数分第二次作业

14.4

1

(1)

Solution

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & ,n\text{为奇数} \\ -\frac{1}{n} & ,n\text{为偶数} \end{cases}$$

设$u_n = \dfrac{1}{(2n-1)!} \le \dfrac{1}{(2n-1)^2}, n > 3, v_n = -\dfrac{1}{2n}, S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 所以有：

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3!} + \sum_{k=3}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \to -\infty, n \to \infty$$

同样的，我们可以得到：

$$S_{2n-1} = 1 + \frac{1}{3!} + \sum_{k=3}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k < \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \to -\infty, n \to \infty$$

所以原级数发散。

(2)

Solution 设$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, f^{'}(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} < 0,\ x > e^2$, 所以当$n$足够大时候$f(n)$是单调递减趋于零的。由莱布尼茨判别法即可得到：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$是收敛的。而$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$是发散的，故原级数条件收敛。

(3)

Solution 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$中,$n$足够大时候必然有 $\{\sin\frac{x}{n}\}$是单调递减的, 由莱布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$是收敛的。

而$\sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}, n \to \infty$，不等式右边的求和级数是发散的，所以原级数条件收敛。

(4)

Solution 注意到:

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi) &= \sin(\sqrt{n^2+1}\pi) - \sin(n\pi)\\ &= 2\sin[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)]\cos[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}+n)]\end{aligned}$$

由于$n \to \infty$时，有以下结论：

1. $\sin[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)] \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\pi}{4n}$

2. $\cos[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}+n)] \sim \cos(n\pi) = (-1)^n$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\sin[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1} - n)]\cos[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}+n)] \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{4n}$,由莱布尼茨判别法以及$\frac{1}{n}$级数性质：该级数条件收敛。

(5)

Solution $u_n = \exp(\ln(\frac{1\times3\times5\times\cdots}{2\times4\times6\times\cdots})) = \exp(\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{2i-1}{2i})) \sim \exp(\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{2i}) \to 0$, $u_{n+1}/u_n = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$，所以$u_n$单减到零，所以原级数收敛

$u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \implies R_n = n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = n(1+\frac{1}{2n+2} - 1) \to \frac{1}{2} < 1, n\to\infty$, 所以原级数条件收敛。

(6)

Solution 注意到：$(-1)^{n(n+1)/2}$ 当n或$n+1$为4的倍数时 $(-1)^{n(n+1)/2} = 1$，反之则为-1，所以 $(-1)^{n(n+1)/2}$ 有周期4，且在一个周期内和为0，所以 $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n(n+1)/2}$ 有界, 又因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于零，所以原级数收敛，而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以原级数条件收敛。

(7)

Solution 由于$\sin\frac{n\pi}{12}$的周期性，有周期24且一个周期内和为零，$\sum_{n=1}^{m}\sin\frac{n\pi}{12}$ 是有界的, 又因为 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于零，所以原级数收敛。

而我么考虑$|\sin\frac{n\pi}{12}|$,有一个子列 $\{1,1,1,1\cdots\}_n$，而且除了子列中的数其他数都大于等于零，所以$S_k = |\sum_{n=2}^{k}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}| > \sum_{n=1}^{[\frac{k}{6}]-1}\frac{1}{\ln 6n}$发散，所以原级数条件收敛

(8)

$$\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\sin n = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n}\sin n\cos\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}[\sin(n-\frac{1}{2})+\sin(n+\frac{1}{2})]$$
$$= \frac{1}{\cos\frac{1}{2}}[\sin\frac{1}{2}+(-1)^{m-1}\sin(m+\frac{1}{2})]$$

所以$\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\sin n$是有界的，又因为$\frac{1}{n}$单减到零，所以原级数收敛。

$$\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{|sin^2 n|}{n} = \frac{1-\cos^2\frac{n}{2}}{2n}$$

不等式右边的求和级数是发散的，所以原级数条件收敛。

2

由于$\{a_k\}$条件收敛：设$\sum_{k=1}^{\infty}a_k = A$，所以$\forall\epsilon>0,\exists N>0,n>N$时，$|\sum_{k=1}^{n}a_k - A|<\epsilon$

$$|\sum_{k=1}^{n}a_k - A|<\epsilon \implies A-\epsilon<\sum_{k=1}^{n}a_k^{+}-\sum_{k=1}^{n}a_k^{-}<A+\epsilon$$

设$U_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^{+},V_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^{-}$，则$U_n,V_n\to\infty,n\to\infty,\ \frac{U_n-V_n}{V_n}\to 0,n\to\infty,$ 即
$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=1$

3

(1)

$$\prod_{n=1}^{m}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(m+1)}{m+2}\to 2,m\to\infty$$

所以原级数收敛。

(2)

$$\ln\prod_{n=1}^{m}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$$

与之同阶的级数是收敛的，所以原级数收敛。

(3)

$$\ln\prod_{n=1}^{m}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\ln(1+\frac{1}{n^2})=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$$

与之同阶的级数是收敛的，所以原级数收敛。

(4)

$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\ln(\ln(1+\frac{x}{n}))]\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{x}{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x-\ln n}{n},n\to\infty$$

而$\frac{\ln x-\ln n}{n}<-\frac{1}{n},n>ex$时，不等号右边的求和级数是发散的，所以原级数发散。