Avaliação 3 Prob. Est. Mat.

Luiz Henrique Borretto Francisco

Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias com distribuição Burr 12 de parâmetros $c, d > 0$ e suporte $x \in [0, \infty)$. A fdp é:

$$f(y; c, d) = c d \frac{y^{c-1}}{(1+y^c)^{d+1}}$$

Dados: y_i = 1.1; 1.9; 2.1; 3 e 5.

1) $$L(c, d; y) = \prod_{i=1}^{n} c d \frac{y^{c-1}}{(1+y_i^c)^{d+1}} = c^n d^n \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{c-1}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} (1+y_i^c)^{-(d+1)}\right)$$

$$\ell(c, d) = \ln(L) = n \ln c + n \ln d + (c-1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (d+1)\sum_{i=1}^{n} \ln(1+y_i^c)$$

2) EMV: $$\frac{\partial \ell}{\partial d} = 0 + \frac{n}{d} + 0 - \sum_{i=1}^{n} \ln(1+y_i^c) = 0$$

$$\hat{d} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1+y_i^c)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial c} = \frac{n}{c} + 0 + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - (d+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^c \ln y_i}{1+y_i^c} = 0$$

Não existe solução analítica para $\hat{c}$ por conta do termo $\frac{y_i^c \ln y_i}{1+y_i^c}$, Substituindo $\hat{d}$ na equação de $\hat{c}$ e resolvendo numericamente.

```r
# Dados
y <- c(1.1, 1.9, 2.1, 3, 5)
n <- length(y)
# Função de Menos Log-Verossimilhança (para minimizar)
neg_log_lik <- function(theta) {
  c_par <- theta[1]
  d_par <- theta[2]
  # Restrição de parâmetros positivos
  if(c_par <= 0 || d_par <= 0) return(Inf)
  # Log-verossimilhança
  logL <- n * log(c_par) + n * log(d_par) +
          (c_par - 1) * sum(log(y)) -
          (d_par + 1) * sum(log(1 + y^c_par))
  return(-logL)}
# Otimização Numérica (BFGS)
chute_inicial <- c(1, 1)
```

```r
otimizacao <- optim(par = chute_inicial, fn = neg_log_lik, hessian = TRUE)
est_c <- otimizacao$par[1]
est_d <- otimizacao$par[2]
cat("Estimativas de Máxima Verossimilhança:\nc_chapeu =",
    round(est_c, 4), "\nd_chapeu =", round(est_d, 4))
```

```
## Estimativas de Máxima Verossimilhança:
## c_chapeu = 138.8351
## d_chapeu = 0.0086
```

3) A Matriz de Informação Observada $I(\theta)$ é a negativa da Matriz Hessiana H (segundas derivadas)

$$I(c,d) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial c^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial c \partial d} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial d \partial c} & \frac{\partial^2 l}{\partial d^2} \end{pmatrix}$$

$$1: \frac{\partial^2 l}{\partial d^2} = -\frac{n}{d^2} \cdot \quad 2: \frac{\partial^2 l}{\partial c \partial d} = \frac{\partial^2 l}{\partial d \partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{n}{d} - \sum \ln(1+y_i^c)\right]$$

$$= 0 - \sum \frac{y_i^c \ln y_i}{1+y_i^c} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^c \ln y_i}{1+y_i^c}$$

$$3: \frac{\partial^2 l}{\partial c^2} = -\frac{n}{c^2} - (d+1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i^c(\ln y_i)^2(1+y_i^c) - (y_i^c \ln y_i)(y_i^c \ln y_i)}{(1+y_i^c)^2}\right]$$

$$= -\frac{n}{c^2} - (d+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^c(\ln y_i)^2}{(1+y_i^c)^2}$$

Informação Esperada é muito complexa para calcular.

```r
# A função optim já calculou a Hessiana numérica
hessiana <- otimizacao$hessian
info_observada <- hessiana
cat("Matriz de Informação Observada J(theta_chapeu):")
```

```
## Matriz de Informação Observada J(theta_chapeu):
```

```r
print(info_observada)
```

```
##              [,1]         [,2]
## [1,] 0.0002593765     4.187151
## [2,] 4.1871514043 69512.350493
```

```r
# Inversa da Informação (Matriz de Covariância Assintótica)
var_cov <- solve(info_observada)
var_cov
```

```
##                [,1]          [,2]
## [1,] 139685.496090 -8.4141065143
## [2,]     -8.414107  0.0005212187
```

4) Os parâmetros são ortogonais se a esperança das derivadas cruzadas for zero. $E\left[-\frac{\partial^2 l}{\partial c \partial d}\right] = 0$. Observando a derivada mista:

$\frac{\partial^2 l}{\partial c \partial d} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^c \ln y_i}{1+y_i}$. Como $y_i > 0$ e $c > 0$, o termo $\frac{y_i^c}{1+y_i^c}$ é sempre positivo.

O termo $\ln y_i$ pode ser positivo ou negativo. Porém, a esperança dessa soma não é nula para todos os valores do espaço paramétrico. Portanto, os parâmetros não são ortogonais.

5) Pela propriedade assintótica dos EMV com n grande:

$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}, I^{-1}(c,d)\right)$$

Na prática substituímos I^{-1} por $H^{-1}(\hat{c},\hat{d})$.

$$\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix} \approx N\left(\begin{pmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Var(\hat{c}) & Cov(\hat{c},\hat{d})\\ Cov(\hat{d},\hat{c}) & Var(\hat{d})\end{pmatrix}\right)$$

6) O intervalo de confiança Wald de $(1-\alpha)\%$ é dado por:

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{Var}(\hat{\theta}_i)}$$

Onde $\hat{Var}$ são os elementos da diagonal da inversa da matriz de informação observada.

```r
# Erros padrão (raiz quadrada da diagonal da matriz de covariância)
se <- sqrt(diag(var_cov))
se_c <- se[1]
se_d <- se[2]
# Nível de confiança 95%
alpha <- 0.05
z_crit <- qnorm(1 - alpha/2)
# Intervalos
ci_c <- c(est_c - z_crit * se_c, est_c + z_crit * se_c)
ci_d <- c(est_d - z_crit * se_d, est_d + z_crit * se_d)
cat("Intervalo de Confiança 95% para c: [", round(ci_c[1], 4), ";", round(ci_c[2], 4),
    "]\nIntervalo de Confiança 95% para d: [", round(ci_d[1], 4), ";", round(ci_d[2], 4),"]")
```

```
## Intervalo de Confiança 95% para c: [ -593.6921 ; 871.3623 ]
## Intervalo de Confiança 95% para d: [ -0.0361 ; 0.0533 ]
```

Interpretação: Com 95% de confiança, acreditamos que o verdadeiro valor do parâmetro c está contido no intervalo calculado acima, e o verdadeiro valor de d está no seu respectivo intervalo. Como a amostra é pequena ($n = 5$), a aproximação normal pode não ser perfeita e os intervalos tendem a ser largos.

7) Hipóteses: $H_0: c = 1$. $H_1: c \neq 1$.
Podemos usar o Teste de Wald, sendo a estatística:
$W = \dfrac{\hat{c} - c_0}{SE(\hat{c})}$. Sob H_0, $W \sim N(0,1)$ assintoticamente.

```r
# Teste de Wald
c0 <- 1
W <- (est_c - c0) / se_c
p_valor <- 2 * (1 - pnorm(abs(W))) # Teste bilateral
cat("Estatística de Teste W:", round(W, 4),
    "\nP-valor:", round(p_valor, 4), "\n")
```

```
## Estatística de Teste W: 0.3688
## P-valor: 0.7123
```

```r
# Conclusão
if(p_valor < 0.05) {
  cat("Conclusão: Rejeita-se H0 ao nível de 5%. Há evidências de que c é diferente de 1.")} else {
  cat("Conclusão: Não se rejeita H0 ao nível de 5%.
Não há evidências suficientes para afirmar que c é diferente de 1.")}
```

```
## Conclusão: Não se rejeita H0 ao nível de 5%.
## Não há evidências suficientes para afirmar que c é diferente de 1.
```