2021-2022-2-高等代数(2)-试题(A)-参考解析 by Ply

一、举例，每题 4 分

1. $B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，于是存在可逆阵 $C=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 使得 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，于是 A,B 合同. 但是 A,B 特征值分别为 $1,1,1$ 和 $1,1,2$，特征值不相同所以不相似.
2. $A=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.
3. $V_1=\{(0,b)\mid b\in R\},\ V_2=\{(b,b)\mid b\in R\}$.
4. $A=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\&1\end{pmatrix}$，特征多项式均为 $(\lambda-1)^2$，但它们不相似，因为和 A 相似的矩阵只能是 A 本身.
5. $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b[g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

二、填空，每题 3 分

1. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　解析：规范型，非 0 系数化为 ±1 后先写正项再写负项.
2. $(-2,2)$　　解析：对于实对称阵，正定 $\Leftrightarrow$ 顺序主子式全 >0，故有 $2>0,\begin{vmatrix}2&0\\0&2022\end{vmatrix}=4044>0,\begin{vmatrix}2&0&k\\0&2022&k\\k&0&2\end{vmatrix}=2022(4-k^2)>0$，所以 $-2<k<2$.
3. $\dfrac{1}{5}$　　解析：通过"数乘"可知该线性空间中零元为 $0\circ a=a^0=1$，所以与 5 进行"加法"运算结果为 1 的向量是 $\dfrac{1}{5}$.
4. 3　　解析：设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$，则其与 A 可交换 $\Leftrightarrow AB=BA$
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\2b_{21}&2b_{22}&2b_{23}\\3b_{31}&3b_{32}&3b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{12}&3b_{13}\\b_{21}&2b_{22}&3b_{23}\\b_{31}&2b_{32}&3b_{33}\end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow b_{12}=b_{13}=b_{23}=b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$，只有 b_{11},b_{22},b_{33} 是自由变量，所以 B 组成的线性空间维数是 3.
5. 5　　解析：$8-3=5$.
6. $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$　　解析：$\begin{cases}\sigma(1)=0-0=0&=0\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2,\\\sigma(x)=(x+1)-x=1&=1\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2,\\\sigma(x^2)=(x+1)^2-x^2=2x+1&=1\cdot1+2\cdot x+0\cdot x^2.\end{cases}$ 所以 σ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.
7. 9　　解析：若 n 阶矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵多项式 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$. 此处矩阵多项式 $A^2-2A-3E=O$ 的特征值全为 0，故 A 的全部 4 个特征值都满足 $\lambda^2-2\lambda-3=0\Rightarrow\lambda=-1$ 或 $\lambda=3$. 设 4 个特征值中有 a 个 -1 和

$(4-a)$ 个 3，于是特征值之和 $a\cdot(-1)+(4-a)\cdot 3=\mathrm{tr}(A)=4 \Rightarrow a=2$. 所以矩阵 A 的特征值为 $-1,-1,3,3$，行列式等于特征值之积 $(-1)\cdot(-1)\cdot 3\cdot 3=9$.

8. $(1,-3,6)$　解析：$W=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1-3x_2+6x_3=0\}$，是一个平面. $W^\perp$ 是所有与 W 垂直的向量构成的空间，$W^\perp=\{k(1,-3,6)\mid k\in R\}$，它的一组基是一个向量 $(1,-3,6)$.

9. $(x-1)(x+2)$　解析：矩阵可相似对角化等价于其最小多项式是互素的一次因式乘积.

10. BD　解析：半正定，特征值全部非负. 不定，特征值有正有负，最小的特征值 $\lambda_n<0$.

三、(1) $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ (2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$，特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

对 $\lambda_1=-2$ 有方程组 $\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$，得基础解系 $\xi_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_2=1$ 有方程组 $\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$，得基础解系 $\xi_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_3=4$ 有方程组 $\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$，得基础解系 $\xi_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

由于特征值不同，仅需分别单位化得 $\eta_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},\eta_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$,
$\eta_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$. 作正交线性替换 $X=TY$，其中 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则原二次型化为标准型 $-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$.

四、

推论　如果 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1,V_2 的维数之和大于 n，那么 V_1,V_2 必含有非零的公共向量.

证明　由假设，

$$\text{维}(V_1+V_2)+\text{维}(V_1\cap V_2)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2)>n.$$

但因 V_1+V_2 是 V 的子空间而有

$$\text{维}(V_1+V_2)\leqslant n,$$

所以

$$\text{维}(V_1\cap V_2)>0.$$

这就是说，$V_1\cap V_2$ 中含有非零向量. ▌

五、(1)

证明　$(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})f(x)=\mathscr{A}(xf(x))-\mathscr{B}(f'(x))=(xf(x))'-xf'(x)$
$=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)=\mathscr{E}f(x)$，

故 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$.

(2) $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$.

(3) 在 (1) 中，$P[x]$ 是无限维空间，该空间中的线性变换 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 不具有有限 (n) 阶方阵，不适用于 (2).

六、对线性空间 V 中的 $\sigma-$子空间 V_1，取 $\forall\alpha\in V_1$，有 $\sigma\alpha\in V_1$. 取 $\forall\beta\in V_1^\perp$，由于 $V_1\perp V_1^\perp$，所以 $\sigma\alpha\perp\beta$, $(\sigma\alpha,\beta)=0$. 由于 σ 是对称变换，有 $(\alpha,\sigma\beta)=(\sigma\alpha,\beta)$，所以 $(\alpha,\sigma\beta)=0$, $\alpha\perp\sigma\beta$. 由 α 的任意性，有 $\sigma\beta\perp V_1$，所以 $\sigma\beta\in V_1^\perp$. 由 β 的任意性可知 $V_1^\perp$ 也是 $\sigma-$子空间.