

参赛密码 _____

(由组委会填写)

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题目 基于卫星无源探测的空间飞行器 主动段轨道估计与误差分析

摘 要：

本文针对中低轨近圆轨道卫星无源探测的空间飞行器主动段轨道进行定位估计和研究。文中针对不同的问题，建立了相应的数学模型，进行分析和求解。

针对问题一，文中用微分方程数值解法给出了 09 号观测卫星在给定时刻的三维位置，以 50.0s 为例，该时刻下 09 号观测卫星的三维位置是 $(1.77381 \times 10^6, 8.16138 \times 10^6, 4.51670 \times 10^6)$ 。此外，还绘制了 09 号观测卫星运动轨道的图像。

针对问题二，首先通过建立几何定位模型，计算出 N 个观测点的位置参数，并与双星插值同步后的计算结果进行比较，误差在 1.24% 以内。利用待定系数法，建立优化模型，给出了主动段目标初值估计，该法与最小二乘法给出的结果相比更直接快速。根据 12 态线性多项式拟合模型，建立状态转移矩阵，综合运用目标跟踪算法，可演化出主动段任意时刻的速度参数，由此得到的观测点参数与几何定位法除个别点外基本吻合。在 $m(t)$ 为常数的假设下，运用非线性拟合算法确定了 $m(t)$ 和 $\bar{v}_r(t)$ 的表达式，得 $m(t) = 50000.69 - 24.94t$ ；最后对这三个模型做残差分析，并验证了模型结论的可信度。

针对问题三，考虑在双星同步定位的情况下，建立三轴指向误差和观测值之间的数学模型，根据同时刻观测时，双星与空间飞行器应处同一平面的约束条件，建立优化模型，计算出 $d_{\theta 6}, d_{\alpha 6}, d_{\beta 6}, d_{\theta 9}, d_{\alpha 9}, d_{\beta 9}$ 的值。进而参照问题二，给出结论。

针对问题四，参照运动方程的单星无源主动段射向估计方法，可利用带区间约束的 LMF 算法，给出主动段目标轨道的初值估计。

关键词：几何定位算法 优化模型 最小二乘法 目标跟踪算法 Kalman 滤波

一、 问题重述

本文主要研究中低轨近圆轨道卫星无源探测空间飞行器的主动段轨道的重力斜飞段。图 1 已经给出空间飞行器的主动段示意图 (未按实际比例),

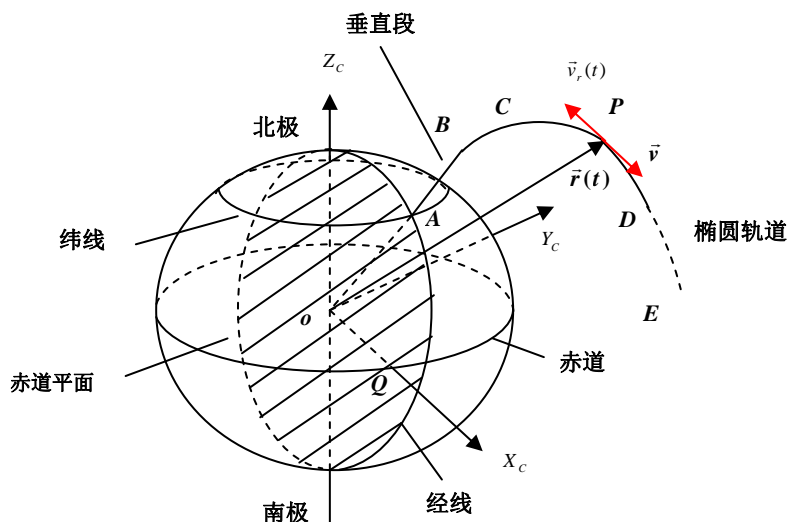


图 1 空间飞行器主动段轨道的示意图

基于变质量质点的动力学,空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程如下:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad (1)$$

如果方程 (1) 只保留右侧第一项, 则可以表示观测卫星的简化运动方程:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (2)$$

观测卫星对于空间飞行器的观测数据通过化简可以由观测坐标系下的两个无量纲比值确定:

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s} \quad (3)$$

观测数据不可避免地带有各种误差, 在本题的框架下, 将各种系统误差最终折合为三轴指向误差。三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差, 具体可以用三个常值小量 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 来表示, 分别表示第一观测量 α

的平移量、第二观测量 β 的平移量以及观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量。

在仅考虑随机误差的条件下，我们要研究以下问题：

1. 请根据附录 1 和观测卫星的简化运动方程 (2)，计算 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。结果保留 6 位有效数字。

2. 根据附录 2、3 提供的仿真数据, 给出 0 号空间飞行器在公式 (1) 框架下的轨道估计, 注意选取适当的 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型。按照从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样, 计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度, 并给出估计残差, 结果保留 6 位有效数字。同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置 $t-x$ 、 $t-y$ 、 $t-z$ 和三个速度 $t-vx$ 、 $t-vy$ 、 $t-vz$ 曲线示意图。

在同时考虑系统误差的条件下, 进一步研究下列问题:

3. 若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差, 对系统误差进行正确的估计能够有效提高精度。利用上述的逐点交汇方法能否同时对系统误差进行估计? 若不能, 是否还有其他的思路能够同时估计系统误差与轨道? 给出你的解决方案与估计结果。在报告中除给出与第二问要求相同的结果外, 还应分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果, 共六个数值, 分别是两颗卫星的 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

在有精力和时间情况下, 还可以考虑下面的问题:

4. 对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计, 结果形式要求同第三问, 注意参考第三问的系统误差估计结果。并进一步考虑在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下能否联合进行系统误差估计?

二、 第一问的模型建立

2.1. 符号说明

\vec{F}_e 飞行器所受的外力加速度之和

\vec{F}_T 火箭产生的推力加速度

$m(t)$ 火箭尾部燃料的瞬时质量

$\dot{m}(t)$ 质量变化率

$\vec{r}(t) = (x, y, z)$ 空间飞行器在基础坐标系下的坐标

$\ddot{\vec{r}}(t)$ 对时间 t 的二阶导数, 即加速度

G_m 地球引力常数, 取 $G_m = 3.986005 \times 10^{14} m^3 / s^2$

$\bar{v}_r(t)$ 燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度

T_{UEN}^{CEI} UEN 坐标系到基础坐标系下的转换矩阵

T_{CEI}^{UEN} 基础坐标系到 UEN 坐标系下的转换矩阵

2.2. 模型假设

- 1、假设火箭在喷气推动下作直线运动, 火箭所受的重力和空气阻力忽略不计。
- 2、假设在 t 时刻火箭质量 $m(t)$ 和 $v(t)$ 均为时间 t 的连续可微函数。

2.3. 模型分析

根据题目要求, 我们要利用观测卫星的简化运动方程 (2) 计算出 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。仔细观察方程 (2) 会发现, 这是一个关于 $r(t)$ 的二阶微分方程。此外, 附录 1 中还

给出了 09 号观测卫星 0 时刻在基础坐标系下的 12 态参数 $x_{c6}, y_{c6}, z_{c6}, \dot{x}_{c6}, \dot{y}_{c6}, \dot{z}_{c6}$ 的初始值, 所以很自然地想到利用求解常微分方程组的方法计算空间飞行器在某个固定时刻的位置参数。现在, 问题就简化为如何求解常微分方程组的问题, 通常情况下采用常微分方程组数值解法进行计算。

2.4. 常微分方程组数值解法

微分方程组数值解法的基本思想是用差商代替导数后进行逐步迭代, 即 $\dot{r}(t_n) \approx \frac{r(t_n) - r(t_{n-1})}{h}$ 。这里的 h 定义为步长, 并且满足 $h = t_n - t_{n-1}$ 。显然, 步长越小, 迭代的精确度越高。当 h 很小的时候, 对观测卫星在时间 h 内的运动轨迹做运动学模型的线性近似来代替它的真实运动, 据此给出迭代方程组:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t_n) = -\frac{G_m}{|\bar{r}(t_{n-1})|^3} \bar{r}(t_{n-1}) \\ \dot{r}(t_n) = \dot{r}(t_{n-1}) + \ddot{r}(t_{n-1})h, \\ r(t_n) = r(t_{n-1})h + \frac{1}{2}\ddot{r}(t_{n-1})h^2, \end{cases} \quad (4)$$

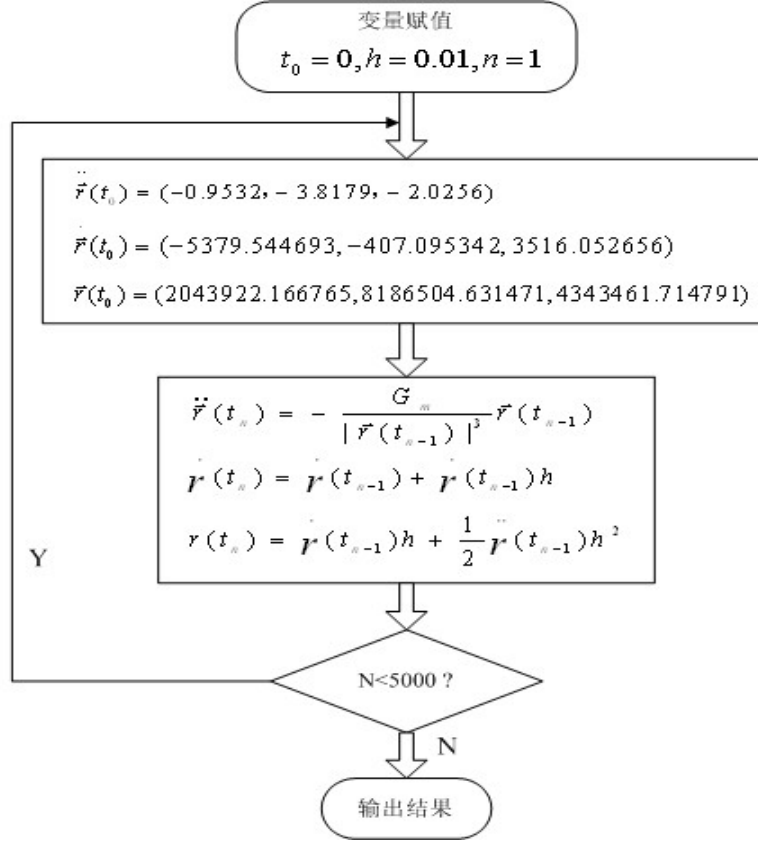
$$h = t_n - t_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ (迭代次数)}$$

注意, 这里采用差商代替导数的方法, 必然会引起一定的误差, 所以为了得到更加精确的结果, 步长的选取应当尽可能小。在计算过程中, 我们选取步长 $h = 0.01s$, 经检验, 这样得出的计算结果是比较合理的。文章中只给出了 09 号观测卫星在基础坐标系下的位置和速度初始参数, 再将 09 号观测卫星在基础坐标系下的位置和速度初始值代入方程 (2) 即可得到加速度的初始值, 最后把所有的初值代入方程组 (4) 进行迭代

2.5. 模型建立

估计观测卫星在基础坐标系下任意时刻的位置参数是进行空间飞行器轨道估计的前提条件。通过上面的讨论分析，我们已经将第一问简化为利用微分方程组数值解方法计算 09 号观测卫星在某个固定时刻位置参数的问题。具体计算步骤如下：

根据附件 1 可知，09 号观测卫星 0 时刻在基础坐标系下的位置和速度初始值 $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 分别为 2043922.166765m, 8186504.631471m, 4343461.714791m, -5379.544693m/s, -407.095342m/s, 3516.052656m/s，将它们代入方程 (2) 可得 09 号观测卫星的加速度初始值 $\ddot{\vec{r}}_{c_9}(0) = (-0.9532, -3.8179, -2.0256)$ ，文中通过试探法最后决定选取步长 $h = 0.01s$ ，经检验，这样得出的计算结果是比较合理的。现所有初始值都已求出，只需将它们代入迭代方程组 (4) 就能求出结果，具体实现操作的程序见附件 5 中的 MATLAB 程序，现以 $t = 50.0s$ 为例，迭代次数 $n = \frac{t-t_0}{h} = \frac{50.0-0}{0.01} = 5000$ ，下面给出计算过程的流程图：



图二 $t = 50.0s$ 时 09 号观测卫星位置算法流程图

最后得出，09 号观测卫星在 $t = 50.0s$ 时的三维位置为

$\vec{r}(50.0) = (1.77381 \times 10^6, 8.16138 \times 10^6, 4.51670 \times 10^6)$ 。采用同样的方法，依次可求得 09 号观测卫星在 100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置，最终结果见下表：

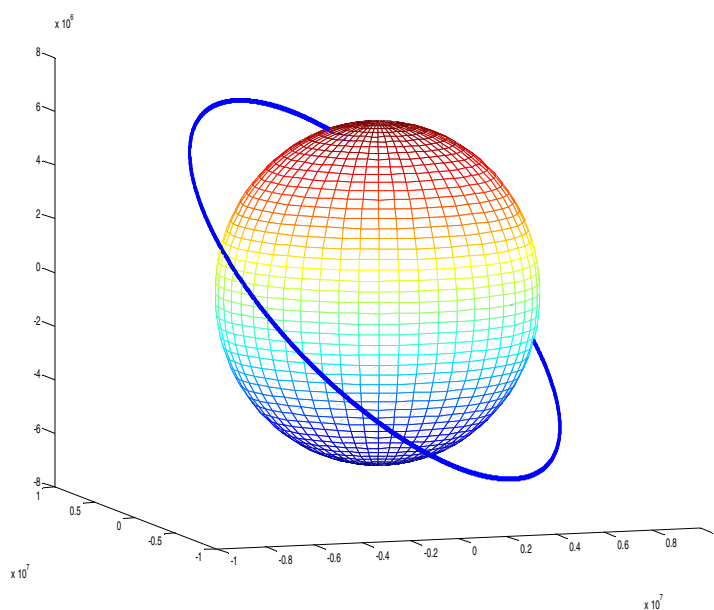
$\vec{r}(t)$ 单位:m t 单位: s	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
50.0	1.77381×10^6	8.16138×10^6	4.51670×10^6
100.0	1.50163×10^6	8.12676×10^6	4.68468×10^6
150.0	1.22770×10^6	8.08270×10^6	4.84722×10^6
200.0	9.52349×10^5	8.02925×10^6	5.00413×10^6
250.0	6.75894×10^5	7.96650×10^6	5.15524×10^6

表一 09 号观测卫星在各时刻的三维位置

2.6. 第一问的模型检验

求解该模型用常微分方程组数值解方法的思想求得的是常微分方程组的数值解而不是解析解，这必然会引起一定的误差，这种误差主要是由迭代过程中步长的选取而引起的。在计算过程中，我们采用试探的办法，分别取步长 $h=1, 0.1, 0.5, 0.01$ ，计算得到各种步长下 09 号观测卫星的三维位置参数，通过对比发现，当步长取到 0.5 或 0.01 时，计算结果没有显著性变化，所以步长取 $h=0.01$ 时的结果是相对比较合理的。

为了更加直观的表现出卫星绕地球中心旋转的轨迹，我通过上面的方法，结合 MATLAB 软件拟合出了 09 号卫星在时绕地球一周的运动轨迹，其周期为 150 多分钟，轨道面的倾角约 45° ，椭圆轨道的长半轴是 9.55910×10^6 m，短半轴是 9.21316×10^6 m，具体如下图所示（程序见附件 6）：



图三 09 号卫星绕地心旋转的运动轨迹

三、 第二问的模型建立

3.1 符号说明

N	卫星观测数据的样本总量（ $N = 600$ ）
a_k	0 号空间飞行器 t_k 时刻在 UEN 坐标系下的方位角
e_k	0 号空间飞行器 t_k 时刻在 UEN 坐标系下的俯仰角
r_k	t_k 时刻 0 号空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量
s_k	t_k 时刻观测卫星在基础坐标系下的位置矢量
τ	观测卫星的经度
θ	观测卫星的纬度
Δt	相邻两个观测时刻差（由观测数据得知 $\Delta t = 0.2s$ ）
$M = (x_s, y_s, z_s)^T$	0 号空间飞行器在 UEN 坐标系中的矢量
$r_s(t) = (x_s, y_s, z_s)$	空间飞行器在 UEN 坐标系下的坐标
$r_c(t) = (x_c, y_c, z_c)$	观测卫星在基础坐标系下的坐标
$(x_{c6i}, y_{c6i}, z_{c6i})$	06 号观测卫星在 t_i 时刻在基础坐标系下的坐标
$r_i = (x_i, y_i, z_i), (i = 1, 2, \dots, 599)$	第 i 个点的位置参数
$\dot{r}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i), (i = 1, 2, \dots, 599)$	第 i 个点的速度参数
$\ddot{r}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i), (i = 1, 2, \dots, 599)$	第 i 个点的加速度参数
$\dddot{r}_i = (\dddot{x}_i, \dddot{y}_i, \dddot{z}_i), (i = 1, 2, \dots, 599)$	第 i 个点的加加速度参数
$t_i (i = 1, 2, \dots, 600)$	观测卫星对 0 号空间飞行器的观测时刻

3.2 问题分析

根据题目要求，我们总共需要解决三个问题：

- 一、按照逐点交汇定位的思路给出 0 号空间飞行器的轨道估计。文中提出几何定位算法^[1]对该问题进行分析，计算过程中利用空间飞行器的无量纲坐标 α, β 进行推导，该方法实现了将 0 号空间飞行器的位置参数在两个不同坐标系下的转换，最终估计出 $N-1$ 个点在基础坐标系下的位置参数。
- 二、对主动段目标飞行器运动学中的参数（位置参数，速度参数，加速度参数和加加速度参数）做初值估计，文中采用了两种方法，线性最小二乘法的主动段目标参数估计^[2]和待定参数优化算法。线性最小二乘法的主动段目标参数估计方法中，首先建立主动段的 12 态参数模型和测量模型，再从运动学模

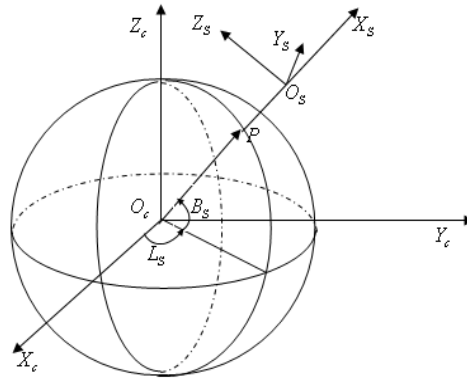
型线性化近似的思想出发,用常加加速度的 3 阶多项式模型近似模拟空间飞行器的真实运动学参数,并对非线性化测量做伪线性化处理,最终实现空间飞行器的最大似然估计,最后利用初值估计结果,估算出 N 个观测点的速度参数。

- 三、给出目标飞行器的位置参数和速度参数的残差估计。通过描绘几何定位算法和待定参数优化模型的位置参数散点图,验证了待定参数优化模型的可信度。

3.3 模型建立

3.3.1 几何定位算法^[1]

根据题意可知,基础坐标系为随地心平移的坐标系,取地球中心 O_c 为原点随地球自转轴取为 Z 轴,指向北极为正向, x 轴由 O_c 指向零时刻的 0 经度线,再按右手系确定 y 轴,建立直角坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 。在随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ 中,原点取为卫星中心 O_s , X_s 轴沿 $O_c O_s$ 连线,离开地球方向为正, Z_s 轴与 X_s 垂直指向正北, Y_s 轴按右手系确定。如图所示:



图四 观测坐标系示意图

根据两个坐标系的选取可知, UEN 坐标系实际上是对基础坐标系做两次旋转和一次平移得到的, 因为卫星观测中心 O_s 在基础坐标系下的坐标在附录 1 中已经给出, 且基础坐标系的 x 轴是由 O_c 指向零时刻的 0 经度线, 那么我们很容易求出卫星中心 O_s 的经度 τ 和纬度 θ 。如果先把基础坐标系绕 Z 轴沿经度方向旋转 τ 度, 再将其沿着垂直于赤道的平面即纬度方向旋转 θ 度, 最后沿着 $O_c O_s$ 将其从 O_c 点平移到 O_s 点, 恰好得到观测卫星坐标系 (UEN 坐标系)。于是有 $r_k = s_k + T_{UEN}^{CEI} M$, 因为旋转矩阵是正交矩阵, 所以有 $T_{CEI}^{UEN} = (T_{UEN}^{CEI})^{-1} = (T_{UEN}^{CEI})^T$ 。

通过观察附录 2、3 中给出的数据我们发现, 虽然 06 号观测卫星和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测时间间隔都是 0.2s, 但是这两颗观测卫星对 0 号空间飞行器的观测不是同时进行的 (即异步观测), 所以我们无法直接进行交叉定位分析, 虽然对角观测量进行滤波或插值能够解决这个问题, 但是对角度测量量的数学模型建立困难非常大, 所以我们考虑采用几何定位算法进行交叉定位。该方法的主要思想是: 假定空间飞行器主动段弹道是在一个过原点的平面内, 06

号观测卫星两次观测就形成一个观测平面，再通过 09 号观测卫星两次观测又形成一个观测平面，两颗观测卫星的瞬态观测平面相交形成一条直线（称为瞬态弹道），过原点和瞬态弹道平面则形成一个瞬态弹道平面，根据瞬态弹道平面和卫星观测即可得到该观测时刻的 0 号空间飞行器的位置。具体计算过程如下：

我们首先给出 UEN 坐标系下的方位角 a 和俯仰角 e 的定义^[3]，已知 0 号空间飞行器在 UEN 坐标系中的矢量为 $M = (x_s, y_s, z_s)^T$ ，那么它在 UEN 坐标系下的方位角 a 和俯仰角 e 为

$$\begin{aligned}(e, a)^T &= (\arctan(-\frac{\sqrt{z_s^2 + y_s^2}}{x_s}), \frac{3\pi}{2} - \arctan(\frac{z_s}{y_s}))^T \\ &= (\arctan(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{\beta}{\alpha})\end{aligned}\quad (5)$$

根据 (5) 式，在 UEN 坐标系中由观测卫星指向 0 号空间飞行器的单位矢量为：

$$\omega = \frac{M}{\|M\|} = (-\cos e, -\sin a \sin e, -\cos a \sin e)^T = \frac{(1, \alpha, \beta)}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}} \quad (6)$$

则在基础坐标系下的单位矢量为

$$g = T_{UEN}^{CEI} \omega \quad (7)$$

定义坐标转换矩阵为

$$T_{UEN}^{CEI} = \begin{bmatrix} \cos \tau_{6i} & -\sin \tau_{6i} & 0 \\ \sin \tau_{6i} & \cos \tau_{6i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta_{6i} & 0 & -\sin \theta_{6i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{6i} & 0 & \cos \theta_{6i} \end{bmatrix}$$

于是可以得到 06 号观测卫星在 t_i 时刻的观测矢量为

$$g_{6i} = \begin{bmatrix} \psi_{6i} \\ \varphi_{6i} \\ \phi_{6i} \end{bmatrix} = T_{UEN}^{CEI} \begin{bmatrix} -\cos e_{6i} \\ -\sin a_{6i} \sin e_{6i} \\ -\cos a_{6i} \sin e_{6i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

同样的道理，可以得到 06 号卫星在 t_{i+1} 时刻的观测矢量 $g_{6,i+1}$ 。

根据卫星在 t_i 和 t_{i+1} 时刻的观测矢量，得到观测平面为：

$$\begin{vmatrix} \varphi_{6,i+1} & \phi_{6,i+1} \\ \varphi_{6,i} & \phi_{6,i} \end{vmatrix} (x - x_{c6i}) + \begin{vmatrix} \phi_{6,i+1} & \psi_{6,i+1} \\ \phi_{6,i} & \psi_{6,i} \end{vmatrix} (y - y_{c6i}) + \begin{vmatrix} \psi_{6,i+1} & \varphi_{6,i+1} \\ \psi_{6,i} & \varphi_{6,i} \end{vmatrix} (z - z_{c6i}) = 0$$

$$\text{记为 } A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (9)$$

同理，得到 09 号观测卫星在 t_i 和 t_{i+1} 时刻的观测平面，记为

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad (10)$$

0 号空间飞行器的瞬态弹道为 (9) 式和 (10) 式的交线, 于是定义过瞬态弹道的瞬态弹道平面为:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (11)$$

由于导弹平面过地心 (即坐标原点), 可得: $\lambda = -\frac{D_1}{D_2}$, 瞬态弹道平面可化为

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z = 0. \quad (12)$$

$$\text{记为 } Ax + By + Cz = 0 \quad (13)$$

设 06 号卫星在 t_i 时刻的观测直线为

$$\frac{(x - x_{c6i})}{\psi_{6,i}} = \frac{(y - y_{c6i})}{\phi_{6,i}} = \frac{(z - z_{c6i})}{\phi_{6,i}} \quad (14)$$

求解 (13)、(14) 式的交点, 则 0 号空间飞行器在 t_i 时刻的位置是:

$$\begin{cases} x_n = x_{c6} + \sigma\psi_{6,n} \\ y_n = y_{c6} + \sigma\phi_{6,n} \\ z_n = z_{c6} + \sigma\phi_{6,n} \\ \sigma = -(Ax_{c6} + By_{c6} + Cz_{c6}) / (A\psi_{6,n} + B\phi_{6,n} + C\phi_{6,n}) \end{cases} \quad (15)$$

从空间飞行器目标的几何定位误差的基本思想入手进行分析, 这种做法的误差主要来自卫星位置误差与角度测量误差, 因计算过程较复杂, 这里直接给出最终定位误差的表达式:

$$\begin{aligned} d_{x_p} &= T_1(\delta x_{s6}, \delta y_{s6}, \delta z_{s6}, \delta x_{s6}, \delta y_{s6}, \delta z_{s6})_{6 \times 1}^T + T_2(\delta \psi_{s9}, \delta \phi_{s9}, \delta \phi_{s9}, \delta \psi_{s9}, \delta \phi_{s9}, \delta \phi_{s9})_{12 \times 1}^T \\ &= T_1(\delta x_{s6}, \delta y_{s6}, \delta z_{s6}, \delta x_{s6}, \delta y_{s6}, \delta z_{s6})_{6 \times 1}^T + T_2 T_3 (\delta a_{1,n}, \delta e_{1,n}, \dots, \delta e_{2,m+1})_{8 \times 1}^T \end{aligned}$$

其中, T_1, T_2, T_3 分别为对应的 Jacobi 矩阵, $\delta x, \delta y, \delta z$ 分别为卫星位置误差, $\delta a, \delta e$ 分别为方位角、俯仰角测量误差。

因为空间飞行器在主动段的受力情况十分复杂, 主要包括推力、重力、气动阻力等, 所以采用高阶线性多项式来拟合主动段的弹道是一个简单而直观的方法, 在此采用 12 态的线性模型, 利用几何定位的方法将非线性的角度测量方程转换为线性的位置测量方程, 综合运用 Kalman 滤波^[1]方法实现对目标的跟踪。

3.3.2 最小二乘法的主动段目标初值估计模型^[2]

主动段目标初值估计是目标战术参数估计的重要内容^[5], 并且作为跟踪初始化, 是监视系统进行后续实时跟踪的前提条件^[6]。如果只有 09 号观测卫星单星观测 01 号空间飞行器, 同一时刻单颗观测卫星目标初值估计实质上是非线性最小二乘的求解问题, 本文通过建立主动段 12 态重力转弯模型和测量模型, 再利用运动学模型线性化的思想, 采用常加速度线性的 3 阶多相似模型来近似目标运动学参数, 并对非线性测量进行伪线性化处理, 将非

线性最小二乘转化为最小二乘求解问题，最终得到主动段目标初值估计。主动段 12 态重力转弯模型相较于普通大线性 CA 模型更加贴近实际的主动段运动特征。

下面先介绍主动段目标的 12 态重力转弯模型，在基础坐标系的刻画下具体包含 12 态的运动学参数（位置、速度、加速度和加加速度），另外还有 2 态的动力学参数（轴向加速度 α 和相对质量损耗率 β ，标量）。这个模型更加准确地反映了空间飞行器的火箭发动机第一级的运动特征，其基本假设为空间飞行器转弯瞄准后，在 UEN 坐标系下推力方向与速度方向时一致的，随后弹道的弯曲完全是由重力的作用引起的；轴向受力为常值，不受侧力的影响；空间飞行器的质量变化率为常数。 $\tilde{v} = |v_{UEN}|$ 是 0 号空间飞行器在基础坐

标系下的目标速度， $Y = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \alpha, \beta)$ 表示 0 号空间飞行器在基础坐标系下的目标状态，最终得到惯性系下 0 号空间飞行器主动段运动的微分方程：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha(x - w_e y) / \tilde{v} + g_x \\ \ddot{y} = \alpha(y + w_e x) / \tilde{v} + g_y \\ \ddot{z} = \alpha z / \tilde{v} + g_z \\ \alpha = \alpha\beta, \beta = \beta^2 \end{cases} \quad (16)$$

在传感器观测模型中，星载红外传感器通过主动段目标喷射的高温尾焰得到目标相对于卫星的视线测量信息包括方位角 a 和俯仰角 p ，则 0 号空间飞行器在基础坐标系下的坐标为

$$L = (x_s, y_s, z_s)^T = T_B^U (r - r_c) \quad (17)$$

由于目标的方程和测量方程均是非线性的，由此目标初值估计是非线性最小二乘问题。对于，经典处理手段是基于 Gauss-Newton 迭代或其改进方法没通过是测量残差不断变小而得到极值 \hat{Y}_1 。一般而言，经典方法为了更高精度而牺牲了效率。事实上，考虑到初值确定应在较短时间内完成，而 0 号空间飞行器在较短时间内运动学轨迹可用多项式近似化表示，由此可实现目标运动学模型的线性化；此外，考虑到红外传感器的作用距离和较低的 LOS 误差，可对非线性测量做伪线性化处理，在运动模型和测量模型均满足线性化的条件后，目标初值中的运动学参数的最大似然估计就等价于线性最小二乘解，可直接求得无需迭代，这里需要说明的是，这种方法只能得到目标的初始位置、速度、加速度、加加速度等运动学参数，对于轴向加速度和相对质量损耗率等动力学参数得做进一步的分析求取。根据前面的定义，将卫星初始时刻记为 t_1 ，在相对很小的时间范围内采用运动学模型的线性化近似，考虑常加加速度的 3 阶多项式模型，将 0 号空间飞行器的运动轨迹做伪线性

化处理，则 t_i 时刻0号空间飞行器的位置矢量满足下面的方程：

$$r_i = r_1 + \dot{r}_1(t_i - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{r}_1(t_i - t_1)^2 + \frac{1}{6}\dddot{r}_1(t_i - t_1)^3 \quad (18)$$

$$\text{其中，} \begin{cases} V_i = (I_{3 \times 3}, I_{3 \times 3}(t_i - t_1), I_{3 \times 3}(t_i - t_1)^2 / 2, I_{3 \times 3}(t_i - t_1)^3 / 6)_{3 \times 12} \\ P_1 = (r_1^T, \dot{r}_1^T, \ddot{r}_1^T, \ddot{r}_1^T)_{12 \times 1}^T \end{cases} \quad (19)$$

已知，0号空间飞行器在基础坐标系下的坐标 (x_s, y_s, z_s) ，记

$$A_0^T = \begin{pmatrix} 0 & -\sin e_0 & \cos p_0 \sin a \\ -\sin e_0 & 0 & \cos p_0 \cos a \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中，前者为不受噪声干扰的精确测量，则推到可得：

$$\begin{aligned} A_0^T(x_s, y_s, z_s)^T &= - \begin{pmatrix} 0 & -\sin e_0 & \cos e_0 \sin a \\ -\sin e_0 & 0 & \cos e_0 \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y_s \sin e_0 + z_s \cos e_0 \sin a_0 \\ -x_s \sin e_0 + z_s \cos e_0 \cos a_0 \end{pmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对上面的结果做进一步的化简得：

$$\begin{aligned} f_1 &= -y_s \sin e_0 + z_s \cos e_0 \sin a_0 \\ &= -y_s \sin(\arctan(\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}})) + z_s \cos(\arctan(\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}})) \sin(\arctan(\frac{y_s}{x_s})) \\ &= -y_s \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} + z_s \frac{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} \frac{y_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \\ &= \frac{-y_s z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} + \frac{y_s z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} = 0 \\ f_2 &= -x_s \sin e_0 + z_s \cos e_0 \cos a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -x_s \sin(\arctan(\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}})) + z_s \cos(\arctan(\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}})) \cos(\arctan(\frac{y_s}{x_s})) \\ &= -x_s \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} + z_s \frac{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \\ &= \frac{-x_s z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} + \frac{x_s z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即得: } A_0^T(x_s, y_s, z_s)^T = 0_{2 \times 1}. \quad (21)$$

将 (17) 式代入 (20) 式可得:

$$A_0^T T_B^U (r - r_c) = 0_{2 \times 1} \quad (22)$$

用实际测量 (a, e) 替换 A_0 中的 (a_0, e_0) , 记为 A , 则 (22) 式中右边应多了一个伪线性测量噪声 $-\eta$, 于是有

$$A_0^T T_B^U r_c = A_0^T T_B^U r_c + \eta \quad (23)$$

记 $y = A^T T_B^U r_c$ 为伪线性观测量, $K = A^T T_B^U$, 则 2 维伪线性测量表达式即伪线性测量噪声

$$\begin{aligned} y &= K r_c, \\ \eta &= -A^T(x_s, y_s, z_s)^T \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -\sin p & \cos p & \sin a \\ -\sin p & 0 & \cos p & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_s \sin p - z_s \cos p & \sin a \\ x_s \sin p - z_s \cos p & \cos a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

下面开始确定初始状态的运动学参数, 对 N 次观测的数据, 记

$$Y^{(N)} = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T)^T_{(2N) \times 1}, \psi^{(N)} = \begin{pmatrix} K_1 V_1 \\ \vdots \\ K_N V_N \end{pmatrix}_{(2N) \times 12}, \quad (25)$$

$$\eta = (\eta_1^T, \dots, \eta_N^T)^T_{(2N) \times 1},$$

根据 y 的定义, 结合 (25) 式可得:

$$Y^{(N)} = \psi^{(N)} P_1 + \eta \quad (26)$$

其中 V_1, P_1 的定义同 (20) 式。最终得最小二乘解及其估计协方差矩阵

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= (\psi^{(N)})^T (\psi^{(N)})^{-1} \psi^{(N)} Y^{(N)} \\ Cov &= ((\psi^{(N)})^T (\psi^{(N)})^{-1}) \end{aligned} \quad (27)$$

3.3.3 优化模型

附录 2 和附录 3 中存储的数据为 06 号和 09 号观测卫星在各自的观测坐标系下测得 0 号空间飞行器在某时刻的两个无量纲比值 α 、 β (飞行器在所对应观测

坐标系下的坐标可以由 α 、 β 确定)。由观测数据可知，两颗观测卫星对 0 号空间飞行器观测时刻点不同，时间差 $\Delta t_1 \approx 0.058s$ 。显然可以通过插值方法将二者化为两颗观测卫星同步观测的情况。由后面求出 0 号空间飞行器的速度可知， Δt_1 内 0 号空间飞行器运动距离小于百米，故此时间差可以忽略，可近似认为这是一个双星同步定位问题。为了便于计算，本文选取 09 号观测卫星的观测时刻为初始观测时刻，所以飞行器轨迹点初值即为 $t_1=50.06s$ 处的位置及速度等相关参数。

于是 0 号空间飞行器在公式 (1) 框架下的轨道估计可以转化为优化问题。本文将采用常加加速度 3 阶线性模型模拟 0 号空间飞行器的运动方程，将基础坐标系下 x、y、z 轴的速度、加速度、加加速度设为待求的变量参数，以 600 次观测数据下飞行器位置的理论值与测量值差的平方再累加求和的最小化作为目标函数，求解能够使目标函数有最值的各轴向速度、加速度、加加速度。

设 t_1 时刻 0 号空间飞行器在基础坐标系下的 12 态参数（位置参数、速度参数、加速度参数和加加速度参数）中的速度参数、加速度参数和加加速度参数视为待定参数。则 t_2 时刻位置矢量为：

$$r_2 = r_1 + \dot{r}_1(\Delta t) + \frac{1}{2}\ddot{r}_1(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\dddot{r}_1(\Delta t)^3 \quad (28)$$

速度矢量为：

$$\dot{r}_2 = \dot{r}_1 + \ddot{r}_1(\Delta t) + \frac{1}{2}\dddot{r}_1(\Delta t)^2 \quad (29)$$

加速度矢量为

$$\ddot{r}_2 = \ddot{r}_1 + \dddot{r}_1(\Delta t) \quad (30)$$

t_2 时刻的 0 号空间飞行器的加加速度矢量为

$$\dddot{r}_2 = \dddot{r}_1 \quad (31)$$

结合上面的四个公式将其写成矩阵的形式如下：

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \dot{r}_2 \\ \ddot{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3}(\Delta t) & \frac{1}{2}I_{3 \times 3}(\Delta t)^2 & \frac{1}{6}I_{3 \times 3}(\Delta t)^3 \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3}(\Delta t) & \frac{1}{2}I_{3 \times 3}(\Delta t)^2 \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3}(\Delta t) \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \dot{r}_1 \\ \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

将上式记为 $H_2 = BH_1$ 其中， B 为状态转移矩阵， H_1 、 H_2 分别为 0 号空间飞行器在 t_1 、 t_2 时刻的状态向量。由数据中知，每两个相邻状态的时间间隔 $\Delta t = 0.2s$ ，

故每次转换中状态转移矩阵 B 相同。即得到

$$H_3 = BH_2 = B^2H_1, \dots, H_{N-1} = BH_{N-2} = \dots = B^{N-2}H_1, \quad (33)$$

根据 (21) 式可知, 可求得假设 r_i^* ($i=2, \dots, 599$) 0 号空间飞行器在 t_i 时刻的理论值, 可由 \dot{r}_i , \ddot{r}_i , \dddot{r}_i 表示。再将 r_i^* 与几何定位法所求的 r_i 作为测量值, 对 r_i^* 和 r_i 做差后取平方并累加求和, 这就是模型的目标函数:

$$\min \sum_{i=2}^{599} (r_{ix}^* - r_{ix})^2 \quad (34)$$

显然这是一个三元多项式函数, 由数学分析的知识可知, 这个函数有且只有一个极值点, 且在驻点位置。

3.4 $m(t)$ 和 $\bar{v}_r(t)$ 模型的估计

由上文可以求得从 50.0s 到 170.0s 间隔内 0 号空间飞行器在各个采样点的位置、速度和加速度等参数值。根据给定基础坐标系下的位置和速度情况下, 可以实现对飞行器简化运动过程进行非线性拟合:

由 $m(t)$ 为严格单调递减的非负函数可知:

$$m(t) = m_0 - a \times t \quad (35)$$

其中, $a > 0$, m_0 为待求常数。

题目中指出, $\bar{v}_r(t)$ 取的是燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度, 故气体相对于地球的速度为 $v(t) - |\bar{v}_r(t)|$, 由一般大小稳定可知 $|\bar{v}_r(t)|$ 为常数。

飞行器在运动过程中不断喷出气体, 所以质量不断减少, 在 $[t, t + \Delta t]$ 内的减少量可由微分公式表示为:

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \frac{dm}{dt} \times \Delta t + o(\Delta t) \quad (36)$$

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \frac{dv}{dt} \times \Delta t + o(\Delta t) \quad (37)$$

又由飞行器喷气瞬间动量守恒定律有:

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - \left[\frac{dm}{dt} \Delta t + o(\Delta t) \right] \times [v(t) - |\bar{v}_r(t)|] \quad (38)$$

由 (24)、(25) 和 (26) 有:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -|\bar{v}_r(t)| \frac{dm}{dt} \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\text{化简得: } m(t) = m_0 \times e^{-\frac{v(t)-v_0}{|\vec{v}_r(t)|}} \quad (40)$$

其中, $v(0)$ 为起始时刻 50s 时的速度。

由题目所给公式 (1) 化简得:

$$\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) = \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (41)$$

将向量分别投影到相应的坐标轴上, 得到方程组:

$$\begin{cases} \ddot{r}_x(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} r_x(t) = \vec{v}_{rx}(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \\ \ddot{r}_y(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} r_y(t) = \vec{v}_{ry}(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \\ \ddot{r}_z(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} r_z(t) = \vec{v}_{rz}(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{cases} \quad (42)$$

$$\text{再有: } |\vec{v}_r(t)| = \sqrt{\vec{v}_{rx}(t)^2 + \vec{v}_{ry}(t)^2 + \vec{v}_{rz}(t)^2} \quad (43)$$

综合 (40)、(41)、(42)、(43), 采用非线性拟合求解 m_0 和 a , $v(0)$ 取 792.667 m/s。

在 matlab7.1 中运行附录 7 即可求得:

$$m_0 = 50000.69 \text{ kg}, \quad a = 24.94$$

$$\text{故 } m(t) = 50000.69 - 24.94 \times t \quad (44)$$

将式 (44) 代入式 (43) 可求得:

$$\vec{v}_r(t) = (1 - 0.0005 \times t) \left(\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \right) \quad (45)$$

3.5 模型求解

3.4.1 几何定位算法求解

按照上面的说法, 利用几何定位算法直接可以得到 600 个观测点的位置参数, 计算结果在附录中已经给出。(程序附件见附录 9)

3.4.2 优化模型求解

根据上节的模型分析可知, 求解该优化模型最便捷的办法就是找驻点, 因为方程 (34) 是三元多项式, 所以只要找到它的驻点, 目标函数的极小值问题就解决了。下面以 x 轴向为例, 分别对 S_x 中 r_{1x} 、 r_{1x} 、 r_{1x} 求偏导后, 得到一个由三个方程所构成的方程组:

$$\begin{cases} 0.928404 \times 10^{10} + 0.819122 \times 10^{10} \ddot{r}_{1x} + 0.256617 \times 10^9 \ddot{r}_{1x} + 0.571690 \times 10^7 \dot{r}_{1x} = 0 \\ 0.433293 \times 10^{12} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1x} + 0.122868 \times 10^{11} \ddot{r}_{1x} + 0.256617 \times 10^9 \dot{r}_{1x} = 0 \\ 0.139719 \times 10^{14} \ddot{r}_{1x} + 0.141919 \times 10^{14} \ddot{r}_{1x} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1x} + 0.819122 \times 10^{10} \dot{r}_{1x} = 0 \end{cases}$$

即可求得 $\dot{r}_{1x} = -792.544 \text{ m/s}$,

$$\ddot{r}_{1x} = -13.9663 \text{ m/s}^2,$$

$$\ddot{r}_{1x} = -0.142733 \text{ m/s}^3,$$

同理可得, 对 S_y 中 \dot{r}_{1y} 、 \ddot{r}_{1y} 、 \ddot{r}_{1y} 求偏导, 再由三个方程所构成的方程组:

$$\begin{cases} 0.571690 \times 10^7 \dot{r}_{1y} + 0.256617 \times 10^9 \ddot{r}_{1y} - 0.535038 \times 10^{10} + 0.819122 \times 10^{10} \ddot{r}_{1y} = 0 \\ -0.243237 \times 10^{12} + 0.256617 \times 10^9 \dot{r}_{1y} + 0.122868 \times 10^{11} \ddot{r}_{1y} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1y} = 0 \\ -0.782794 \times 10^{13} + 0.819122 \times 10^{10} \dot{r}_{1y} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1y} + 0.139719 \times 10^{14} \ddot{r}_{1y} = 0 \end{cases}$$

求得 $\dot{r}_{1y} = 732.138 \text{ m/s}$,

$$\ddot{r}_{1y} = 5.34691 \text{ m/s}^2,$$

$$\ddot{r}_{1y} = -0.0253060 \text{ m/s}^3,$$

对 S_z 中 \dot{r}_{1z} 、 \ddot{r}_{1z} 、 \ddot{r}_{1z} 求偏导, 再由三个方程所构成的方程组:

$$\begin{cases} -0.111533 \times 10^{11} + 0.819122 \times 10^{10} \ddot{r}_{1z} + 0.256617 \times 10^9 \ddot{r}_{1z} + 0.571690 \times 10^7 \dot{r}_{1z} = 0 \\ -0.520763 \times 10^{12} + 0.122868 \times 10^{11} \ddot{r}_{1z} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1z} + 0.256617 \times 10^9 \dot{r}_{1z} = 0 \\ -0.170619 \times 10^{14} + 0.139719 \times 10^{14} \ddot{r}_{1z} + 0.408537 \times 10^{12} \ddot{r}_{1z} + 0.819122 \times 10^{10} \dot{r}_{1z} = 0 \end{cases}$$

求得 $\dot{r}_{1x} = 943.829 \text{ m/s}$,

$$\ddot{r}_{1z} = 16.7900 \text{ m/s}^2,$$

$$\ddot{r}_{1z} = 0.176886 \text{ m/s}^3,$$

在这个模型的基础上, 得到的主动段目标初值估计结果如下:

$$(\dot{r}_1^T, \ddot{r}_1^T, \ddot{r}_1^T)^T = (-1113023.978, 6200659.897, 1134258.715, -792.544, 732.138, 943.829, -13.9663, 5.34691, 16.79, -0.14273, -0.02531, 0.176886).$$

由优化模型中的 (33) 式可知, 任意时刻的状态参数都可以通过状态转移矩阵用初始状态参数表示, 即

$$H_{i+1} = B^i H_1, \quad (46)$$

已知初始时刻 $t_1 = 50.06s$, 而题目要求对 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样, 所以我们可以考虑先根据 (46) 式倒推出 $t_0 = 50.0s$ 时 0 号空间飞行器的状态参数, 应有

$$H_1 = B(t_1 - t_0)H_0 = B(0.06)H_0, \quad (47)$$

其中, 状态转移矩阵 B 是上三角矩阵, 所以一定是可逆的, 于是由 (34) 可得 $H_0 = B^{-1}(0.06)H_1 = (-1112885, 6200532, 1134100, -790.096, 731.200, 940.886, -13.9413, 5.35135, 16.75890, -0.142730, -0.025310, 0.176886)$.

现把 $t_0 = 50.0s$ 视为新的初始状态, 假设间隔 0.2s 记为下一个时刻, 可以得到一个新的方程用来刻画任意时刻的目标状态参数:

$$H_i = B^i H_0 \quad (48)$$

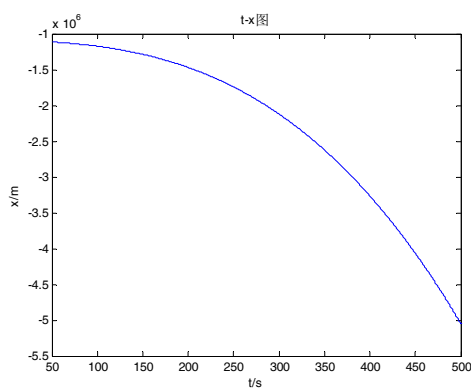
若要计算 60.0s 时的目标状态参数, 则 $i = \frac{60.0 - 50.0}{0.2} = 50$, 所以在 60.0s 时的状态参数为 $H_{50} = B^{50}H_0$, 依次用同样的做法, 就可以对 50.0s 到 170.0s 间的采样点的状态参数计算出来, 根据题目要求, 下表仅列出各个时刻的位置参数和速度参数 (附录 10): (注: 为了便于显示数据, 以下数据都用科学记数法表示, 以 $-1.11289E6$ 为例, $-1.11289E6$ 表示 -1.11289×10^6)

时间 (s)	r_x (m)	r_y (m)	r_z (m)	\dot{r}_x (m/s)	\dot{r}_y (m/s)	\dot{r}_z (m/s)
50.0	-1.11289E6	6.20053E6	1.13409E6	-7.90096E2	7.31200E2	-1.11289E6
60.0	-1.12151E6	6.20811E6	1.14437E6	-9.36645E2	7.83448E2	-1.12151E6
70.0	-1.13167E6	6.21619E6	1.15650E6	-1.09747E3	8.33165E2	-1.13167E6
80.0	-1.14350E6	6.22476E6	1.17066E6	-1.27256E3	8.80352E2	-1.14350E6
90.0	-1.15716E6	6.23379E6	1.18702E6	-1.46193E3	9.25009E2	-1.15716E6
100.0	-1.17279E6	6.24325E6	1.20577E6	-1.66558E3	9.67135E2	-1.17279E6
110.0	-1.19052E6	6.25312E6	1.22708E6	-1.88349E3	1.00673E3	-1.19052E6
120.0	-1.21051E6	6.26338E6	1.25113E6	-2.11568E3	1.04379E3	-1.21051E6

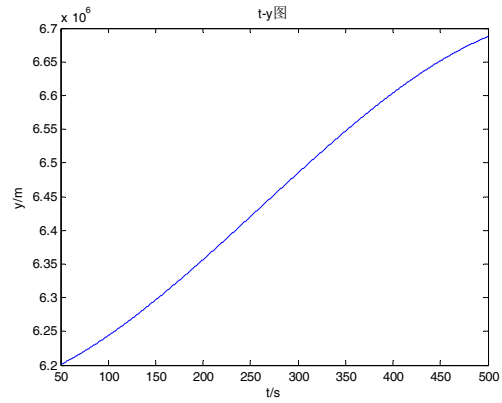
130.0	-1.23288E6	6.27399E6	1.27809E6	-2.36214E3	1.07833E3	-1.23288E6
140.0	-1.25780E6	6.28494E6	1.30814E6	-2.62288E3	1.11033E3	-1.25780E6
150.0	-1.28539E6	6.29619E6	1.34146E6	-2.89789E3	1.13980E3	-1.28539E6
160.0	-1.31580E6	6.30773E6	1.37822E6	-3.18717E3	1.16675E3	-1.31580E6
170.0	-1.34918E6	6.31952E6	1.41861E6	-3.49072E3	1.19116E3	-1.34918E6

表二 0 号空间飞行器在各采样点的位置和速度参数

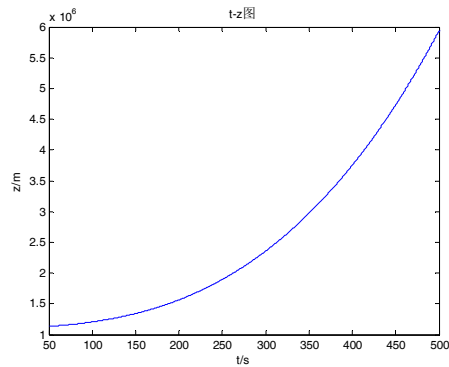
因为根据 (48) 式可以计算出任意时刻空间飞行器的状态参数，所以为了更加直观的表现出来位置和速度参数随时间变化的变化，我们在 (48) 的基础上计算出空间飞行器在 50.0s—500.0s 内的位置和速度参数，并通过描点拟合的方法画出它们的图像，如下图所示：



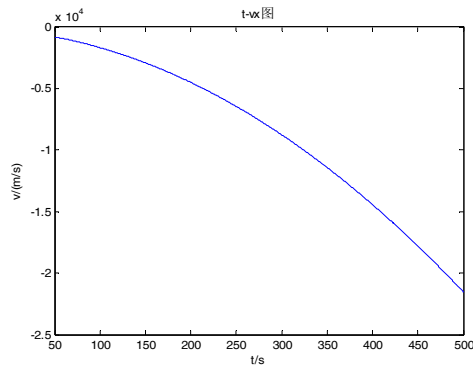
图五 $t-x$



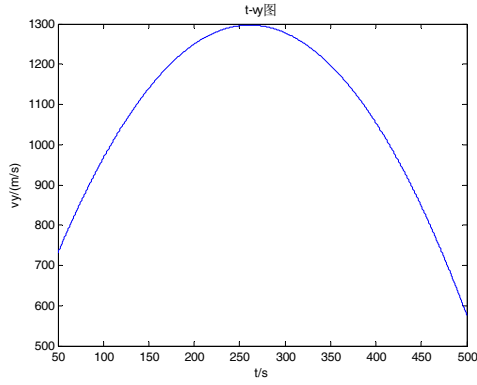
图六 $t-y$



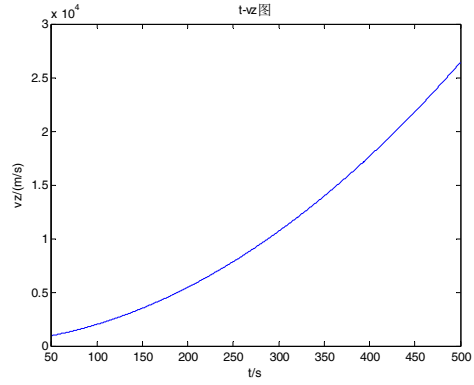
图七 $t-z$



图八 $t-vx$



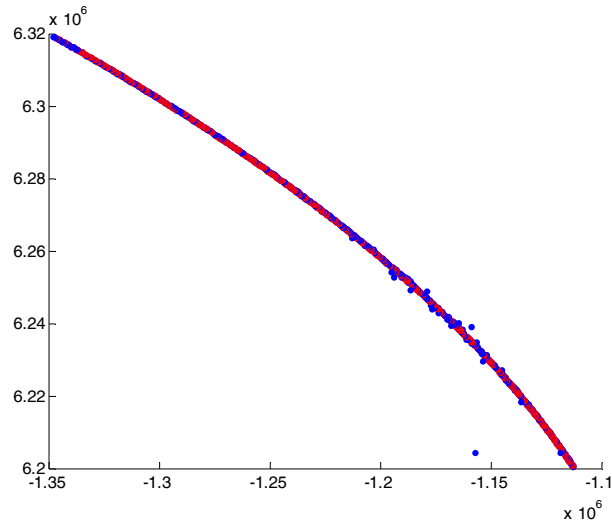
图九 $t - v_y$



图十 $t - v_z$

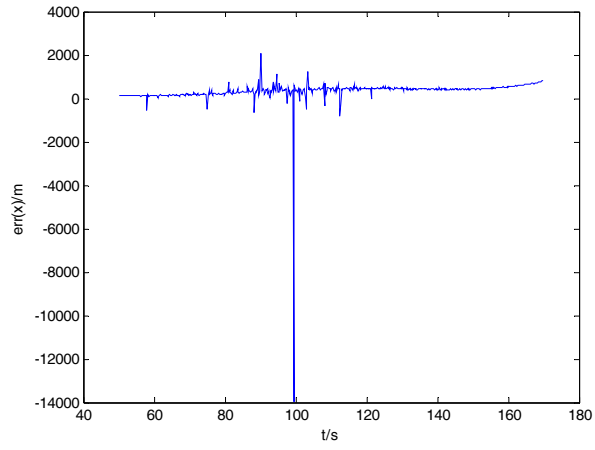
3.6 残差分析

对待定参数优化算法计算出的 N 个观测点的状态参数进行检验是误差分析的前提，验证方法是这里得到的 N 个观测点的状态参数与几何定位方法得到的 $(N-1)$ 个采样点的状态参数进行比对，最直观的方法是通过描点的方法观察两种方法下主动段轨道估计曲线是否吻合，下图将两种方法得到的数据在图上描点得：

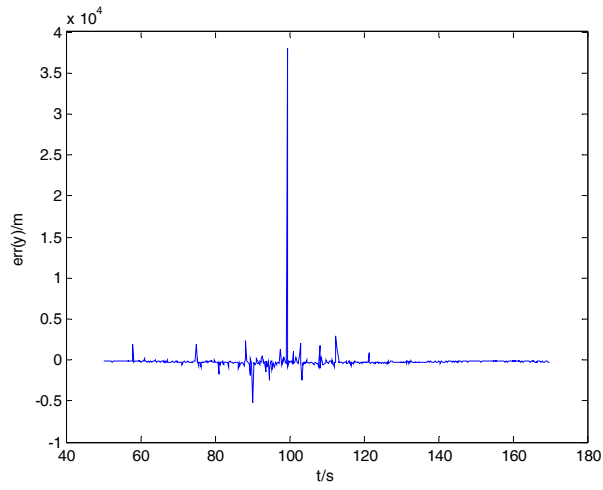


图十一 两种定位模型的结果比对

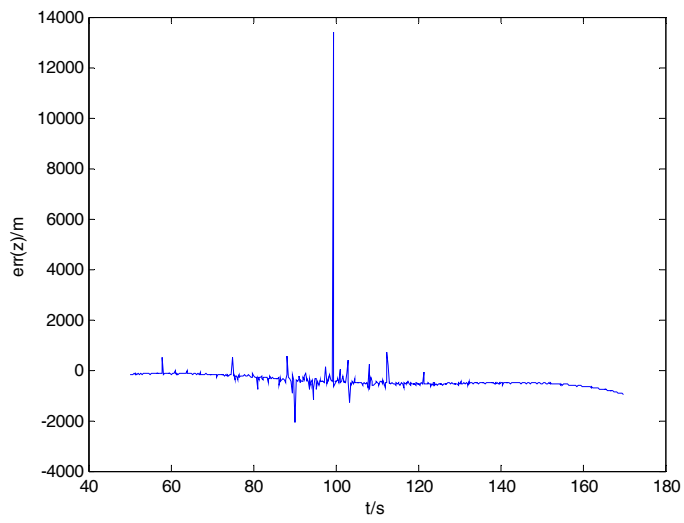
其中红色表示几何定位算法下 $(N-1)$ 个采样点的位置坐标，蓝色表示双星同步的优化模型下，通过状态转移矩阵得到的 N 个观测点的位置坐标。通过观察发现，双星同步的优化模型得到的 N 个采样点的状态参数描点得到曲线与几何定位算法的结果基本吻合。但是这只是通过直观图得到的粗略结论，为了使这个结果更加具有说服力，我们将两组样本点对应时刻的状态参数相减再绘制出误差图形，



图十二 $(x - x^*) - t$



图十三 $(y - y^*) - t$



图十四 $(z - z^*) - t$

经观察发现，得到的曲线基本在 x 轴附近上下波动，这就完全证实了我们的结论，所以说，双星同步优化模型得到的数据非常可信，贴近空间飞行器的实际运动特征。虽然空间飞行器的位置参数在大约 100.0s 处各轴向分量出现了非常显著波动，但这并不影响我们下定论。更进一步，计算出几何定位模型与双星插值同步后的计算结果在三个轴向上的最大允许误差率为 $\varpi \approx (1.24\%, 0.62\%, 1.14\%)$ ，选取其中最大的误差率 1.24% 作为误差阈值，因为只有极个别点的误差很大，所以这些点可以暂不考虑。

从误差来源出发，每个探测器各自按一定的速率扫描特定区域，由于观测周期的影响，探测器不一定正好能够在关机时刻获得测量，因此，在主动段 0 号空间飞行器是被 2 个探测卫星依次观察到的。根据主动段轨道估计的具体原理，可以得出影响主动段估计精度的主要因素包括：主动段的运动模型精度、参数估计方法精度、目标角度测量精度、探测器位置和观测数据等，下面对这些因素分别进行讨论分析。

角度测量误差对弹道估计影响很大，引起误差的因素很多，但主要来自三类误差：一是由观测平台姿态引起的误差；二是由探测器引起的误差（安装误差、成像变形等）；三是由目标位置测量引起的误差。

根据探测器对目标的角度测量原理，设 0 号空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量为 r_0 ，探测器在 BCS 坐标系下的位置矢量为 r_{c6} ，探测器经纬度分别为 θ 和 τ ，

三个姿态角为：偏航 ψ' 、滚动 ϕ' 和俯仰 θ' ，探测器指向与观测平台中轴夹角为 (α', β') ，则有如下关系：

$$(x_{0s}, y_{0s}, z_{0s})^T = T_2(\alpha', \beta') T_1(\psi', \phi', \phi') T_B^U (r_0 - r_{c6}) \quad (49)$$

其中， $T_1(\psi', \phi', \phi')$ 为星体系下的转动矩阵， $T_2(\alpha', \beta')$ 为星体坐标系到 UNE 坐标系的转换矩阵。

根据 (6) 式和 (49) 式，利用泰勒展开，可以得到观测平台姿态引起的角度测量误差为：

$$(\Delta p, \Delta a)^T = \tilde{y}(\psi', \phi', \phi') H^T (\Delta \psi', \Delta \phi', \Delta \phi')^T \quad (50)$$

探测器指向引起的角度测量误差为：

$$(\Delta p, \Delta a)^T = \tilde{y}(\alpha', \beta') H^T (\Delta \alpha', \Delta \beta')^T \quad (51)$$

目标位置测量引起的角度测量误差为：

$$(\Delta p, \Delta a)^T = \tilde{y}(x, y) H^T (\Delta x, \Delta y)^T \quad (52)$$

就主动段模型而言，由于 0 号空间飞行器受到的推理、控制力、阻力以及重力都不能精确地知道，因此 0 号空间飞行器的运动方程很难解析表示，通常采用假设或近似的方法将运动方程变成可以解析表示的形式，这必然带来近似误差。就探测器而言，由于观测系统存在的局限性，探测器与其位置就会出现误差，同样的思路，利用泰勒展开可以将位置误差化为角度误差。

在通过方法上对影响主动段估计精度的因素进行等效转化后,就可以利用最大似然估计对估计精度进行讨论。理论上只有状态变量传递函数及测量方程为线性函数时,最大似然估计才是严格无偏和有效的,其估计误差的方差可以达到 Cramer-Rao 下界^[4]。但是由于这一估计过程是一个复杂的非线性过程,最大似然估计则不能认为是有效估计,但在一般情况下,最大似然估计为一致估计并接近有效估计,所以在这种情况下计算 Cramer-Rao 下界是可行的,根据文献可以得出结论,主动段位置估计的 Cramer-Rao 下界 $\sigma_{r_0}^2$ 为:

$$\sigma_{r_0}^2 = \frac{\sigma_{LOS}^2}{\sum_{k=1}^M [a_k (\frac{\partial a_k}{\partial r_k})^2 + b_k (\frac{\partial e_k}{\partial r_k})^2]} \quad (53)$$

速度估计的 Cramer-Rao 下界 $\sigma_{r_0}'^2$ 为:

$$\sigma_{r_0}'^2 = \frac{\sigma_{LOS}^2}{\sum_{k=1}^M [c_k (\frac{\partial a_k}{\partial r_k})^2 + d_k (\frac{\partial e_k}{\partial r_k})^2] T_K^2} \quad (54)$$

式中 σ_{LOS}^2 为观测角度误差方差。

由此可见,主动段状态估计的 Cramer-Rao 下界与角度测量误差呈线性关系,而且随着测量数据量 M 的增加而减小。事实上,当提高观测数据率的同时,Cramer-Rao 下界降低,这个结论通过仿真实验验证是正确的。

四、 第三问的模型建立

4.1. 符号说明

(α_6, β_6)	0 号空间飞行器在 06 号观测卫星的 UEN 坐标系下的观测值
(α_6', β_6')	0 号空间飞行器在 06 号观卫星系统下做一次旋转的数值
(α_6'', β_6'')	06 号观测卫星在一次旋转和两次平移之后的数值
(α_9, β_9)	0 号空间飞行器在 09 号观测卫星的 UEN 坐标系下的观测值
(α_9', β_9')	09 号观测卫星在一次旋转后的数值
(α_9'', β_9'')	09 号观测卫星在一次旋转两次平移之后的数值
$(d_{\alpha_6}, d_{\beta_6}, d_{\theta_6})$	06 号观测卫星在三轴指向误差
$(d_{\alpha_9}, d_{\beta_9}, d_{\theta_9})$	09 号观测卫星在三轴指向误差
$r_{c6}(t) = (x_{c6}, y_{c6}, z_{c6})$	06 号观测卫星在基础坐标系下的坐标

$r_{c9}(t) = (x_{c9}, y_{c9}, z_{c9})$ 09 号观测卫星在基础坐标系下的坐标

4.2. 系统误差分析

根据题意可知，观测数据的系统误差包括多种来源，入卫星定位误差、指向机构误差、图像校准误差、传感器安装误差等等，在该题的框架内，我们假定只考虑与卫星平台相关的系统误差，经由适当的简化模型，各种系统误差最终可以折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验，原点位置误差影响较小，而三轴指向误差影响较大，对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度有很大的帮助，该题只考虑三轴指向误差。

4.3. 模型分析

由于两颗观测卫星的初始观测时间差 $\Delta t \approx 0.058s$ ，所以可以假设这是一个双星同步观测问题。现考虑借用两颗观测卫星得到的 600 个观测值，建立含有三轴指向误差的方程组，通过解方程组得到三轴指向误差 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 的值。延续这一思

路，双星同步观测的逐点定位问题就简化为空间飞行器在两个观测坐标系中的位置矢量所在直线的交点位置，由此可根据点斜法写出直线方程并联立方程组。同时，两颗卫星观测的真实值可以用三轴指向误差和观测值表示出来，将其通过坐标转换矩阵转换到目标在基础坐标系下的三维位置，把这个结果与前面的方程组结合起来就是一个含有 9 个未知数、四个方程的方程组，然后采用一些特殊的手段对新的方程和未知数进行处理，可以从中解出三轴指向误差 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

4.4. 模型建立

先以 06 号观测卫星为例，目标飞行器在观测坐标系下的位置矢量用无量纲值表示为 $(1, \alpha_6, \beta_6)$ ，由 x 轴向的值为常数 1 这一特殊性，固定旋转平移后 x 轴向的值。根据题意可知，不同卫星系统中的三轴指向误差相互没有关联，所以在 06 号卫星系统中的三轴指向误差与 09 号卫星系统的三轴指向误差是相互独立的。由于三轴指向误差的存在，在考虑旋转误差之后，目标飞行器的真实位置矢量应为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6' \\ \beta_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d_{\theta 6} & \sin d_{\theta 6} \\ 0 & -\sin d_{\theta 6} & \cos d_{\theta 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6 \\ \beta_6 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

再考虑平移误差得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6'' \\ \beta_6'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6' \\ \beta_6' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ d_{\alpha 6} \\ d_{\beta 6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d_{\theta 6} & \sin d_{\theta 6} \\ 0 & -\sin d_{\theta 6} & \cos d_{\theta 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6 \\ \beta_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_{\alpha 6} \\ d_{\beta 6} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

这是 0 号空间飞行器在 06 号卫星观测坐标系下的修正观测值，通过坐标转换矩阵将其转换到基础坐标系下为

$$T_U^B \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6'' \\ \beta_6'' \end{pmatrix} = T_U^B \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d_{\theta 6} & \sin d_{\theta 6} \\ 0 & -\sin d_{\theta 6} & \cos d_{\theta 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6 \\ \beta_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ d_{\alpha 6} \\ d_{\beta 6} \end{pmatrix} \right\} \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_6^* \\ \beta_6^* \end{pmatrix}, \quad (57)$$

同理可得，空间飞行器在 09 号卫星系统中的真实值，通过坐标转换矩阵将其转换到基础坐标系下为

$$T_U^B \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_9'' \\ \beta_9'' \end{pmatrix} = T_U^B \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d_{\theta 9} & \sin d_{\theta 9} \\ 0 & -\sin d_{\theta 9} & \cos d_{\theta 9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_9 \\ \beta_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ d_{\alpha 9} \\ d_{\beta 9} \end{pmatrix} \right\} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_9^* \\ \beta_9^* \end{pmatrix}, \quad (58)$$

上节指出，双星同步观测的逐点定位问题就简化为空间飞行器在两个观测坐标系中的位置矢量所在直线的交点位置，设空间飞行器在基础坐标系下的位置为 (X, Y, Z) ，于是双星同步观测逐点定位模型为：

$$\begin{cases} \frac{X - x_{c6}}{1} = \frac{Y - y_{c6}}{\alpha_6^*} = \frac{Z - z_{c6}}{\beta_6^*} \\ \frac{X - x_{c9}}{1} = \frac{Y - y_{c9}}{\alpha_9^*} = \frac{Z - z_{c9}}{\beta_9^*} \end{cases} \quad (59)$$

则(59)式是一个由 4 个方程构成的含有 9 个未知数 $(X, Y, Z, d_{\theta 6}, d_{\alpha 6}, d_{\beta 6},$

$d_{\theta 9}, d_{\alpha 9}, d_{\beta 9})$ 的方程组，这样的方程组是不能直接给出唯一解的。根据方程组的性质，这样的方程组的自由度为 4，而这 4 个自由变量是可以用其它 5 个基变量表示的。不妨令 $X, Y, Z, d_{\alpha 1}$ 可以用其它 5 个基变量表示。

将 2 个卫星 N 组的观测数据分别代入方程组(59)式，则可以得到 N 个 $X, Y, Z, d_{\alpha 6}$ 的用其它 5 个基变量表示的解。

由于 $d_{\alpha 6}, d_{\beta 6}, d_{\theta 6}, d_{\alpha 9}, d_{\beta 9}, d_{\theta 9}$ 都是一个很小的数，且都趋近一个常数，则可以利用最小二乘法对这些参数进行估计。基于此建立样本方差模型，目标函数为 $\min \text{VAR}(d_{\alpha 6})$ ，即让 $d_{\alpha 6}$ 的方差最小。

4.5. 第三问的模型求解

对上述模型进行求解，可直接得出 $d_{\beta 6}, d_{\theta 6}, d_{\alpha 9}, d_{\beta 9}, d_{\theta 9}$ 的数值，其值分别为：

然后对 $d_{\alpha 6}$ 求平均值。得出计算结果如下。

$$d_{\alpha 6} = 5.42771 \times 10^{-4},$$

$$d_{\beta 6} = 8.69641 \times 10^{-4},$$

$$d_{\theta 6} = 5.00781 \times 10^{-4},$$

$$d_{\alpha 9} = 7.53246 \times 10^{-4},$$

$$d_{\beta 9} = 2.51283 \times 10^{-4},$$

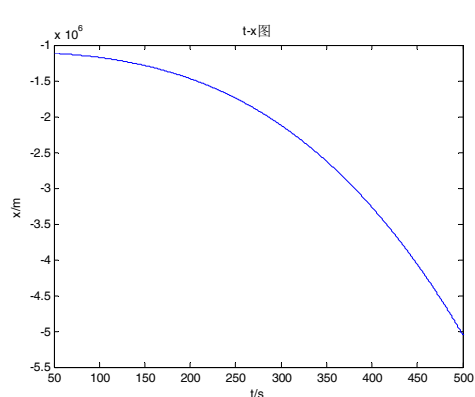
$$d_{\theta 9} = 3.56223 \times 10^{-4}$$

代入系统误差后重新计算第二问的数据。（注：为了便于显示数据，以下数

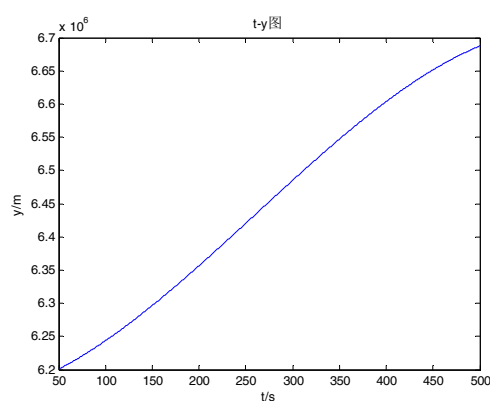
据都用科学记数法表示，以-1.11289E6 为例，-1.11289E6 表示 -1.11289×10^6)

时间 (s)	r_x (m)	r_y (m)	r_z (m)	\dot{r}_x (m/s)	\dot{r}_y (m/s)	\dot{r}_z (m/s)
50.0	-1.11289E6	6.20053E6	1.13410E6	-7.36704E2	7.52712E2	8.90665E2
60.0	-1.12098E6	6.20836E6	1.14391E6	-8.83595E2	8.12638E2	1.07386E3
70.0	-1.13061E6	6.21677E6	1.15563E6	-1.04404E3	8.68734E2	1.27272E3
80.0	-1.14191E6	6.22572E6	1.16942E6	-1.21803E3	9.21000E2	1.48725E3
90.0	-1.15502E6	6.23517E6	1.18543E6	-1.40558E3	9.69436E2	1.71746E3
100.0	-1.17007E6	6.24510E6	1.20382E6	-1.60667E3	1.01404E3	1.96334E3
110.0	-1.18720E6	6.25544E6	1.22475E6	-1.82132E3	1.05482E3	2.22489E3
120.0	-1.20654E6	6.26618E6	1.24837E6	-2.04952E3	1.09176E3	2.50211E3
130.0	-1.22823E6	6.27727E6	1.27484E6	-2.29127E3	1.12488E3	2.79500E3
140.0	-1.25241E6	6.28866E6	1.30432E6	-2.54657E3	1.15417E3	3.10356E3
150.0	-1.27921E6	6.30034E6	1.33697E6	-2.81543E3	1.17962E3	3.42780E3
160.0	-1.30876E6	6.31224E6	1.37293E6	-3.09783E3	1.20125E3	3.76770E3
170.0	-1.34121E6	6.32435E6	1.41237E6	-3.39379E3	1.21904E3	4.12328E3

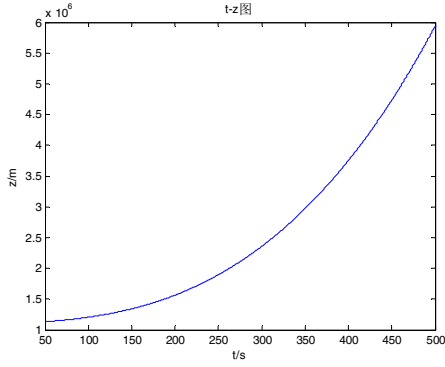
表三 0 号空间飞行器在各采样点的位置和速度参数



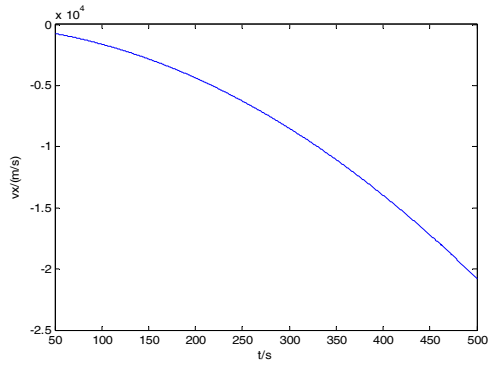
图十五 $t-x$



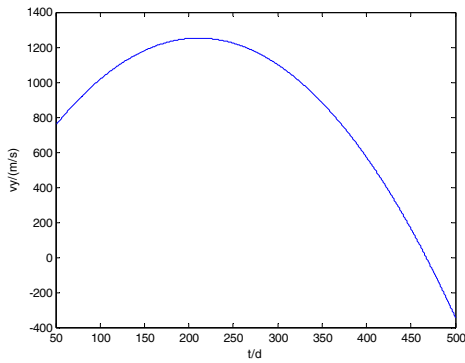
图十六 $t-y$



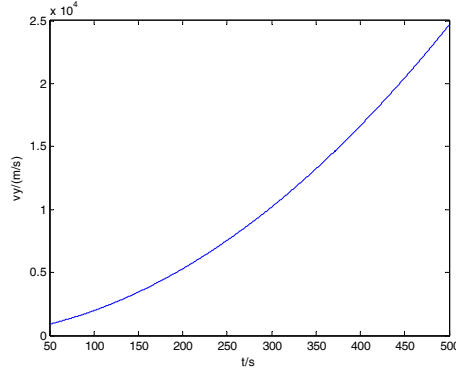
图十七 $t-z$



图十八 $t-vx$



图十九 $t-vy$



图二十 $t-vz$

五、第四问的模型建立

5.1 单星无源主动段射向估计方法

目前, 由于每颗探测卫星采用红外传感器, 只能获得 2 个角度信息, 对空间飞行器定位来说, 属于不完备观测。若要解算出导弹位置, 需 2 颗卫星同时探测来袭空间飞行器, 但实际生活中面临大部分单星探测的情况, 如何给出单星探测条件下的预警信息成为一个必须解决的问题。本文在不考虑弹道先验知识的情况下, 从导弹的动力学模型出发, 建立基于单星观测的较高精度射向估计算法^[8], 该方法具有较强的实用价值。

为了在单星探测预警情况下给出弹道空间飞行器的射向估计, 在不考虑弹道模板先验信息的情况下, 从导弹的动力学模型出发, 利用带有区间约束的 LMF 算法^[8], 建立了基于单星观测的弹道导弹射向估计算法。

单星无源探测属于不完备观测, 在不考虑弹道先验信息的情况下, 要进行空间飞行器射向的估计, 必须要对观测的弹道进行合理的动力学建模, 依靠动力学模型对观测的弹道进行约束, 在此基础上建立相应的基于空间飞行器动力学方程的迭代算法进行单星射向估计, 下面直接给出估计结果:

5.1.1 h_0 的估计区间

首发高度的变化范围为:

$$h_{\min} \leq \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2} - r_e \leq h_{\max} \quad (60)$$

式中, r_e 为地球半径; h_{\min} , h_{\max} 分别为首发高度的最小值和最大值。

5.1.2 (u_0, w_0) (记为 $\overrightarrow{U_0}$) 的估计区间

首发位置实际上还有很强的约束，位置积分初值 (x_d, y_d, z_d) (记 $\overrightarrow{p_d}$) 与卫星测量坐标系下的坐标 $\overrightarrow{p_c}$ 关系为

$$\overrightarrow{p_c} = \overrightarrow{M}(\overrightarrow{p_d} + \xi_m - S) \quad (61)$$

式中， \overrightarrow{S} 为观测卫星所处地心系下的位置， ξ_m 为积分弹道模型位置积分初值的模型误差， \overrightarrow{M} 为从地心系到卫星测量坐标系的旋转矩阵。故有：

$$\overrightarrow{U_0} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{p_c}) + \xi_s \quad (62)$$

式中， ξ_s 为观测误差。观测误差是迭加在位置坐标比值上的，为了方便描述，本文定义相对于某目标矢量的位置观测误差为

$$\xi_s^* = (z_c \xi_s \ 0)^T \quad (63)$$

将式(63)代入式(62)并进行整理，可得：

$$\overrightarrow{U_0} = \overrightarrow{T}[\overrightarrow{M}(\overrightarrow{p_d} - \overrightarrow{S}) + \overrightarrow{M}\xi_m + \xi_s^*] \quad (64)$$

实际上模型误差和位置观测误差的量级远小于目标矢量观测坐标系坐标的量级，即

$$|M(\overrightarrow{p_d} - \overrightarrow{S})| > H_{\min} \square E_{\max} > |M\xi_m + \xi_s^*| \quad (65)$$

式中， H_{\min} 为目标矢量第三分量绝对值的下界， E_{\max} 为模型误差与位置观测误差之和的模上界。

5.1.3 (v_0, θ_0) 的估计区间的估计区间。

首先，速度的绝对值大小是有范围的，其次速度倾角也是有约束的。由于要表示的是积分初值，在导弹发射的早期，导弹的飞行高度与速度的范围有限，根据经验可以给定先验的速度大小以及速度倾角的范围，即

$$\begin{cases} v_{\min} \leq v_0 \leq v_{\max} \\ \theta_{\min} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (66)$$

六、 模型的评价与推广

本文的参数待定优化模型的计算结果能较好地模拟空间飞行器的运动学特征，但不足之处这篇文章是在忽略了重力和空气阻力的前提下完成的，所以与实际情况相比稍有误差。从长远来看，卫星无源探测的空间飞行器主动段轨道估计结论，对于维护国家安全具有重要的理论意义。

七、 参考文献

- [1]张涛, 安玮, 周一宇. 主动段弹道定位与跟踪算法[J]. 弹道学报, 2005, 17(4).
- [2]赵砚, 程洪玮, 易东云, 张倩. 基于线性最小二乘方法的主动段目标初值估计[J]. 电子与信息学报. 2010, 32(12).
- [3]李盾. 空间预警系统对目标的定位与预报[D]. 长沙: 国防科技大学, 2001.
- [4]王雪锋, 杨博, 安玮, 张涛. 弹道主动段估计精度分析[J]. 电子对抗技术. 2005, 20.
- [5]Danis N J. Space-based tactical trajectory estimation with angle-only measurements[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(2):412-424.
- [6]Gokhan H I. Sensor fusion for boost phase interception of ballistic missiles [D]. [MA. dissertation], Naval Postgraduate School, Monterey, California, September 2004.
- [7]申镇, 强胜, 张寅生, 易东云. 单星无源探测弹道导弹射向估计新方法[J]. 宇航学报, 2011, 32(7).
- [8]申镇, 强胜, 易东云. 基于运动方程的单星无源主动段射向估计方法[J]. 导弹学报. 2010, 22(1).