

## 第七章《常微分方程》教案

### 教学项目

- 教学项目 常微分方程
- 授课地点 多媒体教室
- 授课形式 线下教学
- 学情分析 学生已掌握一元函数微分学的基本概念和计算方法，但对常微分方程的理解还不够深入。学生在微分方程的概念、一阶微分方程、二阶微分方程、数值解法方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。
- 教学目标

知识目标：使学生理解常微分方程的概念、掌握一阶和二阶微分方程的求解方法。

能力目标：培养学生利用常微分方程解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学建模思维和工程应用能力，在工程场景中合理运用常微分方程方法。
- 教学重点 常微分方程的概念、一阶微分方程的求解、二阶微分方程的求解。
- 教学难点及应对

难点：微分方程的建立、求解方法的理解。

应对策略：通过具体的工程案例演示，分步骤讲解，辅以Lab7系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。
- 教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第7章常微分方程》、Lab7系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑
- 教学方法

讲授法：讲解常微分方程的概念和求解方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab7系列软件演示常微分方程求解过程。
- 教学反思 需要关注学生对常微分方程概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过常微分方程方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

### 教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
情境导入 (10min)	【教师】讲述常微分方程在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要描述和预测各种变化过程，比如人口增长、放射性衰变、电路分析、机械振动等。如何用数学方法来描述这些变化规律？ 【学生】思考并讨论常微分方程的实际应用 【教师】展示工程案例：人口增长模型	激发学生学习兴趣，建立常微分方程与

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
	案例背景：某城市人口增长率为2%，初始人口为100万，如何预测未来人口数量？ 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书"微分方程→建立模型→求解→应用"主线	实际工程的联系	
常微分方程的概念 (20min)	【教师】讲解常微分方程的定义 定义1 含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。如果未知函数是一元函数，则称为常微分方程。 【教师】讲解微分方程的分类 1. 按阶数分类：一阶、二阶、高阶微分方程 2. 按线性性分类：线性、非线性微分方程 3. 按齐次性分类：齐次、非齐次微分方程 【教师】讲解微分方程的解 1. 通解：含有任意常数的解 2. 特解：满足特定初始条件的解 3. 初值问题：给定初始条件的微分方程 【教师】使用Lab7-1展示微分方程的概念 【学生】观察微分方程的几何表示 例1 判断下列方程是否为微分方程： (1) $y' + 2y = 0$ (2) $y'' + 3y' + 2y = e^x$ (3) $x^2 + y^2 = 1$ 解：（1）是，一阶线性齐次微分方程 （2）是，二阶线性非齐次微分方程 （3）不是，这是代数方程 例2 验证 $y = Ce^{-2x}$ 是微分方程 $y' + 2y = 0$ 的通解。 解： $y' = -2Ce^{-2x}$ 代入方程： $-2Ce^{-2x} + 2 \cdot Ce^{-2x} = 0$ 左边 = $-2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 0 =$ 右边 所以 $y = Ce^{-2x}$ 是方程的通解 【学生】完成微分方程概念练习	学习常微分方程的基本概念	
一阶微分方程 (25min)	【教师】讲解可分离变量方程 定义2 形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的微分方程称为可分离变量方程。 求解步骤： 1. 分离变量： $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ 2. 两边积分： $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ 3. 求出通解 【教师】讲解一阶线性微分方程 定义3 形如 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程。 求解步骤： 1. 求积分因子： $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ 2. 方程两边乘以积分因子 3. 左边写成 $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ 的形式 4. 两边积分求解 【教师】使用Lab7-2展示一阶微分方程	<div><div>y</div><div>=</div><div>\ln</div><div>x</div><div>+</div><div>C_1</div><div>y</div><div>=</div><div>e^{\ln</div><div>x</div><div>+</div><div>C_1}</div><div>x</div></div> <p>所以<math>y = Cx</math> (<math>C = \pm e^{C_1}</math>)</p> <p>例4求解微分方程<math>y' + 2y = e^x</math></p> <p>。解：这是一阶线性微分方程</p> <p><math>PX = 2, QX = e^x</math></p> <p>积分因子：<math>\mu x = e^{\int 2dx} = e^{2x}</math></p> <p>方程两边乘以<math>e^{2x}</math>：<math>e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{3x}</math>左边：<math>\frac{d}{dx}(e^{2x}y)</math></p> <p><math>e^{2x}y</math></p> <p><math>= e^{3x}</math></p> <p>两边积分：<math>e^{2x}y = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C</math></p> <p>所以<math>y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}</math></p>	掌握一阶微分方程的求解方法

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>的求解过程</p> <p>【学生】观察一阶微分方程的求解步骤</p> <p>例3 求解微分方程 <math>\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}</math>。</p> <p>解：这是可分离变量方程</p> <p>分离变量： <math>\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}</math></p> <p>两边积分： <math>\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}</math></p> <p><math>\ln y = \ln x + C</math></p>	
二阶微分方程 (25min)	<p>【教师】讲解二阶线性微分方程定义4 形如</p> <p><math>y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)</math> 的微分方程称为二阶线性微分方程。</p> <p>【教师】讲解二阶常系数线性微分方程当 <math>P(x) = p, Q(x) = q</math> 为常数时，方程为</p> <p><math>y'' + py' + qy = R(x)</math></p> <p>【教师】讲解齐次方程的通解</p> <p>对于齐次方程 <math>y'' + py' + qy = 0</math>:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 写出特征方程： <math>r^2 + pr + q = 0</math></li><li>2. 求特征根： <math>r_1, r_2</math></li><li>3. 根据特征根的情况写出通解：</li></ol> <ul style="list-style-type: none"><li>- 两个不等实根： <math>y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}</math></li><li>- 两个相等实根： <math>y = (C_1 + C_2 x) e^{r x}</math></li><li>- 共轭复根：</li></ul> <p><math>y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)</math></p> <p>【教师】使用Lab7-3展示二阶微分方程的求解过程</p> <p>【学生】观察二阶微分方程的求解步骤</p> <p>例5 求解微分方程 <math>y'' - 3y' + 2y = 0</math>。</p> <p>解：这是二阶常系数线性齐次方程</p> <p>特征方程： <math>r^2 - 3r + 2 = 0</math></p> <p><math>(r - 1)(r - 2) = 0</math></p> <p>特征根： <math>r_1 = 1, r_2 = 2</math></p> <p>通解： <math>y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}</math></p> <p>例6 求解微分方程 <math>y'' + 4y' + 4y = 0</math>。</p> <p>解：特征方程： <math>r^2 + 4r + 4 = 0</math></p> <p><math>(r + 2)^2 = 0</math></p> <p>特征根： <math>r_1 = r_2 = -2</math> (重根)</p> <p>通解： <math>y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}</math></p> <p>例7 求解微分方程 <math>y'' + 2y' + 5y = 0</math>。</p> <p>解：特征方程： <math>r^2 + 2r + 5 = 0</math></p> <p><math>r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i</math></p> <p>特征根： <math>r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i</math> (共轭复根)</p> <p>通解：</p> <p><math>y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)</math></p> <p>【学生】完成二阶微分方程练习</p>	掌握二阶微分方程的求解方法
微分方程的应用 (15min)	<p>【教师】讲解微分方程的应用</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. 人口增长模型： <math>\frac{dP}{dt} = kP</math></li><li>2. 放射性衰变： <math>\frac{dN}{dt} = -\lambda N</math></li></ol>	学习微分方程的实际应用

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>3. 弹簧振动: <math>m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0</math></p> <p>4. 电路分析: <math>L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)</math> 【教师】使用Lab7-4展示微分方程的应用 【学生】观察微分方程的实际应用 例8 某城市人口增长率为2%，初始人口为100万，求人口增长模型。 解：设人口为<math>P(t)</math>，增长率为<math>k = 0.02</math> 微分方程: <math>\frac{dP}{dt} = 0.02P</math> 初始条件: <math>P(0) = 100</math> 求解: <math>\frac{dP}{P} = 0.02dt</math> <math>\int \frac{dP}{P} = \int 0.02dt</math> <math>\ln P = 0.02t + C</math> <math>P = Ce^{0.02t}</math> 由<math>P(0) = 100</math>得<math>C = 100</math> 所以<math>P(t) = 100e^{0.02t}</math> 【学生】完成微分方程应用练习</p>	实际应用
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <p>1. 求解微分方程 <math>\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}</math></p> <p>2. 求解微分方程 <math>y' + 2y = e^x</math></p> <p>3. 求解微分方程 <math>y'' - 3y' + 2y = 0</math></p> <p>4. 建立人口增长模型 <math>\frac{dP}{dt} = kP</math></p> <p>【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1: <math>y = Cx</math> 解2: <math>y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}</math> 解3: <math>y = C_1e^x + C_2e^{2x}</math> 解4: <math>P(t) = P_0e^{kt}</math></p>	通过测试,了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <p>1. 常微分方程的概念和分类</p> <p>2. 一阶微分方程的求解方法</p> <p>3. 二阶微分方程的求解方法</p> <p>4. 微分方程的实际应用</p> <p>【学生】回顾知识点, 提出疑问 【教师】解答学生疑问, 布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

- 左侧：常微分方程的定义和分类
- 中部：一阶微分方程的求解方法
- 右侧：二阶微分方程的求解方法

教学提示

- 鼓励学生截图Lab7模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在微分方程求解中注意分类讨论
- 结合工程案例，让学生体验常微分方程在工程中的重要作用
- 强调常微分方程在建模、预测、控制中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用常微分方程方法解决实际问题的能力