第十三章《概率与统计》讲义

学习目标：
1. 掌握概率的基本概念和运算规则
2. 理解条件概率与贝叶斯公式
3. 熟悉常见概率分布的特征和应用
4. 学会随机变量的数字特征计算
5. 掌握参数估计与假设检验的基本方法
6. 能够运用概率统计方法解决工程实际问题

学习资源：
- 教材：《高等数学》第13章
- 课件：《第13章概率与统计》
- 实验：Lab13-1 至 Lab13-6 仿真实验
- 练习：题库概率题、统计推断题

第一讲：概率基础与运算

1.1 概率的基本概念

1.1.1 随机现象

定义：在相同条件下，可能出现不同结果的现象称为随机现象。

例子：

- 抛硬币：可能出现正面或反面
- 掷骰子：可能出现1、2、3、4、5、6点
- 产品检验：可能合格或不合格
- 设备故障：可能正常或故障

1.1.2 样本空间

定义：随机试验的所有可能结果的集合称为样本空间，记作Ω。

例子：

- 掷骰子：Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- 抛硬币：Ω = {正面, 反面}
- 产品检验：Ω = {合格, 不合格}

1.1.3 随机事件

定义：样本空间的子集称为随机事件。

例子：

- A = {2, 4, 6}（掷出偶数）
- B = {1, 3, 5}（掷出奇数）
- C = {正面}（抛硬币出现正面）

特殊事件：

- 必然事件：Ω（一定发生）
- 不可能事件：∅（不会发生）

1.1.4 概率的定义

古典概率

定义：PA = 事件A包含的基本事件数 / 样本空间的基本事件总数

适用条件：

- 样本空间有限
- 每个基本事件等可能

例子：掷骰子出现偶数的概率

- 样本空间：Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- 事件A = {2, 4, 6}
- PA = 3/6 = 1/2

几何概率

定义：PA = 事件A的几何度量 / 样本空间的几何度量

例子：在区间

$$0, 1$$

上随机取一点，求该点落在

$$0.3, 0.7$$

内的概率

- $P(A) = 0.7 - 0.3/1 - 0 = 0.4$

统计概率

定义：$P(A) = \lim_{n \to \infty} m/n$，其中m为事件A发生的次数，n为试验总次数
大数定律：当试验次数n很大时，频率趋于稳定，这个稳定值称为概率。

1.2 概率的运算公式

1.2.1 概率的加法公式

公式：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
特殊情况：

- 当A、B互斥时：$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 当A、B对立时：$P(A) + P(B) = 1$

1.2.2 概率的乘法公式

公式：$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
特殊情况：

- 当A、B独立时：$P(AB) = P(A)P(B)$

1.2.3 事件的关系

互斥事件
定义：A∩B = ∅，不能同时发生

性质：$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

对立事件
定义：A∪B = Ω 且 A∩B = ∅，必有一个发生

性质：$P(A) + P(B) = 1$

独立事件

定义：$P(B|A) = P(B)$，A的发生不影响B的概率

性质：$P(AB) = P(A)P(B)$

1.3 典型例题

例题1：掷骰子问题

掷一枚均匀骰子，求出现偶数的概率。
解：

- 样本空间：Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- 事件A = {2, 4, 6}
- $P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2$

例题2：扑克牌问题

从52张扑克牌中随机抽取一张，求抽到红桃或A的概率。
解：

- 设A = {抽到红桃}，B = {抽到A}
- $P(A) = 13/52$，$P(B) = 4/52$，$P(AB) = 1/52$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 13/52 + 4/52 - 1/52 = 16/52 = 4/13$

例题3：系统可靠性问题

某系统由两个部件组成，部件1的可靠度为0.9，部件2的可靠度为0.8。
（1）若两个部件串联，求系统可靠度

（2）若两个部件并联，求系统可靠度

解:

（1）串联：P系统正常 = P部件1正常P部件2正常 = 0.9 × 0.8 = 0.72

（2）并联：P系统正常 = 1 - P系统故障 = 1 - P所有部件都故障 = 1 - 0.1 × 0.2 = 0.98

第二讲：条件概率与分布

2.1 条件概率

2.1.1 条件概率的定义

定义：在事件B发生的条件下，事件A发生的概率称为条件概率，记作$P(A|B)$。

公式：$P(A|B) = P(AB)/P(B)$，其中$P(B) > 0$

2.1.2 全概率公式

公式：设$B_1, B_2, ..., B_n$是样本空间Ω的一个划分，且$P(B_i) > 0$，则

$P(A) = \Sigma_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$

2.1.3 贝叶斯公式

公式：$P(B_i|A) = P(A|B_i)P(B_i)/P(A) = P(A|B_i)P(B_i)/\Sigma_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)$

2.2 随机变量

2.2.1 随机变量的定义

定义：将随机试验的结果用数字表示的变量称为随机变量。

分类：

- 离散型随机变量：取值为有限个或可列个
- 连续型随机变量：取值为连续区间

2.3 常见概率分布

2.3.1 离散型分布

二项分布

记号：$X \sim B(n, p)$

概率函数：$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n - k}$，$k = 0,1,2,...,n$

期望：$E(X) = np$

方差：$D(X) = np(1 - p)$

应用：n次独立重复试验中成功次数的分布

泊松分布

记号：$X \sim P(\lambda)$

概率函数：$P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$，$k = 0,1,2,...$

期望：$E(X) = \lambda$

方差：$D(X) = \lambda$

应用：单位时间内随机事件发生次数的分布

几何分布

记号：$X \sim G(p)$

概率函数：$P(X = k) = (1 - p)^{k - 1}p$，$k = 1,2,3,...$

期望：$E(X) = 1/p$

方差：$D(X) = (1 - p)/p^2$

应用：首次成功所需的试验次数

2.3.2 连续型分布

正态分布

记号：$X \sim N\mu, \sigma^2$

概率密度函数：$fx = 1/\sqrt{(2\pi\sigma)}e^{-(x - \mu^2/2\sigma^2)}$

期望：$EX = \mu$

方差：$DX = \sigma^2$

应用：许多自然现象的分布，如身高、体重、测量误差等

均匀分布

记号：$X \sim Ua, b$

概率密度函数：$fx = 1/b - a$，$a \le x \le b$

期望：$EX = a + b/2$

方差：$DX = b - a^2/12$

应用：在区间内等可能取值的随机变量

指数分布

记号：$X \sim E\lambda$

概率密度函数：$fx = \lambda e^{-\lambda x}$，$x \ge 0$

期望：$EX = 1/\lambda$

方差：$DX = 1/\lambda^2$

应用：设备故障间隔时间、服务时间等

2.4 典型例题

例题4：条件概率问题

某工厂有三个车间生产同一种产品，第一车间产量占总产量的50%，第二车间占30%，第三车间占20%。各车间的次品率分别为2%、3%、1%。现从总产品中随机抽取一件，求它是次品的概率。

解：

设A = {抽到次品}，B_i = {抽到第i车间产品}，i = 1,2,3

$PB_1 = 0.5$，$PB_2 = 0.3$，$PB_3 = 0.2$

$PA|B_1 = 0.02$，$PA|B_2 = 0.03$，$PA|B_3 = 0.01$

$PA = PA|B_1PB_1 + PA|B_2PB_2 + PA|B_3PB_3$

$= 0.02\times0.5 + 0.03\times0.3 + 0.01\times0.2 = 0.021$

例题5：贝叶斯公式问题

在例题4中，已知抽到的是次品，求它来自第一车间的概率。

解：

$PB_1|A = PA|B_1PB_1/PA = 0.02\times0.5/0.021 = 10/21$

例题6：二项分布问题

某工厂产品合格率为0.8，随机抽取10件产品，求恰好8件合格的概率。

解：

$X \sim B10, 0.8$

$PX = 8 = C_{10}^{8} \times 0.8^8 \times 0.2^2 = 45 \times 0.8^8 \times 0.04 \approx 0.302$

例题7：正态分布问题

某零件长度服从$N10, 0.1^2$，求长度在9.8到10.2之间的概率。

解：

$P9.8 < X < 10.2 = P-2 < (X - 10/0.1 < 2) = \Phi2 - \Phi-2 = 2\Phi2 - 1 \approx 0.9544$

第三讲：数字特征与统计推断

3.1 随机变量的数字特征

3.1.1 数学期望

定义

离散型：$E(X) = \Sigma x_i p_i$

连续型：$E(X) = \int x f(x) dx$

性质

1. $E(c) = c$（c为常数）
2. $E(cX) = cE(X)$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. 若X、Y独立，则$E(XY) = E(X)E(Y)$

3.1.2 方差

定义

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

性质

1. $D(c) = 0$（c为常数）
2. $D(cX) = c^2 D(X)$
3. 若X、Y独立，则$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

标准差

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

3.1.3 常见分布的期望和方差

分布	记号	期望	方差
二项分布	$B(n, p)$	np	$np(1 - p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$G(p)$	$1/p$	$(1 - p)/p^2$
正态分布	$N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
均匀分布	$U(a, b)$	$(a + b)/2$	$(b - a)^2/12$
指数分布	$E(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

3.2 参数估计

3.2.1 点估计

定义：用样本统计量估计总体参数

常用估计量：

- 样本均值$\bar{X}$估计总体均值μ
- 样本方差S^2估计总体方差σ^2

3.2.2 区间估计

定义：给出参数的置信区间

置信区间：$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1-\alpha$，其中$1-\alpha$为置信水平

正态总体均值的区间估计

σ^2已知：$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \times \sigma/\sqrt{n}$

σ^2未知：$\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \times S/\sqrt{n}$

3.3 假设检验

3.3.1 假设检验的基本概念

定义：根据样本信息判断总体参数是否等于某个值

3.3.2 假设检验的步骤

1. 建立假设 $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta \neq \theta_0$
2. 选择统计量（如Z统计量、t统计量）
3. 确定拒绝域（根据显著性水平α）
4. 做出结论（接受或拒绝H_0）

3.3.3 单样本t检验

检验统计量：$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

拒绝域：$|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$

3.4 典型例题

例题8：数学期望计算

掷一枚骰子，设X为出现的点数，求$E(X)$和$D(X)$。

解：

X的分布律为$P(X = k) = 1/6$，$k = 1,2,3,4,5,6$

$E(X) = \Sigma_{k=1}^{6} k \times 1/6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3.5$

$E(X^2) = \Sigma_{k=1}^{6} k^2 \times 1/6 = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$

$D(X) = E(X^2) -$

$$E(X)$$

$^2 = 91/6 - 3.5^2 = 91/6 - 49/4 = 35/12$

例题9：假设检验问题

某工厂生产的零件长度服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，现从产品中随机抽取16件，测得平均长度为10.2cm，标准差为0.3cm。在显著性水平$\alpha=0.05$下，检验零件平均长度是否为10cm。

解：

$H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$

$t = \frac{10.2 - 10}{0.3/\sqrt{16}} = 0.2/0.075 = 2.67$

$t_{0.025}(15) = 2.131$

因为$|t| = 2.67 > 2.131$，拒绝H_0，认为零件平均长度不等于10cm

例题10：置信区间估计

某设备故障时间服从指数分布，现观测到10次故障时间（小时）：1.2, 2.1, 0.8, 1.5, 2.3, 1.8, 1.1, 2.0, 1.6, 1.9。求平均故障时间的95%置信区间。

解:

$\bar{X} = 1.63, S = 0.45$

$t\_0.0259 = 2.262$

置信区间：$1.63 \pm 2.262 \times 0.45/\sqrt{10} = 1.63 \pm 0.32 =$

$$1.31, 1.95$$

第四讲：综合应用

4.1 工程案例分析

4.1.1 液压系统可靠性分析

案例背景：某工程机械的液压系统由泵、阀、缸三个主要部件组成，各部件的故障率分别为0.01、0.02、0.03。系统采用串联结构，任一部件故障都会导致系统失效。

问题1：系统在一年内的故障概率是多少？

解：

$P系统故障 = 1 - P系统正常 = 1 - P泵正常P阀正常P缸正常$

$= 1 - 0.99×0.98×0.97 = 1 - 0.941 = 0.059$

问题2：如果系统故障，最可能是哪个部件故障？

解：

设A_1、A_2、A_3分别表示泵、阀、缸故障，B表示系统故障

$PA_1|B = PB|A_1PA_1/PB = 1×0.01/0.059 = 0.169$

$PA_2|B = PB|A_2PA_2/PB = 1×0.02/0.059 = 0.339$

$PA_3|B = PB|A_3PA_3/PB = 1×0.03/0.059 = 0.508$

最可能是缸故障

问题3：如何设计冗余结构提高系统可靠性？

解：

采用并联冗余，设需要n个并联子系统

单个子系统可靠度 = 0.941

n个并联子系统可靠度 = $1 - 1 - 0.941^n = 1 - 0.059^n$

要求：$1 - 0.059^n \geq 0.99$

即：$0.059^n \leq 0.01$

$n \geq \ln 0.01/\ln 0.059 \approx 2.3$

所以需要3个并联的子系统

4.1.2 工程项目风险分析

案例背景：某工程项目面临三种风险：技术风险、市场风险、资金风险。根据历史数据，各风险发生的概率分别为0.3、0.2、0.1。若技术风险发生，项目损失为100万元；若市场风险发生，项目损失为80万元；若资金风险发生，项目损失为60万元。各风险相互独立。

问题1：项目期望损失是多少？

解：

$EX = 100×0.3 + 80×0.2 + 60×0.1 = 30 + 16 + 6 = 52$万元

问题2：项目损失超过50万元的概率是多少？

解：

$PX > 50 = P技术风险发生 + P市场风险发生 + P资金风险发生 = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6$

问题3：若购买保险，保险费为期望损失的1.2倍，是否值得购买？

解：

保险费 = 52 × 1.2 = 62.4万元，期望损失 = 52万元

保险费 > 期望损失，从纯数学角度不值得购买，但需考虑风险承受能力

问题4：如何设计风险控制策略？

解：

- 技术风险：加强技术研发，提高技术成熟度
- 市场风险：进行市场调研，制定灵活的市场策略

- 资金风险：建立资金储备，多元化融资渠道

4.2 综合练习题

练习1：条件概率综合题

某工厂生产的产品有A、B、C三个等级，分别占产量的50%、30%、20%。各等级产品的次品率分别为2%、3%、1%。现从产品中随机抽取一件，求：

（1）抽到次品的概率

（2）若抽到的是次品，求它来自A等级的概率

解：

（1）$P_{次品} = 0.02\times0.5 + 0.03\times0.3 + 0.01\times0.2 = 0.021$

（2）$P_{A等级|次品} = 0.02\times0.5/0.021 = 10/21$

练习2：泊松分布综合题

某电话交换台每分钟接到的呼叫次数X服从参数为λ=3的泊松分布。求：

（1）一分钟内接到5次呼叫的概率

（2）一分钟内接到不超过3次呼叫的概率

解：

（1）$PX = 5 = 3^5e^{\wedge}-3/5! \approx 0.1008$

（2）$PX \leq 3 = 13e^{\wedge}-3 \approx 0.647$

练习3：假设检验综合题

某工厂生产的零件长度要求为10mm，现从产品中随机抽取16件，测得平均长度为10.2mm，标准差为0.3mm。在显著性水平α=0.05下，检验零件平均长度是否为10mm。

解：

$t = 2.67 > 2.131$，拒绝H_0，认为零件平均长度不等于10mm

练习4：置信区间综合题

某设备故障间隔时间服从指数分布，现观测到10次故障时间（小时）：1.2, 2.1, 0.8, 1.5, 2.3, 1.8, 1.1, 2.0, 1.6, 1.9。求平均故障时间的95%置信区间。

解：

置信区间：

$$1.31, 1.95$$

4.3 学习总结

4.3.1 知识体系回顾

1. **概率论基础**：随机现象、样本空间、随机事件、概率定义
2. **概率运算**：加法公式、乘法公式、事件关系
3. **条件概率**：条件概率、全概率公式、贝叶斯公式
4. **随机变量**：离散型、连续型随机变量
5. **常见分布**：二项、泊松、几何、正态、均匀、指数分布
6. **数字特征**：数学期望、方差、标准差
7. **统计推断**：参数估计、假设检验

4.3.2 工程应用要点

1. **可靠性分析**：系统可靠性计算、故障诊断
2. **质量控制**：产品合格率分析、过程控制
3. **风险评估**：项目风险分析、决策支持
4. **数据分析**：样本分析、统计推断

4.3.3 学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和公式
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab13系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力

附录：常用公式汇总

概率公式

- $PA \cup B = PA + PB - PA \cap B$
- $PAB = PAPB|A = PBPA|B$
- $PA|B = PAB/PB$
- $PA = \Sigma PA|B_i PB_i$（全概率公式）
- $PB_i|A = PA|B_i PB_i/PA$（贝叶斯公式）

数字特征

- $EX = \Sigma x\_i\ p\_i$（离散型）
- $EX = \int xfXdx$（连续型）
- $DX = EX^2 -$

$$E(X)$$

^{2}

- $\sigma X = \sqrt{DX}$

常见分布

- 二项分布：Bn, p，$EX = np$，$DX = np1 - p$
- 泊松分布：$P\lambda$，$EX = \lambda$，$DX = \lambda$
- 正态分布：$N\mu, \sigma^2$，$EX = \mu$，$DX = \sigma^2$
- 指数分布：$E\lambda$，$EX = 1/\lambda$，$DX = 1/\lambda^2$

统计推断

- 置信区间：$\bar{X} \pm t\_\alpha/2n - 1 \times S/\sqrt{n}$
- t检验：$t = \bar{X} - \mu_0/S/\sqrt{n}$
- 拒绝域：$|t| > t\_\alpha/2n - 1$