

第十章《线性代数》第一节课教案

教学项目

**教学项目** 矩阵基础与运算

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已具备基本的数学运算能力，但对矩阵概念和运算理解不够深入。学生在矩阵运算规则、矩阵乘法的几何意义、矩阵应用方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解矩阵的概念、掌握矩阵的加法和乘法运算。

能力目标：培养学生利用矩阵运算解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和逻辑推理能力，在工程场景中合理运用矩阵方法。

**教学重点** 矩阵的概念、矩阵的加法和乘法运算。

**教学难点及应对**

难点：矩阵乘法的规则理解、矩阵运算的几何意义。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解矩阵的基本概念和运算规则。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示矩阵运算过程。

**教学反思** 需要关注学生对矩阵概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过矩阵运算解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
情境导入 (10min)	【教师】讲述矩阵在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要处理大量的数据，比如学生成绩表、商品价格表、电路分析等。如何用数学语言来描述和处理这些“表格”？ 【学生】思考并讨论矩阵的实际应用 【教师】展示工程案例：班级成绩管理 案例背景：某班级有3个学生，3门课程，如何用数学方法表示和管理成绩？ 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书“矩阵→运算→应用”主线	激发学生学习兴趣，建立矩阵与实际工程的联系
矩阵的概念 (20min)	【教师】讲解矩阵的定义 定义1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}$ ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) 排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m \times n$ 矩阵，记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。 【教师】讲解矩阵的表示方法 1. 用大写字母表示: $A, B, C$ 2. 用圆括号或方括号: $(a_{ij})$ 或 $[a_{ij}]$ 3. 用 $()$ 表示 【教师】讲解特殊矩阵 1. 零矩阵: 所有元素都是0的矩阵 2. 单位矩阵: 主对角线上元素为1，其他元素为0的方阵 3. 对角矩阵: 只有主对角线上有非零元素的方阵 【教师】演示Lab10-1，展示矩阵的几何意义 【学生】观察矩阵的几何表示  例1 写出矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的各个元素。  解: $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3$ $a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6$  例2 写出 $3 \times 3$ 单位矩阵。  解: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 【学生】完成矩阵表示练习	学习矩阵的基本概念，建立数学基础
矩阵的加法 (25min)	【教师】讲解矩阵加法的定义 定义2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，则矩阵 $A$ 与 $B$ 的和定义为 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 【教师】讲解矩阵加法的条件 只有同型矩阵才能相加，即行数和列数都相同的矩阵。 【教师】讲解矩阵加法的性质 1. 交换律: $A + B = B + A$ 2. 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$ 3. 零矩阵: $A + O = A$ 4. 负矩阵: $A + (-A) = O$ 【教师】使用Lab10-2展示矩阵加法过程	掌握矩阵加法的运算规则

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>【学生】观察矩阵加法的几何意义</p> <p>例3 计算矩阵<math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>和<math>B = \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math>的和。</p> <p>解：<math>A + B = \begin{pmatrix} 1+5 &amp; 2+6 \\ 3+7 &amp; 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 &amp; 8 \\ 10 &amp; 12 \end{pmatrix}</math></p> <p>例4 某公司两个月的销售额矩阵分别为</p> $A = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 120 & 180 \\ 160 & 240 \end{pmatrix}$ <p>求总销售额矩阵。</p> <p>解：总销售额 <math>= A + B = \begin{pmatrix} 100+120 &amp; 200+180 \\ 150+160 &amp; 250+240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 &amp; 380 \\ 310 &amp; 490 \end{pmatrix}</math></p> <p>【学生】完成矩阵加法练习</p>	
矩阵的乘法（25min）	<p>【教师】讲解矩阵乘法的定义</p> <p>定义3 设<math>A = (a_{ij})_{m \times s}</math>，<math>B = (b_{ij})_{s \times n}</math>，则矩阵A与B的乘积定义为</p> $C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$ <p>其中<math>c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}</math></p> <p>【教师】讲解矩阵乘法的条件</p> <p>第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。</p> <p>【教师】讲解矩阵乘法的步骤</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 第一个矩阵的行与第二个矩阵的列对应相乘</li><li>2. 对应元素相乘后相加</li><li>3. 结果放在对应位置</li></ol> <p>【教师】讲解矩阵乘法的性质</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 结合律：<math>(AB)C = A(BC)</math></li><li>2. 分配律：<math>A(B + C) = AB + AC</math></li><li>3. 数乘结合律：<math>k(AB) = (kA)B = A(kB)</math></li><li>4. 单位矩阵：<math>AI = A, IA = A</math></li></ol> <p>【教师】使用Lab10-3展示矩阵乘法过程</p> <p>【学生】观察矩阵乘法的几何意义</p> <p>例5 计算矩阵<math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>和<math>B = \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math>的乘积。</p> <p>解：<math>AB = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 &amp; 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 &amp; 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 &amp; 22 \\ 43 &amp; 50 \end{pmatrix}</math></p> <p>例6 某商店销售3种商品，单价矩阵为<math>P = \begin{pmatrix} 10 &amp; 20 &amp; 30 \end{pmatrix}</math>，销售数量矩阵为<math>Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}</math>，求总销售额。</p> <p>解：总销售额 <math>= PQ = \begin{pmatrix} 10 &amp; 20 &amp; 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \times 5 + 20 \times 3 + 30 \times 2 = 50 + 60 + 60 = 170</math></p> <p>【学生】完成矩阵乘法练习</p>	掌握矩阵乘法的运算规则
课堂测验（10min）	<p>【教师】出几道测试题目</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 计算矩阵<math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math></li><li>2. 计算矩阵<math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math></li><li>3. 写出<math>2 \times 2</math>单位矩阵</li><li>4. 判断矩阵<math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>和<math>\begin{pmatrix} 5 &amp; 6 \\ 7 &amp; 8 \end{pmatrix}</math>能否相加</li></ol> <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1：<math>\begin{pmatrix} 6 &amp; 8 \\ 10 &amp; 12 \end{pmatrix}</math></p> <p>解2：<math>\begin{pmatrix} 19 &amp; 22 \\ 43 &amp; 50 \end{pmatrix}</math></p> <p>解3：<math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>解4：能相加，因为都是<math>2 \times 2</math>矩阵</p>	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结（8min）	<p>【教师】总结本节课要点</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 矩阵的概念和表示方法</li><li>2. 矩阵加法的运算规则</li><li>3. 矩阵乘法的运算规则</li><li>4. 矩阵运算的几何意义</li><li>5. 矩阵在工程中的应用</li></ol> <p>【学生】回顾知识点，提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

- 左侧：矩阵的定义和表示方法
- 中部：矩阵加法的运算规则
- 右侧：矩阵乘法的运算规则

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在矩阵运算中注意维数匹配
- 结合工程案例，让学生体验矩阵在工程中的重要作用
- 强调矩阵运算在数据分析、图像处理中的重要作用

- 通过实际工程案例，培养学生运用矩阵方法解决实际问题的能力

---

第十章《线性代数》第二节课教案

教学项目

**教学项目** 行列式与线性方程组

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已掌握矩阵的基本概念和运算，但对行列式的理解还不够深入。学生在行列式的计算、几何意义、线性方程组求解方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解行列式的概念、掌握行列式的计算方法和线性方程组的求解。

能力目标：培养学生利用行列式和矩阵方法解决线性方程组的能力。

素质目标：提高学生的数学分析思维和逻辑推理能力，在工程场景中合理运用线性代数方法。

**教学重点** 行列式的概念和计算、线性方程组的求解方法。

**教学难点及应对**

难点：行列式的几何意义理解、线性方程组解的判断。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解行列式的概念和计算方法、线性方程组的求解。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示行列式和线性方程组。

**教学反思** 需要关注学生对行列式概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过行列式方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 矩阵的概念和表示方法 2. 矩阵加法的运算规则 3. 矩阵乘法的运算规则 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备
行列式的概念 (25min)	【教师】讲解行列式的定义 定义1 对于n阶方阵 $A = (a_{ij})$ ，其行列式记作 $\det A$ 或 $ A $ 是一个数值。【教师】讲解2阶行列式对于 $2 \times 2$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，其行列式为 $\det A = ad - bc$ 【教师】讲解3阶行列式对于 $3 \times 3$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ，其行列式为 $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$	

时间	主要教学内容及步骤	设计意图			
线性方程组 (25min)	<p>【教师】讲解线性方程组的概念 定义2 含有n个未知数<math>x_1, x_2, \dots, x_n</math>的m个线性方程组成的方程组称为线性方程组：</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ <p>【教师】讲解线性方程组的矩阵表示</p> $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ <p>设 <math>A = \begin{pmatrix} a_{11} &amp; a_{12} &amp; \cdots &amp; a_{1n} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; \cdots &amp; a_{2n} \\ \vdots &amp; \vdots &amp; \ddots &amp; \vdots \\ a_{m1} &amp; a_{m2} &amp; \cdots &amp; a_{mn} \end{pmatrix}</math>, <math>X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}</math>, <math>B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}</math></p> <p>则线性方程组可表示为 <math>AX = B</math></p> <p>【教师】讲解线性方程组的解</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 有唯一解：方程组有且仅有一个解</li> <li>2. 无解：方程组没有解</li> <li>3. 无穷多解：方程组有无限多个解</li> </ol> <p>【教师】讲解解的判断</p> <p>对于n个方程n个未知数的线性方程组 <math>AX = B</math>：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 当 <math> A  \neq 0</math> 时，方程组有唯一解</li> </ol>	A	$ A  \neq 0$ 时，方程组有唯一解	A	$ A  = 0$ 时，方程组无解或有无穷多解【教师】使用Lab10-5展示线性方程组的几何意义【学生】观察结果
克拉默法则 (20min)	<p>【教师】讲解克拉默法则</p> <p>定理1（克拉默法则）对于n个方程n个未知数的线性方程组 <math>AX = B</math>，如果 <math> A  \neq 0</math>，则方程组有唯一解：</p> $x_i = \frac{ A_i }{ A }$	A	$ A  \neq 0$ ，则方程组有唯一解：	$A_i$	$ A $
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 计算行列式 <math>\begin{vmatrix} 2 &amp; 3 \\ 4 &amp; 5 \end{vmatrix}</math></li> <li>2. 判断线性方程组 <math>\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}</math> 的解的情况</li> <li>3. 用克拉默法则求解 <math>\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}</math></li> <li>4. 计算行列式 <math>\begin{vmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 3 \end{vmatrix}</math></li> </ol> <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1：</p> $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$ <p>解2：</p>	A	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$ ，有无穷多解	A	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 行列式的概念和计算方法</li> <li>2. 线性方程组的矩阵表示</li> <li>3. 克拉默法则的应用</li> <li>4. 行列式在工程中的应用</li> </ol> <p>【学生】回顾知识点，提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固 本节 课所 学知 识			

板书设计建议

左侧：行列式的定义和计算方法

中部：线性方程组的矩阵表示

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在行列式计算中注意符号
- 结合工程案例，让学生体验行列式在工程中的重要作用
- 强调线性方程组在工程分析、经济建模中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用线性代数方法解决实际问题的能力

---

第十章《线性代数》第三节课教案

教学项目

**教学项目** 特征值与特征向量

**授课地点** 多媒体教室

**授课形式** 线下教学

**学情分析** 学生已掌握矩阵运算和行列式，但对特征值与特征向量的理解还不够深入。学生在特征值的计算、特征向量的求解、几何意义理解方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

**教学目标**

知识目标：使学生理解特征值与特征向量的概念、掌握特征值的计算方法。

能力目标：培养学生利用特征值与特征向量解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和工程应用能力，在工程场景中合理运用特征值方法。

**教学重点** 特征值与特征向量的概念、特征值的计算方法、特征值在工程中的应用。

**教学难点及应对**

难点：特征值的几何意义理解、特征向量的求解。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

**教学资源**

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

**教学方法**

讲授法：讲解特征值与特征向量的概念和计算方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示特征值与特征向量。

**教学反思** 需要关注学生对特征值概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过特征值方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 行列式的概念和计算方法 2. 线性方程组的矩阵表示 3. 克拉默法则的应用 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备

时间	主要教学内容及步骤	设计意图		
特征值与特征向量的概念 (25min)	<p>【教师】讲解特征值与特征向量的定义</p> <p>定义1 设A是n阶方阵，如果存在非零向量v和标量λ，使得</p> $Av = \lambda v$ <p>则称λ是矩阵A的特征值，v是A的对应于特征值λ的特征向量。</p> <p>【教师】讲解特征值与特征向量的几何意义</p> <ol style="list-style-type: none"><li>特征向量：在矩阵变换下方向不变的向量</li><li>特征值：特征向量在变换下的伸缩倍数</li><li>特征值&gt;1：向量被拉伸</li><li>特征值&lt;1：向量被压缩</li><li>特征值&lt;0：向量被反向</li></ol> <p>【教师】讲解特征方程</p> $(A - \lambda I)v = 0$ <p>因为v≠0，所以</p>	<p>A - λI</p>	<p>= 0</p> <p>这个方程称为特征方程，其解就是特征值。【教师】使用Lab10-7展示特征值与特征向量的几何意义【学生】观察特征向量的变换过程例1求矩阵A =</p> $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ <p>的特征值和特征向量。解：特征方程为</p>	<p>A - λI</p>
特征值的计算方法 (25min)	<p>【教师】讲解特征值的计算步骤</p> <ol style="list-style-type: none"><li>写出特征方程</li></ol>	<p>A - λI</p>	<p>= 0</p> <p>2. 展开行列式，得到关于λ的多项式方程</p> <p>3. 解方程，得到特征值</p> <p>4. 对每个特征值，求对应的特征向量</p> <p>【教师】讲解特征向量的求解对于特征值λ<sub>i</sub>，求解齐次线性方程组</p> $(A - \lambda_i I)v = 0$ <p>【教师】讲解特征值的性质</p> <ol style="list-style-type: none"><li>n阶矩阵有n个特征值（重根按重数计算）</li><li>特征值的和等于矩阵的迹：∑λ<sub>i</sub> = tr(A)</li><li>特征值的积等于矩阵的行列式：∏λ<sub>i</sub> =  A </li></ol>	<p>A</p>
特征值在工程中的应用 (20min)	<p>【教师】讲解特征值在工程中的应用</p> <ol style="list-style-type: none"><li><b>振动分析</b>：找到系统的固有频率</li><li><b>稳定性分析</b>：判断系统的稳定性</li><li><b>图像处理</b>：主成分分析（PCA）</li><li><b>网络分析</b>：社交网络、交通网络</li><li><b>机器学习</b>：特征提取、降维</li></ol> <p>【教师】讲解具体应用案例</p> <p>案例1：桥梁振动分析</p> <p>桥梁的振动方程可以表示为</p> $M\ddot{x} + Kx = 0$	<p>K - λM</p>	<p>= 0</p> <p>6 - 2λ - λ - 4 = 0</p> $\lambda^2 - 14\lambda + 20 = 0$ <p>解得λ<sub>1</sub> = 2, λ<sub>2</sub> = 5</p> <p>固有频率为ω<sub>1</sub> = √2, ω<sub>2</sub> = √5</p> <p>【学生】完成特征值应用练习</p>	<p>学习特征值在工程中的应用</p>



时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>其中M是质量矩阵，K 是刚度矩阵</p> <p>通过求解特征值问题<math>K \varphi = \lambda M \varphi</math></p> <p>，可以得到桥梁的固有频率</p> <p>案例2：图像压缩</p> <p>在图像处理中，通过主成分分析（PCA）找到图像的主要特征</p> <p>这些特征就是协方差矩阵的特征向量</p> <p>【教师】使用Lab10-9展示特征值应用</p> <p>【学生】观察特征值在实际问题中的应用</p> <p>例5 某机械系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为</p> $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $K = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ <p>求系统的固有频率。</p> <p>解：求解广义特征值问题</p> $K \varphi = \lambda M \varphi$ <p>即<math>(K - \lambda M) \varphi = 0</math></p> $K - \lambda M = \begin{pmatrix} 6-2\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ <p>特征方程为</p>	
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <p>1. 求矩阵<math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>的特征值</p> <p>2. 求矩阵<math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>的特征值和特征向量</p> <p>3. 判断矩阵<math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 0 \\ 0 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>的特征值</p> <p>4. 求矩阵<math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>的特征值</p> <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1：特征方程为</p> $(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0,$ <p>特征值为2和3</p> <p>解2：特征方程为</p> $(1 - \lambda)^2 - 4 = 0,$ <p>即</p> $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ <p>特征值为<math>\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1</math></p> <p>对应特征向量为<math>\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},</math></p> $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ <p>解3：特征方程为<math>(3 - \lambda)^2 = 0,</math></p> <p>特征值为3（二重）</p> <p>解4：特征方程为<math>\lambda^2 + 1 = 0,</math>特征值为<math>\pm i</math>（复数）</p>	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <p>1. 特征值与特征向量的概念</p> <p>2. 特征值的计算方法</p> <p>3. 特征值在工程中的应用</p> <p>4. 特征值方法的综合运用</p> <p>【学生】回顾知识点，提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

**左侧：**特征值与特征向量的定义

**中部：**特征值的计算步骤

**右侧：**特征值应用案例

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在特征值计算中注意特征方程
- 结合工程案例，让学生体验特征值在工程中的重要作用
- 强调特征值方法在振动分析、图像处理中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用特征值方法解决实际问题的能力

---