Tarefa 12

3. Dado o PVI abaixo, considere $h = 0.5, 0.25, 0.125$ e 0.1.

$$\begin{cases} y' = 4 - 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

a) Encontre uma aproximação para $y(5)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado, para cada h.

```
f <- function(x, y) {4 - 2 * x}
y_exato_fun <- function(x) {-x^2 + 4 * x + 2}
h_valores <- c(0.5, 0.25, 0.125, 0.1)
resultados_lista <- list()

for (h in h_valores) {x_final <- 5
                      n_passos <- x_final / h
                      x <- seq(0, x_final, by = h)
                      y <- numeric(n_passos + 1)
                      y[1] <- 2
                        for (i in 1:n_passos) {
                          x_n <- x[i]
                          y_n <- y[i]
                          k1 <- f(x_n, y_n)
                          y_preditor <- y_n + h * k1
                          k2 <- f(x_n + h, y_preditor)
                          y[i + 1] <- y_n + (h / 2) * (k1 + k2)}
                      resultado_final <- y[n_passos + 1]
                      resultados_lista[[as.character(h)]] <- resultado_final}
y_exato_5 <- y_exato_fun(5)

tabela_resultados <- data.frame(h = h_valores,
                                y_aproximado = unlist(resultados_lista),
                                y_exato = y_exato_5)
tabela_resultados$Erro_Absoluto <- abs(tabela_resultados$y_exato - tabela_resultados$y_aproximado)
knitr::kable(tabela_resultados, digits = 8, caption = "Resultados do Método de Euler Aperfeiçoado")
```

Tabela 1: Resultados do Método de Euler Aperfeiçoado

	h	y_aproximado	y_exato	Erro_Absoluto
0.5	0.500	-3	-3	0
0.25	0.250	-3	-3	0
0.125	0.125	-3	-3	0
0.1	0.100	-3	-3	0

b) Compare seus resultados com a solução exata dada por $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.

Os resultados obtidos pelo Método de Euler Aperfeiçoado são iguais à solução exata $y(5) = -3$ para todos os valores de h testados. O erro é zero (ou um valor insignificante devido à aritmética de ponto flutuante). A justificativa para isso é:

- .1 Ordem do Método: O Método de Euler Aperfeiçoado (também conhecido como método de Heun) é um método de Runge-Kutta de 2ª ordem.

- 2. Fórmula do Erro: O erro de truncamento local para um método de 2ª ordem é da ordem de $O(h^3)$ e depende da terceira derivada da solução, $y'''(x)$.
- 3. Análise da Solução: A solução exata do PVI é o polinômio $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Calculando suas derivadas, temos:

  - $y'(x) = -2x + 4$
  - $y''(x) = -2$
  - $y'''(x) = 0$

- 4. Conclusão: Como a terceira derivada da solução é zero para todo x, o erro de truncamento local do Método de Euler Aperfeiçoado é zero em cada passo do cálculo. Sem erro local para acumular, a aproximação numérica permanece exata, independentemente do tamanho do passo h.

c) Você espera o mesmo resultado do item (b) usando o método de Euler? Justifique.

```r
h_euler <- 0.5
n_euler <- 5 / h_euler
x_euler <- seq(0, 5, by = h_euler)
y_euler <- numeric(n_euler + 1)
y_euler[1] <- 2
for (i in 1:n_euler) {y_euler[i + 1] <- y_euler[i] + h_euler * f(x_euler[i], y_euler[i])}
resultado_euler <- y_euler[n_euler + 1]
resultado_euler
```

```
## [1] -0.5
```

Não espero o mesmo resultado exato usando o método de Euler simples. A justificativa para isso é:

- Ordem do Método: O Método de Euler simples é um método de 1ª ordem.
- Fórmula do Erro: O erro de truncamento local do Método de Euler é da ordem de $O(h^2)$ e depende da segunda derivada da solução, $y''(\xi)$.
- Análise da Solução: Como visto no item anterior, a segunda derivada da solução exata é $y''(x) = -2$, que é uma constante diferente de zero.
- Conclusão: Como o erro local (proporcional a $-h^2$) é diferente de zero, o Método de Euler acumulará um erro a cada passo. Portanto, a aproximação final não será exata e seu valor dependerá do passo h utilizado. Por exemplo, o cálculo para $h = 0.5$ fornece $y(5) \approx -0.5$, que é significativamente diferente do valor exato de -3.0.