

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

## 中国矿业大学 2020-2021 学年第 2 学期

### 《数学分析 2》试卷（A）卷

考试时间：120 分钟

考试方式：闭 卷

学院	班级	姓名	学号		
题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

#### 一、选择题（共 5 小题，每题 3 分，共计 15 分）

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{n}\right)$  ( )。

(A) 必收敛； (B) 必发散； (C) 必条件收敛； (D) 敛散性不定。

2、函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx - \cos 2nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上 ( )。

(A) 一致收敛； (B) 不一致收敛； (C) 条件收敛； (D) 发散。

3、数列极限  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt[n]{x}} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx =$  ( )。

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{12} \pi$ ； (B)  $\frac{\pi}{12}$ ； (C)  $\frac{\pi}{3}$ ； (D)  $\frac{\pi}{2}$ 。

4、在  $[a, +\infty)$  上恒有  $f(x) \geq g(x)$ ，则 ( )。

(A) 若  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛，则  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  也收敛；

(B) 若  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散，则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也发散；

(C)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  和  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  同敛散；

(D) 无法判断。

5、下列选项正确的是 ( )。

- (A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛；
- (B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛；
- (C) 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散，则  $u_n \geq \frac{1}{n}$ ；
- (D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，且  $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也收敛。

二、计算题（每题 5 分共 40 分）

1. 求不定积分  $\int x^2 \cos x dx$ 。

2. 求不定积分  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$ 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

3. 求定积分  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ 。

4. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$ 。

5. 求摆线  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$  一拱的弧长。

6. 求椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围的体积。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

7. 求反常积分  $\int_0^1 \ln x dx$ 。

8. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+1)}$  的和。

三、计算题（共 3 小题，共计 26 分）

1、（6 分）判断反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$  的收敛性。

2、（10 分）求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的收敛域及其和函数。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

3、(10 分) 讨论级数  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n}{n^p} (p > 0, r > 0)$  的收敛性 (包括条件收敛, 绝对收敛)。

四、证明题 (共 3 小题, 共计 19 分)

1、(7 分) 设  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ . 求  $f$  的 *Fourier* 级数展开式.

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

2、(7 分) 证明函数列  $\{f_n\}$  在区间  $D$  上一致收敛于  $f$  的充要条件是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

3、(5 分) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x+n)^n}{n^{2+n}}$  在  $[0,1]$  上一致收敛.