第一章 绪论

一、考核知识点：

误差的来源，绝对误差、绝对误差限、相对误差，相对误差限，有效数字，准确数位，误差传播。

二、考核要求：

了解绝对误差（限）、相对误差（限）、有效数字的概念，以及它们之间的关系。已知其中之一会求其余两个。

1．知道误差的主要来源，误差传播。

2．了解绝对误差、绝对误差限、相对误差，相对误差限、掌握其判别方法。

3．掌握有效数字，准确数位的求法。

设$\tilde{x}$是精确值x（未知）的一个近似值，定义：

$$e(\tilde{x}) = x - \tilde{x}$$

为$\tilde{x}$的（绝对）误差。绝对误差也是未知的，但可以对其大小估计，如果

$$|e(\tilde{x})| \le \varepsilon(\tilde{x})$$

则称$\varepsilon(\tilde{x})$为$\tilde{x}$的（绝对）误差限。如果考虑x本身的大小，则定义

$$e_r(\tilde{x}) = \frac{e(\tilde{x})}{x} = \frac{x-\tilde{x}}{x} \approx \frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

为$\tilde{x}$的相对误差。由于x未知，就把上式约等于号改为等于号作为相对误差的定义。如果

$$|e_r(\tilde{x})| \le \varepsilon_r(\tilde{x})$$

则称$\varepsilon_r(\tilde{x})$为$\tilde{x}$的一个相对误差限。如果知道绝对误差限，则有

$$\varepsilon_r(\tilde{x}) = \frac{\varepsilon(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$$

计算机常用规格化的浮点形式表示实数。

$$x = \pm 0.a_1a_2\cdots\times 10^m \quad（a_1 \ne 0）$$

把$\tilde{x}$写为规格化浮点形式

$$\tilde{x} = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

如果$|x-\tilde{x}|\le\frac{1}{2}\times10^{-t}\times10^{m}$且$t$是满足此不等式的最大正整数,则称$\tilde{x}$具有$t$位有效数字。

[例] 近似值45.0的误差限为（　　）。

A. 0.5　　B. 0.05　　C. 0.005　　D.　0.0005.

解　因 $45.0=0.450\times10^{2}$，它为具有3位有效数字的近似数，

其误差限为 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}\times10^{2}=\frac{1}{2}\times10^{-1}$。

所以 答案为B

[例] 设$\tilde{x}=2.32012$，$|x-\tilde{x}|\le0.6\times10^{-4}$，问$\tilde{x}$有几位有效数字？相对误差有多大？

相对误差限为　$\varepsilon_r(\tilde{x})=\frac{\varepsilon(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}\le\frac{0.6\times10^{-4}}{2}=0.3\times10^{-4}$

改写成规格化浮点形式

$\tilde{x}=0.232012\times10^{1}$，$|x-\tilde{x}|\le0.6\times10^{-4}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}\times10^{1}$

知$\tilde{x}$具有4位有效数字。

[例] 已知 $x^{*}=\pi=3.1415926\cdots\cdots$,　求近似值$x=3.142$的误差限，有效数字。

解　由$|\Delta x|=|3.142-3.1415926\cdots\cdots|<0.00041$, 误差限为$\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}$，由定义知$x$是具有4位有效数字的近似值，准确到$10^{-3}$位的近似数。

[例] 已知近似数$a=1.2864,b=0.635$, 求$b^2,a-b$的误差限和准确数位。

解　因$\varepsilon(a)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$，$\varepsilon(b)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$|\Delta(bb)|=|b\Delta b+b\Delta b|\le2|b|\Delta(b)<2\times0.635\times\frac{1}{2}\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-2}$

所以 $\varepsilon(b^2)=\frac{1}{2}\times10^{-2}$, b^2准确到 10^{-2}位。

$|\Delta(a-b)|=|\Delta a-\Delta b|\le\varepsilon(a)+\varepsilon(b)=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-2}$,

$a-b$准确到10^{-2}位。

[例] 已知有效数字位数,求相对误差限,反之也可求。(见P4定理1)

二、了解数值稳定的概念。

如果某方法(公式)在计算过程中有小的舍入误差，而这个误差对以后的影响不会放大，就称该方法是数值稳定的。如果方法A计算的结果比方法B产生的舍入误差小,也说方法A比方法B数值稳定好。数值稳定性指的是方法，与问题本身无关，是计算数学区分于理论数学的重要标志。在数值计算中要尽量遵循P5~7的若干原则。

[例3](P11第6题)

求方程根的两个根$x^2-56x+1=0$ ($\sqrt{783}=27.982$)

方法一：$x_1=28+\sqrt{783}=28+27.982=55.982$(具有5位有效数字)

$x_2=28-\sqrt{783}=28-27.982=0.018$(具有2位有效数字)

方法二：$x_1=28+\sqrt{783}=28+27.982=55.982$(具有5位有效数字)

$$x_2=\frac{1}{28+\sqrt{783}}=0.017863$$(具有5位有效数字)

显然方法二比方法一数值稳定好。实际上在五位尾数的机器上这是最好的结果了。

第二章 非线性方程（组）求解

一、考核知识点：

区间二分法，一般迭代法,牛顿法，收敛性。

二、考核要求：

1．熟练掌握用区间二分法求方程近似根的方法。
2．掌握用一般迭代法求方程的方法近似根的方法及其收敛性。
3．熟练掌握用牛顿法求方程近似根的方法及其收敛性。

迭代法的基本概念和主要结果

主要结论：

压缩映照原理(P17 定理 1)

误差估计(P17 定理 2)

收敛阶

以及局部收敛的阶(P20 定理 3)

[例 1]证明 $x=e^{-x}$ 在 $[0.5\quad \ln 2]$ 中有唯一的实根，且迭代序列 $x_{k+1}=e^{-x_k}$ 对任意初值 $x_0\in[0.5\quad \ln 2]$ 都收敛于这个实根。又问要使误差不超过 10^{-6} 至少要迭代多少步？(提示：根据定理 1 和定理 2 做，至少迭代 25 步)

[例 2]P35 第 7 题（提示：仿 P20 例 4）

[例 3]确定常数 p,q,r 使得迭代法

$$x_{k+1}=px_k+q\frac{a}{x_k^2}+r\frac{a^2}{x_k^5}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

局部收敛到 $x^*=\sqrt[3]{a}(a>0)$，并有尽可能高的收敛阶，这时阶数是多少？

Newton 迭代法

主要思想是非线性问题线性化

掌握其迭代格式和变形，知道收敛阶数

[例 4]P36 第 15 题(提示：令 $f(x)=(x-x^*)^m g(x), g(x^*)\neq 0$)

[例 5] P35 第 10 题

[例 6] 证明计算 $\sqrt{a}(a>0)$ 的 Newton 迭代公式为：

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}), n=0,1,\cdots$$

并用它求 $\sqrt{2}$ 的近似值（求出 x_1 即可）

解 1) 因计算 $\sqrt{a}$ 等于求 $x^2-a=0$ 正根，$f(x)=x^2-a$，$f'(x)=2x$

代入切 Newton 迭代公式得

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}) \qquad n=0,1,\cdots$$

2) 设 $f(x)=x^2-2$，因 $f(1)=1^2-2=-1<0,\quad f(1.5)=1.5^2-2>0$

所以 $x^*=\sqrt{2}\in[1,1.5]$

在 $[1,1.5]$ 上 $f'(x)=2x>0 \qquad f''(x)=2>0$

由 $f(x_0)f''(x)\geq 0$，选 $x_0=1.5$

用上面导出的迭代公式计算得 $x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{2}{x_0})=\frac{17}{12}\approx 1.4167$

第三章 线性方程组求解

一、范数理论

◆常用范数：x是向量$\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty=?$，$A$是方阵$\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F=?$

二、矩阵分解（方程组的直接解法）

◆LU 分解 A=LU （紧凑格式求解）

◆正定矩阵的 Cholesky 分解

$A=LL^T=R^TR$（L为下三角，R为上三角，主对角元全为正）

◆三对角矩阵的 LU 分解（追赶法）

三、迭代法

重要结论：

（1）$x_k=Gx_{k-1}+f$收敛的充要条件$\rho(G)<1$，且谱半径越小收敛速度越快

（2）J 迭代，G-S 迭代，SOR 迭代的迭代矩阵是什么？

（3）A严格对角占优，则 J 迭代，G-S 迭代，SOR 迭代$(0<\omega<1)$收敛

A对称正定，则 SOR 迭代收敛$(0<\omega<2)$（包括了 G-S 迭代）

（4）误差估计，P61 定理 7

[例 1] P60 例 7； P69 第 15 题（1）

[例 2]分别写出用雅可比（Jacobi）迭代，高斯—赛德尔迭代求解方程组：

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&1&-1\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

的迭代公式.并判断用高斯—赛德尔迭代法求解该方程组的收敛性。

解：(1)Jacibo 迭代公式为:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 2x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2 + 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代公式为:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 2x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2 + 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

(2)解:设矩阵 A 可分解为三个矩阵的和,即 $A = D - L - U$,其中

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以, Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵

$$B_G = (D - L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & -2 & -1 \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ & \lambda + 2 & 1 \\ & & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2)^2 = 0$$

可求得 $\lambda = 0, \lambda = -2$　　　所以, $\rho(B_G) = 2 > 1$

所以,用 Gauss-Seidel 迭代法求解该方程组是发散的.

[例 2] P69 第 17 题; P70 第 18 题 (2)

求得 J 迭代的迭代矩阵的特征值为 $\lambda = 0, \frac{2}{a}\sqrt{-1}, -\frac{2}{a}\sqrt{-1}$

收敛的充要条件 $|\lambda| < 1$,得 $|a| > 2$

[例 3] 线性方程组 $Ax=b$，$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$，试确定参数$\omega$的范围，使下面的迭代法 $x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega(Ax^{(k)}-b)$，收敛，并求使收敛速度最快$\omega$的值

【解】（I）迭代公式收敛$\Leftrightarrow |\mu_{1,2}|<1 \Leftrightarrow 0<\omega<\frac{1}{2}$

（II）当 $\omega=\frac{2}{5}$ 时，$\rho(M)$取得极小值$\frac{3}{5}$，此时收敛速度最快。

四、条件数

$$cond_p(A)=\|A\|_p\|A^{-1}\|_p$$

重要结论：

P55 中间的估计式；　　P56 定理 5

$cond(A)\geq 1$

$cond(cA)=cond(A)$（说明：不可能通过把矩阵乘上一个数来改变条件数）

[例 4] P69 第 13 题；P69 第 14 题

第四章 插值法

一、Lagrange 和 Newton 插值多项式。

◆Lagrange 插值多项式：$P_n(x)=L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)$

其中 $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$（称为 L-基函数，它是 n 次多项式）

◆Newton 插值多项式：

$$P_n(x)=N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 为 k 阶差商，定义及性质见教材。

◆余项（即截断误差)：

L-的：$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ (P75 定理 2)

两个简单情况（证明一下）

线性插值：$|R_1(x)|\leq\frac{1}{8}M_2h^2$（$h=x_1-x_0,M_2=\max|f''(x)|,x\in[x_0,x_1]$）

抛物插值：$|R_2(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{27}M_3h^3$

（$h=x_1-x_0=x_2-x_1,M_3=\max|f'''(x)|,x\in[x_0,x_2]$）

[例 1]P100 第 4 题

[解] $f(x)-P_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2),f^{(4)}(x)=4!$

$P_3(x)=2x^3+x^2-2x$

[例 2]P100 第 7 题。提示：考虑过 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的线性插值函数

$P_1(x)=0$

二、Hermite 插值和分段低次插值。

[例 3]（P101 第 15 题）

[例 4] (P211 第七题第二小题)

[例 5] 教材上的例题

三、收敛性

◆高次插值多项式不能保证收敛，了解 Runge 现象；

◆分段低次插值都是收敛的，只要 f(x)连续；

四、三次样条插值

➢ 三次样条定义

➢ 三次样条函数的求解

第五章 曲线拟合和函数逼近

一、线性最小二乘拟合

◆问题：设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是 $C[a,b]$ 上的 n 个线性无关的函数（称为基函数），Φ 是它们线性组合的全体。即

$$\Phi = span\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\} = \{a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\}$$

$\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1}^m$ 是给定的采样点 $(n << m)$。在 Φ 中求一函数

$$S^*(x) = a_1^*\varphi_1(x)+a_2^*\varphi_2(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$$

满足

$$\sum_{k=1}^m [S^*(x_k)-f(x_k)]^2 = \min_{S(x)\in\Phi}\sum_{k=1}^m [S(x_k)-f(x_k)]^2$$

◆结论：记 $(f,g)=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m}} f(x_k)g(x_k)$，称方程组

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1,f) \\ (\varphi_2,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{bmatrix}$$

为法方程组。系数矩阵记为 G 称为 Gram 矩阵，它是对称半正定的。

如记

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_2(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}_{m\times n}, F = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

法方程组又可改写为

$$(A^T A)a = A^T F$$

（由前面的条件数理论知，这样的方程一般都是病态的）

（1）法方程组必有解

（2）最小二乘问题的解与法方程组的解等价

（3）平方误差

$$\|\delta\|_2^2 \equiv \sum_{k=1}^{m}[S^*(x_k)-f(x_k)]^2=(f,f)-\sum_{k=1}^{m}a_k^*(\varphi_k,f)$$

（$\|\delta\|_2=\sqrt{\|\delta\|_2^2}$ 称为均方误差）

[例 1]根据下面数据求二次最小二乘拟合多项式，并计算平方误差

x_i	−2	-1	0	1	2
y_i	0	−2	−1	1	2

设 $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2,\varphi_0=1,\varphi_1=x,\varphi_2=x^2$ 直接计算法方程组得

$$\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 7\\ 7\end{bmatrix}$$

解得 $a_0=-1,a_1=\frac{7}{10},a_2=\frac{1}{2}$， $P_2(x)=-1+\frac{7}{10}x+\frac{1}{2}x^2$

[例 2] 求下列方程组的最小二乘解

$$\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 10\\ 10 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 7\end{bmatrix}$$

二、函数逼近

最佳平方逼近（书上的例题和课后作业的练习题）

[例 3] P118 例 6/ P118 例 7/ P121 例 8

第六章 数值积分与微分

一、积分

◆插值型求积公式：$I=\int_a^b f(x)dx \approx I_n=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$（n+1 个节点）

其中 $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$，$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$（L-基函数，它是 n 次多项式）

（节点定了，系数就唯一确定了）

◆插值型求积公式的代数精度 m：$n \le m \le 2n+1$

◆Newton-Ctoes 公式：节点是等分的插值型公式。

$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$，$C_k^{(n)}$ 见 P135 表，重点是三个公式

梯形公式(n=1) $T=?$　　　　余项=?

Simpson 公式(n=2) $S=?$　　　　余项=?

Cotes 公式(n=3) $C=?$　　　　余项=?

◆Gauss 求积公式：代数精度达到最高的(2n+1)的插值型公式

$\Leftrightarrow$ 节点是 n+1 次正交多项式的 n+1 个互异的实根。

◆复化公式

复化梯形公式 $T_n=?$　　　　余项=?

复公 Simpson 公式 $S_n=?$　　　　余项=?

(当然其它公式也可作复化，如 Gauss 公式)

◆T_{4n}, S_{2n}, C_n 的关系

(1) 它们的节点都一样，但余项分别为($h=\frac{b-a}{4n}$)：$O(h^2), O(h^4), O(h^6)$

(2) $S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$　　$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$

◆Romberg 公式： $R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$

◆收敛性和稳定性

N-C 公式收敛性没有保证，$n \le 7$ 时稳定，否则不稳定

Gauss 公式是收敛的和稳定的

低阶复化公式是收敛的和稳定的

[例 1] P1571 第 3 题

[例 2] 证明梯形公式的余项 $R_T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)\ (h = b-a)$

提示 $R_T = \int_a^b \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)(x-b)dx$ 再用积分第二中值定理

[例 3] P211 第四题

[例 4]证明 n+1 个节点插值型求积公式的代数精度最高为 2n+1

提示：反证假设>2n+1。则对 2n+2 次多项式精确成立

令 $\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，公式对 $\pi^2(x)$ 精确成立，看看能否推出矛盾。

[例 5] 求以 $x_1 = a_i \quad (i = 1,2,3,4)$ 为节点的内插求积公式。

第七章 常微分方程解法

◆什么是显式的？什么是隐式的？二者各有什么特点？

什么叫预测-校正系统？有什么特点？什么是单步法？什么是线性多步法？

◆欧拉公式，后退欧拉公式， 改进欧拉公式

◆局部截断误差的定义（P162）：

◆重要结论：

如果局部截断误差 $T=O(h^{p+1})$，则（整体）截断误差 $R=O(h^{p})$，此时称方法是 p 阶的。因此，为构造高精度的方法只需让局部截断误差的阶尽可能高即可。

◆R-K 算法（P164）

思想是什么？如果 $k_1,k_2,\cdots$ 表示的是一个近似斜率，那么 a_m 与 $b_{m1},b_{m2},\cdots,b_{m,m-1}$ 应满足什么关系？（应是 $a_m=\sum_{i=1}^{m-1}b_{mi}$，你算算看。）

◆一阶方程组和高阶方程

如何把前面的方法用于方程组？如何把高阶方程化为一阶方程组？

◆收敛性：都是收敛的

◆绝对稳定性和绝对稳定区间

为什么要讨论绝对稳定性？

绝对稳定区间是怎样定义的？

绝对稳定区间和步长的关系？

如何确定绝对稳定区间？

[例 1] 求 Euler 公式，后退 Euler 公式，梯形公式，改进 Euler 公式的局部截断误差，它们各是多少阶的方法。

[例 2] 试证明线性二步法：

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h[f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$

的局部截断误差与 h^3 同阶，并求出截断误差的首项。

证明：分别将 y_{n-1}， y'_{n-1}， y'_{n+1} 在 x_n 处用 Taylor 公式展开得：

$$y_{n-1} = y_n - y'_n h + \frac{y''_n}{2!}h^2 - \frac{y'''_n}{3!}h^3 + o(h^3)$$

$$y'_{n-1} = y'_n - y''_n h + \frac{y'''_n}{2!}h^2 + o(h^2)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + y''_n h + \frac{y'''_n}{2!}h^2 + o(h^2)$$

将以上三式代入线性二步法中，得：

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + \frac{y''_n}{2!}h^2 + \frac{5y'''_n}{6}h^3 + o(h^3)$$

又方程的真解的 Taylor 展式为：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + o(h^3)$$

所以，局部截断误差为：

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{2}{3}y'''_n h^3 + o(h^3)$$

所以，该方法是二阶的，局部截断误差首项为：$-\frac{2}{3}y'''_n h^3$

[例 3] 求下面 R-K 公式的稳定区间

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h[k_1 + 3k_2] \end{cases}$$

提示：$\bar{h} = \lambda h$， $\varepsilon_{n+1} = (\frac{1}{2}\bar{h}^2 + \bar{h} + 1)\varepsilon_n$

$\left|\frac{1}{2}\bar{h}^2 + \bar{h} + 1\right| < 1$，得绝对稳定区间为 $\bar{h} \in (-2,0)$。

[例 4] 直接验证（不用现有结论）

用 Euler 公式求解 $y' = \lambda y, y(0) = y_0$ 是收敛的。（精确解为 $y = y_0 e^{\lambda x}$）

[证] Euler 公式：$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = (1+\lambda h) y_{n-1}$

递推得：$y_n = y_0 (1+\lambda h)^n$，设 $x = x_n = nh$ 固定

$$y_n = y_0 \left[(1+\lambda h)^{\frac{1}{\lambda h}} \right]^{\lambda x} \to y_0 e^{\lambda x}$$（$h \to 0$，当然 $n \to \infty$）

最后祝同学们考试顺利，学业进步！

如果在后继学习中遇到计算的问题，欢迎大家来作客.