第十章《线性代数》讲义

学习目标：
1. 理解矩阵的概念和表示方法
2. 掌握矩阵的加法和乘法运算
3. 掌握行列式的概念和计算方法
4. 掌握线性方程组的求解方法
5. 理解克拉默法则的应用
6. 掌握特征值与特征向量的概念和计算
7. 了解线性代数在工程中的实际应用

学习资源：
- 教材：《高等数学》第10章
- 课件：《第10章线性代数》
- 实验：Lab10-1 至 Lab10-9 仿真实验
- 练习：题库矩阵题、线性方程组题

第一讲：矩阵基础与运算

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

定义：由$m \times n$个数a_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, m$；$j = 1, 2, \ldots, n$）排成的m行n列的数表
$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$
称为$m \times n$矩阵，记作$A = (a_{ij})_{m \times n}$。

1.1.2 矩阵的表示方法

1. 用大写字母表示：A, B, C
2. 用圆括号或方括号：(a_{ij})或$[a_{ij}]$
3. 用()表示

1.1.3 特殊矩阵

1. **零矩阵**：所有元素都是0的矩阵
2. **单位矩阵**：主对角线上元素为1，其他元素为0的方阵
3. **对角矩阵**：只有主对角线上有非零元素的方阵

1.2 矩阵的加法

1.2.1 矩阵加法的定义

定义：设$A = (a_{ij})_{m \times n}$，$B = (b_{ij})_{m \times n}$，则矩阵$A$与$B$的和定义为

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

1.2.2 矩阵加法的条件

只有同型矩阵才能相加，即行数和列数都相同的矩阵。

1.2.3 矩阵加法的性质

1. 交换律：$A + B = B + A$
2. 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 零矩阵：$A + O = A$
4. 负矩阵：$A + (-A) = O$

1.3 矩阵的乘法

1.3.1 矩阵乘法的定义

定义：设$A = (a_{ij})_{m \times s}$，$B = (b_{ij})_{s \times n}$，则矩阵$A$与$B$的乘积定义为

$C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$

其中$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$

1.3.2 矩阵乘法的条件

第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。

1.3.3 矩阵乘法的步骤

1. 第一个矩阵的行与第二个矩阵的列对应相乘
2. 对应元素相乘后相加
3. 结果放在对应位置

1.3.4 矩阵乘法的性质

1. 结合律：$(AB)C = A(BC)$
2. 分配律：$A(B + C) = AB + AC$
3. 数乘结合律：$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
4. 单位矩阵：$AI = A$，$IA = A$

1.4 典型例题

例题1：矩阵加法

计算矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$和$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$的和。

解：$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

例题2：矩阵乘法

计算矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$和$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$的乘积。

解：$AB = \begin{pmatrix} 1\times 5+2\times 7 & 1\times 6+2\times 8 \\ 3\times 5+4\times 7 & 3\times 6+4\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

例题3：工程应用

某商店销售3种商品，单价矩阵为$P = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$，销售数量矩阵为$Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，求总销售额。

解：总销售额 $= PQ = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 10\times 5 + 20\times 3 + 30\times 2 = 170$

第二讲：行列式与线性方程组

2.1 行列式的概念

2.1.1 行列式的定义

定义：对于n阶方阵$A = (a_{ij})$，其行列式记作$|A|$或$\det(A)$，是一个数值。

2.1.2 2阶行列式

对于2×2矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.1.3 3阶行列式

对于3×3矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，其行列式为

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

2.1.4 行列式的性质

1. 行列式转置不变：$|A^T| = |A|$
2. 行列式行（列）交换变号：交换两行（列），行列式变号
3. 行列式行（列）倍乘：某行（列）乘以k，行列式乘以k
4. 行列式行（列）倍加：某行（列）加上另一行（列）的k倍，行列式不变
5. 行列式为零：两行（列）相同或成比例时，行列式为0

2.2 线性方程组

2.2.1 线性方程组的概念

定义：含有n个未知数$x_1, x_2, \ldots, x_n$的m个线性方程组成的方程组称为线性方程组：
$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}$

2.2.2 线性方程组的矩阵表示

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则线性方程组可表示为$AX = B$

2.2.3 线性方程组的解

1. 有唯一解：方程组有且仅有一个解

2. 无解：方程组没有解
3. 无穷多解：方程组有无限多个解

2.2.4 解的判断

对于n个方程n个未知数的线性方程组$AX = B$：

1. 当$|A| \neq 0$时，方程组有唯一解
2. 当$|A| = 0$时，方程组无解或有无穷多解

2.3 克拉默法则

2.3.1 克拉默法则的内容

定理：对于n个方程n个未知数的线性方程组$AX = B$，如果$|A| \neq 0$，则方程组有唯一解：

$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$，$i = 1, 2, \ldots, n$

其中$|A_i|$是用常数项列向量B替换A的第i列得到的行列式。

2.3.2 克拉默法则的步骤

1. 计算系数行列式$|A|$
2. 用常数项替换第i列，计算$|A_i|$
3. 计算$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

2.4 典型例题

例题4：行列式计算

计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$

例题5：线性方程组求解

用克拉默法则求解线性方程组$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$。

解：系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，常数项$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - 2 \times 8 = -1$

$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - 5 \times 2 = -2$

$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$

$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$

第三讲：特征值与特征向量

3.1 特征值与特征向量的概念

3.1.1 特征值与特征向量的定义

定义：设A是n阶方阵，如果存在非零向量$\vec{v}$和标量λ，使得

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

则称λ是矩阵A的特征值，$\vec{v}$是A的对应于特征值λ的特征向量。

3.1.2 特征值与特征向量的几何意义

1. **特征向量**：在矩阵变换下方向不变的向量
2. **特征值**：特征向量在变换下的伸缩倍数
3. 特征值>1：向量被拉伸
4. 特征值<1：向量被压缩
5. 特征值<0：向量被反向

3.1.3 特征方程

由$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$得$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

因为$\vec{v} \neq \vec{0}$，所以$|A - \lambda I| = 0$

这个方程称为特征方程，其解就是特征值。

3.2 特征值的计算方法

3.2.1 特征值的计算步骤

1. 写出特征方程$|A - \lambda I| = 0$
2. 展开行列式，得到关于λ的多项式方程
3. 解方程，得到特征值
4. 对每个特征值，求对应的特征向量

3.2.2 特征向量的求解

对于特征值λ_i，求解齐次线性方程组$(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$

3.2.3 特征值的性质

1. n阶矩阵有n个特征值（重根按重数计算）
2. 特征值的和等于矩阵的迹：$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$
3. 特征值的积等于矩阵的行列式：$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$
4. 相似矩阵有相同的特征值

3.3 特征值在工程中的应用

3.3.1 振动分析

桥梁的振动方程可以表示为$M\ddot{x} + Kx = 0$

其中M是质量矩阵，K是刚度矩阵

通过求解特征值问题$K\vec{v} = \lambda M\vec{v}$，可以得到桥梁的固有频率

3.3.2 图像处理

在图像处理中，通过主成分分析（PCA）找到图像的主要特征

这些特征就是协方差矩阵的特征向量

3.3.3 稳定性分析

在控制系统中，通过分析系统矩阵的特征值来判断系统的稳定性

3.4 典型例题

例题6：特征值计算

求矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

解：特征方程为$|A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

所以特征值为$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 3$

对于$\lambda_1 = 2$：$(A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$

得$v_2 = 0$，v_1任意，所以特征向量为$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对于$\lambda_2 = 3$：$(A - 3I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$

得$-v_1 + v_2 = 0$，即$v_1 = v_2$，所以特征向量为$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例题7：工程应用

某机械系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

求系统的固有频率。

解：求解广义特征值问题$K\vec{v} = \lambda M\vec{v}$

即$(K - \lambda M)\vec{v} = \vec{0}$

$$K - \lambda M = \begin{pmatrix} 6-2\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

特征方程为$|K - \lambda M| = 0$

$(6-2\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$

$2\lambda^2 - 14\lambda + 20 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

解得$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 5$

固有频率为$\omega_1 = \sqrt{2}$，$\omega_2 = \sqrt{5}$

附录：常用公式汇总

矩阵运算公式

- 矩阵加法：$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- 矩阵乘法：$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$

行列式公式

- 2阶行列式：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- 3阶行列式：按对角线法则计算

线性方程组公式

- 克拉默法则：$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

特征值公式

- 特征方程：$|A - \lambda I| = 0$
- 特征值性质：$\sum \lambda_i = tr(A)$，$\prod \lambda_i = |A|$

学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和运算规则
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab10系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力