

Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра прикладной кибернетики

Группа 24.Б82-мм

# Алгоритмы решения задачи стабилизации стержня на подвижном основании

*Черняков Евгений Олегович*

Отчёт по учебной практике  
в форме «Сравнение»

Научный руководитель:  
профессор, научный сотрудник кафедры прикладной кибернетики Мокаев Р. Н.

Санкт-Петербург  
2025

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Введение</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1. Постановка задачи</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2. Обзор литературы и методов</b>  | <b>6</b>  |
| 2.1. Обзор существующих решений . . . . .   | 6         |
| 2.2. Обзор используемых технологий и метрик . . . . .                             | 8         |
| 2.3. Выводы . . . . .   | 11        |
| <b>3. Описание решения</b>  | <b>13</b> |
| 3.1. Моделирование системы . . . . .  | 13        |
| 3.2. Программная реализация модели . . . . .                                      | 21        |
| 3.3. Реализация алгоритмов обучения . . . . .                                     | 24        |
| <b>4. Эксперимент</b>   | <b>36</b> |
| 4.1. Условия эксперимента и подбор гиперпараметров . . . .                        | 36        |
| 4.2. Сравнительный анализ метрик . . . . .  | 40        |
| 4.3. Результаты . . . . .   | 42        |
| 4.4. Выводы и оценка целесообразности использования градиентных методов . . . . . | 47        |
| <b>5. Заключение</b>  | <b>49</b> |
| <b>Список литературы</b>  | <b>51</b> |

# Введение

Задача стабилизации стержня на подвижной тележке (Cart-Pole) является классическим эталоном в теории автоматического управления и обучении с подкреплением. Она моделирует неустойчивые нелинейные системы, принципы управления которыми лежат в основе работы балансирующих роботов и ракет-носителей на старте. Традиционные методы решения, такие как ПИД-регуляторы или LQR-алгоритмы, требуют точного знания математической модели объекта. Однако с развитием искусственного интеллекта всё большую популярность приобретают методы, способные обучаться управлению через взаимодействие со средой, не требуя явного задания уравнений динамики. Существующие исследования широко освещают применение глубокого обучения с подкреплением (Deep RL) для этой задачи, демонстрируя возможности сложных нейросетевых архитектур.

В то же время, в учебной и технической литературе часто наблюдается пробел в сравнительном анализе эффективности базовых стохастических методов оптимизации по сравнению с градиентными методами начального уровня. Нередко сложные алгоритмы применяются там, где достаточно простейшего случайного поиска. Остается открытый вопрос: оправдано ли усложнение алгоритма (переход от случайногопоиска к градиентной политике) для системы с малым количеством степеней свободы.

Целью данной работы является выявление сравнительной эффективности алгоритмов различной природы — базового случайного поиска (Basic Random Search), метода восхождения на холм (Hill Climbing) и градиентной политики (Actor-Critic) — в задаче балансировки стержня. Необходимо определить, какой из подходов обеспечивает наилучший баланс между скоростью обучения и устойчивостью удержания стержня. Работа призвана продемонстрировать, что для определенных классов задач простые безградиентные методы могут составлять конкуренцию более сложным подходам RL.

Для реализации поставленной задачи в работе разрабатывается про-

граммная модель динамической системы, основанная на численном решении дифференциальных уравнений движения стержня и тележки. В данную среду интегрируются и настраиваются алгоритмы Basic Random Search, Hill Climbing и Actor-Critic. В ходе экспериментов проводится обучение агентов с фиксацией ключевых метрик: На основе полученных данных будет проведен сравнительный анализ и сформулированы выводы о применимости каждого из методов для задач стабилизации неустойчивых динамических систем.

# 1. Постановка задачи

Целью работы является проведение сравнительного анализа эффективности алгоритмов стохастической оптимизации и методов обучения с подкреплением при решении задачи стабилизации стержня на подвижном основании. Для её выполнения были поставлены следующие задачи:

1. математически описать динамику системы «тележка-стержень», составив дифференциальные уравнения движения;
2. создать программную среду, эмулирующую поведение системы во времени на основе разработанной математической модели, без использования сторонних физических движков;
3. программно реализовать алгоритмы: Basic Random Search, Hill Climbing, Actor-Critic;
4. провести серию экспериментов по обучению агентов каждым из алгоритмов, подобрав гиперпараметры и зафиксировав метрики;
5. сравнить полученные данные, выявить преимущества и недостатки каждого алгоритма и оценить целесообразность использования градиентных методов для задач данной размерности.

## 2. Обзор литературы и методов

Целью данного раздела является формирование необходимого теоретического фундамента для понимания работы и обоснование методологического выбора, сделанного в рамках исследования. Обзор систематизирует известную информацию о механической системе «тележка–стержень», существующих подходах к её стабилизации и принципах работы выбранных алгоритмов обучения. Обзор был выполнен с использованием следующих методов:

- **Систематический поиск:** использовались научные базы данных (например, Google Scholar, Scopus, ResearchGate) по ключевым запросам, охватывающим как классическую теорию управления, так и современное обучение с подкреплением (например, «Cart-Pole stabilization», «Inverted Pendulum control», «Policy Gradient vs Random Search»).
- **Оценка релевантности:** в фокусе внимания находились статьи и монографии, описывающие математическую модель системы со стержнем с распределённой массой, а также работы, напрямую сравнивающие эффективность стохастической оптимизации (**Random Search, Hill Climbing**) и градиентных методов.
- **Идентификация технологий:** изучались принципы работы выбранных алгоритмов (**AC, HC, BRS**) и современные методы их реализации на языке **Python**.

### 2.1. Обзор существующих решений

Обзор существующих решений направлен на систематизацию научного и инженерного опыта, накопленного в области стабилизации неустойчивых динамических систем и, в частности, механической системы «тележка–стержень». Это позволяет избежать дублирования уже известных подходов и чётко определить место данной работы среди предыдущих исследований.

### **2.1.1. Математическая модель «Тележка–Стержень»**

Система «тележка–стержень» является классическим объектом исследования в теории автоматического управления (ТАУ) и представляет собой пример нелинейной, существенно неустойчивой системы. Математическое описание обычно строится на законах Ньютона или уравнениях Лагранжа. В ранних работах массу стержня часто аппроксимируют как точечную, однако для более точной симуляции применяется модель с учётом распределённой массы стержня, что усложняет расчёты, но повышает реалистичность моделирования.

### **2.1.2. Классические подходы к стабилизации**

Исторически задача решалась с помощью методов, основанных на знании математической модели:

- 1. Линеаризация и LQR (Linear Quadratic Regulator).** Преимущество LQR — оптимальность управления для линеаризованной системы при минимизации квадратичного функционала. Недостаток — сниженная эффективность при больших начальных отклонениях.
- 2. ПИД-регулирование (PID).** Простота и универсальность; сложность — подбор коэффициентов  $K_p, K_i, K_d$  для широкого диапазона состояний.
- 3. Управление на основе фазового пространства.** Используется переключение между различными линейными стратегиями в зависимости от состояния; метод трудоёмок и плохо масштабируется.

### **2.1.3. Современные подходы на основе обучения с подкреплением (RL)**

Методы RL позволяют агенту обучаться оптимальному управлению, взаимодействуя со средой **без явного знания уравнений динамики** системы.

1. **Value-based** методы (**DQN**, **Q-learning**). Эффективны для дискретных действий, но при большой размерности требуют сложной аппроксимации функции ценности.
2. **Policy Gradient** методы. Непосредственно оптимизируют политику управления и предпочтительны для непрерывного пространства действий.
3. **Actor–Critic** (**AC**). Гибридный подход: актор выбирает действия, критик оценивает их, что уменьшает дисперсию градиента.

#### 2.1.4. Обоснование выбора методологии

Данное исследование фокусируется на сравнении трёх фундаментально разных классов оптимизации, применённых к одной и той же задаче: **наивного случайного поиска** (**BRS**), **локального поиска** (**HC**) и **градиентного метода** (**Actor–Critic**). Выбор **Actor–Critic с линейной аппроксимацией** обусловлен желанием проверить целесообразность применения градиентных методов: оправдывает ли их теоретическая мощь вычислительные затраты на вычисление градиентов по сравнению с простыми и быстрыми эвристиками (**HC**, **BRS**) в задаче с малым числом параметров состояния. Использование линейных моделей позволяет также **снизить вычислительные требования** по сравнению с глубоким обучением. В литературе обычно сравнивают сложные современные алгоритмы (например, [1]), однако в настоящей работе намеренно проводится прямое сравнение **простых** методов (**BRS**, **HC**) с **более сложными** градиентными подходами (**AC**) на одной и той же самописной физической модели.

## 2.2. Обзор используемых технологий и метрик

Данный подраздел посвящен обзору и обоснованию выбора тех технологических решений и алгоритмов, которые будут использованы для программной реализации задачи стабилизации стержня. Цель — показать, почему выбранные алгоритмы (**BRS**, **HC**, **AC**) являются наи-

лучшим набором для достижения целей исследования, а выбранные инструменты — оптимальными для реализации.

### 2.2.1. Сравнение и выбор алгоритмов оптимизации

В рамках работы проводится сравнительный анализ трёх методов, представляющих разные уровни сложности и подходы к оптимизации функций. Обзорная литература [2, 3] показывает, что эти методы формируют логическую иерархию, позволяющую провести методологическое сравнение:

1. **Basic Random Search (BRS)**: Простейший безградиентный метод.
2. **Hill Climbing (HC)**: Эвристический метод, использующий локальный случайный поиск для ускорения сходимости BRS.
3. **Actor–Critic (AC)**: Градиентный метод обучения с подкреплением, который теоретически должен превосходить безградиентные методы по скорости сходимости в задачах оптимизации [3].

Для оценки алгоритмов использовались следующие критерии, релевантные целям работы: вычислительная сложность, скорость сходимости и риск застревания в локальном оптимуме.

Таблица 1: Сравнение алгоритмов оптимизации

| Алгоритм            | Класс            | Вычисл. сложность | Риск локального оптимума |
|---------------------|------------------|-------------------|--------------------------|
| Basic Random Search | Безградиентный   | Низкая            | Низкий                   |
| Hill Climbing       | Безградиентный   | Низкая            | Высокий                  |
| Actor–Critic        | Градиентный (RL) | Средняя           | Средний                  |

Обоснование выбора: данный набор выбран потому, что он позволяет ответить на ключевой вопрос исследования: оправдывает ли рост вычислительной сложности (переход от **HC** к **AC**) пропорциональный рост скорости сходимости в задаче стабилизации низкой размерности. **BRS** и **HC** выступают в роли надёжных, но простых контрольных групп для оценки эффективности градиентного подхода.

## 2.2.2. Метрики оценки эффективности

Для всесторонней оценки качества управления и скорости обучения был выбран следующий набор метрик. Каждая метрика освещает определённый аспект работы алгоритма:

1. **Среднее вознаграждение (*Average Reward*)**. Основной показатель **качества обучения**. Вычисляется как среднее арифметическое наград, полученных агентом за эпизод (или серию эпизодов).
2. **Кумулятивное вознаграждение (*Cumulative Reward*)**. Сумма всех наград, полученных агентом в рамках одного эпизода. В задаче Cart–Pole эта метрика прямо пропорциональна **времени удержания стержня** до падения.
3. **Средняя длина эпизодов (*Episode Length*)**. Показывает **устойчивость** системы. Максимальная длина эпизода (например, 1000 шагов) свидетельствует о найденном оптимальном и стабильном решении.
4. **RMSE по углу  $\theta$  (*Root Mean Square Error of  $\theta$* )**. Среднеквадратичная ошибка угла отклонения стержня от вертикали ( $\theta = 0$ ). Характеризует **точность** стабилизации: низкий RMSE означает, что стержень удерживается почти неподвижно.
5. **Время удержания вертикали (*Upright Steps*)**. Количество шагов, в течение которых угол отклонения стержня по модулю не превышал заданного порогового значения (например,  $|\theta| < 0.087$  рад  $\approx 5^\circ$ ). Метрика показывает способность алгоритма удерживать систему в **безопасной зоне равновесия**.

## 2.2.3. Выбор платформы реализации

Для реализации физической модели и алгоритмов необходимо выбрать подходящую программную среду и язык. Для работ в области машинного обучения стандартным выбором является язык **Python**,

несмотря на то, что **C/C++** обеспечивает более высокую производительность для чистого численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Таблица 2: Сравнение платформ для реализации

| Платформа | Производительность | Удобство ML/RL | Скорость разработки |
|-----------|--------------------|----------------|---------------------|
| C/C++     | Высокая            | Низкое         | Низкая              |
| Python    | Средняя            | Высокое        | Высокая             |

Обоснование выбора: для задачи стабилизации стержня, которая является системой низкой размерности, высокая производительность **C/C++** не является критичной. В то же время, основная цель работы — сравнение алгоритмов обучения. Использование языка **Python** значительно ускоряет разработку и обеспечивает лучшую читаемость кода.

#### 2.2.4. Используемые библиотеки и инструменты

Для программной реализации среды и алгоритмов будет использован следующий стек технологий:

- **Язык программирования:** Python.
- **Численные расчёты и симуляция:** библиотека **NumPy**. Используется для эффективного хранения и оперирования матрицами весовых коэффициентов агентов.
- **Визуализация и анализ данных:** библиотека **Matplotlib**. Будет применяться для визуализации экспериментов, построения графиков сходимости, визуализации метрик и сравнения результатов экспериментов.

### 2.3. Выводы

Обзор существующих решений (раздел 2.1) показал, что, хотя задача стабилизации стержня решена классическими и современными ме-

тодами, отсутствует прямое сравнение выбранных алгоритмов (**BRS**, **HC**, **AC**) на самописной физической модели. Обзор технологий (раздел 2.2) подтвердил, что язык **Python** и его библиотеки оптимальны для реализации, поскольку приоритет отдается удобству и скорости реализации сложных алгоритмов машинного обучения перед микрооптимизацией физической симуляции. Таким образом, теоретическая база для выполнения поставленных задач полностью сформирована.

### 3. Описание решения

В данной главе описывается последовательный процесс реализации системы автоматической стабилизации стержня. Решение задачи декомпозировано на три взаимосвязанных этапа, отражающих переход от теоретической модели к исполняемому программному коду.

В рамках **первого этапа** (подраздел 3.1) выполняется математическое моделирование. На основе законов классической механики выводятся нелинейные дифференциальные уравнения движения, которые ложатся в основу физической симуляции.

На **втором этапе** (подраздел 3.2) разрабатывается программная среда. На базе выведенных уравнений реализован класс `Model`, который выполняет численное интегрирование динамики системы методом Рунге-Кутты. Данный модуль выступает в роли «Среды» (`Environment`) в терминологии обучения с подкреплением.

**Третий этап** (подраздел 3.3) посвящен алгоритмической реализации агентов управления. Были реализованы и интегрированы в среду три метода различной природы:

- **Basic Random Search (BRS)** — в качестве базового метода глобальной стохастической оптимизации.
- **Hill Climbing (HC)** — как улучшенная эвристика локального поиска.
- **Actor-Critic (AC)** — как представитель градиентных методов RL, способный обучаться online.

Весь программный комплекс реализован на языке **Python** с активным использованием библиотеки **NumPy** для ускорения векторных вычислений.

#### 3.1. Моделирование системы

Для описания динамики системы «стержень на тележке» воспользуемся вторым законом Ньютона. Система состоит из тележки массой

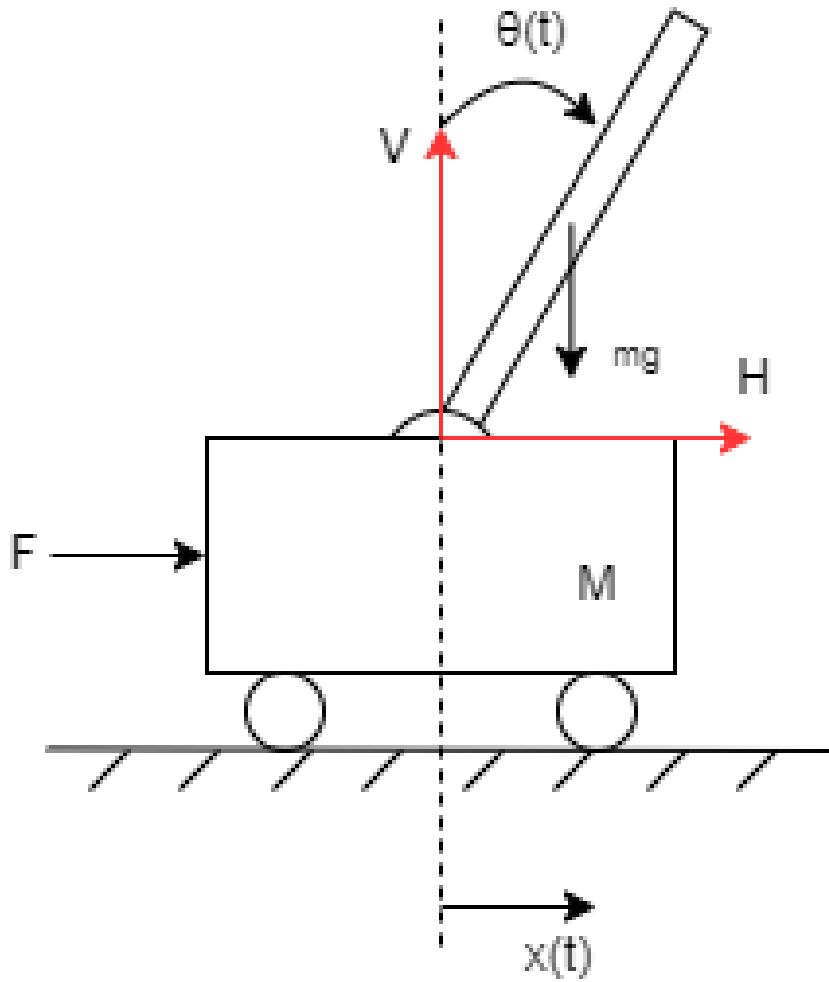


Рис. 1: Схема системы «Стержень на тележке» с действующими силами.

$M$ , движущейся горизонтально, и стержня массой  $m$  и длиной  $l$ , закрепленного на тележке через шарнир.

Введем следующие обозначения:

- $x(t)$  — горизонтальная координата тележки;
- $\theta(t)$  — угол отклонения стержня от вертикали (по часовой стрелке);
- $F$  — управляющая сила, приложенная к тележке;
- $H, V$  — горизонтальная и вертикальная компоненты силы реакции в шарнире;

- $a = l/2$  — расстояние от оси шарнира до центра масс стержня;
- $I$  — момент инерции стержня относительно точки крепления.

### 3.1.1. Кинематика системы

Координаты центра масс стержня  $(x_c, y_c)$  выражаются через обобщенные координаты системы  $x$  и  $\theta$ :

$$x_c = x + a \sin \theta, \quad y_c = a \cos \theta. \quad (1)$$

Дважды продифференцировав эти выражения по времени, получим проекции ускорения центра масс стержня:

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \ddot{x} + a \cos \theta \ddot{\theta} - a \sin \theta \dot{\theta}^2, \\ \ddot{y}_c = -a \sin \theta \ddot{\theta} - a \cos \theta \dot{\theta}^2. \end{cases} \quad (2)$$

### 3.1.2. Уравнения динамики

Рассмотрим силы, действующие на тела системы.

**1. Движение тележки.** На тележку действуют управляющая сила  $F$  и горизонтальная реакция стержня  $H$  (по третьему закону Ньютона, направленная противоположно силе, действующей на стержень):

$$M\ddot{x} = F - H. \quad (3)$$

**2. Движение стержня.** Запишем уравнения движения центра масс стержня в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = H, \\ m\ddot{y}_c = V - mg. \end{cases} \quad (4)$$

Подставим выражения для ускорений (2) в систему (4):

$$\begin{cases} m(\ddot{x} + a \cos \theta \ddot{\theta} - a \sin \theta \dot{\theta}^2) = H, \\ m(-a \sin \theta \ddot{\theta} - a \cos \theta \dot{\theta}^2) = V - mg. \end{cases} \quad (5)$$

Исключим силу реакции  $H$ . Сложим уравнение тележки (3) и первое уравнение стержня:

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + a \cos \theta \ddot{\theta} - a \sin \theta \dot{\theta}^2) = F.$$

После группировки получаем первое уравнение движения системы:

$$(M + m)\ddot{x} + ma \cos \theta \ddot{\theta} = F + ma \sin \theta \dot{\theta}^2. \quad (6)$$

Для получения второго уравнения рассмотрим вращательное движение стержня. Запишем уравнение моментов относительно точки крепления (оси шарнира). Момент инерции стержня относительно конца равен  $I = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}ma^2$ . Уравнение вращательного движения:

$$ma \cos \theta \ddot{x} + I\ddot{\theta} = -mga \sin \theta. \quad (7)$$

### 3.1.3. Разрешение относительно старших производных

Объединим уравнения (6) и (7) в матричную форму относительно вектора угловых и линейных ускорений  $[\ddot{x}, \ddot{\theta}]^T$ :

$$\begin{pmatrix} M+m & ma \cos \theta \\ ma \cos \theta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F + ma \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ -mga \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Определитель матрицы системы равен:

$$\Delta = (M + m)I - (ma \cos \theta)^2. \quad (9)$$

Решая систему методом Крамера или путем обратной матрицы, получаем явные выражения для ускорений, необходимые для численного моделирования:

$$\ddot{x} = \frac{I(F + ma \sin \theta \dot{\theta}^2) + m^2ga^2 \cos \theta \sin \theta}{\Delta}, \quad (10)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(ma \cos \theta)(F + ma \sin \theta \dot{\theta}^2) - (M + m)mga \sin \theta}{\Delta}. \quad (11)$$

Полученная система уравнений (10)–(11) позволяет сформировать

**вектор состояния** системы  $s = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$ , который будет использоваться для реализации среды обучения с подкреплением.

### 3.1.4. Преобразование динамической системы в форму первого порядка

Исходная математическая модель, основанная на законах Ньютона, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) **второго порядка**, поскольку она выражается через вторые производные координат (ускорения  $\ddot{x}$  и  $\ddot{\theta}$ ).

Большинство численных методов интегрирования (например, метод Рунге-Кутты) разработаны для работы с системами ОДУ **первого порядка**. Для приведения системы к требуемой форме мы используем **вектор состояния**  $s$ , который включает все обобщенные координаты и их первые производные (скорости):

$$s = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Производная этого вектора  $\dot{s}$  представляет собой систему первого порядка:

$$\dot{s} = \frac{d}{dt}s = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Таким образом, динамическая система принимает форму  $\dot{s} = g(s, F)$ , где функция  $g(s, F)$  определяется:

$$g(s, F) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x}(s, F) \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta}(s, F) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $\ddot{x}(s, F)$  и  $\ddot{\theta}(s, F)$  вычисляются по явным формулам (10) и (11).

### 3.1.5. Достаточность вектора состояния для динамики и RL

Для обучения с подкреплением агент оперирует **вектором наблюдения** (`observation_space`), который в данном случае совпадает с вектором состояния системы:

$$\mathbf{s}_{RL} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T. \quad (15)$$

**1. Достаточность для динамики (Марковское свойство):** Система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) второго порядка. Для однозначного прогнозирования траектории системы в будущем необходимо знать текущее положение и скорость по каждой степени свободы. Вектор  $\mathbf{s}_{RL}$  включает все обобщенные координаты  $(x, \theta)$  и их первые производные  $(\dot{x}, \dot{\theta})$ , что обеспечивает выполнение **Марковского свойства**: будущее состояние системы полностью определяется текущим состоянием  $s_t$  и управляющим воздействием  $F_t$ .

**2. Пригодность для RL:** Вектор  $\mathbf{s}_{RL}$  является **вектором наблюдения** (`Observation`), который предоставляет агенту всю информацию, необходимую для принятия оптимальных решений:

- $x, \dot{x}$ : Необходимы для удержания тележки в пределах рабочей зоны.
- $\theta, \dot{\theta}$ : Являются критическими параметрами. Агент использует  $\theta$  для оценки отклонения от вертикали и  $\dot{\theta}$  для прогнозирования будущей траектории стержня.

### 3.1.6. Численное интегрирование методом Рунге-Кутты 4-го порядка

Для симуляции движения системы (переход  $s_t \rightarrow s_{t+\Delta t}$ ) используется **Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)**. Этот метод обеспечивает

высокий порядок точности ( $O(\Delta t^4)$  на шаге) и хорошую устойчивость при моделировании нелинейных динамических систем.

RK4 является одношаговым методом, использующим четыре оценки наклона (производной  $g(s, F)$ ) для вычисления приращения вектора состояния на временном интервале  $\Delta t$ .

Пусть  $s_t$  — состояние в момент времени  $t$ ,  $F$  — управляющая сила, и  $g(s, F)$  — функция правой части системы  $\dot{s}$ . Шаг интегрирования  $\Delta t$ :

1.  $K_1$  (**Наклон в начале интервала**):

$$\mathbf{K}_1 = \Delta t \cdot g(s_t, F)$$

2.  $K_2$  (**Наклон в середине, с использованием  $K_1$** ):

$$\mathbf{K}_2 = \Delta t \cdot g(s_t + \mathbf{K}_1/2, F)$$

3.  $K_3$  (**Уточненный наклон в середине, с использованием  $K_2$** ):

$$\mathbf{K}_3 = \Delta t \cdot g(s_t + \mathbf{K}_2/2, F)$$

4.  $K_4$  (**Наклон в конце интервала, с использованием  $K_3$** ):

$$\mathbf{K}_4 = \Delta t \cdot g(s_t + \mathbf{K}_3, F)$$

5. **Итоговое состояние  $s_{t+\Delta t}$ :**

$$s_{t+\Delta t} = s_t + \frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4). \quad (16)$$

Этот численный метод реализуется в функции `step` симуляционной среды, обеспечивая эволюцию состояния системы под действием управляющей силы  $F$  и внутренних физических законов.

### 3.1.7. Функция вознаграждения

Функция вознаграждения  $r_t$  (Reward Function) определяет цель для RL-агента, поощряя желательное поведение (стабилизация) и наказывая нежелательное (падение или выход за пределы). На каждом времен-

ном шаге  $t$  вознаграждение рассчитывается по следующей формуле:

$$r = 1 - \left( C_1\theta^2 + C_2x^2 + C_3\dot{\theta}^2 + C_4\dot{x}^2 \right), \quad (17)$$

В данной реализации используются следующие весовые коэффициенты (константы):  $C_1 = 0.1$ ,  $C_2 = 0.1$ ,  $C_3 = 0.01$ ,  $C_4 = 0.01$ .

Базовое вознаграждение  $r$  стремится к максимальному значению  $r = 1$  при идеальном состоянии ( $\theta = 0, x = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{x} = 0$ ). Каждый компонент в скобках представляет собой "штраф", который вычитается из единицы:

1. Штраф за положение маятника и тележки ( $0.1\theta^2 + 0.1x^2$ ):

- Наибольший вес (0.1) имеют штрафы, зависящие от **положения** — угла  $\theta$  и координаты  $x$ . Это заставляет агента фокусироваться на удержании маятника как можно ближе к вертикали ( $\theta = 0$ ) и тележки как можно ближе к центру ( $x = 0$ ).

2. Штраф за скорости ( $0.01\dot{\theta}^2 + 0.01\dot{x}^2$ ):

- Меньший вес (0.01) назначен штрафам, зависящим от **скоростей** ( $\dot{\theta}, \dot{x}$ ). Это поощряет агента к стабилизации системы, но не делает это приоритетом перед удержанием положений.

Если система выходит за установленные физические границы, налагается крупный единовременный штраф, и эпизод завершается:

$$\text{Если } (|x| > x_{\text{fail}} \text{ или } |\theta| > \theta_{\text{fail}}) : \quad r_{\text{fail}} = r - 10. \quad (18)$$

- $x_{\text{fail}}$  и  $\theta_{\text{fail}}$  — это предельные значения для координаты тележки и угла маятника, при превышении которых симуляция считается неудачной.
- Штраф в  $-10$  является значительным отрицательным вознаграждением, которое эффективно обучает агента избегать состояний, приводящих к сбою.

## 3.2. Программная реализация модели

Для моделирования динамики системы «Стержень на тележке» и создания среды для обучения с подкреплением (RL) разработан класс `Model` на языке Python.

### 3.2.1. Структура и параметры модели

Класс инициализируется с основными физическими и симуляционными параметрами:

- Массы:  $M = 1.2$  кг (тележка),  $m = 0.5$  кг (маятник).
- Длина маятника:  $l = 1.0$  м.
- Шаг интегрирования:  $dt = 0.01$  с.
- Максимальная управляющая сила:  $F_{\max} = 10$  Н.
- Границы сбоя:  $\theta_{\text{fail}} = \pi/2$  рад.,  $x_{\text{fail}} = 10.0$  м.

### 3.2.2. Функция динамики и интегрирование

Ключевыми компонентами являются методы, реализующие динамические уравнения и численный переход.

**Функция динамики  $g(s, F)$ :** Метод `g(self, state, action)` вычисляет производную вектора состояния  $\dot{s}$ , используя явные формулы для ускорений  $\ddot{x}$  и  $\ddot{\theta}$  (уравнения (10) и (11)). Для повышения устойчивости расчетов в знаменателе ( $\Delta$ ) реализована **численная стабилизация** с ограничением  $\max(\Delta, 10^{-4})$ , что предотвращает ошибку деления на ноль.

**Численное интегрирование:** Метод `apply_action(self, state, action, dt)` использует **Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)** для перехода от состояния  $s_t$  к  $s_{t+dt}$ .

### 3.2.3. Интерфейс симуляции (Метод `step`)

Метод `step(self, state, action)` является основным интерфейсом взаимодействия RL-агента со средой. Он принимает текущее состояние и выбранную агентом силу  $F$  (`action`), после чего возвращает новое состояние, вознаграждение и флаг завершения эпизода (`done`).

Ниже представлен код, реализующий динамическую модель:

## Листинг 1: Реализация динамической модели «стержень на тележке»

---

```
1 import numpy as np
2
3 class Model():
4     def __init__(self, episode_length=1000, Fmax=10, dt=0.01):
5         self.l = 1.0
6         self.m = 0.5
7         self.M = 1.2
8         self.tetta_fail = np.pi/2
9         self.x_fail = 10.0
10        self.Fmax = Fmax
11        self.dt = dt
12        self.episode_length = episode_length
13
14    def step(self, state, action):
15        action = np.clip(action, -self.Fmax, self.Fmax)
16        new_state = self.apply_action(state, action, self.dt)
17        reward = self.reward(new_state)
18        done = abs(new_state[0]) > self.x_fail or abs(new_state[2]) > self.tetta_fail
19        return new_state, reward, done
20
21    def g(self, state, action):
22        x, x_der, tetta, tetta_der = state
23        g = 9.8
24        I = self.m * self.l**2 / 3
25        a = self.l / 2
26        # Вычисление определятеля Delta (знаменатель)
27        delta = I * (self.M + self.m) - (self.m * a * np.cos(tetta))**2
28        delta = max(delta, 1e-4) # Численная стабилизация
29        x_2der = (I * (action + self.m * a * tetta_der**2 * np.sin(tetta)) +
30                  self.m**2 * g * a**2 * np.cos(tetta) * np.sin(tetta)) / delta
31        tetta_2der = (-self.m * a * np.cos(tetta) * (action + self.m * a * tetta_der**2 *
32                           np.sin(tetta)) -
33                           (self.M + self.m) * self.m * g * a * np.sin(tetta)) / delta
34        return np.array([x_der, x_2der, tetta_der, tetta_2der])
35
36    def apply_action(self, state, action, dt):
37        # Метод Рунге-Куммы 4-го порядка (RK4)
38        k1 = self.g(state, action)
39        k2 = self.g(state + dt * 0.5 * k1, action)
40        k3 = self.g(state + dt * 0.5 * k2, action)
41        k4 = self.g(state + dt * k3, action)
42        new_state = state + dt * (1/6 * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4))
```

```

42         return new_state
43
44     def reward(self, state):
45         x, x_der, tetta, tetta_der = state
46         # Базовое вознаграждение
47         r = 1 - (0.1 * tetta ** 2 + 0.1 * x ** 2 + 0.01 * tetta_der ** 2 + 0.01 * x_der
48             ** 2)
49         # Дополнительный штраф за сбой
50         if abs(x) > self.x_fail or abs(tetta) > self.tetta_fail:
51             r -= 10
52     return r

```

---

### 3.3. Реализация алгоритмов обучения

В данном разделе представлена программная реализация трех выбранных алгоритмов обучения, предназначенных для поиска оптимальной политики стабилизации стержня на тележке.

#### 3.3.1. Реализация Basic Random Search (BRS)

**Basic Random Search (BRS)** — это простейший представитель безградиентных методов оптимизации политики. В контексте задачи CartPole, целью BRS является поиск оптимального вектора весов  $\mathbf{w}$  для **линейной политики**, которая связывает вектор состояния  $\mathbf{s} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$  с управляющей силой  $F$ :

$$F = \mathbf{w}^T \mathbf{s} = w_1 x + w_2 \dot{x} + w_3 \theta + w_4 \dot{\theta}$$

**Принцип работы BRS** основан на глобальном случайному поиске:

- **Генерация:** На каждой итерации (эпизоде) генерируется совершенно новый вектор весов  $\mathbf{w}$  (в данном случае из нормального распределения с математическим ожиданием  $-1$  и стандартным отклонением  $1$ ).
- **Оценка:** Производится прогон модели (метод `rollout`) с использованием новой политики  $\mathbf{w}$ , и вычисляется суммарная награда  $r$ .

- **Обновление:** Если полученная награда  $r$  превышает текущую наилучшую награду ( $r_{best}$ ), то  $\mathbf{w}$  сохраняется как новая лучшая политика  $\mathbf{w}_{best}$ .

Этот метод обеспечивает высокую вероятность выхода из локальных оптимумов, но его сходимость крайне низка, что делает его идеальным **базовым алгоритмом** для сравнения.

**Детали программной реализации** Класс `BRSagent` инкапсулирует логику поиска.

- Метод `learn` реализует основной цикл, где ключевая строка `self.w = np.random.normal(loc=-1, scale=1, size=4)` обеспечивает **полностью случайную генерацию** нового кандидата на каждой итерации.
- Метод `rollout` симулирует эпизод, используя линейную политику `action = np.clip(np.dot(w, state), ...)` и гарантирует, что управляющая сила  $F$  не превышает физического ограничения  $F_{max}$ .
- Метод `reset_state` инициализирует начальное состояние маятника  $\mathbf{s}_0$  в случайной области.

## Исходный код Basic Random Search (BRS)

## Листинг 2: Реализация Basic Random Search

---

```
1 import numpy as np
2 from src.Model import Model
3
4 class BRSagent():
5     def __init__(self, model=Model(), n_episodes=1000):
6         # Инициализация случайными весами (линейная политика)
7         self.w = np.random.normal(loc=-1, scale=1, size=4)
8         self.n_episodes = n_episodes
9         self.model = model
10        self.best_w = self.w.copy()
11        self.best_reward = -np.inf
12        self.states = []
13        self.actions = []
14        self.rewards = []
15
16    def learn(self):
17        for episode_ind in range(self.n_episodes):
18            # Полнотью новый случайный вектор весов
19            self.w = np.random.normal(loc=-1, scale=1, size=4)
20            r = self.rollout(self.w)
21            # Сохранение лучшей политики
22            if r > self.best_reward:
23                self.best_reward = r
24                self.best_w = self.w.copy()
25
26    def rollout(self, w):
27        state = self.reset_state()
28        total_reward = 0
29        done = False
30        steps = 0
31        while not done and steps < self.model.episode_length:
32            # Линейная политика с ограничением F_max
33            action = np.clip(np.dot(w, state), -self.model.Fmax, self.model.Fmax)
34            new_state, reward, done = self.model.step(state, action)
35            self.states.append(state)
36            self.actions.append(action)
37            self.rewards.append(reward)
38            state = new_state
39            total_reward += reward
40            steps += 1
41        return total_reward
42
43    def reset_state(self):
```

```

44     # Инициализация состояния в случайном диапазоне
45     self.states = []
46     self.actions = []
47     self.rewards = []
48     state = np.array([
49         np.random.uniform(-1.0, 1.0),          # x
50         np.random.uniform(-0.1, 0.1),          # x_dot
51         np.random.uniform(-np.pi/6, np.pi/6), # tetta
52         np.random.uniform(-0.1, 0.1)          # tetta_dot
53     ], dtype=float)
54     return state

```

---

### 3.3.2. Реализация Hill Climbing (HC)

**Hill Climbing (HC)** (Восхождение на вершину) является итеративным алгоритмом локального поиска, который представляет собой усовершенствование BRS за счет целенаправленной эксплуатации окрестности уже найденного лучшего решения. В отличие от BRS, HC не генерирует полностью новую политику на каждой итерации, а вводит небольшое случайное **возмущение** ( $\delta$ ) к текущему лучшему вектору весов  $\mathbf{w}_{\text{best}}$ , формируя политику-кандидат  $\mathbf{w}'$ :

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}_{\text{best}} + \delta, \quad \text{где } \delta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Здесь  $\delta$  — вектор случайного шума, распределенного по Гауссу со стандартным отклонением  $\sigma$  (параметр, контролирующий радиус локального поиска).

**Принцип работы HC:**

- **Генерация кандидата:** Политика-кандидат  $\mathbf{w}'$  генерируется путем добавления гауссовского шума к текущему лучшему вектору весов  $\mathbf{w}_{\text{best}}$ .
- **Оценка:** Производится прогон модели (`rollout`) с использованием  $\mathbf{w}'$ , и вычисляется суммарная награда  $r$ .
- **Обновление:** Если полученная награда  $r$  превышает текущую наилучшую награду ( $r_{\text{best}}$ ), то  $\mathbf{w}'$  становится новой  $\mathbf{w}_{\text{best}}$ . Если улучшения нет,  $\mathbf{w}_{\text{best}}$  остается неизменным.

Данная реализация включает механизм **затухания**  $\sigma$  (`sigma_decay`), который позволяет уменьшать радиус поиска с течением времени. Это способствует переходу от широкого исследования пространства в начале обучения к точной настройке (эксплуатации) найденного оптимума на более поздних стадиях. НС, как правило, сходится быстрее, чем BRS, но более подвержен риску застревания в локальных оптимумах.

**Детали программной реализации** Класс `HCagent` включает два новых ключевых параметра: `sigma` и `sigma_decay`.

- В методе `learn` генерируется возмущение:  
`delta = np.random.normal(0, self.sigma, size=4)`, а затем вычисляется кандидат `new_w = self.w + delta`.
- Обновление весов происходит только при улучшении, что соответствует классическому алгоритму НС.
- В конце каждой итерации  $\sigma$  уменьшается:  
`self.sigma = max(self.sigma * self.sigma_decay, 0.01)`.

## Исходный код Hill Climbing (НС)

### Листинг 3: Реализация Hill Climbing (HC) с затуханием шума

---

```
1 import numpy as np
2 from src.Model import Model
3
4 class HCagent():
5     def __init__(self, model=Model(), sigma=1, sigma_decay=0.999, n_episodes=1000):
6         self.w = np.random.uniform(-0.4, 0.4, size=4)
7         self.best_w = self.w.copy()
8         self.sigma = sigma                      # Параметр шума (радиус поиска)
9         self.sigma_decay = sigma_decay          # Коэффициент затухания шума
10        self.n_episodes = n_episodes
11        self.model = model
12        self.best_reward = -np.inf
13        self.states = []
14        self.actions = []
15        self.rewards = []
16
17    def learn(self):
18        for episode_ind in range(self.n_episodes):
19            # Генерация гауссского шума (дельта)
20            delta = np.random.normal(0, self.sigma, size=4)
21            # Новый кандидат w'
22            new_w = self.w + delta
23            reward = self.rollout(new_w)
24            # Обновление w только при улучшении (восхождение)
25            if reward > self.best_reward:
26                self.w = new_w
27                self.best_reward = reward
28                self.best_w = new_w.copy()
29            # Затухание радиуса поиска
30            self.sigma = max(self.sigma * self.sigma_decay, 0.01)
31
32    def rollout(self, w):
33        state = self.reset_state()
34        total_reward = 0
35        done = False
36        steps = 0
37        while not done and steps < self.model.episode_length:
38            # Линейная политика с ограничением F_max
39            action = np.clip(np.dot(w, state), -self.model.Fmax, self.model.Fmax)
40            new_state, reward, done = self.model.step(state, action)
41            self.states.append(state)
42            self.actions.append(action)
```

```

43         self.rewards.append(reward)
44         state = new_state
45         total_reward += reward
46         steps += 1
47
48     return total_reward
49
50
51     def reset_state(self):
52         # Инициализация состояния в случайном диапазоне
53         self.states = []
54         self.actions = []
55         self.rewards = []
56         state = np.array([
57             np.random.uniform(-1.0, 1.0),           # x
58             np.random.uniform(-0.1, 0.1),           # x_dot
59             np.random.uniform(-np.pi/6, np.pi/6),   # tetta
60             np.random.uniform(-0.1, 0.1)            # tetta_dot
61         ], dtype=float)
62
63     return state

```

---

### 3.3.3. Реализация архитектуры Actor-Critic (AC)

В отличие от BRS и НС, метод **Actor-Critic** относится к классу алгоритмов обучения с подкреплением, использующих градиентную оптимизацию. Это гибридная архитектура, сочетающая в себе преимущества методов на основе ценности (Value-based) и методов на основе политики (Policy-based).

Архитектура состоит из двух линейных аппроксиматоров:

1. **Actor (Актер):** Определяет стохастическую политику  $\pi_\theta(a|s)$ , выбирая действие  $a$  в состоянии  $s$ . Его цель — максимизировать ожидаемую награду.
2. **Critic (Критик):** Оценивает функцию ценности состояния  $V_w(s)$ , предсказывая ожидаемую сумму будущих наград. Его цель — минимизировать ошибку предсказания (TD-ошибку).

**Математическая модель:** В данной реализации используется параметризация политики Гауссовским распределением:  $a \sim \mathcal{N}(\mu(s), \sigma(s))$ . Параметры распределения ( $\mu$  и  $\sigma$ ) и функция ценности  $V(s)$  аппроксируются линейными моделями от вектора состояния  $s$ :

$$\mu(s) = \theta_\mu^T \mathbf{s}, \quad \sigma(s) = \exp(\theta_\sigma^T \mathbf{s}), \quad V(s) = \mathbf{w}^T \mathbf{s}$$

Обновление весов происходит на каждом шаге (online-обучение) на основе ошибки временной разности (TD-error), которая показывает, насколько действие оказалось лучше или хуже ожидаемого:

$$\delta_t = r_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)$$

Градиенты для обновления параметров Актера выводятся через теорему о градиенте политики (Policy Gradient Theorem) и логарифмическую производную функции плотности вероятности нормального распределения.

**Детали программной реализации** Класс `ACagent` содержит параметры для обучения ( $\alpha_{actor}, \alpha_{critic}, \gamma$ ) и весовые коэффициенты: `w` (для Критика), `tetta_mu` и `tetta_sigma` (для Актера).

Ключевые методы реализации:

- **Расчет TD-ошибки:** В методе `learn` вычисляется `TD_error`, которая выступает «учителем» для Актера. Если ошибка положительна, вероятность выбранного действия увеличивается, если отрицательна — уменьшается.
- **Обновление Критика:** Веса `w` обновляются методом стохастического градиентного спуска, чтобы  $V(s)$  приближалась к реальной полученной награде.
- **Обновление Актера:** Используются функции `acceptance_mu` и `acceptance_sigma`, которые вычисляют градиенты  $\nabla_\theta \ln \pi(a|s)$ . Для  $\mu$  градиент пропорционален  $\frac{a-\mu}{\sigma^2}$ , а для  $\sigma$  (учитывая экспоненциальную параметризацию) —  $(\frac{(a-\mu)^2}{\sigma^2} - 1)$ .
- **Клиппинг (Clipping):** Для обеспечения стабильности обучения и предотвращения «взрыва градиентов», параметры  $\sigma$  и сами весовые коэффициенты принудительно ограничиваются в заданных диапазонах (`np.clip`).

## **Исходный код Actor-Critic**

## Листинг 4: Реализация алгоритма Actor-Critic

---

```
1 import numpy as np
2 from src.Model import Model
3
4 class ACagent():
5     def __init__(self, lr_actor=5e-4, lr_critic=1e-3, gamma=0.95, model=Model(),
6                  n_episodes=1000):
7         self.lr_actor = lr_actor      # Скорость обучения Актера
8         self.lr_critic = lr_critic    # Скорость обучения Критика
9         self.gamma = gamma           # Коэффициент дисконтирования
10        self.model = model
11        self.n_episodes = n_episodes
12        # Инициализация весов
13        self.w = np.random.uniform(-1, 1, size=4)          # Веса Критика (Value func)
14        self.tetta_mu = np.zeros(4)                         # Веса Актера (Мат. ожидание)
15        self.tetta_sigma = np.ones(4) * np.log(0.5)          # Веса Актера (Дисперсия)
16        # Параметры ограничения (clipping) для стабильности
17        self.sigma_clip_min = 0.05
18        self.sigma_clip_max = 2.0
19        self.tetta_sigma_clip = 5.0
20        self.tetta_mu_clip = 10
21        self.states = []
22        self.actions = []
23        self.rewards = []
24
25    def learn(self):
26        for episode_ind in range(self.n_episodes):
27            self.rollout()
28            # Пошаговое обновление весов (Online learning)
29            for i in range(len(self.actions)):
30                action, state, reward = self.actions[i], self.states[i], self.rewards[i]
31                # Оценка ценности следующего состояния  $V(s')$ 
32                next_value = self.value_func(self.states[i+1]) if i+1 < len(self.states)
33                else 0
34                # Вычисление ошибки временной разности:  $\delta = r + \gamma V(s') - V(s)$ 
35                TD_error = reward + self.gamma * next_value - self.value_func(state)
36                # Обновление весов Актера (Policy Update)
37                # acceptance_... реализуют градиент логарифма правдоподобия
38                self.tetta_mu += self.lr_actor * TD_error * self.acceptance_mu(action,
→ state)
                self.tetta_sigma += self.lr_actor * TD_error *
→ self.acceptance_sigma(action, state)
                # Ограничение весов для предотвращения расходности
```

```

39         self.tetta_sigma = np.clip(self.tetta_sigma, -self.tetta_sigma_clip,
40             ↵ self.tetta_sigma_clip)
41         self.tetta_mu = np.clip(self.tetta_mu, -self.tetta_mu_clip,
42             ↵ self.tetta_mu_clip)
43         # Обновление весов Критика (Value Update)
44         # Градиент  $V(s)$  по  $w$  равен самому вектору состояния  $state$  (так как  $V$ 
45             ↵ линейна)
46         self.w += self.lr_critic * TD_error * state
47
48
49     def rollout(self):
50         state = self.reset_state()
51         total_reward = 0
52         done = False
53         steps = 0
54         while not done and steps < self.model.episode_length:
55             # Выбор действия стochастической политикой
56             mu_val = self.mu(state)
57             sigma_val = self.sigma(state)
58             action = self.policy(mu_val, sigma_val)
59             new_state, reward, done = self.model.step(state, action)
60             self.states.append(state)
61             self.actions.append(action)
62             self.rewards.append(reward)
63             state = new_state
64             total_reward += reward
65             steps += 1
66
67     return total_reward
68
69
70     def value_func(self, state):
71         # Линейная аппроксимация  $V(s) = w^T * s$ 
72         return np.dot(state, self.w)
73
74
75     def policy(self, mu, sigma):
76         # Сэмплирование действия из нормального распределения
77         a = np.random.normal(mu, sigma)
78         return np.clip(a, -self.model.Fmax, self.model.Fmax)
79
80
81     def sigma(self, s):
82         # Вычисление стандартного отклонения:  $\sigma = \exp(\theta_\sigma \cdot T * s)$ 
83         z = np.dot(s, self.tetta_sigma)
84         z = np.clip(z, -10, 10) # Защита от переполнения экспоненты
85         sigma = np.clip(np.exp(z), self.sigma_clip_min, self.sigma_clip_max)
86         return sigma
87
88
89     def mu(self, s):
90         # Вычисление мат. ожидания:  $\mu = \theta_\mu \cdot T * s$ 
91         mu = np.dot(s, self.tetta_mu)

```

```

83     return mu
84
85     def acceptance_mu(self, action, state):
86         # Градиент log-probability по параметрам mu
87         # d(ln pi)/d(mu) * d(mu)/d(theta_mu)
88         acceptance = state * (action - self.mu(state)) / (self.sigma(state) ** 2 + 1e-8)
89         return acceptance
90
91     def acceptance_sigma(self, action, state):
92         # Градиент log-probability по параметрам sigma
93         # Учитываем, что sigma параметризована через экспоненту
94         acceptance = state * ((action - self.mu(state)) ** 2 / (self.sigma(state) ** 2 +
95             ↪ 1e-8) - 1)
96         return acceptance
97
98     def reset_state(self):
99         self.states = []
100        self.actions = []
101        self.rewards = []
102        state = np.array([
103            np.random.uniform(-1.0, 1.0),           # x
104            np.random.uniform(-0.1, 0.1),           # x_dot
105            np.random.uniform(-np.pi/6, np.pi/6),   # tetta
106            np.random.uniform(-0.1, 0.1)           # tetta_dot
107        ], dtype=float)
108        return state

```

---

## 4. Эксперимент

Данный раздел посвящен описанию и анализу результатов численного эксперимента.

Эксперимент включает два основных этапа:

1. **Настройка гиперпараметров:** Определение оптимальных конфигураций для каждого из алгоритмов с целью обеспечения максимальной производительности и стабильности.
2. **Сравнительный анализ:** Итоговое сравнение отобранных алгоритмов по ключевым метрикам и оценка целесообразности использования градиентных подходов для задач данной размерности.

### 4.1. Условия эксперимента и подбор гиперпараметров

Перед проведением сравнительного анализа алгоритмов был выполнен этап настройки гиперпараметров (Hyperparameter Tuning). Для каждого алгоритма была проведена серия запусков с различными конфигурациями для выявления параметров, обеспечивающих наилучшую сходимость и стабильность. Для усреднения результатов стохастических процессов каждый эксперимент запускался несколько раз (5 для AC, 10 для BRS и HC), а в качестве метрики качества использовалось среднее значение максимального полного вознаграждения, полученного агентом (*Best Reward*).

Ниже представлены результаты подбора для каждого из исследуемых методов.

#### 4.1.1. Настройка Basic Random Search (BRS)

Для BRS критическим фактором является способ инициализации весовых коэффициентов, так как алгоритм не имеет механизма направленного улучшения, а полагается на удачную генерацию. Исследовались

два типа распределений: равномерное (в диапазоне  $[-w, w]$ ) и нормальное ( $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ).

Результаты экспериментов по подбору диапазона равномерного распределения представлены в таблице 3.

**Таблица 3: BRS: Влияние диапазона инициализации (Равномерное распределение)**

| Диапазон весов ( $w_{range}$ ) | Средняя награда |
|--------------------------------|-----------------|
| 0.01                           | 998.91          |
| 0.1                            | 998.78          |
| 0.2                            | 999.14          |
| <b>0.4</b>                     | <b>999.30</b>   |
| 1.0                            | 999.01          |

Также было исследовано влияние параметров нормального распределения (Таблица 4).

**Таблица 4: BRS: Влияние параметров нормального распределения**

| Мат. ожидание ( $\mu$ ) | Стд. отклонение ( $\sigma$ ) | Средняя награда |
|-------------------------|------------------------------|-----------------|
| -1                      | 0.01                         | 999.02          |
| -1                      | 0.1                          | 999.24          |
| <b>-1</b>               | <b>1.0</b>                   | <b>999.45</b>   |
| 0                       | 0.1                          | 999.23          |
| 0                       | 1.0                          | 999.20          |
| 1                       | 1.0                          | 999.42          |

**Выбор:** Для финальных экспериментов было выбрано нормальное распределение с  $\mu = -1$ ,  $\sigma = 1$ . Количество эпизодов было зафиксировано на уровне 1000, так как дальнейшее увеличение до 2000 дает минимальный прирост (с 999.73 до 999.83).

#### 4.1.2. Настройка Hill Climbing (HC)

Для алгоритма HC, помимо инициализации, критически важны параметры шума: амплитуда возмущения ( $\sigma_{noise}$ ) и коэффициент её затухания.

В таблице 5 показано влияние начальной инициализации. В отличие от BRS, алгоритм НС оказался чувствителен к начальной точке: нормальное распределение с  $\mu = 1$  показало крайне низкие результаты, в то время как равномерное распределение обеспечило стабильную сходимость.

**Таблица 5: НС: Сравнение способов инициализации**

| Параметры инициализации          | Средняя награда |
|----------------------------------|-----------------|
| Uniform [-0.01, 0.01]            | 999.85          |
| <b>Uniform [-0.4, 0.4]</b>       | <b>999.91</b>   |
| Normal ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) | 898.58          |
| Normal ( $\mu = 1, \sigma = 1$ ) | 581.22          |

Параметры шума (Таблица 6) определяют способность алгоритма выходить из локальных минимумов. Эксперименты показали, что медленное затухание шума (высокий коэффициент) критически важно для точной настройки весов.

**Таблица 6: НС: Влияние параметров шума ( $\sigma_{noise}$ ) и затухания**

| Дисперсия шума | Награда       | Коэф. затухания | Награда       |
|----------------|---------------|-----------------|---------------|
| 0.01           | 936.27        | 0.9             | 840.36        |
| 0.5            | 967.40        | 0.99            | 947.28        |
| <b>1.0</b>     | <b>999.87</b> | <b>0.999</b>    | <b>999.88</b> |
| -              | -             | 1.0             | 999.85        |

**Выбор:** Для НС выбрана инициализация Uniform [-0.4, 0.4], начальная дисперсия шума  $\sigma = 1.0$  и коэффициент затухания **0.999**, обеспечивающий наивысшую среднюю награду.

#### 4.1.3. Настройка Actor-Critic (AC)

Для градиентного метода Actor-Critic ключевыми параметрами являются скорости обучения (Learning Rate) для сетей Актера и Критика, а также начальная дисперсия действий. Был проведен поиск по сетке (Grid Search) для пары ( $\alpha_{actor}, \alpha_{critic}$ ).

**Таблица 7: Actor-Critic: Подбор скоростей обучения (LR)**

| LR Actor                            | LR Critic                           | Средняя награда |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| $1 \cdot 10^{-4}$                   | $5 \cdot 10^{-4}$                   | 997.22          |
| $1 \cdot 10^{-4}$                   | $3 \cdot 10^{-3}$                   | 997.81          |
| $3 \cdot 10^{-4}$                   | $5 \cdot 10^{-4}$                   | 999.04          |
| $3 \cdot 10^{-4}$                   | $3 \cdot 10^{-3}$                   | 998.45          |
| $5 \cdot 10^{-4}$                   | $5 \cdot 10^{-4}$                   | 998.80          |
| <b><math>5 \cdot 10^{-4}</math></b> | <b><math>1 \cdot 10^{-3}</math></b> | <b>999.52</b>   |

Также было установлено, что более высокая начальная энтропия (начальная  $\sigma_{init}$ ) способствует лучшему исследованию среды.

**Таблица 8: Actor-Critic: Влияние начальной дисперсии и дисконтирования**

| Нач. Sigma ( $\sigma_{init}$ ) | Награда       | Gamma ( $\gamma$ ) | Награда |
|--------------------------------|---------------|--------------------|---------|
| 0.2                            | 998.94        | 0.95               | 999.68  |
| 0.3                            | 999.50        | 0.98               | 998.73  |
| <b>0.5</b>                     | <b>999.61</b> | <b>0.99</b>        | 999.64  |

**Выбор:** Для финальных экспериментов Actor-Critic используются:  $\alpha_{actor} = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_{critic} = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_{init} = 0.5$ ,  $\gamma = 0.95$ .

#### 4.1.4. Итоговая конфигурация

На основе проведенных экспериментов сформирована итоговая конфигурация гиперпараметров для сравнительного анализа (Таблица 9).

**Таблица 9: Итоговые параметры алгоритмов для сравнительного эксперимента**

| Алгоритм     | Параметры  |
|--------------|--|
| BRS          | $w \sim N(-1, 1)$  |
| HC           | $w \sim U[-0.4, 0.4]$ , $\sigma_{noise} = 1.0$ , decay= 0.999                                  |
| Actor-Critic | $\alpha_{act} = 5e^{-4}$ , $\alpha_{crit} = 1e^{-3}$ , $\gamma = 0.95$ , $\sigma_{init} = 0.5$ |

## 4.2. Сравнительный анализ метрик

Для проведения объективного сравнительного анализа эффективности алгоритмов Basic Random Search (BRS), Hill Climbing (HC) и Actor-Critic (AC) была выбрана система из пяти ключевых метрик:

1. **Среднее вознаграждение (Average Reward):** Среднее вознаграждение по всем шагам, отражающее общее качество управления.
2. **Кумулятивное вознаграждение (Cumulative Reward):** Суммарная награда, достигнутая агентом к концу эпизода (максимум 1000).
3. **Средняя длина эпизодов (Episode Length):** Среднее количество шагов, которое агент смог удержать стержень до падения (максимум 1000).
4. **RMSE  $\theta$  (Root Mean Square Error of  $\theta$ ):** Среднеквадратичное отклонение угла  $\theta$  от вертикали (0 рад), показывающее точность стабилизации.
5. **Время удержания вертикали (Upright Steps):** Среднее количество шагов, в течение которых угол стержня  $|\theta|$  не превышал порогового значения 0.087 рад ( $5^\circ$ ).

В анализ был дополнительно включен агент **BestBRS**. Этот агент не является обучаемым, а представляет собой агента с **фиксированными весами**, которые были выбраны как лучшая политика из 10 независимых прогонов алгоритма BRS. BestBRS служит эталоном для оценки максимальной производительности, достижимой с помощью градиентно-свободных методов.

**Сводные результаты метрик** Сводные результаты, полученные для четырех агентов (HC, BRS, BestBRS, AC) после проведения экспериментов, представлены в Таблице 10.

**Таблица 10:** Сводные результаты алгоритмов по пяти основным метрикам

| Метрика                     | HC            | BRS    | BestBRS       | AC     |
|-----------------------------|---------------|--------|---------------|--------|
| Ср. Кум. Награда (Max 1000) | 911.48        | 471.67 | <b>992.87</b> | 975.06 |
| Ср. Вознаграждение/Шаг      | 0.911         | 0.472  | <b>0.993</b>  | 0.975  |
| Ср. Длина Эпизода (шагов)   | 969.0         | 571.9  | <b>1000.0</b> | 994.4  |
| Ср. RMSE $\theta$ (рад)     | 0.1435        | 0.3470 | <b>0.1078</b> | 0.1319 |
| Ср. Шагов в вертикали       | <b>776023</b> | 631930 | 735413        | 693627 |

- Производительность (Кумулятивная Награда и Длина Эпизода):** Агент **BestBRS** является безусловным лидером, достигая почти идеального среднего кумулятивного вознаграждения (992.87) и максимальной средней длины эпизода (1000.0 шагов). Это подтверждает, что для задачи CartPole существует высококачественный фиксированный набор весов, и что обучение может быть сведено к поиску этого набора. Агент **Actor-Critic (AC)** показал второй лучший результат (975.06), демонстрируя высокую эффективность градиентного обучения, близкую к эталону. Агент **Hill Climbing (HC)** показал средний результат (911.48), уступая лидерам. Агент **BRS** оказался наименее эффективным (471.67), что ожидаемо, поскольку он не использует накопленный опыт.
- Точность и Стабильность (RMSE  $\theta$ ):** Наименьший средний показатель ошибки стабилизации (RMSE  $\theta$ ) принадлежит **BestBRS** (0.1078 рад), что логично, так как он представляет лучшую найденную политику. **Actor-Critic (AC)** показал третье место по средней ошибке (0.1319 рад), но его минимальный RMSE  $\theta$  (0.0841 рад) оказался наименьшим среди всех агентов, что говорит о его потенциале к достижению очень точной стабилизации в лучших прогонах. **BRS** показал худшую точность (0.3470 рад).
- Время удержания вертикали (Upright Steps):** По этой метрике, количество шагов, когда угол  $|\theta| \leq 0.087$  рад, лидирует агент **HC** ( $\approx 776$  тыс. шагов). Это указывает на то, что, хотя его общая награда ниже, его политика склонна удерживать стержень в очень узком диапазоне в течение длительного времени, компенсируя это снижением награды,

когда стержень уходит от вертикали.

## 4.3. Результаты

Для более глубокого понимания поведения алгоритмов, помимо сводных табличных данных, был проведен анализ динамики обучения и распределения показателей качества. Ниже представлены графики, полученные в ходе экспериментов, с соответствующими комментариями.

### 4.3.1. Динамика вознаграждения

На рисунке 2 представлена динамика усредненного вознаграждения, получаемого агентами на каждом шаге обучения.

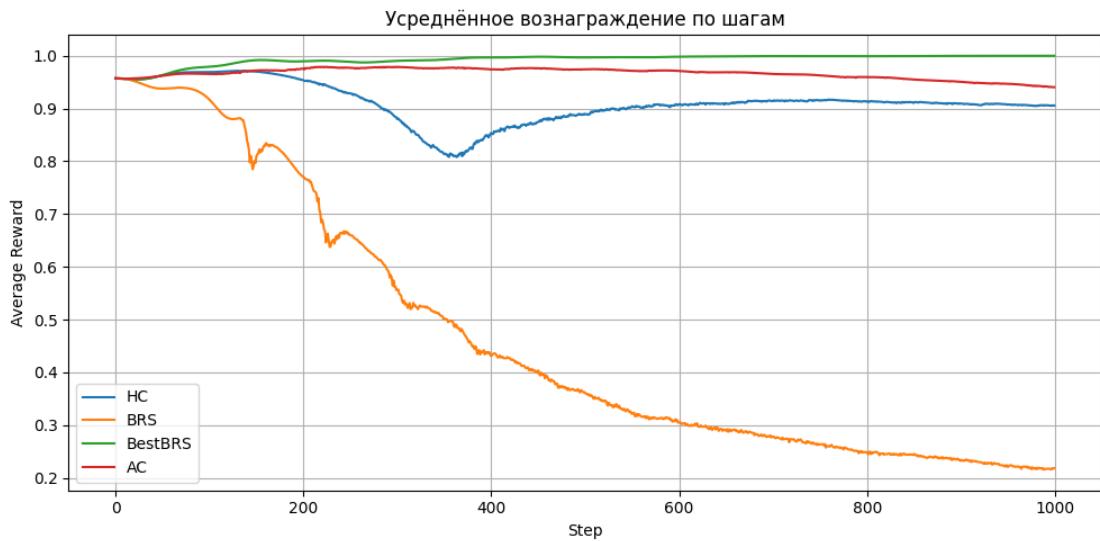


Рис. 2: Усреднённое вознаграждение по шагам для всех агентов

Из графика видно следующее:

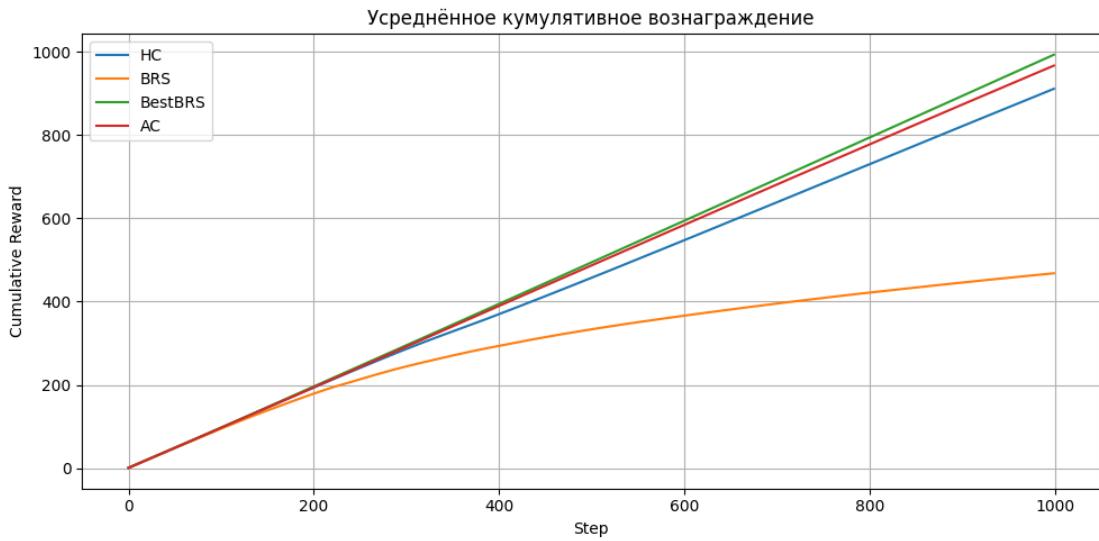
- **BestBRS** и **Actor-Critic (AC)** демонстрируют стабильно высокие показатели, удерживая планку среднего вознаграждения близко к максимальной на протяжении всего времени.
- **BRS** показывает стабильно низкий результат, что подтверждает неэффективность простого случайного поиска без механизма отбора.

- **Hill Climbing (HC)** демонстрирует характерное поведение: после начального роста наблюдается постепенное *снижение* среднего вознаграждения.

**Анализ деградации Hill Climbing:** Снижение эффективности HC объясняется чувствительностью алгоритма к стохастической природе начального состояния среды. В задаче CartPole каждый эпизод начинается со случайного угла отклонения шеста  $\theta \in [-0.05, 0.05]$ . Алгоритм работает следующим образом:

1. Агент находит набор весов  $w$ , который показывает отличный результат при малых начальных отклонениях.
2. В следующем эпизоде среда инициализируется с *большим* углом отклонения. Текущие веса  $w$  неправляются с управлением, агент быстро роняет шест и получает низкую награду.
3. Алгоритм HC воспринимает это как сигнал о том, что веса  $w$  "плохие", и пытается перейти в соседнюю точку пространства весов. Однако из-за уменьшения параметра шума ( $\sigma$ ) со временем (для обеспечения сходимости), агент теряет способность совершать большие скачки и не может найти глобально устойчивые веса.
4. В результате агент "сползает" в локальный оптимум или менее эффективную область, что на графике выглядит как постепенное уменьшение среднего вознаграждения.

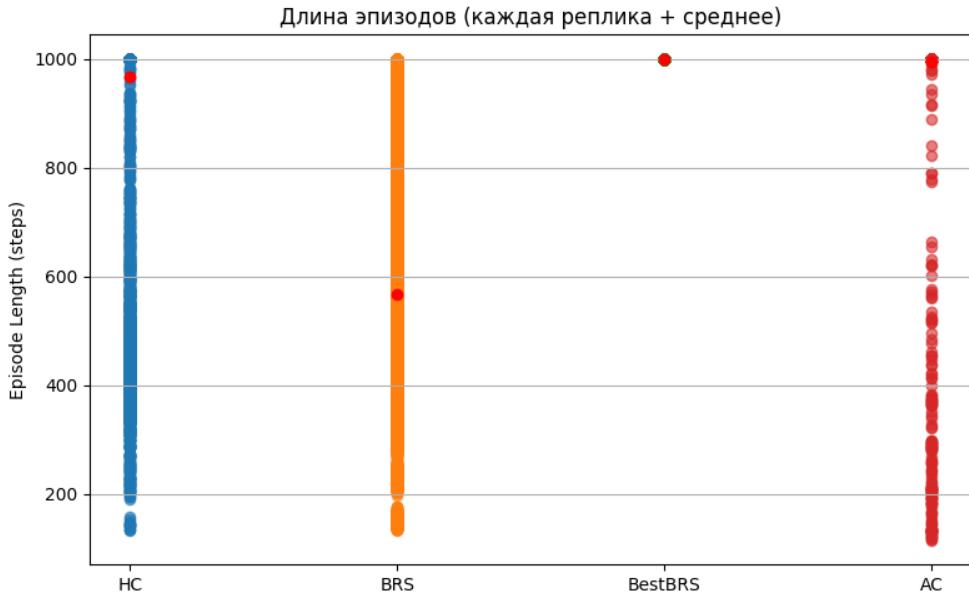
Рисунок 3 подтверждает эти выводы, отображая кумулятивное вознаграждение. BestBRS и AC достигают максимума быстрее всех, в то время как HC отстает из-за описанной выше нестабильности.



**Рис. 3: Усреднённое кумулятивное вознаграждение**

#### 4.3.2. Стабильность длины эпизодов

На рисунке 4 показано распределение длин эпизодов. Красные точки обозначают среднее значение, синие — разброс по отдельным запускам.



**Рис. 4: Распределение длины эпизодов**

- **BestBRS** демонстрирует идеальную стабильность: все эпизоды (плотное скопление точек) достигают лимита в 1000 шагов.
- **AC** имеет высокую среднюю длину, но наблюдаются отдельные

выбросы (точки ниже 1000), что говорит о редких сбоях в процессе обучения.

- **НС** имеет значительный разброс, варьируясь от 73 до 1000 шагов, что подтверждает его зависимость от начальных условий.

#### **4.3.3. Качество стабилизации (RMSE и Upright Steps)**

Для детального анализа качества управления были построены графики среднеквадратичной ошибки угла (RMSE  $\theta$ ) и времени удержания в вертикали для каждого агента.

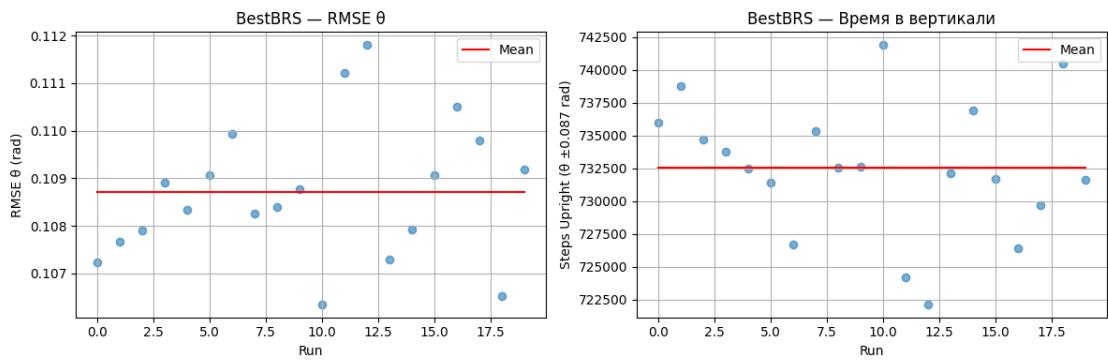


Рис. 5: Показатели BestBRS

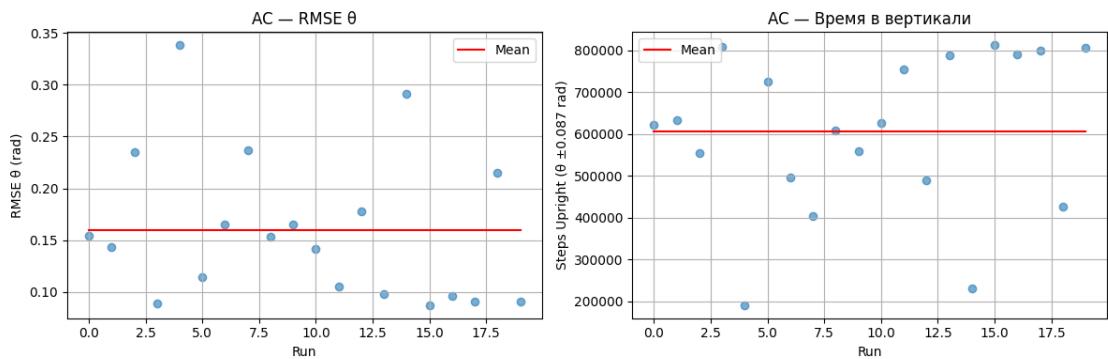


Рис. 6: Показатели Actor-Critic

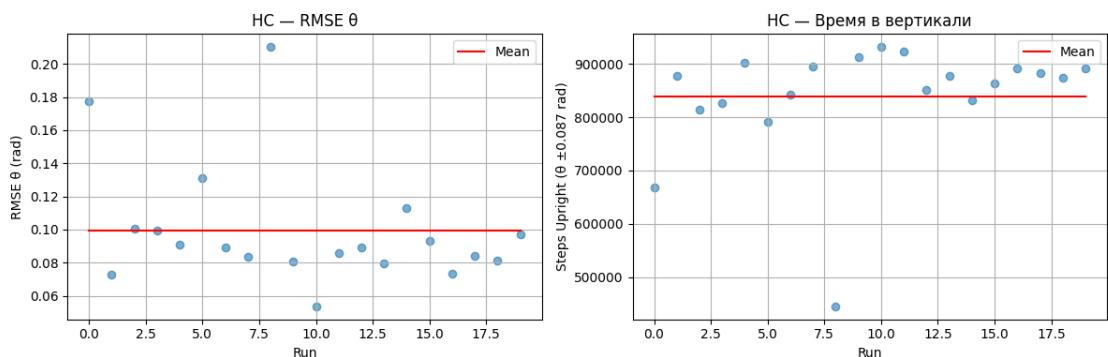


Рис. 7: Показатели HC

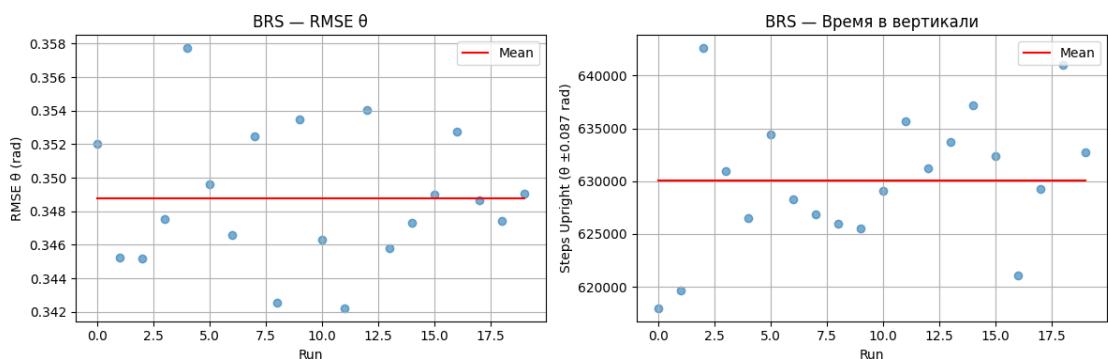


Рис. 8: Показатели BRS

- **BestBRS (Рис. 5):** Показывает минимальный разброс значений RMSE и стабильно высокое время удержания. Это эталонное поведение.
- **AC (Рис. 6):** Также демонстрирует хорошие результаты, но с чуть большим разбросом значений RMSE, чем у BestBRS.
- **HC (Рис. 7):** График наглядно демонстрирует высокую дисперсию. Примечательно, что несмотря на сбои, общее время удержания в вертикали у HC очень велико. Это говорит о том, что в удачных эпизодах HC удерживает шест очень жестко и точно, но не обладает робастностью.
- **BRS (Рис. 8):** Высокий уровень ошибки и низкое время удержания.

#### **4.4. Выводы и оценка целесообразности использования градиентных методов**

На основе полученных данных можно провести итоговое сравнение алгоритмов и ответить на вопрос о целесообразности применения градиентных методов (таких как Actor-Critic) для задач данной размерности.

##### **4.4.1. Преимущества и недостатки алгоритмов**

###### **1. BestBRS (Random Search с памятью):**

- *Преимущества:* Абсолютный лидер по стабильности и качеству управления (награда  $\approx 993$ ). Предельно прост в реализации.
- *Недостатки:* Не является обучаемым в классическом смысле (не адаптируется онлайн), требует предварительного этапа отбора весов.

###### **2. Actor-Critic (Градиентный метод):**

- *Преимущества:* Высокое качество управления ( $\approx 975$ ), способность обучаться ”с нуля” и адаптироваться. Теоретически масштабируется на сложные задачи.
- *Недостатки:* Высокая вычислительная сложность (расчет градиентов), большое количество гиперпараметров (learning rates, gamma, sigma), сложность в отладке.

### 3. Hill Climbing:

- *Преимущества:* Простота реализации, хорошее удержание вертикали в удачных эпизодах.
- *Недостатки:* Неустойчивость к стохастике среды, склонность к застреванию в локальных оптимумах, деградация производительности со временем.

#### 4.4.2. Оценка целесообразности градиентных методов

Задача CartPole- характеризуется крайне низкой размерностью пространства поиска: вектор состояния имеет размерность 4, а количество обучаемых весов линейной модели составляет всего  $4 \times 2 = 8$  параметров (или меньше, в зависимости от архитектуры).

Сравнивая результаты **BestBRS** (неградиентный метод) и **Actor-Critic** (градиентный метод), можно сделать вывод:

**Использование сложных градиентных методов для задач малой размерности (как CartPole) является нецелесообразным.**

Таким образом, для простых задач управления с малым числом параметров методы нулевого порядка (эволюционные стратегии, случайный поиск) обеспечивают лучшее соотношение сложности и качества, чем методы градиентного спуска. Градиентные методы раскрывают свой потенциал в задачах с высокой размерностью (например, обучение по изображениям), где случайный поиск становится бессильным из-за ”проклятия размерности”.

## 5. Заключение

В рамках учебной практики был успешно решен комплекс задач, направленных на сравнительный анализ эффективности градиентных и неградиентных методов обучения с подкреплением применительно к классической задаче стабилизации неустойчивой механической системы «тележка-стержень» (Cart-Pole).

Все поставленные цели и задачи были достигнуты, что подтверждается следующими результатами:

- **Математически описана динамика системы «тележка-стержень»:** Составлены нелинейные дифференциальные уравнения движения для модели с распределенной массой стержня, что позволило создать высокоточную программную симуляцию.
- **Создана программная среда эмуляции:** Разработан модульный симулятор среды Cart-Pole на языке **Python**, использующий метод численного интегрирования для точного расчета эволюции системы во времени без привлечения сторонних физических движков.
- **Программно реализованы алгоритмы:** Реализованы три агента с линейной аппроксимацией политики: **Basic Random Search (BRS)**, **Hill Climbing (HC)** и **Actor-Critic (AC)**.
- **Проведена серия экспериментов и зафиксированы метрики:** Проведен этап подбора гиперпараметров для каждого алгоритма, определены оптимальные конфигурации, и выполнена серия сравнительных экспериментов. Полученные данные (среднее вознаграждение, кумулятивное вознаграждение, RMSE  $\theta$ , средняя длина эпизода, время удержания вертикали) зафиксированы и использованы для анализа.
- **Сравнены данные и оценена целесообразность градиентных методов:**

1. Установлено, что неградиентный метод **BestBRS** (Random Search с памятью) показал наилучшее соотношение стабильности и качества управления ( $\approx 993$  кумулятивной награды), достигая максимальной длины эпизода в 1000 шагов.
2. Градиентный метод **Actor-Critic (AC)** показал второй лучший результат ( $\approx 975$ ), подтвердив свою высокую эффективность и потенциал к точной стабилизации, но уступив BestBRS по стабильности.
3. Сделан вывод, что **использование сложных градиентных методов для задач малой размерности** (с небольшим числом обучаемых параметров, как Cart-Pole) **является нецелесообразным**, поскольку методы нулевого порядка (Random Search) обеспечивают сравнимое или превосходящее качество при значительно меньшей вычислительной и программной сложности.

Исходный код разработанных моделей, алгоритмов и скрипты для проведения экспериментов доступны в публичном репозитории на GitHub:

<https://github.com/ChernyackovEugeny/rod-stabilization>

Данные, использованные для построения графиков и метрик, доступны на Google Диске:

[https://drive.google.com/drive/folders/1iTSAHL9I19hiVFMesW\\_ZycqNTcKhcpIB?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1iTSAHL9I19hiVFMesW_ZycqNTcKhcpIB?usp=sharing)

## **Список литературы**

- [1] A2C is a special case of PPO / Shengyi Huang, Anssi Kanervisto, Antonin Raffin et al. // arXiv preprint arXiv:2205.09123. — 2022.
- [2] Sutton Richard S., Barto Andrew G. Reinforcement Learning: An Introduction. — MIT Press, 1998. — ISBN: [0262193981](#).
- [3] Williams Ronald J. Simple statistical gradient-following algorithms for connectionist reinforcement learning // Machine Learning. — 1992. — Vol. 8, no. 3-4. — P. 229–256.