Anáise Numérica

Avaliação 2

Luiz Henrique Barretta Francisco - 202100155302

novembro/2025

1. Introdução

Este trabalho visa aplicar conceitos da segunda parte da disciplina de Análise Numérica para resolver um problema real. O problema escolhido é a modelagem da dinâmica populacional de duas espécies interagindo como predador e presa, descrito pelo modelo de Lotka-Volterra. Este é um problema clássico em biologia matemática e representa um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não-lineares de primeira ordem. O modelo é descrito por:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad \text{(Presa)} \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \delta\beta xy - \gamma y \quad \text{(Predador)}$$

Onde x é a população de presas, y a de predadores, e α, β, γ, δ são parâmetros que definem as taxas de interação. A aplicação de métodos numéricos, conforme estudado no Capítulo 8, é a abordagem mais adequada para este sistema.

2. Metodologia: Conceitos Numéricos Aplicados

Para resolver o sistema de EDOs, comparamos dois métodos numéricos de passo um discutidos no Capítulo 8:

1. Método de Runge-Kutta (RK) de Alta Ordem (via `deSolve`): Utilizamos a função `ode` da biblioteca `deSolve`. Por padrão, ela usa o solver `lsoda`, que é um método adaptativo de passo múltiplo (Adams) e alta ordem, similar em precisão aos métodos de Runge-Kutta (p. 331). Esta solução será usada como a solução de referência devido a alta precisão.
2. Método de Euler (p. 320): Implementamos manualmente o método de Euler, o mais simples dos métodos de passo um. Sua fórmula de iteração é: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$. Seu erro local é de ordem $O(h^2)$, o que leva a um rápido acúmulo de erro global.

3. Implementação e Resultados

Definimos a função do sistema, os parâmetros e as condições iniciais. Executamos o solver `deSolve` de alta precisão e medimos o tempo de execução. Também implementamos e executamos um loop para o método de Euler, usando um passo fixo `h = 0.01` (10.000 passos). Os gráficos 1 e 2 mostram a solução de referência precisa, capturando o ciclo limite estável do sistema.

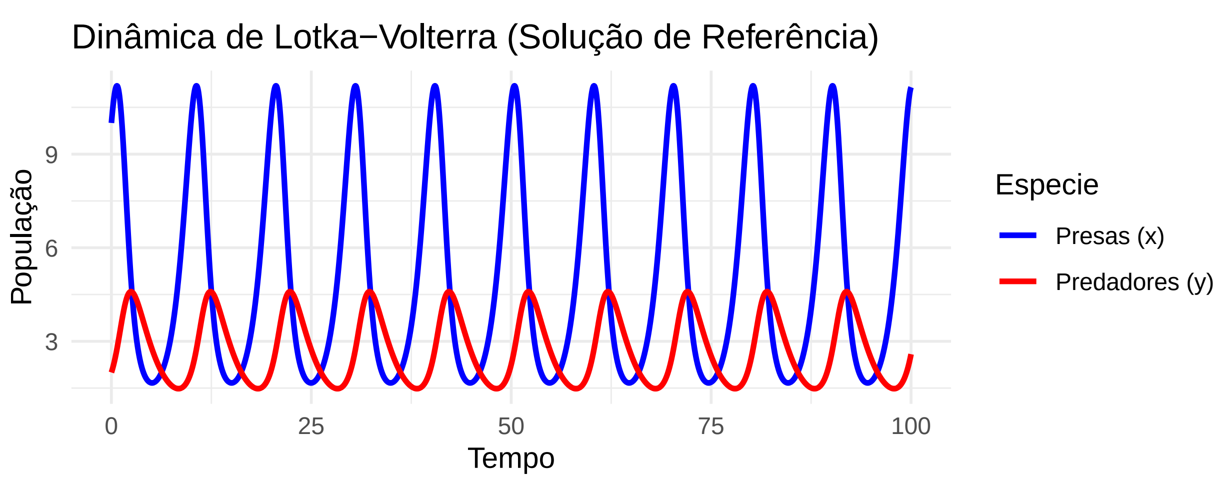

Figura 1: Série temporal (Solução de Referência - Runge-Kutta).

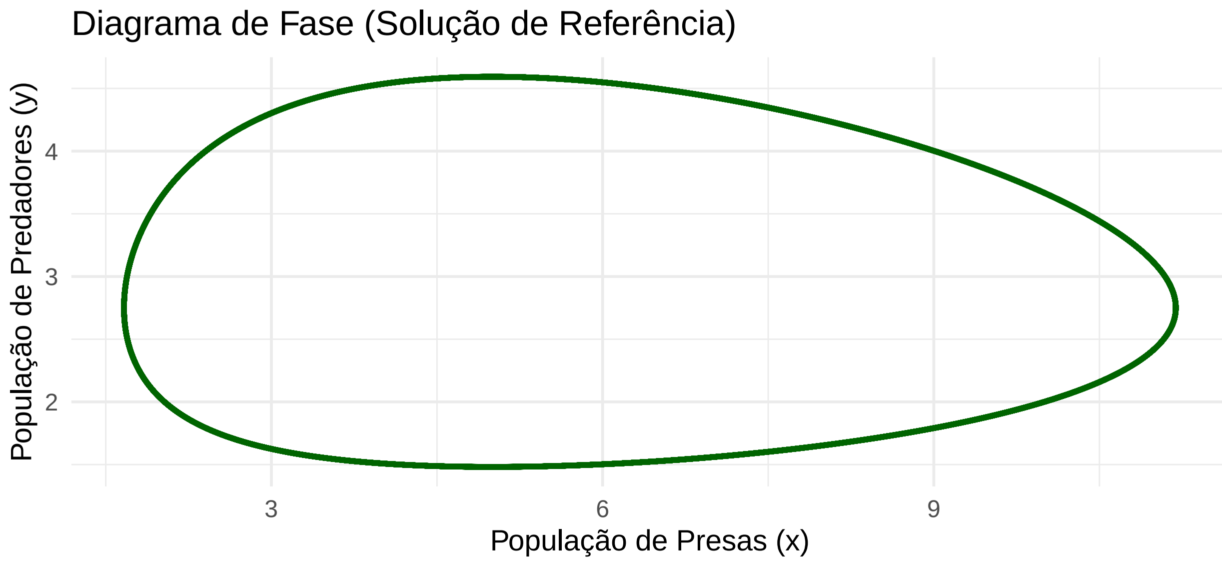

Figura 2: Diagrama de Fase (Solução de Referência - Runge-Kutta).

A solução de alta ordem (RK) mostra um ciclo limite perfeitamente estável e periódico, onde as populações oscilam de forma consistente ao longo do tempo, como esperado pelo modelo.

Já o gráfico 3 compara a população de presas calculada pelo método de Euler com a solução de referência.

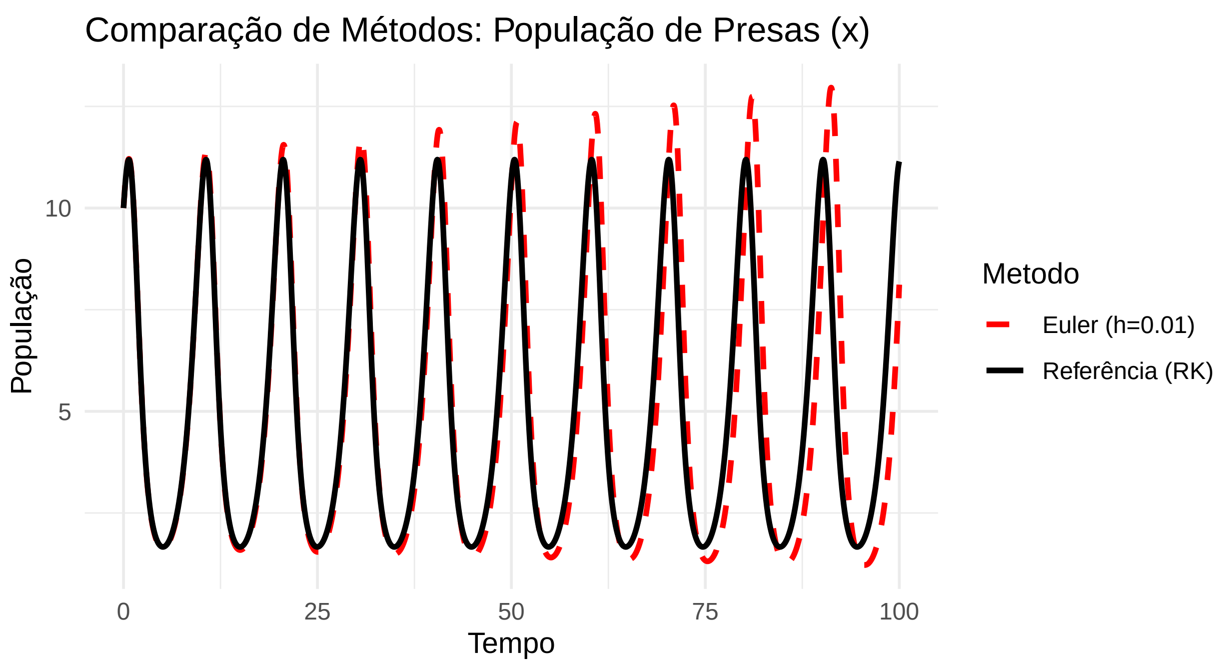

Figura 3: Comparação do Método de Euler (h=0.01) com a Solução de Referência.

O gráfico mostra o principal defeito do método de Euler (erro de $O(h^2)$): instabilidade e acúmulo de erro. A solução de Euler (vermelho tracejado) diverge da solução de referência (preto), espiralando para fora. O método não consegue conservar a energia do sistema, levando a uma solução numericamente instável e

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

incorreta, apesar de usar 10.000 passos.

A tabela abaixo resume os resultados da simulação.

Tabela 1: Comparativo de Desempenho dos Métodos Numéricos.

Método	Tempo (s)	Nº de Passos	Resultado	Erro Final Médio
Runge-Kutta Adaptivo (`lsoda`)	0.16	10000	Preciso e estável (usado como Referência)	0.000
Euler Explícito (h=0.01)	0.21	10000	Instável (divergente)	2.118

4. Conclusão

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (e implementações adaptativas como `lsoda`) é computacionalmente mais intensivo por passo, mas, como demonstrado na Tabela 1, é capaz de resolver o sistema de EDOs de forma eficiente e estável.

Em contraste, o Método de Euler, apesar de conceitualmente simples, mostrou-se inadequado para este problema. O Gráfico 3 e o Erro Final Médio na tabela comprovam que o acúmulo de erro de truncamento em cada passo (mesmo com 10.000 passos) torna a solução de Euler divergente e numericamente instável.

Este trabalho então demonstra a aplicabilidade dos métodos do Capítulo, demonstrando a importância da escolha de um método de ordem superior (como Runge-Kutta) para a resolução de problemas reais complexos.