Артём Заброда.

1. Определение. Единственность нулевого и единственность обратного элементов. Примеры.

2. Элементарные свойства линейных пространств

3. Линейно зависимая и линейно независимая системы векторов. Условия совместности СЛУ и существования нетривиального решения однородной СЛУ.

4. Критерий равенства нулю определителя.

5. Критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного и из двух векторов.

6. Критерий линейной зависимости системы, состоящей из более, чем одного, вектора.

7. Перестановка векторов системы. Система, содержащая линейно зависимую подсистему. Следствие.

8. Второй критерий линейной зависимости системы.

9. Полная система векторов. Примеры. Система с полной подсистемой. Следствие. 10. Сохранение полноты системы при перестановке векторов системы и при вычеркивании вектора, являющегося линейной комбинацией остальных.

Конечномерные линейные пространства.

1. Размерность ЛП (случаи ноль, n, ∞).

2. Доказательство равенства dimRn=n.

3. Определение базиса. Примеры.

4. Теорема о базисе в n -ом пространстве, состоящем из n векторов. Следствие.

5. Теорема о размерности пространства, базис которого состоит из n векторов. Следствие.

6. Дополнение до базиса. Вычленение базиса из полной системы.

7. Определение координат вектора. Примеры. Декомплексификация.

8. Свойства координатных векторов.

9. Изоморфизм.

10. Матрица перехода от базиса к базису. Теорема.

11. Свойства матриц перехода (с леммой).

12. Подпространства. Два эквивалентных определения.

13. Линейная оболочка — подпространство.

14. Свойства линейных оболочек.

15. Пересечение подпространств.

16. Определение прямой суммы подпространств. Критерий (1-ый).

17. Теорема о размерности подпространства. Существование подпространств любой размерности, меньшей размерности пространства

18. Теорема о размерности суммы подпространств. Критерий (2-ой) прямой суммы

19. Максимальная линейно независимая подсистема МЛНП (определение, пример, дополнение линейно независимой подсистемы до МЛНП).

20. Теорема о базисе линейной оболочки. Следствие. Ранг системы векторов.

21. Определение ранга матрицы. Теоремы 1) о ранге транспонированной матрицы (без д-ва), 2) о связи ранга с порядками миноров (без д-ва) и 3) об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

22. Теорема о ранге матрицы ступенчатой формы. Два следствия.

23. Связь линейной независимости и базисности системы векторов с матрицей, составленной из координатных векторов. Неопределённость однородной СЛУ.

24. Ранг произведения матриц. Следствие.

25. Теорема Кронекера–Капели.

26. Пространство решений однородной СЛУ.

Евклидовы пространства

1. Определение скалярного произведения. Следствия из аксиом. Примеры евклидовых пространств.

2. Теорема о переходе от линейного пространства к евклидову.

3. Неравенство Коши–Буняковского.

Анна Иванова.

4. Длина вектора, расстояние между векторами, угол между векторами.

5. Ортогональность векторов: свойства, обобщённая теорема Пифагора.

6. Теорема о линейной независимости ортогональных векторов.

7. Ортонормированный базис, три его свойства.

8. Теорема существования ортонормированного базиса.

9. Процесс ортогонализации. Теорема.

10. Ортогональные матрицы, свойства и критерий.

Богдан Куничкин.

11. Две теоремы об ортогональной матрице перехода.

12. Теорема об ортогональном разложении евклидова пространства. Следствие.

13. Ортогональное разложение в случае линейной оболочки. Расстояние до подпространства

Линейные операторы и ЖНФ матрицы ЖНФ

Линейные операторы (общая теория).

1. Определение, простейшие свойства, примеры.

2. Пространство линейных операторов (Hom(L)). Произведение операторов. Свойства произведения. Степени оператора.

3. Матрица оператора. Теорема.

4. Свойства матриц операторов.

Василий Морозов.

5. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

6. Теорема о биекции между Hom(L) и соответствующим пространством матриц.

7. Теорема о матрицах, подобных матрице Ae оператора. Определитель оператора.

8. Ядро и образ оператора.

9. Ранг оператора.

10. Теорема о сумме размерностей ядра и образа оператора.

11. Обратный оператор. Теорема о линейности обратного оператора.

Оля Лысенко.

12. Критерий обратимости оператора.

13. Условия, эквивалентные обратимости линейного оператора . Следствие.

14. Определение собственного значения (с.з.) и собственного вектора (с.в.). Критерий с.з. Следствие. Собственное подпространство. Спектр оператора.

15. Ряд условий, эквивалентных тому, что □ – с.з. . Следствие.

16. Характеристический многочлен. Некоторые заключения о спектре оператора.

Спектральная теория линейных операторов.
1. Две теоремы о спектре.

2. Теорема о л.н. системы с.в.

Семён Высланко.

3. Обобщённая теорема о л.н. системы с.в.

4. Аннулирующий и минимальный многочлены. Теорема Гамильтона–Кэли .

5. Инвариантные подпространства.

6. Индуцированный оператор. Алгебраическая и геометрическая кратности с.з. Две теоремы.

7. Первый критерий оператора простой структуры. Следствия 1, 2. 8. Второй критерий оператора простой структуры.

Каноническое представление линейного оператора.

1. Клеточно-диагональные матрицы. Жорданова клетка Jk (□). Лемма о степенях жордановой клетки Jk(0)□Vk . Матрица Ж.Н.Ф.

2. Теорема о спектре нильпотентного оператора. Следствия 1, 2.

Сергей Мухин.

3. Жорданова цепочка векторов. Теорема о жордановом базисе в случае нильпотентного оператора. Следствия 1, 2, 3.

4. Свойства цепочек

5. Теорема о существовании ЖБ (жорданова базиса). Случай нильпотентного оператора и общий случай.

6. Теорема единственности матрицы ЖНФ. Лемма.

Модуль 7. Билинейные и квадратичные формы. Элементы общей алгебры

1. Билинейные формы (б.ф.). Теорема о представлении б.ф. Матрица б.ф

2. Преобразование матрицы б.ф. при переходе к новому базису. Неизменность ранга матрицы б.ф. при переходе к новому базису.

3. Квадратичная форма (к.ф.), порожденная симметричной б.ф. Восстановление полярной

б.ф. по к.ф. Неизменность ранга матрицы к.ф. . при переходе к новому базису.

4. Знакоопределенные и знакопеременные к.ф.

Софья Миклюкова.

5. Каноническому вид, нормальный вид. Метод Лагранжа.

6. Закон инерции к.ф.

7. Теорема Якоби.

8. Критерий Сильвестра.

9. Алгебраические структуры: полугруппы, моноилы, поля, апгебры. Гомоморфизмы и изоморфизмы.