

第十一章《无穷级数》第一节课教案

教学项目

**教学项目** 无穷级数基础与几何级数

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已具备极限和函数的基础知识，但对无穷级数的概念理解不够深入。学生在级数收敛性判断、几何级数求和、级数应用方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解无穷级数的概念、掌握几何级数的性质和求和公式。

能力目标：培养学生利用级数理论解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和逻辑推理能力，在工程场景中合理运用级数方法。

**教学重点** 无穷级数的概念、几何级数的收敛性判断和求和公式。

**教学难点及应对**

难点：无穷级数收敛性的理解、几何级数求和公式的推导。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab11系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第11章无穷级数》、Lab11系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解无穷级数的基本概念、几何级数的性质和求和公式。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab11系列软件演示级数收敛过程。

**教学反思** 需要关注学生对无穷级数概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过级数理论解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
情境导入 (10min)	【教师】讲述级数在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要计算无限个数的和，比如信号处理、数值计算等。如何用数学语言来描述和处理这种“无限”？ 【学生】思考并讨论级数的实际应用 【教师】展示工程案例：切蛋糕问题 案例背景：一个蛋糕，第一次切掉一半，第二次切掉剩下的一半，第三次切掉剩下的一半..这样无限切下去，总共切掉了多少？ 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书“级数→收敛→求和”主线	激发学生学习兴趣，建立级数与实际工程的联系
无穷级数的概念 (20min)	【教师】讲解无穷级数的定义 定义1 设给定一个数列{ a <sub>n</sub> }，则表达式 a <sub>1</sub> + a <sub>2</sub> + a <sub>3</sub> + ... + a <sub>n</sub> + ... = ∑ <sub>n=1</sub> <sup>∞</sup> a <sub>n</sub> 称为无穷级数，简称级数。 【教师】讲解级数的部分和 定义2 级数∑ <sub>n=1</sub> <sup>∞</sup> a <sub>n</sub> 的前n项和 S <sub>n</sub> = a <sub>1</sub> + a <sub>2</sub> + ... + a <sub>n</sub> = ∑ <sub>k=1</sub> <sup>n</sup> a <sub>k</sub> 称为级数的第n个部分和。 【教师】讲解级数的收敛性 定义3 如果部分和数列{ S <sub>n</sub> } 收敛，即lim <sub>n→∞</sub> S <sub>n</sub> = S 存在，则称级数∑ <sub>n=1</sub> <sup>∞</sup> a <sub>n</sub> 收敛，S称为级数的和。 如果lim <sub>n→∞</sub> S <sub>n</sub> 不存在，则称级数发散。 【教师】演示Lab11-1，展示级数收敛过程 【学生】观察级数部分和的变化趋势 例1 判断级数∑ <sub>n=1</sub> <sup>∞</sup> $\frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性。 解：S <sub>n</sub> = ∑ <sub>k=1</sub> <sup>n</sup> $\frac{1}{k(k+1)}$ = ∑ <sub>k=1</sub> <sup>n</sup> ( $\frac{1}{k}$ - $\frac{1}{k+1}$ ) = (1 - $\frac{1}{2}$ ) + ( $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ ) + ... + ( $\frac{1}{n}$ - $\frac{1}{n+1}$ ) = 1 - $\frac{1}{n+1}$ lim <sub>n→∞</sub> S <sub>n</sub> = lim <sub>n→∞</sub> (1 - $\frac{1}{n+1}$ ) = 1 所以级数收敛，和为1 例2 判断级数∑ <sub>n=1</sub> <sup>∞</sup> n的收敛性。 解：S <sub>n</sub> = 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ lim <sub>n→∞</sub> S <sub>n</sub> = lim <sub>n→∞</sub> $\frac{n(n+1)}{2}$ = +∞	学习无穷级数的基本概念，建立数学基础

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	所以级数发散 【学生】完成级数收敛性判断练习	
几何级数 (30min)	【教师】讲解几何级数的定义 定义4 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 的级数称为几何级数，其中 $a \neq 0$ , $r$ 称为公比。 【教师】讲解几何级数的收敛性 定理1 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 的收敛性： (1) 当 $ r  < 1$ 时，级数收敛，和为 $\frac{a}{1-r}$ 。 (2) 当 $ r  \geq 1$ 时，级数发散。 【教师】讲解几何级数求和公式的推导 设 $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 则 $rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ 两式相减： $S - rS = a$ 即 $(1 - r)S = a$ 当 $ r  < 1$ 时， $S = \frac{a}{1-r}$ 【教师】使用 Lab11-2 展示几何级数收敛过程 【学生】观察不同 $r$ 值下级数的收敛性并求和。解： $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的收敛性并求和。	$ r  < 1$ 时，级数收敛，和为 $\frac{a}{1-r}$ 。 (2) 当 $ r  \geq 1$ 时，级数发散。
调和级数与p级数 (20min)	【教师】讲解调和级数 定义5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为调和级数。 【教师】讲解调和级数的发散性 定理2 调和级数发散。 证明：将调和级数分组： $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots$ 每组的和都大于 $\frac{1}{2}$ ，所以部分和无限增大，级数发散。 【教师】讲解p级数 定义6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为p级数。 定理3 p级数的收敛性： (1) 当 $p > 1$ 时，级数收敛 (2) 当 $p \leq 1$ 时，级数发散 【教师】使用 Lab11-3 展示调和级数和p级数 【学生】观察不同p值下级数的收敛性 例7 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性。 解：这是 $p = 2 > 1$ 的p级数，所以收敛 例8 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的收敛性。 解：这是 $p = \frac{1}{2} \leq 1$ 的p级数，所以发散 【学生】完成p级数练习	学习调和级数和p级数的性质
课堂测验 (10min)	【教师】出几道测试题目 1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 的收敛性 2. 求几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 的和 3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性 4. 判断几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ 的收敛性 【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解 解1: $S_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) \rightarrow \frac{3}{4}$ , 收敛 解2: $a = 1, r = \frac{1}{3}, S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ 解3: $p = 3 > 1$ , 收敛 解4: $r = 3 > 1$ , 发散	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	【教师】总结本节课要点 1. 无穷级数的概念和收敛性 2. 几何级数的性质和求和公式 3. 调和级数和p级数的收敛性 4. 级数在工程中的应用 【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业	巩固本节课所学知识

板书设计建议

**左侧：** 无穷级数的定义和收敛性

**中部：** 几何级数的性质和公式

**右侧：** 调和级数和p级数

教学提示

- 鼓励学生截图Lab11模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在级数计算中注意收敛性判断
- 结合工程案例，让学生体验级数在工程中的重要作用
- 强调级数理论在数值计算、信号处理中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用级数方法解决实际问题的能力

---

教学项目

**教学项目** 级数收敛判别法

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已掌握无穷级数的基本概念和几何级数，但对级数收敛判别法的理解还不够深入。学生在比值判别法、交错级数判别法、绝对收敛与条件收敛方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解级数收敛判别法、掌握交错级数和绝对收敛的概念。

能力目标：培养学生利用判别法判断级数收敛性的能力。

素质目标：提高学生的逻辑推理能力和数学分析思维，在工程场景中合理运用级数判别方法。

**教学重点** 比值判别法、交错级数判别法、绝对收敛与条件收敛。

**教学难点及应对**

难点：比值判别法的应用、绝对收敛与条件收敛的区别。

应对策略：通过具体的计算演示，分步骤讲解，辅以Lab11系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第11章无穷级数》、Lab11系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解级数收敛判别法的原理和应用。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab11系列软件演示判别法的应用。

**教学反思** 需要关注学生对判别法原理的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过判别法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 无穷级数的概念和收敛性 2. 几何级数的性质和求和公式 3. 调和级数和p级数的收敛性 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备
比值判别法 (25min)	【教师】讲解比值判别法 定理1 (比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ 则： (1) 当 $L < 1$ 时，级数收敛 (2) 当 $L > 1$ 时，级数发散 (3) 当 $L = 1$ 时，判别法失效 【教师】讲解比值判别法的应用技巧 1. 特别适合含有阶乘、指数、幂函数的级数 2. 计算极限时注意化简技巧 3. 当 $L = 1$ 时，需要其他方法判别 【教师】使用Lab11-4展示比值判别法 【学生】观察不同级数的比值变化 例1 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 的收敛性。 解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n \cdot \frac{(n+1)!}{n!}}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$ 所以级数收敛 例2 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的收敛性。 解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$ 所以级数收敛 例3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ 的收敛性。 解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2n+3}}{\frac{n}{2n+1}}$	学习比值判别法的原理和应用

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} = 1$ <p>比值判别法失效，需要其他方法</p> <p>由于<math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0</math></p> <p>所以级数发散</p> <p>【学生】完成比值判别法练习</p>		
交错级数 (25min)	<p>【教师】讲解交错级数的定义</p> <p>定义1 形如<math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots</math>的级数称为交错级数，其中<math>a_n &gt; 0</math>。</p> <p>【教师】讲解莱布尼茨判别法</p> <p>定理2（莱布尼茨判别法） 设交错级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n</math>满足：</p> <p>(1) <math>a_n \geq a_{n+1}</math>（单调递减）</p> <p>(2) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0</math></p> <p>则级数收敛</p> <p>【教师】讲解交错级数的性质</p> <p>1. 如果交错级数收敛，其和S满足</p>	S - S_n $\leq a_{n+1}$ <p>2. 交错级数的部分和数列有界【教师】使用Lab11 – 5展示交错级数收敛过程【学生】观察交错级数部分和的变化例4判断交错级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}</math>的收敛性。解： <math>a_n = \frac{1}{n}</math> <math>(1) a_{n+1} = \frac{1}{n+1} &lt; \frac{1}{n} = a_n</math>（单调递减） <math>(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0</math></p> <p>由莱布尼茨判别法，级数收敛例5判断交错级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}</math>的收敛性。解： <math>a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}</math> <math>(1) a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} &lt; \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n</math>（单调递减） <math>(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0</math>由莱布尼茨判别法，级数收敛例6判断交错级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}</math>的收敛性。解： <math>a_n = \frac{1}{n^2}</math> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \neq 0</math></p> <p>所以级数发散</p> <p>【学生】完成交错级数练习</p>	学习交错级数的判别方法
绝对收敛与条件收敛 (20min)	<p>【教师】讲解绝对收敛的定义</p> <p>定义2 如果级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} a_n</math></p>	a_n 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。【教师】讲解条件收敛的定义定义3如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}  a_n $	a_n 发散，条件收敛
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <p>1. 用比值判别法判断级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}</math>的收敛性</p> <p>2. 用莱布尼茨判别法判断级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}</math>的收敛性</p> <p>3. 判断级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}</math>是绝对收敛还是条件收敛</p> <p>4. 判断级数<math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}</math>的收敛性</p> <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1：</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1, \text{ 发散}$ <p>解2： <math>a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}</math> 单调递减且趋于0，收敛</p> <p>解3： <math>\sum</math></p>	a_n $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛，绝对收敛解4： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$ ，需要进一步分析	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <p>1. 比值判别法的原理和应用</p> <p>2. 莱布尼茨判别法的条件</p> <p>3. 绝对收敛与条件收敛的区别</p> <p>4. 级数判别法的综合应用</p> <p>【学生】回顾知识点，提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识	

板书设计建议

左侧：比值判别法的公式和条件  
中部：莱布尼茨判别法的条件  
右侧：绝对收敛与条件收敛的区别

教学提示

- 鼓励学生截图Lab11模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在判别法应用中注意条件检查
- 结合工程案例，让学生体验级数判别法在工程中的重要作用
- 强调级数判别法在数值分析、信号处理中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用判别法解决实际问题的能力

---

第十一章《无穷级数》第三节课教案

教学项目

**教学项目** 幂级数与泰勒级数

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已掌握级数收敛判别法，但对幂级数和泰勒级数的理解还不够深入。学生在收敛半径、收敛区间、泰勒展开、级数应用方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解幂级数的概念、掌握泰勒级数的展开和应用。

能力目标：培养学生利用幂级数和泰勒级数解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学建模能力和工程应用思维，在工程场景中合理运用级数方法。

**教学重点** 幂级数的收敛半径、泰勒级数的展开、级数的工程应用。

**教学难点及应对**

难点：收敛半径的计算、泰勒级数的应用、级数在工程中的实际应用。

应对策略：通过具体的计算演示，分步骤讲解，辅以Lab11系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第11章无穷级数》、Lab11系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解幂级数和泰勒级数的原理和应用。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab11系列软件演示幂级数和泰勒级数。

**教学反思** 需要关注学生对幂级数和泰勒级数概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过级数方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 比值判别法的原理和应用 2. 莱布尼茨判别法的条件 3. 绝对收敛与条件收敛的区别 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备
幂级数 (30min)	【教师】讲解幂级数的定义 定义1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ 的级数称为幂级数。 【教师】讲解收敛半径 定理1 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，存在 $R \geq 0$ (可能为 $+\infty$ )，使得： (1) 当 $ x  < R$ 时，级数收敛 (2) 当 $ x  > R$ 时，级数发散 (3) $R$ 称为收敛半径 【教师】讲解收敛半径的计算定理2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_n}{a_{n+1}} \right  = L$ ，则收敛半径 $R = L$ 。 例4 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径。 解：由定理2， $\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right  = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty$ ，所以 $R = +\infty$ ，即该级数在整个实数轴上收敛。	<div><div>x</div><div>&lt; R 时，级数收敛 (2) 当</div><div>x</div><div>&gt; R时，级数发散 (3) R称为收敛半径</div></div> <div>【教师】讲解收敛半径的计算定理2 设 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_n}{a_{n+1}} \right  = L</math>，则收敛半径 <math>R = L</math>。 例4 求 <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}</math> 的收敛半径。 解：由定理2，<math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right  = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty</math>，所以 <math>R = +\infty</math>，即该级数在整个实数轴上收敛。</div>
泰勒级数 (25min)	【教师】讲解泰勒级数的定义 定义3 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处具有任意阶导数，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的泰勒级数。 【教师】讲解麦克劳林级数 定义4 当 $x_0 = 0$ 时，泰勒级数称为麦克劳林级数： $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 【教师】讲解常见函数的泰勒展开 1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ 2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ 3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	<div><div>x</div><div>&lt; 1</div><div>x</div><div>&lt; 1</div></div> <div>【教师】讲解泰勒级数的定义 定义3 设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处具有任意阶导数，则 <math>f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n</math> 称为 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处的泰勒级数。 【教师】讲解麦克劳林级数 定义4 当 <math>x_0 = 0</math> 时，泰勒级数称为麦克劳林级数： <math>f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n</math> 【教师】讲解常见函数的泰勒展开 1. <math>e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots</math> 2. <math>\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots</math> 3. <math>\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots</math></div> <div>【教师】使用Lab11-8展示泰勒级数逼近过程 【学生】观察泰勒级数对函数的逼近效果 例4 求 <math>e^x</math> 在 <math>x=0</math> 处的泰勒级数。解：<math>f^{(n)}(0) = e^0 = 1</math>，所以 <math>f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots</math> 例5 求 <math>\sin x</math> 在 <math>x=0</math> 处的泰勒级数。解：<math>f(x) = \sin x</math>，<math>f'(x) = \cos x</math>，<math>f''(x) = -\sin x</math>，<math>f'''(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(4)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(5)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(6)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(7)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(8)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(9)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(10)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(11)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(12)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(13)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(14)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(15)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(16)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(17)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(18)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(19)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(20)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(21)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(22)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(23)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(24)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(25)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(26)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(27)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(28)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(29)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(30)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(31)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(32)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(33)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(34)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(35)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(36)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(37)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(38)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(39)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(40)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(41)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(42)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(43)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(44)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(45)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(46)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(47)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(48)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(49)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(50)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(51)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(52)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(53)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(54)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(55)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(56)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(57)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(58)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(59)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(60)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(61)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(62)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(63)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(64)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(65)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(66)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(67)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(68)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(69)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(70)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(71)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(72)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(73)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(74)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(75)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(76)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(77)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(78)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(79)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(80)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(81)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(82)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(83)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(84)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(85)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(86)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(87)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(88)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(89)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(90)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(91)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(92)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(93)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(94)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(95)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(96)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(97)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(98)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(99)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(100)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(101)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(102)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(103)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(104)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(105)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(106)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(107)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(108)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(109)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(110)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(111)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(112)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(113)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(114)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(115)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(116)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(117)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(118)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(119)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(120)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(121)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(122)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(123)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(124)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(125)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(126)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(127)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(128)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(129)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(130)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(131)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(132)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(133)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(134)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(135)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(136)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(137)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(138)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(139)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(140)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(141)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(142)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(143)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(144)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(145)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(146)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(147)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(148)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(149)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(150)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(151)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(152)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(153)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(154)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(155)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(156)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(157)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(158)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(159)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(160)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(161)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(162)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(163)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(164)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(165)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(166)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(167)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(168)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(169)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(170)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(171)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(172)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(173)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(174)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(175)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(176)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(177)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(178)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(179)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(180)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(181)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(182)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(183)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(184)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(185)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(186)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(187)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(188)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(189)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(190)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(191)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(192)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(193)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(194)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(195)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(196)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(197)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(198)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(199)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(200)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(201)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(202)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(203)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(204)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(205)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(206)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(207)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(208)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(209)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(210)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(211)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(212)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(213)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(214)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(215)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(216)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(217)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(218)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(219)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(220)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(221)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(222)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(223)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(224)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(225)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(226)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(227)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(228)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(229)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(230)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(231)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(232)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(233)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(234)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(235)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(236)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(237)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(238)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(239)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(240)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(241)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(242)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(243)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(244)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(245)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(246)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(247)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(248)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(249)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(250)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(251)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(252)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(253)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(254)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(255)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(256)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(257)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(258)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(259)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(260)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(261)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(262)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(263)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(264)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(265)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(266)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(267)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(268)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(269)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(270)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(271)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(272)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(273)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(274)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(275)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(276)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(277)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(278)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(279)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(280)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(281)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(282)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(283)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(284)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(285)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(286)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(287)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(288)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(289)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(290)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(291)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(292)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(293)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(294)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(295)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(296)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(297)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(298)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(299)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(300)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(301)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(302)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(303)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(304)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(305)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(306)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(307)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(308)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(309)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(310)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(311)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(312)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(313)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(314)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(315)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(316)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(317)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(318)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(319)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(320)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(321)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(322)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(323)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(324)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(325)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(326)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(327)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(328)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(329)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(330)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(331)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(332)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(333)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(334)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(335)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(336)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(337)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(338)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(339)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(340)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(341)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(342)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(343)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(344)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(345)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(346)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(347)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(348)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(349)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(350)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(351)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(352)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(353)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(354)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(355)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(356)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(357)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(358)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(359)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(360)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(361)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(362)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(363)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(364)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(365)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(366)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(367)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(368)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(369)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(370)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(371)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(372)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(373)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(374)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(375)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(376)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(377)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(378)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(379)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(380)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(381)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(382)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(383)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(384)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(385)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(386)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(387)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(388)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(389)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(390)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(391)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(392)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(393)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(394)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(395)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(396)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(397)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(398)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(399)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(400)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(401)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(402)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(403)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(404)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(405)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(406)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(407)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(408)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(409)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(410)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(411)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(412)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(413)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(414)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(415)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(416)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(417)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(418)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(419)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(420)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(421)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(422)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(423)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(424)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(425)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(426)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(427)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(428)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(429)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(430)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(431)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(432)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(433)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(434)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(435)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(436)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(437)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(438)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(439)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(440)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(441)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(442)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(443)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(444)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(445)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(446)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(447)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(448)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(449)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(450)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(451)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(452)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(453)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(454)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(455)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(456)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(457)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(458)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(459)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(460)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(461)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(462)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(463)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(464)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(465)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(466)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(467)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(468)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(469)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(470)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(471)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(472)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(473)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(474)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(475)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(476)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(477)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(478)}(x) = -\sin x</math>，<math>f^{(479)}(x) = -\cos x</math>，<math>f^{(480)}(x) = \sin x</math>，<math>f^{(481)}(x) = \cos x</math>，<math>f^{(482)}(x) = -</math></div>

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $4. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad ( x  < 1)$	
级数的工程应用 (15min)	<p>【教师】讲解级数在工程中的应用</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. <b>数值计算</b>: 用级数逼近复杂函数值</li><li>2. <b>信号处理</b>: 傅里叶级数分解信号</li><li>3. <b>概率计算</b>: 正态分布等概率密度函数的积分</li><li>4. <b>解微分方程</b>: 很多微分方程的解可以用级数表示</li></ol> <p>【教师】讲解具体应用案例</p> <p>案例1: 计算<math>\pi</math>的值</p> <p>利用<math>\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots</math></p> <p>案例2: 信号分析</p> <p>在通信工程中, 复杂信号可以分解为不同频率的正弦波之和</p> <p>案例3: 数值积分</p> <p>一些积分无法直接计算, 可以用级数展开后逐项积分</p> <p>【教师】使用Lab11-9展示级数应用</p> <p>【学生】观察级数在实际问题中的应用</p> <p>例7 利用级数计算<math>\int_0^1 e^{-x^2} dx</math>的近似值。</p> <p>解: <math>e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}</math></p> $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ <p>取前几项: <math>\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.747</math></p> <p>【学生】完成级数应用练习</p>	学习级数在工程中的应用
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 求幂级数<math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}</math>的收敛半径</li><li>2. 写出<math>\cos x</math>的麦克劳林级数 (前4项)</li><li>3. 利用泰勒级数计算<math>e^{0.2}</math>的近似值 (取前3项)</li><li>4. 判断幂级数<math>\sum_{n=0}^{\infty} nx^n</math>的收敛区间</li></ol> <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1: <math>a_n = \frac{1}{2^n}, L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = \frac{1}{2}, R = 2</math></p> <p>解2: <math>\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots</math></p> <p>解3: <math>e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2!} = 1 + 0.2 + 0.02 = 1.22</math></p> <p>解4: <math>a_n = n, L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, R = 1, \text{收敛区间 } (-1, 1)</math></p>	通过测试, 了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 幂级数的收敛半径和收敛区间</li><li>2. 泰勒级数的展开和应用</li><li>3. 级数在工程中的实际应用</li><li>4. 级数方法的综合运用</li></ol> <p>【学生】回顾知识点, 提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问, 布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

**左侧**: 幂级数的收敛半径公式

**中部**: 常见函数的泰勒展开

**右侧**: 级数应用案例

教学提示

- 鼓励学生截图Lab11模拟结果作为报告证据, 提升数据说服力
- 引导学生在级数应用中注意收敛性
- 结合工程案例, 让学生体验级数在工程中的重要作用
- 强调级数方法在数值计算、信号处理中的重要作用
- 通过实际工程案例, 培养学生运用级数方法解决实际问题的能力

---