《数学分析（II）》试题

2004.6

一．计算下列各题：

1．求定积分$\int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$；

2．求定积分$\int_{-2}^2 \max(1, x^2)dx$；

3．求反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$；

4．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)2^n x^{2n}$ 的收敛域；

5．设$u = x^{yz}$，求du。

二．设变量代换$\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$可把方程$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数$a$。

三．平面点集$\{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, \ \sin\dfrac{1}{n} \right) \,\middle|\, n = 1,2,\cdots \right\}$是否为紧集？请说明理由。

四．函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \dfrac{x^n}{1 + x^n}$在$[0, 1]$上是否一致收敛？请说明理由。

五．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(1)=1$ 和

$$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan(x^2)\text{。}$$

求 $\int_1^2 f(x)dx$。

六．设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上具有连续导数，且满足 $f(1)=1$ 和

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+[f(x)]^2}\text{，}\ 1\le x<+\infty\text{。}$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且小于 $1+\dfrac{\pi}{4}$。

七．设如下定义函数：

$$f(x)=\int_{x}^{x^2}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t}\sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt，\quad x>1。$$

判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$的敛散性。

八．设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx$（$n=0,1,2,\cdots$）。求级数$\sum_{n=0}^{\infty}I_n$的和。