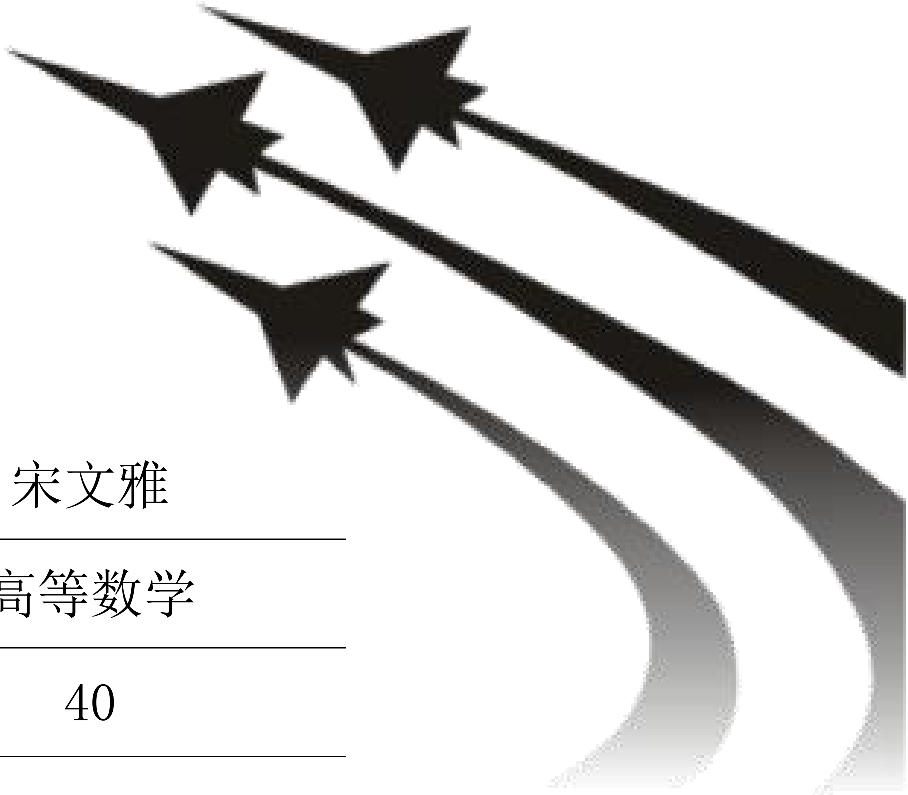
西安航空职业技术学院
XI'AN AERONAUTICAL POLYTECHNIC INSTITUTE

教 案 本



授课教师：宋文雅

课程名称：高等数学

授课课时：40

授课班级：24 液压一、二、三班，24 飞制二班

20 24 ～20 25 学年第 2

教学单位：通识学院

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">不定积分的概念与性质</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td>授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生普遍具有一定的代数基础，了解基本的函数知识，但对于积分的概念和计算不够熟悉。学生学习动力强，但可能对不定积分的计算方法和应用缺乏直观理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识目标：使学生理解不定积分的定义和基本性质。
能力目标：培养学生利用不定积分的基本公式和直接积分法解决实际问题的能力。
素质目标：提高学生的逻辑思维能力和解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">不定积分的基本概念与性质。
不定积分的基本公式法则和直接积分法。</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点：不定积分的基本公式法则和直接积分法。
应对策略：通过具体的例题演示，分步骤讲解，辅以练习题和小组讨论，加深学生理解。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《高等数学》
媒体资源：PPT 演示、积分计算软件演示
环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">讲授法：讲解不定积分的基本概念、性质及其计算方法。
问答法：鼓励学生提问，通过问题引导学生思考和深入理解。
分组练习法：学生分组完成练习题，互相讨论和解答。
演示法：通过软件演示不定积分的图形意义和计算过程。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">需要关注学生对不定积分换元法和分部积分法的理解和应用是否到位，如果发现学生存在困惑，应在下一课时进行针对性的复习和讲解。同时，要注意培养学生通过积分解决实际问题的能力，强化其应用意识。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>
■ 【教师】讲解原函数与不定积分的概念，并通过例题介绍其应用
在运动学中常常会遇到相反的问题，即已知变速直线运动的质点在时刻 t 的瞬时速度
$$v=v(t),$$
求质点的位移函数
$$s=s(t),$$
即已知函数的导数，求原来的函数．这种问题在自然科学和工程技术问题中都普遍存在．为了便于研究，引入以下定义．
定义 1　如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$，即对任意 $x\in I$，都有
$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$
那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数．
例如，因在变速直线运动中，$s'(t)=v(t)$，所以位移函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数．再如，因 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数；因 $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (x>0)$，所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数．
一个函数具备什么样的条件，才一定存在原函数呢？下面给出一个定理．
定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上一定存在可导函数 $F(x)$，使对任意 $x\in I$ 都有
$$F'(x)=f(x).$$
简言之，连续函数一定有原函数．由于初等函数在其定义区间上都是连续函数，所以初等函数在其定义区间上都有原函数．
定义 2　设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上的原函数，则函数 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作
$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$
其中，记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量．
例 1　求函数 $y=3x^2$ 的不定积分．
解　因为 $(x^3)'=3x^2$，即 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，所以
</td><td>学习原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C .$$

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的不定积分.

解　因为 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $\sqrt{x}$ 是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 的一个原函数，所以

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \sqrt{x} + C .$$

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

解　当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C \ (x>0) .$$

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(-x) + C \ (x<0) .$$

综上所述，得到 $\int \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$.

■ **【学生】掌握常微分方程的基本概念**

■ **【教师】讲解不定积分的几何意义，并通过例题介绍其应用**

当积分常数 C 取不同值时，函数 $f(x)$ 的所有原函数的图形为一族曲线，称为 $f(x)$ 的积分曲线族. 这族曲线可以由其中的任意一条曲线沿 y 轴方向上下平移而得到，且对应同一横坐标的点 x 处的切线互相平行，如图 4-1 所示.

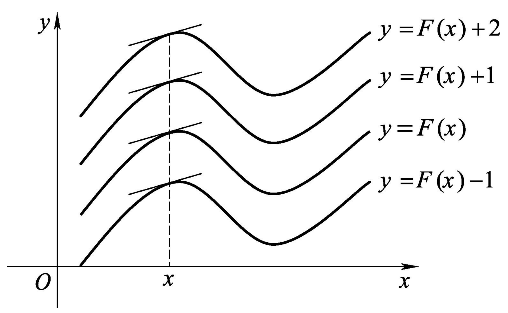


图 4-1

例 4　设曲线通过点 $(1,3)$ 且其上任意一点处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，按题设，曲线上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为

$$y' = f'(x) = 2x ,$$

<table>
<tr><td></td><td>即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，因为 $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$，所以曲线方程为
$$y = x^2 + C,$$
将 $x=1$，$y=3$ 代入，得 $C=2$.
因此，所求曲线方程为
$$y = x^2 + 2.$$
例 5　在自由落体运动中，已知物体下落的时间为 t，求 t 时刻的下落速度和下落距离.
解　设 t 时刻的下落速度为 $v=v(t)$，则加速度 $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$（其中 g 为重力加速度）.
因此
$$v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int g\mathrm{d}t = gt + C,$$
当 $t=0$ 时，$v(0)=0$，所以 $C=0$．于是下落速度 $v(t)=gt$.
设下落距离为 $s=s(t)$，则 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t)$．所以
$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int gt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + C,$$
当 $t=0$ 时，$s(0)=0$，所以 $C=0$．于是下落距离 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.
■ 【学生】理解不定积分的几何意义</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂测验（10 min）</td><td>■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解（30 min）</td><td>■ 【教师】讲解不定积分的基本性质
由不定积分的定义可直接推出下列性质：
性质 1　（1）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$；
（2）$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$.
■ 【教师】讲解不定积分的基本积分公式，并通过例题介绍其应用
由此可见，微分运算与求不定积分的运算互为逆运算.
根据这一性质，我们把基本导数公式表加以逆推便可得到基本积分公式.</td><td>学习不定积分的基本性质和基本积分公式。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

（1）$\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数);

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$；

（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；（4）$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$；

（5）$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$；（6）$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

（7）$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

（8）$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；

（9）$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（10）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C$；

（11）$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$；

（12）$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

（13）$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

以上 13 个基本积分公式，是求不定积分的基础，必须牢记. 下面举例说明积分公式（2）的应用.

例 6　求 $\int \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = \int x^{-5}\mathrm{d}x = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$.

例 7　求 $\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$.

例 8　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$.

解　$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$.

下面给出积分公式（5）的应用.

例 9　求 $\int 2^{x}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C$.

由导数的线性运算性质

$$\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) + g(x)$$

可得不定积分的线性运算法则：

性质 2 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k 是常数， $k \neq 0$）.

性质 3 $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

例 10 求 $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$.

解 $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx = \int (x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - 1)dx$

$$= \int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + C .$$

例 11 求 $\int (e^x - 3\cos x)dx$.

解 $\int (e^x - 3\cos x)dx = \int e^x dx - 3\int \cos x dx = e^x - 3\sin x + C$.

例 12 求 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

解 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$.

例 13 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$.

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$.

$$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx = \arctan x + \ln|x| + C .$$

例 14 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$.

解 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx$

$$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C .$$

	例 15　求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$. 解　$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C$. 例 16　求 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$. 解　$\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$ 利用积分公式和性质直接积分，我们称之为直接积分法．利用直接积分法计算函数积分时，有时还要先对被积函数进行拆项再积分，这称之为拆项积分法． ■ 【学生】理解不定积分的基本性质，掌握基本积分公式	
课堂测验（10 min）	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结（5 min）	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义，不定积分的基本性质，基本积分公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 4.1	总结知识点，巩固印象
教学反思	本节课效果不错，激发了学生的学习兴趣，并引导学生进行探究。本节课中鼓励学生主动参与活动，使其获取了积极的体验，并让学生主动提出解决问题的途径，教师则扮演学生学习的组织者、参与者、帮助者、引导者和促进者，使学生真正成为学习的主体。	

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">不定积分的换元积分法（1）</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线 下 教 学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生普遍具有一定的代数基础，了解基本的函数知识，但对于积分的概念和计算不够熟悉。学生学习动力强，但可能对不定积分的计算方法和应用缺乏直观理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识技能目标：
（1）能熟练地利用第一、二类换元积分法计算不定积分。
（2）记住常见的凑微分形式。
思政育人目标：
通过学习不定积分的换元积分法，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">教学重点：第一、二类换元积分法的相关定理</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">教学难点：用第一类换元法计算不定积分</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《高等数学》
媒体资源：PPT 演示、积分计算软件演示
环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">多媒体演示：利用积分计算软件演示复杂积分的换元求解过程，加深学生对换元积分法的理解和记忆。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课效果不错，激发了学生的学习兴趣，并引导学生进行探究。本节课中鼓励学生主动参与活动，使其获取了积极的体验，并让学生主动提出解决问题的途径，教师则扮演学生学习的组织者、参与者、帮助者、引导者和促进者，使学生真正成为学习的主体。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>

■ 【教师】讲解第一类换元法，并通过例题介绍其应用

定理 1（第一类换元法） 设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

第一类换元积分法又称为凑微分法，主要解决复合函数不定积分的计算问题.

例 1 求不定积分 $\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

解 $\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}\cdot(3x)'\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x)=\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{u}+C$，

将变量 $u=3x$ 代入，即得

$$\int 3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+C.$$

例 2 求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=2x+1$，于是

$$\int (2x+1)^{10}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int u^{10}\mathrm{d}u=\frac{1}{22}u^{11}+C=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C.$$

例 3 求 $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x$.

分析

$$\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}(3+2x)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}(3+2x).$$

解 令 $u=3+2x$，则

$$\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

结论 例 2、例 3 可以总结出的凑微分形式为

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b).$$

例 4 计算不定积分 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

分析 可以考虑 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$.

</td><td>学习第一类换元法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

解 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$.

例 5 求 $\int x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x$.

分析 类似于例 4，可以考虑 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(1+x^3)$.

解 $\int x^2\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\mathrm{d}(1+x^3)=\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$.

结论 例 4、例 5 可以总结出的凑微分形式为

$$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b).$$

通常情况下，除了上述两种凑微分形式，还有很多其他情形．下面给出一些常用的凑微分公式，利用它们可以灵活地进行积分计算．

（1）$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$；（2）$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x}$；

（3）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$；（4）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$.

（5）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$；（6）$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$.

（7）$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$；（8）$\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cot x$.

（9）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$；（10）$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.

例 6 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 7 求 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\frac{x}{a}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

例 8 求 $\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a)-\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C .$$

例 9　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C .$$

例 10　求 $\int\frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=\frac{2}{3}\int\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}(3\sqrt{x})$$

$$=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}+C .$$

下面介绍含三角函数的不定积分计算.

例 11　求 $\int\tan x\mathrm{d}x$.

解　$$\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x$$

$$=-\ln|\cos x|+C .$$

类似可得 $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

例 12　求 $\int\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解　$$\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\int\mathrm{d}x-\int\cos 2x\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}2x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C .$$

例 13　求 $\int\sin^3 x\mathrm{d}x$.

解　$$\int\sin^3 x\mathrm{d}x=\int\sin^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-\int(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x$$

$$=-\int\mathrm{d}\cos x+\int\cos^2 x\mathrm{d}\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C .$$

例 14　求 $\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

解　$$\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x=\int\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}\sin x$$

课堂测验

$$=\int(\sin^2 x-\sin^4 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C\ .$$

例 15　求 $\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x$.

解　$$\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C\ .$$

例 16　求 $\int \csc x\mathrm{d}x$.

解　$$\int \csc x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\frac{x}{2}=2\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$=2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\ .$$

因为

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x\ ,$$

所以，所求不定积分又可表示为

$$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C\ .$$

例 17　求 $\int \sec x\mathrm{d}x$.

解　$$\int \sec x\mathrm{d}x=\int\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+C\ .$$

■　【学生】掌握第一类换元法的应用

课堂测验 **(10 min)**	■　【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■　【学生】做测试题目 ■　【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■　【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生

		对本节课知识的印象
课堂测验 **(10 min)**	■ **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■ **【学生】做测试题目** ■ **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■ **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 **(5 min)**	■ **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了原函数与不定积分的概念，不定积分的几何意义，不定积分的基本性质，基本积分公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ **【学生】总结回顾知识点** ■ **【教师】布置课后作业：习题 4.1**	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">不定积分的换元积分法（2）</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线 下 教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生普遍具有一定的代数基础，了解基本的函数知识，但对于积分的概念和计算不够熟悉。学生学习动力强，但可能对不定积分的计算方法和应用缺乏直观理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识技能目标：
（1）能熟练地利用第一、二类换元积分法计算不定积分。
（2）记住常见的凑微分形式。
思政育人目标：
通过学习不定积分的换元积分法，培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；引导学生养成独立思考和深度思考的良好习惯。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">教学重点：第一、二类换元积分法的相关定理</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">教学难点：用第一类换元法计算不定积分</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《高等数学》
媒体资源：PPT 演示、积分计算软件演示
环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">多媒体演示：利用积分计算软件演示复杂积分的换元求解过程，加深学生对换元积分法的理解和记忆。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课效果不错，激发了学生的学习兴趣，并引导学生进行探究。本节课中鼓励学生主动参与活动，使其获取了积极的体验，并让学生主动提出解决问题的途径，教师则扮演学生学习的组织者、参与者、帮助者、引导者和促进者，使学生真正成为学习的主体。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
知识讲解 (70 min)	■ **【教师】讲解第二类换元法，并通过例题介绍其应用** 定理 2（第二类换元法）　设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$， $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有换元公式 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C$， 其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数. 用到第二类换元法的不定积分主要有两种类型：（1）简单无理函数的类型（例 18、例 19）；（2）三角函数代换法类型（例 20、例 21）. 例 18　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$. 解　令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=2\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$ $=2(t-\ln\|1+t\|)+C=2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$. 例 19　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$. 解　被积函数中出现了两个不同的根式，为了同时消去这两个根式，可以作如下代换. 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6$， $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，从而 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ $=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$. 结论　一般地，如果积分具有以下形式，则其可以进行如下相应代换： （1） $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$； （2） $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\mathrm{d}x$，可令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$，其中 p 是 m， n 的最小公倍数. 运用这些代换可以将被积函数中的根号去掉，将被积函数转化为有理函数. 例 20　求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.	学习第二类换元法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

解　设 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，那么

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t\text{，}\quad \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t\text{，}$$

于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C\text{．}$$

结合具体图像（见图 4-2）可以得出，

$\sin t=\dfrac{x}{a}$， $\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，

则 $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$， $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C\text{．}$$

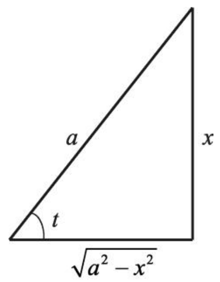


图 4-2

例 21　求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$．

解　设 $x=a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，那么

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=a\sqrt{1+\tan^2 t}=a\sec t\text{，}$$

$$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t\text{，}$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\text{．}$$

结合具体图像（见图 4-3）可以得出， $\sec t=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，

$\tan t=\dfrac{x}{a}$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C\text{，}$$

其中 $C=C_1-\ln a$．

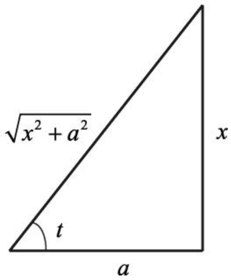
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

图 4-3
补充公式:
（14） $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；
（15） $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；
（16） $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；
（17） $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；
（18） $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$；
（19） $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；
（20） $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$；
（21） $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$；
（22） $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$.
■ 【学生】掌握第二类换元法的应用</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>问题讨论
(10 min)</td>
<td>■ 【教师】组织学生讨论以下问题
1．第一类换元法的思想是什么，步骤有哪些？
2．说明第一类换元法的各种常见形式.
3．第二类换元积分法有哪几种常见类型?
■ 【学生】讨论、发言</td>
<td>通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解</td>
</tr>
<tr>
<td>课堂测验
(10 min)</td>
<td>■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目</td>
<td>通过测试，了解学生对知识点的掌</td>
</tr>
</table>

	■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	握情况，加深学生对本节课知识的印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">不定积分的分部积分法</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线 下 教 学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生已经学习了基本的不定积分概念、性质及基本积分公式。分部积分法是不定积分中的一个重要计算方法，它适用于积分表达式为两个函数乘积的形式。学生可能在理解分部积分法的原理和应用上存在困难，需要通过具体的实例和练习来加深理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识与技能：理解分部积分法的原理，掌握其计算步骤和方法。
过程与方法：能够熟练运用分部积分法解决相关的积分问题，提高解决问题的能力。
情感态度与价值观：通过解决实际问题，增强学生对数学的兴趣和数学学习的自信心。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">分部积分法的原理和公式</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点：如何正确选择 u 和 dv 以利于计算。应对策略：通过多个具体例题展示不同情况下如何选择 u 和 dv，并总结规律和技巧。设置分组讨论环节</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">电脑、投影仪、多媒体课件、教材</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">讲授法、问答法、讨论法、演示法、实践法</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
第一节课		
考勤 **(2 min)**	■ **【教师】清点上课人数，记录好考勤** ■ **【学生】班干部报请假人员及原因**	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
知识讲解 **(23 min)**	■ **【教师】讲解分部积分法，并通过例题介绍其应用** 定理 1　设函数 $u=u(x)$， $v=v(x)$ 具有连续的导数，则 $$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$ 证明　由微分公式 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ 两边积分得 $$uv=\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u ,$$ 移项后得 $$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$ 我们把公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 或 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$ 称为分部积分公式. 例 1　求 $\int \ln x\mathrm{d}x$. 解　令 $u=\ln x$， $v=x$，由分部积分公式，可得 $$\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\mathrm{d}\ln x=x\ln x-\int \mathrm{d}x=x\ln x-x+C .$$ 例 2　求 $\int \arctan x\mathrm{d}x$. 解　令 $u=\arctan x$， $v=x$，由分部积分公式，可得 $$\begin{aligned}\int \arctan x\mathrm{d}x&=x\arctan x-\int x\mathrm{d}\arctan x\\&=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C .\end{aligned}$$ 例 3　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$. 解　令 $u=x$， $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$，即 $v=\sin x$，则 $$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$$	学习分部积分法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

例 4　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x$ ， $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$ ， $v=\mathrm{e}^x$ ，则

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C .$$

例 5　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=x^2\mathrm{e}^x-2(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x)+C\\&=\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)+C .\end{aligned}$$

结论　当被积函数是幂函数与正（余）弦或指数函数的乘积时，可将幂函数设为 u，正（余）弦或指数函数设为 v.

例 6　求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解　$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{2}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)+C\\&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C .\end{aligned}$$

例 7　求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x&=\int\arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+C .\end{aligned}$$

结论　当被积函数是幂函数与对数函数或反三角函数的乘积时，可将对数函数或反三角函数设为 u，幂函数设为 v.

例 8　求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解法一　$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

	$$=e^x\sin x-\int\cos x de^x$$ $$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx,$$ 所以 $$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$ 解法二 $$\int e^x\sin x dx=\int e^x d(-\cos x)=e^x(-\cos x)+\int\cos x d(e^x)$$ $$=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=-e^x\cos x+\int e^x d\sin x$$ $$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\sin x de^x$$ $$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx,$$ 所以 $$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$ 例 9　求 $\int e^{\sqrt{x}}dx$. 解　令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$. $$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=\int 2tde^t=2te^t-2\int e^t dt$$ $$=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C.$$ ■ 【学生】掌握分部积分法的应用	
问题讨论 (10 min)	■ 【教师】组织学生讨论以下问题 1．可以用分部积分法的类型有哪些？ 2．对于各种不同类型的积分，如何选择 u，v？ 3．举例说明循环法适用的不定积分的类型． ■ 【学生】讨论、发言	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 (10 min)	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
	第二节课	
知识讲解 (20 min)	■ 【教师】讲解有理函数的积分，并通过例题介绍其应用 形如	学习有理函数和三角

	$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$ 的函数称为**有理函数**，其中 m 和 n 都是非负整数；$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 都是实数，并且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$．当 $n<m$ 时，称这个有理函数为**真分式**；当 $n\geqslant m$ 时，称这个有理函数为**假分式**. 假分式总可以化成一个多项式与一个真分式之和的形式．例如， $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$ 求真分式的不定积分时，如果分母可因式分解，则先因式分解，然后化成部分分式再积分. **例 1** 求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$. **解** 设 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$，则 $$A(x-3)+B(x-2)=(A+B)x-3A-2B=x+3,$$ 即 $$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=3,\end{cases}$$ 解得 $A=-5$，$B=6$，所以 $$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$ $$=-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x$$ $$=-5\ln\lvert x-2\rvert+6\ln\lvert x-3\rvert+C.$$ **例 2** 求 $\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$. **解** 设 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$，则 $$A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)=1,$$ $$(A+C)x^2+(B-2A-C)x+A=1,$$ 即 $$\begin{cases}A+C=0,\\B-2A-C=0,\\A=1,\end{cases}$$ 解得 $B=1$，$C=-1$．所以 $$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$ $$=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$	函数有理式的积分。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

例 3　求 $\int\frac{x+1}{x^2-x-12}\mathrm{d}x$.

解　设 $\frac{x+1}{x^2-x-12}=\frac{x+1}{(x-4)(x+3)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}$，则

$$A(x+3)+B(x-4)=(A+B)x+3A-4B=x+1,$$

即

$$\begin{cases}A+B=1,\\3A-4B=1,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{5}{7}$， $B=\frac{2}{7}$，所以

$$\int\frac{x+1}{x^2-x-12}\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\left(\frac{5}{x-4}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7}\ln|x-4|+\frac{2}{7}\ln|x+3|+C.$$

■　**【教师】讲解三角函数有理式的积分，并通过例题介绍其应用**

例 4　求不定积分 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$ 则

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u+\int\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$$=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

说明　并非所有三角函数有理式积分计算都要通过变换化为有理函数的积分．例如，

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}(1+\sin x)=\ln(1+\sin x)+C.$$

■　**【学生】掌握有理函数和三角函数有理式的积分**

问题讨论	■　**【教师】组织学生讨论以下问题**	通过课堂讨论，活跃课

(10 min)	1．如何将有理假分式化为有理真分式？ 2．如何拆分有理真分式？有何方法和规律？ ■ 【学生】讨论、发言	堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 (10 min)	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 (5 min)	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了分部积分法、有理函数的积分、三角函数有理式的积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 4.3、习题 4.4	总结知识点，巩固印象
教学反思	本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。	

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="6">不定积分知识的复习</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="6">学生已掌握基本的不定积分概念和基本积分公式，需要通过系统复习来巩固知识点，提高解题能力。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="6">知识目标：复习和巩固不定积分的基本概念、性质及基本积分公式
能力目标：提高学生运用各种积分方法解决综合题的能力
素质目标：培养学生的数学思维能力和自主复习能力</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="6">不定积分基本公式的综合运用
复杂积分的解题思路和方法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="6">综合性积分题目的解题技巧
多种积分方法的灵活运用</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="6">教材：《高等数学》
媒体资源：PPT 课件、习题集
环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="6">复习方法：系统梳理知识点，总结解题方法
练习方法：分层次进行针对性练习
互动方法：师生互动，生生讨论
归纳方法：及时总结典型题型的解题思路</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="6">注意观察学生掌握程度，及时调整复习节奏。重视查漏补缺，强化重点难点。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td colspan="2">教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

```
```

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2 分钟)	■ 【教师】清点上课人数，记录考勤情况 ■ 【学生】报告缺勤人员及原因	掌握学生的出勤情况，为后续复习调整做准备
复习引入 (5 分钟)	■ 【教师】回顾不定积分的基本概念 ■ 【学生】参与互动，回答基础问题 基本概念： 1. 原函数与不定积分的关系 2. 不定积分的几何意义	帮助学生回顾基础知识，为深入复习做准备
知识梳理 (15 分钟)	■ 【教师】系统复习基本积分公式： 1.$\int kdx = kx +$ 2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} +$ 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert +$ 4. $\int e^x dx = e^x +$ 5. $\int \sin x\, dx =- \cos x +$ 6. $$∫ \ cos x dx = \ sin x + C$$ 换元积分和分部积分 换元积分法： 1. 当被积函数是复合函数时，$\int f(ax+b)$，$u = ax +$ ，$du =$，$\frac{1}{a}\int f(u)$*进行计算。这种方法* 2. $\int f(g(x))g'(x)$*的积分*，$u = g(x)$，$du = g'(x)$， $\int f(u)$。*这种方法称为凑微分法* 3. 当被积函数是两个函数的乘积，且这两个函数都容易找到原函数时，可以考虑使用第二换元法，即令其中一个函数为新的变量，从而简化积分过程。但这种方法通常涉及到较为复杂的代数变换，需要谨慎处理。 分部积分法： 对于乘积形式的积分$\int u$，*的原函数都容易求得，*$\int u\,dv =$ $uv - \int v$ *进行求解。其中，的乘积，*$\int v$的不定积分。这种方法特别适用于被积函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等基本初等函数的乘积时。 1. 对于三角函数的积分，可以利用三角恒等变换简化积分过程。例如，积$\int \tan x$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\int \frac{\sin x}{\cos x}$，*进而使用换元积* 2. *对于含有根号的积分，*$\int$ $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可以考虑使用三角代	系统整理基本公式，夯实复习基础

	换，例$x = a\sin$ ，从而将根号内的式转化为$a\cos$ ，简化积分过程。 3. 对于分式函数的积分，可以尝试将分式分解为部分分式，然后分别对每个部分分式进行积分。例如，对于$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$，可以先将分式分解为$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$，然后通过比较系数求出A$$、$$B和C的值，最后分别对每个部分分式进行积分。 4. 对于含有指数和对数的复合函数积分，可以考虑使用对数微分法。例如，积分$$\int \frac{dx}{x\ln x}$$，可以先对函数两边取自然对数，然后对两边求导，从而简化积分过程。 ■ 【学生】记录要点，标注重难点	
方法总结 (20 分钟)	■ 【教师】复习主要积分方法： 1. 第一类换元法 2. 第二类换元法 3. 分部积分法 ■ 【学生】整理各种方法的适用条件和解题步骤	强化不同积分方法的理解和应用
典型例题 (25 分钟)	■ 【教师】讲解典型例题： 例 1： $\int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$ *例2：* $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$ *例1：* $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5}\, dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$ *例2：* $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{x} + C$ 例 3： 首先化简被积函数： $x^{2\sqrt{x}} = x^{\frac{5}{2}}$ *然后进行积分：* $\int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$ *新增例题：* *例4：* $$∫ \ frac{1}{1 + e^x}dx$$ $t = 1 + e^{\cdot}\ dt = e^x dx = (t-1)$ $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt$ $= \ln\lvert t-1\rvert - \ln\lvert t\rvert + C = \ln\left\lvert \frac{e^x}{1+e^x} \right\rvert + C$	通过典型例题，巩固各种解题方法

*例*5：`$$∫ \ cos^2xdx$$`

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ *则*

$\int \cos^2 x dx = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

*例*6：

$\int \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1} dx$

$u = e$，$du = e^{x}$

$\int \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1} dx = \int \dfrac{1}{u^2+1} du = \arctan(u) + C$

$= \arctan(e^{x}) + C$

*例*7：$\int \dfrac{dx}{x\ln x}$

$\ln(\ln x)$，*然后对两边求导数*，$\dfrac{1}{x\ln x}$，

$\int \dfrac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

*例*8：$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

这是一个标准的反三角函数积分，可以直接得到结果

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

*例*9：$\int \dfrac{dx}{x^2-1}$

$(x-1)(x+1)$，*因*

$\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\int \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right) dx = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$

*例*10：$\int \sin^2 x dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，

$\int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

*例*11：$\int \dfrac{dx}{x^2+4}$

这是一个基本的反双曲函数积分，可以直接得到结果

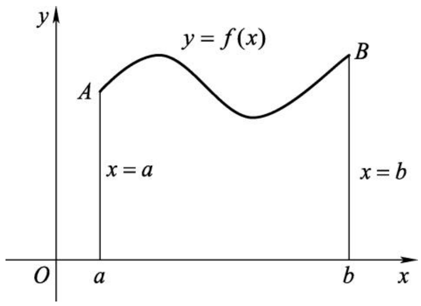
$\int \dfrac{dx}{x^2+4} = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

*例*12：$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

	这是一个反双曲函数积分，$x = \tanh(t)$，$dx = \operatorname{sech}^2(t)$，$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{sech}^2(t)} = \operatorname{sech}(t)$，因 ∫⍰{dx}{√{x^2 + 1}} = ∫⍰{"{sech}^2(t)}{"{sech}(t)}dt = ∫"{sech}(t)dt = ln |"{sech}(t) + tanh (t)| + C $\operatorname{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$和$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$，可以进一步简化为 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+1}\right\| + C$ 例 13：$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 这是一个基本的反三角函数积分，可以直接得到结果 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$ 例 14：$\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ $\ln(\ln x)$，然后对两边求导数，$\frac{1}{x \ln^2 x}$， $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$ 例 15：$\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$ $x(x-2)$，因 $\int \frac{dx}{x^2-2x} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right) dx = \ln\|x\| - \ln\|x-2\| + C$ $= \ln\left\|\frac{x}{x-2}\right\| + C$	
练习检测 (15 分钟)	■ 【教师】布置练习题，巡视指导 ■ 【学生】独立完成练习，互相讨论 ■ 【教师】及时总结常见错误，指导纠正	检验学生掌握程度，及时发现和解决问题
总结提升 (8 分钟)	■ 【教师】归纳本节复习重点： 1. 基本积分公式的熟练应用 2. 各种积分方法的灵活运用 3. 复杂题目的解题思路 ■ 【学生】整理笔记，梳理知识点	系统总结，强化记忆，提升理解

教学项目	定积分的概念及性质（1）		
授课地点	多媒体教室	授课形式	线下教学
学情分析	先行知识：学生应已经掌握了函数、导数、极限等基础数学概念，这对于理解定积分至关重要。 知识差距：识别学生在先行知识上的具体差距，如对极限理解不深，导数概念模糊等，以便在教学中给予特别强化。		
教学目标	知识技能目标： （1）理解定积分的概念。 思政育人目标： 通过生活中常见的不规则图形面积，引导学生学习定积分的概念，使学生体会到数学是源于生活的，是对实际问题的抽象产生的，不是脱离实际生活的；培养学生的逻辑思维、辩证思维和创新思维能力；树立学生实事求是、一丝不苟的科学精神。		
教学重点	教学重点：定积分的概念		
教学难点及应对	学生可能难以理解定积分的几何意义。 抽象的概念如极限、无穷小量的和可能对学生来说难以直观理解。 使用多媒体教学资源，如动画和图形，直观展示定积分的几何意义和计算过程。 通过具体的例子，如计算不规则图形的面积，帮助学生理解定积分的应用。 分步骤讲解，先从简单例子开始，逐步引导到复杂的概念。		
教学资源	多媒体课件：包含定积分的定义、性质、计算方法，以及实际应用场景的动画演示。 实例演示：准备一些实际的不规则图形面积问题，让学生通过分割、逼近的方式理解定积分的几何意义。 在线工具：引导学生使用数学软件或在线计算工具进行定积分的计算练习。		
教学方法	讲授法：讲解定积分的基本概念、性质和计算公式。 案例分析法：通过分析实际问题，如物理、工程和经济学中的应用，来讲解定积分的应用。 互动讨论：鼓励学生提问，围绕难点进行小组讨论，教师及时给予反馈。 实践操作：通过实际操作计算不规则图形的面积，加深对定积分的理解。		
教学反思	本节课对学困生的“困难点”抓得不够准，也不够全面，导致部分学困生在课堂练习中对一些学过的知识仍把握不好。在今后的教学中，应抓准每一个学生的“困难点”，制定出科学合理的辅导计划。用足够的爱心和耐心树立学生学习的自信和兴趣，从根本上解决问题。		

授课教师（签字）		教研室主任（签字）		教学单位审查意见	

主要教学内容及步骤	设计意图
■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤 ■ 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
■ 【教师】通过例题讲解引出定积分的定义 1．曲边梯形的面积 由非负连续曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$， $x=b$ 及 x 轴所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧 $y=f(x)$ 称为曲边，如图 6-1 所示．  图 6-1 下面讨论如何求这种曲边梯形的面积 A． 如果曲边梯形的曲边是一条水平直线，这时，曲边梯形就变成了矩形，它的高是常量，因此，它的面积可按 矩形面积 = 底 × 高 来计算．但曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是变动的，故它的面积不能直接按上述公式来计算． （1）细分：在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$， 把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$， 它们的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$． （2）近似求和：经过每一个分点做平行于 y 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形．在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i，以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积近似替代第 i 个小曲边梯形面积，把这样得到的 n 个小矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即 $A\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$． （3）取极限：记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，于是每个小曲边梯形的宽度趋于零，相当于令 $\lambda\to 0$．所以，曲边梯形的面积为	学习定积分的定义，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

这样，既给出了曲边梯形面积的定义，又提供了一个计算曲边梯形面积值 A 的具体方法.

2．变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的非负连续函数，计算在这段时间内物体所经过的路程 S .

如果是匀速直线运动，其路程可按

$$路程=速度\times时间$$

（1）细分：在 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2 ,$$

把时间区间 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n] ,$$

各小段时间长依次为

$$\Delta t_1=t_1-t_0 , \Delta t_2=t_2-t_1 , \cdots , \Delta t_n=t_n-t_{n-1} .$$

相应地，各段时间内物体经过的路程依次为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$.

（2）近似求和：在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i \ (t_{i-1}<\tau_i<t_i)$，以 τ_i 时刻的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度，进而得到部分路程 ΔS_i 的近似值，即

$$\Delta S_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \ (i=1, 2, \cdots, n) .$$

于是这 n 段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程 S 的近似值，即

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \ .$$

（3）取极限：记 $\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，当 $\lambda\to 0$ 时，取上述和式的极限，即得变速直线运动路程

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \ .$$

■ **【教师】讲解定积分的定义，并通过例题介绍其应用**

定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b ,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n] ,$$

各小段区间的长依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0 , \Delta x_2=x_2-x_1 , \cdots , \Delta x_n=x_n-x_{n-1} .$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一个点 $\xi_i \ (x_{i-1}<\xi_i<x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i=1, 2, \cdots, n)$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，这时我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间.

根据定积分的定义可知，曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ ;$$

变速直线运动的路程为

$$S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t\ .$$

那么，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足什么条件时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积呢？可以证明，闭区间上的连续函数或仅有有限个第一类间断点的有界函数都是可积的. 在此，不做深入讨论.

定积分的几何意义：在区间 $[a,b]$ 上，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；当 $f(x)\leqslant 0$ 时，由曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x\ ,$$

在几何上表示上述曲边梯形面积的负值；当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，如果约定在 x 轴上方的图形面积赋予正号，在 x 轴下方的图形面积赋予负号，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 之间，在 x 轴上、下方各部分图形面积的代数和，如图 6-2 所示，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0\ .$$

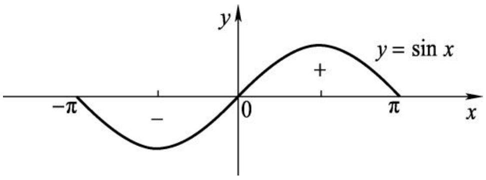


图 6-2

例 1　利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上可积，其值与区间 $[0,1]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关．为方便计算，不妨把 $[0,1]$ 分成 n 等份，分点为 $x_i=\frac{i}{n}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$；这样，每个小区间的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$；$\xi_i$ 取相应小区间的右端点，即 $\xi_i=x_i$，如图 6-3 所示，故

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

当 $\lambda\to 0$ 时（即 $n\to\infty$ 时），由定积分的定义得

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

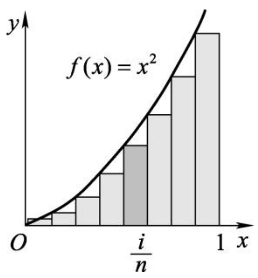


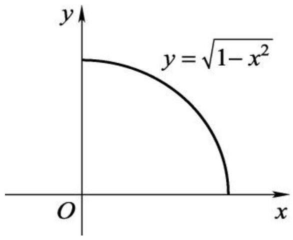
图 6-3

由上例可看出，用定义计算定积分较麻烦．

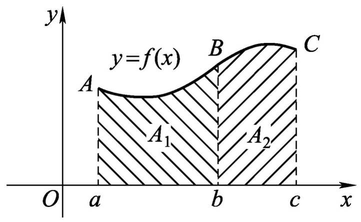
例 2　用定积分的几何意义求 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$．

解　函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的定积分是以 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为曲边，以区间 $[0,1]$ 为底的曲边梯形的面积，所围的图形为第一象限里半径为 1 的四分之一圆，如图 6-4 所示，故

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times\pi\times 1=\frac{\pi}{4}.$$

	 图 6-4 ■ 【学生】理解定积分的定义，并掌握其应用	
	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
问题讨论 **(10 min)**	■ 【教师】组织学生讨论以下问题 1．在定积分的定义中，能否将 $\lambda \to 0$ 改为 $n \to \infty$？为什么？ 2．能否用定积分计算数列的极限？试举例说明． 3．若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界吗？反之成立吗？ ■ 【学生】讨论、发言	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 **(10 min)**	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 **(5 min)**	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了定积分的概念、定积分的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 6.1	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">定积分的概念及性质（2）</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生基础：学生已经具备了一定的微积分基础，比如对导数和不定积分有初步的理解和应用能力。
学习差异：学生在数学抽象思维能力、公式推导和问题解决能力上存在差异，这可能影响他们理解定积分性质的能力。
兴趣和需求：部分学生可能对定积分的应用领域感兴趣，如物理、工程或经济学等，但他们可能需要更多的实际例子来理解这些概念的应用价值。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识技能：使学生理解并掌握定积分的基本性质，包括定积分的线性性质、定积分区间的加减性质等。
应用能力：学生能够应用定积分的性质解决实际问题，如计算面积、体积等。
思维能力：培养学生的逻辑思维和问题解决能力，通过探索定积分的性质和应用，提高学生的数学抽象思维能力。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">定积分性质</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">将定积分的性质与实际问题相联系。通过实例讲解，如使用几何图形的面积计算，将抽象的定积分性质与学生熟悉的实际问题相结合。
采用小组讨论和案例分析的方式，鼓励学生探索定积分性质在解决实际问题中的应用。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">多媒体课件：包含定积分性质的图形演示和实际应用案例。
练习题库：提供丰富的练习题，包括计算题和应用题，帮助学生巩固定积分性质的理解和应用。
在线资源：推荐一些在线工具和网站，供学生进行额外的学习和练习。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">讲授与示范：通过讲授和多媒体展示，解释定积分的性质及其数学证明。
案例分析：分析具体的应用案例，如物理中的运动问题，经济学中的成本分析等，展示定积分性质的实际应用。
小组讨论与互动：通过小组讨论，让学生共同探讨定积分性质的应用，增强理解和记忆。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">学习效果评估：通过课后测试和学生反馈，评估学生对定积分性质的理解程度和应用能力。
教学方法的反思：根据学生的学习效果，反思教学方法和教学材料的有效性，以及是否有必要调整教学策</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 **(2 min)**	■ **【教师】清点上课人数，记录好考勤** ■ **【学生】班干部报请假人员及原因**	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
知识讲解 **(20 min)**	■ **【教师】讲解定积分的性质，并通过例题介绍其应用** 性质 1（线性性质） $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$．式中的 α，β 是常数． 性质 2（积分区间的可加性） $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$．式中的 c 可在 $[a,b]$ 内，也可在 $[a,b]$ 外．例如，当 $a<b<c$ 时（见图 6-5），有 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$  图 6-5 性质 3　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$． 这时，定积分在几何上表示底边为 $b-a$、高为 1 的矩形面积． 性质 4（比较性质）　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$ 假设 $g(x)-f(x)\geqslant 0$ 成立，从而有 $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$ 故 $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$ 由此得到推论 1． 推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$	学习定积分的性质，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

由于 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，所以

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\,,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\,.$$

由此得到推论 2.

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\ (a<b)\,.$

例 3 比较下列各对积分值的大小：

（1）$\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解 （1）在区间 $[0,1]$ 上，显然 $\sqrt[3]{x}\geqslant x^3$. 由定积分的比较性质可知

$$\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\,.$$

（2）令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，在区间 $[0,1]$ 上有

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geqslant 0\,,$$

可知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调增加，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0\,,$$

所以，

$$\int_0^1[x-\ln(1+x)]\mathrm{d}x\geqslant 0\,,$$

即

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\,.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可积，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有上界 M 与下界 m，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$\forall x\in[a,b]$，由推论 1 有

$$\int_a^b m\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x\,,$$

所以，

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\,.$$

由此得到性质 5.

性质 5（估值定理） 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\ (a<b)\,.$$

估值定理的几何意义：曲边梯形 $EabF$ 的面积介于矩形 $AabB$ 与矩形 $DabC$ 的面积之间，如图 6-6 所示.

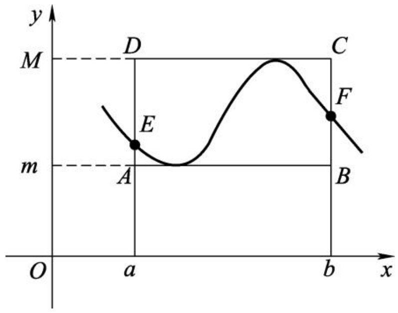


图 6-6

例 4　估计定积分 $\int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx$ 的值.

解　先求被积函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值 M 和最小值 m .

因为 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ ，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$. 驻点 $x=0$ 及两个端点 $x=-1$， $x=2$ 处的函数值分别为

$$f(0)=e^0=1,\quad f(-1)=e^{-1},\quad f(2)=e^{-4}.$$

显然 $M=1$， $m=e^{-4}$， $b-a=2-(-1)=3$. 由估值定理知

$$3e^{-4} \leqslant \int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx \leqslant 3 .$$

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由估值定理有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a) ,$$

其中 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值. 将上述不等式除以 $b-a$ 得

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M ,$$

由连续函数的介值定理知，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ 使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx ,$$

等式两端乘以 $b-a$ 得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

由此得到性质 6.

性质 6（积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

积分中值公式的几何解释：设 $f(x)\geqslant 0$ ，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ ，使得以 $f(\xi)$ 为高，区间 $[a,b]$ 的长度为底边的矩形面积等于相同底边且以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积，如图 6-7 所示.

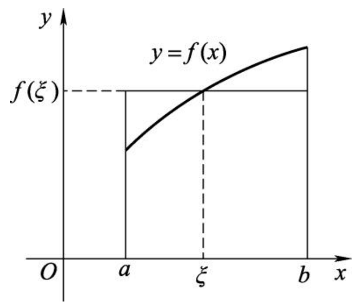
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


图 6-7

例 5　求函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在区间 $[-a, a]$ 上的积分平均值.

解　$\overline{y}=\frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$，根据定积分的几何意义知

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2,$$

所以，$\overline{y}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=\frac{\pi a}{4}$.

■ 【学生】理解定积分的性质，并掌握其应用
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>问题讨论
(10 min)</td>
<td>
■ 【教师】组织学生讨论以下问题

1．在定积分的定义中，能否将 $\lambda\to 0$ 改为 $n\to\infty$？为什么？
2．能否用定积分计算数列的极限？试举例说明.
3．若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界吗？反之成立吗？

■ 【学生】讨论、发言
</td>
<td>通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解</td>
</tr>
<tr>
<td>课堂测验
(10 min)</td>
<td>
■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧
</td>
<td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td>
</tr>
<tr>
<td>课堂小结
(5 min)</td>
<td>
■ 【教师】简要总结本节课的要点

本节课学习了定积分的概念、定积分的性质的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。

■ 【学生】总结回顾知识点
■ 【教师】布置课后作业：习题 6.1
</td>
<td>总结知识点，巩固印象</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">微积分基本定理</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生基础：了解学生在微积分前置知识（如极限、导数、不定积分）的掌握程度，以及他们对微积分基本定理的初步理解。
学习差异：识别学生在抽象思维和数学逻辑能力上的差异，这可能影响他们理解微积分基本定理的能力。
兴趣和动机：评估学生学习微积分的兴趣和动机，尤其是其应用于解决实际问题的意愿。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识技能：确保学生能够理解并掌握微积分基本定理，以及如何利用该定理计算函数的定积分。
应用能力：使学生能够应用微积分基本定理解决实际问题，如物理、工程和经济学中的问题。
思维能力：通过探索微积分基本定理，培养学生的逻辑思维、抽象思维和创新能力。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">掌握应用性质与定理计算函数的定积分</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">教学难点:，微积分基本定理的抽象性质可能难以理解。，将定理应用于实际问题的过程可能对学生来说挑战较大。，应对策略:，通过具体的例子和可视化工具，如动态图形，来解释微积分基本定理，使其更加直观。，设计一系列由简到难的应用题，逐步引导学生理解如何将定理应用于实际问题解决中。，通过小组讨论和案例研究的形式，鼓励学生探索定理的不同应用，增加课堂互动。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">多媒体课件：包含微积分基本定理的动画解释和示例计算。
实际案例：收集与学生学科相关的实际问题，如物理速度和距离问题、经济学中的成本分析等，用于案例讨论。
在线工具：推荐使用在线图形计算器和软件，如 Desmos 或 GeoGebra，来辅助教学和学习。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">讲授与演示：详细讲解微积分基本定理的概念、性质及其证明，通过案例演示如何应用定理。
互动讨论：安排互动环节，如思考题、小组讨论等，增加学生的参与度和兴趣。
实践应用：通过解决实际问题，让学生亲自应用微积分基本定理，增强学习的实践性和应用性。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">这节课个人感觉严谨亲切有余，但活泼激情不足，整个教学过程显得有些平铺直叙，缺少高潮和亮点。在今后的教学中要更加严格地要求自己，在方方面面提高自己，并通过增加互动环节提高学生的学习兴趣，为学生提供轻松、活跃的学习氛围。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤（2 min）</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤

■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解（33 min）</td><td>

■ 【教师】通过引例，推导出牛顿—莱布尼兹公式

设物体从某定点开始做直线运动，在 t 时刻所经过的路程为 $S(t)$，速度为 $v=v(t)=S'(t)\ (v(t)\geqslant 0)$，则在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内物体所经过的路程 S 可表示为

$$S(T_2)-S(T_1) \text{ 或 } \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t\,,$$

即

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t = S(T_2)-S(T_1)\,.$$

由此看出，$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 的值等于被积函数 $v(t)$ 的原函数 $S(t)$ 在 $t=T_2$ 处的值与在 $t=T_1$ 处的值之差.

对一般的情形，我们可以猜想有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

成立，其中 $F(x)$ 是被积函数 $f(x)$ 的原函数．这就是牛顿—莱布尼兹公式.

在证明牛顿—莱布尼兹公式之前，先证明原函数存在定理.

■ 【教师】讲解积分上限函数及其导数，并通过例题介绍其解法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点．若积分上限 x 在 $[a,b]$ 上每取一个值，函数 $f(x)$ 在部分区间 $[a,x]$ 上的定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 总有一个值与 x 相对应，即在 $[a,b]$ 上定义了一个函数，称为积分上限函数，也称为变上限定积分，记作 $\Phi(x)$，即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ \ (a\leqslant x\leqslant b)\,.$$

相应地，可以定义积分下限函数（或变下限定积分）.

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且其导数为

</td><td>学习积分上限函数及其导数。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

证明 对 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\ \text{（积分区间的可加性）}$$

$$=f(\xi)\Delta x\ \text{（积分中值定理），}$$

其中 ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，如图 6-8 所示．当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$．于是

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

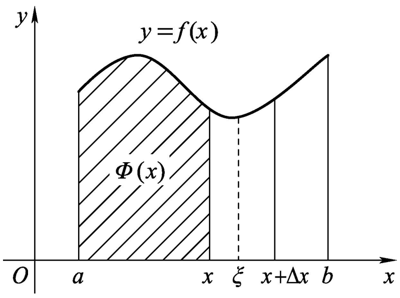


图 6-8

若 $x=a$，取 $\Delta x>0$，则同理可证

$$\Phi_+'(a)=f(a);$$

若 $x=b$，取 $\Delta x<0$，则同理可证

$$\Phi_-'(b)=f(b).$$

结论 定理 1 指出，积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，这就肯定了连续函数的原函数的存在性．因此，引出如下定理．

定理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数．

例 1 设 $F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2+t}\mathrm{d}t\ (x>0)$，求 $F'(x)$，$F'(0)$．

解 $F'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2+x}$，$F'(0)=\frac{1}{2}$．

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$．

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则有

	$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t\right]'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$ 例 3　求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x^2}\sin t^2 \mathrm{d}t\right)$. 解　题中的变上限不是 x，而是 x^2，该变上限定积分可看成是由 $\int_1^u \sin t^2 \mathrm{d}t$ 和 $u=x^2$ 复合而成的，故对 x 求导时，按复合函数求导法则可得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x^2}\sin t^2 \mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\int_1^{u}\sin t^2 \mathrm{d}t\right)\cdot u' =\sin u^2\cdot(x^2)' =2x\sin x^4.$$ 例 4　求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$，其中 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 均为可导函数. 解　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\int_{\varphi_1(x)}^{c} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t] =\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[-\int_{c}^{\varphi_1(x)} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$ ■　**【学生】理解积分上限函数，并掌握其求导方法**	
课堂测验（10 min）	■　**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■　**【学生】做测试题目** ■　**【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■　**【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
第二节课		
知识讲解（20 min）	■　**【教师】讲解牛顿—莱布尼茨公式，并通过例题介绍其应用** 定理 3（微积分基本公式）　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$ 此公式称为牛顿—莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式. 证明　已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数．根据定理 2 可知，积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数．于是存在一常数	学习牛顿—莱布尼茨公式，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学

C，使

$$F(x)-\Phi(x)=C\ (a\leqslant x\leqslant b)\ .$$

当 $x=a$ 时，有 $F(a)-\Phi(a)=C$，因为 $\Phi(a)=0$，所以 $C=F(a)$；当 $x=b$ 时，$F(b)-\Phi(b)=C=F(a)$，所以 $\Phi(b)=F(b)-F(a)$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ .$$

该公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数的联系，并且表明：当被积函数的原函数可以求出时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分值等于它的任意一个原函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的增量．为了方便把 $F(b)-F(a)$ 表示为

$$[F(x)]_a^b\ .$$

例 5　计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于 e^x 在 $[0,1]$ 上连续且是 e^x 的一个原函数，所以

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^1=\mathrm{e}-1\ .$$

例 6　计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以

$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{12}\pi$ 例 7　设

$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解　利用定积分对区间的可加性，有

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-1)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^1+[x^2-x]_1^2=\mathrm{e}$$

.

例 8　计算 $\int_0^4|x-3|\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^4|x-3|\mathrm{d}x=\int_0^3|x-3|\mathrm{d}x+\int_3^4|x-3|\mathrm{d}x=-\int_0^3(x-3)\mathrm{d}x+\int_3^4(x-3)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}[(x-3)^2]_0^3+\frac{1}{2}[(x-3)^2]_3^4=5\ .$$

例 9　计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积．

解　这图形是曲边梯形的一个特例，它的面积

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=2\ .$$

例 10　汽车以 36 km/h 速度行驶，到某处需要减速停车．设汽车以等加速度 $a=-5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车．问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离？

解　先要算出从开始刹车到停车所需的时间．当 $t=0$ 时，汽车速度

做一体化

	$$v_0=36\ \text{km/h}=\frac{36\times 1\,000}{3\,600}\ \text{m/s}=10\ \text{m/s}\ .$$ 刹车后 t 时刻汽车的速度为 $$v(t)=v_0+at=10-5t\ .$$ 当汽车停止时，速度 $v(t)=0$，代入上式得，$t=2\ \text{s}$．于是从开始刹车到停车汽车所走过的距离 $$s=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(10-5t)\mathrm{d}t=\left[10t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^2=10\ (\text{m})\ ,$$ 即在刹车后，汽车需走过 10 m 才能停住． ■ **【学生】掌握牛顿—莱布尼茨公式及其应用**	
问题讨论（10 min）	■ **【教师】组织学生讨论以下问题** 1．关于变下限的定积分，是否有类似于定理 1 的结果？能否给出更一般的表达式？ 2. 利用定义计算几个简单函数的定积分，并验证牛顿—莱布尼茨公式的正确性． ■ **【学生】讨论、发言**	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验（10 min）	■ **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■ **【学生】做测试题目** ■ **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■ **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结（5 min）	■ **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了积分上限函数及其导数、牛顿—莱布尼茨公式的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ **【学生】总结回顾知识点** ■ **【教师】布置课后作业：习题 6.2**	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">定积分的计算方法</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td>授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生已经学习过高等数学中的微分学和积分学，具备一定的数学基础。
部分学生对定积分的计算方法还比较陌生，缺乏对相关概念的理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识:学生将能够定义和理解定积分的概念和性质。
理解:学生将掌握换元积分法与分部积分法的基本原理和应用范围。
应用:学生将能够将适当的计算方法应用于各种定积分计算问题。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">掌握换元积分法与分部积分法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点一:学生难以理解换元积分法的思想和应用范围。
应对措施:
结合实际问题，讲解换元积分法的物理意义。
通过例题讲解换元积分法的应用方法。
难点二:学生难以记忆分部积分法的公式。
应对措施:
讲解分部积分法的记忆技巧。
提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《高等数学》
课件：PPT
教学视频
习题册</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">启发式教学：引导学生思考，积极探索
案例教学：结合实际问题，提高学生学习兴趣
多媒体教学：利用多媒体手段，增强教学效果
练习巩固：通过练习题，检验学生学习效果</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课发现一些学生的练习不够，强化不够，检查不够，解题时出现了一些不应出现的错误，后面的教学中应要求学生更多地进行练习，让学生在练习中体会、理解所学知识的应用，并学会在练习中总结，反思。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>■ 【教师】讲解定积分的换元积分法，并通过例题介绍其应用
定理　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：
（1） $\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$；
（2） $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上单调且有连续的导数，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t .$$
这个公式称为定积分的换元公式.
证明　因为 $f(x)$， $x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为连续函数，所以 $f(x)$ 及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 都有原函数，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a) .$$
另一方面，因为 $\{F[\varphi(t)]\}'=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，所以 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数，从而
$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a) ,$$
因此
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t .$$
例 1　求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.
解　令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时， $t=0$；当 $x=a$ 时， $t=\frac{\pi}{2}$（可以看出， $x=a\sin t$， $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 是单调增加的）. 于是
$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2 .$$
例 2　计算 $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.
解　令 $\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t$， 则 $x=\ln(t^2-1)$， $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$. 当 $x=\ln 3$ 时， $t=2$；当 $x=\ln 8$ 时， $t=3$. 于是</td><td>学习定积分的换元积分法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^x}dx=\int_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=2\left[t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3=2+\ln\frac{3}{2}.$$

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

解 令 $t=1+\cos^2 x$，则 $-\frac{1}{2}dt=\cos x\sin x dx$．当 $x=0$ 时，$t=2$； 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $t=1$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x dx}{1+\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\int_2^1\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}[\ln t]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 4 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.

解 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x|\cos x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x d\sin x$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

例 5 证明：

（1）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

（2）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

证明 因为 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$，对积分 $\int_{-a}^{0}f(x)dx$ 做变量代换，令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_a^0 f(-t)d(-t)=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx,$$

于是

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$$

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)+f(-x)=2f(x)$，从而得到

	$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x .$$ （2）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)+f(-x)=0$，从而得到 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 .$$ 例 6　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明： （1）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$； （2）$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，并由此计算 $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 的值. 证明　（1）令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$．因而有 $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t$$ $$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x .$$ （2）令 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$．因而有 $$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$ $$= \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$ $$= \pi\int_{0}^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x .$$ 所以 $$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x .$$ 利用上述结论，可得 $$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x$$ $$= -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_{0}^{\pi}$$ $$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4} .$$ ■　**【学生】掌握定积分的换元积分法，及其应用**	
课堂测验 **(10 min)**	■　**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况**	通过测试，了解学生对知识点的

<table>
<tr><td></td><td>■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(20 min)</td><td>

■ 【教师】讲解定积分的分部积分法，并通过例题介绍其应用

设函数 $u(x)$， $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$，$v'(x)$，由不定积分的分部积分法，可得

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\left[\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\right]_a^b=\left[u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)\right]_a^b$$

$$=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x),$$

简记为

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x \text{ 或 } \int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u .$$

这就是定积分的分部积分公式.

例 7　求 $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$.

解　$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left[[x^2\ln x]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}\ln x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1).$$

例 8　计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x=[x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

例 9　求 $\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解　先换元，然后利用分部积分法，令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=2[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t$$

</td><td>学习定积分的分部积分法，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$=\pi+2[\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2.$$

例 10 设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且有 $f'(0)=1$， $f'(1)=2$， $f(0)=f(1)=0$，求 $\int_0^1 f(x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^1 f(x)f'''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}f''(x)=[f(x)f''(x)]_0^1-\int_0^1 f''(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}f'(x)=-\left[\frac{[f'(x)]^2}{2}\right]_0^1=-\frac{3}{2}.$$

例 11 证明一个重要的递推公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\right)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数，}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}.\end{cases}$$

证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x$

$$=-[\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

所以

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

这个等式称为 I_n 关于下标的递推公式.
当 n 为正偶数时，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0,$$

且 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$；

当 n 为大于 1 的正奇数时，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1,$$

且 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

所以

	$$I_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于}1\text{的正奇数}.\end{cases}$$ 例 12　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\mathrm{d}x$. 解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\mathrm{d}x=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{128}{315}$. ■ **【学生】掌握定积分的分部积分法，及其应用**	
问题讨论 (10 min)	■ **【教师】组织学生讨论以下问题** 1. 定积分的换元积分法与不定积分的换元积分法有何联系与区别？ 2. 定积分的分部积分法与不定积分的分部积分法有何联系与区别？ 3. 设 $f(x)$ 是以周期为 T 的连续函数，定积分 $\int_\alpha^{\alpha+T}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ 是否相等？为什么？ 4. 当用分部积分法计算 $x^n\sin ax\mathrm{d}x$，$x^n\arctan bx\mathrm{d}x$ ，$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta\mathrm{d}x$ 时，u，v 应如何选择？ ■ **【学生】讨论、发言**	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 (10 min)	■ **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■ **【学生】做测试题目** ■ **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■ **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 (5 min)	■ **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了定积分的换元积分法和分部积分法的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ **【学生】总结回顾知识点** ■ **【教师】布置课后作业：习题 6.3**	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">定积分的几何应用</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生基础知识：评估学生对定积分基本概念及其计算方法的掌握程度，以及他们对几何图形的理解。，学习兴趣：了解学生对于数学及其在几何问题中应用的兴趣，识别激发学习兴趣的关键点。，能力差异：识别学生在抽象逻辑推理、空间想象力和解决问题的能力上的差异。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识与技能：学生能够理解并掌握使用定积分求解平面图形面积和立体体积的方法。，思维能力：培养学生的空间想象力和逻辑推理能力，提高他们将定积分应用于解决实际几何问题的能力。，情感态度：激发学生对数学及其应用的兴趣，增强他们解决复杂问题的自信心和持之以恒的精神。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">使用定积分计算平面图形的面积。，应用定积分求解立体体积，特别是旋转体的体积。</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">教学难点:，将定积分的概念与几何图形面积、体积的计算直观联系起来。，学生在理解旋转体体积计算时可能遇到的空间想象力的挑战。，应对策略:，使用多媒体工具展示定积分在几何图形中的应用，如通过动画演示旋转体的生成过程。，组织实践活动，如让学生使用软件模拟几何图形的旋转，直观感受体积的变化。，通过具体实例，逐步引导学生从理解平面图形面积的计算扩展到立体体积的计算。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">多媒体课件：包含动画演示、图形模拟和定积分的计算步骤。，软件工具：推荐使用如 GeoGebra 等几何软件，帮助学生直观理解和操作图形。，实例与习题：提供丰富的几何问题实例和习题，包括平面图形和立体图形的面积与体积计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">直观教学法：通过动画和图形演示，直观展示定积分在几何问题中的应用。，案例教学法：选取实际的几何问题作为案例，引导学生探究和解决问题。，互动讨论法：鼓励学生在小组内讨论问题，共同寻找解决方案，增强理解和记忆。，实践操作法：利用数学软件，让学生亲自操作图形，体验从平面到立体的转换，加深对计算方法的理解。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(28 min)</td><td>■ 【教师】讲解定积分的微元法
引入定积分概念时，从讨论曲边梯形的面积问题中知道，积分 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是以 $[a,b]$ 为底、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积．而微分 $\mathrm{d}A(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 表示点 x 处以 $\mathrm{d}x$ 为宽的小曲边梯形面积的近似值 $\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x$， $f(x)\mathrm{d}x$ 称为曲边梯形的面积元素．那么，以 $[a,b]$ 为底的曲边梯形的面积 A 就是以面积元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，以 $[a,b]$ 为积分区间的定积分．
一般情况下，为求某一量 U（与变量 x 有关的量），先确定变量 x 的变化区间 $[a,b]$，再求量 U 的元素 $\mathrm{d}U$．若 $\mathrm{d}U=f(x)\Delta x=f(x)\mathrm{d}x$，则量 U 就是以 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，以 $[a,b]$ 为积分区间的定积分，即
$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$
这一方法通常称为微元法（或称为元素法）．
■ 【教师】讲解利用定积分求平面图形的面积，并通过例题介绍其应用
1．直角坐标情形
设平面图形由上下两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 及左右两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成（见图 7-1），则面积元素为
$$\mathrm{d}S=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x ,$$
于是平面图形的面积为
$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x .$$
类似地，由左右两条曲线 $x=\varphi(y)$ 与 $x=\psi(y)$ 及上下两条直线 $y=d$ 与 $y=c$ 所围成的平面图形（见图 7-2）的面积为
$$S=\int_c^d [\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y .$$</td><td>学习定积分的微元法，掌握利用定积分求平面图形面积和立体体积的方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

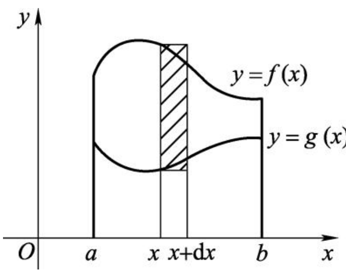


图 7-1

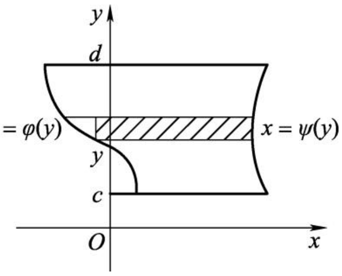


图 7-2

例 1　计算由抛物线 $y=-x^2+1$ 和 $y=x^2-x$ 所围成的图形的面积.

解　（1）画图，如图 7-3 所示；

（2）确定图形在 x 轴上的投影区间：$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$；

（3）确定上下曲线，$f_{上}(x)=-x^2+1$；$f_{下}(x)=x^2-x$；

（4）计算积分：

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-x^2+1-x^2+x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{2x^3}{3}+x+\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{8}.$$

例 2　计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解　（1）画图，如图 7-4 所示；

（2）确定图形在 y 轴上的投影区间：$[-2,4]$；

（3）确定左右曲线，$\varphi_{左}(x)=\dfrac{1}{2}y^2$，$\varphi_{右}(x)=y+4$；

（4）计算积分：

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18.$$

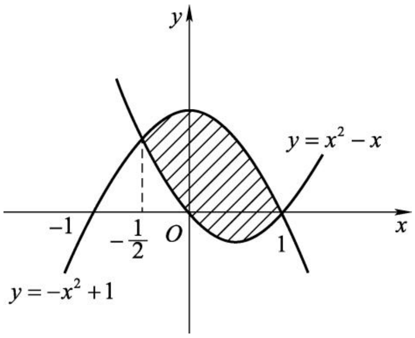


图 7-3

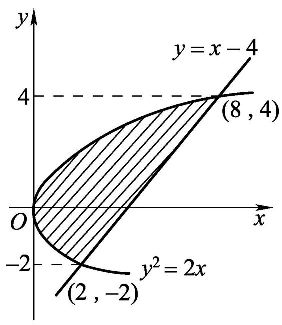


图 7-4

2．参数方程情形

有时候，用曲线的参数方程计算一些平面图形面积更简便.

例 3　如图 7-5 所示，求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面

积.

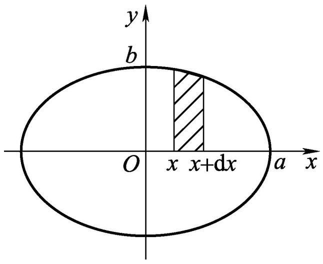


图 7-5

解　因为整个椭圆的面积是椭圆在第一象限部分的四倍，椭圆在第一象限部分在 x 轴上的投影区间为 $[0, a]$. 因为面积元素为 $y\mathrm{d}x$ ，所以

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x .$$

椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t , \\ y = b\sin t \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) ,$$

于是，

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\mathrm{d}(a\cos t) = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\mathrm{d}t = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\mathrm{d}t = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

3．极坐标情形

由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$ ， $\theta = \beta$ 围成的图形称为曲边扇形，如图 7-6 所示.

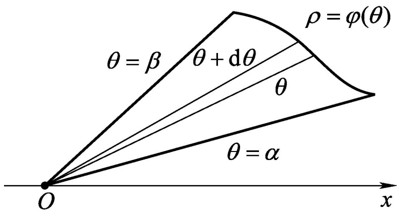


图 7-6

取 θ 为积分变量，在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取子区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ ，相应的小曲边扇形的面积可用半径为 $\rho = \varphi(\theta)$ 、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替，即面积元素为

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta .$$

因此，曲边扇形的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta .$$

例 4　如图 7-7 所示，求对数螺线 $\rho = a\mathrm{e}^\theta$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 及射线 $\theta = -\pi$ 和 $\theta = \pi$ 所围成的图形面积.

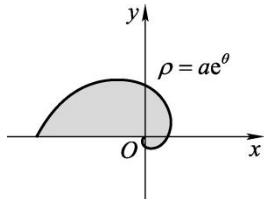


图 7-7

解 所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(a\mathrm{e}^{\theta})^{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a^{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^{2}}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$$

例 5 如图 7-8 所示，求由曲线 $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$ 所围成图形公共部分的面积.

解 曲线 $\rho=3\cos\theta$ 与 $\rho=1+\cos\theta$ 交点的极坐标为

$$A\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right),\quad B\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right).$$

由于对称性，所求面积为

$$S=2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^{2}\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^{2}\,\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^{2}\theta)\mathrm{d}\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta+\frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi-\frac{9}{8}\sqrt{3}.$$

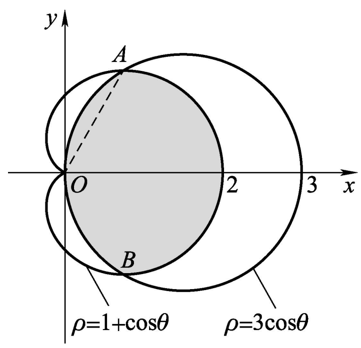


图 7-8

■ **【教师】讲解利用定积分求旋转体的体积和平行截面面积为已知的立体的体积，并通过例题介绍其应用**

1．旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内某一条定直线旋转一周而成的立体．这条定直线称为**旋转轴**.

常见的旋转体包括：圆柱、圆锥、圆台、球体及椭球体等，如图 7-9 所示.

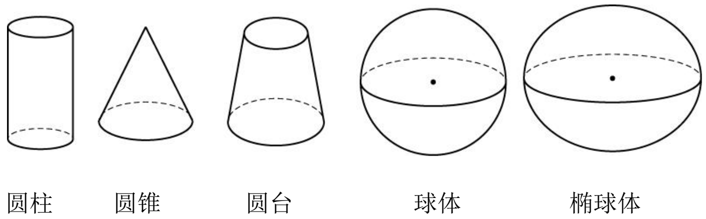


图 7-9

下面用微元法来计算由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a$ 与 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积，如图 7-10 所示.

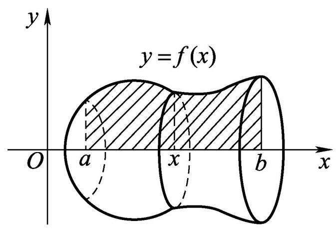


图 7-10

设过区间 $[a\,,b]$ 内点 x 且垂直于 x 轴的平面左侧的旋转体的体积为 $V(x)$ ，当平面左右平移 $\mathrm{d}x$ 时，体积的增量近似于以 $f(x)$ 为底面半径、 $\mathrm{d}x$ 为高的扁圆柱体的体积，即

$$\Delta V \approx \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\,,$$

于是体积元素为

$$\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\,,$$

旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\,.$$

同理，由连续曲线 $x=\varphi(y)$ ，直线 $y=c$ ， $y=d$ 以及 y 轴所围区域，绕 y 轴旋转的旋转体（见图 7-11）体积为

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y\,.$$

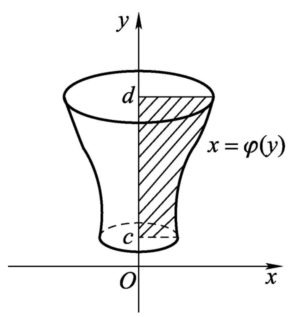


图 7-11

例 6　如图 7-12 所示，求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$ ， x 轴所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

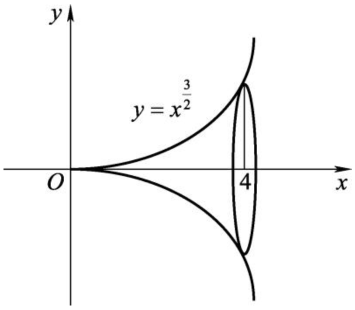


图 7-12

解　所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^4 (x^{\frac{3}{2}})^2 dx=\pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4=64\pi .$$

例 7　如图 7-13 所示，求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

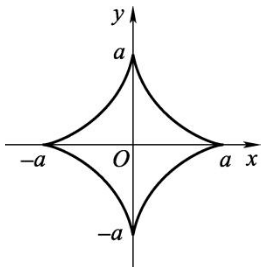


图 7-13

解　由对称性可得所求旋转体的体积为

$$V=2\int_0^a \pi y^2 dx=2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3 dx$$

$$=2\pi\int_0^a (a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx .$$

$$=2\pi\left[a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{32}{105}\pi a^3$$

例 8　计算由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱与直线 $y=0$ 所围成的图形（见图 7-14）分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积.

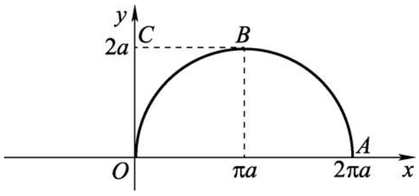


图 7-14

解 所给图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=5\pi^2a^3 .$$

所给图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积是平面 *OABC* 与 *OBC* 分别绕 y 轴旋转而成的两个旋转体体积之差．设曲线中点左半边为 $x=x_1(y)$，右半边为 $x=x_2(y)$，则

$$V_y=\int_0^{2a}\pi x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}\pi x_1^2(y)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t\mathrm{d}t-\pi\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2\cdot a\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t=6\pi^3a^3 .$$

2．平行截面面积为已知的立体的体积

设有一立体 Ω，它介于过点 $x=a$ 与 $x=b$ $(a<b)$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，过点 x 且垂直于 x 轴的平面与立体相截所得的截面面积 $A(x)$ 为 x 的已知连续函数．容易求得该立体的体积元素为 $A(x)\mathrm{d}x$，故立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x .$$

例 9 如图 7-15 所示，计算底面是半径为 R 的圆，且垂直于底面的所有截面都是等边三角形的立体体积．

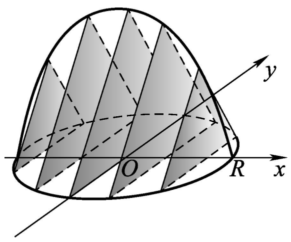


图 7-15

解 设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$．由已知条件知，它是边长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$ 的等边三角形的面积，其值为

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{3}(R^2-x^2) ,$$

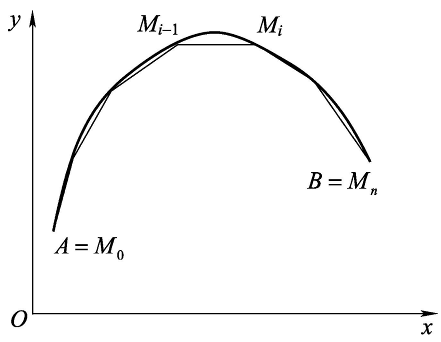
所以

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\sqrt{3}\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3 .$$

■ **【学生】掌握定积分的微元法，以及利用定积分求平面图形面**

	积和立体体积的方法	
问题讨论 (5 min)	■ 【教师】组织学生讨论以下问题 微元法求量 U，量 U 应具备什么特征？ ■ 【学生】讨论、发言	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 (10 min)	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象

第二节课

知识讲解 (20 min)	■ 【教师】讲解利用定积分求平面曲线的弧长，并通过例题介绍其应用 设 A，B 是曲线弧上的两个端点，在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上依次任取分点 $A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}$， $M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$，并依次连接相邻的分点得折线 $M_{i-1}M_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，如图 7-16 所示．当分点的数目无限增加且每个小段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 都缩向一点时，如果此折线的长 $\sum\limits_{i=1}^{n}\|M_{i-1}M_i\|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，并称此曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的．  图 7-16 定理　光滑曲线弧是可求长的． 证明略． 1．直角坐标情形 设曲线弧的直角坐标方程为 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$， $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数．	学习利用定积分求平面曲线弧长的方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

现在来计算该曲线弧的长度．如图 7-17 所示，取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$． 曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一段弧的长度为 Δs，可以用该曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的一小段长度来近似代替，切线上相应的小段长度为

$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

从而得弧长元素（即弧微分）为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

以 $\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在闭区间 $[a,b]$ 上积分，可得所求的弧长为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

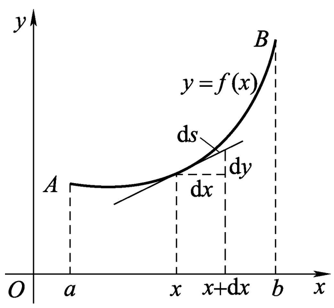


图 7-17

例 10　如图 7-18 所示，求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长．

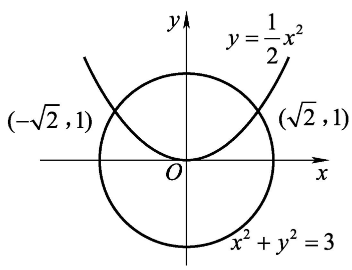


图 7-18

解　由 $\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ 解得抛物线与圆的两个交点分别为

$(-\sqrt{2},1)$ 和 $(\sqrt{2},1)$，于是所求的弧长为

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

2．参数方程情形

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 给出，其中 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数，且 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 不同时为零．因为

$$\mathrm{d}y=\psi'(t)\mathrm{d}t，\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

所以弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2+\psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

所求弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

例 11　计算摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱的长度．

解　由弧长元素的参数方程公式，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t,$$

所求弧长为

$$S=\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a.$$

3．极坐标情形

设曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出，其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数，由直角坐标与极坐标的关系可得

$$x=\rho(\theta)\cos\theta，\ y=\rho(\theta)\sin\theta\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

于是得弧长元素为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

从而所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

例 12　计算 $\rho\theta=1$ 相应于 $\frac{3}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{4}{3}$ 的一段弧长．

解　由弧长的极坐标公式得

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2+\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}.$$

■ **【学生】掌握利用定积分求平面曲线弧长的方法**

问题讨论 **(10 min)**	■ **【教师】组织学生讨论以下问题** 1．光滑曲线有什么特征？ 2．定积分在几何上有哪些应用？ ■ **【学生】讨论、发言**	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 **(10 min)**	■ **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■ **【学生】做测试题目** ■ **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■ **【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 **(5 min)**	■ **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了定积分的微元法和利用定积分求平面图形的面积、旋转体体积、平行截面面积已知的立体体积、平面曲线的弧长。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ **【学生】总结回顾知识点** ■ **【教师】布置课后作业：习题 7.2**	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">反常积分</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td>授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生基础知识：确认学生已经掌握了定积分、极限的基本概念以及不定积分的计算方法。，学习差异：评估学生在理解极限过程和处理无穷大或无穷小量方面的差异，这对于理解反常积分特别重要。，兴趣和需求：了解学生对于探索数学理论边界以及将数学应用于解决实际问题的兴趣和需求。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识与技能：学生能够理解反常积分的定义、分类（无穷区间上的积分、无界函数的积分）及其重要性。，应用能力：使学生能够计算广义积分，包括在无穷区间上的积分和无界函数的积分。，分析与评价：培养学生评估反常积分收敛或发散的能力，以及应用适当的计算方法解决问题的能力。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">理解概念，并会计算广义积分</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">教学难点：，学生可能难以理解在无穷区间上或对无界函数进行积分的概念。，判断反常积分的收敛性可能对学生来说具有挑战。，应对策略：，使用直观的例子和图形演示来解释反常积分的概念，帮助学生建立直观理解。，引入步骤化方法，如比较判别法、p-判别法等，帮助学生判断反常积分的收敛性。，通过分组讨论和解决实际问题，让学生在实践中掌握评估反常积分收敛性的方法和计算技巧。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">多媒体课件：准备包含反常积分定义、计算方法和收敛性判别法的多媒体课件。，练习题与案例：提供丰富的练习题和与实际应用相关的案例，如物理学和工程学中的问题，以增强学生的理解和应用能力。，在线资源：推荐一些在线计算工具和数学论坛，供学生探索更多的学习资源和解题思路。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">讲授与示范：详细讲解反常积分的理论基础和计算方法，并通过示例演示如何计算。，互动式学习：通过问题导向的学习和小组讨论，激发学生的兴趣，促进学生之间的互动与合作。，案例分析：分析实际案例，让学生应用所学知识解决问题，提高他们的实际应用能力。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课由于对所讲知识中重点和难点的把握较好，因此取得了不错的效果。我在教学过程中体会到，对教学重点、难点的把握正确与否，决定着教学过程的意义。若不正确，教学过程就失去了意义，若不明确，教学过程就失去了方向。因此重点和难点是教学活动的依据，也是教学活动中的重点和方向，一定要把握好。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
第一节课		
考勤 (2 min)	■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤 ■ 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
知识讲解 (33 min)	■ 【教师】讲解反常积分的概念 前面讨论的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其积分区间 $[a,b]$ 为有限区间，且在定积分存在的条件下被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的．可是在很多实际问题中会遇到积分区间为无穷区间或者被积函数在积分区间上是无界的定积分，这样的积分称为反常积分或广义积分．本节将通过定积分对这两种情形的反常积分进行讨论． ■ 【教师】讲解无穷限的反常积分，并通过例题介绍其应用 定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即 $$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x .$$ 这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．这时反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 仅仅是个记号，不表示任何数值． 由定义可知，我们讨论反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性，实际上就是考察变上限积分 $$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\ (t>a),$$ 当 $t\to+\infty$ 时的极限是否存在． 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为非负的，且反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值从几何上可以解释为由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$ 及 x 轴所围成的向右无限延伸区域的面积，如图 6-9 所示．	学习无穷限的反常积分，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

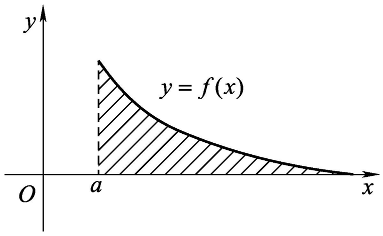


图 6-9

类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\mathrm{d}x .$$

其中，c 为任意实数. 当反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛时，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 中一个发散或两个均发散时，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}[F(x)]_{a}^{t} = \lim_{t\to+\infty}[F(t) - F(a)] = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a)$$

记 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = F(+\infty)$，于是有

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = [F(x)]_{a}^{+\infty} .$$

类似地，若记 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty) = [F(x)]_{-\infty}^{b} ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty) = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} .$$

例 1　计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\arctan x - \lim_{x\to-\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

尽管这样做，结果是对的，但其方法是错误的. 原因是该解题过程没有按照反常积分的定义中所规定的方法做. 正确做法是：先用某有限数，一般取 0 把积分拆成两部分，

然后再讨论各部分的敛散性，如果它们均收敛，反常积分才收敛.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2},$$

因为

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}[\arctan x]_0^b=\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

即所求积分收敛.

上述反常积分值的几何意义：位于曲线 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的下方、x 轴上方的图形的面积，当 $a\to-\infty$，$b\to+\infty$ 时，阴影部分向左、右无限延伸，但其面积却是有限值 π，如图 6-10 所示.

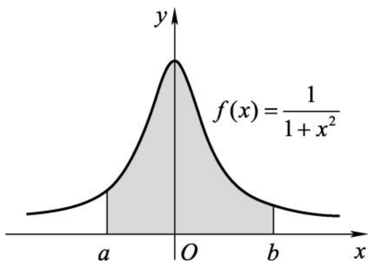


图 6-10

例 2　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$.

解法一

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

不论 $x\to+\infty$ 还是 $x\to-\infty$，$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 都趋于正无穷．那么这里无穷大减无穷大的结果是什么？判断不了.

解法二　利用被积函数是奇函数，积分区间是以原点为心的对称区间的特性，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}0=0.$$

因此所给积分收敛.

上述两种方法都是错误的.

正确做法是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2},$$

	而 $\int_{-\infty}^{0}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^0=-\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+a^2)=-\infty$ 第一部分已经发散，故没有必要再计算第二部分．同样有 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=+\infty$． 故该积分发散． 例 3　讨论反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的敛散性． 解　当 $p=1$ 时， $$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty .$$ 当 $p<1$ 时， $$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_a^{+\infty}=+\infty ;$$ 当 $p>1$ 时， $$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_a^{+\infty}=\frac{a^{1-p}}{p-1} .$$ 因此，当 $p>1$ 时，此反常积分收敛，其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当 $p\leqslant 1$ 时，此反常积分发散． ■　**【学生】理解无穷限的反常积分的定义，并掌握其应用**	
课堂测验 (10 min)	■　**【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■　**【学生】做测试题目** ■　**【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■　**【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
第二节课		
知识讲解 (20 min)	■　**【教师】讲解无界函数的反常积分，并通过例题介绍其应用** 定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界．取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x .$$	学习无界函数的反常积分，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**．如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**．

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，而在点 b 的左邻域内无界．取 $t<b$，如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x .$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**．如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**．

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c\ (a<c<b)$ 外连续，而在点 c 的任意邻域内无界．如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 有一个发散，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**．

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的**瑕点**．故无界函数的反常积分又称为**瑕积分**．

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 a 为瑕点时，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b=F(b)-\lim_{t\to a^+}F(t)=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x ,$$

可采用如下简记形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x) .$$

类似地，当 b 为瑕点时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a) .$$

当 $c\ (a<c<b)$ 为瑕点时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=[\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)]+[F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x)]$$

例 4 计算反常积分 $\int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\infty$，所以 $x=a$ 为函数

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的瑕点.

$$\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-}=\lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin 0=\arcsin 1-0=\frac{\pi}{2}$$

这个反常积分值的几何意义：位于曲线 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 之下、x 轴之上，直线 $x=0$ 与 $x=a$ 之间的图形面积，如图 6-11 所示.

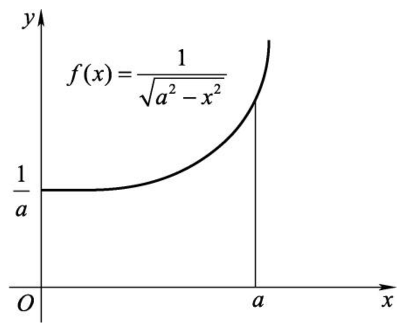


图 6-11

例 5 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上除 $x=0$ 外连续，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$. 由于

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)-1=+\infty,$$

反常积分 $\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散，所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

例 6 讨论反常积分 $\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 的敛散性.

解 当 $q=1$ 时，

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=[\ln(x-a)]_a^b=+\infty.$$

当 $q>1$ 时，

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b=+\infty.$$

当 $q<1$ 时，

	$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{1}{1-q}(x-a)^{1-q}\right]_a^b = \frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q} .$$ 因此，当 $q<1$ 时，此反常积分收敛，其值为 $\frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}$；当 $q \geqslant 1$ 时，此反常积分发散. ■ 【学生】理解无界函数的反常积分的定义，并掌握其应用	
问题讨论 **(10 min)**	■ 【教师】组织学生讨论以下问题 1．反常积分的几何意义是什么？ 2．两类反常积分能否相互转换？ 3．下面的计算是否正确？为什么？ $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2 .$$ ■ 【学生】讨论、发言	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 **(10 min)**	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 **(5 min)**	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了无穷限的反常积分和无界函数的反常积分的相关知识及其应用。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 6.4	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">定积分复习</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td>授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生已经完成定积分的基本学习，掌握了基础概念和计算方法。但在实际应用中仍存在一些困难，需要通过复习加强理解和运用能力。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识目标：巩固定积分的基本概念、性质及其应用。
能力目标：强化定积分计算方法的综合运用能力，提高解决实际问题的能力。
素质目标：培养学生系统思维和知识融会贯通的能力。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">定积分重要概念和性质的回顾与巩固。
各种积分计算方法的综合运用。</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点：定积分在实际问题中的应用和复杂积分的计算。
应对策略：通过典型例题讲解，强调解题思路和方法的选择，组织课堂练习和讨论。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《高等数学》
媒体资源：复习 PPT、综合练习题
环境设备：多媒体教室配备投影仪和电脑</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">归纳总结法：系统梳理定积分的主要知识点。
例题分析法：剖析典型例题，归纳解题思路和方法。
互动练习法：设置分层练习，组织学生讨论和展示。
错题分析法：针对学生易错点进行重点讲解。</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">注意检查学生对定积分各知识点的掌握程度，发现普遍存在的问题及时补充讲解。关注学生在综合应用方面的进步，适当增加练习的难度和深度，为后续学习打好基础。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2 min)	■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤 ■ 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性， 掌握学生的出勤情况
知识讲解 (50 min)	■ 【教师】复习定积分的基本概念 回顾定积分的几何意义和性质： 1. 定积分的定义：∫[a,b]f(x)dx 表示曲边梯形的面积 2. 积分区间[a,b]的概念及性质 3. 定积分的基本性质 ■ 【教师】重点复习定积分的计算方法 1. 牛顿-莱布尼茨公式的应用 2. 换元法的灵活运用 3. 分部积分法 4. 奇偶性、周期性的巧用 一、定积分基本概念回顾例题 1.定积分几何意义例题 $\int 0,1 dx$，*求该定积分所表示的曲边梯形面积。* *解：* $S=\int 0,1 dx$ $=(x\text{^}2+x)\vert[0,1]$ $=(1^2+1)-(0^2+0)$ $=2$ *所以，曲边梯形面积为*2。 2. *积分区间性质例题* *若*$f(x)$*为*$[a,b]$*上的非负函数，且*$\int[a,b]f(x)dx=0$，*则对于任意*$x\in[a,b]$，*有*$f(x)=$ ？ *解：* 0. 3. *定积分基本性质例题* *以下关于定积分性质的说法错误的是：* $A.$ *若*$f(x)\geq g(x)$*在*$[a,b]$*上恒成立，则*$\int[a,b]f(x)dx\geq\int[a,b]g(x)dx$。 $B.$ $\int[a,b]kdx=k(b-a)$，*其中*k*为常数。* $C.$ $\int[a,b]f(x)dx=\int[b,a]f(x)dx$。 $D.$ *若*$f(x)$*在*$[a,b]$*上可积，则*$f(x)$*在*$[a,b]$*上连续。* 答案：D。 二、定积分计算方法例题 1.牛顿-莱布尼茨公式例题 *利用牛顿–莱布尼茨公式计算*$\int\left[0,\frac{\pi}{2}\right]cosxdx$。 *解：原式*$=(sinx)\vert[0,\pi/2]$	学习定积分的基本概念和计算方法，边做边进，及时巩固练习，实现教学做一体化

	$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin0 - 0$ $= 1$ 2. 换元法例题 计算$\int[0,1]\sqrt{(1-x^2)dx}$。 解：令$x = sin\theta$，$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，则$dx$ $= cos\theta d\theta$。$0, \pi/2]\surd(1$ $- \sin\hat{}2\theta)cos\theta d\theta$ $= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cos^{2\theta d\theta}$ 利用三角恒等式$\cos^2 \quad \theta = (1 + cos2\theta)/2$，得： 原式$= \left(\frac{1}{2}\right) \int 0, \frac{\pi}{2} d\theta$ $= (1/2)(\theta + (1/2)sin2\theta)\vert[0, \pi/2]$ $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + 0 - (0 + 0)\right)$ $= \frac{\pi}{4}$ 3. 分部积分法例题 计算$\int xe^{xdx}$。 解：原式$= \int xde^x$ $= xe^x - \int e^{xdx}$ $= xe^x - e^x + C$ $= (x-1)e^x + C$ 4. 奇偶性、周期性例题 计算$[-\pi, \pi] \sin^{3xdx}$。 解：由于$\sin(-x) =- sinx$，$\sin^3(-x)$ $=- \sin^{3x} -$ 所以$\sin^{3x}$是奇函数。 根据奇函数在对称区间上的定积分为0 的性质，得：原式 $= 0$。 三、定积分相关拓展例题 1. 复合函数定积分例题 计算$\int[0,1]e^{(2x)dx}$。 解：令$u = 2x$，则$du = 2dx$，$dx = \frac{du}{2}$。 当$x = 0$ 时，$u = 0$；当$x = 1$ 时，$u = 2$。	

	原式 $= \left(\frac{1}{2}\right)\int[0,2]e^{udu}$ $= (1/2)e\hat{}u\|[0,2]$ $= \left(\frac{1}{2}\right)(e^2 - e^0)$ $= \left(\frac{1}{2}\right)(e^2 - 1)$。 2. *含绝对值函数定积分例题* *计算*$\int[-2,2]\|x\|dx$。 *解：因为*$\|x\|$*在*$[-2,2]$*上可写成分段函数：* *当*$x \geq 0$ *时*，$\|x\| = x$；*当*$x < 0$ *时*，$\|x\| = -x$。 *所以原式* $= \int[-2,0](-x)dx + \int[0,2]xdx$ $= \left(-\frac{1}{2}\right)x^2\Big\|[-2,0]+\left(\frac{1}{2}\right)x^2\Big\|[0,2]$ $= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)^2\right]$ $+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\times 0^2\right]$ $= 2 + 2$ $= 4$。	
课堂练习 (35 min)	▪ 【教师】布置综合练习题 ■ 【学生】独立完成练习 ■ 【教师】重点讲解典型题目和易错点 ■ 【学生】订正错题，掌握解题要领	通过练习，巩固本节课所学知识，提高解题能力
总结提高 (3 min)	▪ 【教师】归纳本节课重点内容 ■ 【学生】记录要点，理清思路	系统整理知识要点，为后续学习打好基础

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">常微分方程的基本概念（1）</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td>授课形式</td><td colspan="2">线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">• 学生已经学习过高等数学中的微分学和积分学，具备一定的数学基础。
• 部分学生对微分方程的概念和应用还比较陌生，缺乏直观理解。
•</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">• 使学生掌握常微分方程的基本概念，包括微分方程的阶、序、解、通解、奇解等。
• 能够判别常微分方程的类型和阶数。
• 理解常微分方程在实际问题中的应用。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">• 常微分方程的基本概念和定义
• 常微分方程的类型和阶数
• 常微分方程的解法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">• 难点一：学生对抽象的数学概念理解困难。
• 应对措施：结合实际问题，用生动形象的例子解释抽象的概念，降低学习难度。
• 难点二：学生缺乏解题技巧和方法。
• 应对措施：讲解解题思路和方法，并提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">• 教材　课件：PPT　教学视频　习题册</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">• 启发式教学：引导学生思考，积极探索
• 案例教学：结合实际问题，提高学生学习兴趣
• 多媒体教学：利用多媒体手段，增强教学效果
• 练习巩固：通过练习题，检验学生学习效果</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课效果不错，学生学习的积极性很大，这主要是因为在教学过程中带入了实际问题。数学的抽象性离不开直观形象，将抽象与形象相结合，符合人们认识事物的习惯与规律，降低了理论学习的难度，有利于学生理性认识与感性认识的结合。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>■ 【教师】在引例中由具体问题引出微分的定义，为微分的应用的做好理论铺垫
例 1（曲线方程） 一曲线通过点 $(0,1)$ 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程．
解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$．根据导数的定义，可得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \qquad (5\text{-}1)$$
即
$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x,$$
等式两端同时积分得
$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$
其中 C 为任意常数．又因为曲线通过点 $(0,1)$，代入上式，解出 $C=1$．
因此，所求曲线方程为
$$y=x^2+1.$$
例 2（自由落体运动） 在离地面高度为 S_0 处，将一小球以初速度 V_0 垂直上抛，若不计空气阻力，求物体的运动方程，计算物体何时回到原处？
解 设小球的运动方程为 $S=S(t)$，如图 5-1 所示建立坐标系．由于小球仅受重力作用（不计空气阻力），因此其加速度就是重力加速度，由此可得
$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-g, \qquad (5\text{-}2)$$
上式中的负号是因为重力方向与选定的正方向相反．对上式两端积分一次得
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1, \qquad (5\text{-}3)$$
再积分一次得
$$S=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \qquad (5\text{-}4)$$
其中 C_1，C_2 都是任意常数．
由题意可知</td><td>学习常微分方程的基本概念，及其应用。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=V_0,\quad S|_{t=0}=S_0,$$

将它们分别代入式（5-3）和式（5-4）可得

$$C_1=V_0,\quad C_2=S_0,$$

即所求物体的运动方程为

$$S=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t+S_0.$$

当 $S=S_0$ 时，可得 $t_1=0$，$t_2=\dfrac{2V_0}{g}$，因此，经过 $\dfrac{2V_0}{g}$ 秒后，小球回到原处.

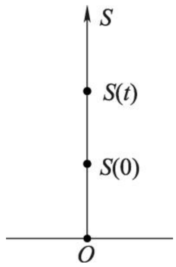


图 5-1

例 3（死亡年代的测定）　人体死亡之后，体内 C^{14} 的含量就不断减少．已知 C^{14} 的衰变速度与当时体内 C^{14} 的含量成正比，试建立任意时刻遗体内 C^{14} 含量应满足的方程.

解　设 t 时刻遗体内 C^{14} 的含量为 $p=p(t)$，由题意可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kp\ (k\text{ 为常数，且 }k>0),$$

等式右边的负号表示随着时间 t 的增加，$p(t)$ 在减少.

■　**【教师】讲解常微分方程的基本概念，并通过例题介绍其应用**

定义 1　含有自变量、未知函数以及未知函数导数或微分的方程，称为微分方程，简称方程．未知函数为一元函数的方程称为常微分方程；未知函数为多元函数的方程称为偏微分方程．本章只讨论常微分方程.

定义 2　微分方程中所含未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶.

例 1 得到的式（5-1）、例 2 得到的式（5-3）所含未知函数的导数都为一阶导数，因此，这两个方程为一阶微分方程；例 2 得到的式（5-2）所含未知函数的导数为二阶导数，因此它是二阶微分方程；而方程 $y'''-2y'+3x^2=0$ 则是三阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程记为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{5-5}$$

其中，F 是 $n+2$ 个变量的函数，x 为自变量，y 为 x 的未知函数，而 $y',\cdots,y^{(n)}$ 依次是未知函数 y 的一阶、二阶，…，

n 阶导数.

如果能从式（5-5）中解出最高阶导数，则微分方程还可写为

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{5-6}$$

若微分方程中未知函数 y 及其各阶导数 $y', \cdots, y^{(n)}$ 都是一次的（且不含交叉乘积），则称为**线性方程**，否则称为**非线性方程**.

定义 3　任何能满足微分方程的函数都称为微分方程的**解**．如果 n 阶微分方程的解中含有 n 个彼此独立的任意常数，则称为方程的**通解**．通解中的任意常数确定后，则称其为**特解**.

定义 4　用来确定任意常数的条件称为**初始条件**或**初值条件**.

求一阶微分方程 $y'=f(x, y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解的问题，称为一阶微分方程的**初值问题**，记作

$$\begin{cases} y'=f(x, y), \\ y|_{x=x_0}=y_0 . \end{cases} \tag{5-7}$$

微分方程特解的图形是一条曲线，称为微分方程的**积分曲线**，通解的图形是一族相互平行的曲线（有无数多条），称为**积分曲线族**，如图 5-2 所示.

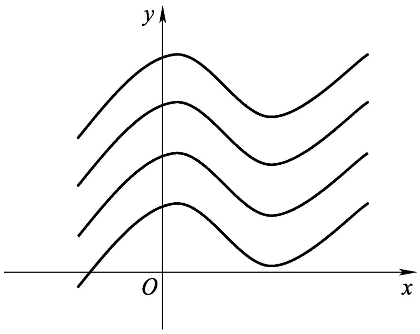


图 5-2

例 4　验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是二阶微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解.

证明　因为

$$y'=-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x},$$

$$y''=4C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x},$$

将 y，y'，y'' 代入方程 $y''+y'-2y=0$ 左边得

$$4C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-2C_1\mathrm{e}^{-2x}-2C_2\mathrm{e}^{x}=0,$$

因此，函数 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$ 是方程 $y''+y'-2y=0$ 的解.

■　**【学生】掌握常微分方程的基本概念**

<table>
<tr><td>课堂测验
(10 min)</td><td>■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(30 min)</td><td>

■ 【教师】讲解可分离变量微分方程的解法，并通过例题介绍其应用

求解形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$ 的一阶微分方程，就是求函数 $f(x)$ 的原函数，等式两边直接积分即可求解．但并不是所有一阶微分方程方程都可以这样直接积分求解，例如，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy,$$

该方程与上面方程不同的是等式右边有未知量 y，而 y 恰是我们要求的关于 x 的函数，故无法参与积分．但将该方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

则解决了上述问题，等式两边积分得

$$\ln|y|=x^2+C_1.$$

类似地，还有上一节中例 3 的微分方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kp$（$k$ 为常数，且 $k>0$），也不可以直接积分求解，应采用上述方法先变形后再积分．这种变形法称为分离变量法，可以分离变量的方程称为可分离变量方程．

定义 1　如果一阶微分方程可以化为

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{5-8}$$

的形式，则称该方程为可分离变量的微分方程．

这类微分方程总能经过简单的代数运算，将不同的变量与微分分离到方程的两边，具体的解法如下．

第一步：分离变量，将方程化为式（5-8）的形式，使方程两边都仅含一个变量．

第二步：等式两端积分，可得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别表示 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，C 为任意常数，则式（5-8）的通解为

$$G(y)=F(x)+C. \tag{5-9}$$

</td><td>学习可分离变量微分方程的解法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$ 的通解.

解　当 $y\neq 0$ 时，将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=x\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int x\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C_1},$$

所以

$$y=\pm\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

当 C_1 取遍任何实数时，$\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 取遍了除零以外的任何实数.那么记 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，于是有

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\quad(C\neq 0).\tag{5-11}$$

显然，$y=0$ 也是原方程的解，那么在式（5-11）中，若 $C=0$ 即可以得到 $y=0$ 这个解，因此，方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\ (C\text{ 为任意常数}).$$

说明　为方便起见，在以后解微分方程的过程中，如果积分后出现对数，可以不再详细写出处理绝对值记号的过程，即若已解出

$$\ln|y|=f(x)+C_1,$$

则可以立即写出 $y=C\mathrm{e}^{f(x)}$.

例 2　求 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y},\\ y|_{x=0}=0\end{cases}$ 的解.

解　方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2x-y}$ 是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得

$$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=0$，解得 $C=\frac{1}{2}$，所以满足初值问题的特解为

	$$\mathrm{e}^{y}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+1).$$ 说明　这个解是方程的隐式解，这里没有必要解出 y．实际上，有些方程只能得到隐式解． 例 3　求解微分方程 $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$． 解　由式（5-10）可知，这是一个可分离变量的微分方程，分离变量后得 $$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=-\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$ 两边积分得 $$\ln\|y^2-1\|=-\ln\|x^2-1\|+\ln\|C\|,$$ 即 $$(y^2-1)(x^2-1)=C.$$ 例 4　设 $p(x)$ 为连续函数，求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$． 解　这是一个可分离变量的微分方程．当 $y\neq 0$ 时，分离变量后，得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$ 两边积分得 $$\ln\|y\|=-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1,$$ $$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad (5\text{-}12)$$ 这里把 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 看成是 $p(x)$ 的一个确定的原函数，不含积分常数．同时，在式（5-12）中，若 $C=0$，则 $y=0$，仍然是原方程的解，因此式（5-12）是方程的通解． ■ **【学生】掌握可分离变量微分方程的解法**	
课堂测验 (10 min)	■ **【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况** ■ **【学生】做测试题目** ■ **【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程** ■ **【学生】核对答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧**	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识
课堂小结 (5 min)	■ **【教师】简要总结本节课的要点** 本节课学习了常微分方程的基本概念及其应用，可分离变量微分方程的解法。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ **【学生】总结回顾知识点**	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">常微分方程的基本概念（2）</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">对上一课（第 1 部分）中介绍的常微分方程的基本概念有扎实的了解。这包括定义、类型、顺序、</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识:学生将能够定义和识别可分离变量和齐次微分方程。，理解:学生将了解求解这些类型的微分方程的基本逻辑和程序。，应用:学生将能够将适当的求解方法应用于涉及可分离变量或齐次性的各种一阶常微分方程问题。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">可分离变量微分方程的解法:，变量分离法，线性化方法，齐次微分方程的解法:，降阶法，代换法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点一:学生难以理解可分离变量和齐次微分方程的解题思路。，应对措施:，结合实际问题，讲解解题思路和方法。，提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。，难点二:学生缺乏解题技巧和方法。，应对措施:，讲解解题思路和方法，并提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材:《常微分方程》，课件：PPT，教学视频，习题册</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">启发式教学：引导学生思考，积极探索，案例教学：结合实际问题，提高学生学习兴趣，多媒体教学：利用多媒体手段，增强教学效果，练习巩固：通过练习题，检验学生学习效果</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课发现部分学生缺乏练习，无法将所学知识很好地应用到题目中。在今后的教学中应更加注重课堂练习环节的作用，将其与平时成绩紧密结合，让学生自主参与，消除学生的惰性，培养学生良好的学习习惯。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>

■ 【教师】讲解齐次型微分方程，并通过例题介绍其应用

定义 2　一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 中，若 $f(x,y)$ 能写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，即

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

则称

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad （5-13）$$

为齐次型微分方程，简称齐次方程.

齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 不是可分离变量的微分方程，通过变量代换，可变成关于新变量的可分离变量的微分方程．下面我们来讨论具体的解法.

令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $y=ux$，因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入式（5-13）中得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

再分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

求出积分后，再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u，就可以得齐次方程（5-13）的通解.

例 5　求微分方程 $xy'=y(\ln y-\ln x)$ 的通解.

解　将方程整理后得

</td><td>学习齐次型微分方程。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

这是一个齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，则方程可化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u,$$

分离变量后得

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}dx,$$

积分得

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|\,(C\neq 0),$$

于是有

$$\ln u-1=Cx,$$

$$u=e^{Cx+1}\ (C\neq 0),$$

代回原变量 $u=\frac{y}{x}$ 得原方程的解为

$$y=xe^{Cx+1}\ (C\neq 0).$$

当 $\ln u-1=0$ 时，$\frac{y}{x}=e$，即 $y=ex$ 也是原方程的解. 此解可从上述解中取 $C=0$ 得到. 因此,

$$y=xe^{Cx+1}\ (C\text{ 为任意常数})$$

是原方程的通解.

例 6 求方程 $x^2\frac{dy}{dx}+y^2=xy\frac{dy}{dx}$ 通解.

解 将方程整理后得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，将 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入上式，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1},$$

分离变量得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{x}dx,$$

积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

<table>
<tr><td></td><td>
即

$$\ln|xu| = u - C_1 .$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得

$$\ln|y| = \frac{y}{x} - C_1 ,$$

即

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} .$$

■ 【学生】掌握齐次型微分方程的解法
</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂测验
(10 min)</td><td>
■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧
</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(20 min)</td><td>
■ 【教师】讲解一阶线性微分方程，并通过例题介绍其应用

定义 3 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \qquad (5\text{-}14)$$

的方程称为一阶线性微分方程（因为它对于未知函数 y 及其导数 y' 是一次方程），其中 $P(x)$ ，$Q(x)$ 是 x 的已知连续函数.

当 $Q(x)\neq 0$ 时，式（5-14）称为一阶线性非齐次微分方程，$Q(x)$ 称为自由项或非齐次项. 当 $Q(x)=0$ 时，式（5-14）变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0 , \qquad (5\text{-}15)$$

称为对应于式（5-14）的一阶线性齐次微分方程.

下面讨论一阶线性微分方程的解法. 通过本节例 4 可知一阶线性齐次微分方程即式（5-15）的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} . \qquad (5\text{-}16)$$

显然，它不是线性非齐次方程即式（5-14）的解. 这两个方程的区别在于式（5-14）的右端为自由项 $Q(x)$. 因此，可以设想将齐次方程通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$ ，即

$$y = u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} , \qquad (5\text{-}17)$$
</td><td>学习一阶线性微分方程和伯努利方程。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

则有可能为式（5-14）的解．将 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 及其导数

$$\frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

代入式（5-14）中得

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

化简得

$$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

积分后得

$$u(x)=\int[Q(x)e^{\int P(x)dx}]dx+C,$$

再代入式（5-17），便可得非齐次线性方程即式（5-14）的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \qquad （5-18）$$

或

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \qquad （5-19）$$

式（5-19）等号右端第一项恰好是齐次线性方程即式（5-15）的通解，第二项是非齐次方程即式（5-14）的一个特解（式（5-18）中令 $C=0$）．由此可知：

一阶线性非齐次微分方程的通解等于该方程的一个特解及与其对应的线性齐次微分方程的通解之和．这就是一阶线性非齐次微分方程通解的结构．

上面所采用的方法，即将齐次方程的通解中的任意常数项 C 换成 x 的未知函数代入方程，求非齐次方程通解的方法，称为**常数变易法**．用常数变异法求解非齐次线性方程通解的步骤如下：

（1）先求对应齐次方程的通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$；

（2）将齐次方程的通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，并把 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入非齐次方程求出 $u(x)$，然后写出非齐次方程的通解．

例 7　求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x}$ 的通解．

解法一　常数变易法．

先求 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$ 的通解，当 $y\neq 0$ 时，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

两边积分得

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

其中 C 为非零任意常数，化简得

$$y=\frac{C}{x}.$$

由于 $y=0$ 也是该方程的解，可由上式 $C=0$ 得到，所以齐次方程的通解就是

$$y=\frac{C}{x},$$

其中 C 为任意常数.

用常数变易法把常数换成 $C=u(x)$ 得

$$y=\frac{u(x)}{x},$$

两边求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{u'(x)x-u(x)}{x^2},$$

代入原方程得

$$\frac{u'(x)}{x}=\frac{\cos x}{x},$$

即

$$u'(x)=\cos x,$$

两边积分得

$$u(x)=\sin x+C,$$

所以原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$

解法二 公式法.

根据式（5-15），设 $P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=\frac{\cos x}{x}$，代入式（5-18），有

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\cos x}{x}x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$

例 8 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y+x}$ 的通解.

解 该方程不是未知函数 y 的线性方程，也不是我们前面介绍过的任何一种．但如果把自变量和因变量互相转换，把 y 看作自变量，x 看作是关于 y 的未知函数，则原方程可变型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y+x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y.$$

这是一个以 y 为自变量、x 为未知函数的非齐次线性微分

方程，可设 $P(y)=-1$，$Q(y)=y$，代入式（5-18）得

$$x=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}y}\left(\int y\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\mathrm{e}^{y}\left(\int y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{y}(-y\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-y}+C)=C\mathrm{e}^{y}-y-1,$$

故原方程的通解为 $x=C\mathrm{e}^{y}-y-1$.

■ **【学生】掌握一阶线性微分方程的定义和解法**

■ **【教师】讲解伯努利方程，并通过例题介绍其应用**

定义 4　方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\ (n\neq 0且n\neq 1) \qquad （5\text{-}20）$$

称为伯努利（Bernoulli）方程．当 $n=0$ 或 $n=1$ 时，方程就是线性微分方程．

伯努利方程是非线性的，它与线性方程的区别就在于等式右端的自由项．在式（5-20）的两端同除以 y^{n} 可得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x), \qquad （5\text{-}21）$$

可以看出，上式左端第一项与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1-n$，因此，设 $z=y^{1-n}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

将式（5-21）两端同时乘以 $1-n$，再通过上述变量代换便得到线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x),$$

求出该方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z 便可得到伯努利方程的通解．

例 9　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{3}=\frac{(1-2x)y^{4}}{3}$ 的通解．

解　该方程是伯努利方程，等式两边同时除以 $\frac{y^{4}}{3}\ (y\neq 0)$ 得

$$3y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^{-3}=1-2x\ (y\neq 0).$$

令 $z=y^{-3}$，那么

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=2x-1.$$

<table>
<tr><td></td><td>设 $P(x)=-1$， $Q(x)=2x-1$，代入式（5-18）求得
$$z=\mathrm{e}^{-\int -1\mathrm{d}x}\left[\int(2x-1)\mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{x}\left[\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$$
$$=-1-2x+C\mathrm{e}^{x},$$
故原方程的解为
$y^{-3}=-1-2x+C\mathrm{e}^{x}$ 或 $y^{3}(C\mathrm{e}^{x}-1-2x)=1$ （$y\neq 0$，C 为任意常数）.
显然， $y=0$ 也是原方程的解，所以原方程的解为
$y^{-3}=-1-2x+C\mathrm{e}^{x}$ 或 $y^{3}(C\mathrm{e}^{x}-1-2x)=1$ （C 为任意常数）.
■ 【学生】了解伯努利方程</td><td></td></tr>
<tr><td>问题讨论
(10 min)</td><td>■ 【教师】组织学生讨论以下问题
1．一阶线性齐次微分方程与齐次方程是否相同？
2．一阶线性非齐次微分方程有哪些解法？
*3．伯努利方程和线性非齐次微分方程有何区别？
■ 【学生】讨论、发言</td><td>通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解</td></tr>
<tr><td>课堂测验
(10 min)</td><td>■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td>课堂小结
(5 min)</td><td>■ 【教师】简要总结本节课的要点
本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。
■ 【学生】总结回顾知识点
■ 【教师】布置课后作业：习题 5.2</td><td>总结知识点，巩固印象</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">一阶线性微分方程</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">学生已经学习过高等数学中的微分学和积分学，具备一定的数学基础。，部分学生对微分方程的概念和应用还比较陌生，缺乏直观理解。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识:学生将能够定义和识别一阶线性微分方程。，理解:学生将了解求解一阶线性微分方程的基本逻辑和程序。，应用:学生将能够将适当的求解方法应用于各种一阶线性微分方程问题。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">掌握一阶线性微分方程的解法一阶线性微分方程的通解公式，一阶线性微分方程的解法:，分离变量法，积分因子法，变换法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">点一:学生难以理解一阶线性微分方程的解题思路。，应对措施:，结合实际问题，讲解解题思路和方法。，提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。，难点二:学生缺乏解题技巧和方法。，应对措施:，讲解解题思路和方法，并提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材：《常微分方程》，课件：PPT，教学视频，习题册</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">启发式教学：引导学生思考，积极探索，案例教学：结合实际问题，提高学生学习兴趣，多媒体教学：利用多媒体手段，增强教学效果，练习巩固：通过练习题，检验学生学习效果</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课效果不错，学生学习的积极性很大，这主要是因为在教学过程中带入了实际问题。数学的抽象性离不开直观形象，将抽象与形象相结合，符合人们认识事物的习惯与规律，降低了理论学习的难度，有利于学生理性认识与感性认识的结合。，在今后的教学中，可以进一步丰富教学内容，增加案例教学的比例，并加强对学生的课后辅导，帮助学生更好地掌握知识。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤

■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(20 min)</td><td>■ 【教师】讲解一阶线性微分方程，并通过例题介绍其应用
定义 3　形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \qquad (5\text{-}14)$$
的方程称为一阶线性微分方程（因为它对于未知函数 y 及其导数 y' 是一次方程），其中 $P(x)$， $Q(x)$ 是 x 的已知连续函数．当 $Q(x)\neq 0$ 时，式（5-14）称为一阶线性非齐次微分方程，$Q(x)$ 称为自由项或非齐次项．当 $Q(x)=0$ 时，式（5-14）变为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \qquad (5\text{-}15)$$
称为对应于式（5-14）的一阶线性齐次微分方程．
下面讨论一阶线性微分方程的解法．通过本节例 4 可知一阶线性齐次微分方程即式（5-15）的通解为
$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \qquad (5\text{-}16)$$
显然，它不是线性非齐次方程即式（5-14）的解．这两个方程的区别在于式（5-14）的右端为自由项 $Q(x)$．因此，可以设想将齐次方程通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即
$$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \qquad (5\text{-}17)$$
则有可能为式（5-14）的解．将 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 及其导数
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$
代入式（5-14）中得
$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$
化简得
$$u'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$
积分后得
$$u(x)=\int[Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}]\mathrm{d}x+C,$$
再代入式（5-17），便可得非齐次线性方程即式（5-14）的通解</td><td>学习一阶线性微分方程和伯努利方程。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] \qquad (5\text{-}18)$$

或

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\ . \qquad (5\text{-}19)$$

式（5-19）等号右端第一项恰好是齐次线性方程即式（5-15）的通解，第二项是非齐次方程即式（5-14）的一个特解（式（5-18）中令 $C=0$）．由此可知：

一阶线性非齐次微分方程的通解等于该方程的一个特解及与其对应的线性齐次微分方程的通解之和. 这就是一阶线性非齐次微分方程通解的结构.

上面所采用的方法，即将齐次方程的通解中的任意常数项 C 换成 x 的未知函数代入方程，求非齐次方程通解的方法，称为**常数变易法**．用常数变异法求解非齐次线性方程通解的步骤如下：

（1）先求对应齐次方程的通解 $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$；

（2）将齐次方程的通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，并把 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入非齐次方程求出 $u(x)$，然后写出非齐次方程的通解.

例 7　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$ 的通解.

解法一　常数变易法.

先求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=0$ 的通解，当 $y\neq 0$ 时，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

其中 C 为非零任意常数，化简得

$$y = \frac{C}{x}.$$

由于 $y=0$ 也是该方程的解，可由上式 $C=0$ 得到，所以齐次方程的通解就是

$$y = \frac{C}{x},$$

其中 C 为任意常数.

用常数变易法把常数换成 $C=u(x)$ 得

$$y = \frac{u(x)}{x},$$

两边求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u'(x)x - u(x)}{x^2},$$

代入原方程得

$$\frac{u'(x)}{x}=\frac{\cos x}{x},$$

即

$$u'(x)=\cos x,$$

两边积分得

$$u(x)=\sin x+C,$$

所以原方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$

解法二　公式法.

根据式（5-15），设 $P(x)=\frac{1}{x}$， $Q(x)=\frac{\cos x}{x}$，代入式（5-18），有

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\cos x}{x}x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}(\sin x+C).$$

例 8　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y+x}$ 的通解.

解　该方程不是未知函数 y 的线性方程，也不是我们前面介绍过的任何一种. 但如果把自变量和因变量互相转换，把 y 看作自变量， x 看作是关于 y 的未知函数，则原方程可变型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y+x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y.$$

这是一个以 y 为自变量、 x 为未知函数的非齐次线性微分方程，可设 $P(y)=-1$， $Q(y)=y$，代入式（5-18）得

$$x=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}y}\left(\int y\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\mathrm{e}^{y}\left(\int y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{y}(-y\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-y}+C)=C\mathrm{e}^{y}-y-1,$$

故原方程的通解为 $x=C\mathrm{e}^{y}-y-1$.

■ **【学生】掌握一阶线性微分方程的定义和解法**

■ **【教师】讲解伯努利方程，并通过例题介绍其应用**

定义 4　方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\ (n\neq 0\text{且}n\neq 1)\qquad（5\text{-}20）$$

称为伯努利（Bernoulli）方程. 当 $n=0$ 或 $n=1$ 时，方程就是线性微分方程.

伯努利方程是非线性的，它与线性方程的区别就在于等式右端

的自由项．在式（5-20）的两端同除以 y^n 可得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)\text{，}\qquad（5-21）$$

可以看出，上式左端第一项与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1-n$，因此，设 $z=y^{1-n}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{，}$$

将式（5-21）两端同时乘以 $1-n$，再通过上述变量代换便得到线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\text{，}$$

求出该方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z 便可得到伯努利方程的通解．

例 9　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{3}=\frac{(1-2x)y^4}{3}$ 的通解．

解　该方程是伯努利方程，等式两边同时除以 $\frac{y^4}{3}\ (y\neq 0)$ 得

$$3y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^{-3}=1-2x\ (y\neq 0)\text{．}$$

令 $z=y^{-3}$，那么

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{，}$$

则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=2x-1\text{．}$$

设 $P(x)=-1$，$Q(x)=2x-1$，代入式（5-18）求得

$$z=\mathrm{e}^{-\int -1\mathrm{d}x}\left[\int(2x-1)\mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{x}\left[\int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=-1-2x+C\mathrm{e}^{x}\text{，}$$

故原方程的解为

$y^{-3}=-1-2x+C\mathrm{e}^{x}$ 或 $y^{3}(C\mathrm{e}^{x}-1-2x)=1$（$y\neq 0$，$C$ 为任意常数）．

显然，$y=0$ 也是原方程的解，所以原方程的解为

$y^{-3}=-1-2x+C\mathrm{e}^{x}$ 或 $y^{3}(C\mathrm{e}^{x}-1-2x)=1$（$C$ 为任意常数）．

■ **【学生】了解伯努利方程**

问题讨论（10 min）	■ **【教师】组织学生讨论以下问题** 1．一阶线性齐次微分方程与齐次方程是否相同？ 2．一阶线性非齐次微分方程有哪些解法？ *3．伯努利方程和线性非齐次微分方程有何区别？	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解

	■ 【学生】讨论、发言	
课堂测验（10 min）	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结（5 min）	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了齐次型微分方程和一阶线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 5.2	总结知识点，巩固印象

<table>
<tr><td>教学项目</td><td colspan="5">二阶常系数线性微分方程</td></tr>
<tr><td>授课地点</td><td colspan="2">多媒体教室</td><td colspan="2">授课形式</td><td>线下教学</td></tr>
<tr><td>学情分析</td><td colspan="5">知识:学生将能够定义和识别二阶常系数线性齐次微分方程。
理解:学生将了解求解二阶常系数线性齐次微分方程的基本逻辑和程序。
应用:学生将能够将适当的求解方法应用于各种二阶常系数线性齐次微分方程问题。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识:学生将能够定义和识别二阶常系数线性齐次微分方程。
理解:学生将了解求解二阶常系数线性齐次微分方程的基本逻辑和程序。
应用:学生将能够将适当的求解方法应用于各种二阶常系数线性齐次微分方程问题。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="5">掌握二阶常系数线性齐次微分方程的解法</td></tr>
<tr><td>教学难点及应对</td><td colspan="5">难点一:学生难以理解特征方程的概念和作用。
应对措施:
结合实际问题，讲解特征方程的物理意义。
通过例题讲解特征方程的求解方法。
难点二:学生难以根据特征方程根的情况构造通解。
应对措施:
讲解通解构造的基本思路和方法。
提供大量的练习题，让学生巩固所学知识。</td></tr>
<tr><td>教学资源</td><td colspan="5">教材:《常微分方程》
课件：PPT
教学视频
习题册</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">启发式教学：引导学生思考，积极探索
案例教学：结合实际问题，提高学生学习兴趣
多媒体教学：利用多媒体手段，增强教学效果
练习巩固：通过练习题，检验学生学习效果</td></tr>
<tr><td>教学反思</td><td colspan="5">本节课效果不错，通过复习测验，发现学生对于本章知识都掌握的不错，只出现了一些小问题。教师对学生进行了鼓励，并针对出现的小问题进行了讲解，排除了学生的学习隐患。</td></tr>
<tr><td>授课教师（签字）</td><td></td><td>教研室主任（签字）</td><td></td><td>教学单位审查意见</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>教学过程</th><th>主要教学内容及步骤</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td colspan="3">第一节课</td></tr>
<tr><td>考勤
(2 min)</td><td>■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤
■ 【学生】班干部报请假人员及原因</td><td>培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(33 min)</td><td>■ 【教师】讲解二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法，并通过例题介绍其应用
由上节课学习的定理 2 知，要解出方程（5-28）的通解，只要找出其两个线性无关的特解即可．由于方程（5-28）的左端是 y''， y' 及 y 的线性关系式，且 p， q 都是常数，要使 y''， py'， qy 三项之和为零，那么 y''， y'， y 应该是同一类型的函数．而指数函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 与其各阶导数只相差一个常数因子，因此可猜想方程（5-28）具有 $y=\mathrm{e}^{rx}$（r 为待定常数）形式的解．下面将 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 代入方程（5-28），看看 r 应该满足什么条件．
对 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 求一阶、二阶导数得
$$y'=r\mathrm{e}^{rx}，\quad y''=r^2\mathrm{e}^{rx}，$$
把 y''， y'， y 代入方程（5-28）得
$$(r^2+pr+q)\mathrm{e}^{rx}=0，$$
由于 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，故有
$$r^2+pr+q=0\,. \tag{5-29}$$
这表明，只要 r 是代数方程（5-29）的根，那么 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是微分方程（5-28）的解．代数方程（5-29）称为微分方程（5-28）的特征方程，特征方程的根称为特征根．这样就把求微分方程解的问题转化为求特征方程根的问题．
根据特征方程（5-29）的根
$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$
有相异实根、重根、共轭复根 3 种情形，现分别进行如下讨论．
（1）当 $p^2-4p>0$ 时，特征方程有两个相异的实根 r_1，r_2，此时微分方程（5-28）对应的两个特解为 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$．因为
$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\mathrm{e}^{r_1x}}{\mathrm{e}^{r_2x}}=\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}$$
不是常数，故 y_1， y_2 线性无关，方程（5-28）的通解为</td><td>学习二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

（2）当 $p^2 - 4q = 0$ 时，特征方程有两个相等的实根，记为 $r = -\frac{p}{2}$，这时可得方程（5-28）的一个特解 $y_1 = e^{rx}$. 但还需要再找另一个与 y_1 线性无关的特解 y_2，即 $\frac{y_2}{y_1} \neq$ 常数. 故可设 $y_2 = u(x) y_1 = u(x) e^{rx}$，其中 $u(x)$ 为待定函数.

假设 y_2 是方程（5-28）的解，且

$$y_2' = e^{rx}(u' + ru),$$

$$y_2'' = e^{rx}(u'' + 2ru' + r^2 u),$$

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入方程（5-28），可得

$$e^{rx}[(u'' + 2ru' + r^2 u) + p(u' + ru) + qu] = 0.$$

因为 $e^{rx} \neq 0$，故有

$$u'' + (2r + p)u' + (r^2 + pr + q)u = 0,$$

又因为 $r = -\frac{p}{2}$ 为特征根，即

$$2r + p = 0, \quad r^2 + pr + q = 0,$$

故有 $u'' = 0$.

简单起见，取特解 $u = x$，则 $y_2 = x y_1 = x e^{rx}$ 是方程（5-28）的与 y_1 线性无关的一个特解，故方程（5-28）的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx} \ (C_1, C_2 \text{为任意常数}).$$

（3）当 $p^2 - 4q < 0$ 时，特征方程（5-29）有一对共轭复根，设为

$$r_1 = \alpha + i\beta, \ r_2 = \alpha - i\beta,$$

其中 $\alpha = -\frac{p}{2}$，$\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$，这时微分方程（5-28）有两个复数解，即

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

而实际常用的是实数形式的解，因此还需对上述两个特解做一些处理. 应用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，可将 y_1，y_2 变形为为

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

记 $$\overline{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$\overline{y}_2 = \frac{1}{i2}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$，由 5.4 节的定理 1 知 $\overline{y}_1$，$\overline{y}_2$ 都是微分方程（5-28）的解，且

$$\frac{\overline{y}_1}{\overline{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \tan\beta x,$$

不是常数，故 $\overline{y}_1$ 和 $\overline{y}_2$ 线性无关，因此方程（5-28）的通解为

$$y = C_1\overline{y}_1 + C_2\overline{y}_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求解二阶常系数齐次线性方程通解的步骤及结论如下：

（1）写出对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$；

（2）求出特征方程的根 r_1，r_2；

（3）根据两个特征根的不同情形，写出微分方程（5-28）的通解，如表 5-1 所示.

表 5-1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不等实根：$r_1 \neq r_2$	$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等实根：$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
一对共轭复根：$r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

例 1　求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$，解出特征根 $r_1 = 2$，$r_2 = 3$，故所求微分方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\ (C_1,\ C_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 2　求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解　先求出通解，再求满足初始条件的特解.

特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$，特征根为二重根 $r = 2$，故微分方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

代入 $y|_{x=0}=1$，求得 $C_1 = 1$；因为

$$y' = 2(1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(2 + C_2 + 2C_2x),$$

代入 $y'|_{x=0}=0$，求得 $C_2 = -2$．故微分方程满足题中初始条件的特解为

$$y = (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

例 3　求微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$，求解得共轭复根为

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \mathrm{i}\sqrt{20-4}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}2,$$

即 $\alpha = -1$，$\beta = 2$，故原方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

<table>
<tr><td></td><td>■ 【学生】掌握可降阶的微分方程的解法</td><td></td></tr>
<tr><td>课堂测验
(10 min)</td><td>■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况
■ 【学生】做测试题目
■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程
■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧</td><td>通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象</td></tr>
<tr><td colspan="3">第二节课</td></tr>
<tr><td>知识讲解
(20 min)</td><td>■ 【教师】讲解二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法，并通过例题讲解介绍其应用
1． $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型
当 $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 时，方程（5-27），变为
$$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}，\quad（5\text{-}30）$$
其中 λ 是常数， $P_n(x)$ 为关于 x 的 n 次多项式
$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n .$$
在前面的讨论中已知， y， y'， y'' 为相同形式的函数，同理，在方程（5-30）中， y， y'， y'' 也应该与方程右端的形式一致．故假设方程（5-30）有形如
$$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\quad（5\text{-}31）$$
的特解，其中 $Q(x)$ 为某个多项式（次数待定）．将
$$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}，$$
$$y^{*\prime}=[\lambda Q(x)+Q'(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}，$$
$$y^{*\prime\prime}=[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]\mathrm{e}^{\lambda x}，$$
代入方程（5-30）中，整理可得
$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)\quad（5\text{-}32）$$
这表明，若 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是方程（5-30）的解，则 $Q(x)$ 必然是方程（5-32）的解．因此，可以通过方程（5-32）的解 $Q(x)$，进而确定 y^*．由于方程（5-32）的右端为 n 次多项式，故 $Q(x)$ 也应该是多项式．对于多项式 $Q(x)$，其次数及系数就是我们要确定的．下面分情况讨论 $Q(x)$ 的次数及系数．$Q(x)$ 的系数与 λ 有关．
（1）若 λ 不是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$，则方程（5-32）中，左端多项式的最高次幂出现在 $Q(x)$ 中，因此 $Q(x)$ 的次数与 $P_n(x)$ 的次数相同，也为 n 次．不妨将 $Q(x)$ 定义为 $Q_n(x)$，即
$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n\triangleq Q_n(x) .$$
（2）若 λ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的实单根，即满足</td><td>学习二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法。边做边讲，及时巩固练习，实现教学做一体化</td></tr>
</table>

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0,\\2\lambda+p\neq 0,\end{cases}$$

此时，方程（5-32）可简化为

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_n(x).$$

此时 $Q'(x)$ 与 $P_n(x)$ 的次数相同，故 $Q(x)$ 应为 $n+1$ 次多项式，为使讨论的形式简化，我们设 $Q(x)=xQ_n(x)$.

（3）若 λ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的实重根，即满足

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0,\\2\lambda+p=0,\end{cases}$$

此时，方程（5-32）变为

$$Q''(x)=P_n(x),$$

故 $Q(x)$ 应为 $n+2$ 次多项式，不妨设

$$Q(x)=x^2Q_n(x).$$

综上所述，特解 y^* 和 λ 的关系可以统一表示为

$$y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

其中 $Q_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 同次的多项式，k 根据 λ 不是特征根、是实单根、是实重根分别取 0，1 或 2，如表 5-2 所示.

表 5-2

λ	k	y^*
λ 不是特征根	0	$y^*=Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ 是实单根	1	$y^*=xQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ 是实重根	2	$y^*=x^2Q_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$

说明　以上结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程．k 是特征方程中特征根 λ 的重复次数.

例 4　求方程 $y''+4y'+4y=3x\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2+4r+4=0$，特征根 $r_1=r_2=-2$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

因为 $f(x)=3x\mathrm{e}^{-2x}$，所以 $\lambda=-2$，$n=1$；又因为 $\lambda=-2$ 是特征方程的二重根，故 $k=2$，即可设 $y^*=x^2(ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$.

因为

$$y^{*\prime}=\mathrm{e}^{-2x}[-2ax^3+(3a-2b)x^2+2bx],$$

$$y^{*\prime\prime}=\mathrm{e}^{-2x}[4ax^3+(-12a+4b)x^2+(6a-8b)x+2b],$$

代入原方程，整理得

$$6ax+2b=3x,$$

解得

$$a=\frac{1}{2},\ b=0,$$

于是有

$$y^*=\frac{1}{2}x^3e^{-2x},$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^3e^{-2x}.$$

例 5　求方程 $y''-2y'+3y=2x+1$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2-2r+3=0$，特征根 $r_1=1+\sqrt{2}i$，$r_2=1-\sqrt{2}i$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x).$$

因为 $f(x)=2x+1$，所以 $\lambda=0$，$n=1$．又因为 $\lambda=0$ 不是特征根，故 $k=0$，即可设 $y^*=ax+b$．因 $y^{*\prime}=a$，$y^{*\prime\prime}=0$，代入原方程，整理得

$$3ax-2a+3b=2x+1,$$

比较方程两边同次幂（同类项）系数得

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{7}{9},$$

于是有 $y^*=\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}$，故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}.$$

2．$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

当 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 时，方程（5-27）变为

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x],$$

其中 λ，ω 是常实数，$P_l(x)$，$P_n(x)$ 分别为关于 x 的 l，n 次多项式.

对于这一类型，可以利用欧拉公式及前面的求解方法求解．假设

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$$

是方程的特解，其中 $A(x)$，$B(x)$ 是 x 的 m 次多项式，$m=\max(l,n)$，k 根据 $\lambda\pm i\omega$ 不是特征根、是特征根分别取 0，1，如表 5-3 所示.

表 5-3

$\lambda\pm i\omega$	k	y^*
不是特征根	0	$y^*=e^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$
是特征根	1	$y^*=xe^{\lambda x}[A(x)\cos\omega x+B(x)\sin\omega x]$

说明　以上结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方

程，k 是特征方程中含根 $\lambda \pm i\omega$ 的重复次数.

例 6　求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$，特征根 $r_{1,2} = \pm \mathrm{i}$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

因为 $f(x) = x\cos 2x$，所以

$\lambda = 0$，$\omega = 2$，$P_l(x) = x$，$P_n(x) = 0$，$m = \max(l, n) = 1$．又因为 $\lambda \pm \mathrm{i}\omega = \pm 2\mathrm{i}$ 不是特征根，故 $k = 0$，即可设

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x ,$$

代入原方程，整理得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x ,$$

因此得方程组

$$\begin{cases} -3a = 1, \\ -3b + 4c = 0, \\ -3c = 0, \\ -3d - 4a = 0, \end{cases}$$

解得 $a = -\dfrac{1}{3}$，$b = 0$，$c = 0$，$d = \dfrac{4}{9}$，即原方程通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x .$$

例 7　求方程 $y'' - 3y' + 2y = 5\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的通解.

解　对应的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$，特征根 $r_1 = 2$，$r_2 = 1$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{x} .$$

因为 $f(x) = 5\mathrm{e}^{-x}\cos x$，所以

$\lambda = -1$，$\omega = 1$，$P_l(x) = 5$，$P_n(x) = 0$，$m = \max(l, n) = 0$．又因为 $\lambda \pm \mathrm{i}\omega = -1 \pm \mathrm{i}$ 不是特征根，故 $k = 0$，即可设

$$y^* = \mathrm{e}^{-x}(a\cos x + b\sin x) ,$$

代入原方程，整理得

$$(a - b)\cos x + (a + b)\sin x = \cos x ,$$

因此得方程组

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

即原方程通解为

	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x}(\cos x - \sin x)$. ■ 【学生】掌握二阶常系数线性非齐次微分方程的求解方法	
问题讨论 **(10 min)**	■ 【教师】组织学生讨论以下问题 1．在二阶常系数齐次线性微分方程的通解推导过程中，当特征方程有两个相等实根，即 $r_1 = r_2$ 时，我们取 $y_1 = e^{rx}$，$y_2 = xe^{rx}$，还可以取其他形式吗？ 2．若 $n\ (n > 2)$ 阶常系数齐次线性微分方程的特征根为 n 个相异的实根，其通解形式是什么？ ■ 【学生】讨论、发言	通过课堂讨论，活跃课堂气氛，加深学生对知识点的理解
课堂测验 **(10 min)**	■ 【教师】出几道测试题目，测试一下大家的学习情况 ■ 【学生】做测试题目 ■ 【教师】公布题目正确答案，并演示解题过程 ■ 【学生】核对自己的答题情况，对比答题思路，巩固答题技巧	通过测试，了解学生对知识点的掌握情况，加深学生对本节课知识的印象
课堂小结 **(5 min)**	■ 【教师】简要总结本节课的要点 本节课学习了二阶常系数线性微分方程的相关知识及其应用，了解了伯努利方程。课后大家要多加练习，巩固认知。 ■ 【学生】总结回顾知识点 ■ 【教师】布置课后作业：习题 5.5	总结知识点，巩固印象

教学项目	常微分方程复习		
授课地点	多媒体教室	授课形式	线下教学
学情分析	高职学生数学基础普遍薄弱，对微分方程概念理解不清晰。部分学生存在畏难情绪，解题信心不足。需要从最基础的概念开始复习，并通过简单直观的例子帮助理解。		
教学目标	知识目标：理解常微分方程的基本概念，掌握一阶微分方程和二阶常系数齐次线性方程的解法。 能力目标：能够识别基本类型的微分方程，会解简单的可分离变量方程和二阶常系数方程。 素质目标：培养学生的数学思维能力和解题规范性，建立学习信心。		
教学重点	1. 什么是微分方程（通过实例理解） 2. 可分离变量的微分方程的解法 3. 一阶线性微分方程的基本解法 4. 二阶常系数齐次线性方程的三种情况解法： - 两个不等实根的情况 - 两个相等实根的情况 - 一对共轭复根的情况		
教学难点及应对	难点：学习难点在于理解微分方程概念和掌握二阶常系数齐次线性方程的特征方程解法。 应对策略：克服难点的策略包括：实例引入微分方程概念，逐步解析例题和解题技巧；制作解题模板，强化步骤，包括特征方程、特征根求解，及通解编写；鼓励多做练习，提升能力；给予正面反馈和鼓励，帮助建立信心，克服障碍。		
教学资源	教材：《高等数学》 多媒体课件：包含动态演示和例题讲解 补充习题：精选基础练习题		
教学方法	1. 启发式教学：通过简单例子引导学生理解概念 2. 图解法：用图形辅助理解微分方程的几何意义 3. 分层教学：针对不同水平学生布置不同难度习题 4. 小组互助：鼓励学生互相讨论、互帮互学		
教学反思	重点关注学生的接受程度，随时调整教学节奏。对重点内容要反复强调，确保大部分学生能够掌握基础知识和基本解法。注意观察学生的听课状态，适时调整教学方式。		
授课教师（签字）		教研室主任（签字）	教学单位审查意见

教学过程	主要教学内容及步骤	设计意图
考勤 (2 min)	■ 【教师】清点上课人数，记录好考勤 ■ 【学生】班干部报请假人员及原因	培养学生的组织纪律性，掌握学生的出勤情况
一阶微分方程讲解及例题 (35 min)	■ 【教师】一阶微分方程解法讲解 【类型一：可分离变量方程】 *特点：可以将x和y分开到等号两边* *例1：* $y' + 2xy = 0$ *解题步骤：* ①*变形为标准形式：* $dy/dx + 2xy = 0$ ②*移项分离变量：* $dy/y = -2xdx$ ③*两边积分：* $\int dy/y = -2\int xdx$ ④*求解：* $lny = -x^2 + C^1 \therefore y = Ce^{-x^2}$ *练习1：* $y' = x/y$ *解题步骤：* ①*变形为标准形式：* $dy/dx = x/y$ ②*移项分离变量：* $ydy = xdx$ ③*两边积分：* $\int ydy = \int xdx$ ④*求解：* $y^2/2 = x^2/2 + C \therefore y = \pm\sqrt{(x^2 + 2C)}$ *例2：* $y' = y \cdot tanx$ *解题步骤：* ①*变形为标准形式：* $dy/dx = y \cdot tanx$ ②*移项分离变量：* $dy/y = tanx \cdot dx$ ③*两边积分：* $\int dy/y = \int tanx \cdot dx$ ④*求解：* $lny = -ln\|cosx\| + C \therefore y = C/cosx$ *【类型二：一阶线性微分方程】* *特点：形如* $y' + P(x)y = Q(x)$ *例3：* $y' + y = e^x$ *解题步骤：* ①*写出方程标准形式：* $y' + y = e^x$ ②*求积分因子：* $\mu = e^x$ ③*两边乘以积分因子：* $e^x \cdot y' + e^x \cdot y = e^2x$ ④*等式左边化为求导式：* $(e^x \cdot y)' = e^2x$	通过典型例题，帮助学生理解一阶微分方程的主要类型和解法，步骤要详细清晰

	⑤两边积分：$e^{x}\cdot y=1/2\cdot e^{2}x+C$ ⑥解出y：$y=1/2\cdot e^{x}+Ce^{(-x)}$ 练习2：$y'-2y=x$ 解题步骤： ①写出方程标准形式：$y'-2y=x$ ②求积分因子：$\mu=e^{(-2x)}$ ③两边乘以积分因子：$e^{(-2x)}\cdot y'-2e^{(-2x)}\cdot y=xe^{(-2x)}$ ④等式左边化为求导式：$(e^{(-2x)}\cdot y)'=xe^{(-2x)}$ ⑤两边积分：$e^{(-2x)}\cdot y=-1/2\cdot xe^{(-2x)}-1/4\cdot e^{(-2x)}+C$ ⑥解出y：$y=-1/2\cdot x-1/4+Ce^{(2x)}$ 例4：$y'+2xy=x$ 解题步骤： ①写出方程标准形式：$y'+2xy=x$ ②求积分因子：$\mu=e^{(x^2)}$ ③两边乘以积分因子：$e^{(x^2)}\cdot y'+2xe^{(x^2)}\cdot y=xe^{(x^2)}$ ④等式左边化为求导式：$\left(e^{(x^2)}\cdot y\right)'=xe^{(x^2)}$ ⑤两边积分：$e^{(x^2)}\cdot y=1/2\cdot e^{(x^2)}+C$ ⑥解出y：$y=1/2+Ce^{(-x^2)}$ 【类型三：全微分方程】 例5：$(2x+y)dx+(x-3y)dy=0$ 解题步骤： ①判断是否为全微分方程： $\partial(2x+y)/\partial y=1$ $\partial(x-3y)/\partial x=1$ 由于$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$，故为全微分方程 ②直接积分：$\int(2x+y)dx=-(x-3y)dy$ ③写出通解：$x^2+xy-3/2y^2=C$ 练习3：$(y+sinx)dx+(x+cosy)dy=0$ 解题步骤： ①判断是否为全微分方程： $\partial(y+sinx)/\partial y=1$ $\partial(x+cosy)/\partial x=1$ 由于$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$，故为全微分方程 ②直接积分：$\int(y+sinx)dx=-(x+cosy)dy$ ③写出通解：$xy+xsinx+y\cdot cosy=C$	

二阶微分方程讲解及例题 (35 min)	■【教师】二阶常系数齐次线性方程解法讲解 【情况一：两个不等实根】 *例*1：$y'' - 5y' + 6y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 5r + 6 = 0$ ②*求特征根：*$(r-2)(r-3) = 0$，$r^1 = 2$，$r^2 = 3$ ③*通解：*$y = C^1e^{2x} + C^2e^{3x}$ *练习*1：$y'' - 3y' - 4y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 3r - 4 = 0$ ②*求特征根：*$(r-4)(r+1) = 0$，$r^1 = 4$，$r^2 = -1$ ③*通解：*$y = C^1e^{4x} + C^2e^{-x}$ *例*2：$y'' - 7y' + 12y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 7r + 12 = 0$ ②*求特征根：*$(r-3)(r-4) = 0$，$r^1 = 3$，$r^2 = 4$ ③*通解：*$y = C^1e^{3x} + C^2e^{4x}$ **【*情况二：两个相等实根*】** *例*3：$y'' - 4y' + 4y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 4r + 4 = 0$ ②*求特征根：*$(r-2)^2 = 0$，$r^1 = r^2 = 2$ ③*通解：*$y = (C^1 + C^2x)e^{2x}$ *练习*2：$y'' - 6y' + 9y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 6r + 9 = 0$ ②*求特征根：*$(r-3)^2 = 0$，$r^1 = r^2 = 3$ ③*通解：*$y = (C^1 + C^2x)e^{3x}$ *例*4：$y'' - 2y' + y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 - 2r + 1 = 0$ ②*求特征根：*$(r-1)^2 = 0$，$r^1 = r^2 = 1$ ③*通解：*$y = (C^1 + C^2x)e^{x}$ **【*情况三：一对共轭复根*】** *例*5：$y'' + 2y' + 5y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 + 2r + 5 = 0$ ②*求特征根：*$r = -1 \pm 2i$ ③*通解：*$y = e^{-x}(C^1cos2x + C^2sin2x)$ *练习*3：$y'' + y = 0$ *解题步骤：* ①*特征方程：*$r^2 + 1 = 0$ ②*求特征根：*$r = \pm i$	通过详细的步骤讲解和典型例题，帮助学生掌握各种情况的解法，每个步骤都要清晰明了

	③*通解*：$y = C^1 cosx + C^2 sinx$ *例*6：$y'' + 4y' + 13y = 0$ 解题步骤： ①*特征方程*：$r^2 + 4r + 13 = 0$ ②*求特征根*：$r = -2 \pm 3i$ ③*通解*：$y = e^{-2x}(C^1 cos3x + C^2 sin3x)$	
练习与指导 (15 min)	■ 【教师】布置综合练习： 1. $y' = 2xy$(*可分离变量*) *解题步骤*： ①*变形为标准形式*：$dy/dx = 2xy$ ②*移项分离变量*：$dy/y = 2xdx$ ③*两边积分*：$\int dy/y = \int 2xdx$ ④*求解*：$lny = x^2 + C \therefore y = Ce^{(x^2)}$ 2. $y' + 3y = e^x$(*一阶线性*) *解题步骤*： ①*写出方程标准形式*：$y' + 3y = e^x$ ②*求积分因子*：$\mu = e^{(3x)}$ ③*两边乘以积分因子*：$e^{(3x)}y' + 3e^{(3x)}y = e^{(4x)}$ ④*等式左边化为求导式*：$(e^{(3x)}y)' = e^{(4x)}$ ⑤*两边积分*：$e^{(3x)}y = 1/4e^{(4x)} + C$ ⑥*解出*y：$y = 1/4e^x + Ce^{(-3x)}$ 3. $y'' - y' - 6y = 0$(*二阶常系数*) *解题步骤*： ①*特征方程*：$r^2 - r - 6 = 0$ ②*求特征根*：$(r-3)(r+2) = 0$，$r^1 = 3$，$r^2 = -2$ ③*通解*：$y = C^1 e^{3x} + C^2 e^{-2x}$ ■ 【教师】巡视指导 ■ 【学生】独立完成并交流 ■ 【教师】集中讲解易错点： - 提醒注意积分符号和常数 - 强调特征方程求根的完整性 - 注意复根情况下的通解形式	通过练习巩固 所学知识， 培养解题能力
小结回顾 (3 min)	■ 【教师】重点总结： 1. 一阶方程的分类和解法要点 2. 二阶方程三种情况的判别和解法 3. *易错点分析*	系统梳理知识点， 为后续学习 打好基础

	■ 【教师】布置作业： 1. $y^{'} = y \cdot cosx$(可分离变量) 2. $y^{'} - y = x^2$(一阶线性) 3. $y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$(二阶常系数)	