

# 高温作业专用服装设计

## 摘要

高温作业专用服装主要是为长期在高温条件下工作的人群所设计的，以保护人体不受损伤。本文中针对这个专用服装设计问题，根据热传导定律，建立偏微分方程模型、目标规划模型，再用数值计算法和二分法分别求解，得到温度分布图和满足不同环境条件下各层厚度的最优解。

针对问题一，根据热传导定律，我们可以理解为非稳态导热模型，由已知的外界环境温度和服装材料比热容等参数，建立关于热传导的偏微分方程模型，进行数值计算，得到每一层材料的左右边界温度，从而得到温度分布图形（见图 1），再将温度随时间和厚度变化的数据制作成一个 Excel 表格（见支撑材料）。经检验，实验所得到的结果与实际测量结果相符。

对于问题二，首先我们依旧对每一层建立偏微分方程，并以第 II 层的最优厚度为目标，以题中所给条件为约束条件，建立单目标规划模型，再用二分法进行计算，求得满足条件的最优厚度，将未知量第 II 层的厚度任意取值，用二分法求得最符合要求的厚度。求得第二层的最优厚度为 5.5mm。

问题三在问题二的基础上改变了约束条件和未知量，让我们求第 II、IV 层厚度的最优解。基于这种情况，我们在列出偏微分方程的同时，需要以这两层的最优厚度为目标，题中所给条件为约束条件，建立双目标规划模型，再用二分法计算最优解。不过由于 II、IV 层的厚度同时为未知量，所以我们需要先确定第 IV 层厚度的最优解，在知道第 IV 层厚度最优解的情况下，再次利用二分法求得满足约束条件的第 II 层厚度的最优解。解得第 II 层的厚度为 10.5mm，第 IV 层厚度为 6.4mm。

**关键词：**热传导方程 偏微分方程的数值求解 单目标规划 二分法

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

由于工作性质的不同，人们所处的工作环境也有所不同，在一些特定环境下工作时需要一些特殊服装来保护人体不受损害。如在高温环境中，工作人员需要穿专用服装以避免灼伤，专用服装大致用三层织物材料组成，其中最外层与外界环境所接触，最内层与人体皮肤表面存在一些空隙，将三层织物和内层与人体之间的空隙由外而内分别记成 I、II、III、IV 层。

为了设计在高温条件下所需的专用服装，将一假人放在处于高温环境下的实验室中，并将假人体内温度控制在  $37^{\circ}\text{C}$ ，然后测量假人皮肤外侧的温度。

### 1.2 问题一

在外界环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度为 6mm、IV 层厚度为 5mm 的条件下开展实验，其中假人所穿服装材料的一些特定参数值见附件一，测量 90 分钟内假人皮肤外侧的温度，详细测量数值见附件二。建立一个数学模型，计算温度分布，并用表格的形式将结果呈现出来。

### 1.3 问题二

将实验室中温度调整到  $65^{\circ}\text{C}$ ，IV 层厚度调至 5.5mm，确定 II 层厚度的最优解，使得在工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，并使皮肤外侧温度超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

### 1.4 问题三

将实验环境调至  $80^{\circ}\text{C}$ ，确定专用服装 II 层和 IV 层厚度的最优解，使得在工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，并且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一分析

问题一给出了服装材料参数值、实验环境温度、II 层厚度、IV 层厚度和工作时间，并且还得出实验体皮肤外侧温度随时间变化的表格。要求我们给出温度分布，并生成表格上数据。首先我们对附件中的表格数据进行拟合，得到皮肤外侧温度随时间变化的曲线，再由外而内利用所给的参数给出偏微分方程，不过由于每一层的介质不同，所以我们需要对每一层都给出对应的偏微分方程，然后建立模型，计算出每一层的边界温度变化，从而得到温度分布，由温度随时间和厚度的变化而变化的数据可以得到温度分布的表格。

### 2.2 问题二分析

问题二不同于问题一给出已知条件求温度分布，而是改变了环境温度和 IV 层厚度，并在给出约束条件的情况下，求得 II 层厚度的最优解。其中约束条件为当工作时间为 60 分钟时，假人皮肤外表温度不大于  $47^{\circ}\text{C}$ ，并且体表温度超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不大于 5 分钟。我们依然可利用问题一中的偏微分方程，只是将已知量转变为未知量，再进行单目标规划，利用二分法求解，即在 II 层厚度的范围值内取两个边界值，直到取值全满足约束条件，最终得到最接近的且都满足约束条件的值，这个值就是我们所要求的最优结果。

### 2.3 问题三分析

问题三相对于问题二类型相同，但难度有所增大，未知量由一个变成两个，已知量

减少，即求 II、IV 层厚度的最优解，约束条件也改变为在环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$ ，工作时间为 30 分钟时，皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且皮肤外侧温度不小于  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不大于 5 分钟。同样我们需要对每层建立偏微分方程，建立双目标规划模型。不过由于 II、IV 层同时不确定，所以我们要确定 IV 层的最优解，在知道 IV 层最优解的情况下，再次利用二分法求得满足约束条件的 II 层最优解。

### 三、模型的假设与符号说明

#### 3.1 模型的假设

- 1.假设热传导在织物材料上的传播是均匀的
- 2.假设热传导方向是垂直于皮肤的
- 3.假设服装材料的质地均匀
- 4.假设不考虑热辐射和对流情况
- 5.假设材料是同性的
- 6.假设织物每层的初始温度为  $37^{\circ}\text{C}$

#### 3.2 符号说明

- $a$ :第I层高温材料的厚度  
 $b$ :第II层高温材料的厚度  
 $c$ :第III层高温材料的厚度  
 $d$ :第IV层高温材料的厚度  
 $C_I^A$ :第I层高温材料的显热容  
 $C_{II}^A$ :第II层高温材料的显热容  
 $C_{III}^A$ :第III层高温材料的显热容  
 $C_{IV}^A$ :第IV层高温材料的显热容  
 $k_I$ :第I层高温材料的热传导率  
 $k_{II}$ :第II层高温材料的热传导率  
 $k_{III}$ :第III层高温材料的热传导率  
 $k_{IV}$ :第IV层高温材料的热传导率  
 $t_{work}$ :高温环境中工作的时间  
 $T_I$ :热传导过程中第I层的温度  
 $T_{II}$ :热传导过程中第II层的温度  
 $T_{III}$ :热传导过程中第III层的温度  
 $T_{IV}$ :热传导过程中第IV层的温度  
 $\Omega_1$ :第I层高温材料的厚度区间  
 $\Omega_2$ :第II层高温材料的厚度区间  
 $\Omega_3$ :第III层高温材料的厚度区间  
 $\Omega_4$ :第IV层高温材料的厚度区间

$\rho$ : 高温材料的密度  
 $c_p$ : 高温材料的比热容  
 $q_{air}$ : 空气的热辐射热流密度  
 $h_{c,air}$ : 空气中热传导和热对流的对流系数  
 $\Delta t$ : 时间的变化率  
 $T_{start}$ : 高温环境的初始值  
 $T_{skin}$ : 皮肤温度的临界值  
 $t_{over}$ : 超过44°C的时间

## 四、模型的建立与求解

### 4.1 问题一

#### 4.1.1 模型的建立:

高温作业专用服装是由三层织物材料构成，对于三层材料的密度，比热容，热传导率和厚度这些参数值在附件 1 中已经给出范围，问题一中让我们建立数学模型，计算温度的分布，所谓的温度分布，就是第 I 层内测和第 II 层外侧之间，第 II 层内测和第 III 层外侧之间，以及第 III 层与皮肤之间的空隙，他们三者的温度随着高温工作时间的变化而变化的规律。工作服和假人的结构图形如下：

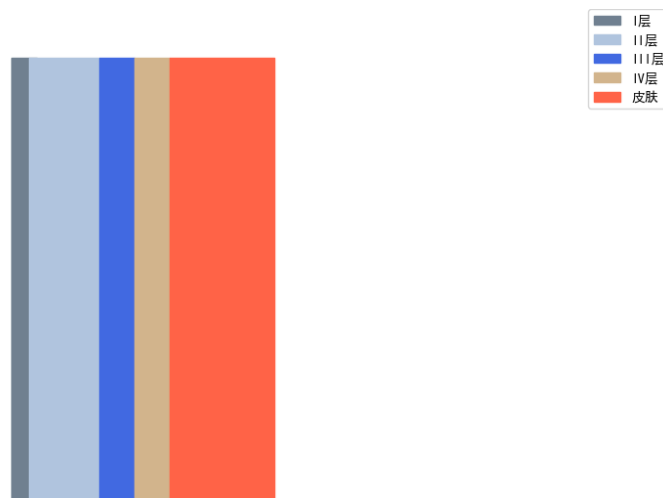


图 1 工作服——空气——皮肤

假设高温作业专用服装的三层的厚度分别是  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ，第 III 层与皮肤外表皮的距离假设为  $d$ ，由附件中我们可以得知，第 I 层和第 III 层的厚度是定值。

高温作业中，根据热传导定律，建立热传递数学模型如下：

$$\begin{cases} C_I^A \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_I \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, t_{work}) \\ C_{II}^A \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, t_{work}) \\ C_{III}^A \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{III} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_3 \times (0, t_{work}) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中,  $C_I^A, C_{II}^A, C_{III}^A$  分别是第 I 层, 第 II 层, 第 III 层材料的显热容,  $kJ/(m^3 \cdot K)$ ;

$k_I, k_{II}, k_{III}$  分别是第 I 层, 第 II 层, 第 III 层材料的热传导率,  $t_{work}$  是高温工作服在高温环境中工作的时间, 单位 s。

将三层的高温材料的热传递数学模型用通式表示为:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k_i}{C_i^A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

其中,  $k_i$  是指高温材料的热传导率,  $C_i^A$  是指高温材料的显热容。

对于第 I 层和第 II 层之间的接触面满足:

$$\begin{cases} T_{II}|_{x=a} = T_I|_{x=a} \\ k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = k_I \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} \end{cases} \quad (1.3)$$

其中,  $T_I, T_{II}$  分别是第 I 层材料内测和第二层材料内测的温度, 单位 $^{\circ}C$ 。 $k_I, k_{II}$  分别是第 I 层材料和第 II 层材料的传导率。

我们可以求出第 I 层第 II 层热传递的偏微分方程如下:

第 I 层材料:

$$\begin{cases} C_I^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_I \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (1.4)$$

其中,  $\Omega_1 = (0, a)$ ,  $C_I^A$  表示第 I 层材料的显热容,  $kJ/(m^3 \cdot K)$ ;  $k_I$  是第 I 层材料的热传导率。

对于第 II 层和第 III 层之间的接触面满足:

$$\begin{cases} T_{III}|_{x=a+b} = T_{II}|_{x=a+b} \\ k_{III} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a+b} = k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a+b} \end{cases} \quad (1.5)$$

其中,  $T_{III}, T_{II}$  分别是第 III 层材料内测和第 II 层材料内测的温度, 单位 $^{\circ}C$ 。 $k_{III}, k_{II}$  分

别是第 III 层材料和第 II 层材料的传导率。

根据热传导定律，我们可以求出第 II 层第 III 层热传递的偏微分方程如下：  
第 II 层材料：

$$\begin{cases} C_{II}^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

其中， $\Omega_2 = (a, a+b)$ ， $C_{II}^A$  表示第 II 层材料的显热容， $kJ/(m^3 \cdot K)$ ； $k_{II}$  是第 II 层材料的传导率。

其中： $\Omega_3 = (a+b, a+b+c)$ ， $C_{III}^A$  表示第 III 层材料的显热容， $kJ/(m^3 \cdot K)$ ； $k_{III}$  表示第 III 层材料的传导率。

问题一中，材料的厚度是已知的，分别是 0.6mm，6mm，3.6mm，5mm，所以对于以上的公式，我们有约束条件：

$$\begin{cases} \Omega_1 = (0, 0.6) \\ \Omega_2 = (0.6, 6.6) \\ \Omega_3 = (6.6, 10.2) \\ \Omega_4 = (10.2, 15.2) \end{cases} \quad (1.7)$$

在计算上述三层的高温工作专用服装的热传递的过程中，采用了显热容来描述温度得到变化，其中，显热容的计算公式是：

$$C^A = \rho c_p \quad (1.8)$$

其中， $\rho$  是高温服装材料的密度， $c_p$  是相应高温服装材料的比热容。

上述是三层材料中的热传递模型，根据材料中的热传递模型，我们可以得到空气中的热传递模型如下：

$$(\rho c_p)_{air} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial q_{air}}{\partial x}, (x, t) \in \Omega_4 \times (0, t_{work}) \quad (1.9)$$

其中， $\Omega_4 = (10.2, 15.2)$

由于第 IV 层厚度狭小，可将其看作一个巨型的封闭腔，利用空气的热传导和热对流辐射的作用，因此假设空气层的传导是稳态，辐射可以看作是一种表面现象。因此，空气层的模型如下：

$$(\rho c_p)_{air} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_4 \times (0, t_{work}) \quad (1.10)$$

可近似为第 IV 层介质的热传导过程。

#### 4.1.2 模型的求解:

首先, 把模型的第一层材料的左边界的温度考虑为与环境温度相同, 即为  $75^{\circ}\text{C}$ , 然后采用离散化处理, 将  $x$  (空间) 轴离散为  $j+1$  个点, 记这些点为  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ , 假设

$$x_i = ih_1, (i = 0, 1, 2 \dots j), h_1 = \frac{a}{j} \quad (1.11)$$

同时将  $t$  (时间) 也进行离散化处理, 将时间离散成  $n+1$  个点, 记这些点为  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , 假设

$$t_j = j\tau, (j = 0, 1, 2 \dots n), \Delta t = \frac{t_{work}}{n} \quad (1.12)$$

根据上述的离散方法, 我们以空间作为横轴, 时间作为纵轴可以得到下面的网格图:

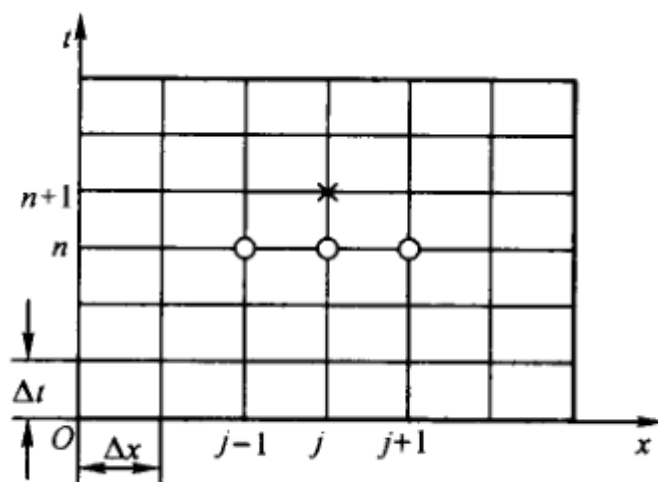


图 2 网格图

对于网格区域内部的任一节点  $(x_j, t_n)$ , 我们利用泰勒展开公式可以得到:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T(x_j, t)}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

$$\frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n = \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 T(x, t_n)}{\partial x^4} \quad (1.14)$$

由上述两个式子我们可以求出:  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_j^n$  和  $\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_j^n$ , 然后代入热传导过程的方程, 得

到

$$\begin{aligned} & \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} - a^2 \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T(x_j, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 T(x, t_n)}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (1.15)$$

由泰勒公式，时间采用向前差分：

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} = \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} \quad (1.16)$$

空间采用中心差分：

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} = \frac{T_j^{n+1} - T_j^{n-1}}{2\Delta x} \quad (1.17)$$

将我们所建立的模型用计算机语言进行 MATLAB 编程，然后用程序仿真出来温度的分布图，温度的分布图如下：

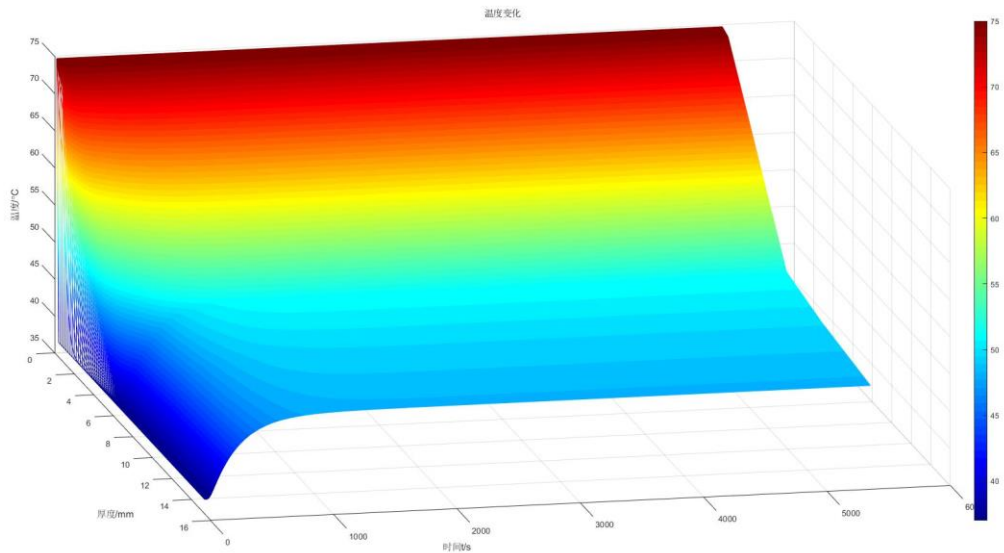


图 3 3 维温度分布图

把图形二维量化分析，可得出二维的温度分布为。



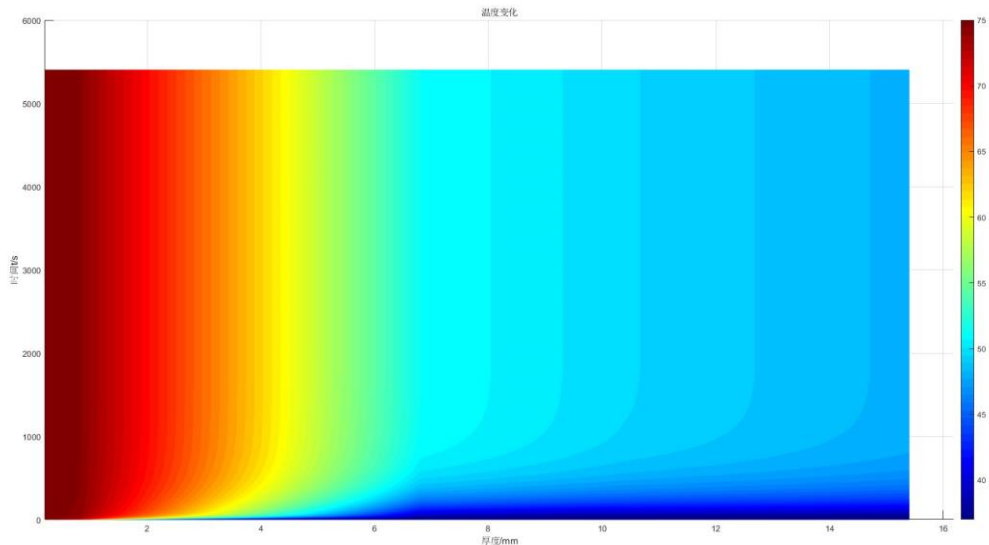


图 4 2 维温度分布图

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	75	69.36658	65.09015	63.02918	53.7297	46.97188	42.51713	39.8374	38.35894	37.60739	37.25393	37.09953	37.03666	37.01272	37.00417	37.00129	37.00038	37.00011	37.00003	37.00001	37	37	
2	75	72.62656	70.53339	68.92567	61.6713	55.31972	50.06506	45.94692	42.883	40.71492	39.25343	38.31356	37.73614	37.39684	37.2059	37.10288	37.04954	37.02301	37.01031	37.00446	37.00187	37.00075	37.0
3	75	73.44067	71.97483	70.67932	64.83375	59.41083	54.56893	50.40387	46.94876	44.18238	42.04288	40.44335	39.2866	38.47686	37.92787	37.56716	37.33735	37.1953	37.11008	37.06042	37.0323	37.01683	37.00
4	75	73.7639	72.57281	71.46789	66.48228	61.74416	57.3659	53.43054	49.98839	47.05742	44.6269	42.66328	41.11717	39.93028	38.904168	38.39263	37.92996	37.608	37.3892	37.24397	37.14977	37.09005	37.05
5	75	73.94028	72.90857	71.93054	67.51752	63.27103	59.27342	55.59105	52.27143	49.34211	46.81135	44.67031	42.99623	41.45614	40.31076	39.41798	38.73586	38.22491	37.84962	37.57927	37.38822	37.25577	37.16
6	75	74.05609	73.13171	72.24516	68.24484	64.3665	60.67323	57.21842	54.04352	51.1769	48.63365	46.4163	44.51627	42.91594	41.59087	40.51217	39.64871	38.96901	38.44277	38.04201	37.74177	37.52046	37.35
7	75	74.14	73.29468	72.47794	68.79267	65.20179	61.75551	58.49759	55.46376	52.68067	50.16545	47.92588	45.96104	44.26246	42.81542	41.60052	40.59522	39.77527	39.11603	38.59352	38.1852	37.87059	37.63
8	75	74.20461	73.42079	72.65959	69.22492	65.86615	62.6244	59.53629	56.63272	53.93798	51.46933	49.23689	47.24394	45.48753	43.95928	42.64642	41.53283	40.60016	39.82879	39.19878	38.69062	38.2858	37.96
9	75	74.25642	73.52226	72.80661	69.57745	66.41105	63.34191	60.40118	57.61579	55.00771	52.59354	50.3843	48.38558	46.59779	45.01674	43.63428	42.43903	41.41722	40.55342	39.83131	39.23432	38.74622	38.3
10	75	74.29919	73.60627	72.92885	69.87219	66.86858	63.94745	61.13573	58.4571	55.93142	53.57431	51.39698	49.40623	47.60457	46.0906	44.5594	43.3031	42.21141	41.27231	40.47253	39.7982	39.23527	38.76
11	75	74.33531	73.67734	73.0326	70.12343	67.25966	64.46742	61.76964	59.18755	56.73911	54.43892	52.29799	50.32372	48.51991	46.88703	45.42246	44.12089	42.97476	41.9747	41.11001	40.36913	39.74001	39.21
12	75	74.36633	73.73849	73.12212	70.34095	67.59952	64.92025	62.32395	59.8294	57.45294	55.20814	53.10564	51.15306	49.355	47.71317	46.2265	44.99199	43.70365	42.6425	41.72666	40.93788	40.25074	39.66
13	75	74.39337	73.79185	73.2004	70.53167	67.898	65.31925	62.814	60.39915	58.0962	55.89001	53.83451	51.90673	50.11974	48.47609	46.97599	45.61745	44.3966	43.30788	42.34337	41.4981	40.76031	40.12
14	75	74.41721	73.83894	73.26962	70.7007	68.16301	65.6743	63.2513	60.90931	58.662	56.5211	54.49627	52.59503	50.82267	49.18231	47.675	46.29984	45.05416	43.93375	42.93306	42.04549	41.26359	40.57
15	75	74.43843	73.88091	73.33139	70.85186	68.40036	65.92992	63.64466	61.36955	59.18013	57.08736	55.10038	53.2265	51.47111	49.83771	48.32794	46.9417	45.67728	44.53152	43.50001	42.57725	41.7569	41.03
16	75	74.45749	73.91863	73.38698	70.98809	68.61455	66.28091	64.00094	61.78744	59.65199	57.60479	55.65451	53.80822	52.07129	50.44746	48.93878	47.54577	46.26744	45.10149	44.0444	43.09161	42.23769	41.47
17	75	74.47472	73.95275	73.43734	71.11168	68.8091	66.54286	64.32559	62.16905	60.08398	58.0799	56.16501	54.34611	52.62852	51.01609	49.51116	48.11471	46.82632	45.64434	44.56601	43.58753	42.70425	41.9
18	75	74.4904	73.98383	73.48324	71.22447	68.96662	66.78245	64.62296	62.51928	60.48132	58.51801	56.63712	54.84516	53.14733	51.54754	50.04635	48.65103	47.35562	46.16102	45.06503	44.06451	43.15546	42.33
19	75	74.50475	74.01228	73.52539	71.32792	69.14996	67.02063	64.89665	62.84211	60.84828	58.92354	57.07522	55.30955	53.63161	52.04528	50.55325	49.15706	47.85706	46.65258	45.5419	44.52242	43.59069	42.74
20	75	74.51795	74.03844	73.564	71.42323	69.30039	67.20584	65.14953	63.14084	61.18943	59.30017	57.48299	55.74285	54.08468	52.5123	51.02849	49.63494	48.33228	47.12015	45.99725	44.9614	44.00962	43.13
21	75	74.53012	74.06261	73.59978	71.51139	69.43962	67.39408	65.38403	63.41821	61.50473	59.65099	57.86356	56.14813	54.50943	52.95125	51.47639	50.08663	48.78283	47.56488	46.4318	45.38177	44.41221	43.51
22	75	74.54141	74.08501	73.63296	71.59322	69.56893	67.56904	65.60218	63.67653	61.7997	59.97865	58.21961	56.52799	54.90838	53.36446	51.89902	50.51393	49.21019	47.98789	46.84633	45.78398	44.7986	43.88
23	75	74.5519	74.10584	73.66383	71.66941	69.68938	67.73212	65.80569	63.91776	62.07547	60.28539	58.55341	56.88472	55.28371	53.75396	52.29824	50.91846	49.61572	48.39029	47.24166	46.16857	45.16906	44.24
24	75	74.56168	74.12527	73.69264	71.74054	69.80189	67.88453	65.99602	64.14355	62.33885	60.57313	58.86696	57.22029	55.63734	54.12158	52.67573	51.30172	50.00072	48.77314	47.61863	46.53615	45.52398	44.57
25	75	74.57083	74.14344	73.71959	71.8071	69.90721	68.02729	66.17441	64.35534	62.57644	60.84355	59.16199	57.53645	55.97097	54.46894	53.03299	51.66507	50.36639	49.13746	47.97806	46.88735	45.86379	44.9
26	75	74.57939	74.16046	73.74485	71.86952	70.08603	68.16127	66.34193	64.55437	62.80469	61.09812	59.44	57.8347	56.28612	54.79149	53.3714	52.00977	50.71385	49.48421	48.32077	47.22281	46.18901	45.21
27	75	74.58743	74.17644	73.76857	71.92817	70.0989	68.28725	66.49952	64.74172	63.0195	61.3381	59.70233	58.11643	56.58412	55.10854	53.69219	52.33697	51.04414	49.81433	48.64755	47.54321	46.50014	45.51
28	75	74.595	74.19147	73.79087	71.98337	70.18633	68.4059	66.64801	64.91833	63.2222	61.56464	59.95016	58.38282	56.86619	55.40327	53.9965	52.64773	51.35824	50.12869	48.95917	47.8492	46.79774	45.80
29	75	74.60212	74.20563	73.81192	72.03539	70.26876	68.51779	66.7881	65.08503	63.41368	61.77874	60.18455	58.63497	57.13341	55.68275	54.28535	52.94304	51.65706	50.42813	49.25638	48.14143	47.08236	46.07
30	75	74.60884	74.21899	73.83176	72.0845	70.34658	68.62345	66.92043	65.24258	63.59471	61.9813	60.40664	58.87385	57.38676	55.94796	54.55971	53.2238	51.94147	50.71343	49.53989	48.42053	47.35455	46.34
31	75	74.61518	74.23161	73.85051	72.1309	70.42013	68.72335	67.04558	65.39163	63.76605	62.17311	60.6167	59.10034	57.62715	56.19979	54.82045	53.49086	52.21225	50.98534	49.81038	48.68712	47.61485	46.5
32	75	74.62118	74.24354	73.88524	72.1748	70.48971	68.81788	67.16404	65.53277	63.93838	62.35491	60.81038	59.31555	57.85539	56.43906	55.06838	53.74501	52.47016	51.24457	50.06852	48.94181	47.86381	46.83
33	75	74.62686	74.25483	73.89502	72.21636	70.55562	68.90742	67.27629	65.66654	64.08228	62.52735	61.00529	59.51931	58.07224	56.66654	55.30425	53.98898	52.71591	51.49179	50.31492	49.18515	48.10194	47.0
34	75	74.63224	74.26553	73.90093	72.25575	70.61808	68.99232	67.38273	65.79343	64.22831	62.69104	61.18498	59.71319	58.27839	56.88292	55.52875	54.21745	52.95016	51.72763	50.55018	49.41772	48.32975	47.28
35	75	74.63734	74.27568	73.91601	72.29312	70.67734	69.07286	67.48374	65.91388	64.36698	62.84653	61.35573	59.89751	58.47446	57.08884	55.74254	54.43706	53.17353	51.95269	50.77488	49.64004	48.54773	47.49
36	75	74.64218	74.28531	73.93033	72.32858	70.73359	69.14934	67.57966	66.02828	64.49873	62.99431	61.51808	60.07284	58.66107	57.28492	55.94621	54.64641	53.38661	52.16754	50.98954	49.85604	48.75636	47.69
37	75	74.64677	74.29445	73.94392	72.36226	70.78703	69.22199	67.67082	66.13703	64.62399	63.13485	61.67254	60.23971	58.83874	57.4717	56.14033	54.84606	53.58994	52.3727	51.19469	50.05593	48.95608	47.89
38	75	74.65114	74.30314	73.95684	72.39428	70.83783	69.29106	67.75748	66.24044	64.74314	63.26858	61.81956	60.3986	59.00799	57.64971	56.32544	55.03654	53.78406	52.56869	51.39081	50.25045	49.14733	48.08
39	75	74.65529	74.31139	73.96912	72.42472	70.88613	69.35677	67.83994	66.33885	64.85655	63.39591	61.95957	60.54998	59.1693	57.81944	56.50202	55.21835	53.96944	52.75598	51.57835	50.43662	49.33553	48.25
40	75	74.65944	74.31606	73.98031	72.45283	70.90211	69.37327	67.85812	66.35745	64.87655	63.41518	61.97306	60.56125	59.17911	57.82125	56.50261	55.22111	53.97455	52.76209	51.57377	50.43607	49.30007	48.21

图 5 Excel

表 1 实验部分数据

37	37	37	37	37
37	37	37	37	37
37	37	37	37	37
37	37.01	37.01	37.01	37.01
37.02	37.02	37.03	37.03	37.04

表 2 理论部分数据

37	37	37	37	37
37	37	37	37	37
37.00001	37.00002	37.00004	37.00008	37.00013
37.00022	37.00986	37.01017	37.01038	37.01064
37.02046	37.02096	37.03089	37.03149	37.04153

由于这两组数据在空间上具有连续性，可近似为边界条件，所以应该在时间上的分布非常相似。

使用 MATLAB 曲线拟合工具箱，可得到实验图像为

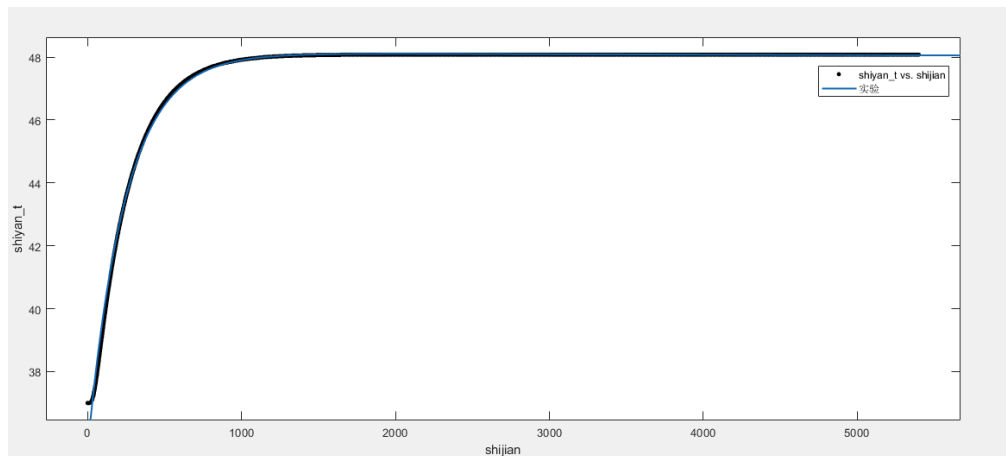


图 6 实验拟合曲线

拟合的方程为:

$$f(x) = 48.14e^{-0.0002975x} - 12.62e^{-0.00406x} \quad (1.18)$$

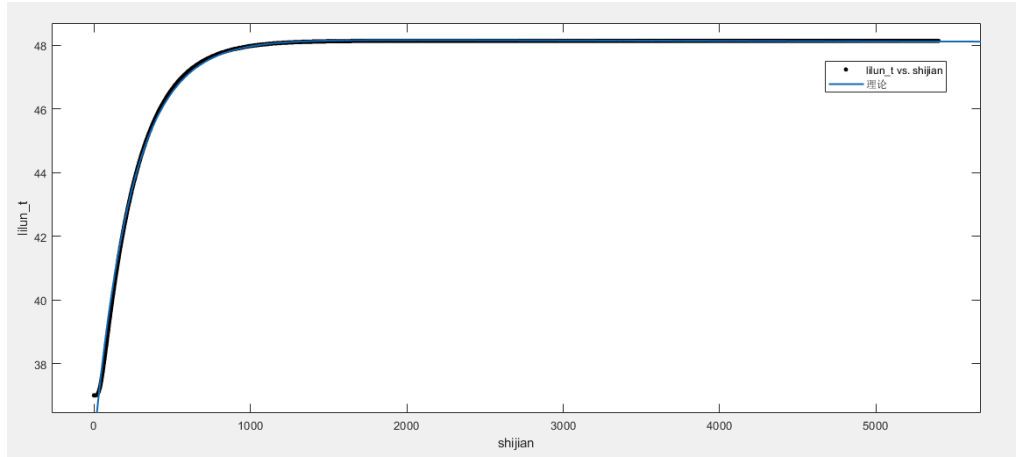


图 7 理论拟合曲线

拟合的方程为:

$$g(x) = 48.16e^{-0.0004617x} - 0.0002186e^{-6.334x} \quad (1.19)$$

有图像可知两者，非常接近，初步说明建立的模型可以获得一个优质解。

Fit name ▲	Data	Fit type	SSE
实验	shiyen_t vs. shijian	exp2	40.8203
理论	lilun_t vs. shijian	exp2	40.5871

图 8 拟合误差参数

由两个 SSE(和方差)的差非常接近 0，使得实验和理论数据比较准确。

## 4.2 问题二

### 4.2.1 模型的建立

与问题一不同，问题一中每层的厚度都是固定的值，而问题二中已知工作的环境温度，而且空气层的厚度假设为 5.5mm，让我们确定第二层的厚度的最优值，以确保高温作业专用服装在进行高温工作 60 分钟的时候，假人的皮肤外侧温度不超过 47°C，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟，解决这个问题需要用到优化的方法，因为只有第 II 层的厚度不确定，所以此优化属于单目标优化，具体方法如下：

第 I 层材料热传递的偏微分方程：

$$\begin{cases} C_I^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_I \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中， $\Omega_0 = (0, a)$ ， $C_I^A$  表示第 I 层材料的显热容，

第 II 层材料热传递的偏微分方程：

$$\begin{cases} C_{II}^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

其中， $\Omega_2 = (a, a+b)$ ， $C_{II}^A$  表示第 II 层材料的显热容，

第 III 层新材料热传递的偏微分方程：

$$\begin{cases} C_{III}^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{III} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_3 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

其中：  $\Omega_3 = (a+b, a+b+c)$ ， $C_{III}^A$  表示第 III 层材料的显热容，  
空气层中的热传递的偏微分方程：

$$\begin{cases} (\rho c_p)_{air} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_4 \times (0, t_{work}) \\ k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a+b+c} = k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a+b+c+d} \end{cases} \quad (2.4)$$

其中， $(\rho c_p)_{air}$  是空气的显热容， $\Omega_4 = (a+b+c, a+b+c+d)$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} b \in (0.6, 25) \\ a = 0.6, c = 3.6, d = 5.5 \\ T_{start} = 65^\circ C \\ T_{skin} \leq 47^\circ C \\ t_{over} \leq 300s \end{cases} \quad (2.5)$$

约束条件中， $b$  是指第 II 层材料的厚度，在这个问题中主要是确定材料而得厚度， $T_{start}$  是指高温环境的初始温度， $T_{skin}$  是指随着工作时间得推移，假人皮肤的温度变化的临界值， $t_{over}$  是指超过  $44^\circ C$  的时间。

#### 4.2.2 模型求解

模型建立完成之后，对模型进行求解，此问题是求高温材料第二层的最优厚度，我们采用单目标优化的二分法进行求解，具体的方法如下：

第一步，确定第二层厚度的取值范围，即  $b \in (0.6, 25)$ ，将边界条件代入模型，可以判断是否满足在高温作业专用服装在进行高温工作 60 分钟的时候，假人的皮肤外侧温度不超过  $47^\circ C$ ，且超过  $44^\circ C$  的时间不超过 5 分钟。

第二步，取厚度的中间值，判断中间值是否值最优解，如果不符合，将区间再次进行取中间值。

第三步，逐渐地缩小范围，求出厚度最优解

根据其中的，三层边界条件，既空间的变化，在我们使用有限差分法计算的时候，结果当第 IV 层的值接近 5.5mm 时，取得最优解。

### 4.3 问题三

#### 4.3.1 模型的建立

与前两问不同，问题三中已知工作的环境温度，让我们确定第 II 层和第 IV 层的最优值，以确保高温作业专用服装在进行高温工作的时候，工作的环境温度是  $80^\circ$

C, 工作 30 分钟, 假人的皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ , 且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟, 解决这个问题需要用到优化的问题, 因为只有第 II 层和第 IV 层的厚度不确定, 所以此优化属于双目标优化, 具体方法如下:

第 I 层材料料热传递的偏微分方程:

$$\begin{cases} C_I^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_I \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_1 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中,  $\Omega_0 = (0, a)$ ,  $C_I^A$  表示第 I 层材料的显热容,

第 II 层材料料热传递的偏微分方程:

$$\begin{cases} C_{II}^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{II} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_2 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

其中,  $\Omega_2 = (a, a+b)$ ,  $C_{II}^A$  表示第 II 层材料的显热容, 第 III 层新材料料热传递的偏微分方程:

$$\begin{cases} C_{III}^A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{III} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_3 \times (0, T) \\ T(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

其中:  $\Omega_3 = (a+b, a+b+c)$ ,  $C_{III}^A$  表示第 III 层材料的显热容,

空气层中料热传递的偏微分方程:

$$\begin{cases} \left( \rho c_p \right)_{air} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right), (x, t) \in \Omega_4 \times (0, t_{work}) \\ \left. k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a+b+c} = \left. k_{air} \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a+b+c+d} \end{cases} \quad (3.4)$$

其中,  $(\rho c_p)_{air}$  是空气的显热容,  $\Omega_4 = (a+b+c, a+b+c+d)$ ,  $h_{c,air}$  分别是外部环境中的空气传导和自然对流的对流换热系数。

$$\text{约束条件: } \begin{cases} b \in (0.6, 25) \\ d \in (0.6, 6.4) \\ a = 0.6, c = 3.6 \\ T_{\text{start}} = 80^{\circ}\text{C} \\ T_{\text{skin}} \leq 47^{\circ}\text{C} \\ t_{\text{over}} \leq 300\text{s} \end{cases} \quad (3.5)$$

约束条件中,  $b$  是指第 II 层材料的厚度,  $d$  是指第 IV 层材料的厚度, 在这个问题中  $b$  和  $d$  都是变量,  $T_{start}$  是指高温环境的温度,  $T_{skin}$  是指随着工作时间得推移, 假人皮肤的温度变化的临界值,  $t_{over}$  是指超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间。

#### 4.3.2 模型的求解

由于此问题的过程条件, 空气层并不是一个定值, 所以我们应该考虑模型时候空气发生的热量交换, 热辐射和对流, 但经查证资料可得在环境温度  $80^{\circ}\text{C}$  的情况下, 空气层取  $6.4\text{mm}$ , 对流导热对空气层的热量并不起到太大的作用, 可以忽略对流的影响。并且空气层取  $6.4\text{mm}$  满足防护服的经济型, 此时问题便有双目标优化, 转为单目标优化, 并且根据多次迭代求解, 发现当第 II 层接近 10.5 时, 满足这个模型。

### 五、模型的评价与推广

#### 5.1 模型的评价

模型优点:

1. 问题一根据所给数据, 利用热传导的偏微分方程建立数学模型, 利用差分方程进行求解, 最后进行检验, 证明了模型的可靠性较高。
2. 该模型可以预测某时刻的各层的温度的变化规律
3. 可以预测高温工作环境下的最长的安全工作时间。
4. 基于现实问题建立的模型, 可以适用于现实生活中

模型缺点:

1. 模型建立的过程中, 忽略了高温材料中热辐射, 对于实际的情况考虑较为片面。
2. 问题二和问题三的模型优化求解过程较为繁琐, 需要进一步的提高。
3. 模型是基于假人建立的, 没有考虑人体自身热辐射影响

#### 5.2 模型的推广

本模型是基于特殊高温环境下建立的, 可以用来运用在实际生活中, 如在锅炉房或部分太阳直射严重的高原地区工作的人员, 他们就需要这种防护服来保护自身。由于实验中使用的假人, 在考虑真人下, 人体是一个可调节的系统, 这样把模型进行重构分析, 我们可以测量一些特殊工种的工作情况, 与安全情况。

## 参考文献

- [1] 卢琳珍, 徐定华, 徐映红. 应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测[J]. 纺织学报, 2018(1):111-118.
- [2] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法-第2版[M]. 清华大学出版社, 2004.
- [3] 杨世铭, 陶文铨. 传热学 第三版[M]. 高等教育出版社, 1998
- [4] 张昭华, 王云仪, 李俊. 衣下空气层厚度对着装人体热传递的影响[J]. 纺织学报, 2010, 31(12):103-107.
- [5] 黄冬梅. 低辐射强度条件下消防战斗服内部热湿传递机理研究[D]. 中国科学技术大学, 2011.
- [6] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安交通大学出版社, 2003.

## 附录

运行环境: Windows 10 pro x64

所有 Excel 表格使用 Excel 2016 版本

所有 MATLAB 程序使用 MATLAB 2018a

所有 python 为 Anaconda 3.6.5

### 1.皮肤-空气-衣服 模型建立的 python 源程序

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
fig = plt.figure()
plt.xlim(0, 2)
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
rect = plt.Rectangle((0.1,0.1),0.07,0.8,label='I 层',color='slategrey')
rect_2 = plt.Rectangle((0.15,0.1),0.2,0.8,label='II 层',color='lightsteelblue')
rect_3 = plt.Rectangle((0.35,0.1),0.1,0.8,label='III 层',color='royalblue')
rect_4 = plt.Rectangle((0.45,0.1),0.10,0.8,label='IV 层',color='tan')
rect_5 = plt.Rectangle((0.55,0.1),0.3,0.8,label = '皮肤',color='tomato')
ax.add_patch(rect)
ax.add_patch(rect_2)
ax.add_patch(rect_3)
ax.add_patch(rect_4)
ax.add_patch(rect_5)
legend = plt.legend(handles=[rect,rect_2,rect_3,rect_4,rect_5])
plt.show()
```

### 2.三维温度分布 MATLAB 程序

```
sheet_1 = xlsread('shuju.xlsx','附件 1');%shuju.xlsx 需要和本程序放在同级目录
sheet_2 = xlsread('shuju.xlsx','附件 2');
Tem_t = sheet_2(:,2);

kappa = sheet_1(:,3);
step_t = 0.001;
step_x = 0.0002;
k = sheet_1(:,5);
c_discrete =
horzcat(ones(1,3-1)*k(1),k(1)+k(2),ones(1,30-1)*k(2),k(2)+k(3),ones(1,18-1)*k(3),k(3)+k(4),
ones(1,25-1)*k(4));
time_stop = 5400;
t_raw = 0:time_stop;
Tem_t1 = Tem_t(1:time_stop+1);
t = 0:step_t:time_stop;
```



```

Tem_t1 = interp1(t_raw,Tem_t1,t);
U = zeros(int64(time_stop/step_t)+1,77);
U(:,1) = ones(1,int64(time_stop/step_t)+1)*75;
U(1,2:76)=37;
U(:,77) = Tem_t1;
for i=1:time_stop/step_t
    temp = U(i,3:77) + U(i,1:75) - U(i,2:76)*2;%
    id_temp = find(temp<0);
    temp(id_temp) = 0;
    U(i+1,2:76) = U(i,2:76) + c_discrete.*step_t./(step_x*step_x).*temp;
    U(i+1,[4,34,52]) =
[(kappa(2)*U(i+1,3)+kappa(1)*U(i+1,5))/(kappa(2)+kappa(1)),(kappa(3)*U(i+1,33)+kappa(2)*U(i
+1,35))/(kappa(3)+kappa(2)),(kappa(4)*U(i+1,51)+kappa(3)*U(i+1,53))/(kappa(4)+kappa(3))];
end

x = (1:77)*0.2;
y = 0:time_stop;
U = U(y*1000+1,:);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
figure

mesh(X,Y,U,'EdgeColor','k')
shading interp
colorbar
xlabel('厚度/mm')
ylabel('时间 t/s')
zlabel('温度/\circ C')
title('温度变化')

```

### 3. 二维温度分布

```

mesh(X,Y,U,'EdgeColor','k')
view(2)%修改 2 程序的其中一行，以二维来看
shading interp
colorbar
xlabel('厚度/mm')
ylabel('时间 t/s')
zlabel('温度/\circ C')
title('温度变化')

```

problem1.xlsx 文件数据太多见支撑材料

#### 4. 第二问第三问

```
sheet_1 = xlsread('shuju.xlsx','附件 1'); %shuju.xlsx 需要和本程序放在同级目录
sheet_2 = xlsread('shuju.xlsx','附件 2'); %初始化数据

houdu = [0.6 6 3.6 5];
time_end = 3600;%终止时间
Tem_r = sheet_2(:,2);
kappa = sheet_1(:,3);
step_t = 0.001;
step_x = 0.0002;
step_x_10000 = step_x*10000;
max_hou = sum(houdu)
num_x = ceil(max_hou/step_x_10000)-1
xishu = [];
for i = 1:4
    xishu(i) = fix(houdu(i)/step_x_10000)-1;
end
k = sheet_1(:,5);
k_lisan = horzcat(ones(1,(xishu(1)))*k(1),k(1)+k(2),ones(1,(xishu(2)))*k(2),
k(2)+k(3),ones(1,(xishu(3)))*k(3),k(3)+k(4),ones(1,(xishu(4)))*k(4));

t_raw = 0:time_end;
U_r1 = Tem_r(1:time_end+1);
t = 0:step_t:time_end;
U_r1 = interp1(t_raw,U_r1,t);
U = zeros(int64(time_end/step_t)+1,num_x+1);
U(:,1) = ones(1,int64(time_end/step_t)+1)*(num_x-1);
U(1,2:num_x)=37;

for i=1:1:time_end/step_t
    temp = U(i,3:num_x+1) + U(i,1:num_x-1) - U(i,2:num_x)*2;%
    id_temp = find(temp<0);
    temp(id_temp) = 0;
    U(i+1,2:num_x) = U(i,2:num_x) + k_lisan.*step_t./(step_x*step_x).*temp;
    U(i+1,[4,34,52]) =
    [(kappa(2)*U(i+1,3)+kappa(1)*U(i+1,5))/(kappa(2)+kappa(1)),(kappa(3)*U(i+1,33)+kappa(2)*U(i
+1,35))/(kappa(3)+kappa(2)),(kappa(4)*U(i+1,51)+kappa(3)*U(i+1,53))/(kappa(4)+kappa(3))];
end

x = (1:num_x+1)*0.2;
y = 0:time_end;
U = U(y*1000+1,:);
```

```
[X,Y] = meshgrid(x,y);  
figure  
% xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z')  
mesh(X,Y,U)
```

```
colorbar%添加色阶
```