# Евклидова теория рамсея

Данила Черноусов Б05-201, Научный руководитель: Купавский А.Б.

Май 2024

## 1 Введение

В Евклидовой теории рамсея рассматривается вопрос монохроматичности геометрических множеств при раскрасках Евклидова пространства $E^n$. Мы будем рассматривать задачу поставленную следущим образом.

**Определение:** Конечное множество $F \subset E^n$ ***рамсеево***, если для любого k найдётся размерность пространства такая, что для любой k-раскраски евклидова пространства найдётся монохроматичное множество конгрунтное F.
Другими словами, $\forall k \in \mathbf{N}\ \exists d \in \mathbf{N} : \forall$ раскраски $\sigma : E^d \to k\ \exists \psi \in E(d)$ (где $E(d)$ группа изометрий), что выполнено: $\sigma(\psi(F)) = \text{const}$.

Евклидова теория рамсея началась со статьи [1] Эрдёша, Грэхема, и др. в которой были сформулированы многие теоремы и, что самое главное, доказано необходимое условии рамсеевости.

Единственное известное необходимое условие для рамсеевости множества
**Теорема 1 (Erdős, P., Graham, et.al 1973)** Если множество рамсеево, то оно сферично, т.е. оно является подмножеством некой n-мерной сферы

**Теорема 2 (Erdős, P., Graham, et.al 1973)** Декартово произведение рамсеевых множество - рамсеево.

После этого результаты в основном касались рамсеевости различных конфигураций (так например в [2] была доказано про треугольники).

Затем, в своей статье [4] Igor Křiž, приводит достаточное условие рамсеевости множества. Пусть G - группа симметрии конечного множества F, тогда говорят, что G действует на F транзитивно или что G транизитивна, если для какого-то $x \in F$ (Эквивалентно для любого $x \in F$) $Orb_G(x) = F$, где $Orb_G(x) = \{g(x) | g \in G\}$. Говорят что F транзитивно, если у него транзитивная группа симметрии.

Нам понадобится понятие разрешимой группы.

**Определение:** *Разрешимая группа* - это группа, для которой существует хотя бы один субнормальный ряд, в котором факторгруппы абелевы. Это значит, что существует цепочка подгрупп

$$\{1\} = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_k = G$$

такая что $G_{j-1}$ является нормальной подгруппой $G_j$, и $G_j/G_{j-1}$ — абелева группа.

Приведём также несколько утверждений про разрешимые группы, которые будут использованы в работе.

**Теорема 3 (Бёрнсайд 1904)** Пусть группа $G$ имеет порядок $p^a \cdot q^b$, где $p$ и $q$ — простые числа. Тогда G — разрешима.

**Утверждение 1** Абелева группа - разрешима.

Теперь сформулируем достаточное условие рамсеевости множества.

**Теорема 4 (Kriz 1991)** Любое транзитивное множество, у которого есть разрешимая группа изометрий, такая, что её число орбит меньше или равно двум - рамсеево.

В своей статье I.Křiž также приводит два следствия, а именно, что правильные многогранники и правильные многоугольники являются рамсевыми.

Следует отметить, что в данной работе рамсеевость всех множеств доказывается путём выполение условий теоремы 4. Более того, в [3] показано, что пока неизвестно случая, когда теорема 4 не использовалась в доказательстве рамсеевости (пусть и неявным образом).

В [5] Kristal Cantwell доказала рамсеевость всех правильных политопов. В конце статьи она пишет, что Кубооктаэдр и Икосододекаэдр, являющиеся Архимедовыми телами, - рамсеевы, так как вписываются в стодвадцатиячейник, являющийся правильным политопом. И доказывает что все квази-правильные многогранники - рамсеевы. Также, что и захватило мой интерес, задаётся вопрос о рамсеевости полу-правильных многогранников и остальных 11 Архимедовых тел.

В этой работе будет частично дан ответ.

В [3] демонстрируется, что во всех доказательствах рамсеевости множеств доказывается путём вписывания множества в транзитивное множество, и приведения некого комбинаторного рассуждения про это множество. Также была выдвинута гипотеза, согласно которому множество рамсеево тогда и только тогда, когда оно является подмножеством транзитивного множества. В [8] авторы строят явный пример сферичного множества, не удовлетоняющего данному критерию. рамсеевость данного множества пока неизвестна.

В этой работе приведены некоторые следствия достаточного условия (теоремы 4). Были решены некоторые проблемы поставленные в [5], а именно показано что некоторые Архимедовы тела - рамсеевы, а также что все правильные призмы, правильные антипризмы, усеченные многоугольники(а также призмы и антипризмы построенные на них) - рамсеевы.

## 2 Некоторые рамсеевы конфигурации

Далее, говоря про геометрические фигуры, мы будем иметь ввиду только их вершины.

**Утверждение 2** Правильные призмы и антипризмы - рамсеевы.

Из [4] правильные многоугольники рамсеевы. Тогда по теореме 2, и из того что $\{0, h\} \subset \mathbf{R}$ - рамсеево, следует что любая правильная призма(т.е. призма, построенная на правильном многограннике) - рамсеева. Также из того что любая правильная антипризма (т.е. полуправильный многогранник у которого две параллельные грани (основания) — равные между собой правильные n-угольники, а остальные 2n граней (боковые грани) — правильные треугольники) является подмножеством правильной призмы с в два раза большим числом вершин, следует что все правильные антипризмы - рамсеевы. ■

Усечённый многоугольник - это правильный многогранник, который был однородно усечён. Т.е. это вписанный многоугольник, у которого есть 2 тиба рёбер и они чередуются.

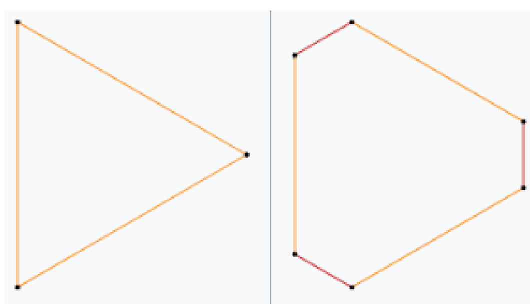

Рис. 1: Однородное усечение треугольника

Теперь докажем следущее утверждение.

**Утверждение 3** Усечённые многоугольники рамсеевы.

Действительно, усечённые многоугольники транзитивны, так как комбинацией поворотов в плоскости многоугольника и симметрий (или поворотов в трёхмерном пространстве), любая вершина переводится в любую. При этом группа плоских поворотов - разрешима, так как является абелевой (утверждение 1). И хоть группа плоских поворотов не транзитивна, число орбит в точности равно двум: поворотами мы можем перевести вершину ровно в половину вершин усечённого многоугольника. А значит по теореме 1, усечённые многоугольники рамсеевы. ■

Как следствие, призмы, построенные на усечённых многоугольниках - рамсеевы.

Теперь мы можем обобщить результат утверждения 2.

Антипризмой из усечённого многоугольника будем называть правильную антипризму, у которой вместо правильных многоугольников в качестве граней взяты усечённые.

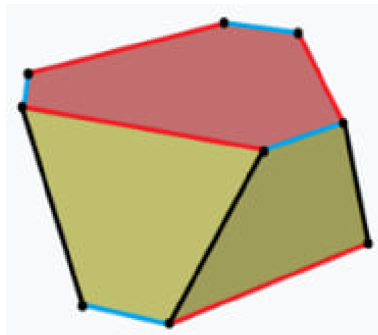

Рис. 2: Антипризма усечённого треугольника

**Утверждение 4** Антипризма из усечённого многоугольника рамсеева.

Воспользуемся тем же аргументом, что и при доказательстве рамсеевости антипризмы. А именно, тем, что усечённая антипризма является подмножеством некой усечённой призмы.

Рассмотрим усеченный многоугольник, который равен проекции вершин усечённой антипризмы на плоскость параллельную граням призмы. (причём в некоторых случаях этот многоугольник может оказаться правильным). У него в 2 раза больше вершин, чем у многоугольников в основаниях антипризмы. Очевидно, что если теперь декартово умножить эту проекцию на $\{0, \mathrm{h}\}$, то мы получим усечённую призму с в два раза большим числом вершин, и она будет содержать в себе нашу исходную усечённую антипризму.

Усечённая призма - рамсеева, а значит и все её подмножества, в том числе и исходная усечённая антипризма. ■

Следущий результат устанавливает рамсеевость 8 из 13 возможных Архимедовых многогранников.

**Утверждение 5** Усечённый тетраэдр, Кубооктаэдр, Усечённый куб, Усечённый октаэдр, Ромбокубооктаэдр, Усечённый кубооктаэдр, Курносый куб, Икосододекаэдр - рамсеевы.

рамсеевость Кубооктаэдра и Икосододекаэдра доказана в [5]. Докажем рамсеевость остальных многогранников. Архимедовы тела транзитивны, перечисленные многогранники в качестве групп симметрий имеют либо тетраидальную ($T_d$), либо октаэдральную ($O, O_h$) группы. Порядки этих групп равны либо 24 либо 48. Тогда по теореме 3, они разрешимы, так как их порядки представляются как:

$$24 = 3 \cdot 2^3, \quad 48 = 3 \cdot 2^4$$

■

# 3 Вывод

По итогу, была доказана рамсеевость для усечённых и правильных призм и антипризм, а также для 8 Архимедовых тел. Вопрос про остальные 5 остаётся открытым, но с доказанными результатами для призм и антипризм, для квазирегулярных [5] и правильных многранников [4], рамсеевость Архимедовых тел даст также и рамсеевость полуправильных многогранников.

# Список литературы


[1] Erdős, P., Graham, R. L., Montgomery, P., Rothschild, B. L., Spencer, J., and Straus, E. G., Euclidean Ramsey Theorems. I., J. Comb. The- ory Ser. A 14 (1973), 341–363.

[2] Frankl, P., and Rödl, V, All triangles Rams. Amer. Math. Soc. 297 (1986), no. 2, 777–779. are Ramsey,

[3] Imre Leader, Paul A. Russell, Mark Walters. (2018). Transitive Sets in Euclidean Ramsey Theory.

[4] Křıž, I., Permutation groups in Euclidean Ramsey Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 899–907.

[5] Cantwell, K. All regular polytopes are Ramsey. (2007). J.Combin. Theory Ser.A, 114(3), 555–56

[6] Křıž, I., All trapezoids are Ramsey, Discrete Math. 108 (1992), no. 1–3, 59–62.

[7] Johnson, F. E. A., Finite subtransitive sets, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 140 (2006), no. 1, 37–46.

[8] Imre Leader, Paul A. Russell, Mark Walters. (2018) Transitive Sets and Cyclic Quadrilaterals

[9] Egon Schulte, Symmetry of polytopes and polyhedra, Handbook of discrete and computational geometry

[10] Cromwell, Peter R. (1997). Polyhedra. Cambridge University Press