1. За даною вибіркою (з інд. Завдання №1-2) побудувати гістограму і графік реалізації емпіричної функції розподілу $F_n^{¿}(y)$

Завантаження необхідних бібліотек

pandas - для роботи з даними з таблиці

numpy - для математичних обчислень

seaborn - для кращого вигляду графіків

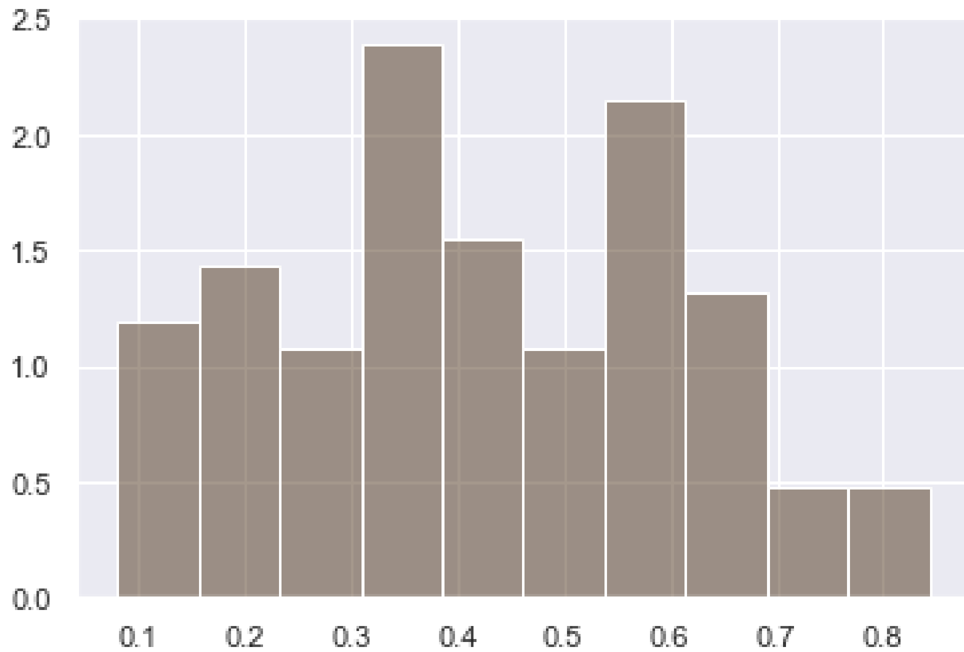
matplotlib.pyplot - для роботи з графіками

```
#Завантаження необхідних бібліотек

import pandas as pd
import numpy as np
import seaborn as sns
sns.set() # для кращого вигляду графіків

#завантажимо додаткові бібліотеки для гістограми і коробки з вусами
import matplotlib.pyplot as plt

import scipy.stats as st
```

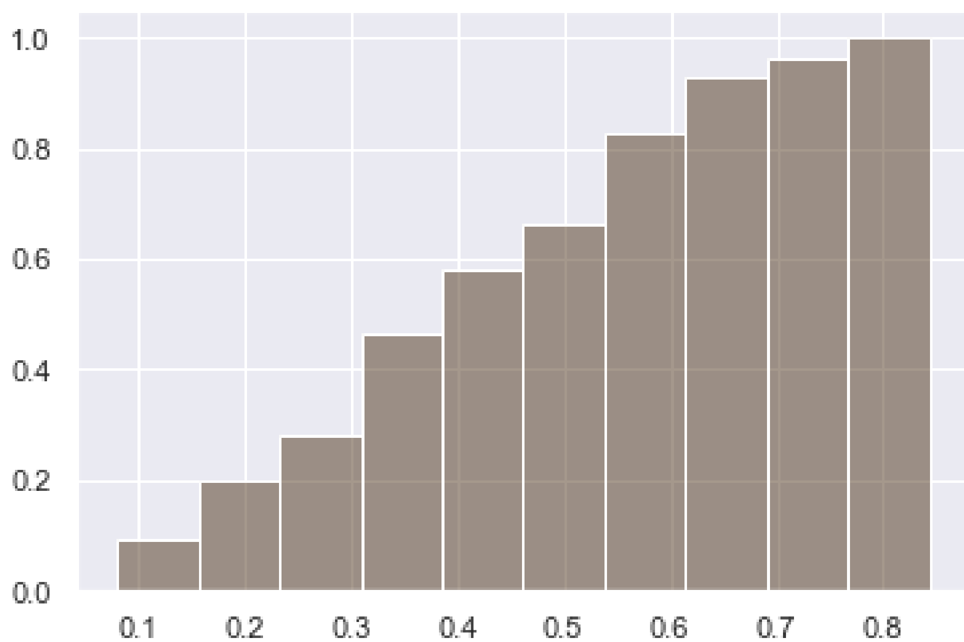
Завантаження таблиці через Pandas

Вибираємо дані варіанту №1 (usecols="A"). Оскільки файл не містив заголовків, тому було обрано *header=None* та дано назву першій колонці *Var1*

```
# Завантаження таблиці-excel через Pandas, вибираючи дані варіанту №1
df = pd.read_excel("Data1.xlsx", header=None, usecols="A",
names=["Var1"])
data = df["Var1"]

# побудова гістограми
plt.hist(data, density = True, fc=(0.3, 0.2,0.1,0.5))
plt.show()
```




```
# побудова емпіричної функції розподілу
plt.hist(data,density = True, cumulative=True, fc=(0.3, 0.2,0.1,0.5))
plt.show()
```



а) Припустити, що вибірка розподілена за нормальним законом і знайти параметри нормального розподілу методом моментів.

Шукаємо стільки моментів, скільки параметрів.

Ми знаємо, що для нормального розподілу

$E(X_i) = \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N{x_i}$

$$E\left(X_i^2\right)=\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2$$

$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N{x_i^2} - \mu^2$

$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N{x_i^2} - (\bar{x})^2$

$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N{(x_i-\bar{x})^2}$

Тож далі ми прирівнюємо обраховані значення до цих теоретичних

```
# Шукаємо стільки моментів, скільки параметрів

mu_2 = lambda values: (sum([v**2 for v in values])  / len(values))

# mu = mean
data_mu = data.mean()
data_mu_2 = mu_2(data)

print(data_mu, data_mu_2)

sigma2 = lambda values, mean: (sum([(v-mean)**2 for v in values])  / 
len(values))
sigma_sq = sigma2(data, data_mu)

print(f'mu = mean = {data_mu}')
print(f'stdMM= {np.sqrt(sigma_sq)}   std_function= {data.std()}')
```

```
0.4230181818181818196 0.21388209090909097
mu = mean = 0.4230181818181818196
stdMM= 0.1869163148586302   std_function= 0.1877717715699001
```

б) Знайти параматри нормального розподілу і побудувати криву нормального розподілу засобами Python.

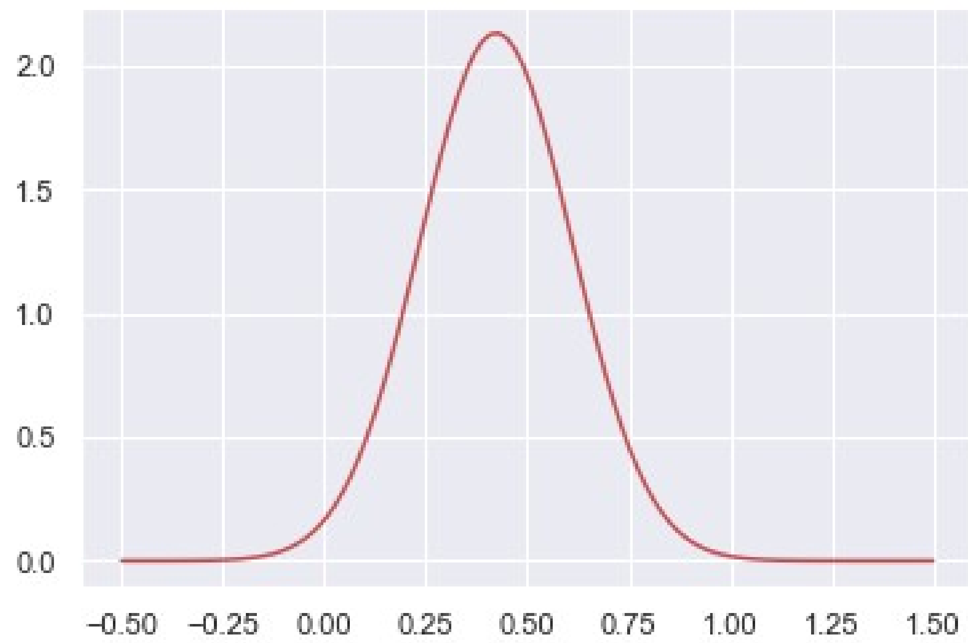
```
# обчислюємо параметри для нормального розподілу, припустивши що 
вибірка розподілена за нормальним законом
# a = mean
# sigma = standard deviation
a, sigma = st.distributions.norm.fit(data)

a, sigma
```

```
(0.4230181818181818185, 0.1869163148586302)
```

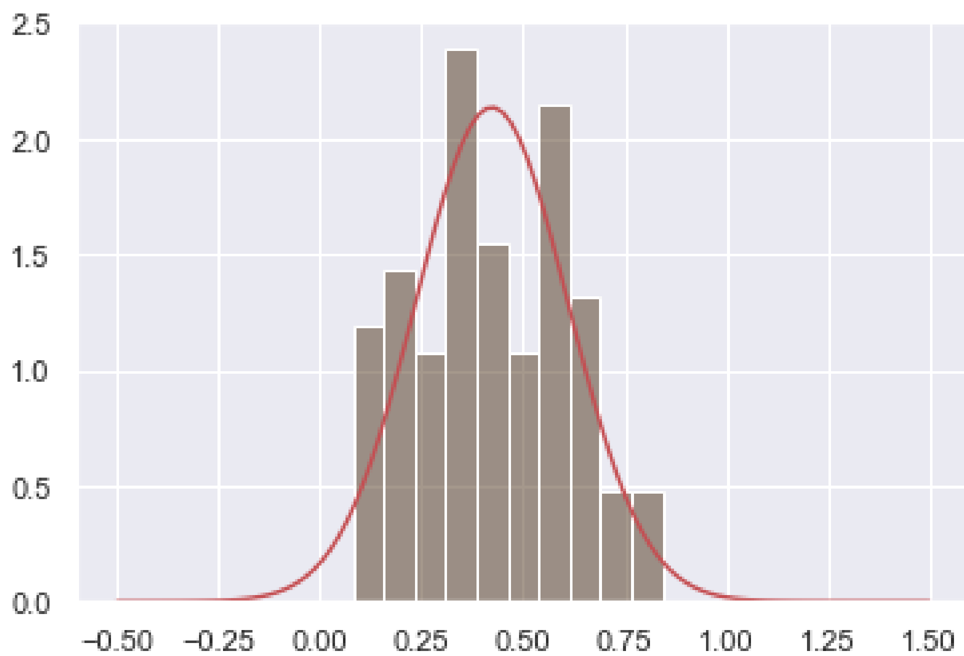
Порівнюючи знайдені параметри методом моментів та за допомогою функцій Python переконуємося в достовірності значень

```
# задаємо лінійний простір на проміжку значень вхідних даних [-
0.5,1.5]
```

```
# 150 - кількість заданих точок
ix = np.linspace(-0.5,1.5,100)

# Отримуємо функцію щільності нормального розподілу при заданих
середньому та середньоквадратичному
n_fitted_data = st.distributions.norm.pdf(ix, a, sigma)

plt.plot(ix,n_fitted_data,'r-')
plt.show()
```




```
# Малюємо два графіки разом
plt.hist(data, density = True, cumulative = False, fc=(0.3,
0.2,0.1,0.5))
plt.plot(ix,n_fitted_data,'r-')
plt.show()
```



в) Припустити, що вибірка має якийсь інший розподіл (Коші, Стьюдента, або інш). Засобами Python знайти параметри цього розподілу і побудувати криву цього розподілу.

```
# визначаємо значення на OX [-0.25,1.25].
Ox = np.linspace(-0.25,1.25,10)
ix = np.linspace(-0.25,1.25,20)

# обчислюємо параметри для Стьюдент розподілу
# loc = зсув
# scale = масштаб
# y = (x - loc) / scale
x, loc, scale = st.distributions.t.fit(data)
x, loc, scale

(10418139.123878762, 0.42302180266736555, 0.18691657724918748)

# обчислюємо значення теоеретичної функції Student та
# нормального розподілів для підібраних параметрів
# Ox для розподілу Стьюдента, оскільки на значеннях >18 він стає як
нормальний
t_fitted_data = st.distributions.t.pdf(Ox, x, loc, scale)
n_fitted_data = st.distributions.norm.pdf(ix, a, sigma)

# обчислюємо параметри для еспоненційного розподілу та
# значення теоеретичної функції розподілу для підібраних параметрів
loc_e, scale_e = st.distributions.expon.fit(data)
e_fitted_data = st.distributions.expon.pdf(ix, loc_e, scale_e)
loc_e, scale_e

(0.081, 0.3420181818181818183)
```

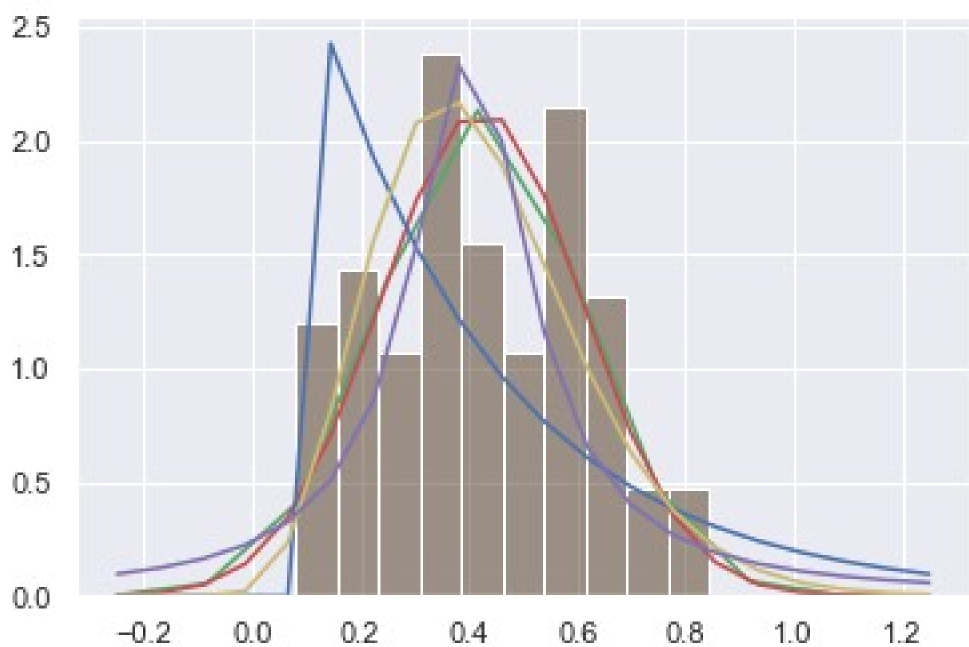
```python
# обчислюємо параметри для Гамма розподілу та
# значення теоеретичної функції розподілу для підібраних параметрів
alpha_g, loc_g, beta_g = st.distributions.gamma.fit(data)
g_fitted_data = st.distributions.gamma.pdf(ix, alpha_g, loc_g, beta_g)
alpha_g, loc_g, beta_g
```

```
(8.732580111002978, -0.1446725057532664, 0.06499034058266745)
```

```python
# обчислюємо параметри для розподілу Коші та
# значення теоеретичної функції розподілу для підібраних параметрів
loc_c, scale_c = st.distributions.cauchy.fit(data)
c_fitted_data = st.distributions.cauchy.pdf(ix, loc_c, scale_c)
loc_c, scale_c
```

```
(0.4018876802883461, 0.13346856792717432)
```

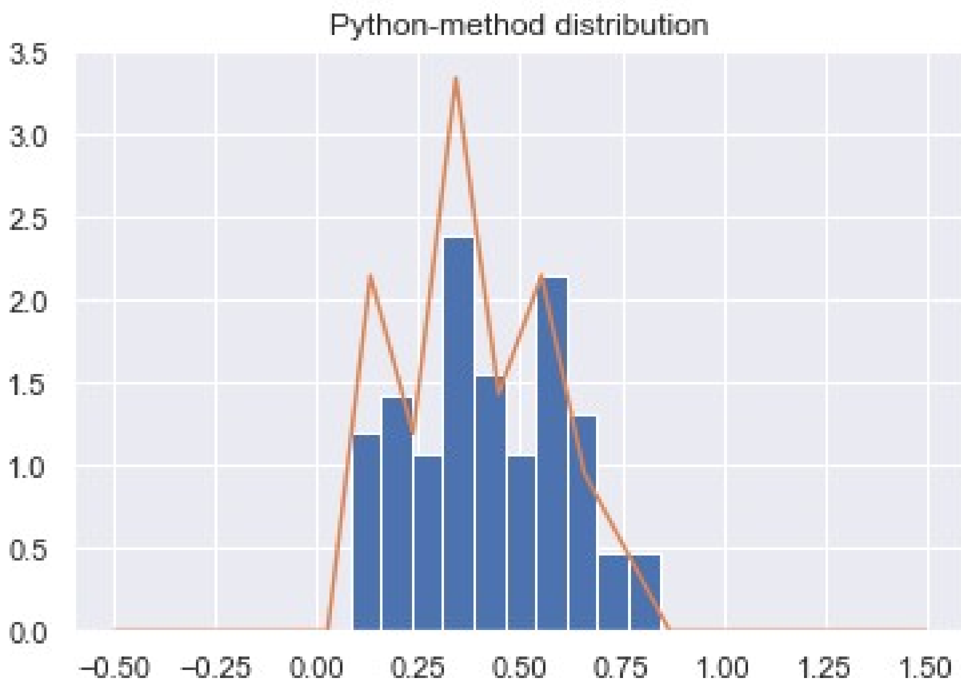
```python
# будуємо на одному графіку гістограму і щільність теоретичних
розподілів
plt.hist(data, density = True, cumulative = False, fc=(0.3,
0.2,0.1,0.5))
plt.plot(Ox,t_fitted_data,'g-')
plt.plot(ix,n_fitted_data,'r-')
plt.plot(ix,e_fitted_data,'b-')
plt.plot(ix,g_fitted_data,'y-')
plt.plot(ix,c_fitted_data,'m-')
plt.show()
```



- За візуальним спостереженням найближче відображає дані частот щільність Гамма-розподілу, що виділений жовтим кольором.

- Хоча Коші розподіл дає найближче значення до найбільшої частоти, але не більшість значень стовпчиків гістограми.
- Не дуже коректно себе поводить експоненційний розподіл

```
# Генерування розподілу за даної гістограми методами python
hist = np.histogram(data, bins=20)
hist_dist = st.rv_histogram(hist)

X = np.linspace(-0.5, 1.5, 20)
plt.title("Python-method distribution")
plt.hist(data, density=True, bins=10)
plt.plot(X, hist_dist.pdf(X), label='PDF')
# plt.plot(X, hist_dist.cdf(X), label='CDF')
plt.show()
```



2. Знайти оцінку максимальної правдоподібності двовимірного параметра (a,b) для рівномірного розподілу на відрізку [a,b] . Див. Табл.

Функція правдоподібності -- добуток n-ї кількості функції щільності для кожного значення з вибірки (від вибірки розміру n, що має незалежно розподілені величини)

Далі беремо похідну від функції правдоподібності.

Прирівнюємо знайдене до нуля, щоб знайти де функція набуває найбільше значення (похідна змінює знак з "-" на "+").

Функція щільності для рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{(b-a)}\quad \text{для}; a\leq x \leq b $.

Беремо n точок з цього проміжку та виходить, що функція правдоподібності буде:

$$Z(a,b)=\left(\frac{1}{(b-a)}\right)^n$$

$\log{Z} = -n\log{(b-a)} $

Оцінка максимізує функцію правдоподібності:

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \theta_k}=0 \rightarrow$$

$\frac{\partial \log Z}{\partial a}=\frac{n}{(b-a)}$ – похідна монотонно зростає. Тому оцінкою максимальної правдоподібності буде найбільш можливе a: $\min x_1,\ldots,x_n$

$\frac{\partial \log Z}{\partial b}=-\frac{n}{(b-a)}$ – похідна монотонно спадає. Тому оцінкою максимальної правдоподібності буде найменш можливе b: $\max x_1,\ldots,x_n$

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

```
df = pd.DataFrame({"x_i": [3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21],
                  "n_i": [21, 16, 15, 26, 22, 14, 21, 22, 18, 25]
                  })
df
```

```
   x_i  n_i
0    3   21
1    5   16
2    7   15
3    9   26
4   11   22
5   13   14
6   15   21
7   17   22
8   19   18
9   21   25
```

Тоді за таблицею

$a=\min x_1,\ldots,x_n=3$

$b=\max x_1,\ldots,x_n=21$

```
a = min(df.x_i)
b = max(df.x_i)
a,b
```

```
(3, 21)
```

3. Знайти оцінку методом моментів двовимірного параметра (a,b) для рівномірного розподілу на відрізку [a,b] . Застосувати знайдені формули для знаходження оцінок невідомих (a,b) рівномірного розподілу, якщо отримана вибірка має вигляд

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Знайти оцінку (a,b) для рівномірного розподілу

PDF: $f(x)=\frac{1}{(b-a)} \, for \, x \in [a,b]$

Mean (1-st moment): $\bar{x} = \int_a^b {xf(x)dx} = \frac{(a+b)}{2} $

2-nd moment: $\acute{x}_2 = \int_a^b x^2 f(x)\, dx = \frac{(a^2+b^2+ab)}{3}$

https://math.stackexchange.com/questions/1839454/finding-the-method-of-moments-estimator-for-the-uniform-distribution

Прирівняємо теоретичні та емпіричні моменти:

$$\acute{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\acute{x}_2 = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} = \frac{(a^2+b^2+ab)}{3}$$

Виражаємо $a = 2\acute{x} - b$ і підставляємо далі:

$(2\bar{x}-b)^2 + b^2 + (2\bar{x}-b)b = 3\bar{x}_2 $

$b^2 -4\bar{x}b+4\bar{x}^2+b^2+2\bar{x}b-b^2 = 3\bar{x}_2 $

Отримуємо квадратичне рівняння з невідомим b:

$b^2 -2\bar{x}b+4\bar{x}^2 - 3\bar{x}_2 = 0 $

$ \hat{b} = \frac{-(-2\bar{x}) \pm \sqrt{(4\bar{x}^2 - 4(4\bar{x}^2 - 3\bar{x}_2)}}{2} $

Оскільки b > a, то b має бути додатнім:

$ \hat{b} = \bar{x} + \frac12\sqrt{12\bar{x}_2 -12\bar{x}^2} $

$ \hat{b} = \bar{x} + \sqrt{3(\bar{x}_2 -\bar{x}^2)} $

$\hat{a} =2\bar{x} - \bar{x} - \sqrt{3(\bar{x}_2 - \bar{x}^2)}= \bar{x} - \sqrt{3(\bar{x}_2 - \bar{x}^2)} $

Формули оцінок невідомих (a,b)

$$\hat{a}=\acute{x}-\sqrt{3\left(\acute{x}_2-\acute{x}^2\right)}=\acute{x}-\sqrt{3\sigma^2}$$

$$\hat{b}=\acute{x}+\sqrt{3\left(\acute{x}_2-\acute{x}^2\right)}=\acute{x}+\sqrt{3\sigma^2}$$

Тобто (a,b) виражаються через лінійну комбінацію середнього та середньоквадратичного вибірки.

```
df = pd.DataFrame({"x_i": [3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21],
                   "n_i": [21, 16, 15, 26, 22, 14, 21, 22, 18, 25]
                  })
df
```

```
   x_i  n_i
0    3   21
1    5   16
2    7   15
3    9   26
4   11   22
5   13   14
6   15   21
7   17   22
8   19   18
9   21   25
```

```
# Пошук першого моменту
x_bar = 0
n = len(df)

for i in range(n):
    x_bar += df.x_i[i]* df.n_i[i]

x_bar = x_bar/sum(df.n_i)
x_bar
```

```
12.31
```

```
# Пошук другого моменту
x_bar_2 = 0
n = len(df)

for i in range(n):
    x_bar_2 += df.x_i[i]**2 * df.n_i[i]

x_bar_2 = x_bar_2/sum(df.n_i)
x_bar_2
```

```
185.32
```

```python
# Обрахунок sigma = std = середньо квадратичне відхилення
sigma = np.sqrt(x_bar_2 - x_bar**2)
sigma
```

```
5.812391934479297
```

Тобто в межах ~6 йде розкид чисел

```python
a = x_bar - np.sqrt(3) * sigma
b = x_bar + np.sqrt(3) * sigma
a,b
```

```
(2.242641855978306, 22.377358144021695)
```

За знайденими оцінками шукаємо найближчі значення з наших вибірок - відповідно 3 та 21