Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»

Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа

по дисциплине «Численные методы»

Гравитационная задача n тел. Реализация на cuda

Выполнил	студент группы ФН12-61	*Чернов А.В.*
Научный руководитель	к.ф.-м.н., доцент кафедры ФН-2	*Марчевский И.К.*

Москва — 2017

Оглавление

1. Постановка задачи

На плоскости находится N материальных точек, массы которых m_i. Пусть попарное взаимодействие точек подчинено закону тяготения Ньютона. Известны начальные на момент времени $t = 0$ положения и скорости каждой точки. Требуется найти положения точек для всех последующих моментов времени.

Эволюция системы N гравитирующих тел описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \\ \\ \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} G m_j \dfrac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}. \end{cases} \tag{1}$$

2. Метод решения

Все уравнения в системе (1) имеют вид: $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = f(t, \vec{u})$. В данной курсовой работе для решения таких уравнений рассматриваются методы Рунге — Кутты первого, второго, третьего и четвертого порядка. Формулы для этих методов взяты из [1].

Метод первого порядка:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{y}_n),$$
$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \vec{f}_1.$$

Метод второго порядка:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{y}_n),$$
$$\vec{f}_2 = \vec{f}(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{f}_1),$$
$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \vec{f}_2.$$

Метод третьего порядка:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{y}_n),$$
$$\vec{f}_2 = \vec{f}(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{f}_1),$$
$$\vec{f}_3 = \vec{f}(t_n + \tau, \vec{y}_n - \tau\vec{f}_1 + 2\tau\vec{f}_2),$$
$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\tau}{6}(\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2 + \vec{f}_3).$$

Метод четвертого порядка:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}(t_n, \vec{y}_n),$$
$$\vec{f}_2 = \vec{f}(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{f}_1),$$
$$\vec{f}_3 = \vec{f}(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{f}_2),$$
$$\vec{f}_4 = \vec{f}(t_n + \tau, \vec{y}_n + \tau\vec{f}_3),$$
$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\tau}{6}(\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3 + \vec{f}_4).$$

3. Точное решение для двух тел

Для проверки порядка точности методов Рунге — Кутты нужно построить аналитическое решение задачи. Рассмотрим задачу для двух тел. Зададим начальные условия таким образом, чтобы траектории двух тел были единичной окружностью с центром в точке $(0, 0)$.

Массу тел подберем таким образом, чтобы: $\sqrt{\dfrac{Gm}{4}} = 1$. Для первого тела: $r_x(0) = 1$,

Таблица 1. Погрешности методов Рунге — Кутты.

	Шаг				
Метод	$\tau_1 = 0.2$	$\tau_2 = 0.1$	$\tau_3 = 0.05$	$\tau_4 = 0.025$	$\tau_5 = 0.0125$
Рунге-Кутты 1-ого п-ка	3.830	2.533	1.530	1.130	0.668
Рунге-Кутты 2-ого п-ка	1.537×10^{-1}	3.895×10^{-2}	9.551×10^{-3}	2.346×10^{-3}	5.801×10^{-4}
Рунге-Кутты 3-ого п-ка	4.183×10^{-2}	4.966×10^{-3}	6.1723×10^{-4}	7.713×10^{-5}	9.633×10^{-6}
Рунге-Кутты 4-ого п-ка	4.857×10^{-4}	2.245×10^{-5}	1.156×10^{-6}	6.429×10^{-8}	3.770×10^{-9}

$r_y = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 1$. Для второго тела: $r_x(0) = -1$, $r_y = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = -1$.

Тогда уравнение движения первого тела будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t. \end{cases}$$

4. Проверка порядка аппроксимации методов Рунге — Кутты для двух тел

В таблице (1) приведены погрешности методов Рунге — Кутты при разных τ.

В таблице (2) приведена величина, равная: $\log_2 \dfrac{\delta(\tau_k)}{\delta(\tau_{k+1})}$, где $\delta(\tau_k)$ — это погрешность метода при шаге равным τ_k. Из таблицы (2) можно сделать вывод, что порядки аппроксимаций методов Рунге — Кутты соответствуют теоретической оценке.

5. Сравнение результатов, полученных на gpu и cpu

Заметим, что результаты, полученные на gpu отличаются от результатов, полученных на cpu не более чем на 10^{-13}, поэтому не будем приводить оценки порядков аппроксимаций методов Рунге — Куты, полученных на gpu, так как они практически совпадают с оценками, полученными на cpu.
В таблице 3 приведено время выполнения одной итерации на gpu(nvidia GeForce GTX 970) в миллисекундах.

В таблице 4 приведено время выполнения одной итерации на cpu(intel core i5) в миллисекундах.

Таблица 2. Отношение Погрешностей методов Рунге — Кутты.

	Шаг			
Метод	$\log_2 \dfrac{\delta(\tau_1)}{\delta(\tau_2)}$	$\log_2 \dfrac{\delta(\tau_2)}{\delta(\tau_3)}$	$\log_2 \dfrac{\delta(\tau_3)}{\delta(\tau_4)}$	$\log_2 \dfrac{\delta(\tau_4)}{\delta(\tau_5)}$
Рунге-Кутты 1-ого п-ка	0.5965	0.7273	0.4372	0.7584
Рунге-Кутты 2-ого п-ка	1.9804	2.0279	2.0254	2.0161
Рунге-Кутты 3-ого п-ка	3.0744	3.0082	3.0005	3.0013
Рунге-Кутты 4-ого п-ка	4.4353	4.2795	4.1684	4.0920

Таблица 3. Время выполнения одной итерации на gpu.

	Кол-во тел			
Метод	832	1664	3328	6656
Рунге-Кутты 1-ого п-ка	1.399	2.776	7.042	22.715
Рунге-Кутты 2-ого п-ка	2.802	5.567	14.006	43.845
Рунге-Кутты 3-ого п-ка	4.218	8.356	20.195	65.355
Рунге-Кутты 4-ого п-ка	5.568	11.094	26.476	86.229

Таблица 4. Время выполнения одной итерации cpu.

	Кол-во тел			
Метод	832	1664	3328	6656
Рунге-Кутты 1-ого п-ка	9.562	38.764	141.350	556.863
Рунге-Кутты 2-ого п-ка	19.112	74.751	279.900	1115.910
Рунге-Кутты 3-ого п-ка	26.426	106.355	424.386	1678.060
Рунге-Кутты 4-ого п-ка	35.6771	141.776	563.230	2235.140

В таблице 5 приведено отношение времени расчета, затраченного на cpu к времени расчета, затраченного на gpu.

Таблица 5. Отношение времени расчета на cpu к времени расчета на gpu.

	Кол-во тел			
Метод	832	1664	3328	6656
Рунге-Кутты 1-ого п-ка	6.835	13.964	20.072	24.515
Рунге-Кутты 2-ого п-ка	6.821	13.428	19.984	25.451
Рунге-Кутты 3-ого п-ка	6.265	12.728	20.195	21.014
Рунге-Кутты 4-ого п-ка	6.407	12.780	21.273	25.921

Таким образом, на gpu решать данную задачу гораздо эффективнее, чем на cpu.

6. Заключение

В итоге, проанализировав все результаты, полученные в данной курсовой работе, можно сделать вывод, что методы Рунге — Кутты обеспечивают приемлимую точность, а расчет поставленной задачи на gpu существенно уменьшает время вычислений.

Список литературы

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычисли- тельные методы. М.: Изд-во МЭИ, 2008. 670 с
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. 288 с.