# 第八章《多元函数微分学》讲义

**学习目标**：
1. 理解多元函数的概念和几何意义
2. 掌握偏导数的概念和计算方法
3. 理解全微分的概念和计算
4. 掌握方向导数和梯度的概念
5. 了解多元函数微分学在工程中的重要作用

**学习资源**：
- 教材：《高等数学》第8章
- 课件：《第8章多元函数微分学》
- 实验：Lab8-1 至 Lab8-4 仿真实验
- 练习：题库多元函数微分学题

---

# 第一讲：多元函数微分学

## 1.1 多元函数的概念

### 1.1.1 多元函数的定义

**定义**：设$D$是$n$维空间$R^n$的一个子集，如果对于$D$中的每一个点$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，按照某种对应法则$f$，都有唯一确定的实数$z$与之对应，则称$f$是定义在$D$上的$n$元函数，记作

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$称为自变量，$z$称为因变量。

### 1.1.2 二元函数的定义

当$n = 2$时，二元函数$z = f(x, y)$表示一个曲面。

### 1.1.3 多元函数的定义域

使函数有意义的自变量的取值范围称为函数的定义域。

### 1.1.4 多元函数的几何意义

1. **一元函数**：平面上的曲线
2. **二元函数**：空间中的曲面
3. **三元函数**：四维空间中的超曲面

## 1.2 偏导数的概念

### 1.2.1 偏导数的定义

**定义**：设函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处对$x$的偏导数，记作

$$f_x(x_0, y_0) \text{或} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

类似地，对$y$的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

记作$f_y(x_0, y_0)$或$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$

### 1.2.2 偏导数的几何意义

1. $f_x(x_0, y_0)$表示曲面$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处沿$x$轴方向的切线斜率
2. $f_y(x_0, y_0)$表示曲面$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处沿$y$轴方向的切线斜率

### 1.2.3 偏导数的计算方法

计算偏导数时，将其他变量视为常数，只对指定变量求导。

## 1.3 全微分的概念

### 1.3.1 全微分的定义

**定义**：设函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，如果函数在点$(x_0, y_0)$处的全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

可以表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

其中A、B是与$\Delta x$、$\Delta y$无关的常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$是$\rho$的高阶无穷小，则称函数$f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处可微，$A\Delta x + B\Delta y$称为函数在点$(x_0, y_0)$处的全微分，记作

$dz = A\Delta x + B\Delta y$

### 1.3.2 全微分的计算

如果函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处可微，则

$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

### 1.3.3 可微的条件

如果函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处的偏导数$f_x(x_0, y_0)$和$f_y(x_0, y_0)$存在且连续，则函数在该点可微。

## 1.4 方向导数与梯度

### 1.4.1 方向导数的定义

**定义**：设函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，$l$是从$P_0$出发的射线，$P(x, y)$是$l$上任意一点，如果极限

$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho}$

存在，则称此极限为函数$f(x, y)$在点$P_0$处沿方向$l$的方向导数，记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$

### 1.4.2 梯度的定义

**定义**：设函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微，则向量

$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$

称为函数$f(x, y)$在点$P_0$处的梯度。

### 1.4.3 方向导数的计算

如果函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微，则

$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$

其中$(\cos\alpha, \cos\beta)$是方向$l$的单位向量。

## 1.5 典型例题

### 例题1：多元函数定义域

求函数$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$的定义域。

**解**：要使函数有意义，必须$4 - x^2 - y^2 \geq 0$

即$x^2 + y^2 \leq 4$

所以定义域为$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

这是一个以原点为圆心，半径为2的圆。

### 例题2：偏导数计算

求函数$z = x^2 + 3xy + y^2$的偏导数。

**解**：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$（把y当常数）

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$（把x当常数）

### 例题3：全微分计算

求函数$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的全微分。

**解**：先求偏导数：

$f_x(x,y) = 2x + 3y$，$f_y(x,y) = 3x + 2y$

在点$(1,2)$处：

$f_x(1,2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$f_y(1,2) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

所以$dz = 8dx + 7dy$

### 例题4：方向导数计算

求函数$z = x^2 + y^2$在点$(1,1)$处沿方向$(1,1)$的方向导数。

**解**：先求偏导数：

$f_x(x,y) = 2x$，$f_y(x,y) = 2y$

在点$(1,1)$处：

$f_x(1,1) = 2$，$f_y(1,1) = 2$

方向$(1,1)$的单位向量为$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

所以$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

---

## 附录：常用公式汇总

### 偏导数公式

- 对x的偏导数：$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$
- 对y的偏导数：$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

### 全微分公式

- 全微分：$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$

### 方向导数公式

- 方向导数：$\frac{\partial f}{\partial l} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta$
- 梯度：$\nabla f = (f_x, f_y)$

## 学习建议

1. **理论学习**：掌握基本概念和计算方法
2. **计算练习**：多做典型例题和练习题
3. **实验操作**：使用Lab8系列仿真实验
4. **工程应用**：结合实际案例进行练习
5. **综合训练**：提高解决复杂问题的能力