数值分析 · 课程作业 · 第六章

姓名：潘林越　班级：数学与应用数学 2020-2 班　学号：15194694

2. 对于中矩形公式 $I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$, 当 $f(x)=1$ 时, $LHS = \int_a^b 1\ \mathrm{d}x = b-a$, $RHS = (b-a)\times 1 = b-a$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x$ 时, $LHS = \int_a^b x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, $RHS = (b-a)\times\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^2$ 时, $LHS = \int_a^b x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$, $RHS = (b-a)\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 此时 $LHS \neq RHS$, 即公式对 x^2 不精确成立. 可知, 矩形公式的代数精度为一次.

对于辛普生公式 $S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$, 当 $f(x)=1$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b-a, S = b-a$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x$ 时, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2), S = \frac{b-a}{6}\left[a+2(a+b)+b\right] = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^2$ 时, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3-a^3), S = \frac{b-a}{6}\left[a^2+(a+b)^2+b^2\right] = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^3$ 时, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}(b^4-a^4), S = \frac{b-a}{6}\left[a^3+\frac{1}{2}(a+b)^3+b^3\right] = \frac{1}{4}(b^4-a^4)$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^4$ 时, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}(b^5-a^5), S = \frac{b-a}{6}\left[a^4+\frac{1}{4}(a+b)^4+b^4\right]$, 此时 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \neq S$, 即公式对 x^4 不精确成立. 可知, 辛普生公式的代数精度为三次.

3. (1) $\int_{-h}^h f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$. 将 $f(x)=1,x,x^2$ 分别代入求积公式使之精确成立, 于是 $A_{-1}+A_0+A_1=2h$, $-A_{-1}h+A_1h=0$, $A_{-1}h^2+A_1h^2=\frac{2}{3}h^3$, 解得 $A_{-1}=\frac{1}{3}h, A_0=\frac{4}{3}h, A_1=\frac{1}{3}h$. 当 $f(x)=x^3$ 时, $LHS = \int_{-h}^h x^3\ \mathrm{d}x = 0$, $RHS = 0$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^4$ 时, $LHS = \int_{-h}^h x^4\ \mathrm{d}x = \frac{2}{5}h^5$, $RHS = \frac{2}{3}h^5$, 此时 $LHS \neq RHS$, 即公式对 x^4 不精确成立. 可知, 该求积公式的代数精度为三次.

(4) $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+A(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$. 当 $f(x)=1$ 时, $LHS = \int_a^b 1\ \mathrm{d}x = b-a$, $RHS = b-a$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x$ 时, $LHS = \int_a^b x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, $RHS = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 此时公式精确成立. 当

$f(x)=x^2$ 时, $LHS=\int_a^b x^2\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$, $RHS=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)+A(b-a)^2(2a-2b)$. 使此时公式精确成立, 则有 $A=\frac{1}{12}$. 当 $f(x)=x^3$ 时, $LHS=\int_a^b x^3\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$, $RHS=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x^4$ 时, $LHS=\int_a^b x^4\ \mathrm{d}x=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$, $RHS=\frac{1}{6}(b-a)(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3)$, 此时 $LHS\neq RHS$, 即公式对 x^4 不精确成立. 可知, 该求积公式的代数精度为三次.

4. 此时 $a=0$, $b=1$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 依据辛普生公式 $S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$, 有

$$I\approx\frac{1}{6}(\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^{-1}+4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})\approx 0.63233.$$

其误差约为

$$|R_S|=\left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)\right|\leq\frac{1}{180\times 4^2}=\frac{1}{2880}.$$

5. 取 $n=4$, $h=0.2$, 应用复化梯形公式得

$$T_4=\frac{0.2}{2}[f(1.8)+f(2.6)+2f(2.0)+2f(2.4)+2f(2.2)]=5.058337.$$

取 $n=2$, $h=0.4$, 应用复化辛普生公式得

$$S_2=\frac{0.4}{6}[f(1.8)+f(2.6)+4f(2.0)+4f(2.4)+2f(2.2)]=5.033002.$$

应用柯特斯公式得

$$C=\frac{0.8}{90}[7f(1.8)+32f(2.0)+12f(2.2)+32f(2.4)+7f(2.6)]=5.032922.$$

6. (1) $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$. 取 $n=8$, $h=\frac{1}{8}$, 应用复化梯形法，得

$$T_8=\frac{1}{8\times 2}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{i=1}^{7}f(\frac{i}{8})\right]=0.111402.$$

取 $n=4,\ h=\dfrac{1}{4}$, 应用复化辛普生法，得

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+f(1)+4\left[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})\right]\right. \\
&\quad \left.+2\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4})\right]\right\} \\
&= 0.111572.
\end{aligned}
$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$. 取 $n=4,\ h=2$, 应用复化梯形法，得

$$T_4=\frac{2}{2}\{f(1)+f(9)+2[f(3)+f(5)+f(7)]\}=17.22774.$$

取 $n=2,\ h=4$, 应用复化辛普生法，得

$$S_2=\frac{4}{6}[f(1)+f(9)+4f(3)+4f(7)+2f(5)]=17.32223.$$

8. (1) 当 $f(x)=1$ 时, $LHS=\displaystyle\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=b-a,\ RHS=b-a$, 此时公式精确成立. 当 $f(x)=x$ 时, $LHS=\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2),\ RHS=(b-a)a$, 此时 $LHS\neq RHS$, 即公式对 x^2 不精确成立. 可知, 该求积公式的代数精度为零次. 其余项为

$$
\begin{aligned}
R[f] &= Kf'(\xi) \\
&= \frac{1}{1!}\left[\frac{1}{2}(b^2-a^2)-(b-a)a\right]f'(\xi) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)^2f'(\xi),\quad \xi\in(a,b).
\end{aligned}
$$