

第五章《不定积分》讲义

学习目标:

1. 理解不定积分的概念和性质
2. 掌握基本积分公式
3. 掌握换元积分法
4. 掌握分部积分法
5. 培养积分计算能力

学习资源:

- 教材:《高等数学》第5章
- 课件:《第5章不定积分》
- 实验: Lab5-1 至 Lab5-4 仿真实验
- 练习: 题库不定积分题

第一讲：不定积分

1.1 不定积分的概念

1.1.1 原函数的定义

定义：如果函数 $F(x)$ 的导数是 $f(x)$ ，即 $F'(x) = f(x)$ ，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

1.1.2 不定积分的定义

定义：函数 $f(x)$ 的所有原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数。

1.1.3 不定积分的性质

- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

1.2 基本积分公式

1.2.1 基本积分公式

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

1.3 换元积分法

1.3.1 第一类换元积分法

如果 $\int f(u) du = F(u) + C$ ，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

1.3.2 第二类换元积分法

设 $x = \varphi(t)$ ，则

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$$

1.4 分部积分法

1.4.1 分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1.5 典型例题

例题1：基本积分

求 $\int x^2 dx$ 。

解： $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

例题2：线性性质

求 $\int (x^3 + 2x + 1) dx$ 。

解： $\int (x^3 + 2x + 1) dx = \int x^3 dx + \int 2x dx + \int 1 dx$
 $= \frac{x^4}{4} + x^2 + x + C$

例题3：第一类换元

求 $\int (2x + 1)^3 dx$ 。

解： 设 $u = 2x + 1$, 则 $du = 2dx$, $dx = \frac{du}{2}$

$$\int (2x + 1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$$

例题4：分部积分

求 $\int x e^x dx$ 。

解： 设 $u = x$, $dv = e^x dx$, 则 $du = dx$, $v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

附录：常用公式汇总

基本积分公式

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$

换元积分法

- 第一类： $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$
- 第二类： $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$

分部积分法

- $\int u dv = uv - \int v du$

学习建议

- 理论学习**：掌握基本概念和计算方法
- 计算练习**：多做典型例题和练习题
- 实验操作**：使用Lab5系列仿真实验
- 工程应用**：结合实际案例进行练习
- 综合训练**：提高解决复杂问题的能力