第八章《多元函数微分学》教案

教学项目

教学项目 多元函数微分学

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已掌握一元函数微分学的基本概念和计算方法，但对多元函数微分学的理解还不够深入。学生在多元函数的概念、偏导数、全微分、方向导数、梯度方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生理解多元函数的概念、掌握偏导数和全微分的计算方法。

能力目标：培养学生利用多元函数微分学解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和空间想象能力，在工程场景中合理运用多元函数微分学方法。

教学重点 多元函数的概念、偏导数的计算、全微分的概念和计算。

教学难点及应对

难点：偏导数的几何意义理解、全微分的概念和应用。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab8系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第8章多元函数微分学》、Lab8系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：讲解多元函数的概念和偏导数的计算方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab8系列软件演示多元函数微分学过程。

教学反思 需要关注学生对多元函数概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过多元函数微分学方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
考勤（2min）	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况	
情境导入（10min）	【教师】讲述多元函数在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要处理多个变量的问题，比如温度分布、压力分布、成本优化等。如何用数学方法来描述和处理这些多变量问题? 【学生】思考并讨论多元函数的实际应用 【教师】展示工程案例：温度分布问题 案例背景：某工厂车间的温度分布$T(x, y)$依赖于位置坐标(x, y)，如何分析温度的变化规律? 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书"多元函数→偏导数→全微分→应用"主线	激发学生学习兴趣，建立多元函数与实际工程的联系	
多元函数的概念（20min）	【教师】讲解多元函数的定义 定义1 设D是n维空间R^n的一个子集，如果对于D中的每一个点$(x_1, x_2, \dots, x_n)$，按照某种对应法则f，都有唯一确定的实数z与之对应，则称f是定义在D上的n元函数，记作 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 其中$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$称为自变量，z称为因变量。 【教师】讲解二元函数的定义 当$n = 2$时，二元函数$z = f(x, y)$表示一个曲面。 【教师】讲解多元函数的定义域 使函数有意义的自变量的取值范围称为函数的定义域。 【教师】讲解多元函数的几何意义 1. 一元函数：平面上的曲线 2. 二元函数：空间中的曲面 3. 三元函数：四维空间中的超曲面 【教师】使用Lab8-1展示多元函数的几何意义 【学生】观察多元函数的几何表示 例1 求函数$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$的定义域。 解：要使函数有意义，必须 $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ 即$x^2 + y^2 \leq 4$ 所以定义域为$D = \{x, y | x^2 + y^2 \leq 4\} 这是一个以原点为圆心，半径为2的圆。例2求函数 z = \lnx + y 的定义域。解：要使函数有意义，必须x + y > 0 所以定义域为D = \{x, y | x + y > 0\}这是直线x + y = 0$上方的半平面。 【学生】完成多元函数概念练习	x^2 + y^2 \leq 4\} 这是一个以原点为圆心，半径为2的圆。例2求函数 z = \lnx + y 的定义域。解：要使函数有意义，必须x + y > 0 所以定义域为D = \{x, y	x + y > 0\}这是直线x + y = 0$上方的半平面。 | x + y > 0\}这是直线x + y = 0$上方的半平面。 【学生】完成多元函数概念练习
偏导数的概念（25min）	【教师】讲解偏导数的定义 定义2 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对x的偏导数，记作	_{x_0, y_0}类似地，对y的偏导数定义为 \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{fx_0, y_0 + Δy - fx_0, y_0}{\Delta y}记作f_yx_0, y_0或\frac{\partial f}{\partial y}\bigg	_{x_0, y_0}【教师】讲解偏导数的几何意义1.f_xx_0, y_0表示曲面z = fx, y在点x_0, y_0, f(x_0, y_0)处沿x轴方向的 轴方向的切线斜率【教师】讲解偏导数的计算方法计算偏导数时，将其他变量视为常数，只对指定变量求导 z = x^2 + 3xy + y^2的偏导数。解：\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y（把y当常数）\frac{\partial z {\partial x} = ye^{xy}（把y当常数）\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}（把x当常数）例5求函数z = \s {\partial y} = x\cosxy（把x$当常数） 【学生】完成偏导数计算练习

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
	$f_x(x_0, y_0)$或$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg		
全微分的概念（25min）	【教师】讲解全微分的定义 定义3 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义，如果函数在点(x_0, y_0)处的全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可以表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ 其中A、B是与Δx、Δy无关的常数， $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$是$\rho$的高阶无穷小，则称函数$f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处可微，$A\Delta x + B\Delta y$称为函数在点$(x_0, y_0)$处的全微分，记作 $dz = A\Delta x + B\Delta y$ 【教师】讲解全微分的计算 如果函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可微，则 $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ 【教师】讲解可微的条件 如果函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的偏导数$f_x(x_0, y_0)$和$f_y(x_0, y_0)$存在且连续，则函数在该点可微。 【教师】使用Lab8-3展示全微分的几何意义 【学生】观察全微分的几何表示 例6 求函数$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的全微分。 解：先求偏导数： $f_x(x, y) = 2x + 3y$， $f_y(x, y) = 3x + 2y$ 在点$(1, 2)$处： $f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$ $f_y(1, 2) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ 所以$dz = 8dx + 7dy$ 例7 求函数$z = e^{xy}$在点$(0, 1)$处的全微分。 解：先求偏导数： $f_x(x, y) = ye^{xy}$，$f_y(x, y) = xe^{xy}$ 在点$(0, 1)$处： $f_x(0, 1) = 1 \cdot e^0 = 1$ $f_y(0, 1) = 0 \cdot e^0 = 0$ 所以$dz = dx$ 【学生】完成全微分计算练习	学习全微分的概念和计算方法	
方向导数与梯度（15min）	【教师】讲解方向导数的定义 定义4 设函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，l是从P_0出发的射线，$P(x, y)$是l上任意一点，如果极限 $\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$ 存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在点P_0处沿方向l的方向导数，记作$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg	_{P_0}【教师】讲解梯度的定义定义5设函数z = f x, y在点P_0x$_0$, y$_0$处可微，则向量\nabla fx$_0$, y$_0$ = f_x(x$_0$, y$_0$, f_yx$_0$, y$_0$)称为函数fx, y在点P_0处的梯度。【教师】讲解方向导数的计算如果函数z = fx, y在点P_0x$_0$, y$_0$处可微，则\frac{\partial f}{\partial l}\bigg	_{P_0} = f_xx$_0$, y$_0$\cos\alpha + f_yx$_0$, y$_0$\cos\beta其中$\cos\alpha$, $\cos\beta$是方向l的单位向量。【教师】使用L y^2在点1, 1处沿方向1, 1的方向导数。解：先求偏导数：f_xx, y = 2x，f_yx, y = 2y在点1, 1处：f_x1, 1
课堂测验（10min）	【教师】出几道测试题目 1. 求函数$z = x^2 + 3xy + y^2$的偏导数 2. 求函数$z = e^{xy}$在点$(0, 1)$处的全微分 3. 求函数$z = \sin(xy)$的偏导数 4. 求函数$z = x^2 + y^2$在点$(1, 1)$处的梯度 【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解 解1：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$ 解2：$dz = dx$ 解3：$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy)$，$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$ 解4：$\nabla f(1, 1) = (2, 2)$	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况	
课堂小结（8min）	【教师】总结本节课要点 1. 多元函数的概念和定义域 2. 偏导数的概念和计算方法 3. 全微分的概念和计算 4. 方向导数和梯度的概念 【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业	巩固本节课所学知识	

板书设计建议

左侧：多元函数的定义和几何意义

中部：偏导数的概念和计算方法

右侧：全微分和梯度的概念

教学提示

- 鼓励学生截图Lab8模拟结果作为报告证据，提升数据说服力

- 引导学生在偏导数计算中注意变量处理
- 结合工程案例，让学生体验多元函数微分学在工程中的重要作用
- 强调多元函数微分学在优化问题、物理建模中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用多元函数微分学方法解决实际问题的能力
