第三章离散信道及其容量

第一、二节

陈兴同

中国矿业大学 数学学院

2021 年 8 月

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

引言

是载有消息的信号从一端传输到另一端的通道。一些物理信道包括空间形式信道，如电缆、光纤、电波等介质，它们有具体的传输介质，可以将信号从甲地传到乙地；也包括时间形式的信道如磁带、光盘、硬盘、纸张等介质，它们可以将信号从某个时刻保存到下一个时刻，可以理解成一种时间上的传输通道。在信息论中我们将不考虑具体的信道，也不管它们使用的是什么介质，只考虑信道输入是什么、输出是什么，以及描述信道特性的输入与输出之间的对应关系，主要研究学习信道传输特性以及信道编码可靠传输问题。

逻辑信道

信号在物理信道中传输与在时间信道中存储都遵守一定的物理规律，通信工程师将研究这种规律，以便能有效地提高通信系统及存储系统的质量与效率。信息论将对这些具体的物理信道进行抽象与概括，建立一种逻辑信道模型，在这种信道模型上研究通信传输的规律，包括信道容量、可靠性编码等，以便工程师用来指导通信系统的设计与建造。

一般凡是具有字符串输入与输出的系统都可以看成一个信道。信息论中只关心输入与输出信号是什么，以及输入与输出信号之间的关系，另外信号传输时也会受到噪声干扰，信道模型如图 3-1。

图 3-1

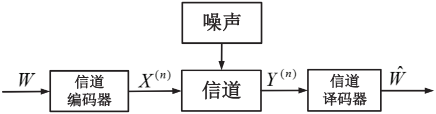


Figure: 图 3-1 信道传输模型

按信号是否连续

在信息论中，通常按照信道的输入与输出信号及其之间的关系来将信道分类。

（1） 输入或输出信号时间与幅度上是否离散或连续？
离散信道：输入输出信号在时间与幅度上都是离散的数字信号，也称为数字信道。它的输入与输出可用离散随机变量序列表示。
模拟信道：输入输出信号在时间与幅度上都是连续信号，也称为波形信道。它的输入与输出可用连续随机过程表示。

按输入输出信号之间依赖性

在信息论中，通常按照信道的输入与输出信号及其之间的关系来将信道分类。

（2） 输入输出信号之间依赖性如何？
确定性信道：输入与输出之间有明确的对应关系由输入可判定输出或由输出可判定输入，这是一种理想的没有任何随机噪声干扰的信道。
随机信道：输入与输出信号之间受随机噪声的干扰没有明确的对应关系即对应关系是随机的，但具有一定的统计特征。
离散无记忆信道：某时刻的输出信号仅依赖于这个时刻的输入信号，与之前的输入输出信号无关。
离散有记忆信道：某时刻的输出信号不仅依赖于这个时刻的输入信号，而且还依赖这个时刻之前的输入输出信号。离散有记忆信道比离散无记忆信道要复杂。

输入字符集:

离散信道是指输入与输出信号在时间与幅度上都为离散数值的信道，称为 **离散信道或数字信道**。
由于信息论中只将信道看成是具有输入与输出的一个逻辑系统，所以信道的数学模型包括三部分：输入、输出、表示传输特性的条件概率。
（1）信道输入为 n 长字符串，可以用随机向量 $X^{(n)} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 表示，对应的输入字符串为

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{X}^n,$$

其中 $\mathcal{X}$ 为输入字符集，总设它是一个有限集 $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$。

输出字符集：

（2）信道输出也为 n 长字符串，可以用随机向量 $Y^{(n)} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$，对应的输出字符串为

$$y^{(n)} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathcal{Y}^n,$$

其中 $\mathcal{Y}$ 为输出字符集，总设它是一个有限集 $\mathcal{Y} = \{b_1, b_2, \cdots, b_M\}$。

传输概率：

（3）传输特性：当输入为字符串 $x^{(n)}$ 时，输出为 $y^{(n)}$ 的条件概率记为

$$P(Y^{(n)}=y^{(n)}|X^{(n)}=x^{(n)})=p(y^{(n)}|x^{(n)}).$$

对 $\mathcal{X}^n$ 中每个输入 $x^{(n)}$ 及 $\mathcal{Y}^n$ 中每个输出 $y^{(n)}$ 都有一个条件概率 $p(y^{(n)}|x^{(n)})$，总共有 N^nM^n 个，它描述了信道传输的统计特征，可以完全刻画信道的传输特性，因此配合信道的输入输出字符集将信道记成 $\{\mathcal{X}^n, p(y^{(n)}|x^{(n)}), \mathcal{Y}^n\}$。

统计特点：

随机信道又可以分为无记忆与有记忆信道。这种记忆性体现在输出信号对之前时刻输入和输出信号的依赖关系上。**离散无记忆信道**是指给定时刻 i 的输出 y_i 仅依赖于当前时刻 i 的输入 x_i 与之前时刻的输入、输出无关，即 n 长输入与输出之间具有如下统计特征

$$p(y^{(n)}|x^{(n)}) = p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)\cdots p(y_n|x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i), \forall x^{(n)} \in \mathcal{X}^n, \forall y^{(n)} \in \mathcal{Y}^n,$$

因此这种信道传输特性可以用每个时刻的单字符条件概率 $p(y_i|x_i)$ 来描述。

平稳离散无记忆信道（恒参信道）：

如果离散无记忆信道在 i 时刻的条件概率 $p(y_i|x_i)$ 不随时间变化，即对任何自然数 l 有

$$p(y_i = b_k|x_i = a_j) = p(y_{i+l} = b_k|x_{i+l} = a_j),$$

则称具有这种统计特征的离散无记忆信道为**平稳的离散无记忆信道（记成 DMC）**也称为**恒参信道**。
今后所说的离散无记忆信道均要求具有平稳性，它的输入输出之间的条件概率不随时间变化而变化，可采用单字符条件概率来描述。

信道表示：传输矩阵

记条件概率

$$p_{j|i} = p(Y = b_j|X = a_i) = p(b_j|a_i), i = 1, 2, \cdots, N, j = 1, 2, \cdots, M,$$

则可以构造 $N \times M$ 矩阵

$$Q = (p_{j|i}) = \begin{pmatrix} p_{1|1} & p_{2|1} & \cdots & p_{M|1} \\ p_{1|2} & p_{2|2} & \cdots & p_{M|2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1|N} & p_{2|N} & \cdots & p_{M|N} \end{pmatrix}_{N\times M},$$

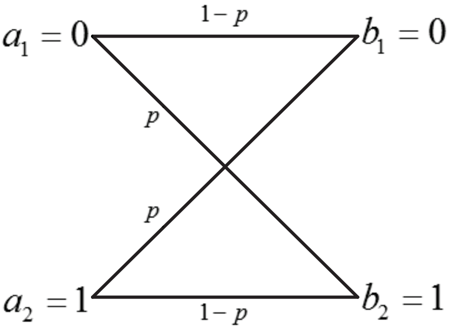
称为离散无记忆信道的**信道矩阵**或**传输矩阵**，这样信道模型也记为 $\{\mathcal{X}, Q(y|x), \mathcal{Y}\}$。

绘制传输图：

另外也可以用**信道传输图**来描述信道。在信道图中，若条件概率 $p_{j|i} > 0$，则就画一条从字符 a_i 到 b_j 的直线，并且用 $p_{j|i}$ 作为权值。如图 3-2 是两个信道的传输图，对应的信道矩阵分别为

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} 1-p-q & q & p \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix}.$$

传输图 3-2a：



传输图 3-2b：