

第二节 函 数

学生课堂笔记整理

一、常量与变量

► 1. 变量的定义

核心概念

常量：在观察某一现象的过程中，不起变化的量。

变量：在过程中是变化的，可以取不同数值的量。

【注意】有些量虽然变化，但变化相对于研究对象是极其微小的，也看作常量。

► 2. 变量的表示——区间

如果变量的变化是连续的，则用区间来表示其变化范围。在数轴上，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体。

区间名称	不等式表示	区间记号	说明
闭区间	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	包含端点 a 和 b
开区间	$a < x < b$	(a, b)	不包含端点 a 和 b
半开区间	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	$(a, b]$ $[a, b)$	只包含一个端点

无限区间

$[a, +\infty)$ ：表示不小于 a 的实数全体，即 $a \leq x < +\infty$

$(-\infty, b)$ ：表示小于 b 的实数全体，即 $-\infty < x < b$

$(-\infty, +\infty)$ ：表示全体实数，即 $-\infty < x < +\infty$

【注意】 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作'负无穷大'和'正无穷大'，它们不是数，仅是记号。

► 3. 邻域

邻域定义

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$ 。

满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域。

点 a 称为此邻域的中心， δ 称为此邻域的半径

二、函数的概念

★ 函数的定义 ★

如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它

对应, 则称 y 是 x 的函数。

- 变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域
- 通常 x 叫做自变量, y 叫做函数值 (或因变量)
- 变量 y 的变化范围叫做这个函数的值域

记作: $y = f(x)$

► 1. 函数相等

函数的构成要素为: 定义域、对应关系和值域。

由于值域是由定义域和对应关系决定的, 所以如果两个函数的定义域和对应关系完全一致, 则称两个函数相等。

► 2. 函数的表示方法

1. **解析法:** 用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系。

例如: 圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$

2. **表格法:** 将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系。

例如: 平方表、三角函数表等。

3. **图示法:** 用坐标平面上曲线来表示函数。一般用横坐标表示自变量, 纵坐标表示因变量。

分段函数

用解析法表示的一个函数, 但在其定义域的不同区间内, 所对应 U 的值是用不同的解析式来表示的, 这种函数称为分段函数。

在实际生活与工程实践中, 这是一类常见函数。

常数函数

在函数的定义中, 并没有要求自变量变化时, 其函数值一定要变, 因此 $Y = C$ (C 为常数) 也符合函数的定义, 称 $Y = C$ 为常数函数。

三、函数的简单性态

► 1. 函数的有界性

有界性定义

如果对属于某一区间 I 的所有值总有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 其中 M 是一个与 x 无关的常数, 那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界, 否则便称无界。

【注意】一个函数, 如果在其整个定义域内有界, 则称为有界函数。

【例】函数 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。

► 2. 函数的单调性

单调性定义

单调增加: 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的。

单调减少: 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减小, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的。

【例】函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减小的, 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的。

► 3. 函数的奇偶性**奇偶性定义**

偶函数: 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做偶函数。

奇函数: 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做奇函数。

【注意】偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称。

► 4. 函数的周期性**周期性定义**

对于函数 $f(x)$, 若存在一个不为零的数 l , 使得关系式 $f(x + l) = f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立, 则 $f(x)$ 叫做周期函数, l 是 $f(x)$ 的周期。

【注意】我们说的周期函数的周期是指最小正周期。

【例】函数 $\sin x$ 、 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

四、反函数**► 1. 反函数的定义****反函数定义**

设有函数 $y = f(x)$, 若变量 y 在函数的值域内任取值 y_0 时, 变量 x 在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应, 即 $f(x_0) = y_0$, 那么变量 x 是变量 y 的函数。

这个函数用 $x = \varphi(y)$ 来表示, 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数。

【注意】由此定义可知, 函数 $y = f(x)$ 也是函数 $x = \varphi(x)$ 的反函数。

► 2. 反函数的存在定理**存在定理**

若 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上严格增(减), 其值域为 R , 则它的反函数必然在 R 上确定, 且严格增(减)。

【注意】严格增(减)即单调增(减)。

【例】 $y = x^2$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$ 。对于 y 取定的非负值, 可求得 $x = \pm\sqrt{y}$ 。若我们不加条件, 由 y 的值就不能唯一确定 x 的值, 也就是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 函数不是严格增(减), 故其没有反函数。如果我们加上条件, 要求 $x \geq 0$, 则对 $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$ 就是 y

$= x^2$ 在此要求下严格增（减）的反函数。

► 3. 反函数的性质

图像性质

在同一坐标平面内, $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的。

【例】函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = \log_2 x$ 互为反函数, 则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y = x$ 对称的。

五、复合函数

★ 复合函数的定义 ★

若 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数: $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内。

那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数, 我们称后一个函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$ 。

其中 u 叫做中间变量

【注意】并不是任意两个函数就能复合; 复合函数还可以由更多函数构成。

【例】函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = 2 + x^2$ 是不能复合成一个函数的。因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u 值 (都大于或等于 2), 使 $y = \arcsin u$ 都没有定义。

六、初等函数

► 1. 基本初等函数

我们最常用的有五种基本初等函数, 分别是指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数。

函数名称	函数记号	主要性质
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	<ul style="list-style-type: none"> 不论 x 为何值, y 总为正数 当 $x = 0$ 时, $y = 1$
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$	<ul style="list-style-type: none"> 图形位于 y 轴右侧, 并过 $(1, 0)$ 点 在定义域内单调增
幂函数	$y = x^a (a \in \mathbb{R})$	<ul style="list-style-type: none"> 令 $a = m/n$ (m, n 为整数) 奇偶性取决于 m, n 的奇偶
三角函数	$y = \sin x$ (正弦函数)	<ul style="list-style-type: none"> 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 正弦函数是奇函数且 $\sin x \leq 1$
反三角函数	$y = \arcsin x$ (反正弦函数)	<ul style="list-style-type: none"> 由于是多值函数, 函数值限制在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上, 称为反正弦函数的主值

► 2. 初等函数

初等函数定义

由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数。

【例】 $y = 2^{(\cos x)} + \ln(\sqrt[3]{4^{(3x)} + 3}) + \sin 8x$ 是初等函数。

【反例】 $y = |x|$ 不是初等函数。

本章小结

► 一、基本概念

函数、基本初等函数、初等函数、反函数、复合函数

► 二、基本方法

高等数学的七大思想方法

► 三、要点解析

1. 确定函数的两个要素：定义域和对应法则
2. 函数的性质：单调性、奇偶性、周期性、有界性
3. 基本初等函数

★ 学习重点提示 ★

1. 熟练掌握函数的定义及其三要素
2. 理解并能判断函数的四种性质
3. 掌握反函数与复合函数的概念和求法
4. 熟记五种基本初等函数的图像与性质

笔记整理完毕