第三章离散信道及其容量

第四节信道组合

陈兴同

中国矿业大学 数学学院

2021 年 8 月

内容提要

1 数据处理不等式

内容提要

内容提要

内容提要

定理 3.4.1

数据在传输过程中通常会损失信息，在级联情况下可以建立传输过程中信息量之间的大小关系。

下面是数据传输过程中不等式。

（1） 若随机变量 X, Y, Z 构成马氏链即 $X \to Y \to Z$，则 $I(X;Z) \le I(X;Y), I(X;Z) \le I(Y;Z)$。

（2） 如果 $U \to X \to Y \to V$，则 $I(U;V) \le I(X;Y)$。

（3） 如果随机向量 $U^{(l)}, X^{(n)}, Y^{(n)}, V^{(l)}$ 构成马氏链即 $U^{(l)} \to X^{(n)} \to Y^{(n)} \to V^{(l)}$，则 $I(U^{(l)};V^{(l)}) \le I(X^{(n)};Y^{(n)})$。

证明留作练习。

部件的级联

对如图 3-1 信道模型，各个部件之间是级联的，故 $W = U^{(l)} \to X^{(n)} \to Y^{(n)} \to V^{(l)} = \hat{W}$，从而有上面定理中的不等式（2）或（3）成立，这可解释成系统传输的信息量不大于中间环节的信息量，因此这些不等式被称为数据处理不等式。

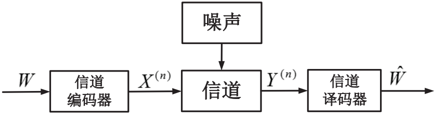

Figure: 图 3-1

两个独立信道

设有二个独立离散信道如图 3-11。

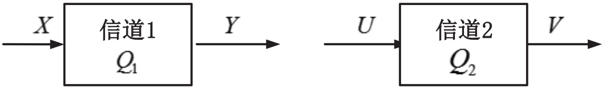

Figure: 两个独立信道

3-11

（1） 输入字符集为：$\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{N_1}\}$，$\mathcal{U}=\{u_1,u_2,\cdots,u_{N_2}\}$

（2） 输出字符集为：$\mathcal{Y}=\{b_1,b_2,\cdots,b_{M_1}\}$，$\mathcal{V}=\{v_1,v_2,\cdots,v_{M_2}\}$。

（3） 信道容量为：C_1,C_2 个 D 进位，如以 2 为底单位是比特。

级联信道图示

若信道 1 的输出又是信道 2 的输入，如图 3-12 所示，则称为级联信道。

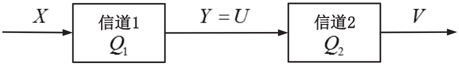

Figure: 图 3-12

级联信道特性

整个信道有如下特性：

（1）级联信道的输入、输出构成马氏链 $X \to Y = U \to V$。

（2）总信道容量 C 不大于任何一个子信道的容量即 $C \leq \min(C_1, C_2)$。事实上：由马氏链下的数据处理不等式可得

$$I(X;V) \leq I(X;Y) \leq C_1 \text{或} I(X;V) \leq I(U;V) \leq C_2.$$

级联信道特性

（3）总信道矩阵 $Q = Q_1 Q_2$。事实上：

$$
\begin{aligned}
p(v|x) &= \frac{p(x,v)}{p(x)} = \frac{\sum_y p(x,y,v)}{p(x)} \\
&= \sum_y \left[\frac{p(x,y)}{p(x)} \frac{p(x,y,v)}{p(x,y)} \right] \\
&= \sum_y [p(y|x) p(v|xy)] \\
&= \sum_y \{p(y|x) p(v|y)\},
\end{aligned}
$$

正好是矩阵 Q_1 与 Q_2 的乘积，这说明级联信道的总信道矩阵是每个子信道传输矩阵乘积。当有 n 个信道级联时总信道矩阵 $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_n$；当 n 个相同的信道级联时总信道矩阵 $Q = Q_1^n$。

例题 3.4.1

求 n 个二元对称信道（图 3-13）级联后信道矩阵与容量。

图 3-20

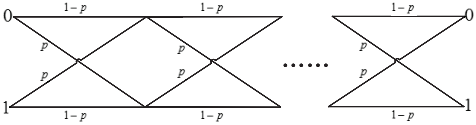

Figure: 图 3-13

解：

二元对称信道矩阵为

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

n 个级联后总信道矩阵为

$$Q_n = Q_1^n = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}^n,$$

续解：

因为 Q_1 可以对角化

$$P^{-1}Q_1P=\Lambda=\begin{pmatrix}1-2p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

从而

$$Q_n=Q_1^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1-2p)^n+1 & 1-(1-2p)^n\\ 1-(1-2p)^n & 1+(1-2p)^n\end{pmatrix},$$

故级联信道仍为一个二元对称信道，因此信道容量为

$$C_n=1-h\left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right).$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}, \lim_{n\to\infty}C_n=1-h(1/2)=0.$$

独立并行信道图示

两个信道独立地将各自的信号同时输入到信道中传输，并且每个信道的输出只与它自己的输入有关，这种组合信道称为独立并行信道，如图 3-14 所示。

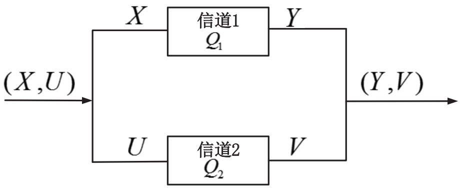

Figure: 图 3-14

特性：

整个信道有如下特性：（1）输入字符集为笛卡尔积 $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$，输出字符集为笛卡尔积 $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$。
（2）每个时刻输入两个字符 xu 或向量 (x, u)，两个信道同时进行传输，第一信道传输字符 x，第二个信道传输字符 u，输出也是字符串 yv 或向量 (y, v)。
（3）转移概率为 $p(yv|xu) = p_1(y|x)p_2(v|u)$，总信道矩阵为 $Q = Q_1 \otimes Q_2$，即 Q_1 与 Q_2 的 Kronecker 积。事实上：

$$p(yv|xu) = \frac{p(x,u,y,v)}{p_{XU}(x,u)} = \frac{p_{XY}(x,y)p_{UV}(u,v)}{p_X(x)p_U(u)} = p_1(y|x)p_2(v|u)$$

定理 3.4.2：容量

独立并行信道的信道容量为 $C = C_1 + C_2$。

证明：（1）可以证明

$$I(X,U;Y,V) \le I(X;Y) + I(U;V) \le C_1 + C_2. \tag{3.10}$$

（2）若信道 1、信道 2 的最大输入分布为 $p_1(x), p_2(u)$，则此时总信道的最大输入分布恰为 $p(x,u) = p_1(x)p_2(u)$，最大输出分布恰为 $q(x,u) = q_1(y)q_2(v)$。事实上可以证明当 $X \sim p_1(x), U \sim p_2(u)$，不等式（3.10）中等号成立。

备用选择信道图示

信道的输入字符以概率 ε 使用信道 1，以概率 $1-\varepsilon$ 使用信道 2，不同字符使用哪个信道具有随机性，同一时刻只有一个字符输入，只有一个信道被使用，只有一个字符输出，这种方式组合成的新信道称为备用选择信道，如图 3-15，其特点如下：

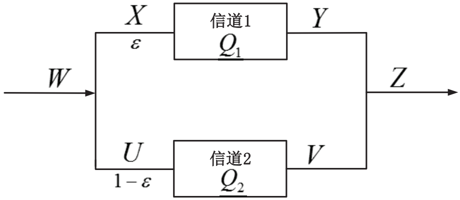

Figure: 图 3-15

备用选择信道特性：

（1）总信道的输入字符集为 $\mathcal{W}=\mathcal{X}\cup\mathcal{U}$，输出字符集为 $\mathcal{Z}=\mathcal{Y}\cup\mathcal{V}$。
（2）转移概率为

$$p(z|w)=\begin{cases} p_1(z|w) & 若 w\in\mathcal{X}, z\in\mathcal{Y} \\ p_2(z|w) & 若 w\in\mathcal{U}, z\in\mathcal{V} \\ 0 & else \end{cases},$$

信道矩阵为分块对角阵

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

（3）总信道的输入分布为

$$W\sim p_W(w)=\begin{cases} \varepsilon p_X(w) & w\in\mathcal{X} \\ (1-\varepsilon)p_U(w) & w\in\mathcal{U} \end{cases}.$$

定理 3.4.3: 备用选择信道容量

和信道的信道容量为 $C = \log_D(D^{C_1} + D^{C_2})$。

证明：

$$
\begin{aligned}
I(W;Z) &= \sum_w \sum_z p_W(w)p(z|w)\log_D \frac{p(z|w)}{p_Z(z)} \\
&= \sum_x \sum_y \varepsilon p_X(x)p_1(y|x)\log_D \frac{p_1(y|x)}{\varepsilon p_Y(y)} \\
&\quad + \sum_u \sum_v (1-\varepsilon)p_U(u)p_2(v|u)\log \frac{p_2(v|u)}{(1-\varepsilon)p_V(v)} \\
&= \varepsilon \sum_x \sum_y p_X(x)p_1(y|x)\log_D \frac{p_1(y|x)}{p_Y(y)} \\
&\quad +(1-\varepsilon)\sum_u \sum_v p_U(u)p_2(v|u)\log_D \frac{p_2(v|u)}{p_V(v)} \\
&\quad +\varepsilon \log_D \frac{1}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)\log_D \frac{1}{1-\varepsilon} \\
&= \varepsilon I(X;Y) + (1-\varepsilon)I(U;V) + h(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

续证明：

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p_W(w)} \left(\varepsilon I(X;Y) + (1-\varepsilon)I(U;V) + h(\varepsilon)\right) \\
&= \max_{\varepsilon} \max_{p_X(x)} \max_{p_U(u)} \left(\varepsilon I(X;Y) + (1-\varepsilon)I(U;V) + h(\varepsilon)\right) \\
&= \max_{\varepsilon} \left(\varepsilon \max_{p_X(x)} I(X;Y) + (1-\varepsilon) \max_{p_U(u)} I(U;V) + h(\varepsilon)\right) \\
&= \max_{\varepsilon} \left(\varepsilon C_1 + (1-\varepsilon) C_2 + h(\varepsilon)\right).
\end{aligned}
$$

续证明：

记

$$f(\varepsilon)=\varepsilon C_1+(1-\varepsilon)C_2+h(\varepsilon),$$

则

$$f'(\varepsilon)=C_1-C_2+\log_D\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}=0,$$

$$C_1-\log_D\varepsilon=C_2-\log_D(1-\varepsilon)=\lambda,$$

$$\varepsilon=D^{C_1-\lambda},1-\varepsilon=D^{C_2-\lambda},$$

$$D^{\lambda}=D^{C_1}+D^{C_2},\lambda=\log_D\left(D^{C_1}+D^{C_2}\right),$$

从而得

$$\begin{aligned}C&=\varepsilon C_1+(1-\varepsilon)C_2+h(\varepsilon)\\&=\varepsilon(C_1-\log_D\varepsilon)+(1-\varepsilon)(C_2-\log_D(1-\varepsilon))\\&=\lambda=\log_D(D^{C_1}+D^{C_2}).\end{aligned}$$

例题 3.4.2

求如图 3-17 所示的信道容量。

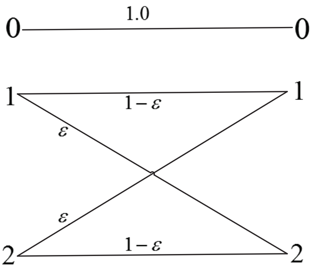

Figure: 图 3-17

解：

因为同一时刻这个信道只能有一个输入字符与一个输出字符，并且输入 0 时以概率 1 选择信道 1，输入 1,2 时以概率 1 选择信道 2，不是两个字符同时传输，因此应该看成两个信道的和信道。$C_1 = \log_2 1 = 0, C_2 = 1 - h(\varepsilon)$，从而总的信道容量为

$$C = \log_2(2^{C_1} + 2^{C_2}) = \log_2(1 + 2^{1-h(\varepsilon)})\text{bits}.$$

当 $\varepsilon = 0$ 时 $C \ \ \log_2(3)$；当 $\varepsilon = 0.5$ 时 $C_2 = 0, C$ 1bit；当 $\varepsilon = 1$ 时 $C \ \ \log_2(3)$。