

## 第六章《定积分》讲义

### 学习目标:

1. 理解定积分的概念和几何意义
2. 掌握定积分的基本性质
3. 掌握牛顿-莱布尼茨公式
4. 了解定积分的实际应用
5. 培养数学应用能力

### 学习资源:

- 教材:《高等数学》第6章
- 课件:《第6章定积分》
- 实验: Lab6-1 至 Lab6-4 仿真实验
- 练习: 题库定积分题

---

# 第一讲：定积分

## 1.1 定积分的概念

### 1.1.1 定积分的定义

**定义：** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义，将区间  $[a, b]$  任意分割成  $n$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$ ，在每个子区间上任取一点  $\xi_i$ ，作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

当分割越来越细，即  $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  时，如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在，则称此极限为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

### 1.1.2 定积分的几何意义

当  $f(x) \geq 0$  时，定积分表示由曲线  $y = f(x)$ 、直线  $x = a$ 、 $x = b$  和  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积。

## 1.2 定积分的基本性质

### 1.2.1 线性性质

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

### 1.2.2 区间可加性

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

### 1.2.3 比较性质

若  $f(x) \leq g(x)$ ，则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

### 1.2.4 估值性质

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

## 1.3 牛顿-莱布尼茨公式

### 1.3.1 牛顿-莱布尼茨公式

**定理：** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续， $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### 1.3.2 定积分的计算方法

1. 先求原函数  $F(x)$
2. 计算  $F(b) - F(a)$

## 1.4 定积分的应用

### 1.4.1 计算面积

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

### 1.4.2 计算体积

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

### 1.4.3 计算弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

## 1.5 典型例题

### 例题1：基本计算

计算定积分  $\int_0^1 x^2 dx$ 。

**解：**  $\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

### 例题2：线性性质

计算定积分  $\int_0^2 (x^2 + 2x) dx$ 。

**解：**  $\int_0^2 (x^2 + 2x) dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 2x dx$   
 $= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$

### 例题3：面积计算

计算由曲线  $y = x^2$  和直线  $y = 1$  所围成的图形的面积。

**解：** 交点：  $x^2 = 1$ , 得  $x = \pm 1$

$$\text{面积 } S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

---

## 附录：常用公式汇总

### 定积分公式

- 牛顿-莱布尼茨公式： $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 线性性质： $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
- 区间可加性： $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### 应用公式

- 面积： $S = \int_a^b f(x) dx$
- 体积： $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- 弧长： $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

## 学习建议

- 理论学习**：掌握基本概念和计算方法
- 计算练习**：多做典型例题和练习题
- 实验操作**：使用Lab6系列仿真实验
- 工程应用**：结合实际案例进行练习
- 综合训练**：提高解决复杂问题的能力