

- 数分第二次作业

- 14.4

- 1

- (1)

- (2)

- (3)

- (4)

- (5)

- (6)

- (7)

- (8)

- 2

- 3

- (1)

- (2)

- (3)

- (4)

## 数分第二次作业

---

### 14.4

---

#### 1

(1)

**Solution**

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & , n \text{ 为奇数} \\ -\frac{1}{n} & , n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

设  $u_n = \frac{1}{(2n-1)!} \leq \frac{1}{(2n-1)^2}, n > 3, v_n = -\frac{1}{2n}, S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 所以有:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3!} + \sum_{k=3}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k < \sum_{k=3}^n \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$$

同样的，我们可以得到：

$$S_{2n-1} = 1 + \frac{1}{3!} + \sum_{k=3}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k < \sum_{k=3}^n \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$$

所以原级数发散。

(2)

**Solution** 设  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0, x > e^2$ , 所以当  $n$  足够大时候  $f(n)$  是单调递减趋于零的。由莱布尼茨判别法即可得到： $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$  是收敛的。而  $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$  是发散的，故原级数条件收敛。

(3)

**Solution** 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$  中,  $n$  足够大时候必然有  $\{\sin \frac{x}{n}\}$  是单调递减的, 由莱布尼茨判别法  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$  是收敛的。

而  $\sin \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}, n \rightarrow \infty$ , 不等式右边的求和级数是发散的，所以原级数条件收敛。

(4)

**Solution** 注意到:

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) &= \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) - \sin(n\pi) \\ &= 2 \sin\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2 + 1} - n)\right] \cos\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2 + 1} + n)\right] \end{aligned}$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时, 有以下结论:

$$1. \sin\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2 + 1} - n)\right] \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{\pi}{4n}$$

2.  $\cos[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}+n)] \sim \cos(n\pi) = (-1)^n$  所以  $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)] \cos[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}+n)] \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4n}$ , 由莱布尼茨判别法以及  $\frac{1}{n}$  级数性质: 该级数条件收敛。

(5)

**Solution**  $u_n = \exp(\ln(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots}{2 \times 4 \times 6 \times \dots})) = \exp(\sum_{i=1}^n \ln(\frac{2i-1}{2i})) \sim \exp(\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2i}) \rightarrow 0$ ,  
 $u_{n+1}/u_n = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ , 所以  $u_n$  单减到零, 所以原级数收敛

$u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \Rightarrow R_n = n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = n(1 + \frac{1}{2n+2} - 1) \rightarrow \frac{1}{2} < 1, n \rightarrow \infty$ , 所以原级数条件收敛。

(6)

**Solution** 注意到:  $(-1)^{n(n+1)/2}$  当  $n$  或  $n+1$  为 4 的倍数时  $(-1)^{n(n+1)/2} = 1$ , 反之则为 -1, 所以  $(-1)^{n(n+1)/2}$  有周期 4, 且在一个周期内和为 0, 所以  $\sum_{n=1}^m (-1)^{n(n+1)/2}$  有界, 又因为  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  单调递减趋于零, 所以原级数收敛, 而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以原级数条件收敛。

(7)

**Solution** 由于  $\sin \frac{n\pi}{12}$  的周期性, 有周期 24 且一个周期内和为零,  $\sum_{n=1}^m \sin \frac{n\pi}{12}$  是有界的, 又因为  $\frac{1}{\ln n}$  单调递减趋于零, 所以原级数收敛。

而我么考虑  $|\sin \frac{n\pi}{12}|$ , 有一个子列  $\{1, 1, 1, 1 \dots\}_n$ , 而且除了子列中的数其他数都大于等于零, 所以  $S_k = |\sum_{n=2}^k \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}| > \sum_{n=1}^{[\frac{k}{6}]-1} \frac{1}{\ln 6n}$  发散, 所以原级数条件收敛

(8)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \sin n &= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^m (-1)^n \sin n \cos \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \left[ \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} \left[ \sin \frac{1}{2} + (-1)^{m-1} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \sin n$  是有界的，又因为  $\frac{1}{n}$  单减到零，所以原级数收敛。

$$\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{|\sin^2 n|}{n} = \frac{1 - \cos^2 \frac{n}{2}}{2n}$$

不等式右边的求和级数是发散的，所以原级数条件收敛。

## 2

由于  $\{a_k\}$  条件收敛：设  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ ，所以  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, n > N$  时， $|\sum_{k=1}^n a_k - A| < \epsilon$

$$|\sum_{k=1}^n a_k - A| < \epsilon \implies A - \epsilon < \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^- < A + \epsilon$$

设  $U_n = \sum_{k=1}^n a_k^+, V_n = \sum_{k=1}^n a_k^-$ ，则  $U_n, V_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \frac{U_n - V_n}{V_n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

## 3

(1)

$$\prod_{n=1}^m \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2(m+1)}{m+2} \rightarrow 2, m \rightarrow \infty$$

所以原级数收敛。

(2)

$$\ln \prod_{n=1}^m \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$$

与之同阶的级数是收敛的，所以原级数收敛。

**(3)**

$$\ln \prod_{n=1}^m \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$$

与之同阶的级数是收敛的，所以原级数收敛。

**(4)**

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\ln(\ln(1 + \frac{x}{n}))] \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{x}{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x - \ln n}{n}, n \rightarrow \infty$$

而  $\frac{\ln x - \ln n}{n} < -\frac{1}{n}$ ,  $n > ex$  时，不等号右边的求和级数是发散的，所以原级数发散。