中国矿业大学 2012～2013 学年 第二学期

《解析几何》试卷（A）卷（答案）

考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭 卷

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号____________

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
得　分							
阅卷人	任新安						

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1． 设 $a+b+c=0, |a|=3, |b|=1, |c|=4$，则 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$ $\underline{-13}$ ；

2． 设 a, b, c 不共面，如果向量 r 满足 $r\cdot a=0, r\cdot b=0, r\cdot c=0$，则 $r=$ $\underline{0}$ ；

3． 在右手直角坐标系 $Oxyz$ 中，方程 $9x^2-25y^2+16z^2-24xz+80x+60z=0$ 表示的曲面为<u>双曲抛物面</u>；

4． 通过两点 $A(2,3,4)$ 和 $B(5,2,-1)$ 的直线方程为 $\underline{\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{-5}}$ ；

5． 经过点 $(-2,1,3)$，并且通过两平面 $2x-7y+4z-3=0$ 与 $3x-5y+4z+11=0$ 的交线的平面方程为 $\underline{15x-47y+28z-7=0}$ ；

6. 两条直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}, \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ 的位置关系为<u>异面</u>；

7. 两条直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{2}$, $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}$的夹角为$\underline{\frac{\pi}{2}}$；

8. 若方程$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{x^2}{c^2-k}=1\quad(a>b>c>0)$表示双叶双曲面，则$k$应满足的条件是$\underline{a^2>k>b^2}$；

9. 母线 C：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转所得的曲面方程为$\underline{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1}$；

10. 曲面S的直角坐标方程为$x^2+y^2-z^2=25$，则其球面坐标方程为$\underline{R^2\cos 2\theta=25.}$

二、（**本题满分 10 分**）在直角坐标系中，求通过点$(1,0,-2)$并与平面

$$\Pi_1: 2x+y-z-2=0 \text{ 和 } \Pi_2: x-y-z-3=0$$

均垂直的平面方程。

解：平面Π_1,Π_2的法向量分别是$n_1=(2,1,-1), n_2=(1,-1,-1)$，所求平面与$\Pi_1,\Pi_2$均垂直，所以它的法向量$n$与$n_1,n_2$均垂直，因此

$$n=n_1\times n_2=(2,1,-1)\times(1,-1,-1)=(-2,1,-3),$$

平面的方程为$-2(x-1)+y-3(z+2)=0$, 即$2x-y+3z+6=0$.

三、（**本题满分 10 分**）求两条直线$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$与$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$的公垂线的方程。

解：两直线的方向向量是$v_1=(1,-3,3), v_2=(2,1,-2)$，所以公垂线的方向向量为$v=v_1\times v_2=(3,8,7)$。

公垂线在过直线$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$且与向量$v=(3,8,7)$平行的平面上，平面法向量是

$n_1=(3,8,7)\times(1,-3,3)=(45,-2,-17)$，所以该平面方程是 $45(x-1)-2y-17z=0$。

公垂线又在过直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$; 且与向量 $v=(3,8,7)$ 平行的平面上，平面法向量是 $n_2=(3,8,7)\times(2,1,-2)=(-23,20,-13)$，所以该平面方程是 $23x-20y+13z=0$，因此公垂线的方程是

$$\begin{cases}45x-2y-17z-45=0,\\ 23x-20y+13z=0.\end{cases}$$

四、（本题满分 15 分）求母线方向为$(2,-3,4)$，准线为$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ z=1\end{cases}$的柱面方程。

解：柱面上的点(x,y,z)一定在经过准线上一点(x_0,y_0,z_0)的母线上，所以

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=9,\\ z_0=1,\\ x=x_0+2t,\\ y=y_0-3t,\\ z=z_0+4t\end{cases}$$

消去x_0,y_0,z_0,t得到柱面方程：

$$16x^2+16y^2+13z^2+24yz-16xz+16x-24y-26z-131=0.$$

五、（本题满分 15 分）利用不变量求下列曲面$xy+yz+xz-a^2=0$的简化方程。

解：二次曲面的矩阵：$A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&-a^2\end{bmatrix}$,

计算不变量

$$I_1=0, I_2=3\begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}=-\frac{3}{4},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}, I_4=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&-a^2\end{vmatrix}=-\frac{a^2}{4}.$$

特征方程是$-\lambda^3+\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{4}=0$, 即$(\lambda-1)(2\lambda+1)^2=0$,

特征根为$\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2}, \frac{I_4}{I_3}=-a^2$,

于是，简化方程为$x'^2-\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}z'^2-a^2=0$.

六、（本题满分 10 分）.证明：若$2d$ 是两条直线$l_1:\begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\\x=0\end{cases}$， $l_2:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1\\y=0\end{cases}$之间的距离，证明$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$。

证明：直线l_1的方向向量是$v_1=(0,b,-c)$，经过点$P(0,0,c)$。直线l_2经过点$Q(0,0,-c)$，所以两直线的距离为$2d=\frac{\left|(\overrightarrow{PQ},v_1,v_2)\right|}{\left|v_1\times v_2\right|}$，

$$(\overrightarrow{PQ},v_1,v_2)=\begin{vmatrix}0&0&2c\\0&b&-c\\a&0&c\end{vmatrix}=-2abc \quad v_1\times v_2=(0,b,-c)\times(a,0,c)=(bc,-ac,-ab)$$

因此，$\frac{1}{4d^2}=\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{4(abc)^2}$，故$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$。