中国矿业大学 2015~2016 学年第 一 学期

《概率论与数理统计 A 》 试卷(A)卷

理学院 2014 级使用 考试时间: 120 分钟 考试方式: 闭卷

题号	1	1 1	=	四	五	六	七	八	总分
分数									
评分人	索新丽								

可能用到的数据:

 $\Phi(2.33) = 0.9901$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\Phi(3.64) = 0.9985$, $t_{0.025}(7) = 2.3646$, $F_{0.05}(1,7) = 5.59$

一、简答题(每题4分,共32分)

1、设
$$P(A) = P(B) = 1/3$$
, $P(A \cup B) = 1/2$,试求 $P(\overline{A} | \overline{B})$.

2、下列函数中,哪一个函数可以作为某一随机变量的分布函数,为什么?

(A)
$$F(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

(A)
$$F(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$
; (B) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$;

(C)
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-x}), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$
; (D) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $\sharp + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

(D)
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
, $\sharp + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

4、设随机变量 X 与 Y 的相互独立, 试求出 a,b,c,d,e,f,g,h 的值.

Y	\mathcal{Y}_1	y_2	y_3	$p_{\cdot j}$
X				
x_1	а	$\frac{1}{8}$	b	e
x_2	$\frac{1}{8}$	С	d	f
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{6}$	g	h	1

5、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列,且 $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$ $(i=1,2,\cdots)$ 试求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于何值?

6、设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,^2\!\!3)$ 的简单随机样本,若随机变量 $X=a(X_1-3X_2)^2+b(2X_3-5X_4)^2$,试求a,b 的值,使统计量 X 服从 $\chi^2(2)$ 分布.

7、设总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{1}{N}, k=1,2,\cdots,N$,其中 N 是未知参数(正整数),现抽出如下的样本值: 1,3,2,3,2,N-1,2,N,试求未知参数 N 的矩估计值.

8、已知因素 *A* 分 5 个水平,对每个水平进行 5 次试验,假定样本都是从同方差的正态总体中抽取的。对其结果进行运算得以下方差分析表的部分数据:

方差来源	离差平方和	自由度	均方离差	F 值
因子 A	$S_A = 110$			
误差				
总和	$S_T = 428$			

试填写方差分析表的空白数据

二、(10分)发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号"•"和"一". 由于通信系统受到干扰,当发出信号"•"时,收报台分别以概率 0.8 及 0.2 收到信息"•"及"一";又当发出信号"一"时,收报台分别以概率 0.9 及 0.1 收到信号"一"及"•". 求当收报台收到"•"时,发报台确系发出信号"•"的概率.

三、(10 分) 已知二维随机变量(
$$X,Y$$
)的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x+y} & , x < 0, y < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-(x+y)} & , x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & , 其它. \end{cases}$

- (1) 求X,Y的边缘概率密度 $f_{Y}(x)$ 、 $f_{Y}(y)$;
- (2) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立.

四、(10分)某学生宿舍每一层楼住 100 名学生,任一时刻每名学生使用水龙头用水的概率为 5%。试用中心极限定理计算,每一层楼应至少安装多少个水龙头才能使因缺少水龙头而造成学生排队用水的概率小于 1%.

五、(10 分) 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布, x_1,x_2,\cdots,x_n 是总体 X 的样本观测值,

- (1) 求参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) 判定 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量是否是无偏估计.

六、(10 分) 假设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, x_1,x_2,\cdots,x_{10} 是来自 X 的 10 个观察 值,要在 $\alpha=0.05$ 的水平下检验 $H_0:\mu=\mu_0=0,H_1:\mu\neq0$,取拒绝域为 $R=\{\left|\overline{X}\right|\geq c\}$

- (1) 求c = ?;
- (2) 若已知 $\bar{x}=1$,是否可以据此样本推断 $\mu=0$ ($\alpha=0.05$);
- (3) 如果以 $R = \{\left|\overline{X}\right| \geq 1.15\}$ 作为该检验 $H_0: \mu = 0$ 的拒绝域,试求检验的显著水平 α .

七、(10分)测得某种物质在不同温度下吸附另一种物质的重量如下表所示:

<i>x</i> (°C)	1.5	1.8	2.4	3.0	3.5	3.9	4.4	4.8	5.0
y (mg)	4.8	5.7	7.0	8.3	10.9	12.4	13.1	13.6	15.3

设吸附量y与温度x之间具有线性关系:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$
, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

并算得
$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 30.3$$
, $\sum_{i=1}^{9} y_i = 91.1$, $L_{xx} = 13.1$, $L_{yy} = 114.92$, $L_{xy} = 38.353$

- (1) 试求经验回归方程 $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$;
- (2) 对回归效果的显著性进行检验(显著性水平 $\alpha = 0.05$).

八、(8分) 设 η 为取值于自然数的随机变量,证明下面的两式等价

- (1) $P{\eta > m+n \mid \eta > m} = P{\eta > n}, \forall m, n \ge 1$;
- (2) $P{\eta = m+n \mid \eta > m} = P{\eta = n}, \forall m, n \ge 1.$