

中国矿业大学 2021-2022 学年第二 学期课程考试试卷（回忆）

考试科目： 高等代数 (2) 试卷类型： A 卷

课程代码： M10103 考试时间： 100 分钟 考试方式： 闭卷

开课学院： 数学学院 年级专业： 2021 级数学类专业

学院		班级		姓名		学号		
题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

考生承诺：

1. 未携带通信工具及其他各类带有拍照、摄像、接收、发送、储存等功能设备（包括但不限于手机、智能手表、智能眼镜，平板电脑、无线耳机）或关机与其他禁止携带物品、资料等放置监考老师指定位置；
2. 已按要求清理干净整个座位（包括考生邻座）桌面和抽屉里的所有物品（无论是否属于考生本人）；
3. 已知晓并理解《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》等与考试相关规定，承诺在考试中自觉遵守以上规定，服从监考教师的安排，自觉遵守考场纪律，诚信考试，不违规、不作弊。如有违反，自愿按《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》相关条款接受处理。

考生签名： _____

一、举例题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 举两个 3 阶实方阵，使其合同但不相似。

2. 举一个 3 阶实对称阵，使其符号差是 -1 。

3. 设 V 是实数域上的 2 维行向量空间。给出子空间 $W = \{(a, 0) \mid a \text{ 为实数}\}$ 在 V 中的两个不同的补空间。

4. 举例说明特征多项式相同的两个矩阵未必相似。

5. 设 V 是闭区间 $[a, b]$ 上所有连续函数组成的欧氏空间，其内积定义为 $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ 。写出该空间中柯西—布尼亚科夫斯基不等式的具体形式。

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 一个 3 阶实对称方阵 A 的特征值分别是 $1, -5, 7$ 。则二次型 $f(x, y, z) = X^T A X$ 的规范型是_____。

2. 实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 2022 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 则 k 的取值范围是_____。

3. 记全体正实数为 R^+ , 加法定义为 $a \oplus b = ab$, 数量乘法定义为 $k \circ a = a^k$, 则其成为实数域上的线性空间。该线性空间中向量 5 的负向量是_____。

4. 设 3 阶对角阵 $A = \text{diag}(1, 2, 3)$, 则全体与 A 可交换的矩阵组成的线性空间的维数是_____。

5. 设 σ 是 8 维线性空间 V 上的线性变换，如果其秩是 3，则其零度是_____.
6. 在空间 $P[x]_3$ 中，设变换 σ 为 $f(x) \rightarrow f(x+1) - f(x)$ ，则 σ 在基 $1, x, x^2$ 下的矩阵是_____.
7. 设 4 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A + 3E$ ，它的迹等于 4，则它的行列式等于_____.
8. 设 $V = R^3$ ， W 是方程 $x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$ 的解空间，则 W^\perp 有一组基是_____.
9. 设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 σ 可以对角化且它的特征多项式是 $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$ ，则 σ 的最小多项式_____.
10. 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的特征值，则下列结论正确的有__
- A. 矩阵 A 半正定，未必有 $\lambda_n \geq 0$. B. 矩阵 A 半正定，必定有 $\lambda_n \geq 0$.
- C. 矩阵 A 不定，未必有 $\lambda_n < 0$. D. 矩阵 A 不定，必定有 $\lambda_n < 0$.

三、(满分 15 分)

设二次型 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$.

- (1) 写出上述二次型的矩阵；
- (2) 求一正交变换把上述二次型化为标准型。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 团伙作弊。

四、（满分 10 分）

设 V 为 n 维线性空间， V 中两个子空间 V_1, V_2 的维数之和大于 n ，证明 V_1, V_2 必含有非零的公共向量。

五、（满分 20 分）

(1) 在 $P[x]$ 中，线性变换 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别定义如下

$$\mathbf{A}(f(x)) = f'(x), \quad \mathbf{B}(f(x)) = xf(x).$$

证明 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ ，其中 \mathbf{E} 表示 $P[x]$ 上的恒等变换。

(2) 设 A 和 B 是两个 n 阶方阵，证明 $AB - BA$ 的迹等于零。

(3) 简要说明 (1) 与 (2) 的结论不矛盾。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1. 替他人考试或由他人替考；2. 通讯工具作弊；3. 团伙作弊。

六、（满分 5 分）

证明对称变换 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间。