# 2017—2018—2《高等代数》(2)试卷(A)卷

## 答案及评分标准

一、答案不唯一，略去。

二、

1. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

2. $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

3. $\frac{1}{5}$

4. 6，基：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

5. 16

6. $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

7. 2，0

8. 0

9. $\frac{\pi}{4}$

10. $(1.2.3)$

三、

(1) 二次型矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ ……2′

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=\cdots=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$ ……6′

特征值为 $\lambda_1=-1$. $\lambda_2=2$. $\lambda_3=5$

对于 $\lambda_1=-1$ 有方程组

$$\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-3&2\\0&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=(2,2,1)$ ……8′

对于 $\lambda_2=2$ 有方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_2=(-1,\frac{1}{2},1)$ ……10′

对于 $\lambda_3=5$. 有方程组

$$\begin{pmatrix}4&2&0\\2&3&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
……12′

由于特征值不同，故需分别单位化得　得基础解系 $\xi_3=(\frac{1}{2},-1,1)$

$\eta_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. $\eta_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. $\eta_3=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ ……13′

令正交线性替换 $X=TY$. 其中 $T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ ……14′

则原二次型化为标准形 $-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ ……15′

四. 证明：（反证法）假设 $f(x), g(x), h(x)$ 线性相关，
则必有一多项式可由其余两个线性表示. ---- 2′
不妨设
$f(x) = k_1 g(x) + k_2 h(x)$ （*） ---- 4′
由题意知 $g(x)$ 与 $h(x)$ 不互素.
令 $m(x) = (g(x), h(x))$. 则 $\partial(m(x))>0$. ---- 6′
则由（*）知 $m(x) \mid f(x)$. ---- 8′
从而 $m(x)$ 是 $f(x), g(x), h(x)$ 的公因式. 矛盾. ---- 10′

五. 证明：(1) 设 $k_0\xi + k_1\sigma(\xi) + \cdots + k_{n-1}\sigma^{n-1}(\xi) = 0$ （*） ---- 2′
用 $\sigma^{n-1}$ 作用于上式可得（因为 $\sigma^n(\xi)=0$）
$k_0\sigma^{n-1}(\xi) = 0$ ---- 6′
因为 $\sigma^{n-1}(\xi) \neq 0$. 故 $k_0 = 0$ ---- 7′
则（*）变为 $k_1\sigma(\xi) + \cdots + k_{n-1}\sigma^{n-1}(\xi) = 0$
用 $\sigma^{n-2}$ 作用于上式. 可得（因为 $\sigma^n(\xi)=0$）
$k_1\sigma^{n-1}(\xi) = 0$
因为 $\sigma^{n-1}(\xi) \neq 0$. 故 $k_1 = 0$ ---- 10′
----
依次递推可得 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$ ---- 12′
(2). 由(1)可知 $\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi)$ 就是 $V$ 的一组基
$\sigma$ 在这组基下的矩阵即为所求. 记为 $A$ ---- 16′
(3). 由(1)知 $\sigma$ 的特征值只有 0.
由于 $0E - A = -A$, 其秩为 $n-1$.
故 $(0E-A)X=0$ 的解空间是 $n-(n-1)=1$ 维的 ---- 18′
即 $\sigma$ 只有 1 个线性无关的特征向量. 而 $\dim V>1$. 故得证 ---- 20′

六. 证明. 设 $W$ 是 $\sigma$ 的不变子空间.
任取 $\alpha \in W^{\perp}$. 下证 $\sigma(\alpha) \in W^{\perp}$. ---- 2′
任取 $\beta \in W$. 可知 $\sigma(\beta) \in W$.
因为 $\alpha \in W^{\perp}$. 故 $(\alpha, \sigma(\beta)) = 0$. （*） ---- 4′
由于 $\sigma$ 是对称变换. 由（*）知
$(\sigma(\alpha), \beta) = 0$ ---- 5′
故 $\sigma(\alpha) \in W^{\perp}$. 证毕.