

第六章《定积分》讲义

学习目标：

1. 理解定积分的概念和几何意义
2. 掌握定积分的基本性质
3. 掌握牛顿-莱布尼茨公式
4. 了解定积分的实际应用
5. 培养数学应用能力

学习资源：

- 教材：《高等数学》第6章
- 课件：《第6章定积分》
- 实验：Lab6-1 至 Lab6-4 仿真实验
- 练习：题库定积分题

第一讲：定积分

1.1 定积分的概念

1.1.1 定积分的定义

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，将区间 $[a, b]$ 任意分割成 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ，在每个子区间上任取一点 ξ_i ，作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

当分割越来越细，即 $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时，如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

1.1.2 定积分的几何意义

当 $f(x) \geq 0$ 时，定积分表示由曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = a$ 、 $x = b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积。

1.2 定积分的基本性质

1.2.1 线性性质

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

1.2.2 区间可加性

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

1.2.3 比较性质

若 $f(x) \leq g(x)$ ，则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

1.2.4 估值性质

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

1.3 牛顿-莱布尼茨公式

1.3.1 牛顿-莱布尼茨公式

定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

1.3.2 定积分的计算方法

1. 先求原函数 $F(x)$

2. 计算 $F(b) - F(a)$

1.4 定积分的应用

1.4.1 计算面积

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

1.4.2 计算体积

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1.4.3 计算弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

1.5 典型例题

例题1：基本计算

计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

$$\text{解: } \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

例题2：线性性质

计算定积分 $\int_0^2 (x^2 + 2x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_0^2 (x^2 + 2x) dx &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 2x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + [x^2]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

例题3：面积计算

计算由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 1$ 所围成的图形的面积。

解: 交点: $x^2 = 1$, 得 $x = \pm 1$

$$\text{面积 } S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

附录：常用公式汇总

定积分公式

- 牛顿-莱布尼茨公式: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 线性性质: $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
- 区间可加性: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

应用公式

- 面积: $S = \int_a^b f(x) dx$
- 体积: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- 弧长: $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

学习建议

- 理论学习:** 掌握基本概念和计算方法
- 计算练习:** 多做典型例题和练习题
- 实验操作:** 使用Lab6系列仿真实验
- 工程应用:** 结合实际案例进行练习
- 综合训练:** 提高解决复杂问题的能力