Luiz Henrique Barretta Francisco - GRR20213026

1- Considere que Z_i onde $i = 1, 2, 3$ segue uma $U(0; 10)$. Determine a função densidade de probabilidade da variável aleatória correspondente à soma de três variáveis $U(0; 10)$; ou seja; a função densidade de probabilidade de $X = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

Sabemos que se $Z_i \sim U(a; b)$ então $f_{Z_i} = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}$.

Seja $X_2 = Z_1 + Z_2$, que tem seus valores definidos no intervalo (0,20), então sua função de probabilidade é dada em dois casos:

$$0 < X_2 \leq 10 : f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1}(z_1) * f_{Z_2}(x_2 - z_1) dz_1 = \int_0^{x_2} \frac{1}{10} * \frac{1}{10} dz_1 = \frac{1}{100} z_1 \Big|_0^{x_2} = \frac{x_2}{100}$$

$$10 < X_2 \leq 20 : f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1}(z_1) * f_{Z_2}(x_2 - z_1) dz_1 = \int_{x_2-10}^{10} \frac{1}{10} * \frac{1}{10} dz_1 = \frac{1}{100} z_1 \Big|_{x_2-10}^{10} = \frac{10}{100} - \frac{x_2 - 10}{100} = \frac{20 - x_2}{100}$$

X_2 então é uma Distribuição Triangular com parâmetros de extremo 0 e 20, e moda 10:

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{100} & \text{para } 0 < x_2 \leq 10 \\ \frac{20-x_2}{100} & \text{para } 10 < x_2 \leq 20 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

Seja então $X = X_2 + Z_3$, que tem seus valores definidos no intervalo (0,30), então sua função de probabilidade é:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_3}(z_3) * f_{X_2}(x - z_3) dz_3 = \frac{1}{10} * \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x - z_3) dz_3$$

Realizando a substituição para o Caso I ($0 < X_2 \leq 10$):

$$0 < X - Z_3 \leq 10 : Z_3 < X \leq Z_3 + 10$$

e Caso II ($10 < X_2 \leq 20$):

$$10 < X - Z_3 \leq 20 : Z_3 + 10 < X \leq Z_3 + 20$$

Temos então que

$$0 < X \leq 10 : f_X(x) = \frac{1}{10} * \int_0^x \frac{x - z_3}{100} dz_3 = \frac{1}{1000} * \int_0^x x - z_3 dz_3 = \frac{1}{1000} * \left[x z_3 - \frac{z_3^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{1000} * \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] = \frac{x^2}{2000}$$

$$10 < X \leq 20 : f_X(x) = \frac{1}{10} * \int_{x-10}^{10} \frac{x - z_3}{100} dz_3 = \frac{1}{10} * \frac{-x^2 + 20x}{200} = \frac{-x^2 + 20x}{2000}$$

$$10 < X \leq 20 : f_X(x) = \frac{1}{10} * \int_{x-10}^{10} \frac{20 - x_2}{100} dz_3 = \frac{1}{10} * \int_{x-10}^{10} \frac{20 - (x - z_3)}{100} dz_3 = \frac{1}{1000} * \int_{x-10}^{10} 20 - x + z_3 dz_3$$

$$\frac{1}{1000}\left[x^2 - 40x - \frac{(x-10)^2}{2} + 450\right] = \frac{x^2 - 60x + 800}{2000}$$

$$20 < X \leq 30 : f_X(x) = \frac{1}{10} * \int_{x-20}^{10} \frac{20 - x_2}{100} dz_3 = \frac{1}{10} * \int_{x-20}^{10} \frac{20 - (x - z_3)}{100} dz_3 = \frac{1}{1000} * \int_{x-20}^{10} 20 - x + z_3 dz_3$$

$$\frac{1}{1000}\left[x^2 - 50x - \frac{(x-20)^2}{2} + 650\right] = \frac{x^2 - 60x + 900}{2000}$$

X então segue uma distribuição

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{x^2}{2000} & \text{para } 0 < X \leq 10 \\ \frac{-x^2+20x}{2000} + \frac{x^2-60x+800}{2000} = \frac{-x+20}{50} & \text{para } 10 < X \leq 20 \\ \frac{x^2-60x+900}{2000} & \text{para } 20 < X \leq 30 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ