中国矿业大学 2016-2017 学年第 1 学期

《数学分析（1）》试卷（A）卷

考试时间：120 分钟　　　考试方式：闭 卷

学院________班级________姓名________学号________

题号	一	二	三	总分
得分				

一、叙述题（共 4 个小题每题 5 分共 20 分）

1.叙述数列$\{x_n\}$不是无穷大量的定义。

2.叙述极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的归结原则。

3. 按 Cauchy 收敛准则，叙述$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的充要条件。

4. 叙述函数$f(x)$在区间I上一致连续的定义。

二、计算题（共 6 个小题每题 8 分共 48 分）

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$。

2．设$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$。

3. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

4. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

5. 求a,b使得

$$f(x)=\begin{cases} \ln(a+x), & x>0 \\ e^x+b, & x\le 0 \end{cases}$$

在点$x=0$处可导，并求$f'(0)$。

6.讨论函数 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 的性态，并作出其图像。（性态包括：定义域，奇偶性，单调区间，凸凹区间，极值与拐点等）

三、证明题（共 4 个小题每题 8 分共 32 分）

1. 设 f, g 为 D 上的有界函数. 证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}。$$

2. 应用柯西收敛准则证明数列 $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 收敛。

3. 证明费马定理：设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，且在点 x_0 可导．若点 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.

4.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，a,b 为任意两个正数.

（1）利用介值定理证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）利用拉格朗日中值定理证明存在不同的两点 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$，使得

$$\frac{a}{f'(\eta_1)}+\frac{b}{f'(\eta_2)}=a+b\text{ .}$$

参 考 答 案

一、叙述题（共4个小题每题5分共20分）

1.叙述数列$\{x_n\}$不是无穷大量的定义。

【答】$\exists G>0,\forall N\in N_+,\exists n_0>N,$ 使得$\left|x_{n_0}\right|\le G$。

2.叙述极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的归结原则。

【答】$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在$\Leftrightarrow\ \forall\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在（且相等）。

3. 按 Cauchy 收敛准则，叙述$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在的充要条件。

【答】$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x',x''>X$，有$\left|f(x')-f(x'')\right|\ge\varepsilon_0$

4. 叙述函数$f(x)$在区间I上一致连续的定义。

【答】$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in I,$ 只要$|x'-x''|<\delta$，就有$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon$

二、计算题（共6个小题每题8分共48分）

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$。

【解】由

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

根据迫敛性

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$$

2. 设$\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\right)'=\frac{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}{(\cos t-\sin t)^2}=\frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}\text{。}$$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$。

【解】 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4),e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4),$

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^4}{12}+o(x^4).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

5. 求 a,b 使得

$$f(x)=\begin{cases}\ln(a+x), & x>0\\ e^x+b, & x\le 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。

【解】f 在点 $x=0$ 处连续，$f(0+0)=f(0-0)=f(0)\Rightarrow 1+b=\ln a$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a+x}, & x>0\\ e^x, & x<0\end{cases}$$

$$f'(0+0)=\frac{1}{a},f'(0-0)=1\Rightarrow f'_+(0)=\frac{1}{a},f'_-(0)=1$$

f 在点 $x=0$ 处可导，$f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow \dfrac{1}{a}=1$

$$a=1,b=-1,f'(0)=1$$

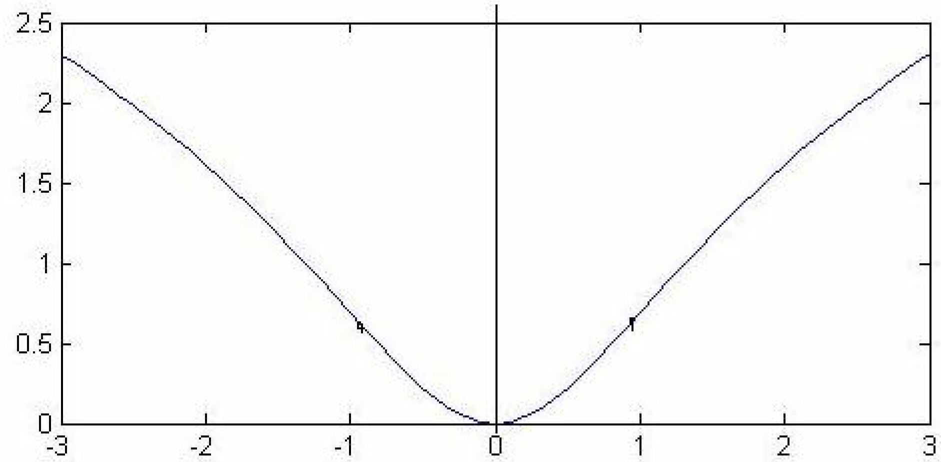
6.讨论函数 $f(x)=\ln(1+x^2)$ 的性态，并作出其图像。（性态包括：定义域，奇偶性，单调区间，凸凹区间，极值与拐点等）

【解】定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，偶函数。

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2},f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

$$f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},f''(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	凹减	拐	凸减	极小	凸增	拐	凹增



三、证明题（共 4 个小题每题 8 分共 32 分）

1. 设 f, g 为 D 上的有界函数. 证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\text{。}$$

【证】$\forall x_0 \in D$

$$f(x_0)+\inf_{x\in D} g(x)\le f(x_0)+g(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$

$$f(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

说明 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个上界，而 $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ 是 $f(x)$ 的最小上界。从而

$$\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x)$$

移项即得证。

2. 应用柯西收敛准则证明数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ 收敛。

【证】 $$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，

从而当$n>N$时，对$\forall p$，有$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$。由柯西准则, $\{a_n\}$收敛。

3. 证明费马定理：设函数f在点x_0的某邻域内有定义，且在点x_0可导．若点x_0为f的极值点，则必有$f'(x_0)=0$.

【证法 1】设$f'(x_0)\neq 0$. 不妨$f'(x_0)>0$. 则

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)>0$$

由$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, 及保号性可知，

$$\exists\delta_1>0，\forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)，\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)>f(x_0)$$

同理，由$f'_-(x_0)>0$, 得

$$\exists\delta_2>0，\forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)，\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ f(x)<f(x_0)$$

所以，f在点x_0不取极值，与假设矛盾。

【证法 2】设f在点x_0取极大值。即$f(x)\le f(x_0), x\in U(x_0)$。因此

当$x>x_0$时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，由保不等式性

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

同理又可得，$f'_-(x_0)\ge 0$。由$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$得

$$f'(x_0)=0$$

4.设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，a,b为任意两个正数.

（1）利用介值定理证明存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$；

（2）利用拉格朗日中值定理证明存在不同的两点$\eta_1,\eta_2\in(0,1)$，使得

$$\frac{a}{f'(\eta_1)}+\frac{b}{f'(\eta_2)}=a+b\,.$$

【证】（1）因为 $f(0)=0<\dfrac{a}{a+b}<f(1)=1$，且 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，

所以由介值定理知，存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=\frac{a}{a+b}\,.$$

（2）已知 $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$，在区间 $[0,\ \xi]$ 和 $[\xi,\ 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，得

$$f(\xi)-f(0)=f'(\eta_1)\xi\text{，得}\frac{a}{f'(\eta_1)}=(a+b)\xi\text{，}$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\eta_2)(1-\xi)\text{，得}\frac{b}{f'(\eta_2)}=(a+b)(1-\xi)\text{，}$$

其中 $0<\eta_1<\xi<\eta_2<1$．将上面两式相加有

$$\frac{a}{f'(\eta_1)}+\frac{b}{f'(\eta_2)}=a+b\,.$$