复数

$$e^{i\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(i\theta)^n} = \cos i\theta + i \sin i\theta \; \omega^n = z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \implies \omega = r_0^{\frac{1}{n}} e^{(\theta_0+2k\pi)i\backslash n}$$

拓扑

1. 开集
2. 闭集
3. 连通与连通的开集（称作开域）
4. E的聚点（去心后的周围总有E的点）
5. 导集：全部聚点的集合。
6. 边界点（不去心的周围总有E的点）

扩充复平面

解析函数

复函数

扩展到复数域的函数。

极限和连续

总结可得：复函数的极限四则运算性质和实函数一模一样，连续函数的四则运算，以及复合也不改变复函数的连续性

导数

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f^{'}(z_0), z \in \mathrm{C}$$

定理

- $(z^n)' = nz^{n-1}$
- 四则运算，以及复合函数求导和实函数性质一样，且可导性可以推出连续性

Cauchy-Riemman 方程 (*C-R equation*)

我们考虑$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，也就是实部和虚部时互不决定的二元函数。

Theorem 2.4.1

可导的必要条件：u, v的一阶偏导数存在，并且在该点出有 *C-R equation*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_y(x_0, y_0) \\ f^{'}(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Theorem 2.4.2

可导的充要条件 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$定义在开域上，$f(z)$在$z_0$处可导的充要条件时$u, v$可微且该点满足*C-R equation*

必要性：

充分性：

解析函数

Definition : f在z_0的一个领域中每点可导，则称f在z_0解析，若给有一个区域D满足$f(z)$解析，则记作$f \in H(D)$

Theorem 2.5.1 两个解析函数四则运算或者复合之后之后仍然是解析的

Theorem 2.5.2 导数为零的解析函数为常函数

Theorem 2.5.3 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

设$f(x, y)$中：$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$