数值分析 · 课程作业 · 第一章

姓名：潘林越　班级：数学与应用数学 2020-2 班　学号：15194694

2. (3) 根据定理 1，$\varepsilon_r \le \dfrac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$. 由于 $\sqrt{101} = 0.1 \cdots \times 10^2$，知 $a_1 = 1$. 欲使

$$\varepsilon_r \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \times 10^{-n+1} \le 0.1 \times 10^{-2},$$

应至少取 $n = 4$，即取 4 位有效数字.

4. $y = f(x)$，由 $y^* = f(x^*)$ 计算可得 y 的近似值 y^*，其误差限

$$\varepsilon(y^*) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

(1) $y = \dfrac{1}{(x+1)^6}, \quad f'(x) = -6(x+1)^{-7}, \quad |f'(x^*)| \approx 6(1.4+1)^{-7},$

(2) $y = (3-2x)^3, \quad f'(x) = -6(3-2x)^2, \quad |f'(x^*)| \approx 6(3-2.8)^2,$

(3) $y = \dfrac{1}{(3+2x)^3}, \quad f'(x) = -6(3+2x)^{-4}, \quad |f'(x^*)| \approx 6(3+2.8)^{-4},$

(4) $y = 99 - 70x, \quad f'(x) = -70, \quad |f'(x^*)| = 70.$

由此可见，(3) 的误差限最小，结果最好，为 $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \approx \dfrac{1}{(3+2\times 1.4)^3} \approx 5.125 \times 10^{-3}$.

5. 由此式计算时，误差满足关系式

$$\varepsilon_n = 10\varepsilon_{n-1}.$$

由此可见，误差是逐步扩大的，此算法不稳定；计算 y_{10} 时误差达到

$$\varepsilon_{10} = 10^{10}(\sqrt{2} - 1.41) \approx 4 \times 10^7.$$

7. 等式变换.

(1) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{1-\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x},$

(2) $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\dfrac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$,

(3) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}}$

$=\dfrac{2}{x\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\right)}$,

(4) $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan(x+1)-\arctan x$. 设 $\alpha=\arctan(x+1),\beta=\arctan x$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{1+x(x+1)}$，所以 $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\alpha-\beta$ $=\arctan\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

实验课题（一） 递推计算的稳定性

方案 1 和方案 2 的误差分别满足关系式

$$\varepsilon_n^1=-a\varepsilon_{n-1}^1,\quad \varepsilon_n^2=-\frac{1}{a}\varepsilon_{n-1}^2.$$

由此可见，当 $a=0.05$ 时，方案 1 的误差逐步缩小，结果可靠；而方案 2 的误差逐步扩大，结果不可靠. 当 $a=15$ 时，方案 1 的误差逐步扩大，结果不可靠；而方案 2 的误差逐步缩小，结果可靠.