Projet de statistiques

Exercice 2 :

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est indiquée par le tableau ci après :

X \ Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

a)

→ Les lois marginales de X et Y :

X \ Y	1	2	3	4	Loi marginale de X
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0,2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
Loi marginale de Y	0,2	0,1	0,4	0,3	1

→ Indiquons si ces variables sont indépendantes :

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendants si pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left([X=x] \cap [Y=y]\right) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

- $P[(X=1) \cap (Y=1)] = 0{,}08$

$P(X=1)\,P(Y=1) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

donc $P[(X=1)\cap(Y=1)] = P(X=1)\,P(Y=1) = 0{,}08$

- $P[(X=2)\cap(Y=4)] = 0{,}06$

$P(X=2)\,P(Y=4) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$

donc $P[(X=2)\cap(Y=4)] = P(X=2)\,P(X=4) = 0{,}06$

Donc les variables aleatoires X et Y sont independantes.

b) Calculons $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

Dans notre cas les deux variables aléatoires sont independantes donc $Cov(X,Y) = 0$, Calculons $cov(X,Y)$ pour la preuve:

- $E(X) = \sum x_i\, P(X = x_i)$

$$= (1\times 0{,}4) + (2\times 0{,}2) + (3\times 0{,}4) = 2$$

$$\boxed{E(X) = 2}$$

- $E(Y) = \sum y_j\, P(Y = y_j)$

$$= (1\times 0{,}2) + (2\times 0{,}1) + (3\times 0{,}4) + (4\times 0{,}3) = 2{,}8$$

$$\boxed{E(Y) = 2{,}8}$$

- $E(XY) = \sum x_i y_j\, P(X = x_i, Y = y_j)$

$E(XY) = (1\times 1\times 0{,}08) + (2\times 1\times 0{,}04) + (3\times 1\times 0{,}16) + (4\times 1\times 0{,}12) + (2\times 1\times 0{,}$
$+ (2\times 2\times 0{,}02) + (2\times 3\times 0{,}05) + (2\times 4\times 0{,}06) + (3\times 1\times 0{,}08) + (3\times 2\times 0{,}04$
$+ (3\times 3\times 0{,}16) + (3\times 4\times 0{,}4) = 5{,}6$

$\Rightarrow \quad \boxed{E(XY) = 5{,}6}$

$E(X) = 2$; $E(Y) = 2{,}8$; $E(X,Y) = 5{,}6$

$\text{cov}(XY) = 5{,}6 - (2 \times 2{,}8) = 0$

donc $\boxed{E(X,Y) = 0}$

c) Determinons la loi du couple $[\inf(X,Y), \sup(X,Y)]$

On pose : $U = \inf(X,Y)$ et $V = \sup(X,Y)$.

→ Determinons d'abord les valeurs de U c'est à dire les valeurs inferieures de X et Y.

X \ Y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3

Donc U prend les valeurs 1, 2 et 3

$U = \{1, 2, 3\}$

$P[U=1) \cancel{\quad}] = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=3)$
$+ P(X=1; Y=4) + P(X=1, Y=2) + P(X=3, Y=1)$

$P(U=1) = 0{,}08 + 0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}08 = 0{,}52$

$\underline{P(U=1) = 0{,}52}$

$P(U=2) = P(X=2, Y=2) + (X=3, Y=2) + (X=2, Y=3) + (X=2, Y=4)$
$= 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}2$

$\underline{P(U=2) = 0{,}2}$

$P(U=3) = P(X=3, Y=3) + P(X=3, Y=4)$

$= 0,16 + 0,12 = 0,28$

$\boxed{P(U=3) = 0,28}$

→ Loi marginale de U : inf(x,y)

U ou inf(x,y)	1	2	3	
P(U)	0,52	0,2	0,28	1

→ Determinons les valeurs de v c'est à dire les valeurs superieures de X et Y :

X \ Y	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4

Donc v prend les valeurs 1, 2, 3 et 4

$P(v=1) = P(X=1, Y=1) = 0,08$

$P(v=2) = P(X=1, Y=2) + (X=2, Y=1) + (X=2, Y=2) =$

$= 0,04 + 0,04 + 0,02 = 0,1$

$P(v=3) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=1)$

$+ P(X=3, Y=2) + P(X=3, Y=3)$

$P(v=3) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=1) +$
$P(X=3, Y=2) + P(X=3, Y=3)$

$= 0,16 + 0,08 + 0,08 + 0,04 + 0,16$

$\Rightarrow$ $P(v=3) = 0,52$

$P(v=4) = P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=4) + P(X=3, Y=4)$
$= 0,12 + 0,06 + 0,12$

$P(v=4) = 0,3$

→ Loi marginale de v: sup(x,y)

v ou sup(x,y)	1	2	3	4	T
P(v)	0,08	0,1	0,52	0,3	1

→ La loi du couple [inf(x,y), sup(x,y)] ou [(u),(v)].

$P(u = ui, v = vi) = P(U = ui) \times P(v = vi)$ car les deux variables aléatoires sont indépendantes

U ou Inf(x,y) \ v ou sup(x,y)	1	2	3	4	Total
1	0,0416	0,052	0,2704	0,156	0,52
2	0,016	0,02	0,104	0,06	0,2
3	0,0224	0,028	0,1456	0,084	0,28
Total	0,08	0,1	0,52	0,3	1

Exercice 3:

1) Une variable aléatoire est sans mémoire si :

$$\mathbb{P}(X \geq x + x_0 / X > x_0) = \mathbb{P}(X > x)$$

$$\mathbb{P}(X > x + x_0 / X > x_0) = \frac{\mathbb{P}(X > x + x_0) \cap \mathbb{P}(X > x_0)}{\mathbb{P}(X > x_0)}$$

$$= \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)}$$

$$P(X > x + x_0) = \int_{x+x_0}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$$= \int_{x+x_0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \int_{x+x_0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \cancel{\lambda} \left[-\frac{1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda t} \right]_{x+x_0}^{+\infty}$$

$$= -\left[e^{-\lambda t} \right]_{x+x_0}^{+\infty}$$

$$= -\left[e^{-\infty} - e^{-\lambda(x+x_0)} \right] = +\left(+ e^{-\lambda(x+x_0)} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X > x + x_0) = e^{-\lambda x} e^{-\lambda x_0}}$$

Calculons $\int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt = P(X > x_0)$

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_{x_0}^{+\infty}$$

$$= - \left[e^{-\lambda t} \right]_{x_0}^{+\infty}$$

$$= -\left(\underbrace{e^{-\infty}}_{0} - e^{-\lambda x_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X > x_0) = e^{-\lambda x_0}}$$

$$\frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{e^{-\lambda x} \cancel{e^{-\lambda x_0}}}{\cancel{e^{-\lambda x_0}}}$$

$$= e^{-\lambda x} = P(X > x)$$

D'où $\boxed{P(X > x + x_0 / X > x_0) = P(X > x)}$

Donc la durée de vie de lampe de videoprojecteur est est sans memoire

2) Calcul de l'Esperance de X : E(X)

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\begin{cases} U = x \\ V' = e^{-\lambda x} \end{cases} \qquad \begin{cases} U' = 1 \\ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{cases}$$

$$\lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left(\left[x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right)$$

$$= \lambda \left(\left[-x \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx \right)$$

$$= \left[-\frac{\lambda}{\lambda}\left(xe^{-\lambda x}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

Calculons $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

Donc $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \left[xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$

$$= \left[\infty \underset{0}{\underset{\Downarrow}{e^{-\infty}}} - 0e^{0}\right] - \frac{1}{\lambda}\left[\underset{0}{\underset{\Downarrow}{e^{-\infty}}} - e^{0}\right]$$

$$= (0-0) - \frac{1}{\lambda}(0-1)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(-1)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{1}{\lambda}}$$

3) Le fabriquant est-il honnête ?

Durée de vie moyenne : 10.000 heures : $E(x) = 10.000$ or $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow 10.000 = \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow 10.000\lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{10.000}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0{,}00001 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0{,}00001}$$

Pour $E(x) = 7000$ on a :

$$E(x) = \frac{1/2}{\lambda_2} \Rightarrow 7000 = \frac{1/2}{\lambda_2} \Rightarrow 7000 = \frac{1}{2\lambda_2}$$

$$\Rightarrow 14.000\lambda_2 = 1$$

$\Rightarrow 14000\,\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{14.000} = 0{,}00014 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0{,}00014}$

$\lambda_1 \simeq \lambda_2$:

Donc on peut dire que le fabriquant est honnête.