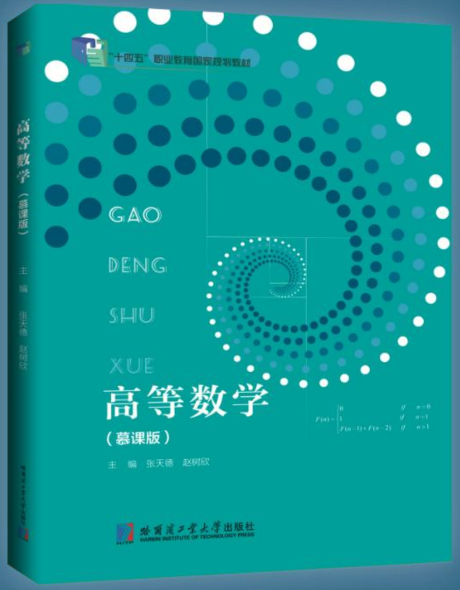
“十四五”职业教育国家规划教材



《高等数学》（慕课版）

主 编 张天德 赵树欣

哈尔滨工业大学出版社

高等数学（慕课版）

第 1 章　函数、极限与连续

主讲教师 |

学习目标与要求

○理解初等函数的概念,掌握基本初等函数的图像及性质,会求函数的定义域,会判别函数的奇偶性,能用函数及其图像性质解决简单的实际问题;

○了解反函数的求法及几种常见的数学模型;

○理解极限、连续的概念,会分析判断函数的极限是否存在,会讨论函数的连续性;

○掌握极限运算方法,会求各种类型的极限;

○能够应用马克思主义哲学观点与唯物辩证法理解有限与无限间的关系.

目录

- 1.1 函数
- 1.2 极限
- 1.3 极限的运算
- 1.4 两个重要极限与无穷小的比较
- 1.5 函数的连续性

part 1

1.1 函数

理论基础

集合与映射 → 函数的概念

函数的概念
- 常见分段函数
- 函数的特性
- 函数的运算
  - 四则运算
  - 复合运算

基本初等函数
- 图形要熟练
- 结合图形掌握特性

基本初等函数 + 四则运算、复合运算 → 初等函数

初等函数
- 有限次
- 一个表达式

（1）集合

定义1.1

- 我们常常研究某些事物组成的全体,例如一班学生、一批产品、全体正整数等,这些事物组成的全体都是**集合**,或者说,某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集. 通常用大写的拉丁字母表示，如 $A,B,C,\cdots$构成集合的每个事物或者对象叫做这个集合的元素，通常用小写的拉丁字母表示，如 $a,b,c,\cdots$

（2）常用数集及记法

- 非负整数集（自然数集）：全体非负整数的集合．记作 $N=\{0,1,2,\cdots\}$.
- 正整数集：非负整数集内排除 0 的集合，记作 $\mathbf{N}^{*}=\{1,2,3,\cdots\}$.
- 整数集：全体整数的集合，记作 $\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.
- 有理数集：全体有理数的集合，记作 $\mathbf{Q}=\{$整数与分数$\}$.
- 实数集：全体实数的集合，记作 $\mathbf{R}=\{$数轴上所有点所对应的数$\}$.

（3）元素对于集合的隶属关系

- 属于：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$.
- 不属于：如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$.

（4）集合中元素的特性

- 确定性：按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里，或者不在，不能模棱两可.
- 互异性：集合中的元素没有重复.
- 无序性：集合中的元素没有一定的顺序（通常用正常的顺序写出）

（5）集合运算

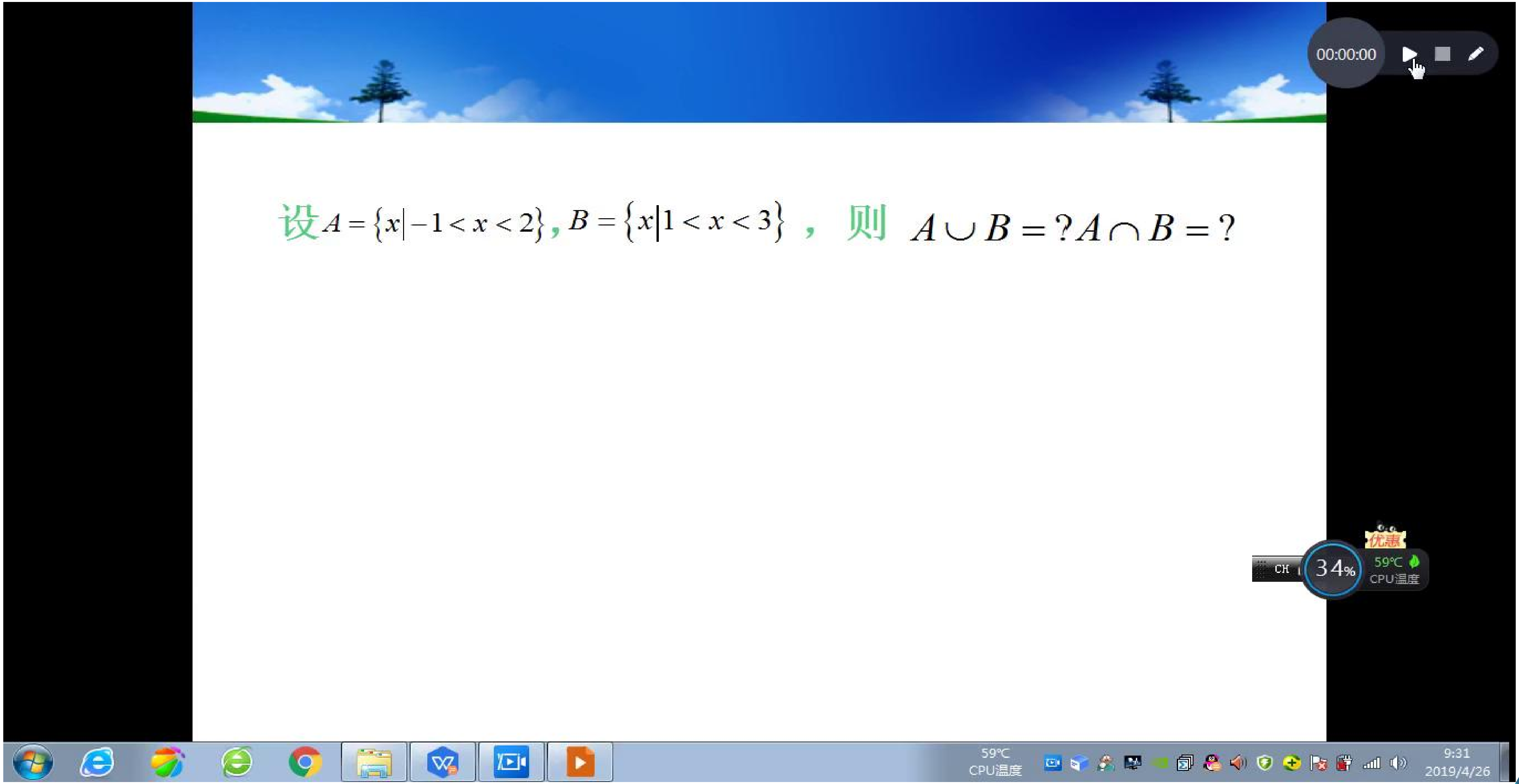
- 子集：如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素（若 $a \in A$ 则 $a \in B$ ），则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$；如果 $A \subseteq B$ ，并且 $A \neq B$ ，则称集合 A 称为集合 B 的真子集，记为 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$.
- 集合的相等：如果集合 A、B 同时满足 $A \subseteq B$ 、$B \supseteq A$ ，则$A=B$.
- 补集：设 $A \subseteq S$ ，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集，记为$\complement_S A$.
- 交集：一般地，由所有属于集合 A 且属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$.
- 并集：一般地，由所有属于集合 A 或属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$.

例1 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则$A\cup B$，$A\cap B$.

解 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A\cap B=\{3,4\}$

例2 设 A为某单位会英语的人的集合，B为会日语的人的集合，则 $A\cup B$，$A\cap B$.

解 $A\cup B=\{\text{会英语或日语的人}\}$ $A\cap B=\{\text{既会英语又会日语的人}\}$


00:00:00
设$A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cup B=?A\cap B=?$
优惠
CH
34%
59℃
CPU温度
59℃
CPU温度
9:31
2019/4/26

（1）区间

- 区间是常用的实数集．设 a 和 b 都是实数，且$a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，a 和 b 称为开区间(a,b)的端点.

- 数集$\{x|a\le x\le b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$. a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点.

- 类似地定义：$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$.$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开半闭区间.

- 数 $b-a$ 称为以上区间的长度．长度有限的区间为有限区间.

- 同样定义无限区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geq a\}$，$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geq a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leq b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$ (实数集).

（2）邻域：

- 设 a，δ 为两个实数，$\delta>0$，则不等式 $|x-a|<\delta$的解集称为点 a 的 δ 邻域．点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径．即点 a 的δ邻域，就是以 a 为中心以 δ 为半径的开区间$(a-\delta,a+\delta)$ ．

- 若把邻域$(a-\delta,a+\delta)$ 中的中心点 a 去掉，就称它为点 a 的去心 δ 邻域，可表示为 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ ，或 $0<|x-a|<\delta$ ．

定义1.2

- 设 x , y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，若对于每一个数$x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，都有唯一确定的变量 y 与之对应，那么，我们就说 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x),\ x\in D$

- 其中，x 称为自变量，y 称为因变量；自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的值域.

思考

1．以函数的实质为“关系”出发点，通过联系自己周边各种关系对比函数的概念.

２．结合自身经历，勾勒自己的人生曲线，并分析其中的“自变量”和“因变量”．

- 函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素．判断两个函数是否相同,即看两个函数定义域和对应法则是否相同,而与其变量用什么字母表示无关，如 $y=x^2, s=t^2$ 为同一个函数；而 $y=\ln x^2, y=2\ln x$ 不是同一个函数．

函数的表示方法

解析法

图像法

列表法

求 $y=\sqrt{x-3}+\ln(5-x)$ 的定义域

（1）单调性

设函数 $y=f(x), x\in I$ ，若对任意两点 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时，总有：

① $f(x_1)<f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的，区间 I 称为单调增加区间；

② $f(x_1)>f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的，区间 I 称为单调减少区间.

- 单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数,单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图1.1所示；
单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图1.2所示.

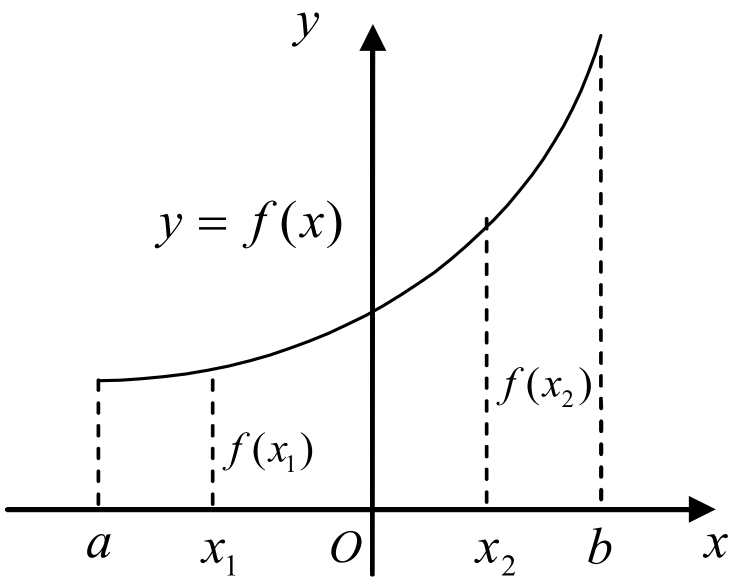


图1.1

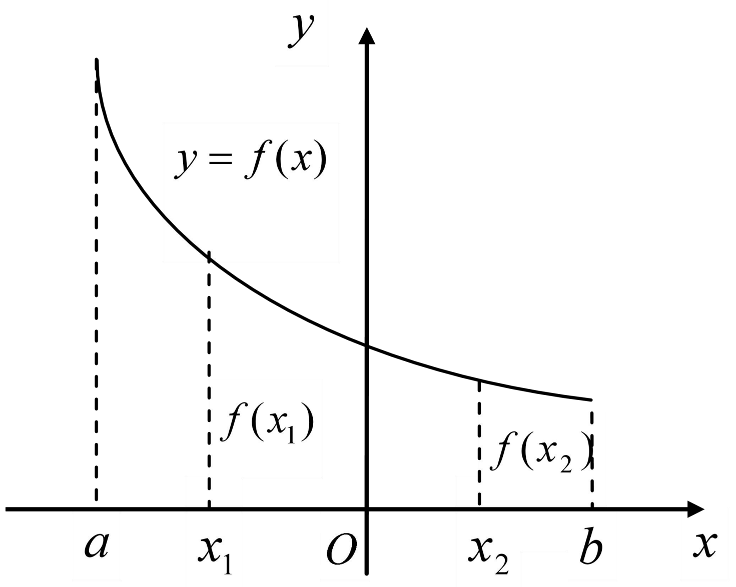


图1.2

（2）奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的 x 都有：

① $f(-x)=f(x)$ ，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

② $f(-x)=-f(x)$ ，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

- 偶函数的图像关于 y 轴对称，如图1.3；奇函数的图像关于原点对称, 如图1.4．如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数,称为非奇非偶函数.

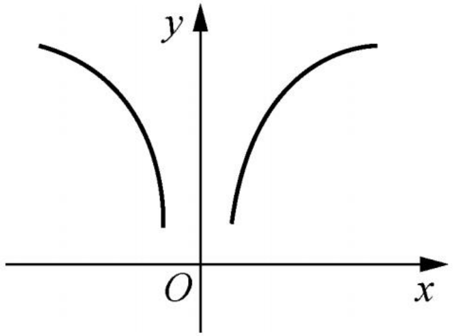


图 1.3

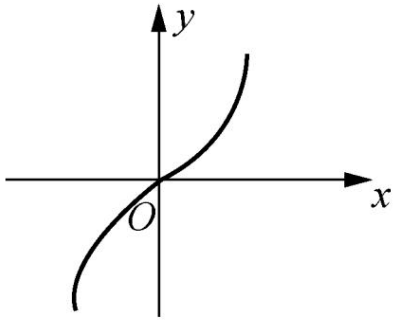


图 1.4

2. 函数的特性

例3 判别函数$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的奇偶性.

解 函数的定义域为：$\dfrac{1-x}{1+x}>0$，即 $-1<x<1$，

又 $f(-x)=\ln\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$

所以函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

（3）有界性

设函数 $y=f(x), x\in D$ ，如果存在一个正数 M，使得对任意 $x\in D$ ，均有 $|f(x)|\le M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的,即有界函数$y=f(x)$的图像夹在$y=-M$ 和$y=M$ 两条直线之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 存在正数 $M=1$ ，恒有 $|\sin x|\le 1$ 成立，所以函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；

而函数 $y=x^2$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 不存在一个这样的正数 M，使 $|x^2|\le M$ 恒成立，所以函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的.

（4）周期性

设函数 $y=f(x),x\in D$ ，如果存在常数 $T\neq 0$ ，对任意 $x\in D$ ，且 $x+T\in D$ ，$f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 是它的一个周期，通常我们所说函数的周期是指其最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 、$y=\cos x$ ，周期 $T=2\pi$ ；$y=\tan x$ ，周期 $T=\pi$.

（1）反函数的概念

定义1.3

- 设函数 $y=f(x),\ x\in D,\ y\in M$（D 是定义域，M 是值域）．若对于任意一个 $y\in M$ ，D 中都有唯一确定的 x 与之对应，这时 x 是以 M 为定义域的 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y),y\in M$ ．
- 习惯上往往用 x 表示自变量，y 表示函数．为了与习惯一致，将反函数 $x=f^{-1}(y),\ y\in M$ 的变量对调字母 x、y，用 $y=f^{-1}(x),\ x\in M$ 表示.
- 在同一直角坐标系下，$y=f(x),x\in D$ 与反函数 $y=f^{-1}(x),\ x\in M$ 的图像关于直线 y=x 对称.

（2）反函数存在性及求法

定理1.1

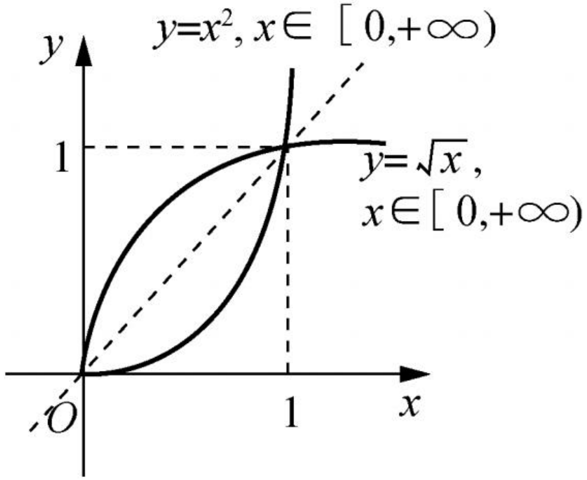
- 单调函数必有反函数,且单调增加(减少)的函数的反函数也是单调增加(减少)的.

例如，函数$y=x^2$在定义域$(-\infty,+\infty)$上没有反函数（它不是单调函数），

但在$[0,+\infty)$上存在反函数．由$y=x^2, x\in[0,+\infty)$，求得$x=\sqrt{y}, y\in[0,+\infty)$

再对调字母x、y，得其反函数为$y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$

它们的图像关于直线$y=x$对称．如图1.5所示.



3. 反函数

求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

01 从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=f^{-1}(y)$；

02 将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x、y 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

4. 复合函数

定义1.4

- 设两个函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ ，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ ，得到函数 $y=f(\varphi(x))$. 这个新函数 $y=f(\varphi(x))$ 叫做由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，$u=\varphi(x)$ 称为内层函数，$y=f(u)$ 称为外层函数，u 称为中间变量.

注意

- 不是任何两个函数都能复合成复合函数．由定义可知，只有当**内层函数** $u=\varphi(x)$ 的**值域**与**外层函数** $y=f(u)$ 的**定义域**的**交集非空**时，这两个函数才能复合成复合函数．

- 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数．因为内层函数 $u=-x^2$ 的值域是 $(-\infty,0]$，而外层函数 $y=\ln u$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，显然，$(0,+\infty)\cap(-\infty,0]=\varnothing$，函数 $y=\ln(-x^2)$ 无意义．

例4 指出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=\sin e^{x}$；（2）$y=\ln\ln x$；（3）$y=\tan^{2}\dfrac{x}{2}$.

解（1）令 $u=e^{x}$，则 $y=\sin u$．所以 $y=\sin e^{x}$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=e^{x}$ 复合而成;

（2）令 $u=\ln x$，则 $y=\ln u$．所以 $y=\ln\ln x$ 是由 $y=\ln u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成;

（3）令 $v=\dfrac{x}{2}$，$u=\tan v$，则 $y=u^{2}$. 所以 $y=\tan^{2}\dfrac{x}{2}$ 是由 $y=u^{2},u=\tan v,v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成;

（1）基本初等函数

- 常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

（2）初等函数

定义1.5

- 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

分段函数:函数用解析法表示时,两变量间的对应法则有时候不能用一个解析式给出,可能会出现对于自变量的某一部分数值,对应法则用某一解析式,对于另一部分数值用另一解析式,这种函数称为分段函数.分段函数的定义域是各段函数取值范围的并集.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{当}-1<x<1\text{时} \\ 3x^2-2, & \text{当}1\le x\le 2\text{时} \end{cases}$$ 是分段函数,其定义域为 $D=(-1,1)\cup[1,2]=(-1,2]$.

点击查看
理发师悖论

显函数与隐函数:一个函数如果能用 x 的具体表达式表示,则称此函数为显函数,如 $y=2x+3$,$y=e^{3x}$ 等是显函数;如果函数是通过方程来确定的,即函数 $y=f(x)$ 隐藏在方程 $F(x,y)=0$ 中,则称此函数为隐函数,如由方程,$x+y^3=1$,$x^2+y^2-e^{x+y}=3\sin y$ 等确定的函数为隐函数.

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x+4}$;

(2) $y=\frac{1}{x-3}+\sqrt{16-x^2}$;

(3) $y=\ln(x^2-2x-3)$.

2. 求下列函数的反函数.

(1) $y=x^3-1$;

(2) $y=\sqrt{x+1}$.

3. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^2(x^3+1)$；　　(2) $y=\arctan(2x+3)$.

4. 某省公布的居民用电阶梯电价听证方案如下：

第一档	第二档	第三档
月用电量 210 度以下，每度电价格为 0.52 元	月用电量 210 度至 350 度，每度电价格比第一档提价 0.05 元	月用电量 350 度以上，每度电价格比第一档提价 0.30 元

若某户月用电量 400 度，则需交电费多少元？

part 2

1.2 极限

定义1.6

- 对于数列$\{y_n\}$，当n无限增大($n\to\infty$)时，y_n无限趋近于一个确定的常数A，则称A为n趋于无穷大时数列$\{y_n\}$的极限(或称数列收敛于A)，记作$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$或$y_n \to A\ (n\to\infty)$；
- 此时，也称数列$\{y_n\}$的极限存在；否则，称数列$\{y_n\}$的极限不存在（或称数列是发散的）.

例1 讨论数列 $y_n = q^n$ 的极限情况.

解 当 $q=1$ 时，$y_n=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$；

当 $q=-1$ 时，$y_n=(-1)^n$，数列在 1 与 -1 间跳动，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在；

当 $|q|<1$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$y_n=q^n\to 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$；

当 $|q|>1$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$y_n=q^n$ 的绝对值是趋于无穷大的，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$（不存在）.

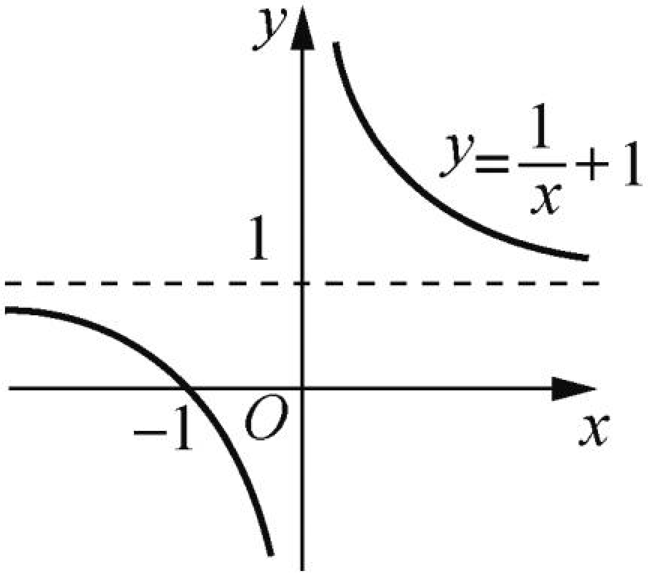
综上讨论，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ \text{不存在}, & q=-1 \\ \infty, & |q|>1 \end{cases}$.

1.当 x 的绝对值无限增大（记为 $x\to\infty$ ）时，函数 $f(x)$ 的极限

数列是一种特殊形式的函数，把数列极限的定义推广，可以给出函数极限的定义.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ ，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 1 ，如图1.6所示.

当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+1\to1$ ，我们称常数1为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}+1)=1$.



定义1.7

- 设函数 $y=f(x)$，当 x 的绝对值无限增大($x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

- 此时也称极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，否则，称极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

- **说明**：$x\to\infty$ 是指 x 沿着 x 轴向正负两个方向趋于无穷. x 取正值且无限增大，记为 $x\to+\infty$，读作 x 趋于正的无穷大； x 取负值且绝对值无限增大，记为 $x\to-\infty$，读作 x 趋于负的无穷大. 即 $x\to\infty$ 同时包含 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$.

根据定义，得出下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}c=c$ (c为常数)．

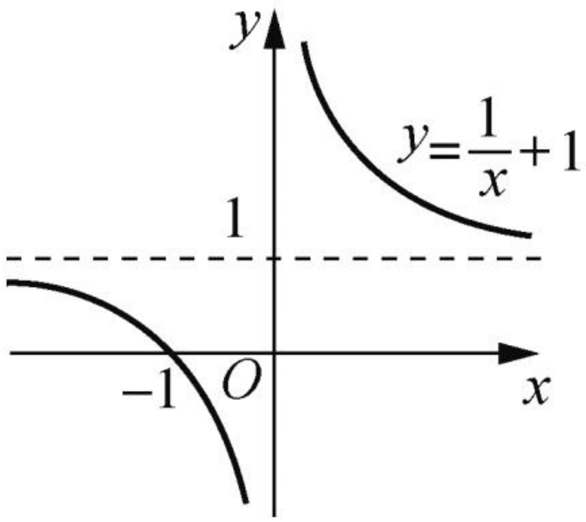
- 在研究实际问题的过程中，有时只需考察$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时函数$f(x)$的极限情形，因此，我们只需将定义中的$x\to\infty$分别换成$x\to+\infty$或$x\to-\infty$，即可得到$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时函数$f(x)$的极限定义，分别记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ .$$

注意：极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

例2 考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 是否存在？



解 根据函数图像可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在；

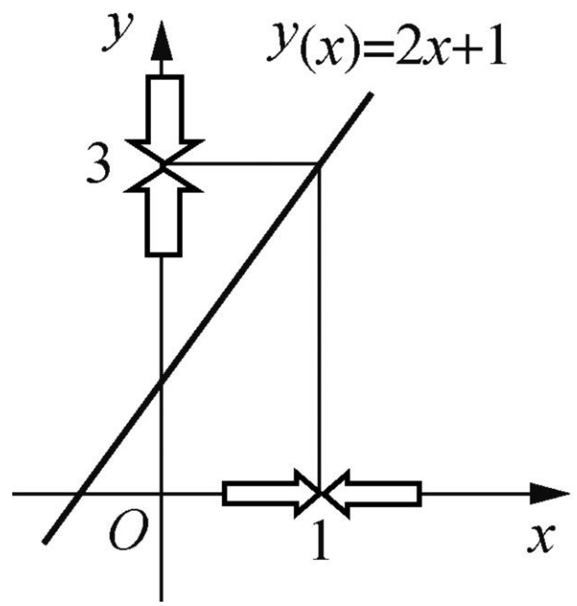
同理，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在.

- **极限的几何意义**：若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）存在，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线．例如，如图1.6所示，因为极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}+1)=1$，所以直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}+1$ 的水平渐近线．又如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\arctan x$ 的两条水平渐近线.

2.当 $x \to x_0$（读作 x 趋于 x_0 ）时，函数 $f(x)$ 的极限

首先我们考察当 x 无限趋近于 1 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的变化趋势.

如图1.7所示，可以直观地看出，当 x 从左、右两侧无限地趋近于 1 时，函数 y 从下、上两侧无限地趋近于 3，即当 $x\to1$ 时，$f(x)=2x+1\to3$．则称 3 为 $x\to1$ 时函数 $f(x)=2x+1$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$.



定义1.8

- 设函数 $y=f(x)$，当 x 无限的接近于 x_0 (但 $x\neq x_0$)时时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限．记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.
- 这时也称极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，否则称极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

根据定义，得下列函数的极限:

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ； （2） $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (c为常数) .

- 由于 $x \to x_0$ ，同时包含了 $\begin{cases} x \to x_0^- & (\text{从}x_0\text{的左侧接近于}x_0) \\ x \to x_0^+ & (\text{从}x_0\text{的右侧接近于}x_0) \end{cases}$ 两种情况，我们把 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 称为 $x \to x_0$ 时的左极限，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 叫做 $x \to x_0$ 时的右极限.

定义1.9

- 如果自变量 x 仅从小于（或大于）x_0 的一侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数A，则称 A 为当$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左（右）极限，记作：$\lim\limits_{\substack{x \to x_0^- \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A$.

- 根据定义1.8和定义1.9，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与它的左右极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+)}} f(x)=A$ 有如下关系：

- 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在且等于 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例3 考察下列函数当 $x\to 1$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在？

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　（2）$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$；　（3）$f(x)=\begin{cases} 2x, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$

解（1）因为 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, (当$x\ne 1$时)

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

（2）该函数为分段函数，x=1 为分段点，因为在 x=1 的两侧函数的解析式不一样，所以考察极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 时，必须分别考察它的左右极限情况.

$$\left.\begin{array}{r}\text{左极限} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1, \\ \text{右极限} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$$

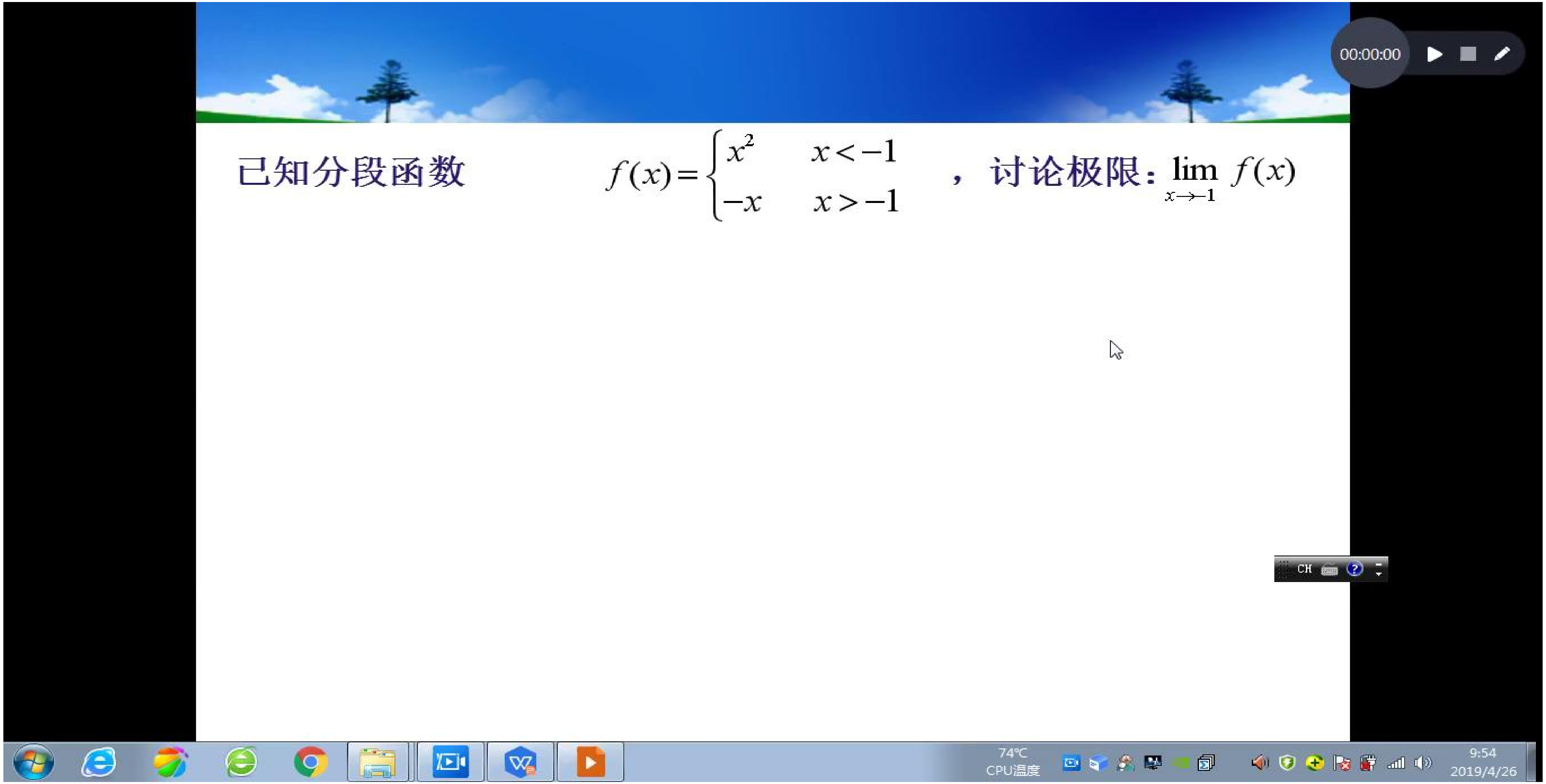
所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

（3）该函数也为分段函数，x=1 为分段点.

因为左极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2$ ，右极限 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$ ，左、右极限都存在但不相等，即 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

二、函数的极限



已知分段函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ -x & x>-1 \end{cases}$ ，讨论极限：$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$
00:00:00
CH
74℃
CPU温度
9:54
2019/4/26

1. 无穷小无穷大概念

无穷小定义

极限为零的变量称为无穷小量，简称无穷小.

也可以这样描述：在自变量的某种变化过程中，变量 $f(x)$ 的极限值是零，则称变量 $f(x)$ 为在该变化过程中的无穷小. 例如:

因为极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以变量 $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小；

因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以变量 $\sin x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小；

因为极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以变量 $x-1$ 是 $x\to 1$ 时的无穷小.

注意：

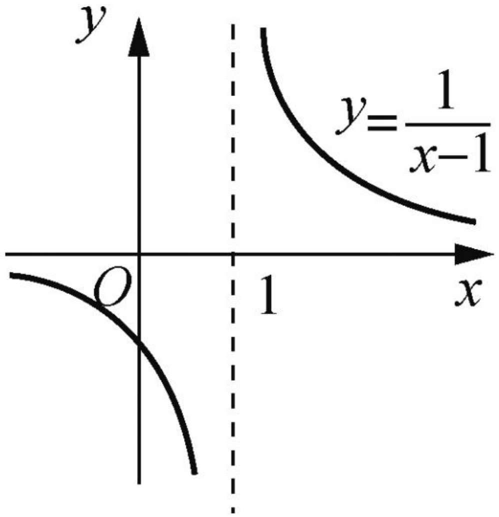
（1）判断一个变量是否为无穷小，除了与变量本身有关外，还与自变量的变化趋势有关．如上例，变量 $y=x-1$，当 $x\to 1$ 时为无穷小；而当 $x\to 2$ 时，$y\to 1$，极限是一个非零常数．因而，不能笼统地称某一变量为无穷小，必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷小．

（2）在实数中，因为0的极限是0，所以数0是无穷小，除此之外，即使绝对值很小很小的常数也不是无穷小．

无穷大定义

- 绝对值无限增大的变量称为无穷大量，简称无穷大．即若 $\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为该变化趋势下的无穷大．

例如，由图1.8所示，当 $x \to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷大，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.



从图像上看，当 $x \to 1$ 时，曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 向上向下都无限延伸且越来越接近直线 $x=1$，通常称 $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的无穷间断点，直线 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的垂直（直线 $x=1$ 垂直于 x 轴）渐近线.

与无穷小类似，一个变量是否为无穷大，与自变量的变化过程有关．不能笼统地说某一变量为无穷大，必须明确指出变量在何种变化过程中是无穷大；也不能把一个绝对值很大的常数说成无穷大.

由上例不难看出，**在同一变化过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零的无穷小的倒数是无穷大.**

2. 无穷小与函数极限的关系

定理

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$

即具有极限的函数与它的极限值之间相差的仅仅是一个无穷小量.

在此，不予以证明. 另外该定理对$x \to \infty$时也是成立的.

3. 无穷小的性质

对同一变化过程中的无穷小与有界函数，它们具有下列性质：

性质1 有限个无穷小的代数和是无穷小；

性质2 有限个无穷小的乘积是无穷小；

性质3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

例4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

点击查看

兔子能追上乌龟吗？

解 当 $x\to 0$ 时， x 是无穷小，

而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$ ，

因此，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 仍为无穷小，

故 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

1. 填空题.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=$________，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=$________，$\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=$________；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=$________，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=$________，$\lim\limits_{n\to\infty}\pi=$________；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=$________，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$________，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=$________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} |x|, & x<0 \\ \dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x<1, \\ x^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$

试讨论在 $x=0$ 处和 $x=1$ 处函数 $f(x)$ 的极限是否存在?

3. 在传播学中有这样一个规律：在一定条件下，谣言的传播可以用下面的函数关系来表示

$$p(t)=\frac{1}{1+a\mathrm{e}^{-kt}}$$

$p(t)$ 表示的是 t 时刻人群中知道这个谣言的人数比例，其中 a 与 k 都是正数.

求 $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

part 3

1.3 极限的运算

定理（四则运算法则）

设在同一变化过程中，$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则:

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；特别有

（i）$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$, ($C$ 为常数)；

（ii）$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$, ($n$ 为正整数)；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$,(其中$B\neq 0$)；

极限符号 lim 的下边不表明自变量的变化过程，意思是说对 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 所建立的结论都成立。

说明

① 运用法则求极限时，参与运算的函数必须有极限，否则将会得到错误的结论；

② 法则（1）和（2）均可以推广到有限个函数的情形.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2x + 3)$.

解 根据法则（1）和（2）$\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2x + 3) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 2x + \lim\limits_{x\to 2} 3$

$$= \lim_{x\to 2} x^2 - 2\lim_{x\to 2} x + 3$$

$$= 2^2 - 2\times 2 + 3 = 3 = (\lim_{x\to 2} x)^2 - 2\times 2 + 3$$

由此例可知，当$x \to x_0$ 时，多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的极限值就是这个多项式在点 x_0 处的函数值.

即 $\lim\limits_{x \to x_0}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = a_0x_0^{\ n} + a_1x_0^{\ n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n$.

例2 求 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+5}$.

解 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+5} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(2x+1)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2+5)} = \dfrac{2\times 2+1}{2^2+5} = \dfrac{5}{9}$

对于有理分式函数 $F(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$，其中 $p(x)$、$q(x)$ 均为 x 的多项式，并且 $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) \neq 0$ 时，要求 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}$，只需将 $x=x_0$ 代入即可.

- 以上例题在进行极限运算时，都直接使用了极限的运算法则.但有些函数做极限运算时，不能直接使用法则。如下面例3：

例3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

分析 当 $x\to 2$ 时，分母的极限为零，在这里不能直接运用商的极限法则.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5\neq 0$，故 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x+1}=0$ ，

由无穷小与无穷大的关系得: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2-4}=\infty$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{6}$

- 当分子分母的极限均为零，这类极限称为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，不能直接运用商的极限法则. 先要对函数进行变形整理(分解因式或者有理化).当 $x\to a$ 时，必有 $x\neq a$ ，所以可以先约去零因式 $x-a$（极限为零的因式称为零因式）. 化为非 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式再求极限.

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{3x^2+5x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{3x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{4+0}{3+0-0}=\dfrac{4}{3}$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+1}{3x^2+5x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+1}{3x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{0+0}{3+0-0}=0$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x}{3x^2+5}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x}{3x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\dfrac{3}{x}}{3+\dfrac{5}{x^2}}=\infty$

- 当分子分母的极限均为 ∞ ，这类极限称为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 一般采用分子、分母同除以分母中变化最快的量（即分母的最高方幂）的方法来转化，使分母的极限存在，并且不为零，然后运用法则运算.

综上可得结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m, \quad (n,m\in N)\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2})$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}$ $=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

此类极限称为 $\infty-\infty$ 型未定式．不能直接运用和差的极限法则，需要将函数变形．

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1}=\frac{1}{2}$

此题属于$0\cdot\infty$型未定式，需要将函数变形.

例11 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 把 $\dfrac{\sin x}{x}$ 看做 $\sin x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 的乘积. 当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，

而 $|\sin x|\le 1$ ，根据无穷小与有界量的乘积仍为无穷小，得:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

定理（复合函数的极限）

- 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

  若 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ ，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A$.

- 特别地，当 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 时，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(u_0)$ ，此时又可写为 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$. 即在一定条件下可以交换函数与极限的运算次序.

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ ，$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}^{0} = 1$ ，

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sin x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x} = \mathrm{e}^{0} = 1$.

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-2x^2+5}{2x^3+3x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+1}{x^2-3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

part 4

1.4 两个重要极限与无穷小的比较

1. 第一重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解 令 $3x=u$,则当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$， 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\right)=3\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=3\times 1=3$$

说明 （第一重要极限的特征）

① $\dfrac{0}{0}$ 型；

②分子记号 sin 后面的表达式与分母的表达式形式上完全相同.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1\times 2=2$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\tan 5x}\cdot\dfrac{3}{5})=1\times 1\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}$

2. 第二重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$

说明 （第二重要极限的特征）

①当 n 无限增大时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 呈“1^∞”型；

②括号内是1加一个极限为零的变量，第一项是1，第二项是括号外指数的倒数.

例6 求 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n$.

解 因为 $n\to\infty$ 时，$\frac{2}{n}\to 0$ ，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}\times 2}=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2=[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2=\mathrm{e}^2$$

事实上，第二重要极限的**一般形式**：

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x\times(-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{3x^{2}+5x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\times 3}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{3}=e^{3}$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}\right)^{x}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^{-\frac{x}{3}\times(-3)}}=\frac{e}{e^{-3}}=e^{4}$$

定义

设 α 与 β 是同一变化过程中的两个无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$ 且 $\alpha\neq0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ ，则称 β 是 α 的高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$ ，则称 β 是 α 的低阶的无穷小；

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq0$ ，则称 β 是 α 的同阶无穷小；

特别地，当 $C=1$ ，即 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小．记为 $\alpha\sim\beta$ ，读作 α 等价于 β .

二、无穷小的比较

例10 当 $x \to 0$ 时，比较下列各组无穷小.

(1) $1-\cos 2x$ 与 x^2　　　　(2) $\ln(1+x)$ 与 x

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=2$ ，

所以，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 与 x^2.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ ，

所以，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

定理（等价无穷小替换性质）

在自变量的同一变化过程中，若 α, α', β, β' 均为无穷小，且$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

常用的等价无穷小有：

当 $x \to 0$ 时，

(1) $\sin x \sim x$　(2) $\tan x \sim x$　(3) $\arcsin x \sim x$　(4) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

(5) $\ln(1+x) \sim x$　(6) $e^x - 1 \sim x$　(7) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

例11 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+2x)}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\sin x\to0$，$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$ ，$\ln(1+2x)\sim2x$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

例12 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\sin x\to0$，$\tan x\sim x$ ，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

注意： 一般地，在运用等价无穷小代换时，不能用于和差运算.

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\tan 2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 3x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)\tan x}{1-\cos 2x}$.

part 5

1.5 函数的连续性

1. 函数连续性的概念

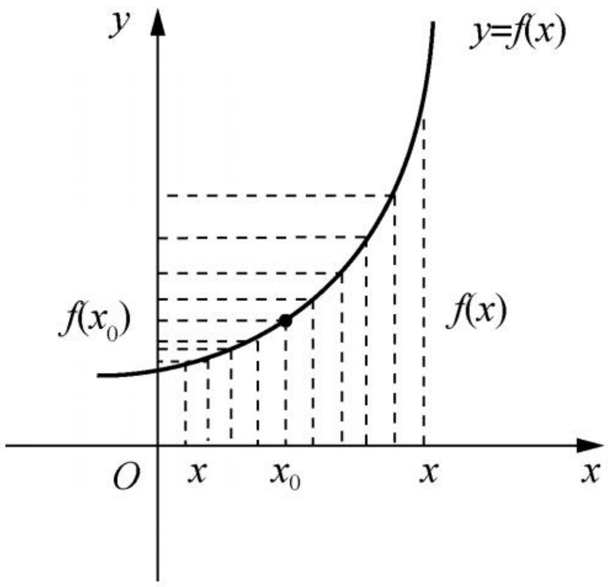
- 函数$y=f(x)$，当自变量 x 在 x_0 处有增量Δx，即x 是由 x_0变到$x_0+\Delta x$时，此时函数$f(x)$ 相应地从$f(x_0)$ 变到 $f\left(x_0+\Delta x\right)$，则 $f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$称为函数 $f(x)$ 在 x_0处的相应增量，记作Δy，即 $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$.

2. 定义(2)（点连续）

- 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量 x 在点 x_0 处的增量$\Delta x\to 0$时，相应地函数增量$\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 定义(2)（点连续）

- 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.



注意：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件：

(1) 函数值 $f(x_0)$ 存在；(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例1 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & 当x\neq 1时，\\ 3, & 当x=1时.\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处是否连续.

解 由题设知，$f(1)=3$，又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，

但 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\neq f(1)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，我们就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

如果右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，我们就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

3. 定理

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**既左连续也右连续**.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & 当x\le 1时 \\ x^2+2, & 当x>1时 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 因为 $f(1)=3$，

又 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3=f(1)$，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续；

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2)=3=f(1)$，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处右连续；

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

4. 区间连续

- 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续．此时称函数 $f(x)$ 为区间 (a, b)（或 $[a, b]$）上的连续函数．区间 (a, b)（或 $[a, b]$）称为函数的连续区间．

定义（间断点）

- 如果曲线 $y=f(x)$，在 x_0 点处断开，我们称这条曲线不连续，$x=x_0$ 点为曲线 $y=f(x)$ 的间断点. 即点连续定义(2)中的三个条件至少有一条不满足的点称为间断点.

2. 间断点的分类

(1) 左、右极限都存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，称 x_0 为第一类间断点.

① 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ ，或者 $f(x)$ 在x_0处无定义，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，称 x_0 为第二类间断点.

第二类间断点中，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ ），则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.此时直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

例3 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\le 0\text{时},\\ x+1, & \text{当}x>0\text{时}.\end{cases}$ 求间断点.

解 这里 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

所以 x=0 是跳跃间断点.

例4 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$，求间断点，并说明其类型.

解 因为 $x=\pm 1$ 时函数没有意义，所以 $x=\pm 1$ 为它的间断点；

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$,

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+1}=\infty \text{ ,}$$

所以，x=1 是 $f(x)$ 的可去间断点， x=−1 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

1. 定理 基本初等函数在其**定义域内**都是连续的.

2. 定理（四则运算法则）

如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 点连续，则 $f(x)\pm g(x)$ ，$f(x)\cdot g(x)$ ，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 处也连续.

3. 定理（复合函数的连续性）

如果函数 $u=g(x)$ 在 x_0 点连续，$g(x_0)=u_0$ ，而且函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 点连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f[g(x_0)]$.

4. 定理（反函数的连续性）

设函数 $y=f(x)$ 在某区间上连续，且单调增加(减少)，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应的区间上连续且单调增加(减少).

5. 定理（初等函数的连续性）

初等函数在其定义区间上连续.

说明： 该结论为求初等函数的极限提供了一个简便的方法，只要 x_0 是初等函数 $f(x)$ 定义区间内的一点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.即将**函数的极限运算转化为求函数值的问题**.

1. 定理（最值定理）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取得最大值和最小值．也就是说存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$使 $f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$，且对任意的 $x \in [a, b]$，都有 $m \le f(x) \le M$.

2. 定理（有界定理）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$上连续，m 和M 分别为$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，则对于任何介于 m 和M 的常数 c，(a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$.

推论（零点定理）

- 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$， 则在 (a, b)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

注意：若将上述定理中的**闭区间**换成**开区间**结论一般**不对**.

例5 证明方程 $e^{2x}-x-2=0$ 至少有一个小于 1 的正实根.

证 设 $f(x)=e^{2x}-x-2$， 区间$[a,b]=[0,1]$，显然函数 $f(x)$在闭区间 $[0,1]$上连续. 又因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=e^2-3>0$，$f(0)f(1)<0$ ，

根据零点定理，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ ， 使 $f(\xi)=0$ ，

故方程 $e^{2x}-x-2=0$ 至少有一个小于 1 的正实根.

1. 填空题.

(1)设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $f(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)+2]=$______.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4x-5}$ 的连续区间是________，其间断点是________，其中可去间断点是________，无穷间断点是________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin kx}{2x}, & x<0\\ (2x+3)^2, & x\geq 0\end{cases}$，则常数 k 为何值时该函数为连续函数.

一、主要知识点

函数、基本初等函数、初等函数、极限、无穷小与无穷大、无穷小的比较、函数连续性与间断点.

二、主要数学思想和方法

1. 函数的思想.

函数思想是用运动和变化的观点、集合与对应的思想，去分析和研究数学问题中的数量关系，建立函数关系或构造函数，去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决.

2. 极限思想.

极限思想是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学思想，是近代数学的一种重要思想. 简单地说极限思想即是用无限逼近的方式从有限中认识无限，用无限去探求有限，从近似中认识精确，用极限去逼近准确，从量变中认识质变的思想.

三、主要题型及解法

1. 求函数定义域.

2. 求复合函数的复合过程.

3. 求极限.

四则运算法则；“$\frac{0}{0}$”型，先消去分子分母中共同的零因子；“$\frac{\infty}{\infty}$”型，同除以分母中变化最快的量. 复合函数的极限，两个重要极限，有界量与无穷小的乘积仍为无穷小，等价无穷小的替换，函数的连续性定义.

4. 求函数在一点处的连续性：利用连续定义的三个条件，逐一验证.

5. 求函数的间断点及间断点类型：初等函数的间断点处在使得函数无意义的点；分段函数的间断点可能在分段点处．根据间断点处左右极限的情况对间断点进行分类.

谢谢观看

主讲教师 |