数学分析第三次作业

15.1.1

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2-x+1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1})\mathrm{d}x$$

解得：

$$\begin{cases}A=-\frac{1}{3}\\B=\frac{2}{3}\\C=\frac{1}{3}\end{cases}$$

于是积分可以化为：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{-\frac{1}{6}\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(x+1)}{x+1}\\&=\{\frac{1}{6}\ln[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}\ln(x+1)\}\Big|_0^{+\infty}\end{aligned}$$

注意到：

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

以及

$$\frac{1}{6}\ln[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]+\frac{1}{3}\ln(x+1)=\frac{1}{6}\ln\left[\frac{(x+1)^2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$

当$x=0$和$x\to+\infty$时，上面的式子都是$\frac{1}{6}\ln 1=0$,所以原积分的值为$\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

15.1.2

考虑$A_n=n\pi$以及区间$[A_{n-1},A_n]$，设$u_n=\int_{A_{n-1}}^{A_n}e^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x$。

$$\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}-e^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{e^{-x}(\cos x+\sin x)}{2}\bigg|_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}=\frac{e^{2n\pi}+e^{(2n-1)\pi}}{2}$$

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{e^{x}(\cos x+\sin x)}{2}\bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=\frac{e^{2n\pi}+e^{(2n+1)\pi}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=\frac{e^0+2(e^{-\pi}+e^{-2\pi\cdots+e^{-(n-1)\pi}})+e^{-n\pi}}{2}=\frac{1+e^{-n\pi}}{2}+\frac{e^{-\pi}(1-(e)^{-n+1})}{1-\frac{1}{e}}\to\frac{e^{-\pi+1}}{e-1},n\to\infty$$

设$A\in[A_n,A_{n+1}]$,那么$\int_{A_n}^{A}e^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\bigg|_{A_n}^{A}\to 0,n\to\infty$

15.2.1

$$\int_0^A\frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x<\int_0^A\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\to+\infty,A\to+\infty$$

所以原积分发散。

15.2.2

考虑到$x^2e^{-x^2}$是偶函数，所以只需考虑$\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$，又因为$e^{-x^2}$是$\frac{1}{x^4}$的低阶无穷小，所以$x^2e^{-x^2}$就是$\frac{1}{x^2}$的低阶无穷小。从而原级数是收敛的。

15.2.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+x^4}\mathrm{d}x\le\int_{-1}^{+\infty}\left|\frac{x}{e^x+x^4}\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-1}\left|\frac{x}{e^x+x^4}\right|\mathrm{d}x\le\int_{-1}^{+\infty}\left|\frac{x}{\frac{1}{e}+x^4}\right|\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-1}-\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

考虑：

$$\int_{-1}^{+\infty}\left|\frac{x}{\frac{1}{e}+x^4}\right| = \int_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\frac{1}{e}+x^4}+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\frac{1}{e}+x^4} = -\frac{1}{2}\sqrt{e}\arctan\sqrt{e}x\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\sqrt{e}\arctan\sqrt{e}x\Big|_{0}^{+\infty}$$

上述的值为一个有界值，并且$\frac{1}{x^3}$是广义积分收敛的，所以原积分收敛。

15.2.4

注意到：

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 1, x \longrightarrow +\infty$$

所以$\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{2}$和$\frac{1}{x}$是同阶的当$x \longrightarrow +\infty$时，所以原被积函数就和$\frac{1}{x^2}$同阶，所以原积分收敛。

15.2.5

注意到：

$$\ln(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}) \sim \ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}, x \longrightarrow +\infty$$

所以原积分发散。

15.3.1

由于$\ln x$对于$\forall q > 0$, 是x^q的低阶无穷小,所以下列结论是显然的：

1. $p > 1$时，原积分收敛
2. $p < 1$时，原积分发散

考虑$p = 1$时，由于$\dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{1}{x}, x > e$时，所以原积分发散

15.3.2

由于$p,q>0$，所以$\frac{x^p}{1+x^q}\sim\frac{x^p}{x^q}$

1. $q-p>1$时，原积分收敛
2. $q-p\le 1$时, 原积分发散