Trabalho 1

Luiz Francisco, Mateus Fernandes, Mateus Luzzi

2023-09-12

1) Determine a função densidade de W

Seja W, a variável definida como a razão entre os tempos de vida Y e X, onde $Y \sim Exp(\beta_1)$ e $X \sim Exp(\beta_2)$. A função densidade de Y será dada por $f_Y(y) = \beta_1 e^{-\beta_1 y}$, com $y \geq 0$ e a função densidade de X será dada por $f_X(X) = \beta_2 e^{-\beta_2 x}$, com $x \geq 0$. Para acharmos a função densidade de $W = \frac{Y}{X}$ podemos utilizar o método do Jacobiano. O primeiro passo é definir as variáveis aleatórias auxiliares W e Z, sendo $W = \frac{Y}{X}$ e $Z = X$. O Jacobiano será dada por:

$$J[(Y,X)(W,Z)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial w} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial w} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w} WZ & \frac{\partial}{\partial z} WZ \\ \frac{\partial}{\partial w} Z & \frac{\partial}{\partial z} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = z * 1 - w * 0 = z$$

Podemos escrever a função de densidade conjunta $f_{W,Z}(w,z) = f_{Y,X}(y,x)|J|$, onde a função densidade conjunta, pela independência entre Y e X, é dada por $f_{Y,X}(y,x) = f_Y(y) f_X(x)$, então escrevemos:

$$f_{W,Z}(w,z) = f_Y(y) f_X(x)|J| = \beta_1 e^{-\beta_1 z w} \beta_2 e^{-\beta_2 z} z = z \beta_1 \beta_2 e^{-z(\beta_1 w + \beta_2)}$$

$$f_W(w) = \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2}$$

2) Justifique ser a função encontrada em 1) uma função densidade de probabilidade

A função deve ser não negativa para todo $w > 0$.

β_1 e β_2 são positivos por serem parâmetros de uma exponencial e $w = \frac{y}{x} > 0$, pois y e x são positivos também. Portanto:

$$0 < w < \beta_1 w < \beta_1 w + \beta_2 < (\beta_1 w + \beta_2)^2 < \frac{1}{(\beta_1 w + \beta_2)^2} < \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2}$$

A integral da função densidade de probabilidade sobre todo o seu domínio deve ser igual a 1.

$$\int_0^\infty \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2} dw = -\frac{\beta_2}{\beta_1 w + \beta_2} |_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

3) Qual a função densidade de W no caso de $\beta_1 = \beta_2$

$$f_W(w) = \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2} = \frac{\beta_1^2}{(\beta_1 w + \beta_1)^2} = \frac{\beta_1^2}{(\beta_1 (w+1))^2} = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2 (w+1)^2} = \frac{1}{(w+1)^2}$$

4) Calcule o valor esperado de W quando $\beta_1 \neq \beta_2$

$$E[W] = \int_0^\infty w \cdot \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2} dw$$

Para resolver esta integral, podemos fazer a substituição $u = \beta_1 w + \beta_2$, então $\partial u = \beta_1 \partial w$.

$$E[W] = \int_{\beta_2}^\infty \frac{u-\beta_2}{\beta_1 u^2} dw = \int_{\beta_2}^\infty \frac{u}{\beta_1 u^2} dw - \int_{\beta_2}^\infty \frac{\beta_2}{\beta_1 u^2} dw = \frac{1}{\beta_1}\int_{\beta_2}^\infty \frac{1}{u} dw - \frac{\beta_2}{\beta_1}\int_{\beta_2}^\infty \frac{1}{u^2} dw$$

$$= \frac{1}{\beta_1}\ln|u||_{\beta_2}^\infty - \frac{\beta_2}{\beta_1}[-\frac{1}{u}]|_{\beta_2}^\infty = \frac{1}{\beta_1}[\ln|\infty| - \ln|\beta_2|] - \frac{\beta_2}{\beta_1}[-\frac{1}{\infty} - (-\frac{1}{\beta_2})] = \infty - \frac{\beta_2}{\beta_1}(0 - (-\frac{1}{\beta_2})) = \infty - \frac{1}{\beta_1} = \infty$$

5) Para a função densidade calculada em 1) calcule $P[W > t]$ onde t é uma constante maior ou igual a 0

$$P[W > t] = f_W(w)dw = \int_t^\infty \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1 w + \beta_2)^2} dw$$

Seja $u = \beta_1 w + \beta_2$, então $\partial u = \beta_1 \partial w$. Quando $w = t$, então $u = \beta_1 t + \beta_2$.

$$P[W > t] = \int_{\beta_1 t + \beta_2}^\infty \frac{1}{u^2} du = [-\frac{1}{u}]|_{\beta_1 t + \beta_2}^\infty = 0 - (-\frac{1}{\beta_1 t + \beta_2}) = \frac{1}{\beta_1 t + \beta_2}$$

6) Sob a hipótese que $\beta_1 = \beta_2$ calcule $P[W > t]$

$$P[W > t] = \int_t^\infty \frac{1}{(w+1)^2} dw$$

Substituindo $u = w + 1$.

$$P[W > t] = \int_t^\infty \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}|_t^\infty = -\frac{1}{w+1}|_t^\infty = -[\frac{1}{\infty+1} - \frac{1}{t+1}] = \frac{1}{t+1}$$

7.1) Qual a interpretação para a hipótese H_1 quando pensamos em X e em Y?

A hipótese H_1 afirma que a média da variável aleatória W é maior do que 1. Isso implica que, sob a hipótese alternativa, a razão entre os tempos de vida Y e X tem uma média maior do que 1. Em termos práticos, isso sugere que os dispositivos produzidos pelo processo A (com tempo de vida Y) têm, em média, um tempo de vida maior do que os dispositivos produzidos pelo processo B (com tempo de vida X). Portanto, H_1 indica uma diferença significativa e a favor do processo A em termos de tempo de vida médio dos dispositivos quando comparado ao processo B.

7.2) - É possível a construção de um teste paramétrico para avaliação destas hipóteses considerando um nível de significância α?

Não, realmente não é possível construirmos um teste paramétrico para a avaliação destas hipóteses. Mesmo que encontramos a função de densidade da nossa variável W, percebemos que ela segue uma distribuição Cauchy, também provado anteriormente, então ela não possui esperança finita. Como não possuímos sua esperança (média) não é possível criar um teste de hipóteses paramétrico para esse caso, pelo menos ainda não tenho conhecimento sobre a criação de um método alternativo paramétrico aos tradicionais para uma distribuição cauchy. Então, como alternativa nesse caso, utiliza-se mais casos não paramétricos.

8.a) Considerando $\beta_1 = \beta_2$ a probabilidade de $W > 1$

$$P[W > t] = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

8.b) Interprete o que significa $W = 1$ e $W > 1$ considerando as variáveis Y e X

$W = 1$: significa que o tempo de vida médio dos dispositivos produzidos pelos processos A (representado por Y) e B (representado por X) é o mesmo, ou seja, não há diferença significativa no tempo de vida médio entre os dois processos. Ambos os processos produzem dispositivos com um desempenho médio semelhante.

$W > 1$: significa que o tempo de vida médio dos dispositivos produzidos pelo processo A (representado por Y) é maior do que o tempo de vida médio dos dispositivos produzidos pelo processo B (representado por X). Nesse caso, o processo A é considerado superior ao processo B em termos de longevidade dos dispositivos.

8.c) Estabeleça a distribuição de probabilidade de uma binomial com parâmetros 20 e $\theta^* = P[W > 1]$

n	Pontual	Acumulada
1	0.0000191	0.0000200
2	0.0001812	0.0002012
3	0.0010872	0.0012884
4	0.0046206	0.0059090
5	0.0147858	0.0206947
6	0.0369644	0.0576591
7	0.0739288	0.1315880
8	0.1201344	0.2517223
9	0.1601791	0.4119015
10	0.1761971	0.5880985
11	0.1601791	0.7482777
12	0.1201344	0.8684120
13	0.0739288	0.9423409
14	0.0369644	0.9793053
15	0.0147858	0.9940910
16	0.0046206	0.9987116
17	0.0010872	0.9997988
18	0.0001812	0.9999800
19	0.0000191	0.9999990
20	0.0000010	1.0000000

8.d) Estabeleça a regra de decisão definindo o número de sucessos que leva para rejeição da hipótese nula, considerando o nível de significância de 5% e as hipóteses $H_0 : \alpha = \alpha^*$; $H_1 : \alpha > \alpha^*$

n	Pontual	Acumulada
13	0.0739288	0.9423409
14	0.0369644	0.9793053
15	0.0147858	0.9940910
16	0.0046206	0.9987116
17	0.0010872	0.9997988
18	0.0001812	0.9999800

n	Pontual	Acumulada
19	0.0000191	0.9999990
20	0.0000010	1.0000000

A regra de decisão definida consiste em rejeitar a hipótese alternativa H_0 quando a processo binomial representado por $W > 1$ ocorrer na região onde o número de sucessos é maior ou igual a 13 (≥ 13 ou > 12).

9) Com base no teorema da transformação integral estabeleça a geração de 20 observações de acordo com a distribuição de probabilidade dada em 3). Com base neste vetor, de 20 observações, defina se houve ou não a rejeição da hipótese nula descrita no tópico d) do item 8)

$$P[W > x] = \int_x^\infty f_W(w)dw = \int_x^\infty \frac{1}{(w+1)^2}dw$$

Agora, queremos encontrar a função inversa $F_W^{-1}(u)$, onde u é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 1. Vamos definir $u = P[W > x]$ e resolver para x:

$$u = \int_x^\infty \frac{1}{(w+1)^2}dw = -\frac{1}{w+1}|_x^\infty = -[\frac{1}{\infty+1} - \frac{1}{x+1}] = \frac{1}{x+1}$$

$$u = \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{u} = x+1 \to \frac{1}{u} - 1 = x$$

Temos que $F_W^{-1}(u) : x = \frac{1}{u} - 1$. Simulando computacionalmente uma uniforme.

```r
set.seed(123)
u <- runif(20)
observacoes_W <- 1 / u - 1
sum(observacoes_W > 1)
```

```
## [1] 9
```

Como o resultado não ocorreu na região de rejeição, no intervalo (13,20), não rejeitamos a hipótese $H_0 : \mu_W = 1$.

10) Repita o processo dado em 9) 10.000 vezes e apresente a proporção de casos onde houve a rejeição da hipótese nula. (apresente 5 vetores de 20 observações, destacando em cada um deles se houve ou não a rejeição da hipótese nula)

```r
set.seed(123)
gera_w <- function(){
  x <- runif(20)
  observacoes_W <- 1 / x - 1
  sum(observacoes_W > 1) >= 13
}
amostras <- replicate(10000, gera_w())
mean(amostras)
```

```
## [1] 0.1336
```

```
amostras[0:5]
```

```
## [1] FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```

A proporção de casos em que a hipótese nula foi rejeitada em 10.000 repetições é de aproximadamente 13%, maior que o $\alpha = 5\%$ definido. Portanto, esse processo está reportando um nível de confiança de 87%, o que é menor que o nominal.

11) Considerando o resultado obtido em 6) calcule o 3o quartil de W (quando $\beta_1 = \beta_2$).

$$P[W \leq t] = 0.75 \rightarrow P[W > t] = 1 - 0.75$$

Em 6) já calculamos $P[W > t]$:

$$P[W > t] = 1 - 0.75 = \frac{1}{t+1} \rightarrow 0.25 = \frac{1}{t+1} \rightarrow t+1 = \frac{1}{0.25} \rightarrow t+1 = 4 \rightarrow t = 3$$

12) Com os 10.000 conjuntos com 20 observações gerados na questão 9) estabeleça o intervalo com 80% de confiança para o 3o quartil. Verifique quantos destes 10.000 intervalos contém o verdadeiro 3o quartil calculado em 11). Apresente 5 vetores de 20 observações, destacando em cada um deles os limites do intervalo de confiança, indicando em cada um deles se contém ou não o terceiro quartil

```
n_amostras <- 10000
tamanho_amostra <- 20

amostras <- 1/matrix(runif(n_amostras * tamanho_amostra), nrow = n_amostras)-1

calcula_Q3 <- function(x) {
  quantile(x, probs = 0.75)
}
set.seed(123)
cobertura <- numeric(n_amostras)
limite_inferior <- numeric(n_amostras)
limite_superior <- numeric(n_amostras)
for (i in 1:n_amostras) {
  amostra_aleatoria <- sample(amostras[i, ], tamanho_amostra, replace = TRUE)
  limite_inferior[i] <- quantile(amostra_aleatoria, probs = 0.1)
  limite_superior[i] <- quantile(amostra_aleatoria, probs = 0.9)
  cobertura[i] <- limite_inferior[i] <= 3 & limite_superior[i] >= 3
}
porcentagem_cobertura <- mean(cobertura) * 100
porcentagem_cobertura
```

```
## [1] 84.72
```

```
df <- data.frame(Inferior = limite_inferior[1:5], Superior = limite_superior[1:5],
                 Cobertura = cobertura[1:5])
df$Cobertura <- ifelse(df$Cobertura == 1, "TRUE", "FALSE")
kable(df)
```

Inferior	Superior	Cobertura
0.0913989	19.167721	TRUE
0.0844454	2.230897	FALSE
0.1576777	4.602364	TRUE
0.0141653	2.083321	FALSE
0.0669374	9.601247	TRUE

A porcentagem de cobertura obtida foi de 84,72%, maior que a taxa nominal de 80% pretendida.