

## 第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目

### 基于卫星无源探测的空间飞行器 主动段轨道估计与误差分析

摘 要：

论文研究了基于卫星无源探测的空间飞行器主动段的轨道估计与误差分析问题。针对这一特定的非线性滤波问题，论文主要采用探索性算法思想进行最优解的全局搜索，得到了较为理想的状态估计值和残差结果。

针对问题一，采用龙格-库塔法，利用 MATLAB 编程实现了常微分方程数值解，得到各时刻卫星的三维位置坐标。

针对问题二，首先基于问题一各卫星不同时刻的计算结果，采用三次样条插值函数完成对观测数据的时间对齐；然后就双星对目标交叉定位观测数据的空间结构进行分析，按照逐点交汇定位思路建立一个超定线性方程组，求该超定方程组的最小二乘解，完成 06 与 09 号卫星对 0 号空间飞行器的逐点定位，并对结果数据的异常值进行了分析。通过选取适当的  $\vec{v}_r(t)$  和  $m(t)$  的模型形式，将空间飞行器的运动方程转化为差分形式后，利用多项式拟合得到  $\vec{v}_r(t)$  和  $m(t)$  的参数。最后以估计残差最小为优化目标，利用遗传算法求出最优的初值，从而求出 0 号空间飞行器的理论三维位置坐标和速度，与逐点交汇定位结果比较，得到估计残差（标准差）为 28.9311。

针对问题三，在考虑观测卫星的系统误差时，利用双星多点观测数据联立求解目标位置参数和系统误差参数，论文采用启发式搜索算法进行系统误差和轨道估计，分别计算出 6 号卫星的三轴指向误差为  $-4.845 \times 10^{-4}$ ， $-7.872 \times 10^{-4}$ ， $-2.394 \times 10^{-4}$ ，9 号观测卫星的三轴指向误差分别  $2.019 \times 10^{-4}$   $-3.917 \times 10^{-4}$ ， $1.729 \times 10^{-4}$ ；利用修正系统误差后的观测数据再次对模型参数进行辨识和轨道参数计算，得到估计残差 25.0951。

针对问题四，基于单颗卫星每时刻提供的两个观测数据  $\alpha_k$ 、 $\beta_k$ ，在消除系统误差的前提下，假定目标运动方程是三次样条，通过单星连续 8 个点的测量信息，通过 16 个联立方程的求解，完成模型参数的辨识即对轨道参数的确立。在设计算法时，仍采用具有启发式的遗传算法完成最优解的寻优。最后对多星观测数据进行信息融合实现目标状态估计和系统误差解算的思想进行了讨论。

最后，论文设计了专门的模型验证环节以对本文构建的模型和提出的算法的合理性、有效性进行检验。设定一组空间飞行器的初始值以及  $\vec{v}_r(t)$  和  $m(t)$  参数，计算出目标飞行状态的理论真值，基于题干中所提供的卫星位置参数，可以得到卫星在采样点与目标的空间位置关系，计算出观察值的理论真值，再叠加上白噪声和系统误差，得到了一组观测数据。基于该组观测数据再利用本文所建模型和算法完成目标的状态估计，与理论真值进行比较以验证模型和算法的有效性。

**关键词：**坐标系转换，逐点交汇定位，轨道估计，遗传算法，残差估计，误差分析，搜索算法，模型验证

## 目录

一、问题重述.....	5 -
二、问题分析.....	6 -
2.1 概述.....	6 -
2.2 问题一的分析 .....	6 -
2.3 问题二的分析 .....	6 -
2.4 问题三的分析 .....	6 -
2.5 问题四的分析 .....	7 -
三、模型假设.....	7 -
四、符号说明.....	8 -
五、模型的建立与求解 .....	9 -
5.1 空间飞行器主动段运动方程的推导.....	9 -
5.2 问题一的模型和求解.....	10 -
5.3 问题二的模型和求解.....	11 -
5.3.1 基于三次样条插值的时间对齐.....	11 -
5.3.2 基础坐标系与观测坐标系的转换.....	11 -
5.3.3 双星对目标交叉观测时空间位置结构分析 .....	13 -
5.3.4 立体空间的逐点交汇定位模型.....	14 -
5.3.5 空间飞行器 $\vec{V}_r(t)$ 和 $m(t)$ 参数辨识模型 .....	16 -
5.3.6 基于遗传算法的空间飞行器简化运动方程初值求解 .....	19 -
5.3.7 残差估计 .....	20 -
5.3.8 空间飞行器位置和速度解算结果及误差分析.....	21 -
5.4 问题三的模型和求解.....	22 -
5.4.1 逐点交汇定位估计系统误差的不可行性 .....	22 -
5.4.2 考虑系统误差时目标状态估计思路分析 .....	22 -
5.4.3 求解系统误差的爬山算法搜索模型.....	23 -
5.4.4 考虑系统误差后模型求解 .....	26 -
5.5 问题四的模型和求解.....	28 -
5.5.1 单颗观测卫星对空间飞行器轨道估计模型 .....	29 -
5.5.2 多颗观测卫星观测多个空间飞行器的联合系统误差估计模型 .....	29 -
六、模型验证及模型评价 .....	30 -
6.1 模型验证.....	30 -
6.2 模型优点.....	33 -
6.3 模型缺点.....	34 -
七、参考文献.....	34 -

## 一、问题重述

利用观测卫星对具有敌意的空间飞行器实施监控和作出快速反应对于维护国家安全具有重要的战略意义。

空间飞行器的主动段又可细分为若干子段：垂直上升段，程序拐弯段和重力斜飞段。重力斜飞段的后程则靠第二、第三级火箭相继完成。在给定基础坐标系下的位置和速度初值情况下，可以利用常微分方程组数值解方法计算空间飞行器的运动轨迹。

观测数据不可避免地带有各种误差，观测误差包括随机误差和系统误差。本题假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声，关于系统误差本题只考虑三轴指向误差，三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差。

本题以中低轨近圆轨道卫星为观测星座对假想的空间飞行器进行仿真观测，生成仿真观测数据，要求利用仿真观测数据，对假想空间飞行器的轨道参数进行估计。

在仅考虑随机误差的条件下研究下列问题：

问题一：观测卫星在任意时刻的位置计算是估计的前提，根据和观测卫星的简化运动方程计算 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。

问题二：在本题给定的仿真数据下，06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器形成了立体交叠观测，请结合立体几何知识按照逐点交汇定位的思路，给出 0 号空间飞行器的轨道估计，并给出估计残差。同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置和三个速度曲线示意图。

在同时考虑系统误差的条件下研究下列问题：

问题三：若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差，利用上述的逐点交汇方法能否同时对系统误差进行估计？若不能，是否还有其他的思路能够同时估计系统误差与轨道？给出解决方案与估计结果。并分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果，共六个数值，分别是两颗卫星的  $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

问题四：对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计，并进一步考虑在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下能否联合进行系统误差估计？

## 二、问题分析

### 2.1 概述

这是一个运动轨道估计和误差分析问题，属典型的非线性滤波问题。在考虑随机误差的条件下，根据观测卫星在 0 时刻卫星在基础坐标系下的位置和速度、卫星对飞行器的仿真观测数据、空间飞行器在基础坐标系下主动段的简化运动方程以及观测卫星的简化运动方程，计算观测卫星在不同时刻的位置，并利用逐点交汇定位的思想，做空间飞行器的轨道估计以及估计残差，同时作出空间飞行器的位置和速度示意图。在同时考虑系统误差的条件下，对系统误差进行估计并计算空间飞行器轨道，并考虑单颗卫星对空间飞行器进行轨道估计，以及多颗观测卫星观测多个空间飞行器联合进行系统误差估计的情况。

### 2.2 问题一的分析

观测卫星在任意时刻的位置计算是目标状态估计的前提。已知 28 颗观测卫星在 0 时刻时卫星在基础坐标系下的位置和速度以及观测卫星的简化运动方程，求卫星在不同时刻的三维位置。问题的关键是选取合适的数值解算方法，该模型为接下来的逐点交汇定位提供观测卫星在不同时刻的位置坐标。

### 2.3 问题二的分析

利用问题一的模型可求解 06 号和 09 号在不同时刻的三维位置，仅考虑随机误差的条件下，在立体空间利用逐点交汇定位的思想可以利用空间异面直线的关系得到合理的交点估计值；已知 06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器仿真观测数据信息，求出 0 号飞行器在不同时刻的三维位置坐标，选取适当的  $m(t)$  和  $\vec{v}_r(t)$  的表示模型，求解空间飞行器在基础坐标系下主动段的简化运动方程中的参数，寻找合适的初值求解该方程的数值解，并和观测卫星对空间飞行器的位置和速度定位做估计残差。并按题目要求画出规范的 0 号空间飞行器的三个位置和三个速度曲线示意图。

### 2.4 问题三的分析

在同时考虑系统误差的条件下，由于 6 号和 9 号两颗观测卫星可能带有一

定得系统误差，而直接用观测数据对空间飞行器进行定位和轨道估计将引进观测数据的系统误差。对系统误差进行估计并消除观测数据的系统误差，这样对空间飞行器的定位和轨道估计精度将有所提高。要同时对系统误差进行估计以及空间飞行器轨道的估计，此时参数数量大大增加，而利用逐点交汇定位模型能得到的方程数小于参数个数，所以不能同时对系统误差和轨道进行估计。由于系统误差是常量，对各点的测量结果的影响会存在一致性或规律性，于是可以利用多点观测值进行联立方程，实现目标的状态估计。模型上可以转化为一个非线性的优化模型，但所含参数个数较多，于是考虑采用启发式搜索算法，通过选取合适的启发式信息，进行系统误差和轨道估计，得出 6 号和 9 号观测卫星的三轴指向误差和 0 号空间飞行器的轨道估计。

## 2.5 问题四的分析

对只有 9 号观测卫星单星观测的 1 号空间飞行器进行轨道估计。由于单颗卫星观测空间飞行器只能得到每个时刻飞行器所在的方向，所以不能对空间飞行器进行位置定位，但是空间飞行器的运动满足其在基础坐标系下的主动段的简化运动方程，当不知道初值时，将初值视为待估参数，并根据相关文献的观点，将目标的运动模型视为已知的，比如采用 3 次样条函数描述目标物的运动轨迹，于是用 12 个参数就可以表述目标的运动状态，同时利用问题三解出的卫星的系统误差，仍建立一个以均方误差和最小为优化目标的非线性优化模型，采用与求解问题三相似的算法估计出参数值，完成轨道运动轨迹确定。

当有多颗观测卫星观测多个空间飞行器时，可以建立相应的信息融合模型来完成目标的状态估计和系统误差估计。

## 三、模型假设

- 1、空间飞行器的瞬时质量  $m(t)$  可认为是线性单调递减的非负函数；
- 2、燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度  $\vec{v}_r(t)$  可认为大小是常量，方向与飞行器的速度方向相反；
- 3、观测数据的随机误差为白噪声；
- 4、观测数据的系统误差不考虑原点位置误差，只考虑三轴指向误差；
- 5、三轴指向误差都是常值小量；
- 6、随机误差远小于系统误差。

#### 四、 符号说明

符号	符号说明
$O_c - X_c Y_c Z_c$	基础坐标系
$O_s - X_s Y_s Z_s$	随卫星运动的观测坐标系
$t$	时间
$\vec{F}_e$	飞行器所受的外力加速度之和
$\vec{F}_T$	火箭产生的推力加速度
$m(t)$	瞬时质量
$\dot{m}(t)$	质量变化率
$\vec{r}(t)$	空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量
$\ddot{\vec{r}}(t)$	位置矢量 $\vec{r}(t)$ 对时间 $t$ 的二阶导数，即加速度地球引力常数
$G_m$	地球引力常数，取 $G_m = 3.986005 \times 10^{14} m^3 / s^2$
$\vec{v}_r(t)$	燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度
$x_s, y_s, z_s$	空间飞行器在观测坐标系中的坐标
$\alpha$	观测卫星对于空间飞行器的观测数据的第一观测量，为 $\frac{y_s}{x_s}$
$\beta$	观测卫星对于空间飞行器的观测数据的第二观测量，为 $\frac{z_s}{x_s}$
$d_\alpha$	第一观测量 $\alpha$ 的平移量，为常值小量
$d_\beta$	第二观测量 $\beta$ 的平移量，为常值小量
$d_\theta$	观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量
$B_s$	观测坐标系 $\overrightarrow{O_s X_s}$ 与其在基础坐标系 $X_c O_c Y_c$ 平面投影的夹角
$L_s$	观测坐标系 $\overrightarrow{O_s X_s}$ 在基础坐标系 $X_c O_c Y_c$ 平面投影与 $\overrightarrow{O_c X_c}$ 夹角

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 空间飞行器主动段运动方程的推导

在基础坐标系下，空间飞行器在主动段服从变质量质点的基本定理<sup>[1]</sup>：

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{V}_r \frac{dm}{dt} \quad (5.1)$$

式中：  $m$  为空间飞行器质量；

$\vec{V}$  为空间飞行器速度；

$\vec{F}$  为空间飞行器所受到的外力；

$\vec{V}_r$  为燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度。

变质量质点的基本质点所具有的惯性力等于外作用力及其流出质点质量对时间的变化率与流出质点相对速度乘积的矢量和。该定理又称为变质量的动量定理，(5.1) 式称为密歇尔斯基方程。

由于空间飞行器距地面高度大，空气稀薄，受空气阻力极小，所受外力主要是地球对其的万有引力：

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (5.2)$$

式中：  $G$  为万有引力常数，  $G = 6.67259 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ ；

$M$  为地球质量，  $M = 5.976 \times 10^{24} \text{kg}$ 。

所以地球引力常数  $G_m$  为

$$G_m = GM = 3.986005 \times 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \quad (5.3)$$

将 (5.3)、(5.2) 代入 (5.1) 得：

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{G_m m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{V}_r \frac{dm}{dt} \quad (5.4)$$

两边同时除以  $m$ ，即得到下式：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (5.5)$$

即为空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程。



## 5.2 问题一的模型和求解

观测卫星在惯性飞行段所受空气阻力极小，依靠末级火箭关机前获得的速度在椭圆轨道上作无动力惯性飞行。此时观测卫星的火箭不工作，所以火箭产生的加速度为 0，即  $\vec{F}_T = 0$ ，观测卫星的简化运动方程：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (5.6)$$

令  $\vec{r}(t) = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}$  代入 (5.6) 得：

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y_c}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z_c}{dt^2} \vec{k} = -\frac{G_m}{(x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)^{\frac{3}{2}}} (x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}) \quad (5.7)$$

利用龙格-库塔法的思想，避免在算式中直接用到微商，实质上是间接使用泰勒公式，使其按泰勒展开后与初值问题的解的泰勒展开式比较，有尽可能多的项完全相同以确定其中的参数，从而保证算式有较高的精度。利用(5.8)的四阶经典的龙格—库塔公式来提高微分方程数值解的精度。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + h K_3) \end{cases} \quad (5.8)$$

利用 MATLAB 求常微分方程初值问题数值解<sup>[2]</sup>。表 5.1 列出了求得的几个时刻的卫星位置。程序见附录。

表 5.1 9 号观测卫星在 6 个时刻的三维位置

时刻 $t$ : /s	位置坐标 $x_c$ : m	位置坐标 $y_c$ : m	位置坐标 $z_c$ : m
0	2.04392E+06	8.18650E+06	4.34346E+06
50	1.77381E+06	8.16138E+06	4.51670E+06
100	1.50163E+06	8.12676E+06	4.68468E+06
150	1.22770E+06	8.08270E+06	4.84722E+06
200	9.52349E+05	8.02925E+06	5.00413E+06
250	6.75894E+05	7.96650E+06	5.15524E+06

将 9 号观测卫星的轨道如图 5.1 所示，图中 “\*” 是 9 号观测卫星 0 时刻位置。

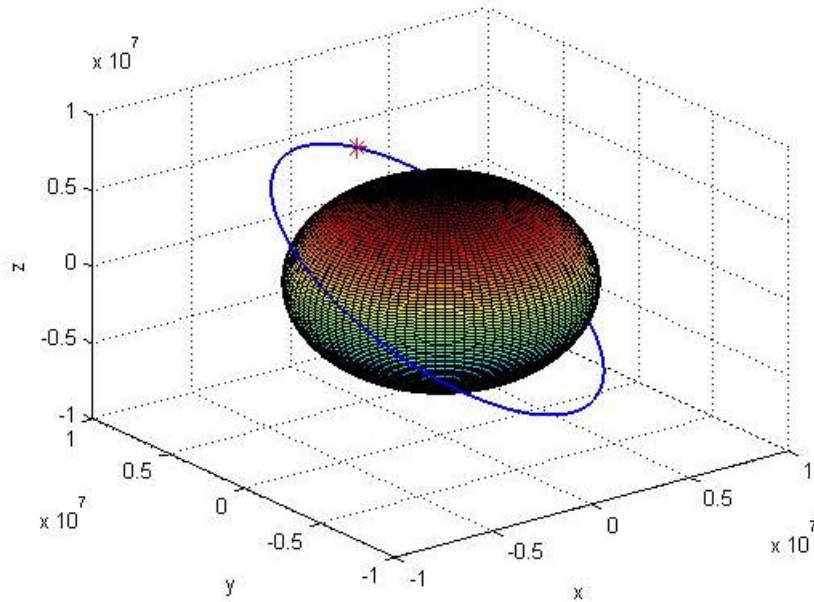


图 5.1 9 号观测卫星轨道图

## 5.3 问题二的模型和求解

### 5.3.1 基于三次样条插值的时间对齐

6 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测时刻  $t_6$  从 50.1754s 开始，每隔 0.2s 观测一次，最后一组数据对应的时刻是 169.9754s。9 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测时刻  $t_9$  从 50.1812s 开始，每隔 0.2s 观测一次，最后一组数据对应的时刻是 169.9812s。

由于观测时刻不同，需要将观测时刻进行对齐，为了充分利用观测数据，减小误差，分别对 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器观测数据在  $t(i) = \frac{t_6(i) + t_9(i)}{2}$  时刻进行三次样条插值。得到 6 号和 9 号观测卫星在观测时刻  $t$  从 50.1783s 开始，每隔 0.2s 观测一次，最后一组数据对应的时刻是 169.9783s，共 600 组三次样条插值数据。

利用问题一的模型可求出 6 号和 9 号观测卫星在每个对齐时间的三维位置坐标。

### 5.3.2 基础坐标系与观测坐标系的转换

由基础坐标系转换到观测坐标系经过三个步骤<sup>[3]</sup>：

Step 1: 将  $O_c - X_c Y_c Z_c$  坐标系绕  $O_c Z_c$  轴在  $X_c O_c Y_c$  平面从  $O_c Z_c$  轴正方向看逆时针



$$\begin{aligned} x'_c &= |O'_c P| \cos \varphi = |O'_c P| \cos(\theta - Ls) = |O'_c P| \cos \theta \cos Ls + |O'_c P| \sin \theta \sin Ls \\ &= x_c \cos Ls + y_c \sin Ls \end{aligned} \quad (5.9)$$

同理：

$$y'_c = -x_c \sin Ls + y_c \cos Ls \quad (5.10)$$

所以，将  $O_c - X_c Y_c Z_c$  坐标系转换到  $O'_c - X'_c Y'_c Z'_c$  坐标系的转换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Ls & \sin Ls & 0 \\ -\sin Ls & \cos Ls & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

同理，将  $O'_c - X'_c Y'_c Z'_c$  坐标系转换到  $O''_c - X''_c Y''_c Z''_c$  坐标系的转换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} x''_c \\ y''_c \\ z''_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Bs & 0 & \sin Bs \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin Bs & 0 & \cos Bs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

将  $O''_c - X''_c Y''_c Z''_c$  坐标系转换到  $O_s - X_s Y_s Z_s$  坐标系的转换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_c \\ y''_c \\ z''_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

上式中  $R = |\overrightarrow{O_c O_s}|$ ，即地心与卫星的距离。将式(5.11)、(5.12)代入到(5.13)，得到基础坐标系到观测坐标系的转换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Bs & 0 & \sin Bs \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin Bs & 0 & \cos Bs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos Ls & \sin Ls & 0 \\ -\sin Ls & \cos Ls & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

### 5.3.3 双星对目标交叉观测时空位置结构分析

根据每一个时刻 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据  $\alpha_6$ ,  $\beta_6$  和  $\alpha_9$ ,  $\beta_9$  以及其位置坐标，分别得出 0 号空间飞行器位于以观测卫星为起点的一个方向上但不确定其距离。当测量数据不存在误差时，6 号和 9 号观测卫星得出的 0 号空间飞行器的方向将交于一点，该点坐标即为该时刻 0 号空间飞行器的位置坐标。

当测量数据存在误差时，6 号和 9 号观测卫星得出的 0 号空间飞行器的方向将不相交，为减小系统误差对 0 号空间飞行器位置确认带来误差，取两条异面直线的公垂线的中点作为该时刻 0 号空间飞行器的位置坐标，如图 5.4 所示。

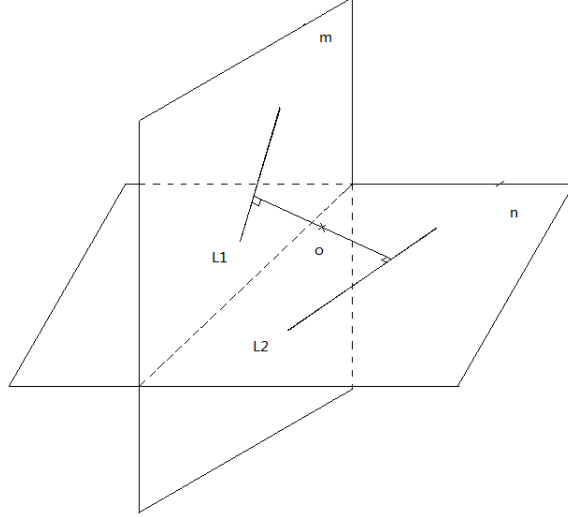


图 5.4 空间飞行器位置坐标的确定示意图

#### 5.3.4 立体空间的逐点交汇定位模型

利用问题一的模型求出 6 号和 9 号观测卫星在对齐时刻的三维位置坐标，由其在基础坐标系的三维位置坐标可以求出每个时刻观测卫星所对应的角度  $L_s$  和  $B_s$ 。

$$\begin{cases} L_{s6} = \arctan \frac{y_{c6}}{x_{c6}} + \pi \\ B_{s6} = \arctan \frac{z_{c6}}{\sqrt{x_{c6}^2 + y_{c6}^2}} \\ L_{s9} = \arctan \frac{y_{c9}}{x_{c9}} \\ B_{s9} = \arctan \frac{z_{c9}}{\sqrt{x_{c9}^2 + y_{c9}^2}} \end{cases} \quad (5.15)$$

将 6 号和 9 号观测卫星的三维位置坐标代入 (5.15) 式可以得到每个时刻的角度  $L_s$  和  $B_s$ ，此时  $R = |O_c O_s| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$ 。

将得到的  $L_s$ 、 $B_s$ 、 $R$  代入到 (5.14) 式可以得到空间飞行器在观测坐标系中的坐标  $x_s, y_s, z_s$ ：

$$\begin{cases} x_s = x_c \cos Bs \cdot \cos Ls + y_c \cos Bs \cdot \sin Ls + z_c \sin Bs - R \\ y_s = -x_c \sin Ls + y_c \cos Ls \\ z_s = -x_c \sin Bs \cdot \cos Ls - y_c \sin Bs \cdot \sin Ls + z_c \cos Bs \end{cases} \quad (5.16)$$

又因为:

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s} \quad (5.17)$$

将 6 号和 9 号对 0 号空间飞行器的观测数据时间对齐后的  $\alpha, \beta$  值和 (5.16) 式中的坐标  $x_s, y_s, z_s$  代入到 (5.17) 式, 可得到任意时刻的 4 个方程:

$$\begin{cases} \alpha_6 = \frac{-x_c \sin Ls_6 + y_c \cos Ls_6}{x_c \cos Bs_6 \cdot \cos Ls_6 + y_c \cos Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \sin Bs_6 - R_6} \\ \beta_6 = \frac{-x_c \sin Bs_6 \cdot \cos Ls_6 - y_c \sin Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \cos Bs_6}{x_c \cos Bs_6 \cdot \cos Ls_6 + y_c \cos Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \sin Bs_6 - R_6} \\ \alpha_9 = \frac{-x_c \sin Ls_9 + y_c \cos Ls_9}{x_c \cos Bs_9 \cdot \cos Ls_9 + y_c \cos Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \sin Bs_9 - R_9} \\ \beta_9 = \frac{-x_c \sin Bs_9 \cdot \cos Ls_9 - y_c \sin Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \cos Bs_9}{x_c \cos Bs_9 \cdot \cos Ls_9 + y_c \cos Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \sin Bs_9 - R_9} \end{cases} \quad (5.18)$$

在式 (5.18) 中  $(x_c, y_c, z_c)$  是 0 号空间飞行器在基础坐标系的三维位置坐标,

上式是一个 3 个未知数, 4 个方程的超定方程, 整理可得一阶线性方程组的矩阵表示形式:

$$\begin{bmatrix} \alpha_6 \cos Bs_6 \cdot \cos Ls_6 + \sin Ls_6 & \alpha_6 \cos Bs_6 \cdot \sin Ls_6 - \cos Ls_6 & \alpha_6 \sin Bs_6 \\ (\beta_6 \cos Bs_6 + \sin Bs_6) \cos Ls_6 & (\beta_6 \cos Bs_6 + \sin Bs_6) \sin Ls_6 & \beta_6 \sin Bs_6 - \cos Bs_6 \\ \alpha_9 \cos Bs_9 \cdot \cos Ls_9 + \sin Ls_9 & \alpha_9 \cos Bs_9 \cdot \sin Ls_9 - \cos Ls_9 & \alpha_9 \sin Bs_9 \\ (\beta_9 \cos Bs_9 + \sin Bs_9) \cos Ls_9 & (\beta_9 \cos Bs_9 + \sin Bs_9) \sin Ls_9 & \beta_9 \sin Bs_9 - \cos Bs_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_6 R_6 \\ \beta_6 R_6 \\ \alpha_9 R_9 \\ \beta_9 R_9 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

将数据代入 (5.19) 式, 利用 MATLAB 求解该超定方程组的最小二乘解, 即可得每一对齐时刻 0 号空间飞行器的三维位置定位值。程序见附录。

表 5.2 0 号空间飞行器在三维位置定位

时刻 $t$ : s	位置坐标 $x_c$ : m	位置坐标 $y_c$ : m	位置坐标 $z_c$ : m
50.1783	-1.11216E+06	6.20047E+06	1.13324E+06
60.1783	-1.12074E+06	6.20806E+06	1.14349E+06
70.1783	-1.13094E+06	6.21619E+06	1.15565E+06
80.1783	-1.14285E+06	6.22481E+06	1.16990E+06
90.1783	-1.15658E+06	6.23386E+06	1.18635E+06
100.1783	-1.17228E+06	6.24337E+06	1.20522E+06
110.1783	-1.19006E+06	6.25321E+06	1.22656E+06
120.1783	-1.21004E+06	6.26347E+06	1.25064E+06
130.1783	-1.23241E+06	6.27403E+06	1.27758E+06
140.1783	-1.25729E+06	6.28493E+06	1.30761E+06
150.1783	-1.28490E+06	6.29617E+06	1.34096E+06
160.1783	-1.31543E+06	6.30774E+06	1.37786E+06

立体空间的逐点交汇定位模型求解步骤框图如图 5.5 所示。



图 5.5 立体空间的逐点交汇定位模型求解示意图

### 5.3.5 空间飞行器 $\vec{V}_r(t)$ 和 $m(t)$ 参数辨识模型

空间飞行器的 $m(t)$ 一般而言应为严格单调递减的非负函数， $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近或相同，其大小一般较为稳定。

假设空间飞行器的瞬时质量满足下列方程：

$$m(t) = a_0 - a_1 t \quad (5.20)$$

空间飞行器的  $\vec{v}_r(t)$  满足下列方程：

$$\vec{v}_r(t) = b \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (5.21)$$

将式 (5.20) 和 (5.21) 代入到空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程 (5.5) 中，得：

$$\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) = -\frac{a_1 b}{a_0 - a_1 t} \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{1}{\frac{1}{b}t - \frac{a_0}{a_1 b}} \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (5.22)$$

令  $c_1 = \frac{1}{b}$ ,  $c_2 = -\frac{a_0}{a_1 b}$ ，则上式可表示为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) = \frac{1}{c_1 t - c_2} \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (5.23)$$

利用立体空间的逐点交汇定位模型估计出了空间飞行器在任意时刻的三维位置  $\vec{r}(t)$ ，由于得到的三维位置  $\vec{r}(t)$  毛刺较多，采用平均滤波的方法对  $\vec{r}(t)$  进行滤波：

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{r}(t-2i) + \vec{r}(t-i) + \vec{r}(t) + \vec{r}(t+i) + \vec{r}(t+2i)}{5} \quad (5.24)$$

采用  $\vec{r}(t)$  差分代替微分表示  $\dot{\vec{r}}(t)$  如下：

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (5.25)$$

对差分计算得到的  $\dot{\vec{r}}(t)$  进行滤波：

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t-2i) + \dot{\vec{r}}(t-i) + \dot{\vec{r}}(t) + \dot{\vec{r}}(t+i) + \dot{\vec{r}}(t+2i)}{5} \quad (5.26)$$

采用  $\dot{\vec{r}}(t)$  差分代替微分表示  $\ddot{\vec{r}}(t)$  如下：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t+\Delta t) - \dot{\vec{r}}(t)}{\Delta t} \quad (5.27)$$

对差分计算得到的  $\ddot{\vec{r}}(t)$  进行滤波：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\ddot{\vec{r}}(t-2i) + \ddot{\vec{r}}(t-i) + \ddot{\vec{r}}(t) + \ddot{\vec{r}}(t+i) + \ddot{\vec{r}}(t+2i)}{5} \quad (5.28)$$

对于平滑处理后的  $\vec{r}(t)$ ， $\dot{\vec{r}}(t)$ ， $\ddot{\vec{r}}(t)$  代入到式 (5.23)，化简可得：



$$c_1 t - c_2 = \frac{\left| \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \right|}{\left| \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \right|} \quad (5.29)$$

对于等式右边是一组常数，对于不同时刻 $c_1$ ， $c_2$ 为常量。

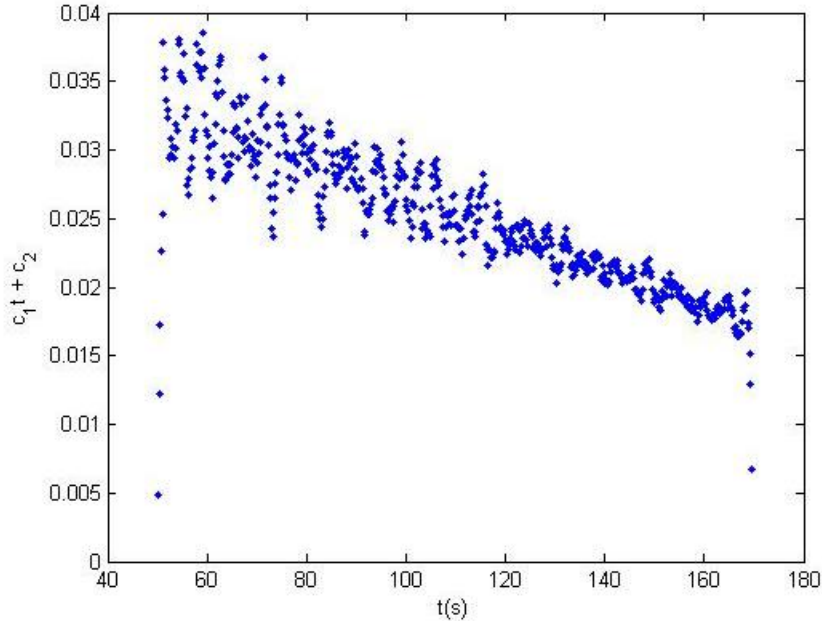


图 5.7  $c_1 t - c_2$  随时间  $t$  的曲线图

从上图可以看出，数据的前几个数据和最后几个数据误差较大，可以先去掉这些坏值，再利用多项式拟合得到了参数 $c_1$ ， $c_2$ 分别为 $-1.34198 \times 10^{-3}$ ， $4.00959 \times 10^{-2}$ 。 $b = \frac{1}{c_1} = -7451.9$ ，表示燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度大小为 7451.9m/s，方向与火箭速度方向相反。 $-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{bc_2} = \frac{c_1}{c_2} = 3.347 \times 10^{-3}$ ，表示火箭燃料以飞行器初始质量 $3.347 \times 10^{-3}$ 倍每秒的速度消耗。

空间飞行器空间飞行器 $\vec{V}_r(t)$ 和 $m(t)$ 参数辨识模型的示意图如下：

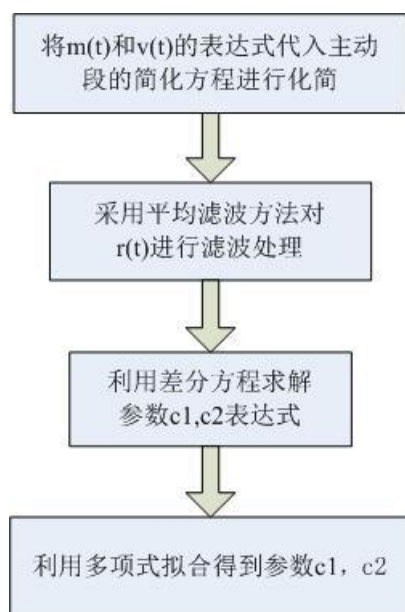


图 5.6 微分方程模型参数辨识算法框图

### 5.3.6 基于遗传算法的空间飞行器简化运动方程初值求解

利用龙格-库塔法的思想，进行线性常微分方程初值问题数值解需要已知初值条件，所以需要找到最优的初始值  $\vec{r}(t_0)$ ， $\dot{\vec{r}}(t_0)$ 。本模型中初值指第一个对齐观测时刻的值。

求解初值的问题可以表述为一个最优化模型：

$$\text{目标函数： } S = \min \sum_{i=1}^N \left| \vec{r}_1(i) - \vec{r}_0(i) \right|^2 \quad (5.30)$$

式中： $\vec{r}_1(i)$  表示 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器估计位置坐标；

$\vec{r}_0(i)$  表示空间飞行器简化运动方程的解。

该最优化模型非线性程度较高，本文采用遗传算法求解。搜索范围以初值（ $t = 50.1783s$  时刻）得到的三维位置坐标和速度值的各分量为中心，分别以 1000 和 30 为半径，目标函数同式（5.30）。

利用 Matlab 遗传算法工具箱（默认参数）进行了 3 次解算，结果如表 5.3 所示。

表 5.3 第一次遗传算法结果数据表

编号	$x_c(t_0)$ m	$y_c(t_0)$ m	$z_c(t_0)$ m	$\dot{x}_c(t_0)$ m/s	$\dot{y}_c(t_0)$ m/s	$\dot{z}_c(t_0)$ m/s	$S$
1	-1.11346E+06	6.20027E+06	1.13406E+06	-7.76390E+02	7.33570E+02	9.26502E+02	8.59541E+08
2	-1.11358E+06	6.19961E+06	1.13258E+06	-7.76976E+02	7.33847E+02	9.35350E+02	7.19382E+08
3	-1.11279E+06	6.19926E+06	1.13223E+06	-7.81549E+02	7.37137E+02	9.39496E+02	6.48170E+08

由于此问题非线性程度较高,有很多局部极小值点。为获得更好的搜索效果,取  $S$  值最小所对应的初值条件的  $\vec{r}(t_0)$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0)$  作为中心,结果中各参数值的极差为半径,确定下一次遗传算法求解的搜索域。以此方法迭代进行。第五次迭代的结果如表 5.4 所示。

表 5.4 第五次遗传算法结果数据表

编号	$x_c(t_0)$ m	$y_c(t_0)$ m	$z_c(t_0)$ m	$\dot{x}_c(t_0)$ m/s	$\dot{y}_c(t_0)$ m/s	$\dot{z}_c(t_0)$ m/s	$S$
1	-1.11214E+06	6.20050E+06	1.13322E+06	-7.84409E+02	7.29467E+02	9.32455E+02	5.13524E+05
2	-1.11213E+06	6.20050E+06	1.13322E+06	-7.84464E+02	7.29462E+02	9.32465E+02	5.05322E+05
3	-1.11213E+06	6.20050E+06	1.13322E+06	-7.84450E+02	7.29458E+02	9.32456E+02	5.02205E+05

可以看出,第五次求解的结果已经较为集中,目标值差距也不大,在表 5.5 中取  $S$  值最小的那组(第三组)初值条件作为最终的  $\vec{r}(t_0)$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0)$ 。

### 5.3.7 残差估计

将遗传算法最终得到的初值条件  $\vec{r}(t_0)$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0)$  以及参数  $c_1$ ,  $c_2$  代入到式 (5.23), 利用龙格-库塔法, 求出线性常微分方程初值问题数值解即为 0 号空间飞行器的理论三维位置坐标和速度。

表 5.5 0 号空间飞行器运动方程数值解的三维位置

$t_c$	$x_c(t_0)$ /m	$y_c(t_0)$ /m	$z_c(t_0)$ /m	$\dot{x}_c(t_0)$ m/s	$\dot{y}_c(t_0)$ m/s	$\dot{z}_c(t_0)$ m/s
50	-1.11199E+06	6.20037E+06	1.13305E+06	-7.81801E+02	7.28392E+02	9.29256E+02
60	-1.12057E+06	6.20794E+06	1.14326E+06	-9.35813E+02	7.85360E+02	1.11548E+03
70	-1.13075E+06	6.21606E+06	1.15541E+06	-1.10101E+03	8.37087E+02	1.31556E+03
80	-1.14263E+06	6.22467E+06	1.16962E+06	-1.27764E+03	8.84215E+02	1.52980E+03
90	-1.15634E+06	6.23373E+06	1.18605E+06	-1.46616E+03	9.27376E+02	1.75871E+03
100	-1.17199E+06	6.24321E+06	1.20485E+06	-1.66718E+03	9.67195E+02	2.00304E+03
110	-1.18973E+06	6.25307E+06	1.22617E+06	-1.88155E+03	1.00429E+03	2.26378E+03
120	-1.20967E+06	6.26329E+06	1.25018E+06	-2.11032E+03	1.03930E+03	2.54222E+03
130	-1.23199E+06	6.27385E+06	1.27708E+06	-2.35482E+03	1.07286E+03	2.83992E+03
140	-1.25683E+06	6.28474E+06	1.30705E+06	-2.61667E+03	1.10564E+03	3.15887E+03
150	-1.28438E+06	6.29596E+06	1.34033E+06	-2.89786E+03	1.13836E+03	3.50148E+03
160	-1.31486E+06	6.30751E+06	1.37717E+06	-3.20088E+03	1.17180E+03	3.87074E+03
170	-1.34848E+06	6.31940E+06	1.41785E+06	-3.52878E+03	1.20683E+03	4.27037E+03

利用理论三维位置坐标, 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器估计的三维位置坐标的标准差即为估计残差。

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [(x_1(i) - x_0(i))^2 + (y_1(i) - y_0(i))^2 + (z_1(i) - z_0(i))^2]}{N}} \quad (5.31)$$

采样时间从 50.1783s 开始，每个 0.2s 采一个点，到 169.9783s 结束共 600 个采样点，所以  $N=600$ ，代入 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器估计位置坐标  $(x_1(i), y_1(i), z_1(i))$  和空间飞行器简化运动方程的解  $(x_0(i), y_0(i), z_0(i))$  即可求出估计残差： $\sigma=28.9311$ 。

### 5.3.8 空间飞行器位置和速度解算结果及误差分析

将遗传算法最终得到的初值条件  $\vec{r}(t_0)$ ， $\dot{\vec{r}}(t_0)$  以及参数  $\mathbf{c}_1$ ， $\mathbf{c}_2$  代入到式 (5.23)，利用龙格-库塔法的思想，求出线性常微分方程初值问题数值解即为 0 号空间飞行器的理论三维位置坐标和速度。并将数据结果绘制出 0 号空间飞行器的三个位置 t-x、t-y、t-z 和三个速度 t-vx、t-vy、t-vz 曲线图。

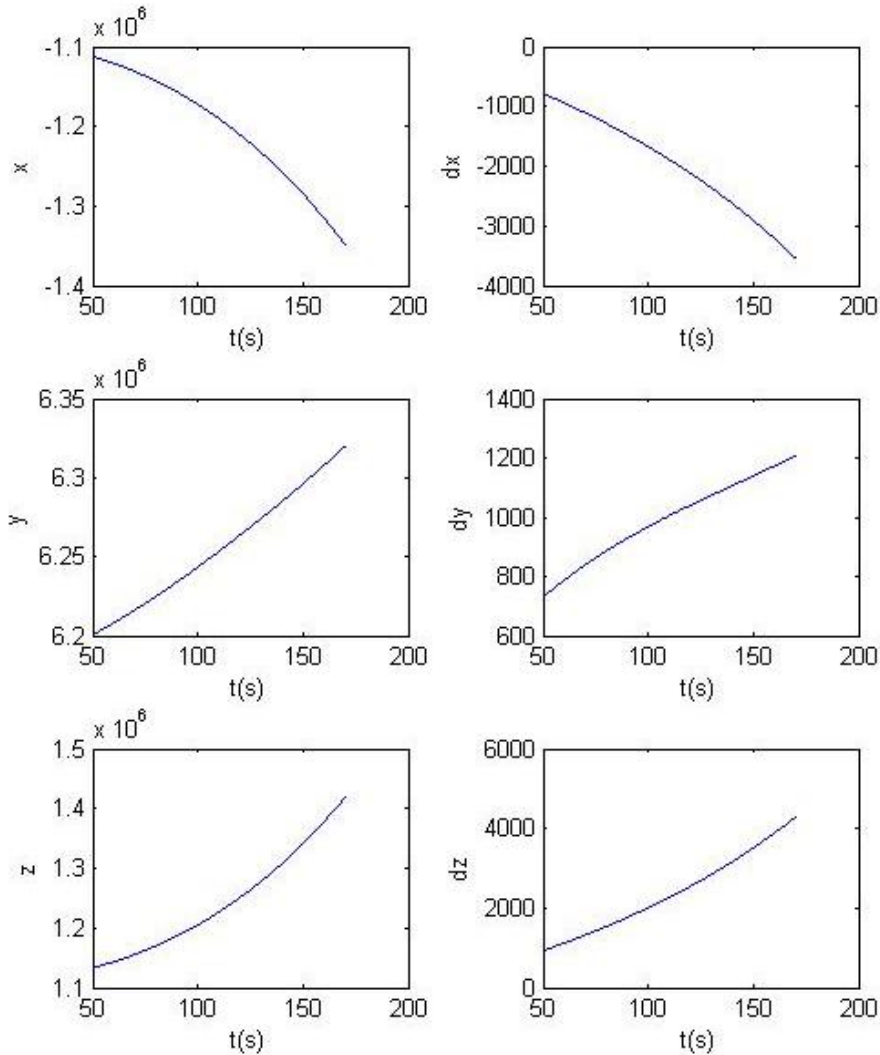


图 5.8 不考虑系统误差 0 号空间飞行器的位置和速度曲线图

## 5.4 问题三模型和求解

在同时考虑系统误差的条件下，由于 6 号和 9 号观测卫星的观测数据带有一定的系统误差，而此时利用观测数据对空间飞行器进行定位和轨道估计会引进系统误差。所以需要对系统误差进行估计，消除系统误差后对空间飞行器定位和轨道估计将提高其精度。

### 5.4.1 逐点交汇定位估计系统误差的不可行性

由 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据可以列出 (5.32) 中的 4 个方程，在不考虑系统误差的情况下，只有位置参数  $x_c, y_c, z_c$  这 3 个变量，为超定方程，可得到最小二乘解。在考虑系统误差的情况下，将引入 6 号观测卫星的系统误差  $d\alpha_6, d\beta_6, d\theta_6$  和 9 号观测卫星的系统误差  $d\alpha_9, d\beta_9, d\theta_9$  共 6 个系统误差参数，加上 3 个位置变量  $x_c, y_c, z_c$  共 9 个未知量，而 4 个方程不可能解出 9 个未知量，所以逐点交汇定位估计系统误差不可行。

$$\begin{cases} \alpha_6 = \frac{-x_c \sin Ls_6 + y_c \cos Ls_6}{x_c \cos Bs_6 \cdot \cos Ls_6 + y_c \cos Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \sin Bs_6 - R_6} \\ \beta_6 = \frac{-x_c \sin Bs_6 \cdot \cos Ls_6 - y_c \sin Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \cos Bs_6}{x_c \cos Bs_6 \cdot \cos Ls_6 + y_c \cos Bs_6 \cdot \sin Ls_6 + z_c \sin Bs_6 - R_6} \\ \alpha_9 = \frac{-x_c \sin Ls_9 + y_c \cos Ls_9}{x_c \cos Bs_9 \cdot \cos Ls_9 + y_c \cos Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \sin Bs_9 - R_9} \\ \beta_9 = \frac{-x_c \sin Bs_9 \cdot \cos Ls_9 - y_c \sin Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \cos Bs_9}{x_c \cos Bs_9 \cdot \cos Ls_9 + y_c \cos Bs_9 \cdot \sin Ls_9 + z_c \sin Bs_9 - R_9} \end{cases} \quad (5.32)$$

### 5.4.2 考虑系统误差时目标状态估计思路分析

如果能将状态变量之间关系和观测信息表示为下面形式

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \\ Y_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \quad (5.33)$$

其中  $X_k$  为  $n$  维状态向量， $Y_k$  为  $m$  维测量向量， $\Phi_{k,k-1}$  为  $n \times n$  的状态转移矩阵， $H_k$  为  $m \times n$  的测量矩阵， $W_k$  为  $p$  维动态噪声向量， $V_k$  为  $m$  维测量噪声向量， $\Gamma_k$  为  $n \times p$  的干扰矩阵，通过系统测量向量  $Y_k$  实时地给出系统状态向量  $X_k$  的估计。那么就可以采用 Kalman 滤波算法进行状态的估计。但是本问题是一个典型的非线性滤波问题，可以从下面的分析中明显看出。

假定在  $k$  时刻利用 06 和 09 号卫星获得的观测数据为  $\alpha_{6k}$ ,  $\beta_{6k}$ ,  $\alpha_{9k}$ ,  $\beta_{9k}$ , 若分别用  $\alpha'_{6k}$ 、 $\beta'_{6k}$ 、 $\alpha'_{9k}$ 、 $\beta'_{9k}$  表示 06 和 09 号两颗卫星测得的真值, 用  $d_{\alpha}^6$ 、 $d_{\beta}^6$ 、 $d_{\alpha}^9$ 、 $d_{\beta}^9$  分别表示 06 和 09 号卫星的系统偏差, 他们之间的关系可以写成向量形式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_{6k} \\ \beta_{6k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos d_{\theta}^6 & \sin d_{\theta}^6 \\ -\sin d_{\theta}^6 & \cos d_{\theta}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_{6k} \\ \beta'_{6k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\alpha}^6 \\ d_{\beta}^6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{9k} \\ \beta_{9k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos d_{\theta}^9 & \sin d_{\theta}^9 \\ -\sin d_{\theta}^9 & \cos d_{\theta}^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_{9k} \\ \beta'_{9k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\alpha}^9 \\ d_{\beta}^9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.34)$$

那么

$$\begin{bmatrix} \alpha_{6k} \\ \beta_{6k} \\ \alpha_{9k} \\ \beta_{9k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_{6k} \\ \beta'_{6k} \\ \alpha'_{9k} \\ \beta'_{9k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{\alpha}^6 \\ d_{\beta}^6 \\ d_{\alpha}^9 \\ d_{\beta}^9 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

其中  $A_1 = \begin{bmatrix} \cos d_{\theta}^6 & \sin d_{\theta}^6 \\ -\sin d_{\theta}^6 & \cos d_{\theta}^6 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} \cos d_{\theta}^9 & \sin d_{\theta}^9 \\ -\sin d_{\theta}^9 & \cos d_{\theta}^9 \end{bmatrix}$ 。

针对该类问题, 现在文献上主要是采用扩展可 Kalman 滤波、粒子滤波等算法进行求解[8]。本文借鉴这些算法的基本思想, 提出一种逐步迭代与爬山搜索算法想结合的求解算法。

#### 5.4.3 求解系统误差的爬山算法搜索模型

爬山搜索是一种类似于贪心最佳优先搜索的迭代算法, 它在搜索的每一个步骤中, 总是只沿着一个结点向下进行。它选择下一个结点的标准是, 该结点对于当前状态来说是最佳的。<sup>[4]</sup>

(1) 目标模型的转化:

系统误差的估计通常以校正系统误差后与真值的差值平方和最小为目标, 即:

$$\min \left[ \sum_i (\tilde{\alpha}_6^i - \bar{\alpha}_6^i)^2 + (\tilde{\beta}_6^i - \bar{\beta}_6^i)^2 + (\tilde{\alpha}_9^i - \bar{\alpha}_9^i)^2 + (\tilde{\beta}_9^i - \bar{\beta}_9^i)^2 \right] \quad (5.36)$$

式中:  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  是真实值,  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  是校正系统误差后的值。

但是由于真实值是未知的, 所以无法求解该目标值, 需要对目标进行转化。

由问题二中逐点交汇定位模型确定的目标物位置坐标可以经过坐标系变换,反求该位置应该测得的 $\alpha, \beta$ 值,记为 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 。可以认为,测量得到的 $\alpha, \beta$ 值与反推得到的 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 越接近,测量的误差越小。故搜索模型的目标设计为:

$$\min \left[ \sum_i (\tilde{\alpha}_6^i - \hat{\alpha}_6^i)^2 + (\tilde{\beta}_6^i - \hat{\beta}_6^i)^2 + (\tilde{\alpha}_9^i - \hat{\alpha}_9^i)^2 + (\tilde{\beta}_6^i - \hat{\beta}_6^i)^2 \right] \quad (5.37)$$

式中: $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 是校正系统误差后的值, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 是由 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 交汇定位求得位置反推的值。

(2) 启发式信息设计:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\alpha} \cos d\theta + \bar{\beta} \sin d\theta + d\alpha + \Delta \\ \beta = -\bar{\alpha} \sin d\theta + \bar{\beta} \cos d\theta + d\beta + \Delta \end{cases} \quad (5.38)$$

式中: $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 是真实值, $\alpha, \beta$ 是测量值, $\Delta$ 是随机误差。

由于 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 为三个常值小量(通常小于 $10^{-3}$ ),所以作近似: $\sin d\theta \approx d\theta$ ,  $\cos d\theta \approx 1$ ,认为随机误差远小于系统误差,可忽略不计,则(5.38)式可表示为:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \cdot d\theta + d\alpha \\ \beta = -\bar{\alpha} \cdot d\theta + \bar{\beta} + d\beta \end{cases} \quad (5.39)$$

以 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 代替 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 可得:

$$\begin{cases} \alpha - \hat{\alpha} = \hat{\beta} \cdot d\theta + d\alpha \\ \beta - \hat{\beta} = -\hat{\alpha} \cdot d\theta + d\beta \end{cases} \quad (5.40)$$

对于任意一个节点(一组系统误差参数),可以求出校正后逐点交汇定位结果,并求出(5.40)式左式的值,该值对应剩余误差;右式对应剩余系统误差,可分别作拟合分别得到 $\hat{d\theta}_\alpha, \hat{d\alpha}$ 和 $\hat{d\theta}_\beta, \hat{d\beta}$ 值,由这四个值决定下一搜索节点,第 $k+1$ 个节点应为:

$$\begin{cases} d\theta_{k+1} = d\theta_k + \frac{\hat{d\theta}_\alpha + \hat{d\theta}_\beta}{2} \\ d\alpha_{k+1} = d\alpha_k + \frac{(\sum_i \beta_i / N) \cdot (\hat{d\theta}_\alpha - \hat{d\theta}_\beta)}{2} \\ d\beta_{k+1} = d\beta_k + \frac{(\sum_i \alpha_i / N) \cdot (\hat{d\theta}_\alpha - \hat{d\theta}_\beta)}{2} \end{cases} \quad (5.41)$$

(3) 模型的求解:

搜索模型的初始结点设定为 6 个系统误差值均为 0, 剩余误差如图 5.9 所示。

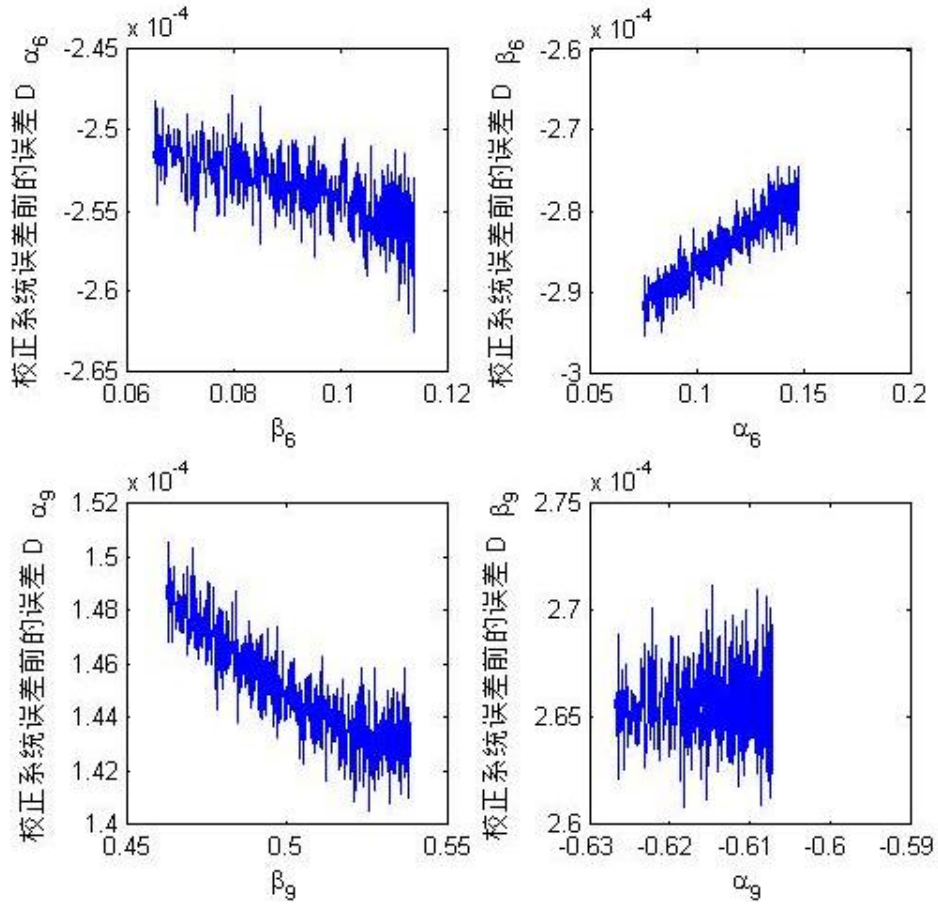


图 5.9 校正系统误差前  $\alpha - \hat{\alpha}$ 、 $\beta - \hat{\beta}$  曲线图

1000 次迭代搜索后, 求得系统误差值如表 5.5 所示, 剩余误差如图 5.10 所示。可以看到 1000 次迭代后的结果可近似为白噪声。



表 5.5 6 号和 9 号观测卫星的系统误差

6 号观测卫星	$d_\alpha$	$d_\beta$	$d_\theta$
数值	-4.84512E-04	-7.87197E-04	-2.39431E-04
9 号观测卫星	$d_\alpha$	$d_\beta$	$d_\theta$
数值	2.01854E-04	-3.91705E-04	1.72871E-04

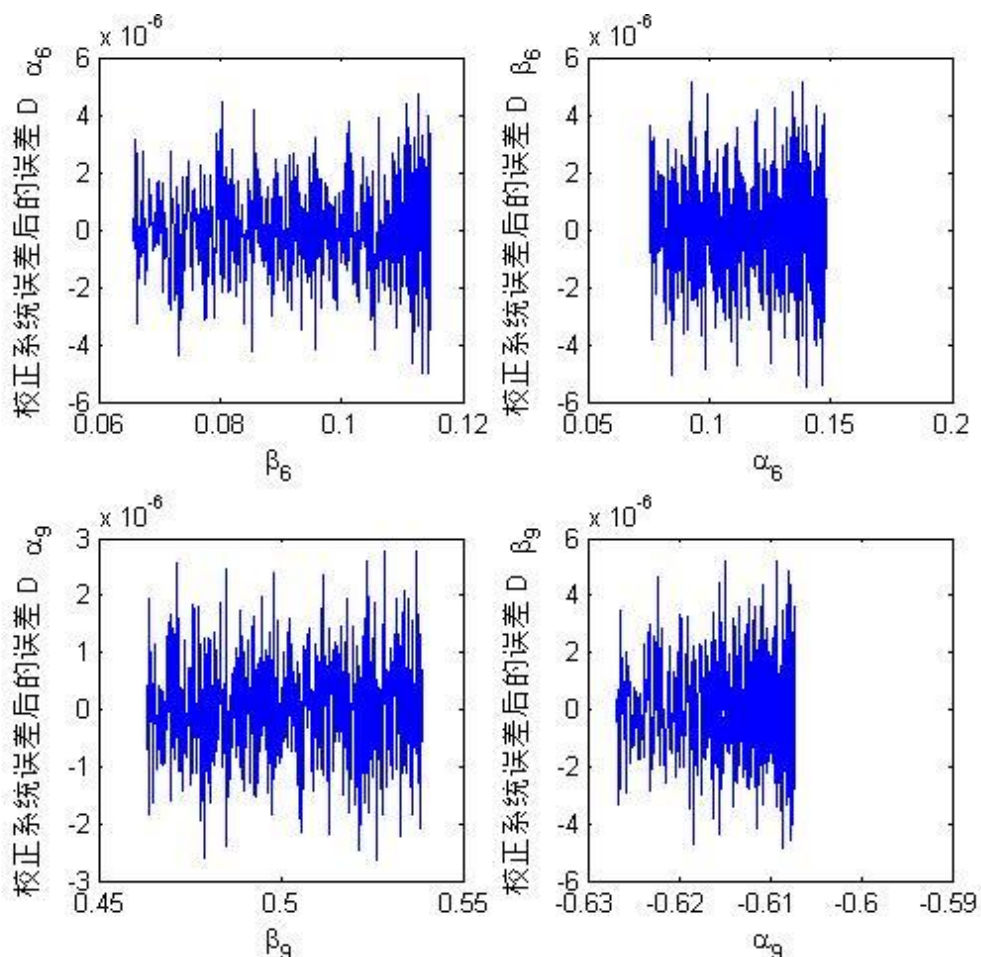


图 5.10 校正系统误差前  $\tilde{\alpha}-\hat{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}-\hat{\beta}$  曲线图

#### 5.4.4 考虑系统误差后模型求解

利用爬山算法搜索模型得到了 6 号和 9 号观测卫星的三轴指向误差，对 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器的观测数据校正系统误差可有效地提高估算精度。

将消除了系统误差的观测卫星观测值代入到立体空间的逐点交汇定位模型，得到 0 号空间飞行器的位置坐标。利用空间飞行器  $\vec{V}_r(t)$  和  $m(t)$  参数估计模型，求解得到参数：

$$c_1 = -1.34258 \times 10^{-4}, \quad c_2 = 4.01130 \times 10^{-2}$$

参数:  $b = \frac{1}{c_1} = -7.4483 \times 10^3$ , 表示燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度大

小为 7448.3m/s, 方向与火箭速度方向相反;

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{bc_2} = \frac{c_1}{c_2} = -3.347 \times 10^{-3}, \quad \text{表示火箭燃料以飞行器初始质量}$$

$3.347 \times 10^{-3}$  倍每秒的速度消耗。

利用遗传算法求解空间飞行器简化运动方程初值, 将得到:

表 5.6 考虑系统误差后的最优初值

$x_c(t_0)$ /m	$y_c(t_0)$ /m	$z_c(t_0)$ /m	$\dot{x}_c(t_0)$ m/s	$\dot{y}_c(t_0)$ m/s	$\dot{z}_c(t_0)$ m/s
-1.11178E+06	6.20199E+06	1.13215E+06	-7.86090E+02	7.30199E+02	9.34204E+02

将遗传算法最终得到的初值条件  $\vec{r}(t_0)$ ,  $\dot{\vec{r}}(t_0)$  以及参数  $c_1$ ,  $c_2$  代入到式空间飞行器的简化运动方程, 利用龙格-库塔法的思想, 求出线性常微分方程初值问题数值解即为 0 号空间飞行器再考虑系统误差下的理论三维位置坐标和速度。

表 5.7 0 号空间飞行器在三维位置估计表

$t_c$	$x_c(t_0)$ /m	$y_c(t_0)$ /m	$z_c(t_0)$ /m	$\dot{x}_c(t_0)$ m/s	$\dot{y}_c(t_0)$ m/s	$\dot{z}_c(t_0)$ m/s
50	-1.11164E+06	6.20186E+06	1.13198E+06	-7.83441E+02	7.29136E+02	9.31005E+02
60	-1.12024E+06	6.20944E+06	1.14221E+06	-9.37457E+02	7.85969E+02	1.11719E+03
70	-1.13043E+06	6.21756E+06	1.15437E+06	-1.10265E+03	8.37573E+02	1.31724E+03
80	-1.14233E+06	6.22617E+06	1.16860E+06	-1.27927E+03	8.84587E+02	1.53142E+03
90	-1.15605E+06	6.23524E+06	1.18505E+06	-1.46776E+03	9.27644E+02	1.76025E+03
100	-1.17173E+06	6.24472E+06	1.20386E+06	-1.66876E+03	9.67365E+02	2.00450E+03
110	-1.18947E+06	6.25458E+06	1.22519E+06	-1.88309E+03	1.00437E+03	2.26515E+03
120	-1.20944E+06	6.26480E+06	1.24922E+06	-2.11183E+03	1.03929E+03	2.54349E+03
130	-1.23176E+06	6.27536E+06	1.27613E+06	-2.35629E+03	1.07276E+03	2.84108E+03
140	-1.25662E+06	6.28625E+06	1.30611E+06	-2.61809E+03	1.10546E+03	3.15991E+03
150	-1.28419E+06	6.29747E+06	1.33941E+06	-2.89923E+03	1.13809E+03	3.50239E+03
160	-1.31468E+06	6.30901E+06	1.37625E+06	-3.20220E+03	1.17145E+03	3.87151E+03
170	-1.34832E+06	6.32090E+06	1.41694E+06	-3.53004E+03	1.20640E+03	4.27099E+03

利用理论三维位置坐标, 6 号和 9 号观测卫星对 0 号空间飞行器估计的三位置坐标的标准差即为估计残差。即可求出估计残差:  $\sigma = 25.0951$ 。

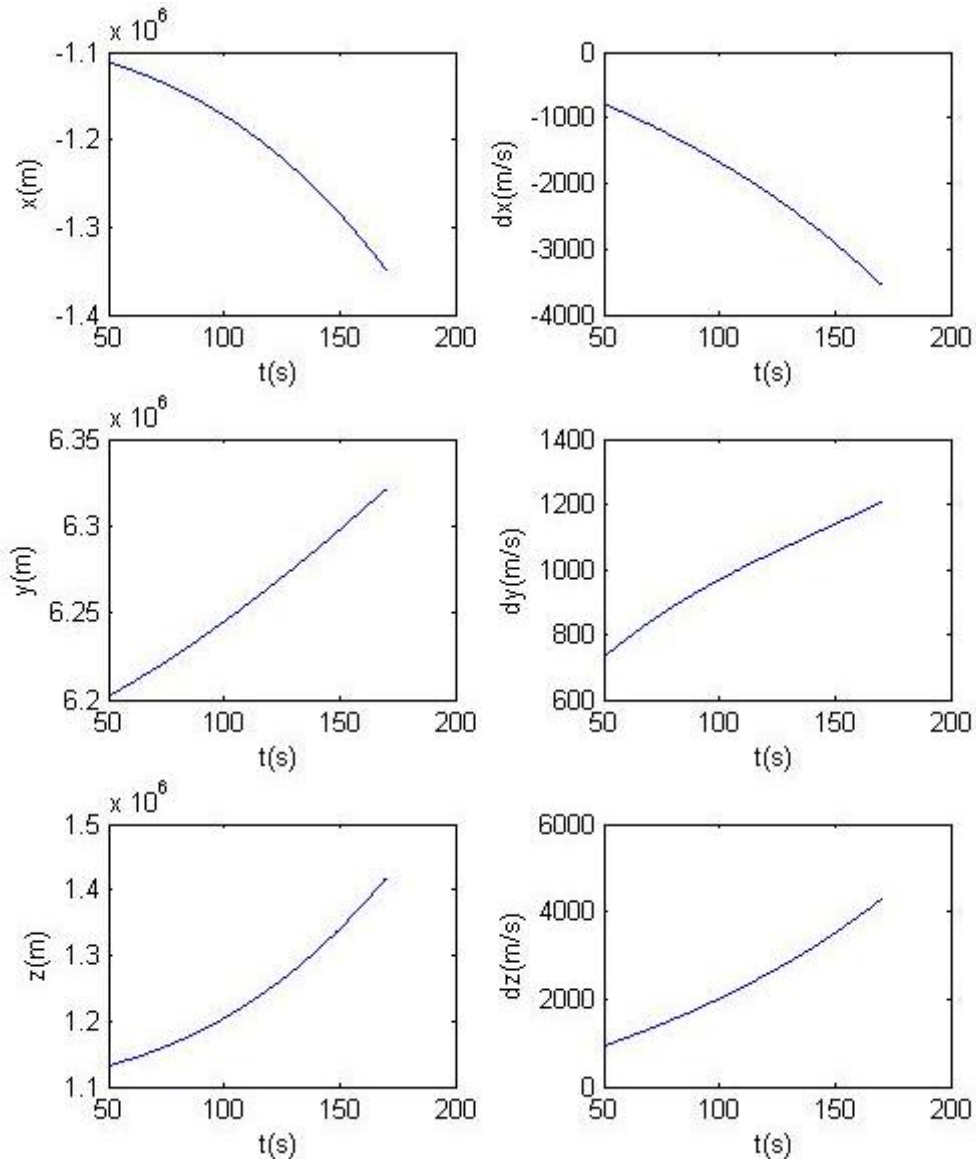


图 5.10 不考虑系统误差 0 号空间飞行器的位置和速度曲线图

## 5.5 问题四的模型和求解

对只有 9 号观测卫星单星观测的 1 号空间飞行器进行轨道估计。由于单颗卫星观测空间飞行器只能得到每个时刻飞行器所在的方向，此时不知道空间飞行器距离观测卫星的距离，所以不能对空间飞行器进行位置定位，但是空间飞行器的运动满足其在基础坐标系下的主动段的简化运动方程，当不知道初值时，该方程有一系列的解，在 70.18122 s 到 255.3812s 之间每个 0.2s 采样。对于每一时刻，方程的解即对应空间飞行器的三维位置，该点与单颗卫星观测空间飞行器得到该时刻飞行器所在的方向的垂直距离即为位置误差，垂直线段与单颗卫星观测空间飞行器得到该时刻飞行器所在的方向的交于一点，该点即可认为是 9 号观测卫星对 1 号空间飞行器的三维位置估计。所有采样时刻位置误差的

和最小的解即可认为是该方程的可行解。这样就得到了空间飞行器的运动轨迹，根据空间 1 号飞行器的运动轨迹和 9 号观测卫星对 1 号空间飞行器的三维位置估计可进一步对系统误差进行估计。

对于同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下联合进行系统误差估计可以采用数据融合的思想。

### 5.5.1 单颗观测卫星对空间飞行器轨道估计模型

由于空间飞行器的轨道满足一定的约束条件，空间飞行器在观测坐标系的位置坐标  $\vec{r}_s(t) = x_s \vec{i} + y_s \vec{j} + z_s \vec{k}$  满足下列方程：

$$\begin{cases} x_s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y_s = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ z_s = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \end{cases} \quad (5.42)$$

在式（5.35）中共有 12 个位置参数，而单颗卫星的观测数据只可列出 2 个方程：

$$\begin{cases} \alpha = \frac{y_s}{x_s} = \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3} \\ \beta = \frac{z_s}{x_s} = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3} \end{cases} \quad (5.43)$$

在考虑系统误差的情况下，还有  $d\alpha, d\beta, d\theta$  3 个系统误差，加上 12 个位置参数共有 15 个参数需要求解，所以采用单颗观测卫星 8 个观测时刻的观测数据联立起来得到 16 个方程，求解这 15 个参数。据文献[6]模型的假设是合理的。

### 5.5.2 多颗观测卫星观测多个空间飞行器的联合系统误差估计模型

对于同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下联合进行系统误差估计可以采用数据融合的思想<sup>[8]</sup>。基本假定是  $m$  颗卫星同时观测  $n$  个空中目标，也可以分两种基本情况予以考虑，一是观测卫星的系统误差未予校正，二是观测卫星的系统误差已予以校正。当观测卫星的系统误差未予校正时，每颗卫星需估计 3 个系统参数，同时对每个目标提供 2 个观测值，针对  $n$  个空中目标可提供  $2n$  个等量关系，如果以文献[6]的结论，可以参照（5.35）的假定，每个目标需估计 12 个参数，于是当  $2mnp > 3m + 12n$ （其中  $p$  为观测次数）时，可以联立方程组解算出相应的状态参数值。当卫星系统误差已校正时，只需要连续观测次数满足  $mp > 6$  即可。特别是已知目标的动力学模型时，每时刻需要估计的量直接可以表述为  $3n$ ，即每个目标的状态位置变量为 3 个， $2mp > 3$  时就可以

逐点定位出每个目标的状态，完成轨道定位解算。

对于多颗卫星观测多个空间飞行器的情况，特别是空间飞行器较为密集时，在各空间飞行器跟踪波门的相交区域内可能同时有来自多个测量和杂波，并且来自每个空间飞行器的测量又可能是含有多个观测卫星测量的集合。因此对空间飞行器轨道估计和系统误差估计的前提即是要对来自多颗观测卫星的多个空间飞行器测量结果进行同源划分。

采用极大似然估计对多颗观测卫星观测多个空间飞行器的同时 / 同周期的测量进行同源划分，然后对每个划分所得的源于同一空间飞行器的多测量进行问题二的融合处理，产生同一空间飞行器的联合测量值。这样就可以对该观测卫星测量系统应用问题二的算法，实现对多空间飞行器的轨道估计。当存在某观测卫星测量精度较低甚至漏警的情况下，对源于同一空间飞行器的多测量融合就能够改善对空间飞行器轨道估计的测量精度。

## 六、模型验证及模型评价

### 6.1 模型验证

为了对模型进行验证，通过设定空间飞行器的运动方程，选两颗观测卫星对空间飞行器进行观察，将观测数据加上系统白噪声和系统误差作为最终的观测数据。利用问题二和问题三的算法对最终观测数据进行计算得到空间飞行器的位置和速度以及系统误差，将得到的结果和开始时设定的运动方程和系统误差进行比较，验证模型的可靠性。

依然设定观测卫星为 06 号和 09 号卫星，观测时刻仍选取他们观测 0 号目标飞行器的时刻，仿真数据的生成过程如下：

Step1、给定仿真目标物运动方程；

$$\begin{cases} x_c = -30t^2 + 2000t - 1.13 \times 10^6 \\ y_c = 10t^2 + 1700t + 6.21 \times 10^6 \\ z_c = 40t^2 + 2600t + 1.16 \times 10^6 \end{cases} \quad (6.1)$$

得到的真值数据如下表：

表 6.1 仿真得到的位置真值

$t$ /s	$x_c$ /m	$y_c$ /m	$z_c$ /m
50.17	-1105179	6320482	1391178
60.17	-1118286	6348517	1461321
70.17	-1137393	6378553	1539464
80.17	-1162500	6410589	1625606
90.17	-1193607	6444624	1719749
100.17	-1230714	6480660	1821892
110.17	-1273821	6518696	1932034
120.17	-1322928	6558731	2050177
130.17	-1378035	6600767	2176320
140.17	-1439142	6644803	2310462
150.17	-1506249	6690838	2452605
160.17	-1579356	6738874	2602748

Step2、计算运动方程在各观测时间点的值；

Step3、通过坐标系转换计算出观测坐标系下的坐标，并计算 $\alpha, \beta$ 实际值；

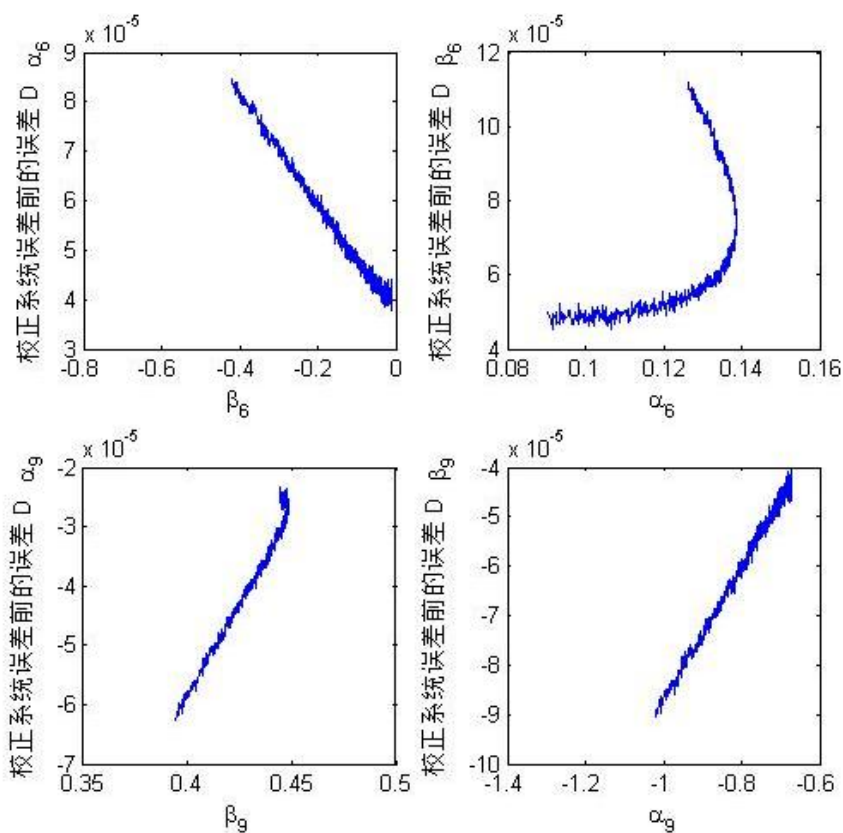


图 6.1 不考虑系统误差时  $\alpha_{i,j} - \alpha = f(\beta)$ 、 $\beta_{i,j} - \beta = f(\alpha)$  曲线图

Step4、叠加系统误差，系统误差的选取如下：

$$\begin{aligned} d\alpha_6 &= -3 \times 10^{-4}, \quad d\beta_6 = 4 \times 10^{-4}, \quad d\theta_6 = 2 \times 10^{-4} \\ d\alpha_9 &= 4 \times 10^{-4}, \quad d\beta_9 = 3 \times 10^{-4}, \quad d\theta_9 = -6 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Step5、叠加随机误差，随机误差取服从  $u=0, \sigma=2 \times 10^{-6}$  的正态随机数。

将得到的仿真数据代入到模型得到不考虑系统误差时  $\alpha_{i,j} - \alpha = f(\beta)$ 、  
 $\beta_{i,j} - \beta = f(\alpha)$ ；

将得到的仿真数据代入到模型得到考虑系统误差时  $\alpha_{i,j} - \alpha = f(\beta)$ 、  
 $\beta_{i,j} - \beta = f(\alpha)$

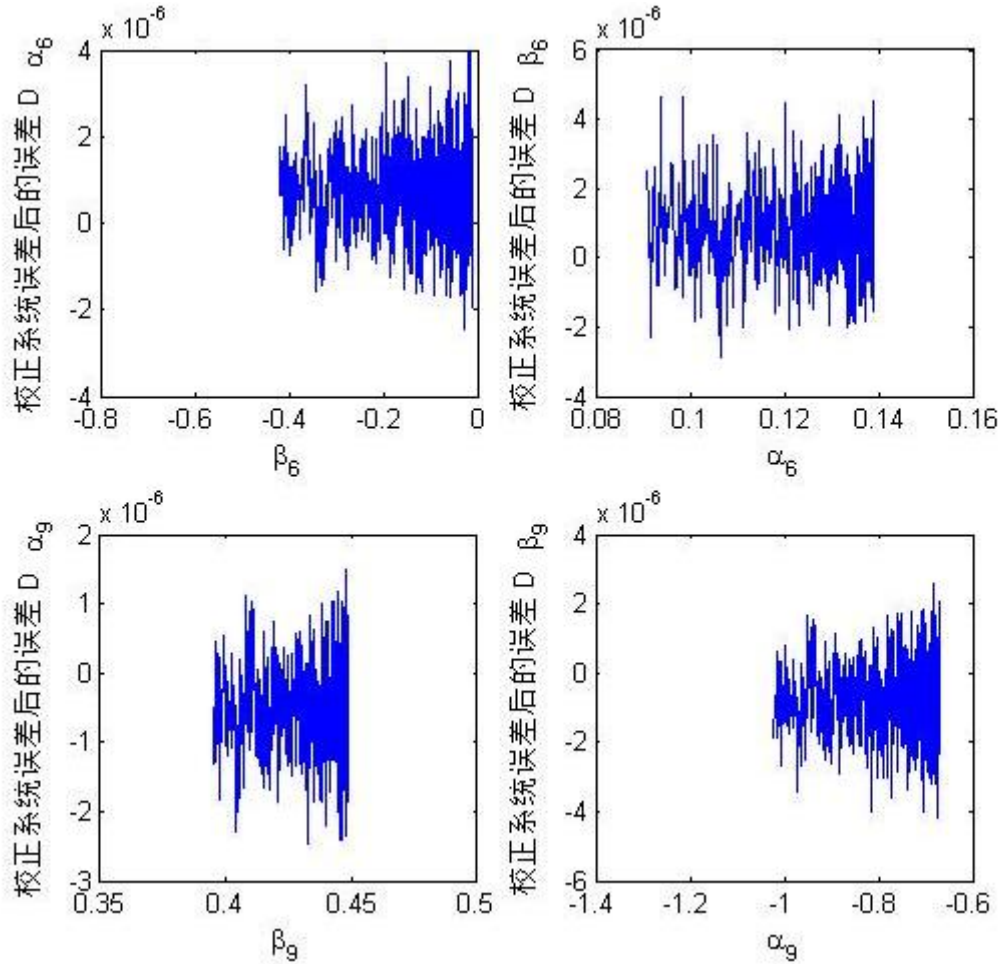


图 6.3 考虑系统误差时  $\alpha_{i,j} - \alpha = f(\beta)$ 、 $\beta_{i,j} - \beta = f(\alpha)$  曲线图

表 6.2 模型得到的系统误差

6 号观测卫星	$d_\alpha$	$d_\beta$	$d_\theta$
数值	-3.00284E-04	3.99334E-04	1.97629E-04
9 号观测卫星	$d_\alpha$	$d_\beta$	$d_\theta$
数值	3.99498E-04	3.01720E-04	-5.98973E-04

由模型计算得到的系统误差和仿真时叠加的系统误差可以对比发现其差值很小，有效地验证了模型的合理性，进一步得到模型对目标的定位值：

表 6.3 模型计算得到的位置

$t$ /s	$x_c$ /m	$x_c$ /m	$x_c$ /m
50.17	-1105180	6320471	1391185
60.17	-1118289	6348510	1461315
70.17	-1137401	6378534	1539464
80.17	-1162503	6410576	1625605
90.17	-1193612	6444622	1719750
100.17	-1230714	6480655	1821892
110.17	-1273825	6518693	1932034
120.17	-1322935	6558728	2050180
130.17	-1378032	6600768	2176328
140.17	-1439143	6644793	2310471
150.17	-1506254	6690830	2452600
160.17	-1579353	6738867	2602749

由表 6.3 和表 6.1 对比可以看出，模型计算得出的位置坐标和仿真的误差小于 10 米，说明了模型是合理可靠的。

## 6.2 模型优点

(1) 针对求解空间飞行器简化运动方程初值的问题，利用了遗传算法的迭代性等性质进行计算，多次迭代有效地消除了遗传算法的随机性，保证了空间飞行器运动方程初值的有效性；

(2) 针对观测卫星观测空间飞行器轨道中系统误差的影响，采用爬山搜索模型进行空间飞行器的三轴指向误差分析，在合理选择起点及各试验点的间隔后，有效地减少了试验次数。通过模型仿真，证明该方法能够有效地估计系统误差对空间飞行器轨道估计的影响，提高定轨精度。

(3) 针对卫星观测空间飞行器观测时刻不同而导致的时间不对齐的问题，采用样条函数模型来拟合数据，对观测信息做了预处理，同时避免了建立其他



非线性模型造成的算法的复杂性，提高了利用观测模型求解空间飞行器轨道估计的精度。

### 6.3 模型缺点

(1) 遗传算法中多次迭代的应用使运算量增大，耗时较长，同时，遗传算法作为一种全局搜索算法，在模型求解过程中，没有考虑个体间的信息，仅依靠个体适应度来引导搜索，因而会受到局部极小值的吸引,不能保证每次都收敛到全局最优点；

(2) 求解观测模型的系统误差中，爬山搜索模型采用的是不可回溯的搜索方式，而使对该问题的处理受到一定限制。

## 七、 参考文献

- [1] 张毅,肖龙旭,王顺宏,弹道导弹弹道学[M],长沙:国防科技大学出版社,2005。
- [2] 张德丰,MATLAB 数值分析与应用(第2版)[M],北京:国防工业出版社,2009.4。
- [3] 龙汉,李贞杰,基于视线观测的几何定位研究与仿真分析,计算机仿真,第27卷第8期:14-17,2012.8。
- [4] M.Tim Jones 著,黄厚宽,尹传环,董兴业等译,人工智能[M],北京:电子工业出版社,2010.7。
- [5] 中国人民解放军总装备部军事训练教材编辑工作委员会著,外弹道测量数据处理[M],国防工业出版社,2002。
- [6] 王正明,易东云,测量数据建模与参数估计[M],国防科技大学出版社,1996。
- [7] 王志刚,施志佳,远程火箭与卫星轨道力学基础[M],西北工业大学出版社,2006。
- [8] 李弼程,黄洁,信息融合技术及其应用[M],国防工业出版社,2010。