

中国矿业大学 2021-2022 学年第二 学期课程考试试卷（回忆）

考试科目： 实变函数 A 卷

考试时间： 100 分钟

学院	班级	姓名	学号							
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
阅卷人										

考生承诺：

1. 未携带通信工具及其他各类带有拍照、摄像、接收、发送、储存等功能的设备（包括但不限于手机、智能手表、智能眼镜，平板电脑、无线耳机）或关机与其他禁止携带物品、资料等放置监考老师指定位置；
2. 已按要求清理干净整个座位（包括考生邻座）桌面和抽屉里的所有物品（无论是否属于考生本人）；
3. 已知晓并理解《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》等与考试相关规定，承诺在考试中自觉遵守以上规定，服从监考教师的安排，自觉遵守考场纪律，诚信考试，不违规、不作弊。如有违反，自愿按《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》相关条款接受处理。

考生签名：_____

一、（20 分）填空

1. 设 E 是 $[0, 1]$ 中的有理点集，则 $m^*E =$ _____.
2. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，若对任意有限实数 a ，都有 $E[f(x) > a]$ 是_____，则称 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数。
3. $|f(x)|$ 在 E 上 L -可积是 $f(x)$ 在 E 上 L -可积的_____ 条件。（填“充分”，“必要”，“充要”）
4. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)(x \in E)$ ，则由黎斯定理可得存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ ，使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ _____ $f(x)$ ($x \in E$)。
5. 设 P 为 Cantor 集，则 $mP =$ _____， $\overset{\circ}{P} =$ _____。

二、(10 分) 叙述叶戈罗夫定理；叙述鲁津定理。

三、(9 分) 设 E_1 是函数 $y = \begin{cases} \sin^3 \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 的图形上的点所组成的集合，

写出 R^2 内的 $E'_1, \overset{\circ}{E}_1, \overline{E}_1$ 。

四、(6 分) 设 $A_{2n-1} = (-\frac{1}{n}, 0), A_{2n} = (-n, 0), n = 1, 2, \dots$ ，求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集。

五、(10 分) 设在可测集 E 上， $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ，而对任意正整数 n 和 a.e. 的 $x \in E$ ， $g_n(x) = f_n(x)$ ，证明 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$ 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 团伙作弊。

六、（10 分）设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，证明：对任意实数 c ， $E = \{x | f(x) \geq c\}$ 是闭集。

七、（10 分） $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $G \supset E$ ，使 $m^*(G - E) < \varepsilon$ ，证明 E 可测。

八、(10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 是无理数} \\ 1, & x \text{ 是有理数} \end{cases}$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是否 R-可积? 请说明理由。 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是否 L-可积? 请说明理由。若可积, 请求出积分值。

九、(15 分) 利用 Lebesgue 控制收敛定理求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx$ 。