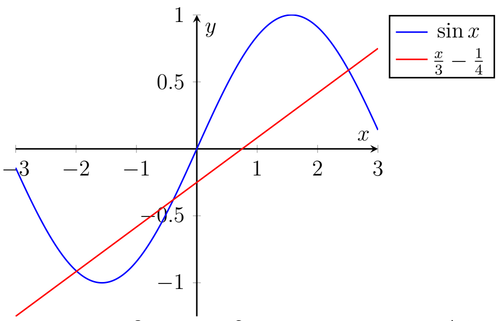
数值分析 · 课程作业 · 第二章

姓名：潘林越　班级：数学与应用数学 2020-2 班　学号：15194694

1. (1) 将方程变形为 $\sin x = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$，绘出曲线 $y = \sin x$ 和 $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$，由图像可知，方程有三个实根，分别为 $x_1 \in (-2.5, -1.5), x_2 \in (-1, 0), x_3 \in (2, 3)$.



(4) 对方程 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$，令 $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x = 0$，可得驻点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. 这 3 个点将实轴划分为 4 个区间，各区间的变化规律如下表所示.

x	$(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$
隔根区间			$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$				

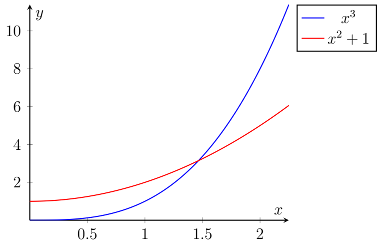
可知方程有 1 个实根，隔根区间为 $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$.

2. $x^* \in [3,4]$，要使 $|x^* - x_n| \leq 10^{-2}$，则要 $\frac{1}{2^{n+1}}(b-a) = \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}$. 由此解得 $n \geq \frac{2}{\lg 2} - 1 \approx 5.6$，取 $n = 6$. $f(a_0) < 0, f(b_0) > 0$，按二分法，计算如下：

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	3	4	3.5	$+$
1	3	3.5	3.25	$-$
2	3.25	3.5	3.375	$-$
3	3.375	3.5	3.4375	$+$
4	3.375	3.4375	3.4062	$+$
5	3.375	3.4062	3.3906	$-$
6	3.3906	3.4062	3.3984	$-$

所求近似根为 $x_6 = 3.3984$.

4. 将方程变形为 $x^3 = x^2 + 1$，绘出曲线 $y = x^3$ 和 $y = x^2 + 1$，由图像可知，方程有 1 个实根，隔根区间为 $(1, 1.5)$. 设方程的根为 x^*，以下判断 4 种迭代格式的收敛性.



(1) $\forall x \in [1.3, 1.6], \varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} \in [1.3, 1.6], |\varphi'(x)| = 2x^{-3} \leq 0.92$. 所以该迭代格式收敛. 有 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代过程在 x^* 的邻近为线性收敛.

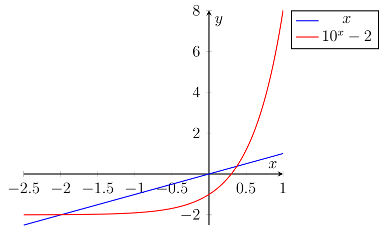
(2) $\forall x \in [1.3, 1.6], \varphi(x) = \sqrt[3]{1 + x^2} \in [1.3, 1.6], |\varphi'(x)| = \dfrac{2x}{3(1+x^2)^{\frac{2}{3}}} \leq 0.6$. 所以该迭代格式收敛. 有 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代过程在 x^* 的邻近为线性收敛.

(3) $\forall x \in [1.3, 1.6], \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}, |\varphi'(x)| = \dfrac{1}{2}(x-1)^{-1.5} \geq 1$. 所以该迭代格式发散.

(4) $\forall x \in [1.3, 1.6], \varphi(x) = \sqrt{x^3 - 1}, |\varphi'(x)| = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \geq 1$. 所以该迭代格式发散.

收敛最快的迭代格式为 (2). 迭代时，若 $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$，则近似解 x_k 有误差估计为 $|x^* - x_k| \leq \dfrac{L}{1-L}\varepsilon = 1.5\varepsilon$. 为使有效数字达到 4 位，即误差小于 0.0005，将控制迭代结束的条件取为 $|x_k - x_{k-1}| \leq 0.0003$. 计算得迭代序列为 1.4,1.43581,1.45205,1.45942,1.46277,1.4643,1.46499,1.46531,1.46545,近似根即为 1.46545.

5. 绘出曲线 $y = x$ 和 $y = 10^x - 2$，由图像可知，方程有 2 个实根，分别为 $x_1 \in (-2.5, -1.5), x_2 \in (0, 0.5)$.



(1) 选用迭代格式为 $x = 10^x - 2$，$\forall x \in [-2, -1.9], \varphi(x) = 10^x - 2 \in [-2, -1.9]$, $|\varphi'(x)| = 10^x \ln 10 \leq 0.03$. 所以该迭代格式收敛. 有 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代过程在 x^* 的邻近为线性收敛. 迭代时，若 $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon'$，则近似解 x_k 有误差估计为 $|x^* - x_k| \leq \dfrac{L}{1-L}\varepsilon' \leq 0.031\varepsilon'$. 为使误差小于 $\varepsilon = 10^{-6}$，将控制迭代结束的条件取为 $|x_k - x_{k-1}| \leq 0.0001$. 计算得迭代序列为-2,-1.99,-1.98976707,-1.98976158，近似根即为-1.98976158.

(2) 选用迭代格式为 $x=\lg(2+x)$，$\forall x\in[0,0.5],\varphi(x)=10^x-2\in[0,0.5]$，

$|\varphi'(x)|=\dfrac{1}{(2+x)\ln 10}\le 0.22$. 所以该迭代格式收敛. 有 $0<|\varphi'(x^*)|<1$, 则迭代过程在 x^* 的邻近为线性收敛. 迭代时，若 $|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon'$，则近似解 x_k 有误差估计为 $|x^*-x_k|\le\dfrac{L}{1-L}\varepsilon'\le 0.283\varepsilon'$. 为使误差小于 $\varepsilon=10^{-6}$，将控制迭代结束的条件取为 $|x_k-x_{k-1}|\le 0.00001$. 计算迭代序列为 0,0.30103, 0.36192228, 0.37326560, 0.37534634, 0.37572694, 0.37579652, 0.37580924, 0.37581156，近似根即为 0.37581156.

7. (1) 此迭代格式的迭代函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{a}{x})$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{a}{x^2}),\varphi'(\sqrt{a})=0,\varphi''(x)=\dfrac{a}{x^3},\varphi''(\sqrt{a})=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\neq 0$，所以该格式为 2 阶收敛.

(2) 此迭代格式的迭代函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{3}(x+\dfrac{8ax}{a+3x^2})$. 将 $\varphi(x)$ 看作由 $(a+3x^2)[3\varphi(x)-x]-8ax=0$ 确定的隐函数，方程两边对 x 求导得 $6x[3\varphi(x)-x]+[3\varphi'(x)-1](a+3x^2)-8a=0$. 令 $x=\sqrt{a}$，可得 $\varphi'(\sqrt{a})=0$. 上式两边再对 x 求导，得 $2[3\varphi(x)-x]+4x[3\varphi'(x)-1]+\varphi''(x)(a+3x^2)=0$. 令 $x=\sqrt{a}$,可得 $\varphi''(\sqrt{a})=0$. 上式两边再对 x 求导,得 $2[3\varphi'(x)-1]+4[3\varphi'(x)-1]+18x\varphi''(x)+\varphi'''(x)(a+3x^2)=0$. 令 $x=\sqrt{a}$，可得 $\varphi'''(\sqrt{a})=\dfrac{3}{2a}\neq 0$，所以该格式为 3 阶收敛.

9. 取 (a,b) 内一个包含根的单调区间，取 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x)$，则 $|[\varphi^{-1}(x)]'|\le\dfrac{1}{M}\le 1$. 将方程 $x=\varphi(x)$ 中 x 替换为 $\varphi^{-1}(x)$，得 $x=\varphi^{-1}(x)$，即为适于迭代的形式.

取 $x=4.5$ 附近 $x=\tan x$ 的反函数，得到迭代格式为 $x=\arctan x+\pi$，计算得迭代序列为 4.5,4.4937,4.4934，近似根即为 4.4934.

10. (1) $x^k-a=0$，牛顿迭代格式为 $x_{n+1}=\dfrac{(k-1)x_n^k+a}{kx_n^{k-1}}$.

(2) $1-\dfrac{a}{x^k}=0$，牛顿迭代格式为 $x_{n+1}=\dfrac{(k+1)ax_n-x_n^{k+1}}{ak}$.

$k=3,a=75,x_0=4$，选用迭代格式 (1)，迭代得 $x_1=4.22916667,x_2=4.21719736,x_3=4.21716333,x_4=4.21716333$，故 $\sqrt[3]{75}\approx 4.21716333$.

15. 设 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的 m $(m\geq 2)$ 重根，则 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中 $g(x^*)\neq 0$. 该迭代格式的迭代函数为 $\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. 求导，并有在 $x=x^*$ 附近 $f(x)=g(x^*)(\Delta x)^m+g'(x^*)(\Delta x)^{m+1}+o[(\Delta x)^{m+1}]$，其中 $\Delta x=x-x^*$，则

$$\varphi'(x)=1-m+m\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}=1-m$$
$$+m\frac{[g(x^*)+g'(x^*)\Delta x+o(\Delta x)][m(m-1)g(x^*)+m(m+1)g'(x^*)\Delta x+o(\Delta x)]}{[mg(x^*)+(m+1)g'(x^*)\Delta x+o(\Delta x)]^2}$$
$$=\frac{2(m+1-m^2)g'(x^*)}{g(x^*)}\Delta x+o(\Delta x)$$

，式中用到了分式的展开 $\dfrac{A+B\Delta x+o(\Delta x)}{C+D\Delta x+o(\Delta x)}=\dfrac{A}{C}+\dfrac{BC-AD}{C^2}\Delta x+o(\Delta x)$. 求导，可知 $\varphi''(x^*)=\dfrac{2(m+1-m^2)g'(x^*)}{g(x^*)}$. 式中 $m+1-m^2<0$，而 $g'(x^*)$ 不一定为 0，所以 $\varphi''(x^*)$ 不一定为 0，该迭代格式具平方收敛.

20. (1) $x_0=3, x_2=3.142547, x_3=3.141593, x_4=3.141593.$

此公式可用于求 π.

(2) $R=1: x_0=1, x_1=0.837278, x_2=0.78818, x_3=0.785406, x_4=0.785398;$

$R=\sqrt{3}: x_0=1, x_1=1.05098, x_2=1.04722, x_3=1.0472, x_4=1.0472.$

此公式可用于求 $\arctan R$.