中国矿业大学 2021-2022 学年第二 学期课程考试

实变函数 A 卷 参考解答

一、（20 分）填空

1. 设 E 是 $[0,1]$ 中的有理点集，则 $m^*E =$ ___0___.

2. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，若对任意有限实数 a，都有 $E[f(x) > a]$ 是___可测集___，则称 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数。

3. $|f(x)|$ 在 E 上 L-可积是 $f(x)$ 在 E 上 L-可积的___充要___条件。

4. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 E 上的可测函数列，且 $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$，则由黎斯定理可得存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $\{f_{n_k}(x)\}$___a.e. 收敛于___$f(x)$。

5. 设 P 为 Cantor 集，则 $mP =$___0___，$\overset{\circ}{P} =$___$\varnothing$___。

二、（10 分）叙述叶戈罗夫定理；叙述鲁津定理。

叶戈罗夫定理：设 $mE < \infty, \{f_n\}$ 是 E 上一列 a.e. 收敛于一个 a.e. 有限的函数 f 的可测函数，则对任意 $\delta > 0$，存在子集 $E_\delta \subset E$，使 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛，且 $m(E \backslash E_\delta) < \delta$。

鲁津定理：设 $f(x)$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数，则对任意 $\delta > 0$，存在闭子集 $F_\delta \subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上是连续函数，且 $m(E \backslash F_\delta) < \delta$。

三、（9 分）设 E_1 是函数 $y = \begin{cases} \sin^3 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 的图形上的点所组成的集合，写出 R^2 内的 $E_1', \overset{\circ}{E}_1, \overline{E_1}$。

$E_1' = \overline{E_1} = E_1 \left\{(0,y)\,|-1 \leq y \leq 1\right\}, \overset{\circ}{E}_1 = \varnothing$。

四、（6 分）设 $A_{2n-1} = (-\dfrac{1}{n}, 0), A_{2n} = (-n, 0), n = 1, 2, \cdots$，求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集。

有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \varnothing$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{2n} = (-\infty,\ 0)$, 容易证明 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = (-\infty,\ 0)$。

五、（10 分）设在可测集 E 上，$f_n(x) \Rightarrow f(x)$，而对任意正整数 n 和 a.e. 的 $x \in E$，$g_n(x) = f_n(x)$，证明 $g_n(x) \Rightarrow f(x)$。

由题意，我们有 $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时 ,$mE[|f_n - f| \geq \delta] < \varepsilon$. 则 $mE[|g_n - g| \geq \delta] \leq m(E[|f_n - f| \geq \delta] \cap E[f_n = g_n]) + mE[f_n \neq g_n] \leq mE[|f_n - f| \geq \delta] < \varepsilon$. 故 $g_n(x) \Longrightarrow f(x)$。

六、（10 分）设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，证明：对任意实数 c，$E = \{x | f(x) \geq c\}$ 是闭集。

若 $f(x)$ 为连续函数，则 $\forall c \in \mathbb{R}$，$\forall x_n \subset E$, 并且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$。则由 $f(x_n) \geq c$ 可知 $F(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq c$，即 $x_0 \in E$, 故 E 为闭集。

七、（10 分）$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $G \supset E$，使 $m^*(G - E) < \varepsilon$，证明 E 可测。

$\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists$ 开集 $G_n \supset E$, s.t.$m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$, 取 $G_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 由开集 G_n 可测 , 有 G_0 可测。注意到 $m^*(G_0 - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$, 由 n 的任意性 ,$m^*(G_0 - E) = 0$, 易证 $G_0 \cap E^c = G_0 - E$ 可测（零测集可测）, 而 $E^c = G_0 \cap E^c \cup G_0$, 因此 E^c 可测 , 故 E 可测。

八、（10 分）设 $f(x) = \begin{cases} x, & x\text{是无理数} \\ 1, & x\text{是有理数} \end{cases}$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 R-可积？请说明理由。$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 L-可积？请说明理由。若可积，请求出积分值。

$f(x)$ 不是 R-可积，理由：易证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续，并且 $m[0,1] = 1 > 0$。

$f(x)$ 是 L-可积，理由：构造 $D_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^c \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, $D_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}^c \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$,$D_1(x)$

和 $D_2(x)$ 都是简单函数，所以可测。构造 $g(x) = x$ 定义在 $[0,1]$ 上，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以可测。因此 $f(x) = D_1(x)g(x) + D_2(x)$ 非负可测，故 $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} < +\infty$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 L-可积，且积分为 $\frac{1}{2}$。

九、（15 分）利用 Lebesgue 控制收敛定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$。

令 $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x$,$f_n(x)$ 由初等函数四则运算而成因而在 $[0,+\infty]$ 上连续，因而可测。注意到：当 $n \in \mathbb{N}^+$, $x > 0$ 时，有 $\ln(x+n) < x+n$, 于是有 $\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x < \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x} \le \frac{x+1}{e^x}$。令 $F(x) = \frac{x+1}{e^x}$,$F(x)$ 显然是 $[0,+\infty]$ 上的连续函数，因此可测，并且非负。$\int_0^\infty F(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x+1}{e^x}\mathrm{d}x = -\frac{x+2}{e^x}\Big|_0^\infty = 2 < +\infty$ 显然 $F(x)$ R-可积，易证 $F(x)$L-上可积。此时，$F(x) > f_n(x)$ 对于 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 恒成立,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x = 0$。由 Lebesgue 控制收敛定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = 0$。