Численные методы поиска условного экстремума

1. Постановка задачи
2. Необходимое и достаточное условие первого порядка условного экстремума в точке
3. Численные методы решения задачи нелинейного программирования с ограничениями
4. Метод внешних штрафов

1. Постановка задачи:

Пусть даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ и функции ограничений $g_j(x)$, $j = 1, \dots p$, определяющие множество допустимых решений X:

$$g_j(x) = 0, \;\; j = 1, \dots m \; (m < n), \qquad g_j(x) \le 0, \;\; j = m+1, \dots p;$$

Найти локальный минимум целевой функции на множестве X, то есть такую точку $x^* \in X$, что

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \qquad (1.1)$$

$$X = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \begin{matrix} g_j(x) = 0, & j = 1, \dots m \\ g_j(x) \le 0, & j = m+1, \dots p \end{matrix} \right\}$$

Задача (1.1) называется задачей со *смешанными ограничениями*. При $p = m$ задача преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств*, а при $m = 0$ – в задачу *с ограничениями типа неравенств*.

Определение 1.1 Функция

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, g_j(x)$$

называется *обобщенной функцией Лагранжа*, числа $\lambda_0, \dots \lambda_p$ – множителями Лагранжа, $\lambda = \left(\lambda_1, \dots \lambda_p\right)^T$.

Классической функцией Лагранжа называется функция

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, g_j(x)$$

Определение 1.2 Ограничение $g_j(x) \le 0$ называется *активным* в точке x^*, если $g_j(x^*) = 0$, и *пассивным*, если $g_j(x^*) < 0$, $j = m+1, \dots, p$.

Определение 1.3 Градиенты ограничений $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, являются *линейно независимыми* в точке x^*, если

$$\lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x^*) = 0 \iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

2.1 Необходимое условие экстремума первого порядка

Пусть x^* – точка локального экстремума, тогда $\exists\ \lambda_0^* \geq 0,\ \ \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_P^*)$, не равные одновременно нулю, такие, что выполняются условия:

- стационарности функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = 1, \dots, n$$

- допустимости решения: (2.1)

$$g_j(x^*) = 0,\ \ j = 1, \dots, m, \qquad g_j(x^*) \leq 0,\ \ j = m+1, \dots, p$$

- неотрицательности для условного минимума (≤ для максимума):

$$\lambda_j^* \geq 0,\ \ j = m+1, \dots, p$$

- дополняющей нежесткости: $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0,\ \ j = m+1, \dots, p$

Если градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (то есть выполняется условие *регулярности*), то $\lambda_0^* \neq 0$.

2.2 Достаточное условие экстремума первого порядка

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе необходимых условий условного экстремума при $\lambda_0^* \neq 0$, суммарное число активных ограничений-неравенств в точке x^* и ограничений-равенств совпадает с числом n переменных (при этом выполняется условие регулярности).

Если $\forall j \in J_a$, где J_a – множество индексов ограничений, активных в точке x^*:

1) $\lambda_j^* > 0$, то x^* – точка условного локального минимума.

2) $\lambda_j^* < 0$, то x^* – точка условного локального максимума.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе (2.1), называются условно-стационарными.

2. Необходимые условия экстремума первого порядка формулируются отдельно для минимума и максимума

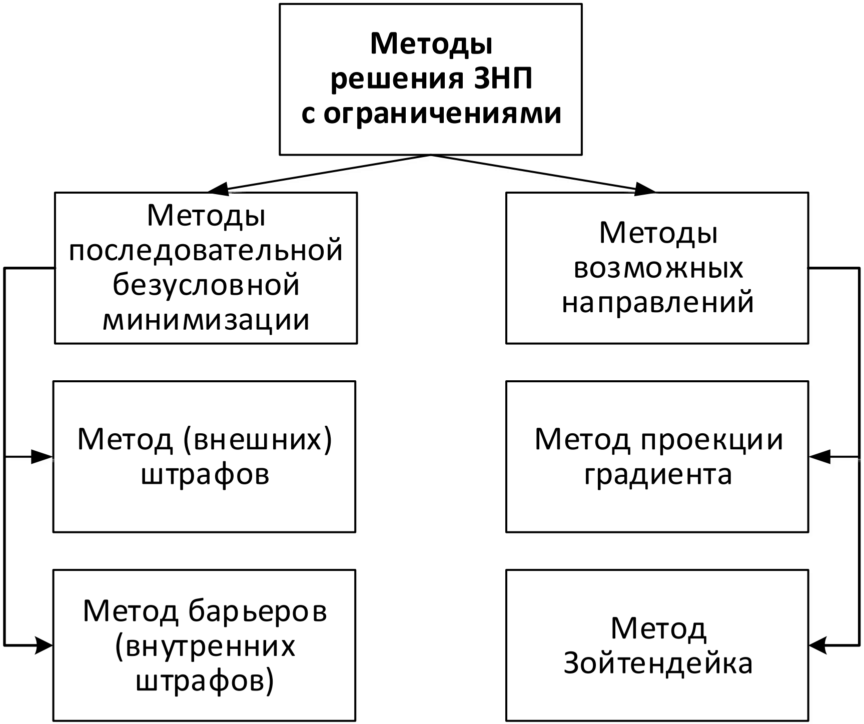
3. Если в задаче ограничения записаны в форме $g_j \geq 0$ то их необходимо преобразовать: $-g_j(x^*) \leq 0$.

4. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (2.1), при $\lambda_0^* \neq 0$, называется регулярной, а при $\lambda_0^* = 0$ – нерегулярной. При $\lambda_0^* = 0$ ограничения вырождены.

5.1. Если при $\lambda_0^* \neq 0$ функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j = m+1, \dots, p$ – выпуклые, а функции $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ – линейные, то условия (2.1) являются также достаточными условиями локального и глобального минимума.

5.2. Если при $\lambda_0^* \neq 0$ функции $-f(x)$, $g_j(x)$, $j = m+1, \dots, p$ – выпуклые, а функции $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ – линейные, то условия (2.1) являются также достаточными условиями локального и глобального максимума.

5.3. В обоих случаях множество X – выпукло.


Методы
решения ЗНП
с ограничениями
Методы
последовательной
безусловной
минимизации
Методы
возможных
направлений
Метод (внешних)
штрафов
Метод проекции
градиента
Метод барьеров
(внутренних
штрафов)
Метод
Зойтендейка

3. Методы последовательной безусловной минимизации предполагают преобразование исходной задачи в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций.

- Суть *метода (внешних) штрафов* состоит в том, что к целевой функции добавляется функция, интерпретируемая как штраф за нарушение каждого из ограничений. Метод генерирует последовательность точек, сходящихся к решению исходной задачи.
- В *методе барьеров (внутренних штрафов)* к целевой функции добавляется слагаемое, которое не позволяет генерируемым точкам выходить за пределы множества допустимых решений.

Методы возможных направлений связаны с нахождением предела x^* последовательности $\{x^k\}$ допустимых точек при $k \to \infty$, таких, что $f(x^{k+1}) < f(x^k),\ k = 0,1,\ldots$

4. Метод внешних штрафов

Пусть поставлена задача (1.1).

Идея метода заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач безусловного минимума вспомогательной функции

$$F(x, r^k) = f(x) + P(x, r^k) \to \min_{x \in R^n} \qquad (4.1)$$

где r^k – параметр штрафа, задаваемый на каждой *k*-й итерации, $P(x, r^k)$ – штрафная функция, которая строится, исходя из условий:

$$P(x, r^k) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in X \\ > 0, & \text{при } x \notin X \end{cases}$$

Если $x \notin X$, $r^k \to \infty$ и $k \to \infty$, то функция $P(x, r^k) \to \infty$.

Интерпретация такова, что чем больше r^k, тем больше штраф за невыполнение ограничений.

Для ограничений типа равенств используется квадратичный штраф, а для ограничений типа неравенств – квадрат срезки $g_i^+(x)$:

$$P(x, r^k) = \frac{r^k}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left[g_j(x)\right]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left[g_j^+(x)\right]^2\right) \qquad (4.2)$$

$$g_j^+(x) = \max\{0, g_j(x)\} = \begin{cases} g_j(x), & \text{при } g_j(x) > 0 \\ 0, & \text{при } g_j(x) \le 0 \end{cases} \qquad (4.3)$$

Начальная точка поиска задается обычно вне множества допустимых решений X. На каждой *k*-й итерации ищется точка $x^*(r^k)$ минимума вспомогательной функции $F(x, r^k)$ при заданном параметре r^k с помощью одного из методов безусловной минимизации.

Полученная точка используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа.

При неограниченном возрастании r^k последовательность построенных точек стремится к точке условного минимума x^*.

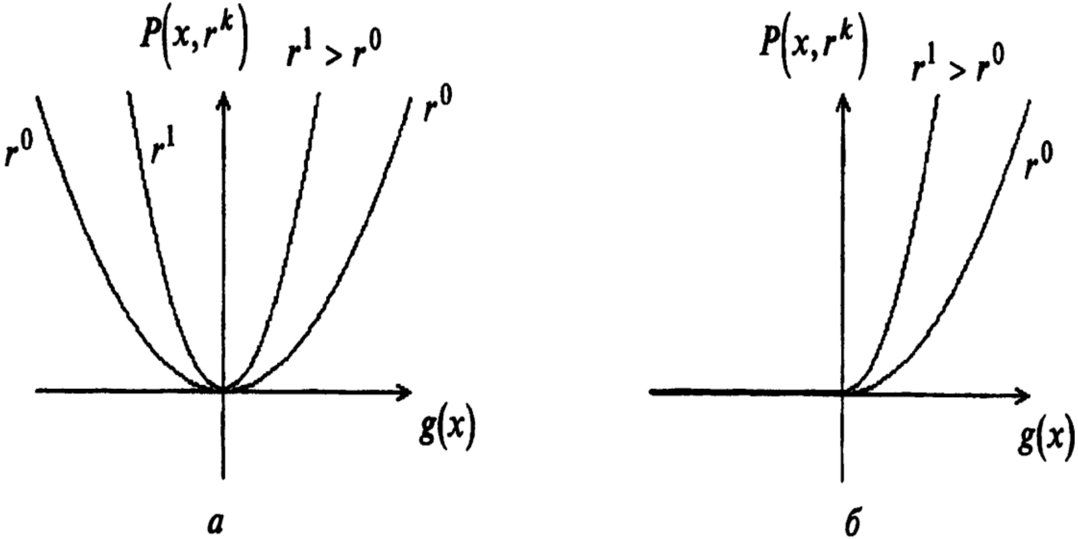


Рисунок 1 – Квадратичный штраф (а) и квадрат срезки (б)

Алгоритм поиска

1) Задается начальная точка x^0, параметр штрафа r^0, число K для увеличения параметра, точность $0 < \varepsilon \ll 1$. Начальный шаг $k = 0$.

2) Составляется функция $F(x, r^k)$

$$F(x, r^k) = f(x) + \frac{r^k}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left[g_j(x)\right]^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left[g_j^+(x)\right]^2\right)$$

3) Находится точка $x^*(r^k)$ безусловного минимума функции $F(x, r^k)$ по x методом безусловной оптимизации:

$$F(x^*, r^k) = \min_{x \in R^n} F(x, r^k)$$

4) Проверяется условие окончания алгоритма:

а) если $P(x^*, r^k) < \varepsilon$, процедура останавливается и вычисляется $f(x^*)$

б) в противном случае $r^{k+1} = Kr^k$, $x^{k+1} = x^*(r^k)$, $k = k + 1$, осуществляется переход к п. 2.

Утверждение. Пусть x^* – локально единственное решение задачи поиска условного минимума, а функции $f(x)$ и $g_j(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^*. Тогда для достаточно больших r^k найдется точка $x^*(r^k)$ локального минимума функции $F(x, r^k)$ в окрестности x^*, и $x^*(r^k) \to x^*$ при $r^k \to \infty$.