第二章《极限与连续》教案

教学项目

教学项目 极限与连续

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已掌握函数的基本概念，但对极限和连续的理解还不够深入。学生在极限的概念、极限的计算、连续性的判定方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生深入理解极限和连续的概念、掌握极限的计算方法和连续性判定。

能力目标：培养学生利用极限和连续解决实际问题的能力、提高数学分析能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和逻辑推理能力，培养严谨的数学态度。

教学重点 极限的概念、极限的计算、连续性的判定、重要极限的应用。

教学难点及应对

难点：极限的概念理解、极限的计算、连续性的判定。

应对策略：通过具体的工程案例演示，分步骤详细讲解，辅以Lab2系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第2章极限与连续》、Lab2系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：详细讲解极限和连续的概念和计算方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生深入思考。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab2系列软件演示极限和连续过程。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤（2min）	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
情境导入（15min）	【教师】讲述极限在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要分析函数的趋势，比如当时间趋近于无穷时，温度的变化趋势、当距离趋近于零时，速度的变化等。如何用数学方法来解决这些问题？ 【学生】思考并讨论极限的实际意义 【教师】展示工程案例： 1. 温度变化趋势：$Tt = T_0 + T_1 - T_0 e\^{}-kt$ 2. 瞬时速度：$v = \lim \Delta t \to 0 \, \Delta s/\Delta t$ 3. 电路分析：$I = \lim t \to 0 \, Qt/t$	激发学生学习兴趣，建立极限与实际工程的联系

时间	主要教学内容及步骤	设计意图				
	【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书"极限→建立模型→求解→应用"主线					
极限的概念（35min）	【教师】详细讲解极限的定义 **定义1** 设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义（x_0可以除外），如果当x无限趋近于x_0时，$f(x)$无限趋近于某个常数A，则称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 【教师】讲解极限的几何意义 极限$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$表示：对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$0 <	x - x_0	< \delta 时，有	f x - A	< \varepsilon$。 【教师】讲解极限的性质 1. **唯一性**：如果极限存在，则唯一 2. **有界性**：如果极限存在，则函数在某个邻域内有界 3. **保号性**：如果极限大于0，则函数在某个邻域内大于0 4. **局部有界性**：如果极限存在，则函数在某个邻域内有界 【教师】使用Lab2-1展示极限的几何意义 【学生】观察极限的几何表示 **例1** 计算$\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x + 1)$。 **解**： $\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x + 1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$ **例2** 计算$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x-1}$。 **解**：当$x \neq 1$时， $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ 所以 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 0}(x + 1) = 0 + 1 = 1$ **例3** 计算$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$。 **解**：这是一个重要极限，$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 【学生】完成极限概念练习	深入学习极限的基本概念
极限的计算（35min）	【教师】详细讲解极限的运算法则 **定理1** 如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$，则： 1. $\lim_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ 2. $\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ 3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$ 4. $\lim_{x \to x_0}[f(x)]^n = A^n$ 【教师】讲解重要极限 **重要极限1**：$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ **重要极限2**：$\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$ 【教师】讲解极限计算的常用方法 1. **代入法**：直接代入 2. **因式分解法**：分解因式后约分 3. **有理化法**：分子分母有理化 4. **洛必达法则**：处理$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 【教师】使用Lab2-2展示极限的计算过程 【学生】观察极限的计算步骤 **例4** 计算$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$。 **解**：$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$（重要极限） **例5** 计算$\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x$。 **解**：$\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$（重要极限） **例6** 计算$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$。 **解**： $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$ **例7** 计算$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$。 **解**：$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$	深入掌握极限的计算方法				

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	$= \lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$ $= \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$ 【学生】完成极限计算练习	
连续性的概念 （30min）	【教师】详细讲解连续性的定义 **定义2** 设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 则称函数$f(x)$在点x_0处连续。 【教师】讲解连续性的判定 函数$f(x)$在点x_0处连续当且仅当： 1. $f(x_0)$存在 2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$存在 3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 【教师】讲解连续性的性质 1. **局部有界性**：如果函数在点x_0处连续，则在该点附近有界 2. **局部保号性**：如果函数在点x_0处连续且$f(x_0) > 0$，则在该点附近$f(x) > 0$ 3. **运算性质**：连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数 【教师】使用Lab2-3展示连续性的几何意义 【学生】观察连续性的几何表示 **例8** 判断函数$f(x) = x^2$在点$x = 1$处是否连续。 **解**：$f(1) = 1$ $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x^2 = 1$ 因为$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$，所以函数在$x = 1$处连续 **例9** 判断函数$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$在点$x = 0$处是否连续。 **解**：$f(0) = 1$ $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x^2 = 0$ 因为$\lim_{x\to0} f(x) \neq f(0)$，所以函数在$x = 0$处不连续 【学生】完成连续性练习	深入学习连续性的概念
连续性的应用 （20min）	【教师】详细讲解连续性的应用 **定理2（零点定理）**：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且$f(a) \cdot f(b) < 0$，则存在$c \in (a, b)$使得$f(c) = 0$ **定理3（介值定理）**：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在$[a, b]$上取到$f(a)$和$f(b)$之间的所有值 **定理4（最值定理）**：如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在$[a, b]$上必有最大值和最小值 【教师】使用Lab2-4展示连续性的应用 【学生】观察连续性的实际应用 **例10** 证明方程$x^3 - x - 1 = 0$在区间$(1, 2)$内有解。 **解**：设$f(x) = x^3 - x - 1$ $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$ 因为$f(x)$在$[1, 2]$上连续，且$f(1) \cdot f(2) < 0$，所以由零点定理，存在$c \in (1, 2)$使得$f(c) = 0$ **例11** 证明函数$f(x) = x^2$在区间$[0, 2]$上取到值1。 **解**：$f(0) = 0$，$f(2) = 4$	学习连续性的实际应用

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	因为$f(x)$在$[0, 2]$上连续，且$0 < 1 < 4$，所以由介值定理，存在$c \in (0, 2)$使得$f(c) = 1$ 即$c^2 = 1$，所以$c = 1$ 【学生】完成连续性应用练习	
课堂测验（15min）	【教师】出几道测试题目 1. 计算$\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x + 1)$ 2. 计算$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 3. 计算$\lim_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x$ 4. 判断函数$f(x) = x^2$在点$x = 1$处是否连续 5. 证明方程$x^3 - x - 1 = 0$在区间$(1, 2)$内有解 【学生】做测试题目 【教师】公布答案并详细讲解	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结（10min）	【教师】总结本节课要点 1. 极限的概念和性质 2. 极限的计算方法 3. 连续性的概念和判定 4. 连续性的应用（零点定理、介值定理、最值定理） 【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业	巩固本节课所学知识

板书设计建议

左侧：极限的定义和性质

中部：极限的计算方法

右侧：连续性的概念和应用

教学提示

- 鼓励学生截图Lab2模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在极限计算中注意运算法则和重要极限的应用
- 结合工程案例，让学生体验极限在工程中的重要作用
- 强调极限在微积分学中的基础作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用极限方法解决实际问题的能力
