

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

## 中国矿业大学 2021-2022 学年第 1 学期

### 《数学分析 3》试卷（A）卷

考试时间：120 分钟

考试方式：闭卷

	班级	姓名	学号			
题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

#### 一、填空（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1. 设  $f(x, y)$  为定义在可求面积的有界闭区域  $D$  上的非负连续函数，那么以曲面  $z = f(x, y)$  为顶， $D$  为底的柱体的体积为\_\_\_\_\_。
2. 设  $z = 3 + \arctan(xy)$ ,  $y = 3e^x$ , 那么  $\frac{dz}{dx} =$ \_\_\_\_\_。
3. 设函数  $z = 3x^4 + y^3 - 2x^2y^2$ ，那么它的全微分为\_\_\_\_\_。
4. 设有光滑曲线  $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ , 函数  $f(x, y)$  为定义在  $L$  上的连续函数，则  $\int_L f(x, y)ds =$ \_\_\_\_\_。
5. 求  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{3dx}{1+x^2+\alpha^2} =$ \_\_\_\_\_。

#### 二、选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）。

1. 下列说法正确的是（ ）。

- A 二阶微分具有形式不变性；      B 二元函数的二阶混合偏导数均相等；  
C 二元函数的可微与偏导数存在等价；      D 可微的二元函数一定连续。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

2. 函数  $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - y^3$  在点  $(1, 3)$  关于  $x$  的偏导数为( )。

A 不存在；

B 16；

C 15；

D 1。

3. 对于函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ ，下面说法正确的是 ( )。

A  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点关于  $y$  的偏导数为1；

B  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点连续；

C  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点关于  $x$  的偏导数为0；

D  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点偏导数不存在。

4. 曲线积分  $\int_{AB} (2x + \sin y)dx + (x \cos y)dy$  的值( )，其中  $A(0, 0)$  为起点， $B(1, 3)$  为终点。

A 与积分路径无关；

B 与积分路径有关；

C 3；

D 不存在。

5. 空间的磁场强度为  $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ，则通过曲面  $S$  的磁通量为( )。

A  $\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$ ；

B  $\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dx + R(x, y, z)dy$ ；

C  $\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dx$ ；

D  $\iint_S P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dydz + R(x, y, z)dzdy$ 。

### 三 计算题（共 6 小题，每小题 7 分，共计 42 分）

1. 讨论方程  $F(x, y, z) = xyz^3 + x^2 + y^3 - z = 0$  在原点附近所确定的二元隐函数及其偏导数。

2. 设  $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$  是由方程组  $\begin{cases} z = xf(x+y), \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$  所确定的隐函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有连续的导数和偏导数, 求  $\frac{dz}{dx}$ .

3. 利用 Gauss 公式计算积分：

$$I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

其中  $S$  为锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  介于  $z=0$  及  $z=h$  之间部分的下侧。这里， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $S$  上任意一点处外法线方向的方向余弦。

4. 设函数  $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ ，求  $f$  在点  $P_0(1, 1, 1)$  处沿方向  $l(2, -2, 1)$  的方向导数。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

5. 计算  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ，其中  $L$  为任一不包含原点的闭区域的边界线。

6. 求曲线  $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$  在点  $t = \frac{\pi}{4}$  处的切线和法平面。

#### 四、(10 分)求函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在原点的偏导数并考查函数在原点的可微性。

#### 五、证明题（共 2 小题，每小题 9 分，共计 18 分）。

1. 若二元函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续，那么证明函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

在  $[a, b]$  上连续。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

2. 证明含参变量积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt$  满足方程  $\frac{dI}{dx} + 2xI = 0$ 。