

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 团伙作弊。

中国矿业大学 2021-2022 学年第二 学期课程考试试卷

考试科目： 数学分析竞赛

考试时间： 100 分钟

学院		班级		姓名		学号		
题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

考生承诺：

1. 未携带通信工具及其他各类带有拍照、摄像、接收、发送、储存等功能的设备（包括但不限于手机、智能手表、智能眼镜，平板电脑、无线耳机）或关机与其他禁止携带物品、资料等放置监考老师指定位置；
2. 已按要求清理干净整个座位（包括考生邻座）桌面和抽屉里的所有物品（无论是否属于考生本人）；
3. 已知晓并理解《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》等与考试相关规定，承诺在考试中自觉遵守以上规定，服从监考教师的安排，自觉遵守考场纪律，诚信考试，不违规、不作弊。如有违反，自愿按《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》相关条款接受处理。

考生签名： _____

一、（本题满分 15 分）应用柯西收敛准则，证明以下数列收敛

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

二、（本题满分 15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数，并且 $f^{(2)}(x) \leq 0$ ，试证明：
$$\int_a^b f(x) \, dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

三、（本题满分 15 分）证明函数 $f(x) = \sin \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 团伙作弊。

四、（本题满分 15 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域与和函数.

五、（本题满分 15 分）设 $F(x, y)$ 在 $D : \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ 上连续，且偏导数 $F_y(x, y)$ 在 D 上存在，又设存在常数 $m > 0$ ，使

$$F_y(x, y) > m > 0,$$

求证： $F(x, y) = 0$ 在 $a < x < b$ 上存在唯一的连续隐函数 $y = f(x)$.

六、(本题满分 15 分) 设 D 是以 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为顶点的三角形，面积为 A ，做变换

$$\begin{cases} x = x_3 + u(x_1 - x_3) + v(x_2 - x_3) \\ y = y_3 + u(y_1 - y_3) + v(y_2 - y_3) \end{cases} \quad D \rightarrow D' : \begin{cases} u \geq 0, v \geq 0, \\ u + v \leq 1. \end{cases}$$

(1) 证明 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 2A$;

(2) 计算二重积分 $I = \iint_D x \, dx dy$.

下面第七题 (1), (2) 任选其中之一，若都选，以得分高者计入总分.

七、(1) (本题满分 10 分) 设 S 为包含 V 的简单闭曲面， \vec{n} 为 S 的单位外法线向量， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， $\vec{r} = \{x, y, z\}$ ，利用高斯公式证明：

$$\frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} \cos(\vec{n}, \vec{r}) dS = \iiint_V \frac{dx dy dz}{r}.$$

当 S 是半径为 R 的球面时，验证上述公式成立.

七、(2) (本题满分 10 分) 设 S_1, S_2 为欧氏空间 R^n 中的有界闭集，并且 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ，求证： S_1, S_2 之间的距离 $d(S_1, S_2) > 0$.