第九章《多元函数积分学初步》教案

教学项目

教学项目 二重积分与三重积分

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已掌握一元函数积分学的基本概念和计算方法，但对多元函数积分学的理解还不够深入。学生在二重积分的概念、几何意义、计算方法、三重积分的概念和应用方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生理解二重积分和三重积分的概念、掌握二重积分的计算方法。

能力目标：培养学生利用重积分解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和空间想象能力，在工程场景中合理运用重积分方法。

教学重点 二重积分的概念和计算方法、重积分的几何意义和物理意义。

教学难点及应对

难点：二重积分的几何意义理解、积分区域的选择和计算。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab9系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第9章多元函数积分学初步》、Lab9系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：讲解二重积分和三重积分的概念和计算方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab9系列软件演示重积分过程。

教学反思 需要关注学生对重积分概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过重积分方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
考勤（2min）	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况	
情境导入（10min）	【教师】讲述重积分在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要计算曲顶柱体的体积、平面薄片的质量、空间物体的质量等。如何用数学方法来解决这些问题？ 【学生】思考并讨论重积分的实际应用 【教师】展示工程案例：计算曲顶柱体体积 案例背景：某建筑需要计算一个曲顶柱体的体积，柱体底面为矩形区域，顶面为曲面。 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书"重积分→几何意义→计算方法→应用"主线	激发学生学习兴趣，建立重积分与实际工程的联系	
二重积分的概念（25min）	【教师】讲解二重积分的定义 定义1 设函数$z = f(x, y)$在有界闭区域D上有定义。将区域D任意分割成n个小区域ΔD_i（$i = 1, 2, \dots, n$），在每个小区域ΔD_i上任取一点(ξ_i, η_i)，作和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 其中$\Delta\sigma_i$表示ΔD_i的面积。当分割越来越细，即$\lambda = \max\{\Delta\sigma_i\} \to 0$时，如果极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在区域D上的二重积分，记作 $\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 【教师】讲解二重积分的几何意义 当$f(x, y) \geq 0$时，二重积分表示以D为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶的曲顶柱体的体积。 【教师】讲解二重积分的性质 1. 线性性质： $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,d\sigma = \alpha\iint_D f(x, y)\,d\sigma + \beta\iint_D g(x, y)\,d\sigma$ 2. 区域可加性：$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\,d\sigma$ 3. 比较性质：若$f(x, y) \leq g(x, y)$，则 $\iint_D f(x, y)\,d\sigma \leq \iint_D g(x, y)\,d\sigma$ 4. 估值性质：$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y)\,d\sigma \leq M \cdot S$ 【教师】使用Lab9-1展示二重积分的几何意义 【学生】观察二重积分的几何表示 例1 计算二重积分$\iint_D (x + y)\,d\sigma$，其中D是由$y = x$，$y = x^2$所围成的区域。 解：先确定积分区域D的边界 由$y = x$和$y = x^2$的交点：$x = x^2$，得$x = 0$或$x = 1$ 所以$D = \{x, y	0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}\iint_D x + y \, d\sigma = \int_0^1 \int_{x^2}^x x + y \, dy \, dx= \int_0^1 \left Missing or unrecognized delimiter for \right _{x^2}^x \, dx= \int_0^1 \left Missing or unrecognized delimiter for \right \, dx= \int_0^1 \left Missing or unrecognized delimiter for \right \, dx= \left Missing or unrecognized delimiter for \right _0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$ 【学生】完成二重积分概念练习	学习二重积分的基本概念

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
二重积分的计算（25min）	【教师】讲解二重积分的计算方法 1. 直角坐标系下的计算 2. 极坐标系下的计算 【教师】讲解直角坐标系下的计算 如果积分区域D可以表示为 $D = \{x, y	a \leq x \leq b, \varphi_1x \leq y \leq \varphi_2x\}则\iint_D fx, y \, d\sigma = \int_a^b \int_{\varphi_1x}^{\varphi_2x} fx, y \, dy \, dx如果积分区域D可以表示为D = \{x, y	c \leq y \leq d, \psi_1y \leq x \leq \psi_2y\}则\iint_D fx, y \, d\sigma = \i }^{\psi_2y} fx, y \, dx \, dy 【教师】讲解极坐标系下的计算当积分区域为圆形、扇形等时，使用极坐标系 r\cos\theta，y = r\sin\theta，d\sigma = r \, dr \, d\theta\iint_D fx, y \, c $r\cos\theta, r\sin\theta$\, r \, dr \, d\theta 【教师】使用Lab9 − 2展示二重积分的计算过程【学生】观察二重积分的计算 \iint_D xy \, d\sigma，其中D是由y = x，y = 2x，x = 1，x = 2所围成的区域 {x, y
三重积分的概念（20min）	【教师】讲解三重积分的定义 定义2 函数$f(x, y, z)$在空间区域Ω上的三重积分： $\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \lim_{\Delta V \to 0} \sum f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ 【教师】讲解三重积分的物理意义 当$f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$表示密度时，三重积分表示空间物体的质量。 【教师】讲解三重积分的计算方法 1. 直角坐标系：$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ 2. 柱坐标系：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$z = z$ 3. 球坐标系：$x = \rho\sin\phi\cos\theta$，$y = \rho\sin\phi\sin\theta$，$z = \rho\cos\phi$ 【教师】使用Lab9-3展示三重积分的几何意义 【学生】观察三重积分的几何表示 例4 计算三重积分$\iiint_\Omega z\, dV$，其中Ω是由$z = 0$，$z = 1$，$x = 0$，$x = 1$，$y = 0$，$y = 1$所围成的立方体。 解：$\Omega = \{x, y, z	0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \iiint_\Omega z \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dz \, dy \, dx= \int_0^1 \int_0^1 \left Missing or unrecognized delimiter for \right _0^1 \, dy \, dx= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \, dy \, dx= \int_0^1 \left Missing or unrecognized delimiter for \right _0^1 \, dx= \int_0^1 \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2}$ 【学生】完成三重积分练习	学习三重积分的基本概念
重积分的应用（15min）	【教师】讲解重积分的应用 1. 计算体积：$V = \iint_D f(x, y)\, d\sigma$ 2. 计算面积：$S = \iint_D 1\, d\sigma$ 3. 计算质量：$M = \iint_D \rho(x, y)\, d\sigma$ 4. 计算重心：$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x, y)\, d\sigma$，$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x, y)\, d\sigma$ 【教师】使用Lab9-4展示重积分的应用 【学生】观察重积分的实际应用 例5 计算由曲面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 4$所围成的立体的体积。 解：立体在xy平面上的投影区域为$D = \{x, y	x^2 + y^2 \leq 4\}体积V = \iint_D $4 - x^2 - y^2$ \, d\sigma使用极坐标系：D = \{ r, θ	0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 $4 - r^2$ d\theta= \int_0^{2\pi} \int_0^2 $4r - r^3$ \, dr \, d\theta= \int_0^{2\pi} \l Missing or unrecognized delimiter for \right _0^2 \, d\theta= \int_0^{2\pi} $8 - 4$ \, d\theta = \int_0^{2\pi} 4 \, d\the 【学生】完成重积分应用练习
课堂测验（10min）	【教师】出几道测试题目 1. 计算二重积分$\iint_D (x + y)\, d\sigma$，其中D是由$y = x$，$y = x^2$所围成的区域 2. 计算二重积分$\iint_D xy\, d\sigma$，其中D是由$y = x$，$y = 2x$，$x = 1$，$x = 2$所围成的区域 3. 计算三重积分$\iiint_\Omega z\, dV$，其中$\Omega$是单位立方体 4. 计算由曲面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 4$所围成的立体的体积 【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况	
课堂小结（8min）	【教师】总结本节课要点 1. 二重积分的概念和几何意义 2. 二重积分的计算方法 3. 三重积分的概念和物理意义 4. 重积分的实际应用 【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业	巩固本节课所学知识	

板书设计建议

左侧：二重积分的定义和性质
中部：二重积分的计算方法
右侧：三重积分的概念和应用

教学提示

- 鼓励学生截图Lab9模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在重积分计算中注意积分区域的选择
- 结合工程案例，让学生体验重积分在工程中的重要作用
- 强调重积分在体积计算、质量计算中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用重积分方法解决实际问题的能力
