第十一章《无穷级数》讲义

学习目标：
1. 理解无穷级数的概念及其收敛性
2. 掌握几何级数的性质和求和公式
3. 掌握调和级数和p级数的收敛性
4. 掌握级数收敛判别法（比值判别法、莱布尼茨判别法）
5. 理解绝对收敛与条件收敛的概念
6. 掌握幂级数的收敛半径和收敛区间
7. 掌握泰勒级数的展开和应用
8. 了解级数在工程中的实际应用

学习资源：
- 教材：《高等数学》第11章
- 课件：《第11章无穷级数》
- 实验：Lab11-1 至 Lab11-9 仿真实验
- 练习：题库级数题、收敛判别题

第一讲：无穷级数基础与几何级数

1.1 无穷级数的概念

1.1.1 无穷级数的定义

定义：设给定一个数列$\{a_n\}$，则表达式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

称为无穷级数，简称级数。

1.1.2 级数的部分和

定义：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的前n项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

称为级数的第n个部分和。

1.1.3 级数的收敛性

定义：如果部分和数列$\{S_n\}$收敛，即$\lim_{n\to\infty} S_n = S$存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$S$称为级数的和。

如果$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在，则称级数发散。

1.2 几何级数

1.2.1 几何级数的定义

定义：形如$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$的级数称为几何级数，其中$a \neq 0$，$r$称为公比。

1.2.2 几何级数的收敛性

定理：几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$的收敛性：

- 当$|r| < 1$时，级数收敛，和为$\frac{a}{1-r}$
- 当$|r| \geq 1$时，级数发散

1.2.3 几何级数求和公式的推导

设$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

则$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$

两式相减：$S - rS = a$

即$(1 - r)S = a$

当$|r| < 1$时，$S = \frac{a}{1-r}$

1.3 调和级数与p级数

1.3.1 调和级数

定义：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$称为调和级数。

性质：调和级数发散。

1.3.2 p级数

定义：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$称为p级数。

收敛性：

- 当$p > 1$时，级数收敛

- 当$p \leq 1$时，级数发散

1.4 典型例题

例题1：级数收敛性判断

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$的收敛性。

解:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

所以级数收敛，和为1

例题2：几何级数求和

判断几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$的收敛性并求和。

解: $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $|r| = \frac{1}{2} < 1$

所以级数收敛，和为$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

例题3：p级数收敛性

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的收敛性。

解: 这是$p = 2 > 1$的p级数，所以收敛

第二讲：级数收敛判别法

2.1 比值判别法

2.1.1 比值判别法的内容

定理：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

则：

- 当$L<1$时，级数收敛
- 当$L>1$时，级数发散
- 当$L=1$时，判别法失效

2.1.2 比值判别法的应用技巧

1. 特别适合含有阶乘、指数、幂函数的级数
2. 计算极限时注意化简技巧
3. 当$L=1$时，需要其他方法判别

2.2 比较判别法

2.2.1 直接比较

设$\sum a_n, \sum b_n$为正项级数。

- 若$0\le a_n\le b_n$且$\sum b_n$收敛，则$\sum a_n$收敛
- 若$a_n\ge b_n\ge 0$且$\sum b_n$发散，则$\sum a_n$发散

2.2.2 极限比较

若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L\in(0,\infty)$，则$\sum a_n$与$\sum b_n$同敛散。

2.3 根值判别法

设$\sum a_n$，令$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$。

- 若$L<1$，级数收敛
- 若$L>1$，级数发散
- 若$L=1$，判别失效

2.4 积分判别法

若$f(x)$在$[1,\infty)$上正、单调递减，且$a_n=f(n)$，则$\sum a_n$与$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$同敛散。

2.2 交错级数

2.2.1 交错级数的定义

定义：形如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$的级数称为交错级数，其中$a_n>0$。

2.2.2 莱布尼茨判别法

定理：设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$满足：

1. $a_n\ge a_{n+1}$（单调递减）

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
则级数收敛

2.2.3 交错级数的性质

1. 如果交错级数收敛，其和S满足$|S - S_n| \le a_{n+1}$
2. 交错级数的部分和数列有界

2.3 绝对收敛与条件收敛

2.3.1 绝对收敛

定义：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛。

2.3.2 条件收敛

定义：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛。

2.3.3 绝对收敛的性质

1. 绝对收敛的级数一定收敛
2. 绝对收敛的级数可以任意重排项而不改变和
3. 条件收敛的级数重排项后和可能改变

2.4 典型例题

例题4：比值判别法应用

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$的收敛性。

解：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

所以级数收敛

例题5：莱布尼茨判别法应用

判断交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$的收敛性。

解：$a_n = \frac{1}{n}$

1. $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$（单调递减）
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

由莱布尼茨判别法，级数收敛

例题6：绝对收敛与条件收敛

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的收敛性。

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

这是$p = 2 > 1$的p级数，所以$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛
因此原级数绝对收敛

第三讲：幂级数与泰勒级数

3.1 幂级数

3.1.1 幂级数的定义

定义：形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ 的级数称为幂级数。

3.1.2 收敛半径

定理：对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，存在$R \geq 0$（可能为$+\infty$），使得：

- 当$|x| < R$时，级数收敛
- 当$|x| > R$时，级数发散
- R称为收敛半径

3.1.3 收敛半径的计算

定理：设$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$，则：

- 当$0 < L < +\infty$时，$R = \frac{1}{L}$
- 当$L = 0$时，$R = +\infty$
- 当$L = +\infty$时，$R = 0$

3.1.4 收敛区间

定义：收敛区间是使幂级数收敛的所有x值的集合。

- 当$R = 0$时，收敛区间为$\{0\}$
- 当$R = +\infty$时，收敛区间为$(-\infty, +\infty)$
- 当$0 < R < +\infty$时，收敛区间为$(-R, R)$，端点需要单独讨论

3.2 泰勒级数

3.2.1 泰勒级数的定义

定义：设函数$f(x)$在x_0处具有任意阶导数，则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为$f(x)$在x_0处的泰勒级数。

3.2.2 麦克劳林级数

定义：当$x_0 = 0$时，泰勒级数称为麦克劳林级数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

3.2.3 常见函数的泰勒展开

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$
5. $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$

3.2.4 余项与误差估计（拉格朗日型）

若f在$[a, x]$上有$n + 1$阶导数，则

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}，\xi在a与x之间。$$

应用：给定误差ε，估计所需项数n使$|R_n(x)| \le \varepsilon$。

3.3 级数的工程应用

3.3.1 数值计算

用级数逼近复杂函数值，如计算$e^{0.1}$的近似值。

3.3.2 信号处理

傅里叶级数分解信号，在通信工程中应用广泛。

3.3.3 概率计算

正态分布等概率密度函数的积分常用级数计算。

3.3.4 解微分方程

很多微分方程的解可以用级数表示。

3.4 典型例题

例题7：幂级数收敛半径

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$的收敛半径和收敛区间。

解：$a_n = \frac{1}{n!}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

所以$R = +\infty$，收敛区间为$(-\infty, +\infty)$

例题8：泰勒级数展开

求$f(x) = \sin x$在$x = 0$处的泰勒级数。

解：$f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f'''(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$

$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$，$f''(0) = 0$，$f'''(0) = -1$，$f^{(4)}(0) = 0$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

例题9：级数应用

利用泰勒级数计算$e^{0.1}$的近似值（取前4项）。

解：$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!}$

$= 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6}$

$= 1 + 0.1 + 0.005 + 0.000167 = 1.105167$

附录：常用公式汇总

级数收敛判别法

- 比值判别法：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$
- 莱布尼茨判别法：$a_n \geq a_{n+1}$且$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

几何级数公式

- 收敛条件：$|r| < 1$
- 求和公式：$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

p级数公式

- 收敛条件：$p > 1$
- 发散条件：$p \leq 1$

幂级数公式

- 收敛半径：$R = \frac{1}{L}$，其中$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

常见泰勒展开

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$

学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和判别法
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab11系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力