

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

中国矿业大学 2020~2021 学年第 1 学期

《高等代数》试卷（B）卷

考试时间：100 分钟 考试方式：闭卷

学院_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

一、举例题（每小题 4 分，共 20 分）

1、举一个 4 次多项式的例子说明多项式的不可约性依赖于系数域。

2、举例说明断语‘若 a 是 $f(x)$ 的一阶导数的单根，则 a 是 $f(x)$ 的 2 重根’是不对的。

3、举例说明对于方阵的行列式以下等式通常是不对的： $|A-B| = |A| - |B|$ 。

4、举例说明与一个线性相关向量组等价的向量组未必线性相关。

5、举两个二阶反对称矩阵 A, B 的例子说明 AB 未必是反对称的。

二 填空题（每小题3分，共30分）

1、用 $x+1$ 除 $f(x) = (x+3)^3 - 2(x+2)^2 - 3$ 的余式是_____。

2、记 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 元的代数余子式为 A_{ij} ，则 $A_{11} + A_{12} - 5A_{14} =$ _____。

3、设 A 为3阶矩阵， $|A| = \frac{1}{2}$ ，则 $|(2A)^{-1} - 5A^*| =$ _____（这里 A^* 是 A 的伴随矩阵）。

4、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的三个解向量，若 A 的秩为2， $\alpha_1 = (1, 0, 3)$ ， $\alpha_2 + 2\alpha_3 = (4, 1, 10)$ ，则 $AX = \beta$ 的通解是_____。

5、设向量 $\alpha = (1, 2, 3)$ ， $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ，矩阵 $A = \alpha^T \beta$ （这里 α^T 表示 α 的转置），求 $A^{2021} =$ _____。

6、设 A 为3阶可逆矩阵，将 A 的第三行乘以3加到第一行上得到矩阵 B ，则 $BA^{-1} =$ _____。

7、求二次多项式 $f(x) =$ _____ 使得 $f(1) = f(2) = -1$ ， $f(-1) = 5$ 。

8、已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为2，试问 $x =$ _____。

9、多项式 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ 的有理根有_____。

10、设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵， $AX = 0$ 仅有零解的充分必要条件是_____。

A. A 的行向量组线性无关； B. A 的列向量组线性无关；

C. A 的行向量组线性相关； D. A 的列向量组线性相关。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

三（15 分）、求 a 的值，使得齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 + (a-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 3(a+1)x_1 + ax_2 + (a+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解。当有非零解时求出其基础解系，并用基础解系表示它的所有解。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

四（10 分）、计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$ 。

五（10 分）、证明多项式 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 无重根。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

六（10分）、证明以下命题：

1. （本小题4分）如果矩阵 A 是可逆且反对称的，那么 A^{-1} 也是反对称的；
2. （本小题6分）不存在奇数阶的可逆反对称矩阵。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

七（5分）、设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2 = A$ ，证明 $r(A) + r(A - E) = n$ （这里 E 表示 n 阶单位阵， $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩）。