解析几何试题（2010--2011）解答

一、填空题

1. $\underline{\sqrt{21}}$ 2. $\underline{\arcsin\frac{4}{9}}$ 3. $\underline{\frac{\sqrt{17}}{3}}$ 4. $\underline{\frac{\pi}{3}}$ 5. $\underline{2\sqrt{-\frac{K_1}{I_1^2}}}$ 6. $\underline{x^2-y^2+2z^2-2xy+4x-4z+4=0}$ 7. $\underline{l:m}$ 8. $\underline{x+2y-3z=0}$ 9. $\underline{5}$

二、解：向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,3),\overrightarrow{OB}=(4,5,6)$，过三点$O,A,B$的平面的法向量是

$$n=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,2,3)\times(4,5,6)=-3(1,-2,1).$$

所以过三点O,A,B的平面方程： $x-2y+z=0.$

ΔOAB的面积是$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}|n|=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$

三、解：设直母线的方向向量为$v=(l,m,n)$，将直母线的参数方程$\begin{cases}x=-1+lt\\y=-1+mt\\z=1+nt\end{cases}$代入曲面方程得：

$$\Phi(l,m,n)t^2+2(lF_1(-1,-1,1)+mF_2(-1,-1,1)+nF_3(-1,-1,1))t+F(-1,-1,1)=0$$

则$\begin{cases}\Phi(l,m,n)=0,\\lF_1(-1,-1,1)+mF_2(-1,-1,1)+nF_3(-1,-1,1)=0,\\F(-1,-1,1)=0\end{cases}$

即$\begin{cases}l^2+m^2-n^2+2lm-2nl-mn=0,\\-l-m+3n=0,\end{cases}$于是$\begin{cases}2n^2+mn=0,\\l=-m+3n,\end{cases}$。

得到$l:m:n=1:(-1):0$或$l:m:n=5:(-2):1$。

所以过点$(-1,-1,1)$的直母线是

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{0}\text{及}\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}。$$

四、解：曲面的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\-3&1&-1&4\\1&-1&5&-6\\-2&4&-6&14\end{bmatrix},\text{不变量 } I_1=7, I_2=\begin{vmatrix}1&-3\\-3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&5\end{vmatrix}=0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{vmatrix}=-36, I_4=|A|=-6\times 36.$$

特征方程：$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0, (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda+2)=0,$

特征值：$\lambda_1=3, \lambda_2=6, \lambda_3=-2.$

简化方程：$3x'^2+6y'^2-2z'^2+6=0.$

当$\lambda_1=3$时，主方向 $X:Y:Z$ 满足

$$\begin{bmatrix}2&3&-1\\3&2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=0,$$

解得 $X:Y:Z=1:(-1):(-1), \Phi_4(1,-1,-1)=-2-4+6=0,$

主径面：$3(x-y-z)+0=0, x-y-z=0$。

当$\lambda_2=6$时，主方向 $X:Y:Z$ 满足

$$\begin{bmatrix}5&3&-1\\3&5&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=0,$$

解得 $X:Y:Z=1:(-1):2, \Phi_4(1,-1,2)=-2-4-12=-18,$

主径面：$6(x-y+2z)-18=0, x-y+2z-3=0$。

当$\lambda_3=-2$时，主方向 $X:Y:Z$ 满足

$$\begin{bmatrix}-3&3&-1\\3&-3&1\\-1&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=0,$$

解得 $X:Y:Z=1:1:0, \Phi_4(1,1,0)=-2+4=2,$

主径面：$-2(x+y)+2=0, x+y-1=0$。

五、解：因为所求直线与 l_1, l_2 都共面，所以所求直线在过 l_1 的平面束 $s(x-1)+y-z=0$ 及过 l_2 的平面束 $t(x+1)+y+z=0$ 中。所求直线在两平面束的交线 $l: s(x-1)+y-z=0$，$t(x+1)+y+z=0$ 中，交线的方向向量是 $v=(2,-(s+t),s-t)$，过点 $(1,-t,-t)$。

由于又与 l_3 共面，则

$\begin{vmatrix} 1 & t-1 & t-2 \\ 2 & -s-t & s-t \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0,$ 化简得到 $st=-1$。在交线族中按 $st=-1$ 消去参数 s,t 得到曲面方程：$x^2+y^2-z^2=1$。

六、证明：设两平面的夹角为 $\theta(0<\theta\le\frac{\pi}{2})$，交线为 x 轴，其中一平面 Π_1 为 xoy 面，另一平面 Π_2 方程是：$y\sin\theta-z\cos\theta=0$。

设 $P(x,y,z)$ 为空间中的任意一点，它关于 xoy 面的对称点是 $P''(x,y,-z)$，$P''(x,y,-z)$ 关于 Π_2 的对称点 $P'(x',y',z')$，则 P',P'' 的中点在 Π_2 上，$\overrightarrow{P'P''}$ 与 Π_2 的法向量共线，于是：

$$\begin{cases} (x'-x):(y'-y):(z'+z)=0:\sin\theta:(-\cos\theta), \\ \dfrac{y'+y}{2}\sin\theta-\dfrac{z'-z}{2}\cos\theta=0 \end{cases}$$

因而得到 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=y\cos 2\theta-z\sin 2\theta, \\ z'=y\sin 2\theta+z\cos 2\theta \end{cases}$ 此变换是绕 x 轴旋转角为 2θ 的旋转。

故分别对于两个相交平面的反射变换的乘积是一个绕定直线的旋转。