中国矿业大学 07~08 学年第二学期

《数学分析(2)》试卷（A）卷

考试时间：**120** 分钟　考试方式：闭卷

院系＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得　分									
阅卷人									

一、填空题（每空 3 分, 共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi]=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$＿＿＿＿＿＿.

3. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x=$＿＿＿＿＿＿.

4. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的周长为＿＿＿＿＿＿.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})=$＿＿＿＿＿＿.

6. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$＿＿＿＿＿＿＿＿＿（绝对收敛或条件收敛或发散）.

7. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

8. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 g，f 具有一阶连续(偏)导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$＿＿＿＿＿＿.

9. 函数 $f=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $\mathbf{P}(1,1,1)$ 沿方向 $\mathbf{l}:(0,3,4)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_{\mathbf{P}}=$＿＿＿.

10. 曲面 $z=x^4-2y^2-4y+4x+3$ 在点____________处有水平的切平面.

二（10 分）、讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x^4\\ 3, & \text{其它}\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的二重极限、二次极限、偏导数及沿任意方向的方向导数.

（注：如果存在，把它求出来；如果不存在，要说明理由.）

三（10 分）、把函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为关于 x 的幂级数并指出收敛域.

四（10 分）、把函数 $f(x)=x\ (0\le x\le \pi)$ 展开为余弦级数并指出收敛性，再利用该级数

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

五（10 分）、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$，

证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

六（10 分）、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ $(p > \frac{1}{2})$ 都绝对收敛.

七（10 分）、求椭圆 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的表面积.

八（10 分）、设 $f(x) \in R[a,b]$，证明：$e^{f(x)} \in R[a,b]$.

中国矿业大学 07~08 学年第二学期

《数学分析(2)》试卷（A）卷参考答案

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. $\dfrac{2}{\pi}$.

2. π.

3. 1.

4. $8a$.

5. $-\ln 2$.

6. 发散.

7. $[-1,3)$.

8. $f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$.

9. $\dfrac{36}{5}$.

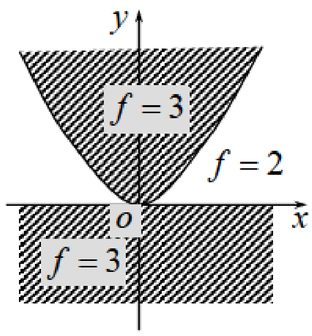
10. $(-1,-1,2)$.

二（10 分）、讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x^4\\ 3, & 其它\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的二重极限、二次极限、偏导数及沿任意方向的方向导数.

（注：如果存在，把它求出来；如果不存在，要说明理由.）



解： 若取直线路径 $y=kx$，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=3$；

若取路径为 $y=kx^4\quad(0<k<1)$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^4}}f(x,y)=2$，

所以二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

对任意 $y \neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 3$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} 3 = 3$。

对任意 $x \neq 0$，$\lim\limits_{y\to 0^+} f(x,y) = 2$，$\lim\limits_{y\to 0^-} f(x,y) = 3$，所以 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在。从而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 也不存在。

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3-3}{\Delta x} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{3-3}{\Delta y} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(P)-f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{3-3}{\rho} = 0.$$

三（10 分）、把函数 $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为关于 x 的幂级数并指出收敛域.

解：因为 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$x\in(-1,1)$，

故 $\arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$x\in[-1,1]$，

又 $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$x\in(-1,1]$，

有 $\ln\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}$，$x\in[-1,1]$

所以 $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

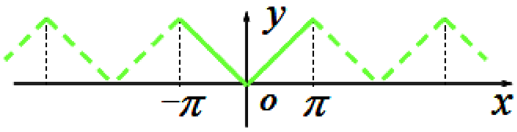
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}\ ,\quad x\in[-1,1].$$

四（10 分）、把函数 $f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数并指出收敛性，再利用该级数

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.



解：作偶延拓为 $f(x)=|x|\ (-\pi\le x\le\pi)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\quad(0\le x\le\pi)$$

令 $x=0$，得 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$.

令 $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$，则

$$S=(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$$

解之得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

五（10 分）、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{x-1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(1)$，

证明：$\exists \xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证： 由积分中值定理知，$\exists \xi_1 \in [0,\frac{1}{3}]$，使

$$3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{x-1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = e^{\xi_1 - 1} f(\xi_1),$$

那么由条件 $e^{\xi_1-1}f(\xi_1)=f(1)$. 若令 $F(x)=e^{x-1}f(x)$， $x\in[0,1]$，则有

$$F(\xi_1)=F(1).$$

由 Lagrange 定理，知 $\exists \xi \in [\xi_1,\frac{1}{3}] \subset [0,1]$，使得

$$F'(\xi)=0,$$

整理即得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

六（10 分）、若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}\ (p>\frac{1}{2})$ 都绝对收敛.

证： 因为 $\sum a_n^2$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 那么对 $\varepsilon_0=1$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$0\le |a_n|<1$，进而 $|a_n^3|\le a_n^2$，由正项级数的比较法可知 $\sum a_n^3$ 绝对收敛.

同理 $\sum a_n^4$ 收敛,又 $\sum \frac{1}{n^{2p}}\ \ (p>\frac{1}{2})$ 收敛，而

$$\left|\frac{a_n}{n^p}\right| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

故 $\qquad \sum \frac{a_n}{n^p}\ \ (p>\frac{1}{2})$ 绝对收敛.

七（10 分）、求椭圆 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的表面积.

解：$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t$

$$= 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-5\sin^2 t}\,\mathrm{d}(\sin t)$$

$$= 8\pi\int_0^{1} \sqrt{9-5u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{36}{\sqrt{5}}\pi\left[\operatorname{acrsin}\frac{u}{3/\sqrt{5}} + \frac{u\cdot\sqrt{9/5-u^2}}{9/5}\right]_0^1$$

$$= 4\pi\left(\frac{9}{\sqrt{5}}\operatorname{acrsin}\frac{\sqrt{5}}{3}+2\right)。$$

八（10 分）、设 $f(x)\in R[a,b]$，证明：$e^{f(x)}\in R[a,b]$.

证： 由 $f(x)\in R[a,b]$，从而有界，即存在正数 M，使得 $|f(x)|\le M, x\in[a,b]$. 又任给 $\varepsilon>0$，则存在分割 T，使得

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{e^M}.$$

对于 $[a,b]$ 上 T 所属的每一个 Δ_i，利用 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned}\omega_i^{e^f} &= \sup_{x',x''\in\Delta_i}\left|e^{f(x')}-e^{f(x'')}\right| \\ &= \sup_{x',x''\in\Delta_i} e^{\xi_i}\left|f(x')-f(x'')\right| \le e^M\omega_i^f\end{aligned}$$

（其中 ξ_i 在 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 之间）.

所以有

$$\sum_T \omega_i^{e^f}\Delta x_i \le e^M\sum_T \omega_i^f\Delta x_i < e^M\cdot\frac{\varepsilon}{e^M}=\varepsilon,$$

也就是 $e^{f(x)}\in R[a,b]$.