Евклидова теория Рамсея

Данила Черноусов Б05-201

Декабрь 2023

1 Теория Рамсея

Обобщенная задача теории Рамсея может быть сформулирована так: Пусть A и B произвольные множества, а $R \subseteq A \times B$. Обозначим за R(a) множество $\{b \in B | (a,b) \in R\}$. Тогда R - r-Рамсеево, если для любой раскраски B, найдётся элемент $a \in A$, такой что, R(a) - монохроматическое множество, т.е. что $\forall x, y \in R(a), r(x) = r(y)$.
Мы хотим понять, для каких множества R удовлетворяют этим свойстам.

Теорема 1.1 (Рамсей 1930)
Пусть A множество l-подмножеств S = [n], а B множество k-подмножеств S. $R = \{(a,b) | b \subseteq a\}$.
Тогда $\forall l \forall k \forall r\ \exists n$: R r-Рамсеево.

2 Евклидова теория Рамсея

В Евклидовой теории Рамсея рассматривается вопрос монохроматичности геометрических множеств при раскрасках Евклидова пространства E^n. Эта область достаточно широкая, поэтому нельзя поставить общую задачу. (однако существует основная проблема, которая будет сформулирована позднее).
Евклидова теория Рамсея началась со статьи[1] 1973 года Эрдёша, Грэхэма, Монтгомери et.al. В ней была сформулирована постановка задачи, доказано много фактов, и, что самое важное, доказано необходимое условие на Рамсеевость множества (в смысле Евклидовой теории Рамсея). Является ли это условие достаточным, пока непонятно. Однако можно сказать что теоремы из этой области были доказаны и ранее, не совсем в такой формулировке.

Теорема 2.1(Ван дер Варден 1927)
$\forall r, k$ и для любой r-раскраски натуральных чисел существует монохроматическая арифметическая прогрессия длины K.
При этом по теореме компактности верно следущее: $\exists N(r,k)$ для любой r-раскраски такая прогрессия находится среди первых N(k, r) чисел.

Рассмотрим свойство $R_H(K,n,r)$, где $r, n \in \mathbb{N}$, K - множество точек n-мерного Евклидова пространства E^n, а H - группа преобразований E^n. $R_H(K,n,r)$ выполняется, если для любой r-раскраски E^n $\exists \sigma \in H : \sigma(K)$ - монохроматическое.

Теорема 2.2(Галлаи)
Если K - конечное множество, а H - группа преобразований подобия, то $\forall r \exists n : R_H(K,n,r)$ выполнено.

В изученных мной статьях рассматривался вопрос существования таких n для K и r, для которых $R_H(K,n,r)$ верно, где H - SO(n) специальная ортогональная группа. для удобства опустим индекс и будем обозначать как R(K, n, r).
Будем говорить что множество K *Рамсеево* если $\forall r\ \exists n$: R(K, n, r) выполняется.

Пример 2.3 R(K, 2, 2) не выполняется, где K - 3 точки, образующие правильный треугольник.
Рассмотрим раскраску плоскости "в полоску" т.е. будем красить плоскость в цвет соответ-

ствующий остатку от деления на 2, целой части расстояния до оси y, от деления на высоту треугольника. Тогда, так как для любого трегольника верно, что его горизонтальное сечение больше его высоты, не существует треугольника, конгруэнтного данному, чтобы все его точки были одного цвета.

Теорема 2.4 (Необходимое условие Рамсеева множества):
Множество Рамсеево тогда и только тогда, когда оно сферическое, т.е оно лежит на сфере.

В частности это значит что никакие множества, содержащие 3 точки, лежащие на одной прямой, не являются Рамсеевыми. Не ясно является ли это условие достатчным, интересно что Грэхемом была предложена премия в 1000$ за доказательство или опровержение этого факта. В изучаемой мной статье[2] была выдвинута гипотеза, о критерии Рамсеевости множества. были рассмотрены доказательства Рамсеевости множеств и замечена общая структура таких доказательств. Идея этих доказательств сводится к вложению первоначального множества в некоторое конечное транзитивное множество, а затем как-то показывается что это транзитивное множество обладает Рамсеевыми свойствами. *Транзитивное множество* - это множество, чья группа симметрий(группа преобразований, для которых множество является инвариантом) *действует транзитивно* на множество. Т.е. если для любых точек x, y множества есть преобразование из группы симметрий, которое переводит x в y, или орбита каждого элемента совпадает с множеством. При этом достаточно выполнение для одного элемента.

Гипотеза 2.5 (Лидер, Рассел, Уолтерс 2018) Конечное множество Рамсеево тогда и только тогда, когда оно является подмножеством какого-то конечного транзитивного множества.

При этом любое транзитивное множество сферично и также существуют нетранзитивные сферические множества.

Ранее были упомянуты необходимые условия для Рамсеевости множеств, но не достаточные. Известно что все правильные многоугольники и правильные многогранники Рамсеевы. Более того[3], если множество транзитивно для разрешимых групп движений, то множество Рамсеево. Таким образом уже частично доказана достаточность гипотезы 2.5. Треугольники и Трапеции также являются Рамсеевыми, но уже про произвольные вписанные чётырехугольники это неизвестно.

3 Проделанная работа

Мной были изучены [1], [2], [3]. В данный момент я занимаюсь изучением [4].

References:
[1] Erdős, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rothschild, B. L., Spencer, J., and Straus, E. G., Euclidean Ramsey Theorems. I., J. Comb. The- ory Ser. A 14 (1973), 341–363.
[2] Imre Leader, Paul A. Russell, Mark Walters. (2018). Transitive Sets in Euclidean Ramsey Theory.

[3] Frankl, P., and Rödl, V, All triangles Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), no. 2, 777–779. are Ramsey,
[4] Křiž, I., Permutation groups in Euclidean Ramsey Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 899–907.