

写给理工科人看的乐理

作者：Devymex Wang

V1.0

《星光居士严肃脸》及参考文献持续更新网址

<https://github.com/xingguangjushi/xgjsysl>

目录

(一) 声学基础.....	1
一、基本概念.....	2
二、音的复合.....	3
三、谐波.....	4
四、拍音.....	7
五、总结.....	10
(二) 十二平均律与五线谱.....	11
一、乐理发展史·之一.....	11
二、十二平均律.....	15
三、五线谱入门.....	18
四、总结.....	23
(三) 五线谱进阶与和声理论.....	24
一、乐理发展史·之二.....	24
二、五线谱进阶.....	28
1. 五线谱中的相对音程.....	28
2. 升降记号.....	31
3. 双音谱.....	32
三、和声.....	33
四、总结.....	37
(四) 和弦与调式.....	38
一、乐理发展史·之三.....	38
二、和弦.....	43
1. 三和弦.....	43
2. 七和弦.....	45
三、调式.....	45
1. 自然大调.....	46
2. 自然小调.....	47
3. 其它小调式.....	47
4. 大小调关系.....	48
四、总结.....	49
(五) 调性.....	50
一、乐理发展史·之四.....	50
二、调性.....	57
三、总结.....	61

(一) 声学基础

技术类工作十余年，思维方式愈发趋于纯理性动物：万物有定义、有果必求因、凡事靠推理，诚然这样的方法论太过缺乏人文情怀。不光自己，身边的大批科学家、工程师也深受纯粹理性的毒害。加之在很多同学从小到大都没有接受过基本的音乐教育，导致根本不懂音乐，也不会欣赏音乐，实乃人生一大憾事。

我们要完成自我救赎，基本的方法就是在音乐方面我们最好能学习一门乐器，有一定经济基础的同学最好能买一架钢琴，这不仅可以使我们苦逼的人生变得更多滋有趣，还可以活动你僵硬的肩膀、颈椎和手腕。吉他也是很好的乐器，便于携带，容易上手，没事还可以弹唱一曲来吸引妹子。就算实在没有音乐细胞，在街上听到古典音乐时和同行谈一谈调式与调性，那逼格直接爆表不是？此外，立志从事计算机辅助作曲、编曲和调音行业的码农也未必真的懂得音乐，而基本的音乐知识却成为了巨大的绊脚石。

音乐不可不学！

请欣赏：李斯特降 A 大调《爱之梦》。

<https://www.bilibili.com/video/BV1Qt411j7af>

要学音乐，就得先学乐理。乐理就是音乐的理论，由很多非常精妙的物理、数学和逻辑原理构成的。然而乐理书籍皆非理工科人所写，在我等看来实在是定义不明，论述不清。本系列文章将尝试使用公理化的方式来描述，尽可能对每一个概念和方法都追根溯源，相信各位理工科朋友看过后就会像喝到了妈妈做的母鸡汤一般温馨。

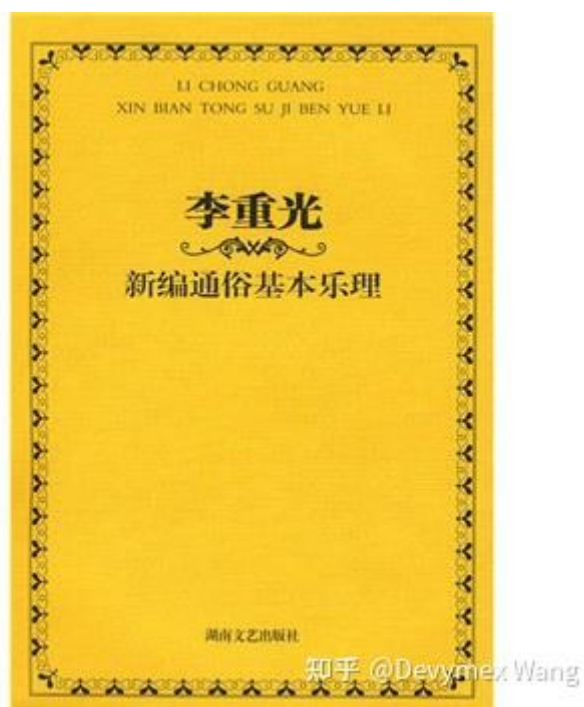


图 1 晦涩难懂的通用乐理教材

乐理的基本内容包括：和声、调式、节奏、结构、曲式。这些内容相互联系交织，单独研究其中任何一部分都不可能。为了给理工科人找一个突破口，本文将从音乐的基本物理原理开始，逐步展开各种概念。我们拒绝以未知解释未知！

一、基本概念

音乐是由声音构成的艺术，而声音是一个宽泛的概念，泛指人耳可以感知的声波。声波是一种机械波，由物体（声源）振动，带动空气振动，从而形成声波。声波在一段时间内波峰的个数称为它的频率，标准计量单位为 Hz（赫兹），即一秒内波峰的个数。声波振幅的大小体现了声音的强弱，也就是音量的大小。声音以某种规律进行频率和强弱的变化就形成了音乐，我们要研究的就是这“某种某律”。然而在所有乐理书上都没有给出“音”的定义，可是围绕“音”展开的各种概念却是名目繁多，令人眼花缭乱。为了理性化思考得以继续，

我在这里斗胆给出音的定义，若您有高见还望不吝赐教。

音：可被人类的听觉所感知的一段时间内的声波。通常我们可以用一段声波的波形来表示一个音。

音源：能够产生音的设备/装置/器官等，比如乐器、声带等。

音源的整体或某个部分振动产生声波并持续一段时间（哪怕很短），空气就会将这一段声波传导至人耳。比如：大喊一声，敲一下水管，爆炸，婴儿哭闹等等。的确，音的定义非常宽泛，但乐理仅研究与音乐相关的音。那么音乐又是什么呢？音乐是艺术范畴的名词，无法给出严格的定义。如果非要用理工科的思维方式来理解，抛开其功能属性，那只能这样定义：

音乐：就是由一个或多个音在相同或不同的时间内被产生，相互叠加所形成的一段声波。

噪音和音乐的区别是因人而异的，老奶奶认为是噪音的摇滚乐在小年青耳朵里就是兴奋剂，而科学追求的是放之四海皆准的真理，因此这个定义也显得不那么严谨，似乎也没办法做出更好的定义了。现在还出现了一些另类音乐，比如噪音音乐和无声音乐，咱们先不去管它。

为了简化研究对象，后文中提到的音都特指由传统乐器作为音源发出的音。

二、音的复合

最普通最基本的声波就是简谐振动（维基百科）所产生的正弦波了。传统乐器一般都依靠简谐振动发声，比如琴弦、簧片、鼓面等的

振动，因此发出的也是正弦波。一个纯粹的正弦波听起来是什么样的呢？请欣赏各种正弦波的声音：

<https://www.bilibili.com/video/BV1r4411P7eX>

可是为什么这与我们平时听到音乐完全不同呢？这就要提到纯音与复合音的概念了。

以某个固定频率进行简谐振动所产生的声波称为**纯音**，比如音叉的声音或刚才听到的 220Hz 正弦波。但世界上并不存在绝对的纯音，就像世上没有绝对的化学单质一样。只有由电声设备发出的纯音可以看作非常近似的纯音，比如上面视频里的正弦波声音，还有座机电话拿起听筒听到的声音就是近似的纯音。

与纯音相对的就是**复合音**，它由多个纯音组合而成。而音乐就是由大量不同的复合音构成的。复合音的产生方式有无穷多种，但有两种在音乐中最为常见：一种称为谐波叠加，一种称为拍音叠加。

三、谐波

我们将一个标准的正弦波作为基准，称作**基波**。**谐波**就是比基波的频率高整数倍的波（见维基百科），钢琴按下一个键或小提琴拉响一根弦都会在基波的基础上产生多个谐波，音乐人往往将谐波称为“**泛音**”。例如某个纯音声波的频率是 f ，将此纯音作为基波，其谐波的频率可为 $2f$ 、 $3f$ 、 $4f$ 、……，这些谐波分别称为二次谐波、三次谐波、四次谐波等。如图 2 所示。

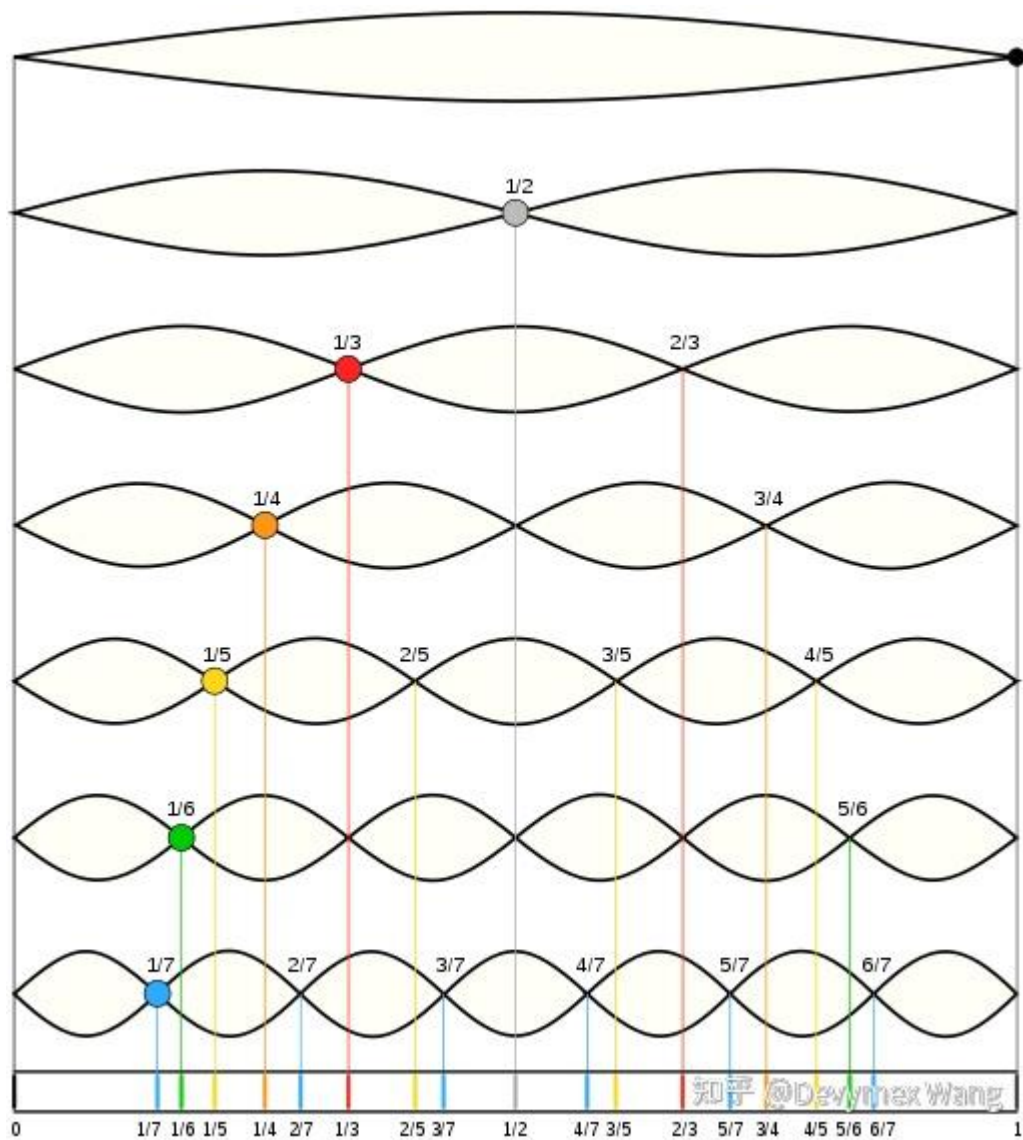


图 2 基波与谐波的关系

图 2 中最上面的是基波，从第二行往下分别是一次谐波、二次谐波等等。若一个复合音由基波与及其谐波相叠加构成，则称该复合音为谐波叠加，它的频率为基波频率。基波与谐波叠加构成复合音的过程见图 3 所示。

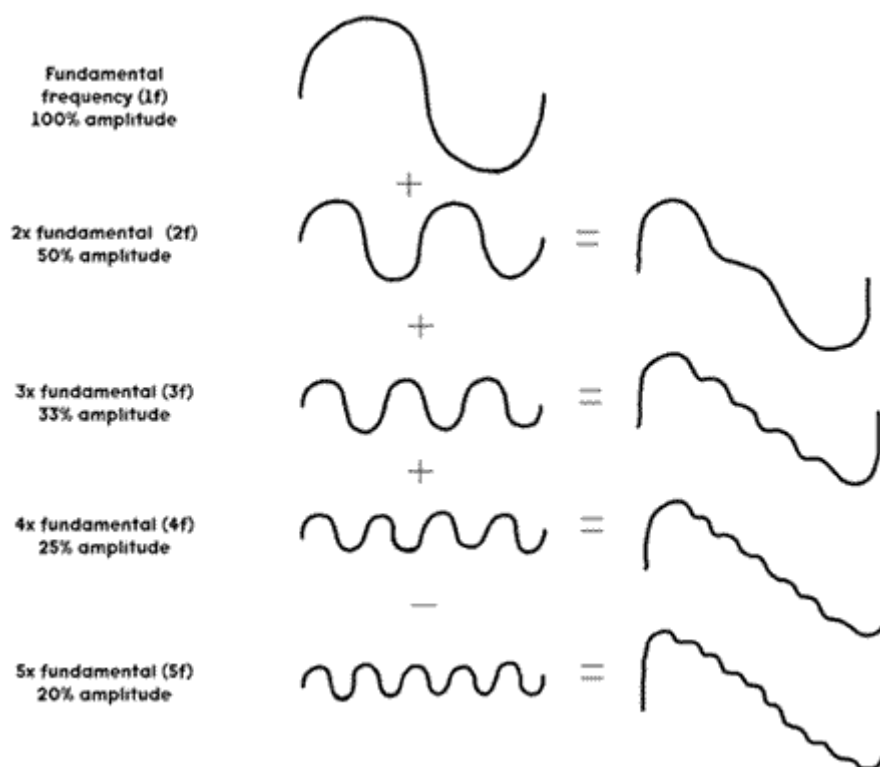


图 3 基波与谐波复合构成复合音

实际上，所有传统乐器所发出的音都是复合音，由振幅最大的基波和一些列振幅较小的谐波叠加构成。那么我们就可以给出单音的定义了：**单音**特指单一乐器演奏独立的一个音发出的声波（谐波叠加），其基波的频率称为**音高**。不同乐器的单音所叠加的谐波在频率和振幅上都不相同，因此乐器的音色千差万别。小提琴的单音就是典型的一种谐波叠加，声音对应的波型为：

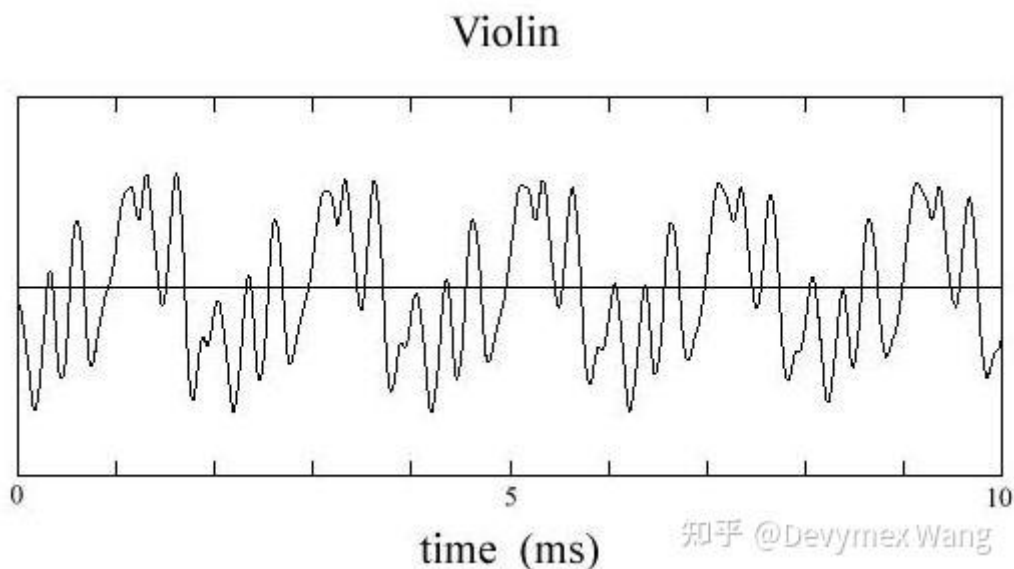


图 4 小提琴单音的波型

由纯音叠加形成小提琴声音的过程请收听：

<https://www.bilibili.com/audio/au2507830?type=1>

由于每种乐器都有其特别的构造，因此合成一个单音的各个谐波的振幅之比也因乐器而不同。此外，乐器本身的共振所产生的音也混杂于其中，因此不同乐器奏出相同的音高，音色却具有巨大差别，可以让我们轻易分辨。

四、拍音

拍音是另一种复合音，它是由来自同一种乐器或不同乐器的两个单音相互叠加，形成具有规律性强弱变化的振动。与谐波不同的是，拍音一般要求这两个音的振幅相近，但不要求频率为倍数关系。

由于单音本身就由纯音叠加而来，再将单音相互叠加，情况将会变得非常复杂。因此为方便描述，下文将以纯音的叠加来解释拍音的形成。图 5 中黄色、红色和蓝色的波型分别为频率 200Hz，250Hz 和 300Hz 的纯音。黄色与蓝色两纯音叠加形成绿色的拍音波形，黄红蓝

三纯音叠加形成黑色的拍音波型。

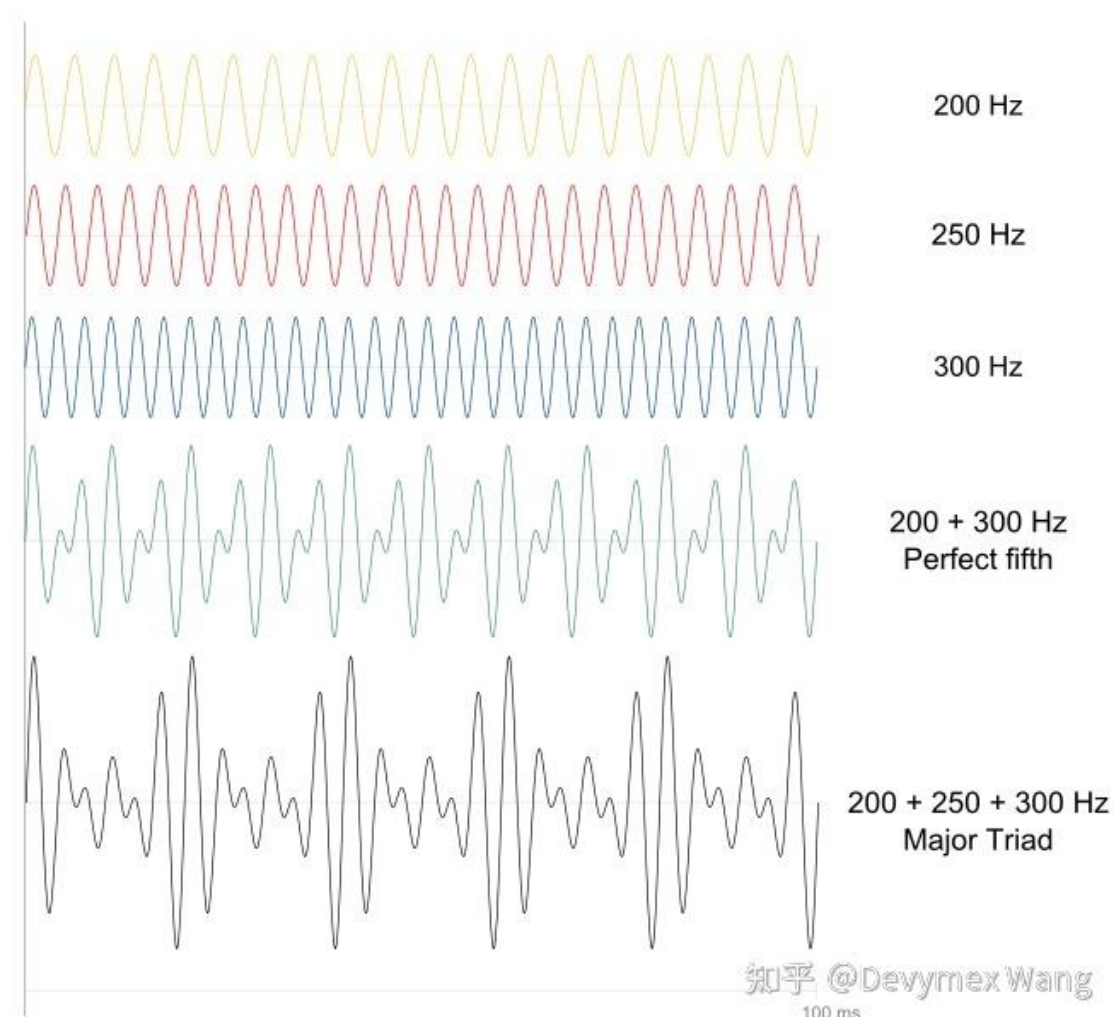


图 5 拍音的形成过程

分析可知，每当两个单音的波峰相遇就形成拍音的波峰，波谷相遇就形成拍音的波谷，这样的复合音从波型看起来存在周期性的振幅变化，像节拍一般，因此称为拍音。拍音的频率与叠加的两个单音的周期（频率的倒数）的比值相关，如果两个单音的频率都是整数，那么拍音的频率就等于它们周期最小公倍数的倒数。

频率相差一倍的两个单音叠加形成的拍音，其频率等于较低的音的频率，这样的拍音听起来就像一个音。例如钢琴上的任意两个 Do 音之间的频率都相差一倍，这里有一架在线钢琴，t 键是中央 Do，s

键是高音 Do，同时按下就形成了上述拍音。

如果两个单音中至少有一个是无理数，那么拍音的情况就要复杂一些了。此时两个单音的波峰永远不会相遇，波谷亦然，只会出现非常接近的情况。如果两个波的波峰以一个近似的周期 s 相互靠得很近，那么不太精确的人耳就会“认为”这两个单音的叠加形成了频率为 $1/s$ 的拍音。这里面的原理确实比较复杂，我们举例子来说明。比如单音 a 的频率 $f_a = \sqrt{3}$ ，单音 b 的频率为 $f_b = \sqrt{5}$ ，它们的周期分别 $S_a = 1/f_a$ 为和 $S_b = 1/f_b$ ，它们的波形如图 6 所示。

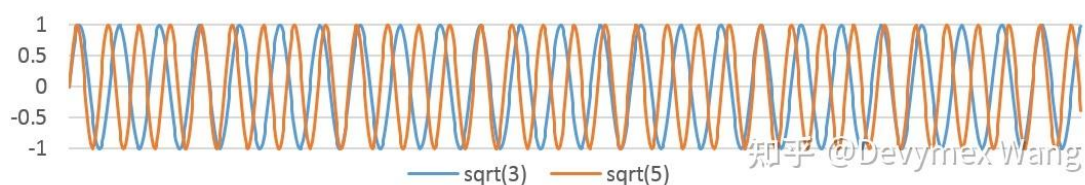


图 6 单音 a（橙）与单音 b（蓝）的波形

无论是看起来还是理论分析，这两个波的波峰永远不可能相遇。但如果我们把这两个波进行叠加，便得到图 7 所示波形。

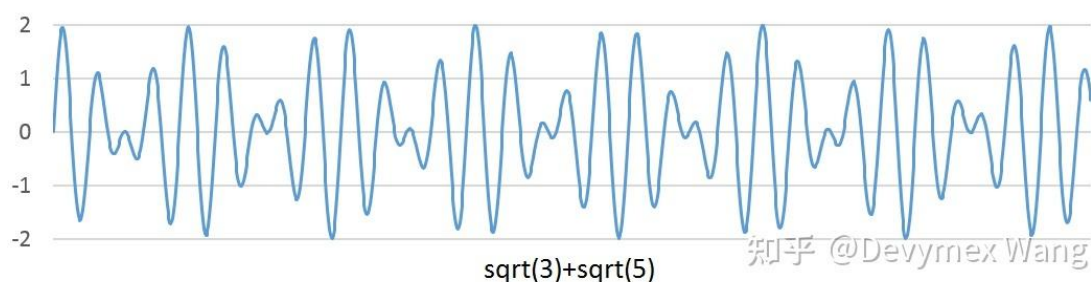


图 7 两个波叠加形成的波形

两波叠加后形成了周期近似为 $3 \times S_a \approx 4 \times S_b$ 的拍音。这是因为 $\sqrt{3}/\sqrt{5} \approx 0.7746$ ，接近于 0.75，也就是 3:4。因此这个拍音的“听感频率”大约为 $\sqrt{5}/4$ 到 $\sqrt{3}/3$ 之间。（以上图表及其数据均在 Excel 中用公式生成，同学们可以自行实验）。

五、总结

总结一下，正如谐波一节所介绍的，无论是钢琴的中央 Do 还是高音 Do，每个单音都是由多个谐波叠加而成，而多个单音的叠加又形成了拍音。来自不同乐器的单音和拍音相互交织形成和声，最终一系列的和声构成了美妙的音乐。实际上这段话有描述不严谨的地方，但由于目前朋友们的基础知识还不够，因此可先这样理解，相关的知识在后面的课程中会逐一介绍。

好了，这一讲先到这里，下一讲我们开始乐理的正题：《十二平均律和五线谱》。最后以亨德尔的《弥赛亚》选段之千人大合唱《哈利路亚》作为本节的结束。音乐的力量你们感受一下，请欣赏：

<https://www.bilibili.com/video/BV1Lt411y7Sf>

（二） 十二平均律与五线谱

在第一讲中我们已经提到了纯八度（中央 Do 和高音 Do），想必朋友们已经用耳朵有了感性的认识，并知道纯八度的拍音是由频率比为 1:2 的两个单音构成。物理和数学的原因决定了纯八度的两个单音的频率比例，但这远远不足以构成音乐的，接下来我们就要学习如何在这两个单音之间产生更多的单音。在展开这些知识之前，本着理工科追本溯源的精神，我们先了解一下乐理是如何发展起来的，然后再谈理论。

一、乐理发展史 · 之一

人类的三大类乐器类别：弦乐，管乐和打击乐有其分别的来源，但音律系统则基本上是从音调变化最丰富的弦乐上发展起来的。弦乐就是利用琴弦的振动发出声音，琴弦振动部分的长短、粗细、质量、密度等因素综合决定了它振动的频率。一般来讲两根同质琴弦的长度比等于它们所发出声音频率的反比，这成为了制定音律标准的最佳性质。

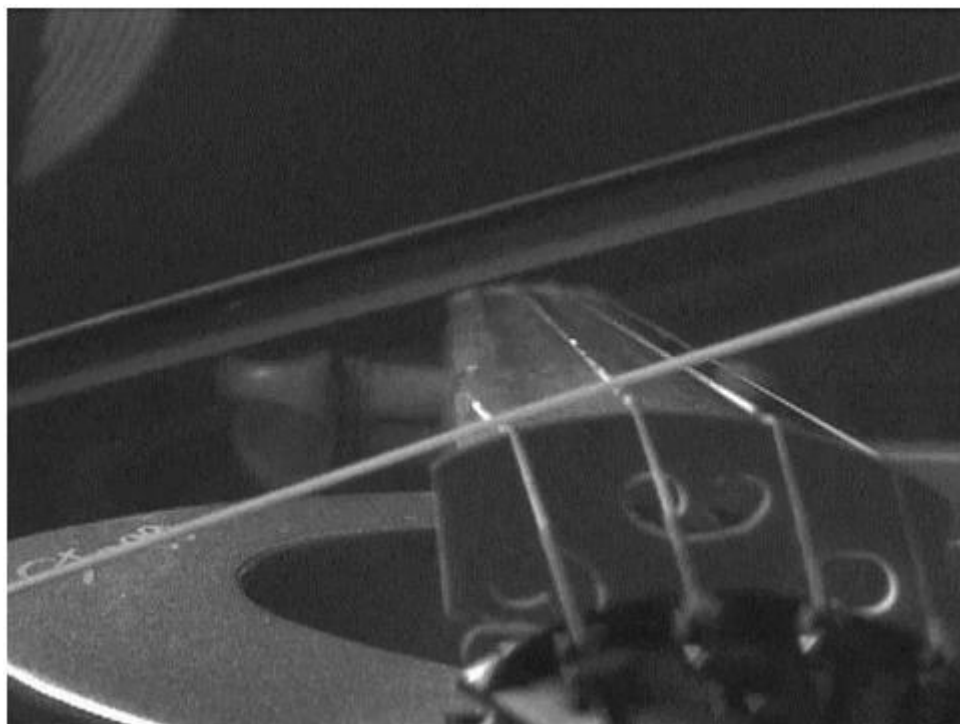


图 8 小提琴琴弦的振动（慢镜头）

要使不同的音组合在一起形成音乐，必须定出这些音的相对音高，并将悦耳动听的音进行组合；此外还要定出绝对音高，使同一首音乐到哪里演奏都有相同的效果。因此早期的人们以一根固定长度的琴弦为准，将其作为标准音高，然后用各种不同的比例切分这根琴弦，从而得到了多种不同的音高。这些音律的具体制定过程我们留到后文再行说明。

为了便于记录和表达这些音高，人们发展出了表示**相对音高**的十二平均律系统和表示**绝对音高**的五线谱系统。这些音律系统历经上千年的变革与改进，并随着数学水平的发展不断提高而趋于稳定，最终形成如今庞大而复杂的理论体系。后文的相关内容也是围绕相对音高和绝对音高两大系统展开的。

目前世界上最通用的音律体系——十二平均律的历史非常悠久，最早可以追溯到公元 400 年左右的中国人何承天。公元 16 世纪的明

朝人的朱载堉（朱元璋的九世孙）将十二平均律发展为完整的理论水平，到 16 世纪末，可能是由当时教皇国的传教士利玛窦将十二平均律法从中国带回西方，直到 17 世纪才开始在欧洲大陆广泛流传。中国人发明了十二平均律，但中国文明自清朝开始的衰落，使得中国古典音乐的理论水平与西方音乐的差距越来越大，直到没落于下里巴人。

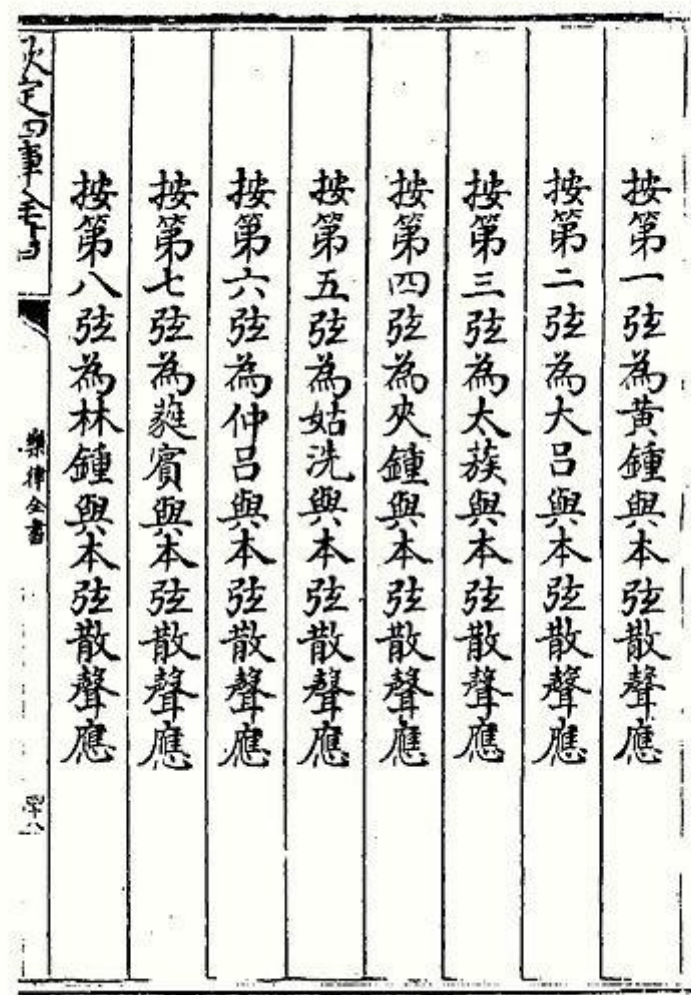


图 9 明代朱载堉的《乐律全书》中对十二平均律的记载

当西方有了十二平均律这一黄金律法，新的和声理论、自然调式

（念“Diao Shi”，不念 Debug）和各种相关调性也就随之产生了，而这些系统则几乎全是由西方发展出来的。我们目前听到的所有古典音乐和现代音乐（包括流行、摇滚、歌舞剧）都是基于西方的音乐理论。

西方古典音乐（维基百科）可以说发源于文艺复兴时期（1400年到1600年），在文艺复兴时期结束时，音乐艺术已经有了长足的发展。人们获得了改进的和新发明的各种乐器，比如新式的小提琴、羽管键琴（也叫大键琴，是钢琴的前身）、双簧管（尚未从萧姆管中完全脱胎）等等。还得到了新的演奏和作曲技法，比如更复杂的和声技巧，对位法技巧等等。当然，还有最重要的东西：五线谱。在文艺复兴时期之后的巴洛克时期，这些新玩意帮助音乐家们进一步的挖掘音乐理论层面的东西，现代乐理就是在这一时期逐步发展完善的。



图 10 一台巴洛克时期的羽管键琴

西方音乐长期以来都是为教会服务的，西方宗教也非常重视音乐艺术的发展。音乐课是教会学校的主要课程，很多音乐理论也都来自于教会音乐家。当时的调式系统称作“古教会调式体系”，一共有 12 种，现在只有少数仍在使用，包括对应自然大调的“伊奥尼亚”调式和对应自然小调的“爱奥尼亚”调式。关于调式与调性的知识，会在后面的内容中做进一步介绍。

历史课就暂时上到这里，下面我们开始分别介绍十二平均律和五线谱。

二、十二平均律

十二平均律（维基百科）是音乐中最底层的系统，规定了两个单音的相对音高，就像计算机中的二进制系统规定了各种运算方式一

样。简单来讲，十二平均律体系将一个“纯八度”（暂不理睬为什么叫做“纯八度”）分成 12 份，每份称为 1 个半音，两份为 1 个全音，以此定出所有中间的单音。现在我们有了好几个需要定义的名词，下面将是一大堆严谨的数学定义，但是作为理工科人的我们还怕这些吗？

为了表示相对音高，首先要给出音程的概念：**音程**就是两个音之间的频率差距，用**音数**来衡量。频率不同则音不同，而从数学上讲频率是连续的，因此音也是连续不可数的。但是十二平均律系统规定了离散的音的产生方法，这样我们就可以“数出”音程了。

上节课我们已经学到频率比为 1:2 的两个单音之间的音程被定义为“纯八度”，例如某个单音的频率为 f ，那么它与频率为 $2f$ 的另一个单音之间就构成了一个“纯八度”音程。按照十二平均律系统，我们可以以 f 为基准音，在区间 $[f, 2f]$ 内得到 13 个不同的单音，它们的频率分别为：

$$2^{0/12}f, 2^{1/12}f, 2^{2/12}f, \dots, 2^{12/12}f$$

其中第一个音就是 f 自身。如果将 f 设定为 440Hz，从 $f = 440$ 到 $2f = 880$ 这 13 个单音的频率就可以用此公式算出，画在坐标系中如图 11 所示。

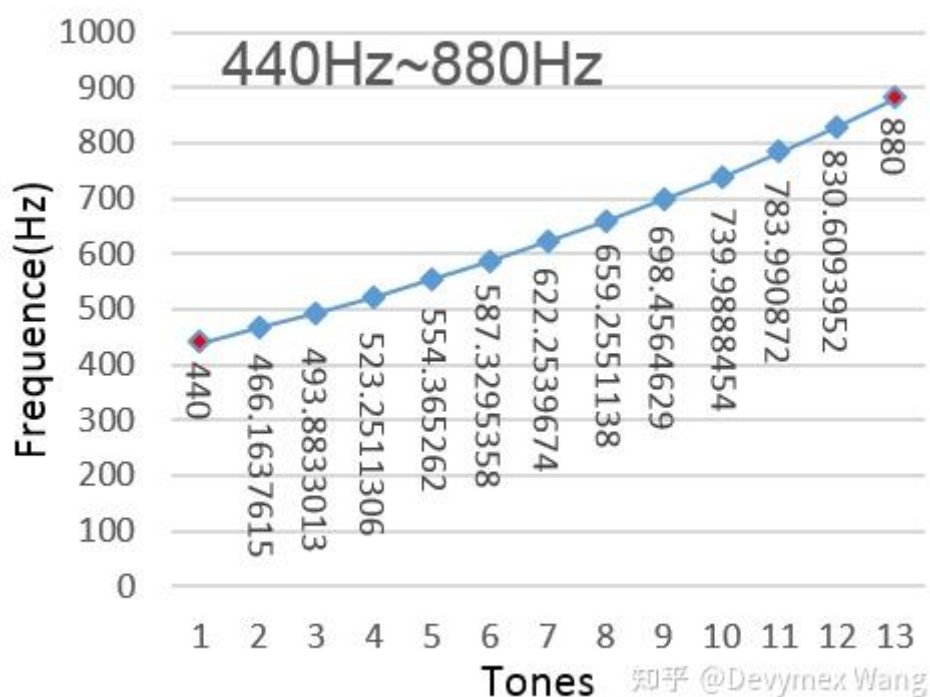


图 11 440Hz 到 880Hz 的“纯八度”音程中的 13 个单音

注意每两个相邻的单音之间是等比关系，比例是 $2^{1/12} \approx 1.06$ ，因此它们所构成的是一条指数曲线。根据上述方法，给定任意基准频率 f ，我们都可以在区间 $[f, 2f]$ 中构造出 13 个单音。十二平均律系统规定任两个相邻的音之间的音数为 **0.5**，那么给定两个音的音程为 t （即两音之间相隔的音的数量 $\times 0.5$ ）和较低的一个音的频率为 f_a ，我们就可以算得较高那个音的频率 $f_b = 2^{2t/12} f_a = 2^{t/6} f_a$ 。13 个单音之间不同的音程一共只有 12 种，人们给它们都起了名字：

相差音数	音程名称
0.5	小二度
1	大二度
1.5	小三度
2	大三度

2.5	纯四度
3	三全音
3.5	纯五度
4	小六度
4.5	大六度
5	小七度
5.5	大七度
6	纯八度

我把这些音程名称都标记为红色，就是为了提醒大家：整个乐理中有半数以上的内容都和音程相关，因此**必须记住**这些音程名称和对应的相差音数，否则后面的内容无法开展。

为了方便描述，我们将音数为 1 的音程称为全音，将音数为 0.5 的音程称为半音。由此可知：小二度到大二度是 1 个半音，小三度到纯四度是 1 个全音，纯五度到纯八度是 2 个全音加 1 个半音，等等。实际上，每一个音程还有其它的名称，这叫做“异名同音”。例如小三度又称为增二度，大六度又称为减七度等等，有兴趣可参见维基百科：音程。音数更多的音程也是存在的，但一般很少用到。

上面所述的相关概念都是关于相对音高系统的，也就是说十二平均率规定了音与音之间的频率比例。接下来要讲解内容就和绝对音高相关了，我们将使用一种新的语言来描述，那就是五线谱。

三、五线谱入门

五线谱是一种音乐语言，可以用来记录几乎任何形式的音乐。五

线谱中记录的最主要的东西就是**音符**，一个音符表达一个单音，每一个音符都具有绝对的音高。也就是说五线谱上的同一个音符在不同乐器上演奏出来的音高是相同的（忽略调校的差异）。



图 12 《北京欢迎你》（节选）

图 12 所示为一个简单五线谱，五根线从低到高分别称作**第一线**、**第二线**、**第三线**、**第四线**和**第五线**。五根线中间的四个区间分别称为**第一间**、**第二间**、**第三间**和**第四间**。这些“线”和“间”都对应不同的音高。从理工科观点来看，一条五线谱是一个二维直角坐标系，从下到上是频率轴，从左到右是时间轴。

图 12 最左边的符号是**高音谱号**，现在常用的谱号只有四种：**高音谱号**、**中音谱号**、**次中音谱号**和**低音谱号**，如下图 13 所示。这里最常见的就是左边的高音谱号，它代表该五线谱是一个**高音谱**，即确定了标记在线和间上的音符的音高基准。高音谱号中间的那个圈的圆心表示一个称作**G**的音的位置，而高音谱号本身也是由大写字母**G**演化而来的。历史上还出现过位置更靠下的高音谱号，不过现在已经不再使用了。

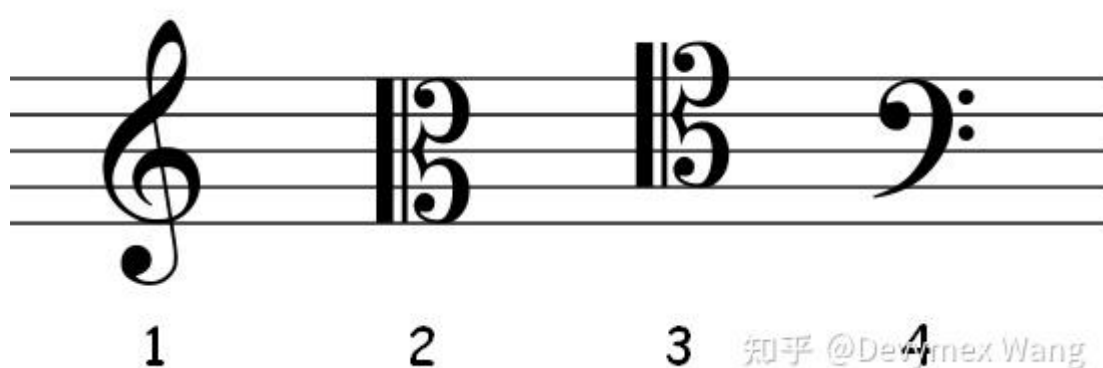


图 13 常用的四种谱号

再看图 12 所示的乐谱，高音谱号的右边有一个 **b**，这叫做降号，它画在第三线上表示该谱的调性是 **F** 大调。降号的右侧有两个数字：**2** 和 **4**，它们表示节拍，即以四分音符为 **1** 拍，每小节 **2** 拍。乐谱的中间和末尾处有两条切断五条线的竖线，这是小节标记，两条竖线之间是一个小节（高音谱号视为第一个小节的开始）。小节和节拍都是和节奏相关的东西，先混个眼熟即可。

线上和线间的音符标记是由一个黑豆、一条短竖线和连在短竖线一端的波浪线构成，见图 14 所示。



图 14 音符的画法

黑豆称为符头，短竖线称为符杆，波浪线称为符尾，符头和符尾分别画在符杆的上下两端。可以符头在上符尾在下，也可以反过来，这是由符头在五线谱中的高低位置决定的。如果符头位置较高，就应画在符杆下方。应当注意的是还有一种音符没有符尾；还有一种音符连符杆都没有，用圆圈表示符头；一些音符的符尾还可能连在一起，形成一条粗横线，这些都和音符的时长有关，我们现在只关心符头的

高低位置，也就是音符的音高。

五线谱中的每个音符都有一个名称，即音名。音名一共有 7 个，每个音名又对应一个唱名，它们分别是：

音名	A	B	C	D	E	F	G
唱名	La	Si	Do	Re	Mi	Fa	So

唱名是由一位意大利音乐理论家桂多·达莱佐从一首拉丁语圣歌的歌词中抽取出来的。而音名则是由后来的英国人嫌拉丁唱名太麻烦，就用英语字母代替了。但过去无论是过去还是今天，**A** 都是基准音（与主音概念不同，注意区别），**ABCDEFG** 这样 7 个音连在一起形成的音阶称为“小调音阶”，不过后来大调比小调更为普及，便趋向于使用“大调音阶”（**CDEFGAB**）的主音 **C** 作为一个纯八度音程的开始。显然，人们使用的全部音符数远多于 7 个，因此唱名及其音名是循环使用的。五线谱中的所有音符的音名如图 15 所示。

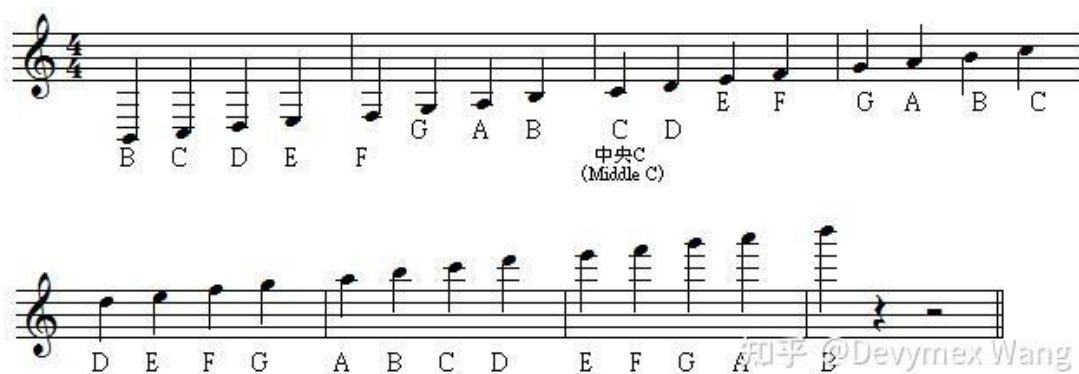


图 15 五线谱表达的所有音符

如果音符过高或过低，在五条线中画不下了，还可以在五根线的上面或着下面加线，这些线叫做“下加 x 线”和“上加 x 线”，x 可以是“一”、“二”、“三”……。比如图 14 最低的音 B 就画在“下

加五线”上。

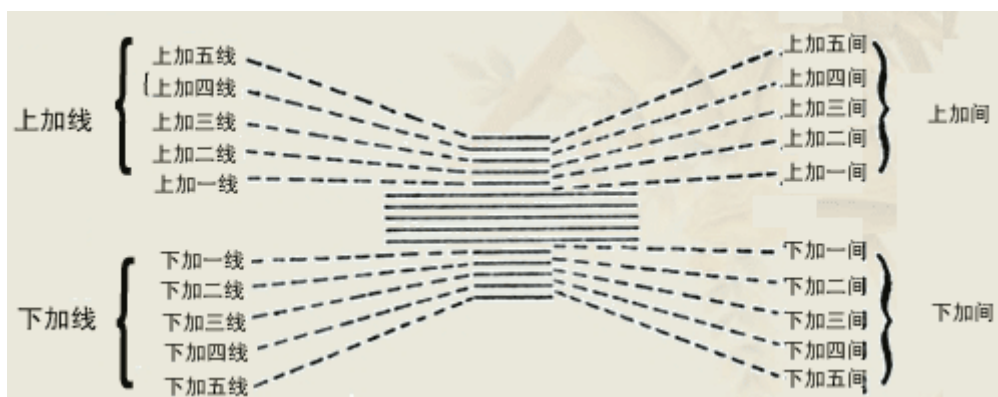


图 16 五线谱的表示范围

注意相邻的同名音符之间的音程是八度……等等，八度？难不成是第一节课讲的……？嗯，说对了，第三间的 C 比下加一线的 C 的频率的确高了一倍！再高一倍我们还可以得到上加二线的 C。从图 7 的谱号可知这是一个高音谱，人们规定高音谱中第二间的 La，也就是图中上面一排倒数第三个音符 A，频率是 **440Hz**。以 A 为基准，其它音符的频率就可以用十二平均律系统从中音 A 推算出来了，这就是基准音 A 的概念。然而此时我们还没有学习五线谱中各音符之间的相对音高，这一部分内容留到下一讲。



图 17 格里格《培尔金特》选段

上面这个五线谱就要复杂得多了。高音谱号的后面有 4 个 #，这是升调号，对应的调性是 E 大调。节拍是 6/8 拍，即以八分音符为 1 拍，每小节 6 拍。五线下面的“P”符号为强弱标记，表示演奏的力度（音量大小），而音符上面的弧线则是延音记号，与演奏技法相关。最后有一个特殊符号，称为休止符。五线谱里的名词还有很多，就像

我们计算机语言中的语法是非常丰富的。更进一步的内容下一讲再说。

四、总结

这一讲我们学习了两种音律系统，一种是定义单音之间相对音高的十二平均律，另一种则是定义了单音的绝对音高的五线谱系统。这里面确实有很多数理逻辑的东西，具有一定的难度，要想理解透彻还需要仔细阅读和思考。感到困难了吗？请坚持下去，我会尽量让这些知识组织得更符合理工科人学习新事物的习惯。

好了，这一讲就到这里，下一讲将深入五线谱，以及和声与和弦理论。最后以一首舒伯特的《鳟鱼五重奏》第四乐章作为结束，请欣赏五位大师帕尔曼（小提琴）、杜普蕾（大提琴）、祖宾梅塔（低音提琴）、祖克曼（中提琴）、巴伦勃依姆（钢琴）的辉煌演绎。

<https://www.bilibili.com/video/BV1us411r7qC>

（三） 五线谱进阶与和声理论

上一讲我们学习了表示音符相对音高的十二平均律系统和表示绝对音高的五线谱系统，这一讲将对我们已经学到的这些知识做进一步展开，并对和声理论做简单的介绍。和上一讲一样，我们先从历史开始讲起。

一、乐理发展史·之二

人们很早就发现长度比为 1:2 的两根弦同时拨响可以发出非常协调的声音，但仅仅使用 2 倍关系的弦长所构造出来的音过于单调了，可以说根本不足以形成音乐，因此人们就尝试用其它的弦长比来发声。一根固定在平面上的弦如果从中间任意位置按在平面上，就形成了左右两段成不同长度比且可以分开振动的弦，人们就是用这种方法尝试不同的弦长比的。

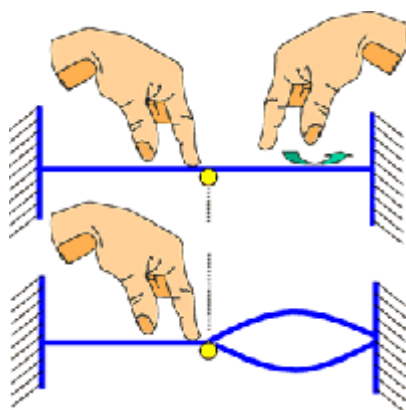


图 18 弦长的分割（左手按下，右手拨动）

我们把原弦长所发出的频率记为 f 。用手指按在弦的正中间，即 $1/2$ 处，形成的两段弦长是相等的，它们发出的声音频率都为 $2f$ ，这样纯八度音程就形成了。接下来人们尝试在纯八度音程的中间找到其它的音，首先按在弦长的 $1/3$ 处，在较长的那一段人们听到了一个新的音，它的频率是 $3f/2$ ，听起来与 f 非常协调。信心满满的人们接下

来又尝试按在弦长的 $1/4$ 处，但较长那一段的音听起来虽没有前一个音程那么协调，但也挺不错，它的频率是 $4f/3$ 。用同样的方法人们又得 $5f/4$, $6f/5$, $7f/6$, ……然而人们很快就遇到了麻烦：首先，新得到的音的频率与 f 的叠加变得越来越不协调（其原因将在下文“和声”部分详细说明）；其次，新产生的音与前一个产生的音之间也不存在任何协调关系，这样下去是不可能产生悦耳动听的音乐的。人们只能另辟蹊径。

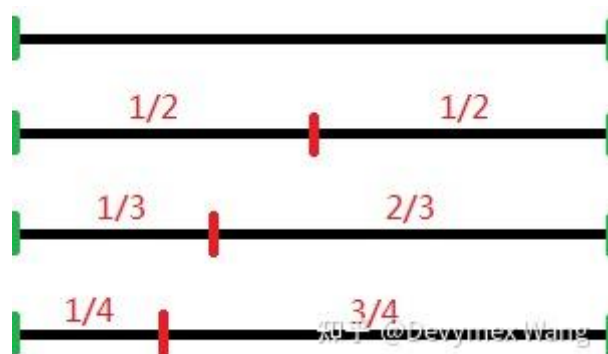


图 19 三种最简单的分割

不过这时人们已经获得了 3 种最简单也最重要的弦长比，分别是 $1:2$ 、 $2:3$ 和 $3:4$ ，它们来自于 3 个不同的分割点。为了获得新的频率，又要与 f 或之前已产生的频率保持协调，那么能否以这 3 种分割点为基础，从较长的那一段再以同样的比例继续细分呢？当然是可行的，因为协调性可以传递！ $1/2$ 即是原弦长的一半，再将其细分为 $1/2$ 就得到原弦长的 $1/4$ ，协调性没问题，但这仍然是纯八度音程，没有出现新的音程。而从 $2/3$ 处再细分情况就大不相同了， $2/3$ 再细分 $2/3$ ，就得到了与原弦长比为 $4:9$ 的长度。 $9f/4$ 是一个全新的频率，显然它与 $3f/2$ 的协调程度和 $3f/2$ 与 f 的协调程度是相同的。再从 $4/9$ 中分割出 $2/3$ ，得到频率 $27f/8$ ……一直用 $(2/3)^n$ 切分下去就得到了如下的频率

序列：

n	频率	倍率
1	$3f/2$	1.5
2	$9f/4$	2.25
3	$27f/8$	3.375
4	$81f/16$	5.0625
5	$243f/32$	7.59375

上表中的“倍率”是指其频率除以f的值。然而这样找音存在一个问题，那就是后面产生的音已经超过以f开始的一个纯八度音程了。我们把这 5 个音和 $4f/3$ 一并标记在数轴上，如图 20 所示。

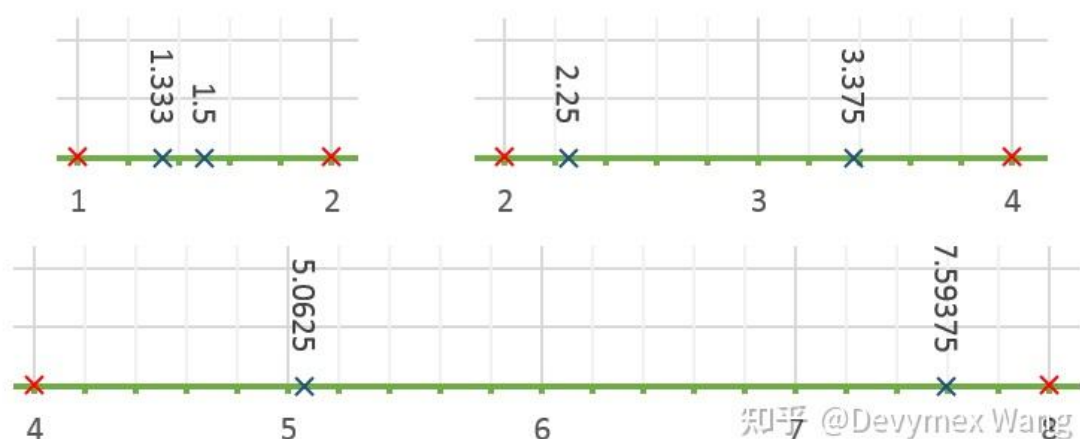


图 20 7 个音所隶属的八度音程

可以看出，这 6 个音（黑 x 表示）分别隶属于 3 个不同的纯八度音程（红 x 表示）。 $4f/3$ 和 $3f/2$ 隶属于 $[f, 2f]$ ， $9f/4$ 和 $27f/8$ 隶属于 $[2f, 4f]$ ， $81f/16$ 和 $243f/32$ 隶属于 $[4f, 8f]$ 。既然我们要确定的只是一个纯八度音程中的相对位置，那最简单的办法就将这 6 个音的频率都除以所在纯八度的最低频率。这样得到的新的 6 个倍率，从小到大排列

1.265625 1.333 1.5 1.6875 1.8984375>。f自身的倍率为 1，2f为 2，把这 8 个倍率一起画在二维坐标系中，见图 21 所示。

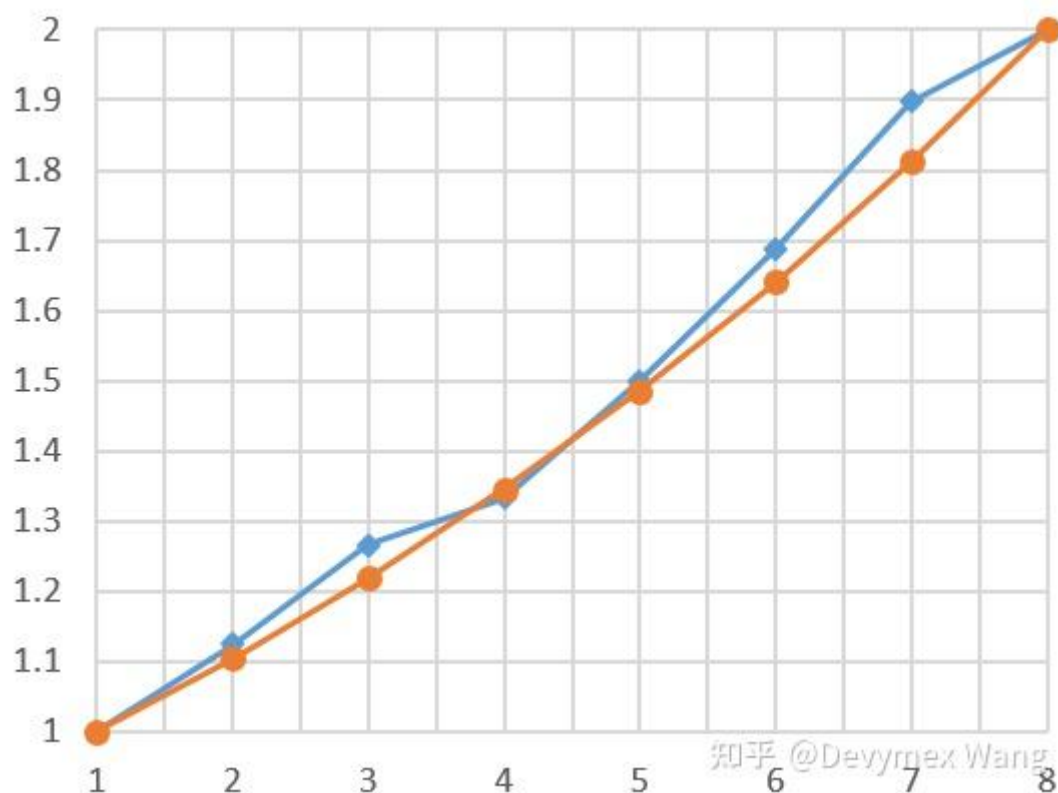


图 21 7 音阶折线（蓝色）与理想指数曲线（橙色）对比

挺奇妙的不是吗？与理想的指数曲线相比误差并不大。这不仅意味着音和音之间存在协调关系，而且按这样的倍率关系，从任意置开始的连续 7 个音都能形成一条听起来相当不错的音阶。这就是 7 音阶的来历。这种方法由 f 产生的第 1 个音是 $3f/2$ ，除 $4f/3$ 之外的其它因都是 $3f/2$ 产生，而 f 到 $3f/2$ 是纯五度关系，因此这个方法被人们称为“五度相生律”，世界历史上多个民族都独立发明出五度相生律，但一般认为最早是由古希腊哲学家毕达哥拉斯提出的。

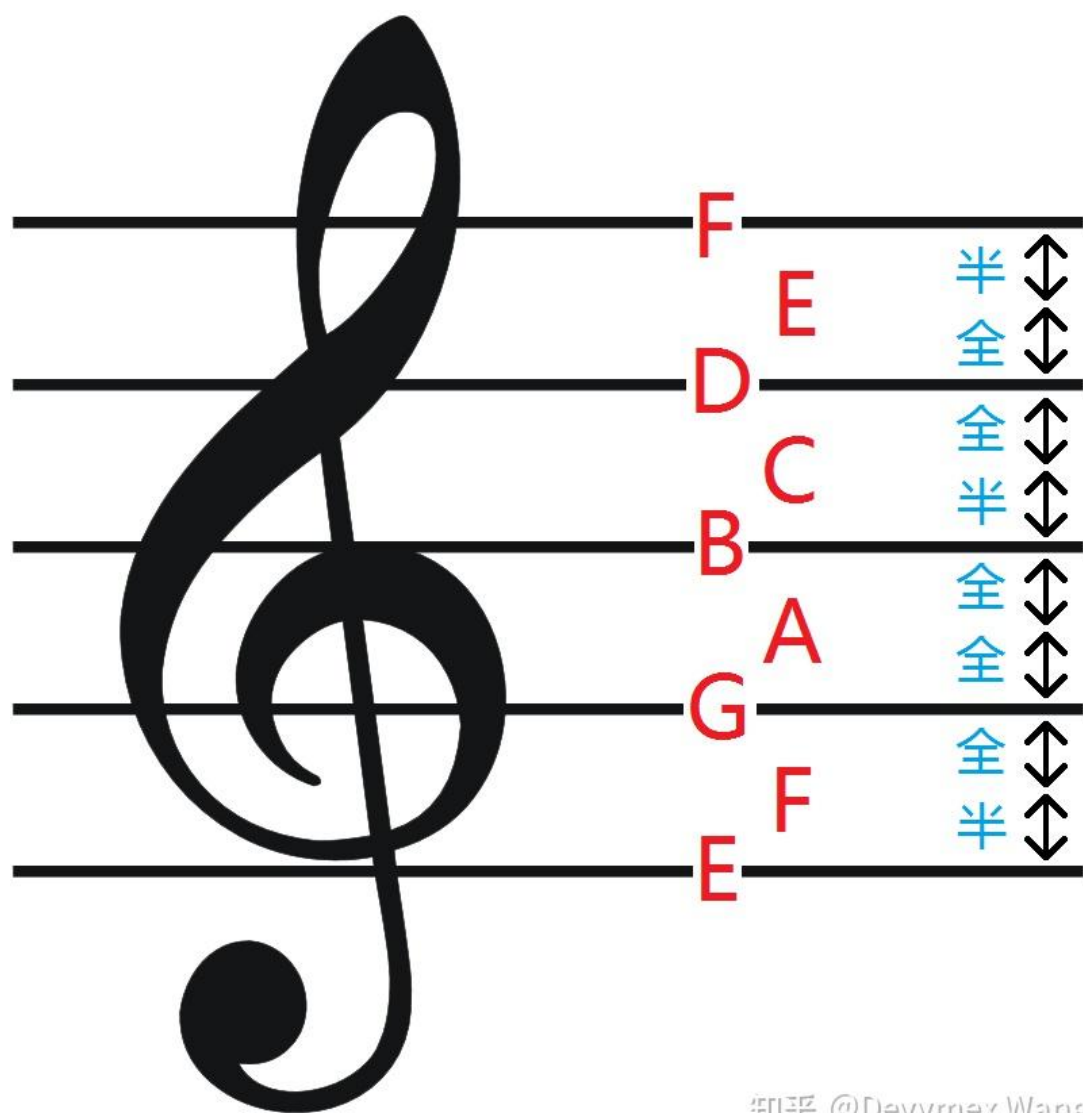
然而，随着音乐水平的不断发展，这 7 个音慢慢变得不够用了，而且相邻两个音之间的频率比并不统一，跟不上乐器音准的提高速度。因此后来人们又发明出了十二平均律系统，直到现在 7 音与 12

音并存的局面。篇幅关系，12 音阶的来历我们放在下一次历史课上讲解。下面的内容我们会学到关于五线谱的新知识，并以此为基础了解到为什么有的音程听起来协调，而有的不协调，这些都是和声理论要研究的内容。

二、五线谱进阶

1. 五线谱中的相对音程

上一讲我们已经知道了高音五线谱中，第二间的 A 的音高定为 440Hz，那么我们如何来确定其它音的音高呢？下面将会按照十二平均律的法则在五线谱中建立相对音高系统，请看图 22。



知乎 @Devymex Wang

图 22 放大的没有任何升降标记的高音谱

上图是一个放大的最简单的高音谱，可以看到第一线上的音名是 E，第一间的音名是 F，其它以此类推。右侧的“全”和“半”表示相邻两个音符之间的音程是全音还是半音。至于为什么是这样规定的，我们会在下一讲《调式与调性理论》中进一步展开。确定了音符之间的相对音程，并确定了一个基准音高 A，我们就可以开始推算所有其它单音的频率了。

首先为了方便的表示众多音符，下文将使用**科学记音法**（见维基百科）来表示所有的音符，即两个字符表示一个音：XN。其中 X 为

音名，可以是 C, D, E, F, G, A, B 中的任意一个；N 为该音的序号，从 0 开始由低到高编号。N 每增加 1，音的频率就翻倍。根据科学记音法，高音谱下加一线上的 C 记作 C4，往高依次是 D4，E4，F4……往低依次是 B3，A3，G3……。所有的 C 音在五线谱上标记如图 6 所示。



图 23 五线谱上所有 C 音的音符

比 A4 低纯八度的音符是 A3，其频率为 A4 频率的一半，即 220Hz，比 A4 高纯八度的音符是 A5，频率为 A4 频率的二倍，即 880。A0 到 A7 间所有 A 音的频率见下表：

基准 音名	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
频率 (Hz)	27.5	55	110	220	440	880	1760	3520

要计算其它音符的频率 f_x ，则应以音符 XN 下方某个音 YM 的

频率 f_Y 作为基准，然后算出 XN 与 YM 之间的音数 t ，则有 $f_X = 2^{t/12} f_Y$ 。例如，由于第三间的 C 音（即 $C5$ ）与其下方第一个 A 音（即 $A4$ ）之间的音程是小三度，音数 $t = 1.5$ ，因此 $C5$ 的频率为： $440 \times 2^{3/12} \approx 523.25\text{Hz}$ 。当然，也可通过纯八度音程的倍率关系计算，比如 $C4$ 的频率为 $C5$ 的一半，约为 261.63Hz 。

2. 升降记号

五线谱中，音符的后面可以添加升降标记，表示该音符升高半音或降低半音。升号为 \sharp ，降号为 \flat 。显然，有两个音是没必要升的： E 升半音就是 F ， B 升半音就是 C ，而这就是钢琴键盘布局形成的原因。如下图所示：

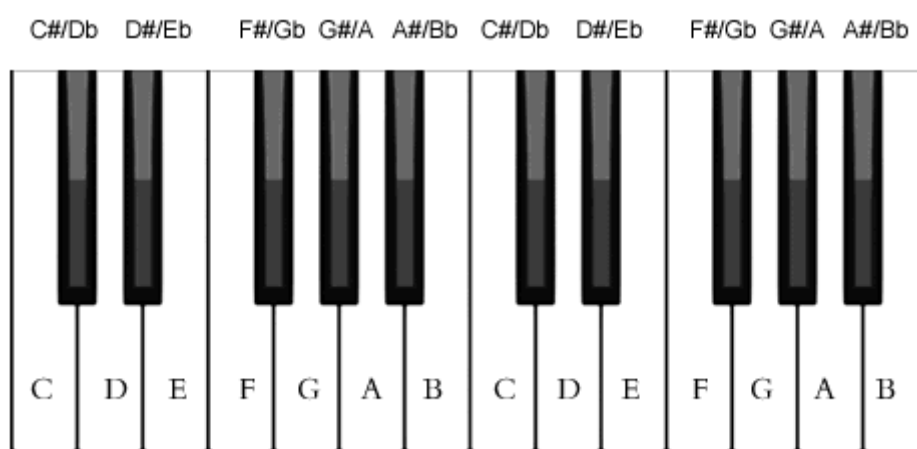


图 24 钢琴键盘中部分键位的音名（下面是白键音名，上面是黑键音名）

钢琴上的黑键比左边的白键高半音（也可以说是比右边的白键低半音），因此白键 B 和 E 的右边就没有黑键。此外，所有的降音都可以由另一些音的升音代替，比如 $B\flat$ 就是 $A\sharp$ ， $G\flat$ 就是 $F\sharp$ 。那既然如此，为什么不用升号代替全部的降号呢？原因就是为了可读性，正如写代码时不能为了减少代码量就把所有的 `if` 语句都换成三目运

算符。

如果一段谱子中的某个音符几乎都要升半音或降半音处理，那就可以在高音谱号的右侧，这个音符所在的一条线或一个间上标记升降号。



图 25 肖邦《练习曲 Op.25》第 3 首选段（略有删改简化）

在图 25 所示乐谱中，第三线上标记了一个降号 b，表示这个谱子里的所有 B 音都需降半音，除非另外在个别音符上标记升降或还原记号。音符被升降半音后的频率可根据之前学过的相邻音符之间的频率倍数关系计算。升高半音后的频率为原频率的 $2^{1/12}$ 倍，比如 C5 升高半音的频率即为 $523.25 \times 2^{1/12} \approx 554.37\text{Hz}$ 。

3. 双音谱

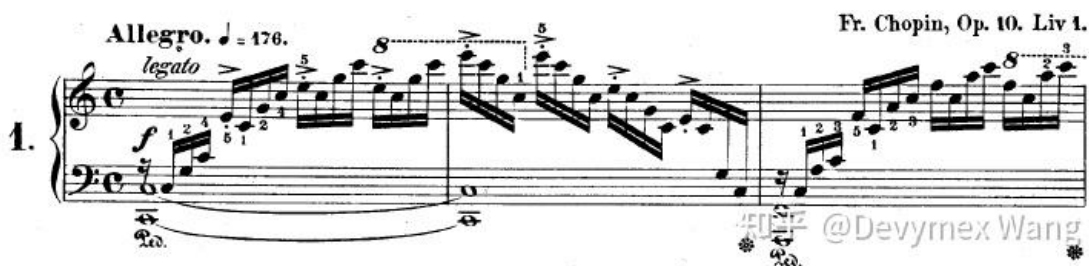


图 26 肖邦《C 大调练习曲》选段

图 26 是一个钢琴谱，这下我们终于见到了高音谱号和低音谱号并存的样子了。标有高音谱号的上面一排是高音谱，标有低音谱号的下面一排是低音谱，它们分别对应钢琴键盘上不同的键区。低音谱的“线”和“间”所对应的音符与高音谱不同，如图 27 所示：

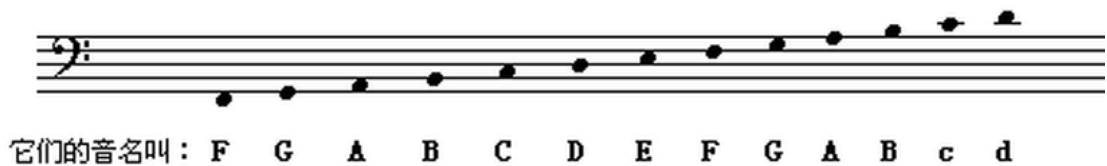


图 27 低音谱各音符及其音名

其实低音谱中的音名也没有那么难记，实际上它和高音谱是相互连接的，中间刚好只隔了一条加线。高音谱的下加一线就是低音谱的上加一线，而这条线上的音就是中央 C，即 C4。和高音谱号类似，低音谱号的圆心标记的是 F3 在谱中的位置，即第四线上。

低音谱中各音的频率计算与高音谱是相同的，只要搞清音程关系，从基准音推算即可。比如在前面的钢琴谱中可以看到低音谱的最左端有两个 C（它们是用圆圈表示的），一个是第二间的 C3；另一个是下加二线上的 C2。C3 和 C2 的频率分别为 C4 频率的 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$ ，而 C4 的频率在前面已经计算过了。

利用上面的知识，你已经可以计算任何一个五线谱中每个音的频率了，八度音程中各音之间的音程可参见第五讲后面给出的音程表。那么接下来我们介绍对一些特别的频率进行合成的问题——和声。

三、和声

和声，是指由超过一个单音所组合而成的声音。你可能会发现，和声的定义与拍音的定义是非常相似的。的确如此，所有的拍音都是和声，但和声不一定会产生拍音。首先，人耳可以听到的声波频率范围大约为 20Hz 到 20000Hz，如果和声产生的频率超过这个范围，通常就不能称之为拍音了。其次，不同的乐器发出的单音进行叠加也可以称为和声，这也不是拍音。最后，拍音要求所有单音同时发出，而

和声则无此要求，只要一个音在另一个音结束之前发出，它们交叠的部分就形成了和声。

肖邦《C 大调练习曲》的前两个小节，下载收听。这是由一架钢琴演奏的曲目，前两个小节的乐谱在本讲第一节中给出。一开始的那个低沉的重音就是 C3 和 C2 的和声。朋友们可以在在线钢琴上试着弹一下 C3 和 C2 这两个单音的和声。

<https://www.autopiano.cn/>

乐谱中这个和声从一开始延续到了第二个小节结束，在这期间，钢琴还奏出了一共 31 个音符，这每一个音符与持续的低音和声又形成了更复杂的和声。下面请收看《C 大调练习曲》的完整版，请朋友们注意钢琴家的左手总是保持按下的状态，都是在利用声音的延续制造和声。

<https://www.bilibili.com/video/BV1NW411v7oz>

在西方古典音乐理论中，和声主要研究两个单音构成的和声，三个或以上单音构成的和声一般称为和弦，我们放在下一节讨论。在一个纯八度范围内，两个单音的和声一共有 12 种，即与 12 种音程相对应。在钢琴键盘上以中央 C 键，即 C4 为准，请试听一下 C4 分别与 D4、E4、F4、G4、A4、B4 以及 C5 键同时按下的和声效果。听过以后有没有发现某些和声比较悦耳，而某些则比较难听？比如 C4 和 C5 同时按下（纯八度音程）的和声就毫无违和感，就像只有一个音；而 C4 和 D4 同时按下（小二度音程）就非常刺耳难听。这究竟是因为什么呢？

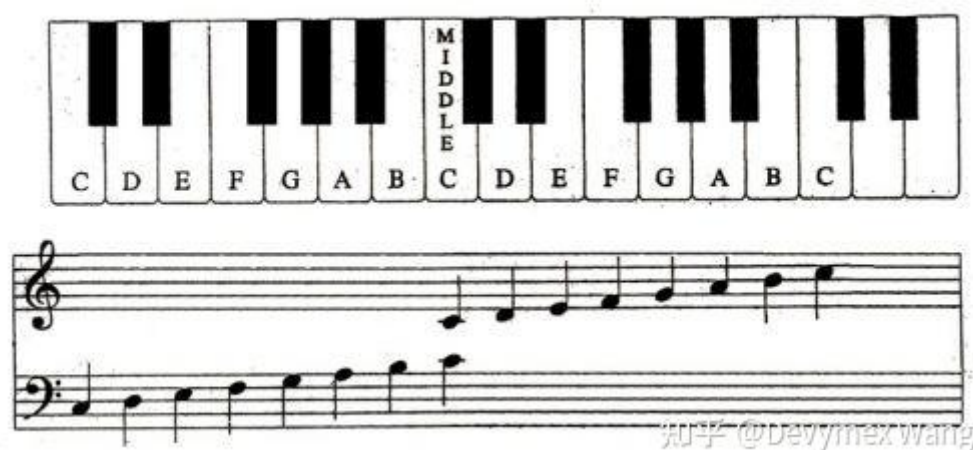


图 28 钢琴键盘与五线谱对照图

就是因为拍音！上一讲我们学到，相邻两个音之间的频率比约为 1.06，我们将这个数记为 p ，那么各音程的频率比（即相距某个音程的低音比高音）可由其音数 t 按公式： $1/2^{\frac{2t}{12}} = 1.06^{-2t}$ 算得。由于除纯八度外的所有音程的频率比均为无理数，因此他们的拍音的频率只能按他们频率的近似整数比来计算，详见第一讲第三节。计算近似整数比的数学过程是比较复杂的，这里篇幅有限，不做进一步的讨论。接下来我们分别换算一下 12 个音程的频率比。

音程	近似频率比	近似整数比	最小公倍数
小二度	1:1.06	15:16	240
大二度	1:1.12	8:9	72
小三度	1:1.19	5:6	30
大三度	1:1.26	4:5	20
纯四度	1:1.34	3:4	12
三全音	1:1.41	7:10	70
纯五度	1:1.50	2:3	6

小六度	1:1.59	5:8	40
大六度	1:1.68	3:5	15
小七度	1:1.78	5:9	45
大七度	1:1.89	8:15	120
纯八度	1:2	1:2	2

接近似整数比的最小公倍数排序，可以得到如下和声序列：<纯八度，纯五度，纯四度，大六度，大三度，小三度，小六度，小七度，三全音，大二度，大七度，小二度>

通过在钢琴上弹奏对比可知，越向左边的和声越“协和”，但也越空洞，就是好像只有一个音，不够饱满；越向右边的和声越“难听”，但也越饱满。人们根据这一特征，将和声的协和程度分为“极完全协和”、“完全协和”、“不完全协和”、“不协和”与“极不协和”五类，如下图所示：

极完全协和	完全协和		不完全协和				不协和		极不协和	
纯八度	纯五度	纯四度	大六度	大三度	小三度	小六度	小七度	三全音	大二度	大七度 小二度

图 29 各音程的协和程度

我们做一个实验来验证。比如 C4 和 G4 之间是完全协和的纯五度，他们的弦长比是 3:2，最小公倍数是 6，那么他们的拍音频率就是弦长为 C4 弦长 2 倍的弦所发出的声音的频率，显然就是 C3 的音。我们可以在在线钢琴上同时按下 i（C4）和 x（G4）键，然后试着同时按下 i、x 和 q（C3）键听一听效果。可以感觉到 C4 和 G4 把 C3 增强了。同理，A6 和 B6 这两个小二度音程的弦长比是 16:15，最小公倍数 240，拍音频率对应的音为 B2，然而 B2 与 A6 和 B6 相隔太远了，

我们无法听出拍音增强的效果。

和声理论已经发展为一门学科，称为和声学，内容是相当复杂的，这里只做简单的科普性介绍，感兴趣的同学可以阅读《和声学》。

四、总结

这一讲的内容是所有乐理中最复杂，也最困难的。但只要过了这一关，后面的内容就会轻松很多了。今天就到这里，最后给大家放一点福利，教你如何在 3 分钟内学会弹钢琴。玩笑归玩笑，也请各位结合本讲的内容，思考这里面的原理。

<https://www.bilibili.com/video/BV1Tb411x7TS>

（四）和弦与调式

通过前面的课程的学习，我们已经掌握了计算五线谱中任何一个音的音高（频率值），并且学习了音的组和方法：和声。这一讲将以这些知识为基础来介绍和弦与调式理论。这些内容中数理方面的并没有之前的课程那么多，但感性的成份却是比较丰富的，且要求记忆的东西也多了一些。不过，仍然先是历史课。

一、乐理发展史·之三

上一次的历史课已经研究了人们是如何用五度相生律构造出 7 音阶的过程，并知道这 7 个音分别是： $\{1, 1.125, 1.265625, 1.333, 1.5, 1.6875, 1.8984375\}$ ，它们对应的音名是： $\{C, D, E, F, G, A, B\}$ 。后来人们不断的改进音阶的生成方式，并增加纯八度音程内的音数，直到十二平均律这一黄金律制产生。今天我们就来研究 7 音阶是如何演化为 12 音阶的。

随着制作工艺的不断进步，乐器的音准越来越高，人们慢慢意识到五度相生律产生的 7 音阶与理想曲线相比误差实在是太大了。我们现在知道，当相邻的音都为等比关系时，音阶才最平滑。而原始 7 音阶中的第 3 个音和第 7 个音看起来是那么突兀，这样构造出来的音乐确实不够好听。后来有人提出“纯律”学说，但究竟是谁最早提出的至今还存在争议。有人认为纯律和五度相生律都是毕达哥拉斯提出或整理的，也有人认为纯律在中国 2400 年前的战国时代就已开始应用，还有人说是古希腊学者亚理斯托森努斯发明……不过可以肯定的是纯律在 2000 多年前就已被人类所掌握。纯律构造音阶的方法与五度

相生律不同，它是由纯五度（2:3）和大三度（4:5）为素材确定 7 音阶的律制。纯率生成的 7 个音的频率分别是： $\{f, 9f/8, 5f/4, 4f/3, 3f/2, 5f/3, 15f/8\}$ 。嗯，确实比五度相生律的那些巨大的分数简单多了，那他的平滑度怎么样呢？请观察图 30。

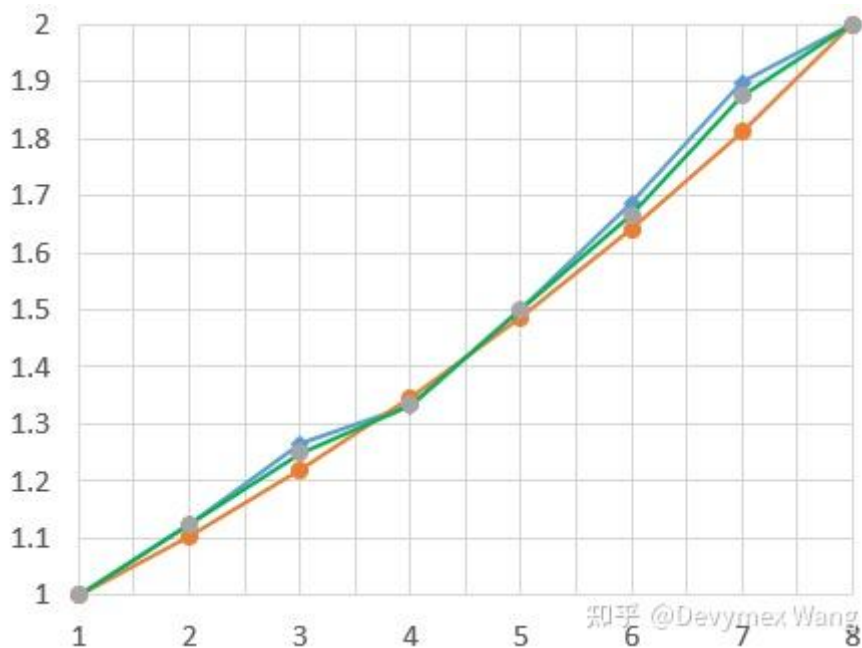


图 30 五度相生律音阶（蓝），纯律音阶（绿）和理想音阶（橙）对比

好是好点，不过就那么一点点而已，而且还打破了五度相生律产生的内部协调性。此外 7 个音也开始显得不够用了，人们希望通过变调使得音乐更加丰富，看来还得继续探索。

之前人们为了计算第 7 个音，就要计算 $3/2$ 的 5 次幂，这对于 2000 多年前的计算水平来说确实有点难了。然而数学的发展又一次给音乐带来了新生。人们通过计算发现， $3/2$ 的 12 次幂约为 129.74634，约等于基准频率 f 上面的第 7 个八度音的频率 $2^8 f = 128f$ ，那么可否继续应用五度相生律再产生一些音呢？看下表：

n	频率	倍率
---	----	----

1	$3f/2$	1.5
2	$9f/4$	2.25
3	$27f/8$	3.375
4	$81f/16$	5.0625
5	$243f/32$	7.59375
6	$729f/64$	11.3906
7	$2187f/128$	17.0859
8	$6561f/256$	25.6289
9	$19683f/512$	38.4434
10	$59049f/1024$	57.6650
11	$177147f/2048$	86.4976

由这些倍率产生的 12 音阶为（用倍率除以它下面的第一个 2^n 而得）：{1, 1.0679, 1.125, 1.2014, 1.2656, 1.3515, 1.4238, 1.5, 1.6018, 1.6875, 1.802, 1.8984}，把他们画在坐标系中，请观赏图 31。

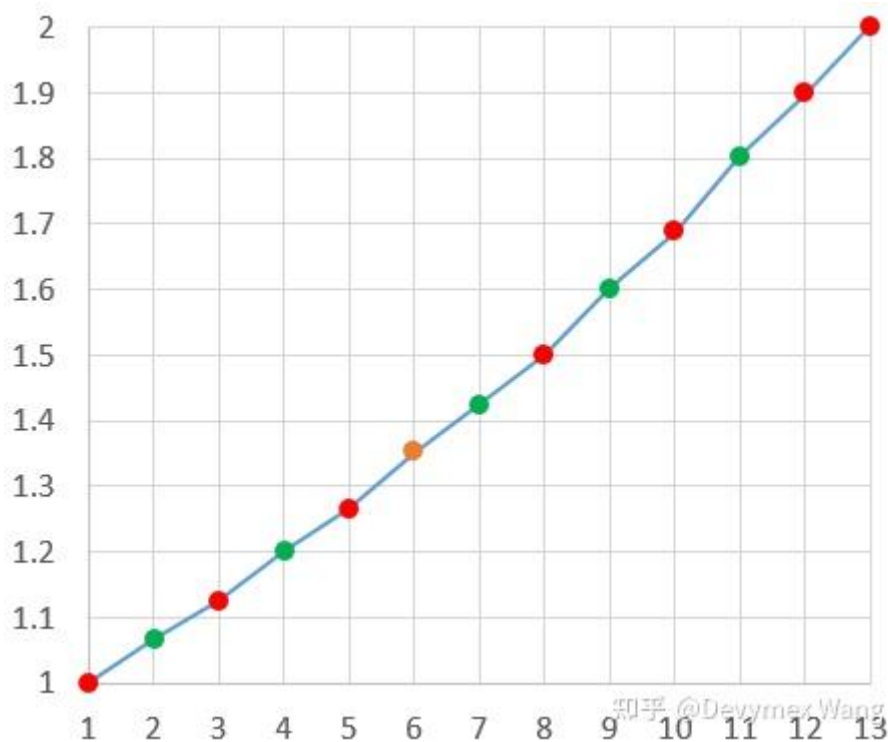


图 31 12 音阶坐标图

震惊了吗？多么平滑的一条折线，而且新产生的音都被“均匀”地安插在了原先的 7 音阶中间。我们不得不惊叹大自然的神奇，这也是音乐是世界上唯一通行的语言的原因吧！由于之前的七个音和它们的音名{C, D, E, F, G, A, B}已经非常流行了，且新产生的音都可以看作是用原 7 音阶中的某个音升半音而得，因此这 5 个新产生的音就被叫做{C#, D#, F#, G#, A#}，这也正是为什么 E 和 F、B 和 C 之间是半音的原因。

看起来已经很完美了，还有改进的空间吗？答案是有的。尽管五度相生律生成的 12 音阶已经相当平滑了，但仍然不是理想的“等比”音阶，这样就会导致一个潜在的问题。我们举例来说，大家都在 KTV 唱过歌，应该知道有些 KTV 的点播机有升降音的功能，当伴奏比较高而人声又吼不上去时，可以用降音功能把伴奏的音高统一降低一些，这样听起来仍然是非常自然的。比如一首歌原先的音的序列是<E F G

G F E>，降低半音就是：<D# E F# F# E D#>。听起来仍然非常自然的原因在于这一序列内部的音程比例关系没有变，仍然是以 1.06 倍率为基准的。在音乐术语中，这个过程叫做转调。然而要在五度相生律生成的 12 音阶系统中进行转调就会产生偏差，因为它内部的音程比例关系不是固定的。设想一群乐师给皇帝演奏曲目，乐器的音准都是预先调好的，结果皇帝一时兴起想高歌两句但又唱不上去高音，就命令乐师低两个音演奏，结果听到的伴奏完全不是刚刚那么回事了，这是多么尴尬的一件事。



图 32 至今仍有一些古老的乐器难以实现转调

后来人们又想出了各种修正的办法，比如构造一些等差数列来修正每个音与理想曲线的误差等等，但这些方法既复杂又不能从根本上解决问题。这时整个音乐界都在急迫的等待新律制的诞生。直到公元 17 世纪的明朝人朱载堉提出十二平均律，才拯救西方音乐界于水火之中。虽然十二平均律看起来那么完美，但也不是完全没有问题。有人认为十二平均律破坏了纯四度和纯五度的协调关系，也就是说我们之前讲的 F 音应该是 C 音频率的 $\frac{4}{3}=1.33333$ 倍，G 音应该是 F 音的 $\frac{3}{2}=1.5$ 倍，而在十二平均律中它们的倍率分别是： $2^{\frac{5}{12}} \approx 1.33484$ 和 $2^{\frac{7}{12}} \approx 1.49831$ ，和理想倍率其实所差无几，不是吗？在通常的演奏音域范围内，人耳几乎是不可能听出这些区别的，这也是十二平均律沿用至今而五度相生律和纯律都已遭淘汰的原因。

世界三大律制：五度相生律、纯律和十二平均律的故事就讲完了，今天的历史课可能有点枯燥，我们来听点音乐调节一下吧：

<https://www.bilibili.com/video/BV1ix411v7yL>

二、和弦

和弦（念“xian”，不念“xuan”，通常发儿化音）原指弦线，在音乐理论里，是指组合在一起的两个或更多不同音高的音。在欧洲古典音乐及受其影响的音乐风格里，更多时候是指三个或以上的音高组合。和弦的组成音，可分开演奏，亦可同时演奏。分开演奏的，我们称为分解和弦。

和弦的结构类型很多，如果按照组成音的多寡来区分，和弦可以分为三和弦、七和弦及九和弦等。三和弦是由三个音组成，七和弦是由四个音组成，九和弦则由五个音组成。如果按照和弦组成音之间的音程结构来分类，又可分为大和弦、小和弦、增和弦和减和弦四种形态。

1. 三和弦

以任意一个音 n_1 为基准，称为根音，向上三度得到 n_2 ，向上五度得到 n_3 ，这三个音的和弦称为三和弦。三和弦可以再分为大三和弦、小三和弦、增三和弦和减三和弦。这些三和弦的构成如下表所示：

名称	$[n_1, n_2]$	$[n_1, n_3]$
大三和弦	大三度	纯五度
小三和弦	小三度	纯五度

增三和弦	大三度	增五度
减三和弦	小三度	减五度

上表中[n1,n2]表示从 n1 到 n2 的音程, [n1,n3]表示从 n1 到 n3 的音程。注意增五度就是小六度, 减五度就是三全音, 这是在上一讲中提到过的异名同音现象。接下来我们就用钢琴的音阶来举一些三和弦的例子。

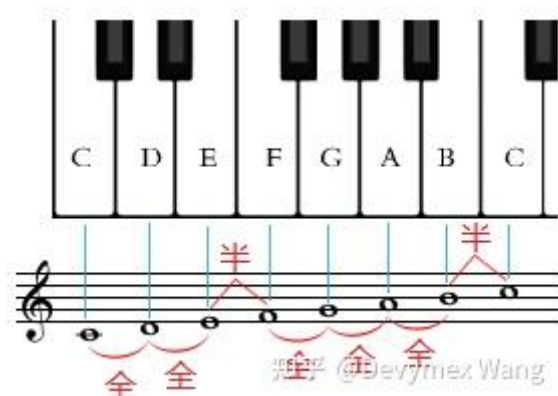


图 33 钢琴白键之间的音程

如果你已经完全理解了上一讲的内容, 很容易就可以推算出图 3 所示的对应关系。C 和 E 两键之间共有两个全音, 因此是大三度, C 和 G 是纯五度, 那么 C、E 和 G 三个白键就构成了大三和弦, 请在在线钢琴上试弹 (对应键盘上的 T、U 和 O)。C 和 Eb (E 左边的黑键) 是小三度, 那么 C、Eb 和 G 三个键构成了小三和弦 (在线钢琴的黑键可以用鼠标点)。同理可知: C、E 和 G# (G 右边的黑键) 构成增三和弦, C、Eb 和 Gb (G 左边的黑键) 构成减三和弦。

需要注意的是, 如果换一个音作为起始, 那么和弦对应的键位就会发生明显的变化, 且发出的声音色彩也会完全不同。以 A 为根音的大三和弦是 A、C#和 E, 小三和弦是 A、C 和 E, 增三和弦是 A、C#和 E#, 减三和弦是 A、C 和 Eb。12 种大三和弦对应的键位如图 34 所示,

可在在线钢琴上试弹，要按从左到右，从上到下的顺序依次试弹每个大三和弦，每个三和弦的三个音以 **12321** 的顺序按下。

这个在线钢琴用电脑键盘来按键是比较方便的，对应的按镜就写在虚拟琴键上。

通过比对我们可以听出，小三和弦的“协调”程度不如大三和弦，这一原因请朋友们用之前学习的和声理论进行分析。增三和弦和减三和弦的情况与之类似，朋友们可以自行推算所有增三和弦与减三和弦的音名。

2. 七和弦

七和弦比三和弦多加一个音 n_4 ，它于 n_1 的音程为七度。七和弦又分为：大小七和弦、大七和弦、小七和弦、小大七和弦、增七和弦、减七和弦和半减七和弦一共 7 种，每一种七和弦的音的配置参见维基百科，此处不再赘述。

有了和声与和弦理论，就可以进入更高一级的主题，那就是调式与调性。

三、调式

先给出调式的定义：调式是若干个具有不同音高的音的集合，这些音互相之间具有某种特定的音程关系，并在调式中担任不同的角色。调式是决定音乐风格最重要的因素之一，调式和调性结合，决定了该段音乐所用的调。

现在最常使用的调式大体分为大调式和小调式两种，又细分为自

然大调、旋律大调、和声大调、自然小调、旋律小调、和声小调等等，但无论哪种调式都具有 7 种不同的音，依次分别称为：**主音、上主音、中音、下属音、属音、下中音和下主音**，其中下主音有时也称作导音。这什么会有这样的名称呢？回顾我们上一讲提到的五度相生律就会明白：主音生属音，而中音位于主音和属音之间，主音下面是下主音、上面是上主音，属音下面是下属音，属音和下主音之间的另一个中音称为下中音。额，还是很麻烦呐，只能死记硬背了。。。不过还有另一种福音命名法：主音、Ⅰ级音、Ⅱ级音、Ⅲ级音、Ⅳ级音、Ⅴ级音、Ⅵ级音和Ⅶ级音（“福音”二字是我给起的，呵呵）。不同的调式规定了这些音之间不同的音程，但不规定音的具体音高。也就是说调式仍是建立在以十二平均律体系为基础的相对音高系统之上的。调式系统里最重要的是**自然大调和自然小调**，这两个自然调式一定要熟记，下面分别学习。

1. 自然大调

自然大调是最常见的调式，大多数流行歌曲都采用自然大调。自然大调的规则是：除了“中音和下属音”，“下主音和主音”这两对音之间的音程是小二度之外，其他相邻两音之间都是大二度（音数为 1，即 1 个全音）。因此一个自然大调从主音开始依次往高的音程可以这样来记忆：“全全半全全全半”，这也就是著名的大调音阶。而一个主音到下一个主音之间的音程刚好是纯八度，也就是将一个主音当做 1，计数到 8 的那个音与主音的音程。这下我们终于知道为什

么叫做“纯八度”了，呵呵。



图 34 一个典型的大调音阶

图 34 是一个最简单的大调音阶，不包括任何的升降标记。其中音符下方的弧线代表全音音程，上方的折线代表半音音程。我们可以在在线钢琴上试弹一个大调音阶<C4 D4 E4 F4 G4 A4 B4 C5>。

2. 自然小调

自然小调是和自然大调同等重要的调式，在古典音乐中应用非常广泛。它的音阶为“全半全全半全全”。看起来与自然大调音阶只是相位不同而已，但实际上由于作曲时要先定调，就像写程序先设计框架结构一样。定了调之后就有了主音以及其它音的相对音高关系，而作曲时都要围绕主音进行。以主音为根音的三和弦称为主和弦，大调使用大三和弦，而小调使用小三和弦，因此听起来是有很大差异的。

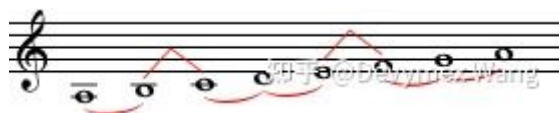


图 35 一个典型的小调音阶

图 35 所的小调音阶为<A3 B3 C4 D4 E4 F4 G4 A4>，请自行试弹。

3. 其它小调式

大调一般只有一种，就是自然大调。苏联人发明的什么和声大调、旋律大调已经少有人提及。小调还分为和声小调、旋律小调和现代小调三种，但都比较少见，有些只在特别的音乐类型中出现，比如现代

小调一般只出现在爵士乐中。

为什么小调会出现变种呢？这是因为小调有着天生的缺陷。自然大调的下主音和主音之间的音程是半音，即小二度，很好的体现了对主音的倾向。举例而言，从一个大调音阶<C、D、E、F、G、A、B、C>中的B到C的过渡是非常自然和平缓的，这样作曲时就方便的使用跨越纯八度的和声。然而小调的下主音和主音之间的音程是全音，即大二度，欠缺了倾向主音的性质，因此人们就尝试将自然小调音阶的导音提升半音，这样就得到了和声小调音阶。旋律小调和现代小调就更加复杂一些，牵扯不同的上行音阶和下行音阶，这些过于专业的内容就不再赘述了。

4. 大小调关系

前面所说的绝对音名相同但相位不同的大小调称为关系调，比如降E大调（降E大调是指该调采用的主音为Eb）的关系小调叫做c小调，降E大调音阶是<Eb、F、G、Ab、Bb、C、D>，c小调的音阶是<C、D、Eb、F、G、Ab、Bb>，可以看出它们采用的音名都是相同的，但做了移相。因此从升降号上是无法区分大小调的，但是通过观察谱子里使用的主音就很容易区分了。现在朋友们的基础知识不够，等一下讲介绍了调性理论后，我们会来练习从谱子中看出调式与调性。

大调一直以来都是作曲家钟爱的调试，而相比之下小调的音乐就比较少了，古典音乐里二者还相差不多，但流行乐中的小调就少得多了。这主要是因为小调的歌唱性没有大调强，常用来表达负面的情感，

比如悲伤、阴沉、恐怖等，在电影、游戏中的背景音乐中常可以听到。不过流行歌曲也是有一些的，比如《白桦林》、《爱的供养》、《伤心太平洋》等，国外的流行歌曲倒是多一些，而且有人研究发现：从1960年代以来越来越多的流行歌曲是以小调作曲的。。。

四、总结

这一讲我们学习了和弦理论以及调式系统的相关分类，详细介绍了自然大调和自然小调两种最主要的调式他们的关系，都是属于比较枯燥的内容。但这些东西不讲，下一讲的调性理论就没办法展开，这也是基础乐理中关于音高的最后一部分内容了。同志们，胜利在望啊，请继续坚持！另外，感谢朋友们的支持，我也会继续努力的。

又到了放福利时间，这回请欣赏人类音乐艺术的巅峰之作——贝多芬《第九交响曲》的第四乐章《欢乐颂》。请留意，它的调式是 d 小调。

<https://www.bilibili.com/video/BV1a5411W7BG>

继续感受音乐的力量，点击收看快闪版的《贝九》。

<https://www.bilibili.com/video/BV1Ms41187zb>

（五）调性

这一讲是乐理中有关音调知识的终曲，不过我们还是从历史讲起。

一、乐理发展史·之四

前面的历史课我们了解到“确定**相对**音高”的律制系统是如何在人类的历史长河中慢慢演化，直到形成今天广泛应用的十二平均律系统。这次历史课我们主要回顾用来“确定**绝对**音高”的记谱系统的发展历程。

在人类音乐史上曾经出现过很多种不同的记谱法，大致可分为三大类：文字谱、符号谱和线谱。有不少学者认为文字谱和符号谱应该归为一类，但在下愚见认为，这二者处于不同的发展阶段，且由于文字系统的复杂性（表音文字和表意文字等），文字谱的意义与符号谱是完全不同的。闲言碎语不多讲，我们进入正题。

尽管世界上任何一个地方的人类都在数千年前就开始创造音乐了，但是由于东西方文明的巨大差异，导致发展出了完全不同的记谱系统。早在公元前 25 世纪，古埃及人就已经制造出了至少几十种各不相同的乐器。尽管现在已经无法考证古埃及人是如何记录音符的，但几乎可以肯定的是：他们已经发展出了比较完善的音乐理论，并且使得每一种乐器都能够合理的校准来配合大型乐队的演奏。

在东方，最古老的乐谱出自于华夏文明，春秋时期的《礼记·投壶》记载了至今发现的最古老乐谱：鼓谱，它是用符号方框和圆圈记录的。到汉代司马迁的《史记》“律书第三”中写到：“……九九八

十一以为宫。三分去一，五十四以为徵（念 zhi，三声）。三分益一，七十二以为商。三分去一，四十八以为羽。三分益一，六十四以为角。”。它的意思是取一根用来定音的竹管，长为 81 单位，定为“宫音”。然后将 81 乘上 $\frac{2}{3}$ ，就得到 54 单位，定为“徵音”。将徵音的竹管长度 54 乘上 $\frac{4}{3}$ ，得到 72 单位，定为“商音”。将商音 72 乘 $\frac{2}{3}$ ，得 48 单位，为“羽音”。羽音 48 乘 $\frac{4}{3}$ ，得 64 单位，为“角音”。而这宫、商、角、徵、羽五个音高，被称为中国的五音。这种音律方法称为“三分损益法”。

后来人们继续应用三分损益法构造出了另外 7 个音，并给这一共 12 个音都起了名字。与现代音名的对照分别是：黄钟（C），林钟（G），太簇（D），南吕（A），姑洗（E），应钟（B），蕤宾（Gb/F#），大吕（Db/C#），夷则（Ab/G#），夹钟（Eb/D#），无射（Bb/A#），仲吕（F）。以这些音名第一个字作为简写就是中国古代使用最广泛的记谱法：“乐律谱”，它属于文字谱的一种。



图 36 明·朱载堉《乐律全书》

但是乐律谱的记载太麻烦了，因此人们又发明了“工尺谱”。唐朝已经有工尺谱，传到宋朝极为流行。它具有 7 个唱名：上、尺、工、凡、六、五、乙，大至对应于西方的 {Do, Re, Mi, Fa, So, La, Si}。相信最初工尺谱是某种乐器的乐谱，是固定音名，但后来在不同乐器和乐种广泛流传以后，工尺谱逐渐变成不固定的唱名。

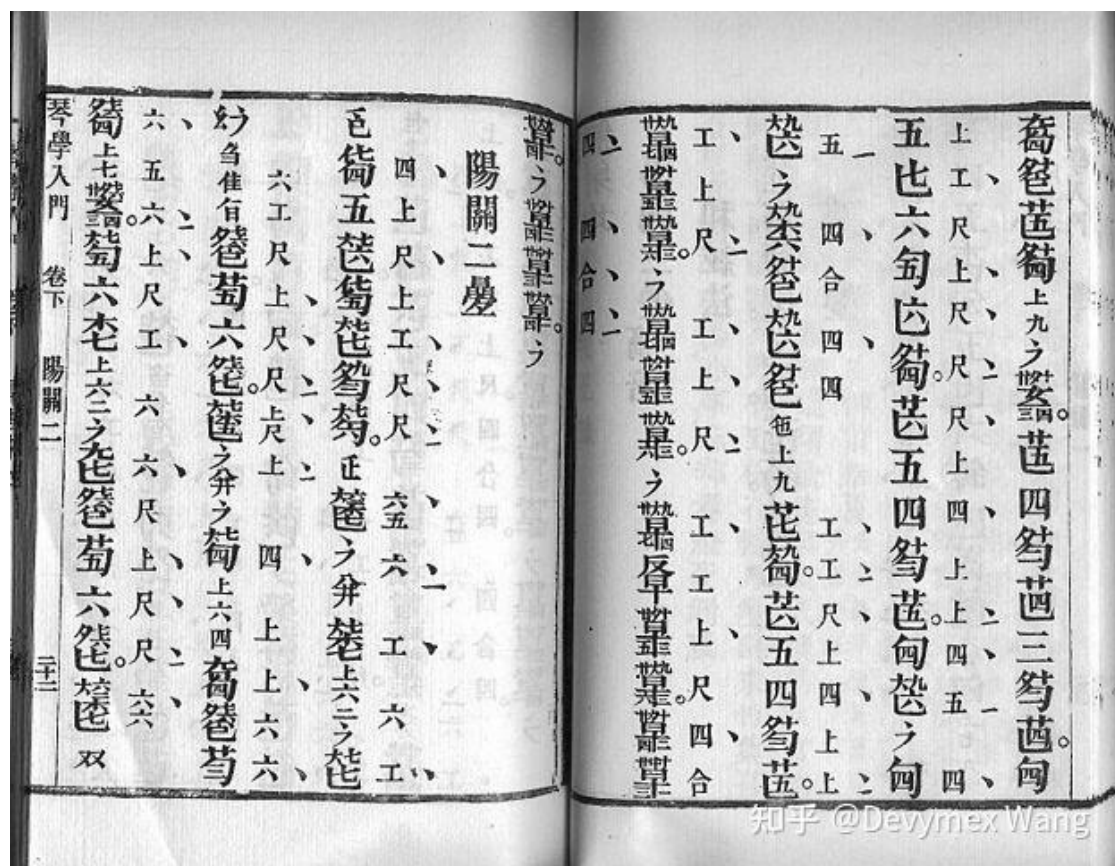


图 37 清·张鹤《琴学入门》

工尺谱是一种符号谱，但它并非一种精确的记谱法，有很大的空间让表演者作即兴发挥。在传统中国音乐里，乐谱只是一个记载的媒体，表演者并不会完全依据乐谱演奏，他可以加花（加上装饰音），在节奏上也有一定的自由。至于如何演奏才是合适的手法，是约定俗成的，以师父传徒弟的口授心传的方式继承。因此不同流派会有不同的演绎风格，这也是导致中国古代乐理水平进步相当缓慢的主要原因。

因。

西方最早的乐谱出现在古希腊，当时是刻在石碑上的符号谱，难记难读，流传很少。到公元 9 世纪时出现了写在羊皮纸上“纽姆谱”，见图 38。

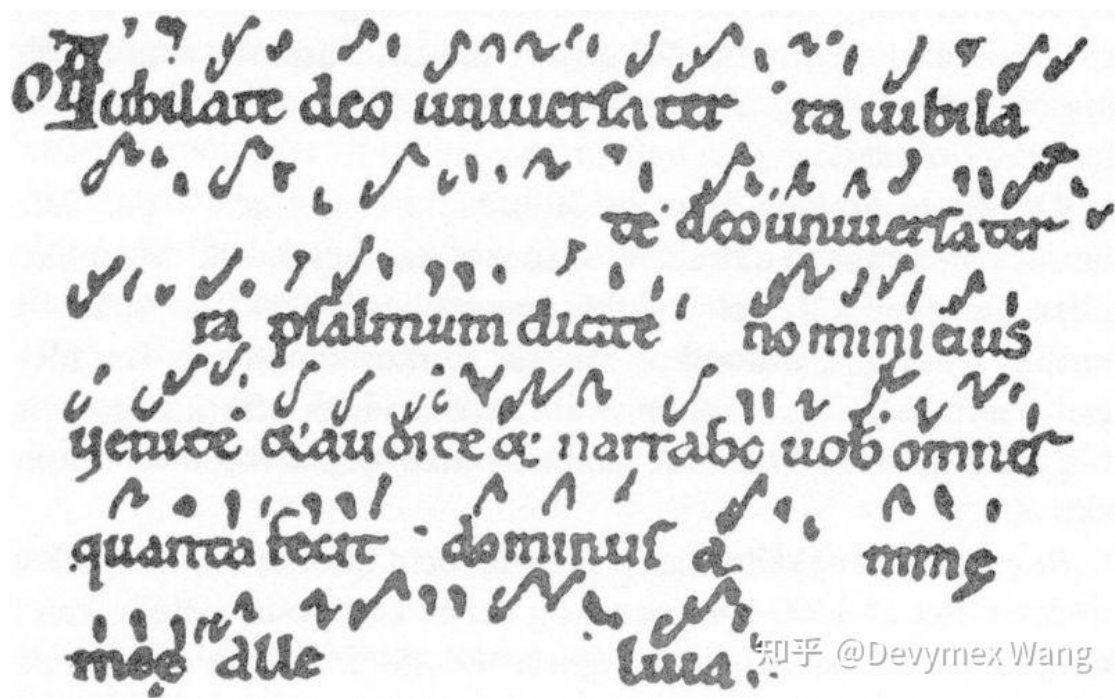


图 38 纽姆谱记录的圣歌（公元 9 世纪）

后来人们觉得用符号表示音符实在太过麻烦，就尝试在音符间加了一条线，用这条线来代表一个标准音高。后来人们又开始增加线的数量，到 11 世纪，意大利乐理大师桂多通过对纽姆谱的改进，发明了四线谱，并发从一首圣歌的歌词中提取出了六个音的唱名 ut、re、mi、fa、so、la。这就是五线谱和七唱名的前身。



图 39 11 世纪的纽姆谱

图 39 所示的古代纽姆谱看起来已经相当接近于现代的五线谱了，不是吗？但是在 16 世纪之前，西方一直没有一种统一的记谱法，符号的、一线的、两线的、三线的、四线的都有。直到公元十六世纪，五线谱诞生之后才逐渐一统江湖，形成全欧洲音乐人的标准记谱法。而五线谱的真正普及则是发生在 17 世纪，巴洛克时期的事情了。



图 40 巴赫的手稿（1726 年）

这时的五线谱就已经和现代五线谱基本相同了。有了统一的记谱法，各地的音乐家们开始更为广泛的沟通和交流，而这时人们慢慢地意识到制定标准音高的重要性。要知道一个 17 世纪的英国教堂管风琴，使用的音高可能就比较同城市中平民使用的键盘乐器低了五个半音。这样的情况对于音乐交流来说简直就是灾难。在 1720 年的英国音笛演奏中央 A 的频率为 380Hz，而巴赫在汉堡市、莱比锡及魏玛等地使用的管风琴则以 480Hz 表示同一个音符，这两者约差四个半音。

换句话说，1720 年的英国音笛演奏的 A 音在巴赫那边会被认为是 F 音。

自 18 世纪早期，音叉（于 1711 年发明）的使用确实为音高带来了一个可靠的标准，然而差异仍然无法避免。比方说，亨德尔在 1740 年使用对应为 A 音的音叉，其频率为 422.5 赫兹，但在 1780 年时他使用同样对应 A 的音叉则有不同的频率：409 赫兹，后者低了将近一个半音。不过，到了十八世纪末，中央 C 上的 A 所使用的频率渐渐地演进成在 400 赫兹到 450 赫兹之间。

上面提到的频率乃是经过现代仪器测量所得，当时的音乐家并没有方法得到如此准确的数值。虽然马兰·梅森在 16 世纪早期便对声音的频率有了初步的了解，直到十九世纪，在德国物理学家约翰·施布雷在 1830 年所做的努力之前，人们都没有足够精确的科学方法测量频率。至于用赫兹取代每秒循环次数，则是直到 20 世纪才做出的改变。

法国政府曾在 1859 年 2 月 16 日通过了一个法案定义中央 C 上的 A 为 435 赫兹。这是把音高尺度标准化的第一个尝试。这个标准之后在法国之外也非常流行，随着时间发展它渐渐从法国音高、大陆音高，最后甚至被称为国际音高。这个标准音域使得中央 C 的频率调整为约 258.65 赫兹。而另有一个称为“哲学的”或“科学的”的音高标准，把中央 C 定义为 256 赫兹，为此必须把 A 音调为约 430.54 赫兹。由于此法提供了一些数学上的便利，所有的 C 音都是二的次方（ $C_1=32$ 、 $C_2=64$ 、 $C_3=128$ 、 $C_4=256$ ），因此也得到了一些的支持者。不过

比起 $A = 435$ 赫兹，此法并没有得到官方的认可，也因此没有被大量采纳、使用。此种频率规格即称为“物理学音高”。

1926 年，美国乐器厂商首先制定了以 440Hz 作为 A 音的标准，并以此标准生产乐器。要知道那时的美国音乐实力已经强大到足以与欧洲抗衡，而美国的乐器则更是行销全球。因此到 1936 年美国标准委员会正式推荐将中央 C 上面的 A 音的频率定为 440Hz。1955 年，国际标准委员会 ISO 正式接受这一推荐，A-440 就成为了 ISO 的第 16 号标准。从那时起，全世界的音乐就都在一个调上了。

关于音调的历史大概就是这些了。接下来我们就具体研究一下，这些调到底是什么调。

二、调性

有了十二平均律，转调不再成为问题，因此人们就能够以不同的音为主音按大调式或小调式构造出不同的音阶，这些设定了主音的音阶序列就称为**调性**。先来研究大调式的所有调性。

我们已经学过大调的音程关系为“全全半全全全半”，那么从 12 音阶中的任意一个音作为主音都可以得到一个调性。再次列出 12 音阶的音名：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C#/Db	D	D#/Eb	E	F	F#/Gb	G	G#/Ab	A	A#/Bb	B

调性的名称就是主音的音名，12 音阶中有 7 个音名是不带升降号的，因此以这些音为主音的调性的名称是统一的。然而还有 5 个音

都具有两个音名，例如第 2 音可以用 C#表示也可以用 Db 表示。这样一来调性的命名就变得混乱了。为了统一命名方式，人们规定这 12 个调性的名称分别为：{C, G, D, A, E, B, F#, Db, Ab, Eb, Bb, F}，并规定以 C、G、D、A、E、B、F#为主音的调性用升号#标记五线谱的升降，其它调性用降号 b 标记五线谱的升降。

首先我们很容易就可以做出 C 大调，因为以 C 为主音的 7 音阶<C D E F G A B>都不带升降号，因此 C 大调谱是没有升降号的，见图 41 所示。

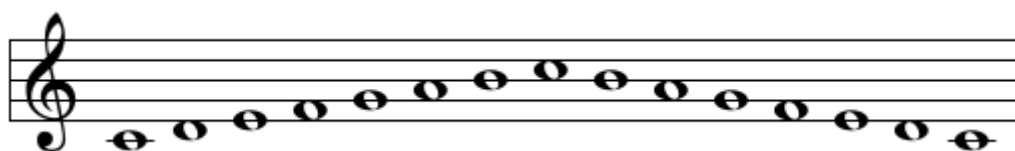


图 41 C 大调音阶

根据之前所学知识，我们很容易构造出其它大调，构造所有小调的原理也相同。这样我们就一共可以获得 12 个大调和 12 个小调。其中 12 个大调见图 42 所示。



图 42 除 C 大调外 11 个大调的音阶（Gb 和 F#实为同一个调）

由于 Gb 调中每个音符都降了半音，F#调中每个音符都升半音的

本质是相同的，因此和它们是同一个调。此外，有些谱子会用 7 个降号来表示 Cb 大调，实际上 C 降半音就是 B，那么 Cb 大调就是 B 大调。还有 7 用个升号表示 $C\#$ 大调，C 升半音就是 Db ，因此 $C\#$ 大调就是 Db 大调。这样一来， Bb 大调所有音升半音就得到了 B 大调， Eb 大调所有音升半音就得到了 E 大调， $F\#$ 大调所有音降半音就得到了 F 大调，其它的升降大调也是相同。大调确定了，关系小调也就可以确定了。为了便于记忆这 24 个调，有人发明了五度圈图示法，见图 43 所示。

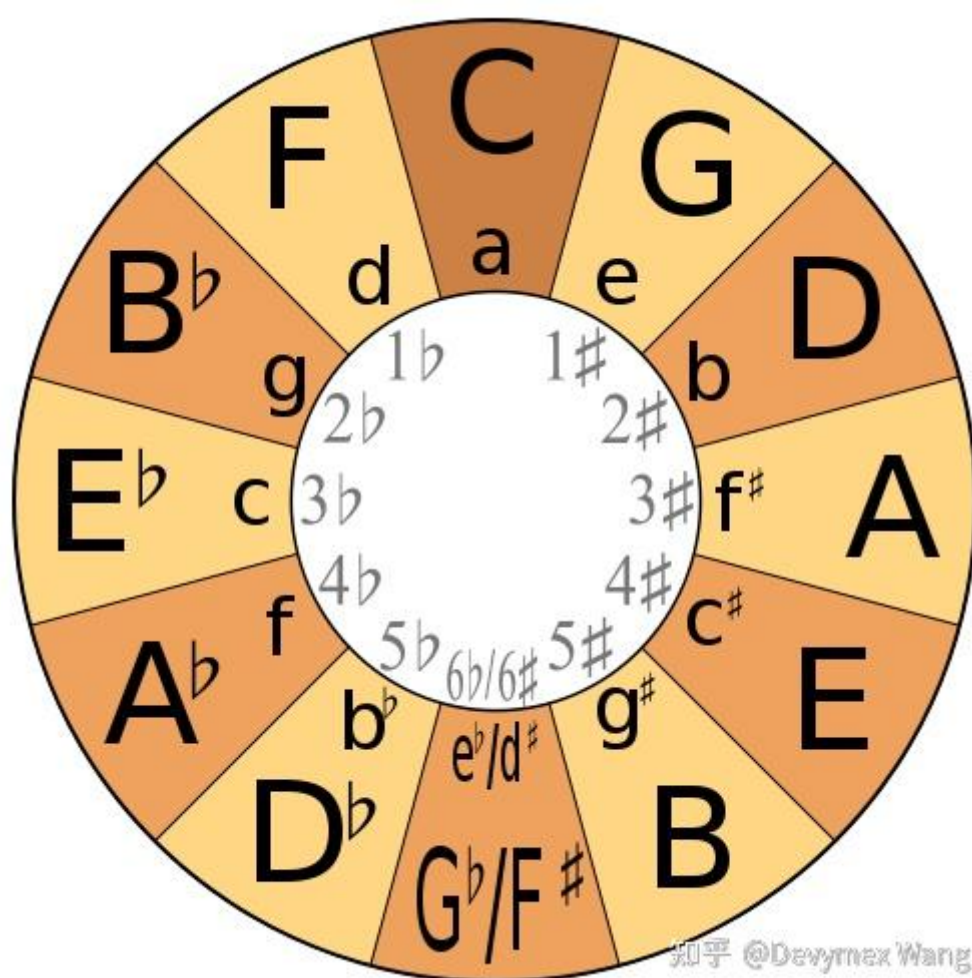


图 43 调性五度圈

在五度圈的最外圈是大调的 12 个调性，内圈是各大调对应的关系小调。顺时针相邻两个大调的主音相差五度，小调亦然。圈里面的

数字是该调性的五线谱中升降号的数量。最顶上的 C 大调没有任何升降号，顺时针方向升号依次增多，逆时针方向降号依次增多。最下面的 G \flat 调和 F \sharp 调实际上是一个调，只是记谱不同而已，可使用 6 个降号表示，也可使用 6 个升号表示。

对于五度圈右边的每个升号大调，从 F 开始以顺时针方向数，到它前面的 2 格为止，都是它的音阶中要升半音的音符，例如 E 大调的音阶中 F、C、G、D 都升半音，对于 B 大调的音阶中，F、C、G、D、A 都要升半音。对于左侧的降号大调，则是从 B 开始以逆时针方向数，到它正对面调都是它的音阶中要降半音的音符，例如 A \flat 大调的音阶中 B、E、A、D 都要降半音，D \flat 大调的音阶中 B、E、A、D、G 都要降半音。

五度圈还有一些规律要知道，从任何一个音开始逆时针数，第一个音与它的音数是 2.5；顺时针数第一个是 3.5。这个规律可以帮你用五度圈来推算音程。比如要求 G 到 F \sharp 的音程，从五度圈可知 F \sharp 是 G 顺时针方向第 5 个， $(5 \times 3.5) \% 6 = 5.5$ ，即大七度。再看从 F 到 A \flat ，是逆时针第 3 个， $(3 \times 2.5) \% 6 = 1.5$ ，即小三度。（程序员看见取模符号应该很亲切吧）

用上面的规律和方法，我们可以从五度圈中可以推导出所有的音程关系、音阶和调性，因此说大半的乐理都在五度圈里了。但它的结构复杂，被众多文艺生视为洪水猛兽，对于理工科人如何呢？告诉您一个小技巧那就是**肥猫下楼吃面包**的故事。上午 11 点，猫饿了，所以 **Fat Cat Go Down And Eat Bread**； 到下午 6 点猫又饿了，再次 **Go**

注意帕尔曼坐定以后轻轻的拉响了 A 弦（A 弦的空弦音为 A），示意双簧管给一个 A 的音准。双簧管是整个乐队的音准，必须事先调好，然后在乐队开始演奏前奏出 A 音供大家调音。帕尔曼首先听了听 A，确定没问题。然后又同时拉下 A 弦和右边的 E 弦，听听有没有产生拍音，如果产生拍音就说明 E 也是准的。随后又分别同时拉响 A 和左边的 D 弦，确定 D 没有问题后以 D 为音准调整了 G 弦的弦轴。

<https://www.bilibili.com/video/BV1yE411Y7Xa>

还记得第二讲最后的视频吗？那是帕尔曼和巴伦勃依姆（钢琴）年轻时的录音，沧桑感。。。。