

数据结构与算法

Data Structures and Algorithms

苗东菁



海量数据计算研究中心



哈工大计算机科学与技术学院



第6章 内部排序





学习目标

- ➡ 掌握排序的**基本概念**和常用术语
- ➡ 熟练掌握**插入排序**、**希尔排序**；**冒泡排序**、**快速排序**；**选择排序**、**堆排序**；**归并排序**；**基数排序**的基本思想、算法原理、排序过程和算法实现。
- ➡ 掌握各种排序**算法的性能**及其**分析方法**，以及各种排序方法的**比较和选择**等。





本章主要内容

- 6.1 基本概念
- 6.2 冒泡排序
- 6.3 快速排序
- 6.4 直接**选择**排序
- 6.5 堆排序
- 6.6 (**直接**) 插入排序
- 6.7 希尔排序
- 6.8 (二路) 归并排序
- 6.9 基数排序
- **本章小结**





6.1 基本概念

➤ 排序 (sorting) 也称分类:

- 假设给定一组 n 个记录序列 $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, 其相应的关键字序列为 $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ 。排序是将这些记录排列成顺序为 $\{r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sn}\}$ 的一个序列, 使得相应的关键字的值满足 $k_{s1} \leq k_{s2} \leq \dots \leq k_{sn}$ (称为升序) 或 $k_{s1} \geq k_{s2} \geq \dots \geq k_{sn}$ (称为降序)。

➤ 排序的目的: 方便查询和处理。

➤ 排序算法的稳定性:

- 假定在待排序的记录集中, 存在多个具有相同关键字值的记录, 若经过排序, 这些记录的相对次序仍然保持不变, 即在原序列中, $k_i = k_j$ 且 r_i 在 r_j 之前, 而在排序后的序列中, r_i 仍在 r_j 之前, 则称这种排序算法是稳定的; 否则称为不稳定的。





6.1 基本概念(cont.)

➤ 排序分类:

- 按照排序时排序对象存放的设备，分为，
 - 内部排序:排序过程中数据对象全部在内存中的排序。
 - 外部排序:排序过程数据对象并非完全在内存中的排序
- 按照排序是的基本操作是否基于关键字的比较？分为，
 - 基于比较：基本操作——关键字的比较和记录的移动，其最差时间下限已经被证明为 $\Omega(n\log_2 n)$ 。
 - 交换排序（冒泡、快速排序）；选择排序（直接选择、堆排序）；插入排序（直接插入、折半插入、希尔排序）、归并排序（二路归并排序）。
 - 不基于比较：根据组成关键字的的分量及其分布特征，如基数排序。





6.1 基本概念(cont.)

排序算法的性能：

■ **基本操作**。内排序在排序过程中的基本操作：

● **比较**：关键码之间的比较；

● **移动**：记录从一个位置移动到另一个位置。

■ **辅助存储空间**。

● 辅助存储空间是指在数据规模一定的条件下，除了存放待排序记录占用的存储空间之外，执行算法所需要的其他额外存储空间。

■ **算法本身的复杂度**。





6.1 基本概念(cont.)

➤ 排序算法及其存储结构:

- 从操作角度看，排序是线性结构的一种操作，待排序记录可以用**顺序**存储结构或**链接**存储结构存储。我们假定采用**顺序**存储结构：

```
struct records {  
    keytype key ;  
    fields other ;  
};
```

```
typedef records LIST[maxsize] ;
```

- **Sort (int n , LIST &A)** :对n个记录的数组按照关键字不减的顺序进行排序。





6.2 冒泡排序

✦ 算法的基本思想:

- 将待排序的记录看作是竖着排列的“气泡”，关键字较小的记录比较轻，从而要往上浮。
- 对这个“气泡”序列进行 $n-1$ 遍（趟）处理。**所谓一遍（趟）处理，就是自底向上检查一遍这个序列**，并注意两个相比较的关键字的顺序是否正确。如果发现顺序不对，即“轻”的记录在下面，就交换它们的位置。
- 显然，处理1遍之后，“最轻”的记录就浮到了最高位置；处理2遍之后，“次轻”的记录就浮到了次高位置。在作第二遍处理时，由于最高位置上的记录已是“最轻”的，所以不必检查。一般地，第 i 遍处理时，不必检查第 i 高位置以上的记录的关键字，因为经过前面 $i-1$ 遍的处理，它们已正确地排好序。





6.2 冒泡排序(cont.)

算法的实现:

```
void BubbleSort ( int n , LIST &A )//内外层循环优化
{   for ( int i =1; i <= n-1; i++ ){ //一共要排序n-1趟
        int sp = 0; //每趟排序标志位都要先置为0, 判断内层循环是否发生了交换
        for ( int j =n; j >= i+1; j-- ) { //选出该趟排序的最小值前移; 内层循环已优化
            if ( A[j].key < A[j-1].key ){
                swap (A[j], A[j-1]);
                sp = 1; //只要有发生交换, sp就置为1
            }
        }
        if (sp ==0){ //若标志位为0, 说明所有元素已经有序, 就直接返回
            return;
        }
    }
}
```

```
void swap(records &x, records &y)
{   records t;
    t = x;    x = y;    y = t;
}
```





6.2 冒泡排序(cont.)

算法（时间）性能分析：

■ 最好情况（正序）：

● 比较次数： $n-1$

● 移动次数： 0

● 时间复杂度： $O(n)$;

■ 最坏情况（反序）：

● 比较次数： $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$

● 移动次数： $\sum_{i=1}^{n-1} 3(n-i) = \frac{3n(n-1)}{2}$

● 时间复杂度： $O(n^2)$;

空间复杂度： $O(1)$ 。

■ 平均情况：时间复杂度为 $O(n^2)$ 。





6.3 快速排序

► **快速算法是对冒泡排序的改进，改进的着眼点：**

- 在气泡排序中，记录的比较和移动是在**相邻**单元中进行的，记录每次交换只能上移或下移**一个**单元，因而总的比较次数和移动次数较多。

减少总的比较次数和移动次数



增大记录的比较和移动距离

每次交换
是跳跃式



较大记录从前面直接移动到后面
较小记录从后面直接移动到前面





6.3 快速排序(cont.)

➡ 算法的基本思想:

- 是1980年图灵奖得主C.R.A.Hoare 在1960年提出的一种**划分交换排序**。采用的是**分治策略**(一般与递归技术结合使用), 以减少排序过程之中的比较次数。
- 通过一趟排序将待排序的记录**分割**成**独立**的两部分, 其中一部分的所有记录关键字都比另外一部分的所有记录关键字都小 (**划分交换**), 然后再按此方法对这两部分分别进行快速排序, 整个排序过程可以**递归地**进行, 以达到整个记录序列变成有序序列。

➡ 分治法的基本思想

- **分解(划分)**: 将原问题分解为若干个与原问题相似的子问题;
- **求解**: 递归地求解子问题。若子问题的规模足够小, 则直接求解;
- **组合**: 将每个子问题的解组合成原问题的解。





6.3 快速排序(cont.)

➡ 算法的实现步骤:

设被排序的无序区为 $A[i], \dots, A[j]$

1. **基准元素选取**: 选择其中的一个记录的关键字 v 作为**基准元素**(**控制关键字**);(**怎么选择?**)
2. **划分**: 通过基准元素 v 把无序区 $A[i], \dots, A[j]$ 划分成左、右两部分, 使得左边的各记录的关键字都**小于** v ; 右边的各记录的关键字都**大于等于** v ; (**如何划分?**)
3. **递归求解**: 重复(1)~(2), 分别对左边和右边部分**递归地**进行**快速排序**;
4. **组合**: 左、右两部分均有序, 整个序列有序。

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---





6.3 快速排序(cont.)

➔ **基准元素的选取：**

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- **基准元素的选取是任意的**，但不同的选取方法对算法性能影响很大；
- **一般原则**：是每次都能将表划分为规模相等的两部分（最佳情况）。此时，划分次数为 $\log_2 n$ ，全部比较次数 $n \log_2 n$ ，交换次数 $(n/6) \log_2 n$ 。
- 设 $\text{FindPivot}(i, j)$ 是求 $A[i].\text{key}, \dots, A[j].\text{key}$ 的基准元素 $v = A[k]$ ，返回其下标 k 。
 - $v = (A[i].\text{key}, A[(i+j)/2].\text{key}, A[j].\text{key})$ 的中值)
 - $v =$ 从 $A[i].\text{key}$ 到 $A[j].\text{key}$ 最先找到的两个不同关键字中的最大者。（若 $A[i].\text{key}, \dots, A[j].\text{key}$ 之中至少有两个关键字不相同）
 - **优点**：若无两个关键字不同，则 $A[i]$ 到 $A[j]$ 已有序，排序结束。





6.3 快速排序(cont.)

```
int FindPivot( int i, int j )    /* 设A是外部数组 */
/*若A[i],...A[j]的关键字全部相同，则返回0；
  否则，左边两个不同关键字中的较大者的下标。*/
{  keytype  firstkey = A[i].key ; /* 第1个关键字的值A[i].key */
  int k ;                          /* 从左到右查找不同的关键字 */
  for ( k=i+1 ; k<=j; k++ )      /* 扫描不同的关键字 */
    if ( A[k].key > firstkey ) /* 选择较大的关键字 */
      return k ;
    else if ( A[k].key < firstkey )
      return i ;
  return 0 ;
}
```

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---





6.3 快速排序(cont.)

➡ 无序区划分（分割）：

设被排序的无序区为 $A[i], \dots, A[j]$

(1) **扫描**：

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- 令游标 r 从右端(初始时 $r = j$)开始向左扫描, 越过关键字大于等于 v 的所有记录, 直到遇到 $A[r].key < v$;
- 又令游标 l 从左端(初始时 $l = i$)开始向右扫描, 越过关键字小于 v 的所有记录, 直到遇到 $A[l].key \geq v$;

(2) **测试** l 和 r : 若 $l < r$, 则转(3); 否则($l > r$, 即 $l = r + 1$)转(4);

(3) **交换**: 交换 $A[l]$ 和 $A[r]$, 转(1); (目的是使 l 和 r 都至少向其前进方向前进一步)

(4) 此时 $A[i], \dots, A[j]$ 被划分成为满足条件的两部分 $A[i], \dots, A[l-1]$ 和 $A[l], \dots, A[j]$ 。





6.3 快速排序(cont.)

int **Partition** (int i , int j , keytype pivot)

/*用pivot划分A[i],...,A[j], 使关键字 < pivot 的在左子序列,
关键字 ≥ pivot 的在右子序列, 返回右子序列的起始下标*/

{ int $l = i$, $r = j$;

do{

while (A[r].key \geq pivot) $r--$;

while (A[l].key < pivot) $l++$;

if($l < r$) swap(A[l], A[r]);

} while($l \leq r$);

return l ;

}

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---





6.3 快速排序(cont.)

➡ **快速排序的实现**：/*对外部数组A 的元素A[i],...,A[j]进行快速排序*/

```
void QuickSort ( int i , int j )
```

```
{   keytype pivot;
```

```
    int k; //关键字大于等于pivot的记录在序列中的起始下标
```

```
    int pivotindex ; //关键字为pivot的记录在数组A中的下标
```

```
    pivotindex = FindPivot ( i , j );
```

```
    if( pivotindex != 0 ) { //递归终止条件
```

```
        pivot=A[pivotindex].key;
```

```
        k=Partition ( i , j , pivot );
```

```
        QuickSort ( i , k-1);
```

```
        QuickSort ( k , j ); // QuickSort ( k+1 , j ); 挖坑/填坑+分治
```

```
    }
```

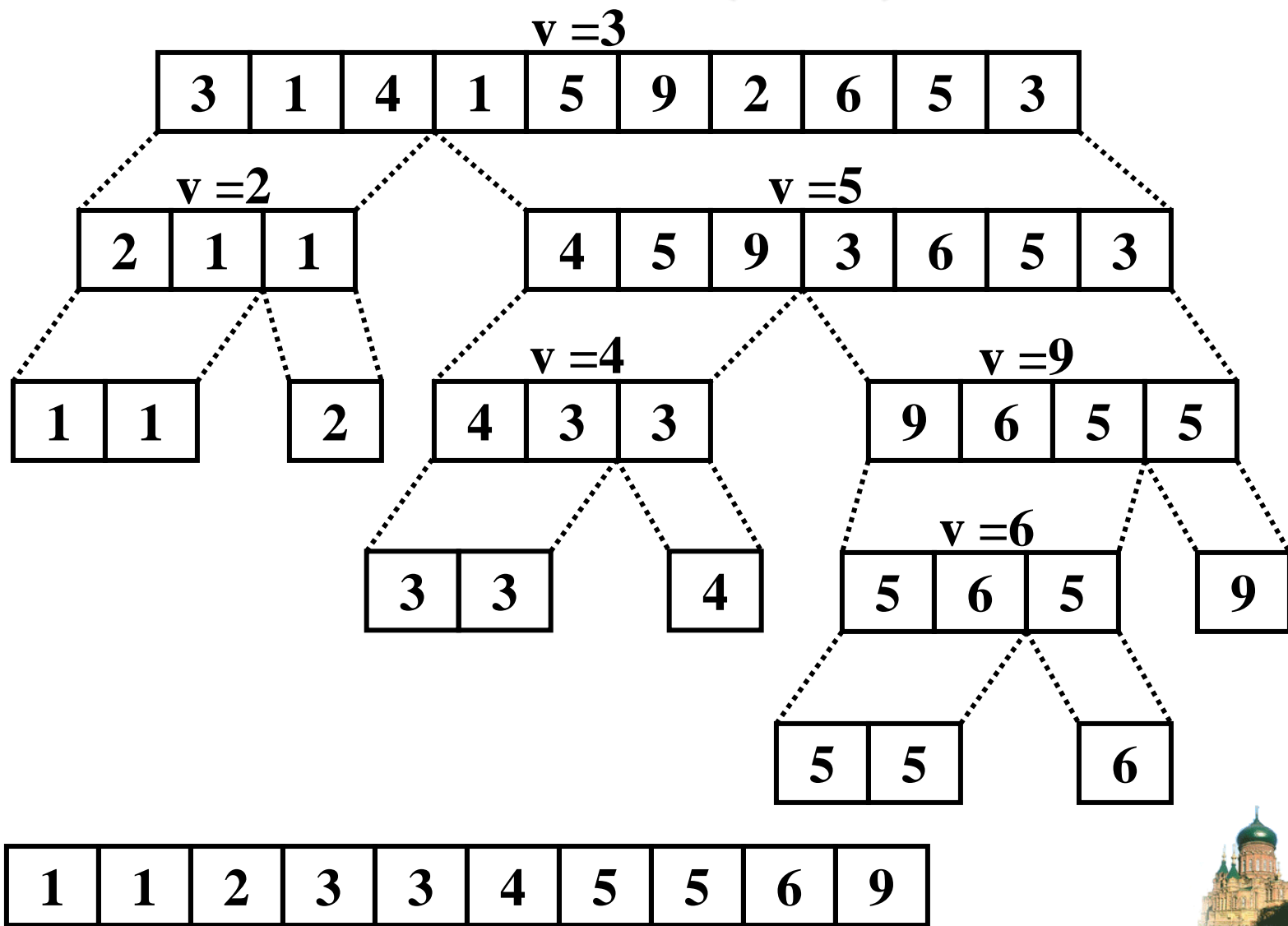
```
} //对数组A[1],...,A[n]进行快速排序可调用QuickSort(1,n)实现
```





6.3 快速排序(cont.)

➡ 示例





6.3 快速排序(cont.)

```
int Partition2 ( int i , int j , keytype pivot )
```

/*划分A[i],...,A[j], 使关键字 < pivot 的子序列在pivot左侧,
关键字 ≥ pivot 的子序列在pivot右侧, 返回pivot所在下标*/

```
{ int l , r ;
```

```
    pivot=A[i];//如果基准不是选的序列的第1个元素, 将基准与第1个元素交换
```

```
    do{
```

```
        while ( A[ r ].key >= pivot ) r--; if ( l < r ) A[l] = A[r];
```

```
        while ( A[ l ].key < pivot ) l++; if ( l < r ) A[r] = A[l];
```

```
        // if( l < r ) swap(A[l],A[r]);
```

```
    } while( l <= r );
```

```
    A[l] = pivot;
```

```
    return l ;
```

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---





6.3 快速排序(cont.)

快速排序（时间）性能分析

最好情况：

- 每一次划分后，划分点的左侧子表与右侧子表的长度相同，则有，为 $O(n\log_2 n)$ 。

- $T(n) \leq 2T(n/2) + 1n$

$$\leq 2(2T(n/4) + n/2) + n = 4T(n/4) + 2n$$

$$\leq 4(2T(n/8) + n/4) + 2n = 8T(n/8) + 3n$$

... ..

$$\leq nT(1) + (\log_2 n) n = O(n\log_2 n)$$

- 时间复杂度为 $O(n\log_2 n)$

- 空间复杂度为 $O(\log_2 n)$





6.3 快速排序(cont.)

快速排序（时间）性能分析

最坏情况：

- 每次划分只得到一个比上一次划分少一个记录的子序列（另一个子序列长度为1或0），则有

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{1}{2} n(n-1) = O(n^2)$$

- 时间复杂度为 $O(n^2)$
- 空间复杂度为 $O(n)$



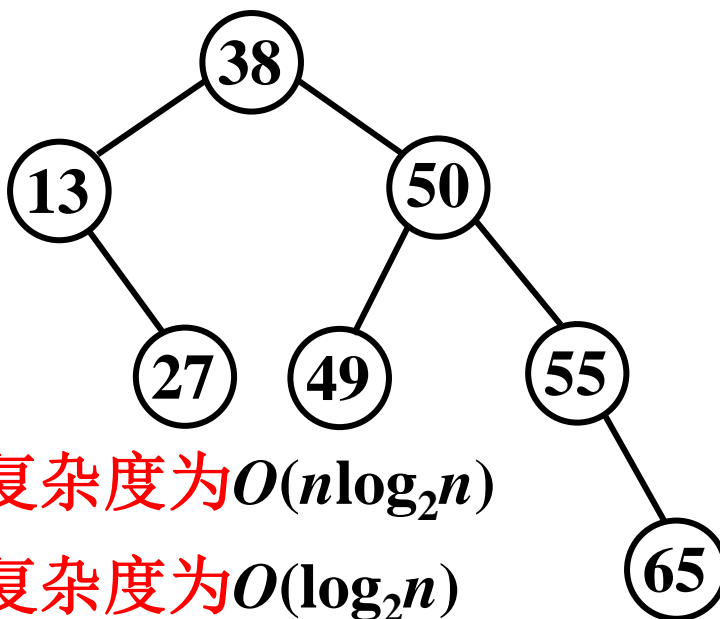


6.3 快速排序(cont.)

快速排序（时间）性能分析

平均情况：

- 快速排序的递归执行过程可以用递归树描述。
- 例如，序列 {38, 27, 55, 50, 13, 49, 65} 的快速排序递归树如下：(pivot=序列的第1个元素)



快速排序还有很多改进版本，如随机选择基准，区间内数据较少时直接用另的方法排序以减小递归深度。

- 时间复杂度为 $O(n\log_2 n)$
- 空间复杂度为 $O(\log_2 n)$





6.3 快速排序(cont.)

快速排序（时间）性能分析

平均情况:

$$\begin{cases} T(n) = cn + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [T(k) + T(n-1-k)] \\ T(0) = T(1) = c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= cn + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [T(k) + T(n-1-k)] \\ &= cn + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \end{aligned}$$

$$nT(n) = cn^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} T(k)$$

$$(n+1)T(n+1) = c(n+1)^2 + 2 \sum_{k=1}^n T(k)$$

$$\begin{aligned} (n+1)T(n+1) - nT(n) &= c(n+1)^2 - cn^2 + 2T(n) \\ &= c(2n+1) + 2T(n) \end{aligned}$$

$$(n+1)T(n+1) = c(2n+1) + (n+2)T(n)$$

$$T(n+1) = \frac{c(2n+1)}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} T(n)$$

$$\begin{aligned} T(n+1) &\leq 2c + \frac{n+2}{n+1} T(n) \\ &= 2c + \frac{n+2}{n+1} \left(2c + \frac{n+1}{n} T(n-1) \right) \\ &= 2c + \frac{n+2}{n+1} \left(2c + \frac{n+1}{n} \left(2c + \frac{n}{n-1} T(n-2) \right) \right) \\ &= 2c + \frac{n+2}{n+1} \left(2c + \dots + \frac{4}{3} \left(2c + \frac{3}{2} T(1) \right) \right) \\ &= 2c \left(1 + \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} \frac{n+1}{n} + \dots + \frac{n+2}{n+1} \frac{n+1}{n} \dots \frac{3}{2} \right) \\ &= 2c \left(1 + (n+2) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= 2c + 2c(n+2)(H_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \theta(\ln n) \quad (\ln n < H_n < 1 + \ln n)$$

$$T(n) = \theta(n \log n)$$





6.4 直接选择排序

➤ 算法的基本思想

- **选择排序**的主要操作是**选择**，其主要思想是：每趟排序在当前待排序序列中选出关键字值**最小（最大）**的记录，添加到有序序列中。
- **直接选择排序**，对待排序的记录序列进行 $n-1$ 遍的处理，第1遍处理是将 $A[1...n]$ 中最小者与 $A[1]$ 交换位置，第2遍处理是将 $A[2...n]$ 中最小者与 $A[2]$ 交换位置，……，第 i 遍处理是将 $A[i...n]$ 中最小者与 $A[i]$ 交换位置。这样，经过 i 遍处理之后，前 i 个记录的位置就已经按从小到大的顺序排列好了。
- **直接选择排序与冒泡排序的区别**在：气泡排序每次比较后，如果发现顺序不对立即进行交换，而选择排序不立即进行交换，而是找出最小关键字记录后再进行交换。

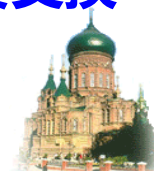




6.4 直接选择排序(cont.)

➡ 算法的实现

```
void SelectSort (int n, LIST A )
{   keytype lowkey;    //当前最小关键字
    int i, j, lowindex; //当前最小关键字的下标
    for(i=1; i<n; i++) { //在A[i...n]中选择最小的关键字, 与A[i]交换
        lowindex = i ;
        lowkey = A[i].key ;
        for ( j = i+1; j<=n; j++) //SelectMinKey( int i , List A)
            if (A[j].key<lowkey) { //用当前最小关键字与每个关键字比较
                lowkey=A[j] ;
                lowindex = j ;
            }
        if ( i != lowindex ) swap(A[i], A[lowindex]) ;//减少不必要交换
    }
}
```





6.4 直接选择排序(cont.)

性能分析

移动次数:

- 最好情况 (正序) : 0次
- 最坏情况: $3(n-1)$ 次

比较次数:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{1}{2} n(n-1) = O(n^2)$$

时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

空间复杂度为 $O(1)$ 。

选择树排序 (锦标赛排序) , 见第3章





6.5 堆排序

➤ 堆排序是对直接选择排序的改进，改进的着眼点：

- 如何**减少**关键字之间的**比较**次数。若能**利用每趟比较后的结果**，也就是在找出**关键字值最小**记录的同时，也找出**关键字值较小**的记录，则可减少后面的**选择**中所用的比较次数，从而提高整个排序过程的效率。

减少关键字之间的比较次数



查找最小值的同时，找出较小值



选择树（锦标赛）排序

- 如何降低锦标赛排序的空间复杂度？





6.5 堆排序(cont.)

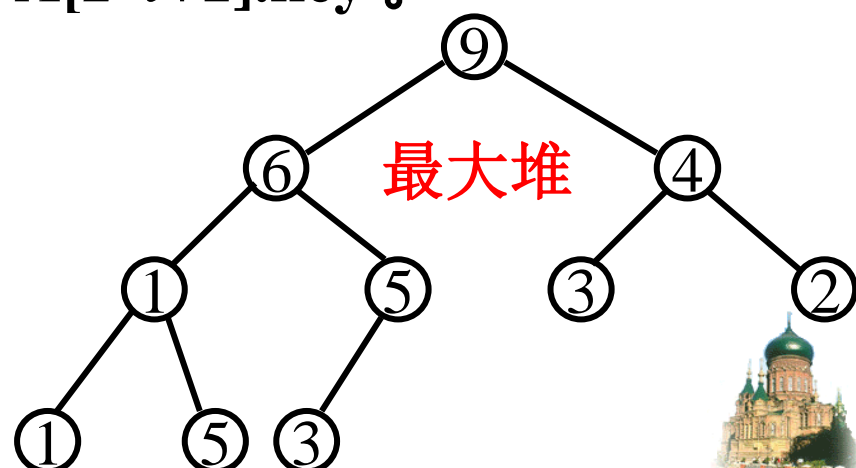
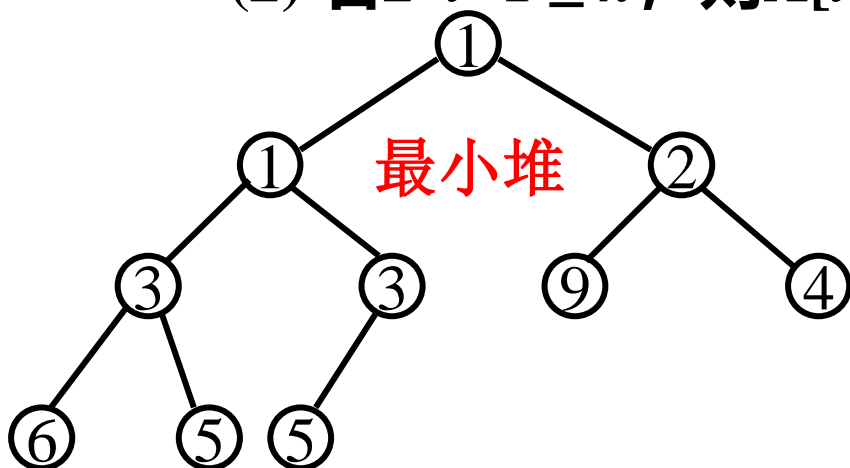
堆的定义

把具有如下性质的数组A表示的**完全二叉树**称为 **(最小) 堆**:

- (1) 若 $2*i \leq n$, 则 $A[i].key \leq A[2*i].key$;
- (2) 若 $2*i+1 \leq n$, 则 $A[i].key \leq A[2*i+1].key$ 。

把具有如下性质的数组A表示的**完全二叉树**称为 **(最大) 堆**:

- (1) 若 $2*i \leq n$, 则 $A[i].key \geq A[2*i].key$;
- (2) 若 $2*i+1 \leq n$, 则 $A[i].key \geq A[2*i+1].key$ 。





6.5 堆排序(cont.)

堆的性质

- 对于任意一个非叶结点的关键字，都不大于其左、右儿子结点的关键字。即 $A[i/2].key \leq A[i].key \quad 1 \leq i/2 < i \leq n$ 。
- 在堆中，以任意结点为根的子树仍然是堆。特别地，每个叶结点也可视为堆。每个结点都代表(是)一个堆。
 - 以堆（的数量）不断扩大的方式进行**初始建堆**。
- 在堆中（包括各子树对应的堆），其根结点的关键字是最小的。去掉堆中编号最大的叶结点后，仍然是堆。
 - 以堆的规模逐渐缩小的方式进行**堆排序**。

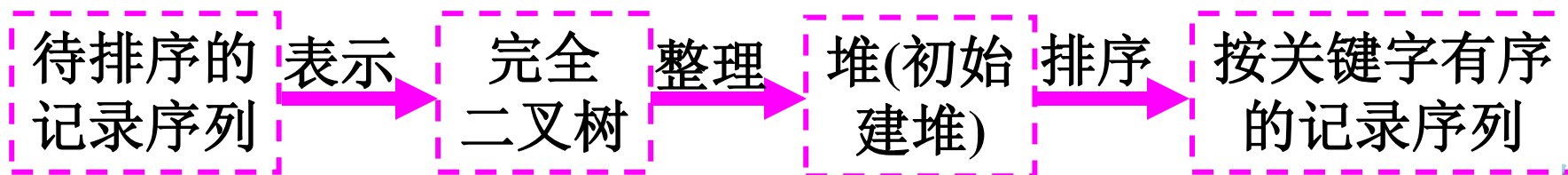




6.5 堆排序(cont.)

堆排序的基本思想:

- 首先将待排序的记录序列用完全二叉树表示;
- 然后完全二叉树构造成一个堆, 此时, 选出了堆中所有记录关键字的最小者;
- 最后将关键字最小者从堆中移走, 并将剩余的记录再调整成堆, 这样又找出了次小的关键字记录, 以此类推, 直到堆中只有一个记录。





6.5 堆排序(cont.)

堆排序的实现步骤:

- 把待排序的记录序列用完全二叉树的数组存储结构A表示
- **初始建堆**: 把数组所对应的完全二叉树以**堆不断扩大的方式整理成堆**。令 $i = n/2, \dots, 2, 1$ 并分别把以 $n/2, \dots, 2, 1$ 为根的完全二叉树整理成堆, 即执行算法 $\text{PushDown}(i, n)$ 。
- **堆排序**: 令 $i = n, n-1, \dots, 2$
 - 1.**交换**: 把堆顶元素(当前最小的)与位置 i (当前最大的叶结点下标)的元素交换, 即执行 $\text{swap}(A[1], A[i])$;
 - 2.**整理**: 把剩余的 $i-1$ 个元素整理成堆, 即执行 $\text{PushDown}(1, i-1)$;
 - 3.**重复**执行完这一过程之后, 则 $A[1], A[2], \dots, A[n]$ 是按关键字**不增顺序**的有序序列。





6.5 堆排序(cont.)

➔ 堆排序的实现:

```
void HeapSort ( int n , LIST A )
```

```
{ int i;
```

```
  for( i=n/2; i<=1; i++) /*初始建堆, 从最右非叶结点开始*/
```

```
    PushDown( i, n); /*整理堆, 把以i为根, 最大下标的叶为n*/
```

```
  for( i=n; i<=2; i--) {
```

```
    swap(A[1],A[i]); //堆顶与当前堆中的下标最大的叶结点交换
```

```
    PushDown( 1, i-1 );
```

```
    /*整理堆把以1为根, 最大叶下标为i-1的完全二元树整理成堆*/
```

```
  }
```

```
}
```





6.5 堆排序(cont.)

整理堆算法: $\text{PushDown}(\text{first}, \text{last})$

- 把以 $A[\text{first}]$ 为根，以 $A[\text{last}]$ 为最右边叶结点的完全二叉树整理成堆。根据堆的定义，它要完成的功能是，把完全二叉树中的关键字最小的元素放到堆顶，而把原堆顶元素下推到适当的位置，使 $(A[\text{first}], \dots, A[\text{last}])$ 成为堆。
- 那么，怎样把关键字最小的元素放到堆顶，把堆顶元素下推到适当位置呢？
- 具体操作(要点)如下：
 - 把完全二叉树的根或者子树的根与其左、右儿子比较，如果它比其左 / 右儿子大，则与其中较小者交换（若左、右儿子相等，则与其左儿子交换）。重复上述过程，直到以 $A[\text{first}]$ 为根的完全二叉树是堆为止。
- $\text{PushDown}(\text{first}, \text{last})$ 算法实现如下：





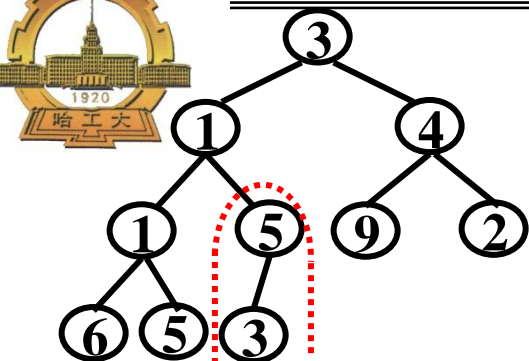
6.5 堆排序(cont.)

```

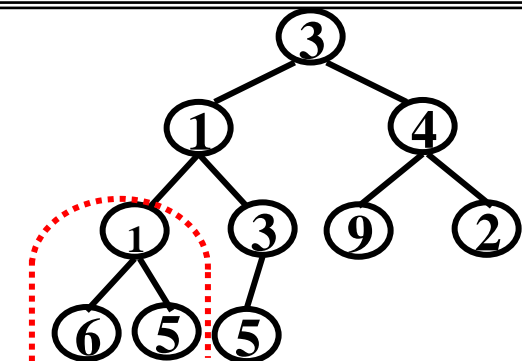
void PushDown(int first, int last)
{
    /*整理堆:A是外部数组,把A[first]下推到完全二元树的适当位置*/
    int r=first; /* r是被下推到的适当位置, 初始值为根first*/
    while(r<=last/2) /* A[r]不是叶, 否则是堆 */
        if((r==last/2) && (last%2==0)) { /* r有一个儿子在2*r上且为左儿子*/
            if(A[r].key>A[2*r].key)
                swap(A[r],A[2*r]);/*下推*/
            r=last; /*A[r].key小于等于A[2*r].key或者"大于", 交换后到叶, 循环结束*/
        } else if((A[r].key>A[2*r].key)&&(A[2*r].key<=A[2*r+1].key)) {
            /*根大于左儿子, 且左儿子小于或等于右儿子*/
            swap(A[r],A[2*r]); /*与左儿子交换*/
            r=2*r; /*下推到的位置也是下次考虑的根*/
        } else if((A[r].key>A[2*r+1].key)&&(A[2*r+1].key<A[2*r].key)) {
            /*根大于右儿子, 且右儿子小于左儿子*/
            swap(A[r],A[2*r+1]); /*与右儿子交换*/
            r=2*r+1; /*下推到的位置也是下次考虑的根*/
        } else /*A[r]符合堆的定义, 不必整理, 循环结束*/
            r=last;
    } /*PushDown*/

```

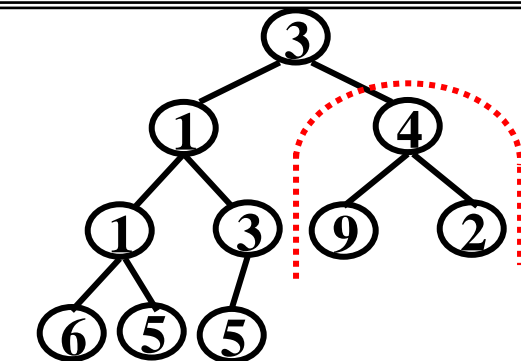




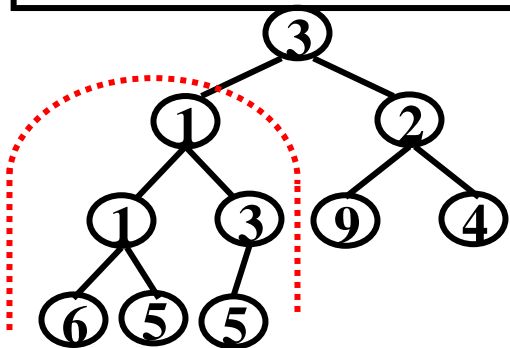
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



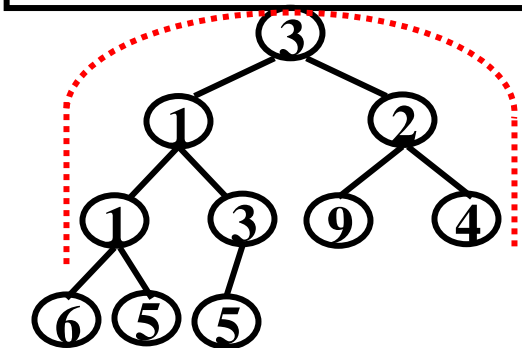
3	1	4	1	3	9	2	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



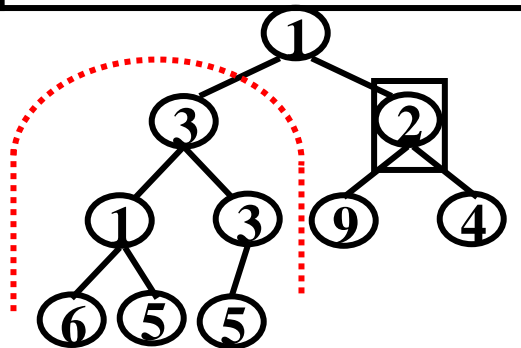
3	1	4	1	3	9	2	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



3	1	2	1	3	9	4	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

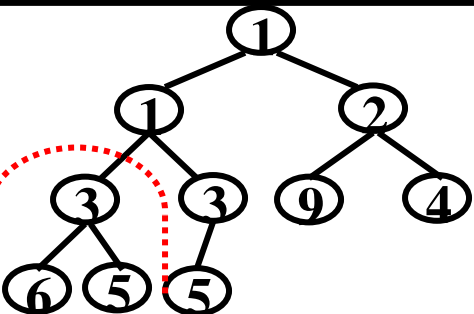


3	1	2	1	3	9	4	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

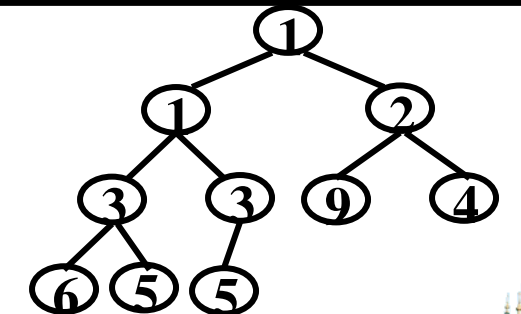


1	3	2	1	3	9	4	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

初始建堆过程



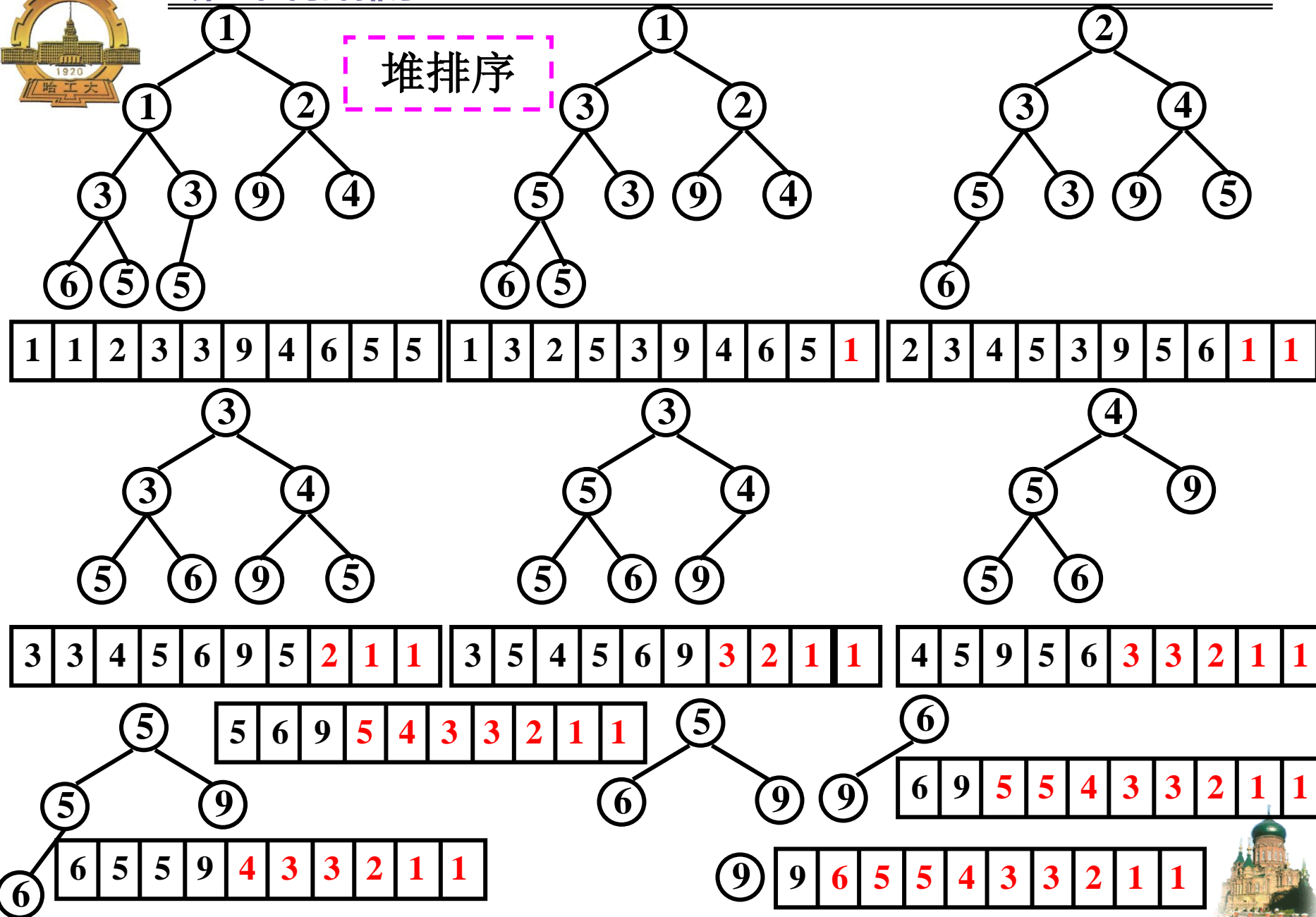
1	1	2	3	3	9	4	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



1	1	2	3	3	9	4	6	5	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



堆排序





6.5 堆排序(cont.)

➡ 算法性能分析

- PutDown函数中，执行一次while循环的时间是一个常数。因为r 每次至少为原来的两倍，假设while循环执行次数为i，则当r 从first 变为 $\text{first} * 2^i$ 时循环结束。此时 $r = \text{first} * 2^i > \text{last}/2$ ，即 $i > \log_2(\text{last}/\text{first}) - 1$ 。所以while循环体最多执行 $\log_2(\text{last}/\text{first})$ 次，即PushDown时间复杂度 $O(\log(\text{last}/\text{first})) = O(\log_2 n)$ 。
- 所以，HeapSort时间复杂度： $O(n \log_2 n)$ 。
- 这是堆排序的最好、最坏和平均的时间代价。
- HeapSort空间复杂度： $O(1)$ 。





6.6 （直接）插入排序

➤ 算法的基本思想:

- 插入排序的主要操作是**插入**，其**基本思想**是：每次将一个待排序的记录按其关键字的大小插入到一个已经排好序的有序序列中，直到全部记录排好序为止。
- 经过 $i-1$ 遍处理后， $A[1...i-1]$ 已排好序。第 i 遍处理仅将 $A[i]$ 插入 $A[1...i-1]$ 的适当位置，使得 $A[1...i]$ 又是排好序的序列。要达到这个目的，可以用**顺序**比较的方法：
 - 首先比较 $A[i]$ 和 $A[i-1]$ 的关键字，若 $A[i-1].key \leq A[i].key$ ，由于 $A[1...i]$ 已排好序，第 i 遍处理就结束了；
 - 否则交换 $A[i]$ 与 $A[i-1]$ 的位置，继续比较 $A[i-1]$ 和 $A[i-2]$ 的关键字，直到找到某一个位置 j ($1 \leq j \leq i-1$)，使得 $A[j].key \leq A[j+1].key$ 时为止。





6.6 （直接）插入排序(cont.)

➔ 算法的实现

```
void InsertSort (int n, LIST A )
```

```
{ int i, j ;
```

```
  A[0].key =  $-\infty$  ; //哨兵
```

```
  for(i=1; i<=n; i++) {
```

```
    j=i;
```

```
    while(A[j].key<A[j-1].key) { //不必检查当前位置是否为1
```

```
      swap(A[j],A[j-1]) ;
```

```
      j=j-1;
```

```
    }
```

```
  }
```

```
}
```





6.6 （直接）插入排序(cont.)

算法的性能分析

■ 最好情况下（正序）：

- 比较次数： $n-1$
- 移动次数： 0 or $2(n-1)$?
- 时间复杂度为 $O(n)$ 。

■ 最坏情况下（反序）：

- 比较次数： $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- 移动次数： $\sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{(n-1)n}{2}$
- 时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

■ 平均情况下（随机排列）

- 比较次数： $\sum_{i=2}^n i/2 = \frac{n(n+1)}{4}$
- 移动次数： $\sum_{i=2}^n (i-1)/2 = \frac{(n-1)n}{4}$
- 时间复杂度为 $O(n^2)$ 。





6.6 （直接）插入排序(cont.)

➤ 算法的性能分析

- **空间复杂度： $O(1)$**
- **直接插入排序算法简单、容易实现，适用于待排序记录基本有序或待排序记录较少时。**
- **当待排序的记录个数较多时，大量的比较和移动操作使直接插入排序算法的效率降低。**

➤ 改进的直接插入排序-----折半插入排序

- **直接插入排序，在插入第 i ($i > 1$) 个记录时，前面的 $i-1$ 个记录已经排好序，则在寻找插入位置时，可以用折半查找来代替顺序查找，从而较少比较次数。**
- **请自己写出这个改进的直接插入排序算法——折半插入排序算法，并分析时间性能。**





6.7 希尔排序----分组插入排序

➤ 希尔排序是对直接插入排序的改进，改进的着眼点：

- 若待排序记录按关键字值**基本有序**时,直接插入排序效率高
- 由于直接插入排序简单,则在记录数量 n **较小**时效率也很高

➤ 希尔排序的基本思想：

- 将整个待排序记录**分割**成若干个子序列，在子序列内分别进行直接插入排序，使整个序列逐步向**基本有序**发展；待整个序列中的记录**基本有序**时，对全体记录进行直接插入排序。

➤ 需解决的关键问题？

- **如何分组？** 按一定间隔分割成不同的子序列
- **组内如何排序？** 直接插入排序

- 通过比较相距一定**间隔**的元素，每趟比较所用的**步长**随着算法的进行而减小，直到只比较相邻元素为止。由于**增量**一直在减小，因此该排序也称作**缩减增量排序**。





6.7 希尔排序----分组插入排序(cont.)

➡ 示例：缩减增量 (步长) 排序

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
初始序列	40	25	49	25*	16	21	08	30	13
$d = 4$	40	25	49	25*	16	21	08	30	13
	13	21	08	25*	16	25	49	30	40
$d = 2$	13	21	08	25*	16	25	49	30	40
	08	21	13	25*	16	25	40	30	49
$d = 1$	08	21	13	25*	16	25	40	30	49
	08	13	16	21	25*	25	30	40	49





6.7 希尔排序----分组插入排序(cont.)

➤ 算法的实现

```
void ShellSort(int n, LIST A)
```

```
{  int i, j, d;
```

```
    for (d=n/2; d>=1; d=d/2) {
```

```
        for (i=d+1; i<=n; i++) { //将A[i]插入到所属的子序列中
```

```
            A[0].key= A[i].key; //暂存待插入记录
```

```
            j=i-d; //j指向所属子序列的最后一个记录
```

```
            while (j>0 && A[0].key< A[j].key) {
```

```
                A[j+d]= A[j]; //记录后移d个位置
```

```
                j=j-d; //比较同一子序列的前一个记录
```

```
            }
```

```
            A[j+d]= A[0];
```

```
        }
```

```
    }
```

```
}
```





6.7 希尔排序----分组插入排序(cont.)

➤ 算法的性能分析

- 希尔排序开始时**增量（步长）较大**，每个子序列中的**记录个数较少**，从而排序速度较快；当**增量（步长）较小时**，虽然每个子序列中记录个数较多，但整个序列已**基本有序**，排序速度也较快。
- **步长的选择**是希尔排序的重要部分。**只要最终步长为1**，**任何步长序列**都可以工作（当步长为1时，算法变为直接插入排序，这就保证了数据一定会被排序）。
- 希尔排序算法的时间性能是所取**增量（步长）**的函数，而到目前为止尚未有人求得一种最好的增量序列。**已知的最好步长序列**是由**Sedgewick**提出的(1, 5, 19, 41, 109,...)
- 希尔排序的时间性能在 $O(n^2)$ 和 $O(n\log_2 n)$ 之间。当 n 在某个特定范围内，希尔排序所需的比较次数和记录的移动次数约为 $O(n^{1.3})$ 。





6.8 （二路）归并排序

➤ 归并排序

- **归并**：将**两个或两个**以上的有序序列合并成一个有序序列的过程。
- 归并排序的主要操作是**归并**，其主要思想是：将若干有序序列逐步归并，最终得到一个有序序列。

➤ 如何将两个有序序列合成一个有序序列？（二路归并基础）

- 设相邻的按关键字有序序列为 $A[s] \sim A[m]$ 和 $A[m+1] \sim A[t]$ ，归并成一个按关键字有序序列 $B[s] \sim B[t]$





6.8 (二路) 归并排序(cont.)

```
void Merge (int s , int m , int t , LIST A , LIST B)
```

```
/*将有序序列A[s],...,A[m]和A[m+1],...,A[t]合并为一个有序序列 B[s],...,B[t]*/
```

```
{ int i = s ; j = m+1 , k = s ;//置初值
```

```
/* 两个序列非空时，取小者输出到B[k]上 */
```

```
while ( i <= m && j <= t )
```

```
    B[k++] = ( A[ i ].key <= A[ j ].key) ? A[i++] : A[j++] ;
```

```
/* 若第一个子序列非空(未处理完)，则复制剩余部分到B */
```

```
while ( i <= m ) B[k++] = A[i++] ;
```

```
/* 若第二个子序列非空(未处理完)，则复制剩余部分到B */
```

```
while ( j <= t ) B[k++] = A[j++] ;
```

```
}/*时间复杂度:  $O(t - s + 1)$ ; 空间复杂度:  $O(t - s + 1)$  */
```

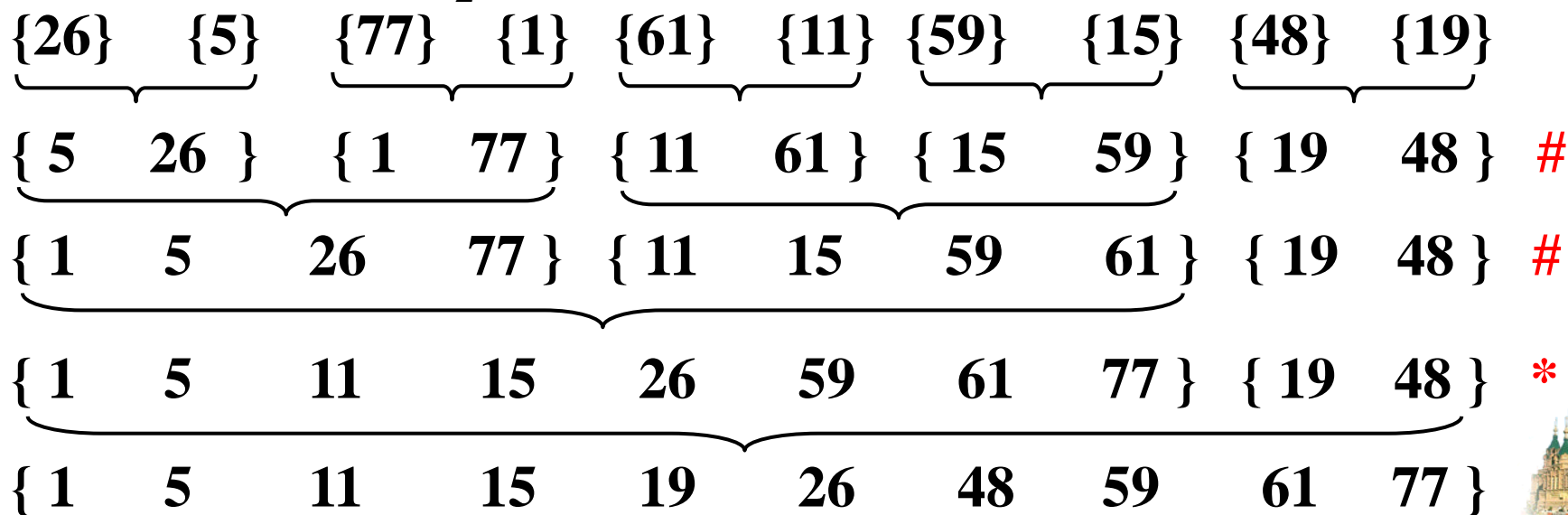




6.8 (二路) 归并排序(cont.)

➤ 二路归并排序的基本思想 (自底向上的非递归算法)

- 将具有 n 个待排序记录的序列视为 n 个长度为1的有序序列;
- 然后进行两两归并, 得到 $\lceil n/2 \rceil$ 个长度为2的有序序列;
- 再进行两两归并, 得到 $\lceil n/4 \rceil$ 个长度为4的有序序列;
-,
- 直至得到1个长度为 n 的有序序列为止。
- 共需归并 $\log_2 n$ 趟





6.8 (二路) 归并排序(cont.)

➡ 怎样完成一趟归并?

/*把A中长度为 h 的相邻序列归并成长度为 $2h$ 的序列*/

void **MergePass** (int n , int h , LIST A , LIST B)

{ int i , t ;

for ($i=1$; $i+2*h-1 \leq n$; $i+=2*h$)

Merge(i , $i+h-1$, $i+2*h-1$, A, B) ;//归并长度为 h 的两个有序子序列

if ($i+h-1 < n$) /* 尚有两个子序列，其中最后一个长度小于 h */

Merge(i , $i+h-1$, n , A, B) ; /* 归并最后两个子序列 */

else /* 若 $i \leq n$ 且 $i+h-1 > n$ 时，则剩余一个子序列轮空，直接复制 */

for ($t= i$; $t \leq n$; $t++$)

$B[t] = A[t]$;

} /* MergePass */





6.8 (二路) 归并排序(cont.)

➡ (二路) 归并排序算法: 如何控制二路归并的结束?

```
void MergeSort ( int n , LIST A )
```

```
{ /* 二路归并排序 */
```

```
int h = 1 ;/* 当前归并子序列的长度，初始为1 */
```

```
LIST B ;
```

```
while (h < n){
```

```
    MergePass (n , h , A , B) ;
```

```
    h = 2*h ;
```

```
    MergePass (n , h , B , A) ; /* A、B互换位置 */
```

```
    h = 2*h ;
```

```
}
```

```
}/* MergeSort */
```





6.8 （二路）归并排序(cont.)

➤ （二路）归并排序算法性能分析

■ 时间性能:

- 一趟归并操作是将 $A[1] \sim A[n]$ 中相邻的长度为 h 的有序序列进行两两归并，并把结果存放到 $B[1] \sim B[n]$ 中，这需要 $O(n)$ 时间。整个归并排序需要进行 $\lceil \log_2 n \rceil$ 趟，因此，总的时间代价是 $O(n \log_2 n)$ 。
- 这是归并排序算法的**最好、最坏、平均**的时间性能。

■ 空间性能:

- 算法在执行时，需要占用与原始记录序列同样数量的存储空间，因此，空间复杂度为 $O(n)$ 。





6.8 （二路）归并排序(cont.)

➤ （二路）归并排序分治算法

■ 算法的基本思想

- **分解**：将当前待排序的序列 $A[\text{low}], \dots, A[\text{high}]$ 一分为二，即求分裂点 $\text{mid} = (\text{low} + \text{high}) / 2$ ；
- **求解**：递归地对序列 $A[\text{low}], \dots, A[\text{mid}]$ 和 $A[\text{mid}+1], \dots, A[\text{high}]$ 进行归并排序；
- **组合**：将两个已排序子序列归并为一个有序序列。

■ 递归的终止条件

- 子序列长度为 1，
因为一个记录自然有序。

■ 算法实现





6.8 （二路）归并排序(cont.)

➡ （二路）归并排序分治算法

■ 算法实现

```
void MergeSort ( LIST A , LIST B , int low , int high )
```

```
/* 用分治法对A[low], ..., A[high]进行二路归并 */
```

```
{ int mid = (low+high)/2 ;
```

```
  if (low<high){ /* 区间长度大于 1 , high-low>0 */
```

```
    MergeSort ( A , B , low , mid) ;
```

```
    MergeSort ( A , B , mid+1 , high) ;
```

```
    Merge (low , mid , high , A , B) ;
```

```
}
```

```
}/* MergeSort */
```





6.9 基数排序----多关键字排序

基于关键字比较的排序方法时间下界

- 基于关键字比较的排序方法的时间下界是 $O(n\log_2 n)$ 。
- 因此，不存在时间复杂性低于此下界的基于关键字比较的排序！
- 只有不通过关键字比较的排序方法，才有可能突破此下界

基数排序（时间复杂度可达到线性级 $O(n)$ ）

- 不比较关键字的大小，而根据构成关键字的每个分量的取值，排列记录顺序的方法，称为分配法排序(基数排序)。
- 而把关键字各个分量所有可能的取值范围的最大值称为基数或桶或箱，因此基数排序又称为桶排序。

基数排序的适用范围：

- 显然，要求关键字分量的取值范围必须是有限的，否则可能要无限的箱。





6.9 基数排序----多关键字排序(cont.)

➔ 算法的基本思想

- 设待排序的序列的关键字都是位相同的**整数**（不相同，取位数的最大值），其位数为 figure ，每个关键字可以各自含有 figure 个**分量**，每个分量的值取值范围为 $0, 1, \dots, 9$ 即**基数**为10。依次从**低位**考查每个分量。
- 首先把全部数据装入一个队列A，然后按下列步骤进行：
 - 1.**初态**:设置10个队列，分别为 $Q[0], Q[1], \dots, Q[9]$ ，并且均为空
 - 2.**分配**:依次从队列中取出每个数据 data ；第 pass 遍处时，考查 data.key 右起第 pass 位数字，设其为 r ，把 data 插入队列 $Q[r]$ ，取尽A，则全部数据被分配到 $Q[0], Q[1], \dots, Q[9]$ 。
 - 3.**收集**:从 $Q[0]$ 开始，依次取出 $Q[0], Q[1], \dots, Q[9]$ 中的全部数据，并按照取出顺序，把每个数据插入排队A。
 - 4.**重复**1,2,3步，对于关键字中有 figure 位数字的数据进行 figure 遍处理，即可得到按关键字有序的序列。





6.9 基数排序----多关键字排序(cont.)

➡ 算法示例:

321 986 123 432 543 018 765 678 987 789 098 890 109 901 210 012

Q[0]:890 210

Q[1]:321 901

Q[2]:432 012

Q[3]:123 543

Q[4]:

Q[5]:765

Q[6]:986

Q[7]:987

Q[8]:018 678 098

Q[9]:789 109

Q[0]:901 109

Q[1]:210 012 018

Q[2]:321 123

Q[3]:432

Q[4]:543

Q[5]:

Q[6]:765

Q[7]:678

Q[8]:986 987 789

Q[9]:890 098

Q[0]:012 018 098

Q[1]:109 123

Q[2]:210

Q[3]:321

Q[4]:432

Q[5]:543

Q[6]:678

Q[7]:765 789

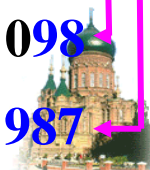
Q[8]:890

Q[9]: 901 986 987

890 210 321 901 432 012 123 543 765 986 987 018 678 098 789 019

901 109 210 012 018 321 123 432 543 765 678 986 987 789 890 098

012 018 098 109 123 310 321 432 543 678 765 789 890 901 986 987





6.9 基数排序----多关键字排序(cont.)

算法实现:

```
void RadixSort( int figure, QUEUE &A)
```

```
{  QUEUE Q[10]; records data ;
```

```
  int pass, r, i ;
```

```
  for ( pass=1; pass<=figure ; pass++ ) {
```

```
    for ( i=0 ; i<=9 ; i++ ) /*置空队列*/
```

```
      MAKENULL( Q[i] ) ;
```

```
    while ( !EMPTY( A ) ) { /* 分配 */
```

```
      data = FRONT ( A ) ;
```

```
      DEQUEUE ( A ) ;
```

```
      r = Radix(data.key, pass) ;
```

```
      ENQUEUE( data , Q[r] ) ; }
```

```
    for ( i=0 ; i <=9 ; i++ ) /* 收集 */
```

```
      while ( !EMPTY( Q[i] ) ) {
```

```
        data = FRONT ( Q[i] ) ;
```

```
        DEQUEUE( Q[i] ) ;
```

```
        ENQUEUE( data, A ); }
```

```
  / *求整数 k 的第 p 位 */
```

```
  int Radix ( int k, int  p)
```

```
  { int power= 1 ;
```

```
    for ( int i=1; i<=p-1 ; i++ )
```

```
      power = power * 10 ;
```

```
    return
```

```
    (( k%(power*10))/power) ;
```

```
  }
```

```
  for (i=1;i<=9;i++) { //收集
```

```
    Concatenate(Q[0], Q[i]);
```

```
    A=Q[0];
```

```
  } //缩短收集操作的时间:O(r)
```

```
}
```





6.9 基数排序----多关键字排序(cont.)

➔ 算法的改进:

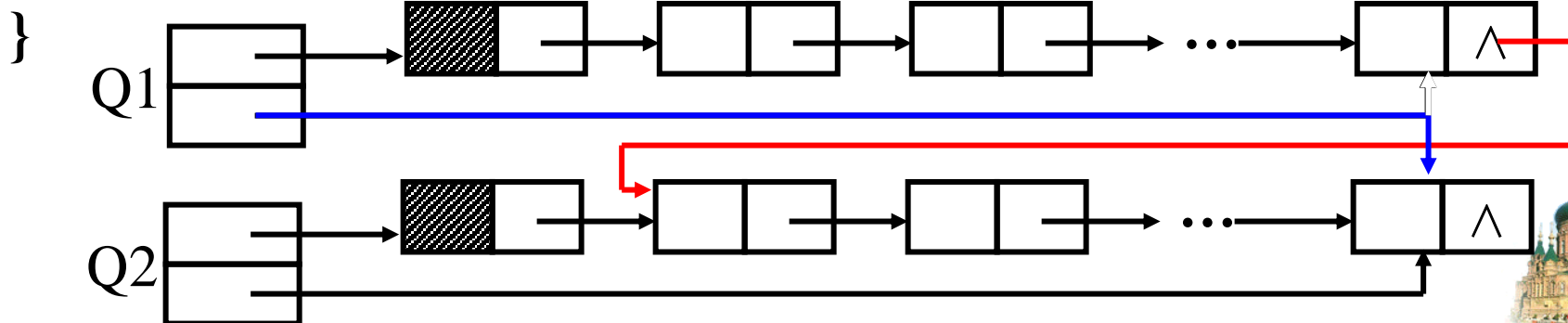
- 由于每个桶（箱）存放多少个关键字分量相同的记录个数无法预料，即队列 $Q[0], Q[1], \dots, Q[9]$ 长度很难确定，故桶一般设计成链式排队，两个排队链在一起的方法如下：

```
void Concatenate(QUEUE Q1, QUEUE Q2)
```

```
{  if ( !EMPTY( Q2 ) ) {
```

```
    Q1.rear->next=Q2.front->next;
```

```
    Q1.rear=Q2.rear;
```





6.9 基数排序----多关键字排序(cont.)

➡ 算法性能分析

- n ----记录数, d ----关键字 (分量) 个数, r ----基数
- **时间复杂度:** 分配操作: $O(n)$, 收集操作 $O(r)$, 需进行 d 趟分配和收集。时间复杂度: $O(d(n+r))$
- **空间复杂度:** 所需辅助空间为队首和队尾指针 $2r$ 个, 此外还有为每个记录增加的链域空间 n 个。空间复杂度 $O(n+r)$

➡ 算法的推广

- 若被排序的数据关键字由若干域组成, 可以把每个域看成一个分量按照每个域进行基数排序。
- 若关键字各分量不是整数, 则把各分量所有可以取值与一组自然数对应。

➡ 举例:

- 如何在 $O(n)$ 时间内, 对 0 到 n^2-1 之间的 n 个整数进行排序





本章小结--各种排序方法的比较

➡ 对排序算法应该从以下几个方面综合考虑：

- (1)时间复杂度；
- (2)空间复杂度；
- (3)稳定性；
- (4)算法简单性；
- (5)待排序记录个数 n 的大小；
- (6)记录本身信息量的大小；
- (7)关键字值的分布情况。





本章小结--各种排序方法的比较(cont.)

➡ (1)时间复杂度比较:

排序方法	平均情况	最好情况	最坏情况
直接插入排序	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(n^2)$
希尔排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n^{1.3})$	$O(n^2)$
冒泡排序	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(n^2)$
快速排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n^2)$
直接选择排序	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
堆(和选择树)排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$
(二路)归并排序	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$
基数排序	$O(d(n+r))$	$O(d(n+r))$	$O(d(n+r))$





本章小结--各种排序方法的比较(cont.)

➡ (2)空间复杂度比较和(3)稳定性比较:

排序方法	辅助空间	稳定性/不稳定举例
冒泡排序	$O(1)$	是
快速排序	$O(\log_2 n) \sim O(n)$	否/2,2',1
直接选择排序	$O(1)$	否/2,2',1
堆排序/选择树	$O(1)/O(n)$	否/1,2,2'(最小堆)
直接插入排序	$O(1)$	是
希尔排序	$O(1)$	否/3,2,2'(d=2,d=1)
(二路)归并排序	$O(n)$	是
基数排序	$O(n+r)$	是





本章小结--各种排序方法的比较(cont.)

- ➡ **(4)算法简单性比较：**从算法简单性看，
 - 一类是简单算法，包括直接插入排序、直接选择排序和冒泡排序；
 - 另一类是改进后的算法，包括希尔排序、选择树/堆排序、快速排序和归并排序，这些算法都很复杂。
 -
- ➡ **(5)待排序的记录个数比较：**从待排序的记录个数 n 的大小看，
 - n 越小，采用简单排序方法越合适；
 - n 越大，采用改进的排序方法越合适。
 - 因为 n 越小， $O(n^2)$ 同 $O(n\log_2 n)$ 的差距越小，并且输入和调试简单算法比输入和调试改进算法要少用许多时间。





本章小结--各种排序方法的比较(cont.)

➡ (6)记录本身信息量比较:

- 记录本身信息量越大，移动记录所花费的时间就越多，所以对记录的移动次数较多的算法不利。

排序方法	最好情况	最坏情况	平均情况
直接插入排序	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
冒泡排序	0	$O(n^2)$	$O(n^2)$
直接选择排序	0	$O(n)$	$O(n)$





本章小结--各种排序方法的比较(cont.)

➡ (7)关键字值的分布情况比较:

当待排序记录按关键字的值有序时,

- 插入排序和冒泡排序能达到 $O(n)$ 的时间复杂度;
- 对于快速排序而言, 这是最坏的情况, 此时的时间性能蜕化为 $O(n^2)$;
- 选择排序、堆排序和归并排序的时间性能不随记录序列中关键字的分布而改变。

