中国矿业大学 2019-2020 学年第 2 学期

《数学分析 2》试卷（A）卷

考试时间：120 分钟　　考试方式：闭 卷

学院________班级________姓名________学号________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共计 20 分）

1、已知 $\int f(x)dx=\dfrac{x^3}{3}+C$，则 $\int \dfrac{1}{xf(x)}dx=$（　）.

（A）$\ln|x|+C$；　（B）$-\dfrac{x^{-2}}{2}+C$；　（C）$\dfrac{x^{-2}}{2}+C$；（D）$-\dfrac{x^{-3}}{3}+C$.

2、数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=$（　）.

（A）$\int_1^2 \ln^2 x dx$；（B）$2\int_1^2 \ln x dx$；（C）$2\int_1^2 \ln(1+x)dx$；（D）$\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$.

3、下列反常积分发散的是（　）.

（A）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；（B）$\int_0^3 \dfrac{1}{(3-x)^{\frac{2}{3}}}dx$；（C）$\int_3^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^3 x}dx$；（D）$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$.

4、设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（　）.

（A）发散；　　（B）绝对收敛；

（C）条件收敛；　　（D）敛散性与 k 的取值有关.

5、若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n$在$x=0$处收敛，则此级数在$x=-\pi$处(　　)

（A）绝对收敛；　　（B）条件收敛；　　（C）发散；　　（D）无法判断.

二、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共计 20 分）

1、由$y=\sin x, y=0(0\le x\le \pi)$所围成的平面图形绕$x$轴旋转一周所得立体的体积______.

2、心形线$r=1+\cos\theta$的周长为_______.

3、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 4^n}$的收敛域是________.

4、函数列$\{f_n(x)\}$在区间D上一致收敛于$f(x)$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \_\_\_\_\_\_\_.$$

5、设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，其在$(-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x\le \pi,\end{cases}$$

记$S(x)$是$f(x)$的傅里叶级数的和函数，则$S(2020\pi)=$_________.

三、计算题（共 7 小题，每题 6 分，共计 42 分）

1、求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

2、求定积分$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx$

3、已知f是$[-a,a]$上的连续函数，$F(x)=\int_{-a}^{a}\left|x-t\right|f(t)dt, x\in[-a,a]$，求$F''(x)$.

4、设在坐标轴的原点有一质量为m的质点，在区间$[4,8]$上有一质量为M的均匀细棒，求质点与细棒间的万有引力.

5、设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$，$x\in[-1,1]$，请先说明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$，$x\in[-1,1]$ 可逐项积分，然后计算积分 $\int_0^x S(t)dt$.

6、利用 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots, x\in(-1,1)$，求函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式，并指出收敛域.

7、将函数 $f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

四、证明题（共 2 小题，共计 18 分）

1、（10 分）（1）当$\alpha>1$时，证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$在$[0,+\infty)$上的一致收敛性；（2）当$0<\alpha\le 1$时，证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$在$[0,+\infty)$上的非一致收敛性.

2、（8 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界. 证明：若对任给的$\eta>0$，$f(x)$在$[a,b-\eta]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上也可积.