第九章《多元函数积分学初步》讲义

学习目标：
1. 理解二重积分的概念和几何意义
2. 掌握二重积分的计算方法
3. 理解三重积分的概念和物理意义
4. 掌握重积分的实际应用
5. 了解重积分在工程中的重要作用

学习资源：
- 教材：《高等数学》第9章
- 课件：《第9章多元函数积分学初步》
- 实验：Lab9-1 至 Lab9-4 仿真实验
- 练习：题库重积分题

第一讲：二重积分与三重积分

1.1 二重积分的概念

1.1.1 二重积分的定义

定义：设函数$z = f(x, y)$在有界闭区域D上有定义。将区域D任意分割成n个小区域ΔD_i（$i = 1, 2, \ldots, n$），在每个小区域ΔD_i上任取一点(ξ_i, η_i)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中$\Delta\sigma_i$表示ΔD_i的面积。当分割越来越细，即$\lambda = \max\{\Delta\sigma_i\} \to 0$时，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在区域D上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

1.1.2 二重积分的几何意义

当$f(x, y) \geq 0$时，二重积分表示以D为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶的曲顶柱体的体积。

1.1.3 二重积分的性质

1. **线性性质**：$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\, d\sigma = \alpha\iint_D f(x, y)\, d\sigma + \beta\iint_D g(x, y)\, d\sigma$
2. **区域可加性**：$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma$
3. **比较性质**：若$f(x, y) \leq g(x, y)$，则$\iint_D f(x, y)\, d\sigma \leq \iint_D g(x, y)\, d\sigma$
4. **估值性质**：$m\cdot S \leq \iint_D f(x, y)\, d\sigma \leq M\cdot S$

1.2 二重积分的计算

1.2.1 直角坐标系下的计算

如果积分区域D可以表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

则$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$

如果积分区域D可以表示为

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

则$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$

1.2.2 极坐标系下的计算

当积分区域为圆形、扇形等时，使用极坐标系更方便：

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ d\sigma = r\, dr\, d\theta$$

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

1.3 三重积分的概念

1.3.1 三重积分的定义

定义：函数$f(x, y, z)$在空间区域Ω上的三重积分：

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \lim_{\Delta V\to 0}\sum f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

1.3.2 三重积分的物理意义

当$f(x,y,z)=\rho(x,y,z)$表示密度时，三重积分表示空间物体的质量。

1.3.3 三重积分的计算方法

1. **直角坐标系**：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
2. **柱坐标系**：$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$
3. **球坐标系**：$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\phi$

1.4 重积分的应用

1.4.1 计算体积

$V=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

1.4.2 计算面积

$S=\iint_D 1\,d\sigma$

1.4.3 计算质量

$M=\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma$

1.4.4 计算重心

$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma,\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,d\sigma$

1.5 典型例题

例题1：二重积分计算

计算二重积分$\iint_D (x+y)\,d\sigma$，其中D是由$y=x$，$y=x^2$所围成的区域。

解：先确定积分区域D的边界

由$y=x$和$y=x^2$的交点：$x=x^2$，得$x=0$或$x=1$

所以$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le x\}$

$\iint_D (x+y)\,d\sigma=\int_0^1\int_{x^2}^x (x+y)\,dy\,dx$

$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx$

$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx$

$=\int_0^1\left(\frac{3x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$

例题2：极坐标系计算

计算二重积分$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中D是单位圆$x^2+y^2\le 1$。

解：使用极坐标系，$D=\{(r,\theta)|0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$

$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot r\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\,d\theta=\frac{2\pi}{3}$

例题3：三重积分计算

计算三重积分$\iiint_{\Omega} z\,dV$，其中Ω是由$z = 0$，$z = 1$，$x = 0$，$x = 1$，$y = 0$，$y = 1$所围成的立方体。

解：$\Omega = \{(x, y, z)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$

$\iiint_{\Omega} z\,dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z\,dz\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\right]_0^1 dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$

例题4：体积计算

计算由曲面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 4$所围成的立体的体积。

解：立体在xy平面上的投影区域为$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 4\}$

体积$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\,d\sigma$

使用极坐标系：$D = \{(r, \theta)|0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3)\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta$

$= \int_0^{2\pi} (8 - 4)\,d\theta = \int_0^{2\pi} 4\,d\theta = 8\pi$

附录：常用公式汇总

二重积分公式

- 直角坐标系：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$
- 极坐标系：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

三重积分公式

- 直角坐标系：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- 柱坐标系：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$
- 球坐标系：$x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi$

重积分应用公式

- 体积：$V = \iint_D f(x,y)\,d\sigma$
- 面积：$S = \iint_D 1\,d\sigma$
- 质量：$M = \iint_D \rho(x,y)\,d\sigma$
- 重心：$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma,\ \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,d\sigma$

学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和计算方法
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab9系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力