第七章《常微分方程》讲义

学习目标：
1. 理解常微分方程的概念和分类
2. 掌握一阶微分方程的求解方法
3. 掌握二阶微分方程的求解方法
4. 了解微分方程的实际应用
5. 培养数学建模和工程应用能力

学习资源：
- 教材：《高等数学》第7章
- 课件：《第7章常微分方程》
- 实验：Lab7-1 至 Lab7-4 仿真实验
- 练习：题库常微分方程题

第一讲：常微分方程

1.1 常微分方程的概念

1.1.1 微分方程的定义

定义：含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。如果未知函数是一元函数，则称为常微分方程。

1.1.2 微分方程的分类

1. **按阶数分类**：一阶、二阶、高阶微分方程
2. **按线性性分类**：线性、非线性微分方程
3. **按齐次性分类**：齐次、非齐次微分方程

1.1.3 微分方程的解

1. **通解**：含有任意常数的解
2. **特解**：满足特定初始条件的解
3. **初值问题**：给定初始条件的微分方程

1.2 一阶微分方程

1.2.1 可分离变量方程

定义：形如$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$的微分方程称为可分离变量方程。

求解步骤：

1. 分离变量：$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
2. 两边积分：$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
3. 求出通解

1.2.2 一阶线性微分方程

定义：形如$y' + P(x)y = Q(x)$的微分方程称为一阶线性微分方程。

求解步骤：

1. 求积分因子：$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
2. 方程两边乘以积分因子
3. 左边写成$\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$的形式
4. 两边积分求解

1.3 二阶微分方程

1.3.1 二阶线性微分方程

定义：形如$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$的微分方程称为二阶线性微分方程。

1.3.2 二阶常系数线性微分方程

当$P(x) = p$，$Q(x) = q$为常数时，方程为

$y'' + py' + qy = R(x)$

1.3.3 齐次方程的通解

对于齐次方程$y'' + py' + qy = 0$:

1. 写出特征方程：$r^2 + pr + q = 0$
2. 求特征根：r_1, r_2

3. 根据特征根的情况写出通解：

- 两个不等实根：$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- 两个相等实根：$y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$
- 共轭复根：$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

1.4 微分方程的应用

1.4.1 人口增长模型

$\frac{dP}{dt} = kP$

解：$P(t) = P_0e^{kt}$

1.4.2 放射性衰变

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

解：$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$

1.4.3 弹簧振动

$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

解：$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$，其中$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1.4.4 电路分析

$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$

1.5 典型例题

例题1：可分离变量方程

求解微分方程$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$。

解：这是可分离变量方程

分离变量：$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

两边积分：$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C_1$

$|y| = e^{\ln|x| + C_1} = e^{C_1}|x|$

所以$y = Cx$（$C = \pm e^{C_1}$）

例题2：一阶线性方程

求解微分方程$y' + 2y = e^x$。

解：这是一阶线性微分方程

$P(x) = 2, \ Q(x) = e^x$

积分因子：$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

方程两边乘以e^{2x}：

$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = e^{3x}$

左边：$\frac{d}{dx}[e^{2x}y] = e^{3x}$

两边积分：$e^{2x}y = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

所以$y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$

例题3：二阶齐次方程

求解微分方程$y'' - 3y' + 2y = 0$。

解：这是二阶常系数线性齐次方程

特征方程：$r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r - 1)(r - 2) = 0$

特征根：$r_1 = 1$，$r_2 = 2$

通解：$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

例题4：重根情况

求解微分方程$y'' + 4y' + 4y = 0$。

解：特征方程：$r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r + 2)^2 = 0$

特征根：$r_1 = r_2 = -2$（重根）

通解：$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

例题5：共轭复根

求解微分方程$y'' + 2y' + 5y = 0$。

解：特征方程：$r^2 + 2r + 5 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

特征根：$r_1 = -1 + 2i$，$r_2 = -1 - 2i$（共轭复根）

通解：$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

例题6：人口增长模型

某城市人口增长率为2%，初始人口为100万，求人口增长模型。

解：设人口为$P(t)$，增长率为$k = 0.02$

微分方程：$\frac{dP}{dt} = 0.02P$

初始条件：$P(0) = 100$

求解：$\frac{dP}{P} = 0.02dt$

$\int \frac{dP}{P} = \int 0.02dt$

$\ln P = 0.02t + C$

$P = Ce^{0.02t}$

由$P(0) = 100$得$C = 100$

所以$P(t) = 100e^{0.02t}$

附录：常用公式汇总

一阶微分方程公式

- 可分离变量：$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
- 一阶线性：$y' + P(x)y = Q(x) \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$

二阶微分方程公式

- 特征方程：$r^2 + pr + q = 0$
- 通解形式：

- 不等实根：$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

- 相等实根：$y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$

- 共轭复根：$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

应用模型公式

- 人口增长：$P(t) = P_0e^{kt}$
- 放射性衰变：$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$
- 弹簧振动：$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和求解方法
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab7系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力