不超过 100Hz。相邻时间段内脉冲频率的变化峰值大都为 0，但相对前三问，问题四中突出点的个数比较多，这是因为工件二的外表面曲线比较复杂并且加工点相对轮式砂轮在不停地运动综合起来导致的结果。这些通过优化应该是可以改进的。

4.5 加工曲线的误差分析

特殊工件一般是在机床、测量仪器等设备上用作精密传动或定位元件，根据

它的这一特定用途，评价特殊工件的精度指标主要是表面粗糙度。

对外圆磨床使用者进行调研结果表明，表面粗糙度主要是由机床热变形、机床受力变形、进给误差和工件的误差复印造成的。由于砂轮在精磨前是经金刚笔修正过的，故精磨中砂轮的磨损量的变化是很微小的。至于操作者的操作失误可不加考虑。外圆磨床的主要热源是砂轮主轴轴承的发热和液压系统的发热。砂轮主轴轴承的发热将使主轴轴线升高并使砂轮架向工件方向趋近，液压系统的发热使床身各处的温升不同，导致床身的弯曲和前倾。本文中主要对进给误差进行具体分析。

在系统中主要依靠脉冲驱动步进电机通过转换器对工件进行进给，脉冲主要依靠对工件外表面母线进行插值的精度得到。插值的精度是根据工件粗糙度以及工件的加工时间进行优化得到的最优结果。

根据正运动学误差模型分析，三个方向的进给误差引起工件加工的误差即工件整体外形粗糙度。其单点误差机理图如下图所示：

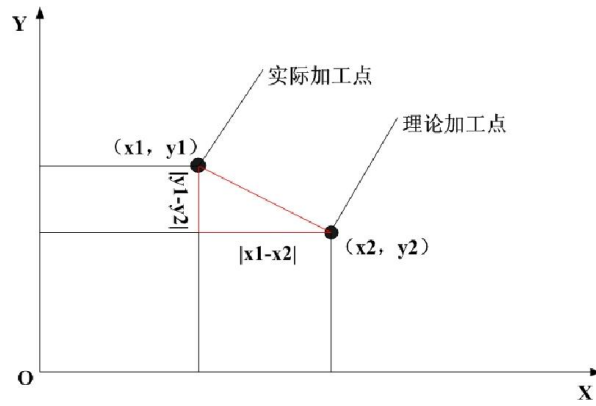


图 4-5-1 误差分析图

其单点的误差面积为： $\Delta S = \frac{1}{2}[(x1 - x2) \times (y1 - y2)]$

根据数控加工最后外形知道其加工曲线与理论曲线会产生凸凹的误差面积，因此本论文主要用相对误差面积来表示误差量，即通过对单点误差面积累计和与理论曲线截面积之比表示。

$$e^* = \frac{\Delta S^*}{S^*} \times 100\% \quad (4-2)$$

其中， ΔS^* 为单点面积误差累计和； S^* 为曲线面积总和；

利用前面的正运动学误差模型，通过软件对系统进行误差分析，得到问题一中工件加工误差直方图如下：

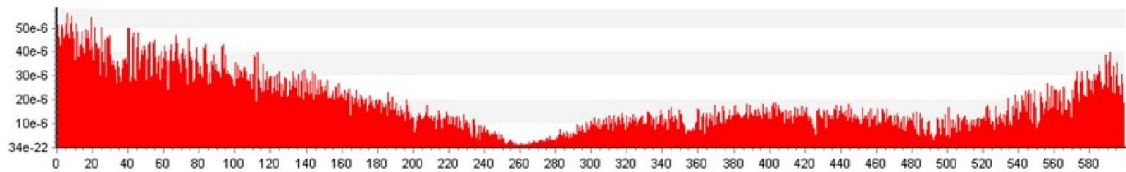


图 4-5-2 工件加工误差直方图

根据正运动学误差模型通过编程序得到单点面积误差累计和

$\Delta S^* = 0.061197$ ，理论曲线面积 $S^* = 52991.960938$ ，得到： $e^* = 0.000115\%$

问题二中工件加工误差直方图如下：

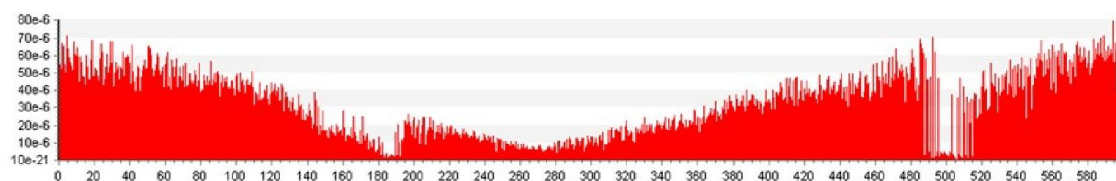


图 4-5-3 工件加工误差直方图

根据正运动学误差模型通过编制程序得到单点面积误差累计和

$\Delta S^* = 0.097521$ ，理论曲线面积 $S^* = 79849.804688$ ，得到： $e^* = 0.000122\%$ 。

问题三中工件加工误差直方图如下：

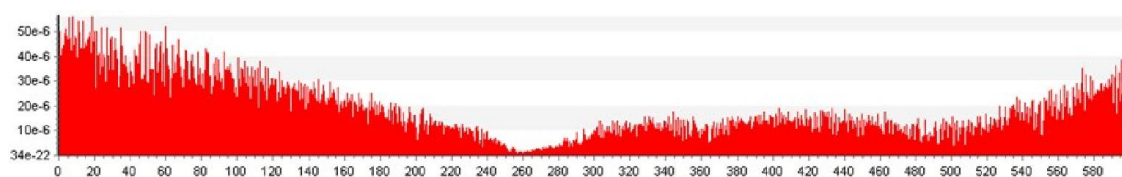


图 4-5-4 工件加工误差直方图

根据正运动学误差模型通过编制程序得到单点面积误差累计和

$\Delta S^* = 0.061481$ ，理论曲线面积 $S^* = 52991.960938$ ，得到： $e^* = 0.000116\%$ 。

问题四中工件加工误差直方图如下：

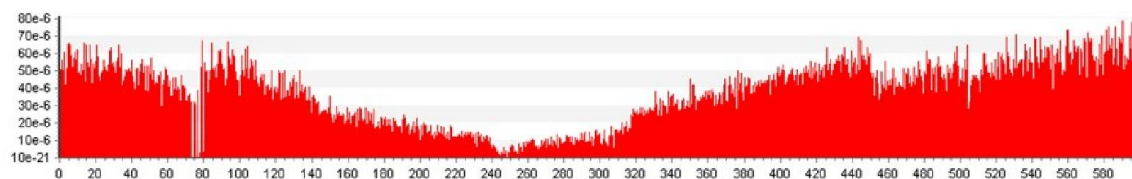


图 4-5-5 工件加工误差直方图

根据正运动学误差模型通过编制程序得到单点面积误差累计和

$\Delta S^* = 0.135788$ ，理论曲线面积 $S^* = 79849.804688$ ，得到： $e^* = 0.000170\%$ 。

表 4-2 误差分析结果

问题	理论曲线面积 mm^2	总误差面积 mm^2	误差百分比%
一	52991.960938	0.061197	0.000115
二	79849.804688	0.097521	0.000122
三	52991.960938	0.061481	0.000116
四	79849.804688	0.135788	0.000170

比较问题一和问题三结果可以看出，对于工件 1 采用圆柱体式砂轮进行变加工点和不变加工点加工得到的误差很接近，而变加工点方式减小了砂轮的磨耗，因此对工件 1 这种表面曲率变化比较下的工件，采用变加工点方式进行加工比较好。

比较问题二和问题四结果可以看出，对于工件 2 采用轮式砂轮进行变加工点和不变加工点加工得到的误差相差比较大。由于工件 2 本身表面曲率变化比较大，采用轮式砂轮变加工点方式进行加工，相当于在工件 2 本身曲率基础上再增加了砂轮表面的曲率变化，使得各工作台的运动量增大，从而整体误差增大。因此对

工件 2 这种表面曲率变化比较大的工件，采用固定加工点方式进行加工比较好。

5 步进电机脉冲频率变化影响因素及其优化

5.1 步进电机脉冲频率变化的影响因素

通常而言，若加工的进给量越大，加工时间越短，但每次进给三个工作台的运动量就会增大，从而导致每次进给时间内需要的脉冲个数增多，步进电机控制性能下降，因为脉冲的个数又受步进电机的控制脉冲的最高工作频率的限制，不能无限增多。因此，加工时间和步进电机控制性能之间是相互矛盾的。这就需要对其进行优化，找出合理的中间量。

通过前面分析，可以看出相邻时间段内的脉冲频率变化在大多情况下都为 0，由于电机的控制精度等造成的影响，在个别点处有突变。这些突变越多，加工曲线的平稳性越低，工件的加工质量越差。通过对步进电机脉冲频率的分析，得到步进电机脉冲频率变化的影响因素如下：

- 1) 加工件表面的曲率变化，脉冲次数变化为曲率变化的一阶导数，为曲线变化的二阶导数。比较问题一和问题二的上台曲线图结果可知，当加工件表面曲率变化为斜直线时，上台转动角度变化与曲率变化一致，而单位时间脉冲数基本上为常值；当加工件表面曲率变化为曲线时，上台转动角度变化与曲率变化一致，而单位时间脉冲数为斜率变化的导数；
- 2) 加工的进给量。正如 5.1 开始所分析，加工的进给量越大，工作台的运动量就会增大，导致每次进给时间内需要的脉冲个数增多，成正比关系。
- 3) 步进电机的控制精度。由于步进电机一次进给最大控制误差为一个单位脉冲进给量，因此如果步进电机控制精度越高，单位脉冲进给量越小，电机频率变化越平缓。
- 4) 砂轮外形。比较第三问和第四问可知，对于变点加工，圆柱体式砂轮只增加一个方向上的运动，而轮式砂轮对工件坐标系同时增加了三个方向的运动，增加了各工作台的运动量。因此圆柱体式砂轮加工精度更高更平稳。
- 5) 砂轮的可加工区域。砂轮的可加工区域直接影响变点加工时可变加工点的范围，从而影响工作台附加位移量；
- 6) 砂轮加工点位置的变化频率。砂轮加工点位置的变化频率直接影响到工作台的运动频率，从而影响步进电机脉冲频率变化；

对于磨床逆运动学模型而言，因为加工点位置相对于整体坐标系是不变的，所以上面影响参数只用考虑（1）、（2）和（3）。对于砂轮的运动学模型，就要考虑上面所有的影响因素。

5.2 步进电机脉冲频率变化的优化

在本题的求解中，根据工件工作箱主轴转速和每 100 转的移动量确定了加工的最大进给量 $L_{\max} = 1/6 \text{ mm/s}$ 。以第一个工件为例，通过改变磨床加工仿真软

件加工参数栏中的进给量（分别取 1/6、1/7、1/8 和 1/9），得到三组步进电机的最大脉冲频率如下表所示：

表 5-1 不同进给量下最大脉冲频率和加工时间表

进给量 mm/s	最大脉冲频率 Hz			加工时间 s
	下台	中台	上台	
1/6	48	16	18	3600
1/7	39	9	10	4200
1/8	36	8	9	4800
1/9	34	8	9	5400

对上表中数据进行归一化处理，并以进给量为横坐标，得到最大脉冲频率和加工时间相对进给量的变化曲线如下图所示：

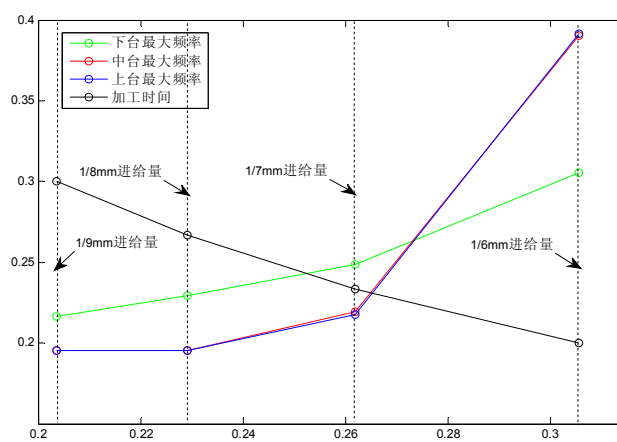


图 5-1 数据归一化曲线图

从图 5-1 中可以看出加工时间随着进给量的增大而减小，上中下台最大频率随着进给量的增大而增大，但在 1/7mm 进给量处四者之间距离最小，因此选择最优进给量为每秒 1/7mm，加工时间为 4200s。

6 总结

本文通过分析磨床磨削加工过程，将其简化为二维的运动学问题，建立了包括磨床逆运动学模型、砂轮的运动学模型、步进电机传动控制模型和正运动学误差模型在内的四个数学模型。磨床逆运动学模型与砂轮的运动学模型的区别在于：在工件加工过程中，砂轮上加工点在机床坐标系中相对于砂轮是否存在位置变化。磨床逆运动学模型中没有考虑上述变化，用于求解问题一和问题二，砂轮的运动学模型中考虑了这种变化，用于求解问题三和问题四。

在建立的运动学模型基础上自主开发了一套磨床加工仿真软件，用于动态地仿真工件在磨床上加工的整个过程，分别绘制出上台、下台和中台三组电机的控制位移曲线，最后得到工件的实际加工曲线和理论曲线的对比图。通过曲线图可以看出实际加工曲线与理论曲线非常接近，这也证明了本文所建数学模型的正确性。

通过磨床加工仿真软件还可以得到各组电机在单位时间内的脉冲数和脉冲频率曲线图，用来校核题目中所提到的电机参数（步进电机最大工作频率不超过

100Hz) 和平稳性指标 ($\varepsilon \leq 0.1$)。通过电机的脉冲频率变化曲线可以看出: 相邻时间段内脉冲频率变化图基本为零, 但是会存在一些突变点。这是由电机控制位移精度引起的, 因此, 可以对其进行优化。

本文在对四个问题的处理中都选用每秒 1/8mm 的进给量, 利用第三节建立的正运动学误差模型给出了未加工区域与工件在机床坐标系中的投影面积比值来衡量加工误差。分析四个问题得出其误差值分别为: 0.000115%, 0.000122%, 0.000116%, 0.000170%。

通过对误差结果的分析得出, 对工件 1 这种表面曲率变化比较下的工件, 采用变加工点方式进行加工比较好; 对工件 2 这种表面曲率变化比较大的工件, 采用固定加工点方式进行加工比较好。

本文最后一节中列举出了影响电机脉冲频率变化的因素, 提出了一种优化方案, 通过调节进给量得到一个电机脉冲频率变化的最优值, 此时, 最优进给量为每秒 1/7mm, 加工时间为 4200s。

7 参考文献

- 【1】 王永章 杜文君 程国全, 数控技术, 高等教育出版社, 第 148 页--第 317 页, 2001 年 11 月出版
- 【2】 金一庆 陈越 王冬梅, 数值分析, 机械工业出版社, 第 1 页--第 8 页, 2007 年 1 月出版
- 【3】 同济大学应用数学系, 高等数学, 高等教育出版社, 第 73 页--第 180 页, 2001 年 10 月出版
- 【4】 梁水, Delphi 程序开发范例宝典 (第 2 版), 人民邮电出版社, 第 143 页--第 479 页, 2010 年 1 月出版
- 【5】 Eric Grange, GLScene OpenGL Solution for Delphi, 第 14 页--第 130 页, 2003 年出版
- 【6】 温效朔, 精密滚珠丝杠磨削加工误差分析及其补偿控制, 硕士论文, 第 14 页--第 130 页, 2004 年 9 月出版
- 【7】 徐荣华, 磨削加工误差分析, 第 3 期(总第 159 期), 第 23 页--第 25 页, 2004 年出版