

第十章《线性代数》第一节课教案

教学项目

教学项目 矩阵基础与运算

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已具备基本的数学运算能力，但对矩阵概念和运算理解不够深入。学生在矩阵运算规则、矩阵乘法的几何意义、矩阵应用方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生理解矩阵的概念、掌握矩阵的加法和乘法运算。

能力目标：培养学生利用矩阵运算解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和逻辑推理能力，在工程场景中合理运用矩阵方法。

教学重点 矩阵的概念、矩阵的加法和乘法运算。

教学难点及应对

难点：矩阵乘法的规则理解、矩阵运算的几何意义。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：讲解矩阵的基本概念和运算规则。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示矩阵运算过程。

教学反思 需要关注学生对矩阵概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过矩阵运算解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
情境导入 (10min)	【教师】讲述矩阵在工程中的应用案例 在工程实践中，我们经常需要处理大量的数据，比如学生成绩表、商品价格表、电路分析等。如何用数学语言来描述和处理这些“表格”？ 【学生】思考并讨论矩阵的实际应用 【教师】展示工程案例：班级成绩管理 案例背景：某班级有3个学生，3门课程，如何用数学方法表示和管理成绩？ 【学生】讨论分析思路，提出初步解决方案 【教师】板书“矩阵→运算→应用”主线	激发学生学习兴趣，建立矩阵与实际工程的联系
矩阵的概念 (20min)	【教师】讲解矩阵的定义 定义1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成的 m 行 n 列的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m \times n$ 矩阵，记作 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。 【教师】讲解矩阵的表示方法 1. 用大写字母表示：A, B, C 2. 用圆括号或方括号：(a_{ij}) 或 [a_{ij}] 3. 用()表示 【教师】讲解特殊矩阵 1. 零矩阵：所有元素都是0的矩阵 2. 单位矩阵：主对角线上元素为1，其他元素为0的方阵 3. 对角矩阵：只有主对角线上有非零元素的方阵 【教师】演示Lab10-1，展示矩阵的几何意义 【学生】观察矩阵的几何表示 例1 写出矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的各个元素。 解： $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3$ $a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6$ 例2 写出 3×3 单位矩阵。 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 解： $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 【学生】完成矩阵表示练习	学习矩阵的基本概念，建立数学基础
矩阵的加法 (25min)	【教师】讲解矩阵加法的定义 定义2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，则矩阵 A 与 B 的和定义为 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 【教师】讲解矩阵加法的条件 只有同型矩阵才能相加，即行数和列数都相同的矩阵。 【教师】讲解矩阵加法的性质 1. 交换律： $A + B = B + A$ 2. 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ 3. 零矩阵： $A + O = A$ 4. 负矩阵： $A + (-A) = O$ 【教师】使用Lab10-2展示矩阵加法过程	掌握矩阵加法的运算规则

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>【学生】观察矩阵加法的几何意义</p> <p>例3 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ 的和。</p> <p>解: $A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$</p> <p>例4 某公司两个月的销售额矩阵分别为</p> <p>$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 120 & 180 \\ 160 & 240 \end{pmatrix}$</p> <p>求总销售额矩阵。</p> <p>解: 总销售额 = $A + B = \begin{pmatrix} 100+120 & 200+180 \\ 150+160 & 250+240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 & 380 \\ 310 & 490 \end{pmatrix}$</p> <p>【学生】完成矩阵加法练习</p>	
矩阵的乘法 (25min)	<p>【教师】讲解矩阵乘法的定义</p> <p>定义3 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则矩阵A与B的乘积定义为</p> <p>$C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$</p> <p>其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}$</p> <p>【教师】讲解矩阵乘法的条件</p> <p>第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。</p> <p>【教师】讲解矩阵乘法的步骤</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 第一个矩阵的行与第二个矩阵的列对应相乘 2. 对应元素相乘后相加 3. 结果放在对应位置 <p>【教师】讲解矩阵乘法的性质</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 结合律: $(AB)C = A(BC)$ 2. 分配律: $A(B + C) = AB + AC$ 3. 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ 4. 单位矩阵: $AI = A$, $IA = A$ <p>【教师】使用Lab10-3展示矩阵乘法过程</p> <p>【学生】观察矩阵乘法的几何意义</p> <p>例5 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ 的乘积。</p> <p>解: $AB = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$</p> <p>例6 某商店销售3种商品, 单价矩阵为 $P = (10 \ 20 \ 30)$, 销售数量矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求总销售额。</p> <p>解: 总销售额 = $PQ = (10 \ 20 \ 30) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \times 5 + 20 \times 3 + 30 \times 2 = 50 + 60 + 60 = 170$</p> <p>【学生】完成矩阵乘法练习</p>	掌握矩阵乘法的运算规则
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ 2. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ 3. 写出 2×2 单位矩阵 4. 判断矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ 能否相加 <p>【学生】做测试题目</p> <p>【教师】公布答案并讲解</p> <p>解1: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$</p> <p>解2: $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$</p> <p>解3: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>解4: 能相加, 因为都是 2×2 矩阵</p>	通过测试, 了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 矩阵的概念和表示方法 2. 矩阵加法的运算规则 3. 矩阵乘法的运算规则 4. 矩阵运算的几何意义 5. 矩阵在工程中的应用 <p>【学生】回顾知识点, 提出疑问</p> <p>【教师】解答学生疑问, 布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

左侧: 矩阵的定义和表示方法

中部: 矩阵加法的运算规则

右侧: 矩阵乘法的运算规则

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据, 提升数据说服力
- 引导学生在矩阵运算中注意维数匹配
- 结合工程案例, 让学生体验矩阵在工程中的重要作用
- 强调矩阵运算在数据分析、图像处理中的重要作用

- 通过实际工程案例，培养学生运用矩阵方法解决实际问题的能力

第十章《线性代数》第二节课教案

教学项目

教学项目 行列式与线性方程组

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已掌握矩阵的基本概念和运算，但对行列式的理解还不够深入。学生在行列式的计算、几何意义、线性方程组求解方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生理解行列式的概念、掌握行列式的计算方法和线性方程组的求解。

能力目标：培养学生利用行列式和矩阵方法解决线性方程组的能力。

素质目标：提高学生的数学分析思维和逻辑推理能力，在工程场景中合理运用线性代数方法。

教学重点 行列式的概念和计算、线性方程组的求解方法。

教学难点及应对

难点：行列式的几何意义理解、线性方程组解的判断。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：讲解行列式的概念和计算方法、线性方程组的求解。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示行列式和线性方程组。

教学反思 需要关注学生对行列式概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过行列式方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 矩阵的概念和表示方法 2. 矩阵加法的运算规则 3. 矩阵乘法的运算规则 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备
行列式的概念 (25min)	【教师】讲解行列式的定义 定义1 对于n阶方阵 $A = (a_{ij})$ ，其行列式记作 $\det A$ ，是一个数值。【教师】讲解2阶行列式对于 2×2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，其行列式为 $= ad - bc$ 【教师】讲解3阶行列式对于 3×3 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ，其行列式为	A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

时间	主要教学内容及步骤	设计意图			
线性方程组 (25min)	<p>【教师】讲解线性方程组的概念 定义2 含有n个未知数x_1, x_2, \dots, x_n的m个线性方程组成的方程组称为线性方程组： $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$</p> <p>【教师】讲解线性方程组的矩阵表示 $\left(\begin{array}{cccc c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$</p> <p>设$A = \left(\begin{array}{cccc c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$</p> <p>则线性方程组可表示为$AX = B$</p> <p>【教师】讲解线性方程组的解 1. 有唯一解：方程组有且仅有一个解 2. 无解：方程组没有解 3. 无穷多解：方程组有无限多个解</p> <p>【教师】讲解解的判断 对于n个方程n个未知数的线性方程组 $AX = B$：</p> <p>1. 当$\det(A) \neq 0$时，方程组有唯一解$X = A^{-1}B$</p> <p>2. 当$\det(A) = 0$时，方程组无解或有无穷多解【教师】使用Lab10 - 5展示线性方程组的几何意义【学生】观察结果的情况。解：系数矩阵A =</p> $\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right)$ $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$	A	$\det(A) \neq 0$ 时，方程组有唯一解 $X = A^{-1}B$	A	$\det(A) = 0$ 时，方程组无解或有无穷多解【教师】使用Lab10 - 5展示线性方程组的几何意义【学生】观察结果的情况。解：系数矩阵A = $\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right)$ $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$
克拉默法则 (20min)	【教师】讲解克拉默法则 定理1 (克拉默法则) 对于n个方程n个未知数的线性方程组 $AX = B$ ，如果 $\det(A) \neq 0$ ，则方程组有唯一解： $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$	A	$\det(A) \neq 0$, 则方程组有唯一解： $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$	A _i	$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <p>1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$</p> <p>2. 判断线性方程组$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$的解的情况</p> <p>3. 用克拉默法则求解$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$</p> <p>4. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$</p> <p>【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解 解1: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2$</p> <p>解2: \$</p>	A	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$	A	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times -1 - 1 \times 1 = -2$
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点 1. 行列式的概念和计算方法 2. 线性方程组的矩阵表示 3. 克拉默法则的应用 4. 行列式在工程中的应用</p> <p>【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识			

板书设计建议

左侧：行列式的定义和计算方法

中部：线性方程组的矩阵表示

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
 - 引导学生在行列式计算中注意符号
 - 结合工程案例，让学生体验行列式在工程中的重要作用
 - 强调线性方程组在工程分析、经济建模中的重要作用
 - 通过实际工程案例，培养学生运用线性代数方法解决实际问题的能力
-

第十章《线性代数》第三节课教案

教学项目

教学项目 特征值与特征向量

授课地点 多媒体教室

授课形式 线下教学

学情分析 学生已掌握矩阵运算和行列式，但对特征值与特征向量的理解还不够深入。学生在特征值的计算、特征向量的求解、几何意义理解方面需要重点指导。学生喜欢可视化与案例化教学，可借助现有交互课件和仿真实验激发学习兴趣。

教学目标

知识目标：使学生理解特征值与特征向量的概念、掌握特征值的计算方法。

能力目标：培养学生利用特征值与特征向量解决实际问题的能力。

素质目标：提高学生的数学抽象思维和工程应用能力，在工程场景中合理运用特征值方法。

教学重点 特征值与特征向量的概念、特征值的计算方法、特征值在工程中的应用。

教学难点及应对

难点：特征值的几何意义理解、特征向量的求解。

应对策略：通过具体的几何图形演示，分步骤讲解，辅以Lab10系列仿真实验和小组讨论，加深学生理解。

教学资源

教材：《高等数学》

媒体资源：课件《第10章线性代数》、Lab10系列仿真实验

环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑

教学方法

讲授法：讲解特征值与特征向量的概念和计算方法。

问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。

分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。

演示法：通过Lab10系列软件演示特征值与特征向量。

教学反思 需要关注学生对特征值概念的理解是否到位，如果发现学生存在困惑，应进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过特征值方法解决实际问题的能力，强化其应用意识。

教学过程

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2min)	【教师】清点上课人数，记录好考勤 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
复习回顾 (8min)	【教师】回顾上节课内容 1. 行列式的概念和计算方法 2. 线性方程组的矩阵表示 3. 克拉默法则的应用 【学生】回答教师提问，巩固上节课知识 【教师】检查作业完成情况，解答学生疑问	巩固上节课所学知识，为新课做准备

时间	主要教学内容及步骤	设计意图	
特征值与特征向量的概念(25min)	<p>【教师】讲解特征值与特征向量的定义 定义1 设A是n阶方阵, 如果存在非零向量v和标量λ, 使得$A v = \lambda v$ 则称λ是矩阵A的特征值, v是A的对应于特征值λ的特征向量。 【教师】讲解特征值与特征向量的几何意义 1. 特征向量: 在矩阵变换下方向不变的向量 2. 特征值: 特征向量在变换下的伸缩倍数 3. 特征值>1: 向量被拉伸 4. 特征值<1: 向量被压缩 5. 特征值<0: 向量被反向 【教师】讲解特征方程 $Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$ 因为$v \neq 0$, 所以$(A - \lambda I)v = 0$</p>	$A - \lambda I = 0$ <p>这个方程称为特征方程, 其解就是特征值。【教师】使用Lab10-7展示特征值与特征向量的几何意义【学生】观察特征向量的变换过程例1求矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。解: 特征方程为</p>	A - \lambda I
特征值的计算方法(25min)	<p>【教师】讲解特征值的计算步骤 1. 写出特征方程\$</p>	$A - \lambda I = 0$ <p>2. 展开行列式, 得到关于λ的多项式方程3. 解方程, 得到特征值4. 对每个特征值, 求对应的特征向量【教师】讲解特征向量的求解对于特征值λ_i, 求解齐次线性方程组$A - \lambda_i I \vec{v} = \vec{0}$【教师】讲解特征值的性质1.$n$阶矩阵有$n$个特征值 (重根按重数计算) 2. 特征值的和等于矩阵的迹: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{trace}(A)$3. 特征值的积等于矩阵的行列式: $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$</p>	A
特征值在工程中的应用(20min)	<p>【教师】讲解特征值在工程中的应用 1. 振动分析: 找到系统的固有频率 2. 稳定性分析: 判断系统的稳定性 3. 图像处理: 主成分分析 (PCA) 4. 网络分析: 社交网络、交通网络 5. 机器学习: 特征提取、降维 【教师】讲解具体应用案例 案例1: 桥梁振动分析 桥梁的振动方程可以表示为 $M\ddot{x} + Kx = 0$</p>	$K - \lambda M = 0$ <p>$06 - 2\lambda^2 - \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5$ 固有频率为$\omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = \sqrt{5}$ 【学生】完成特征值应用练习</p>	学习特征值在工程中的应用

时间	主要教学内容及步骤	设计意图
	<p>其中M是质量矩阵，K是刚度矩阵 通过求解特征值问题 $K\vec{v} = \lambda M\vec{v}$，可以得到桥梁的固有频率 案例2：图像压缩 在图像处理中，通过主成分分析（PCA）找到图像的主要特征 这些特征就是协方差矩阵的特征向量 【教师】使用Lab10-9展示特征值应用 【学生】观察特征值在实际问题中的应用 例5 某机械系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为</p> $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $K = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ <p>求系统的固有频率。 解：求解广义特征值问题 $K\vec{v} = \lambda M\vec{v}$ 即 $(K - \lambda M)\vec{v} = 0$ $K - \lambda M = \begin{pmatrix} 6 - 2\lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$ 特征方程为 \$</p>	
课堂测验 (10min)	<p>【教师】出几道测试题目</p> <ol style="list-style-type: none"> 求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量 判断矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值 <p>【学生】做测试题目 【教师】公布答案并讲解 解1：特征方程为 $(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$, 特征值为2和3 解2：特征方程为 $(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$, 即 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ 特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 对应特征向量为 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 解3：特征方程为 $(3 - \lambda)^2 = 0$, 特征值为3 (二重) 解4：特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征值为 $\pm i$ (复数)</p>	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况
课堂小结 (8min)	<p>【教师】总结本节课要点</p> <ol style="list-style-type: none"> 特征值与特征向量的概念 特征值的计算方法 特征值在工程中的应用 特征值方法的综合运用 <p>【学生】回顾知识点，提出疑问 【教师】解答学生疑问，布置课后作业</p>	巩固本节课所学知识

板书设计建议

左侧：特征值与特征向量的定义

中部：特征值的计算步骤

右侧：特征值应用案例

教学提示

- 鼓励学生截图Lab10模拟结果作为报告证据，提升数据说服力
- 引导学生在特征值计算中注意特征方程
- 结合工程案例，让学生体验特征值在工程中的重要作用
- 强调特征值方法在振动分析、图像处理中的重要作用
- 通过实际工程案例，培养学生运用特征值方法解决实际问题的能力
