

## 第五章《不定积分》讲义

### 学习目标：

1. 理解不定积分的概念和性质
2. 掌握基本积分公式
3. 掌握换元积分法
4. 掌握分部积分法
5. 培养积分计算能力

### 学习资源：

- 教材：《高等数学》第5章
- 课件：《第5章不定积分》
- 实验：Lab5-1 至 Lab5-4 仿真实验
- 练习：题库不定积分题

---

# 第一讲：不定积分

## 1.1 不定积分的概念

### 1.1.1 原函数的定义

**定义：**如果函数  $F(x)$  的导数是  $f(x)$ , 即  $F'(x) = f(x)$ , 则称  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数。

### 1.1.2 不定积分的定义

**定义：**函数  $f(x)$  的所有原函数称为  $f(x)$  的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

其中  $C$  是任意常数。

### 1.1.3 不定积分的性质

1.  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
2.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

## 1.2 基本积分公式

### 1.2.1 基本积分公式

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

## 1.3 换元积分法

### 1.3.1 第一类换元积分法

如果  $\int f(u) du = F(u) + C$ , 则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

### 1.3.2 第二类换元积分法

设  $x = \varphi(t)$ , 则

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$$

## 1.4 分部积分法

### 1.4.1 分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

## 1.5 典型例题

### 例题1：基本积分

求 $\int x^2 dx$ 。

解:  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

### 例题2：线性性质

求 $\int (x^3 + 2x + 1) dx$ 。

解:  $\int (x^3 + 2x + 1) dx = \int x^3 dx + \int 2x dx + \int 1 dx$

$= \frac{x^4}{4} + x^2 + x + C$

### 例题3：第一类换元

求 $\int (2x + 1)^3 dx$ 。

解: 设 $u = 2x + 1$ , 则 $du = 2dx$ ,  $dx = \frac{du}{2}$

$\int (2x + 1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

### 例题4：分部积分

求 $\int xe^x dx$ 。

解: 设 $u = x$ ,  $dv = e^x dx$ , 则 $du = dx$ ,  $v = e^x$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$

---

## 附录：常用公式汇总

### 基本积分公式

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$

### 换元积分法

- 第一类:  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$
- 第二类:  $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$

### 分部积分法

- $\int u dv = uv - \int v du$

## 学习建议

1. **理论学习**: 掌握基本概念和计算方法
2. **计算练习**: 多做典型例题和练习题
3. **实验操作**: 使用Lab5系列仿真实验
4. **工程应用**: 结合实际案例进行练习
5. **综合训练**: 提高解决复杂问题的能力