所以$I(s)$收敛。

当$s \le 0$时，由于

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-s} x^{s-1} e^{-x} |\ln x| = +\infty$$

所以$I(s)$发散。

（2）再讨论$J(s) = \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x \mathrm{d}x$

它是无穷积分，由于

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 x^{s-1} e^{-x} \ln x = 0$$

所以，对$\forall s$，$J(s)$收敛。

综上，$\Phi(s)$只有在$s > 0$时收敛。

【09】用 Cauchy 准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$发散.

【证】由于

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+m}| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m+m} \ge \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，对任意$N$，取$m > N$和$p = m$，则

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| \ge \varepsilon_0$$

【10】讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots$的收敛性。

【解】(1) 当$\alpha \le 0$时，由于$u_{2m} = -\frac{1}{(2m)^\alpha} \ge 1$，$\lim_{n \to \infty} u_n \ne 0$，所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

（2）当$0 < \alpha < 1$时，考察加括号的级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = (1 - \frac{1}{2^\alpha}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha}) + \cdots$$

易知

$$u_n' = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^\alpha} \sim \frac{-1}{(2n)^\alpha} (n \to \infty)$$

且 $\sum \frac{1}{(2n)^\alpha}$ 发散（p 级数），所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 发散，进而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（去括号）；

（3）当 $\alpha = 1$ 时，为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为 Leibniz 型级数，收敛；

（4）当 $\alpha > 1$ 时，由于 $\sum w_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ 发散，$\sum v_n = -\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} - \cdots$ 收敛（p 级数）

所以

$$\sum (w_n + v_n) = (1 - \frac{1}{2^\alpha}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha}) + \cdots$$

发散，进而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（去括号）；

综上，只有当 $\alpha = 1$ 时，原级数才收敛，否则都发散。

中国矿业大学 2014-2015 学年第（2）学期

《数学分析(2)》试卷（A）

考试时间：120 分钟　考试方式：闭卷

学院班级__________ 姓名__________学号___________得分________

（共 10 个题每题 10 分）

【01】求不定积分$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

【02】求不定积分$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$

【03】求定积分$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

【04】用可积准则证明：若 f 为 $\left[a,b\right]$ 上的连续函数，则 f 在 $\left[a,b\right]$ 上可积.

【05】证明微积分基本定理：设 f 在 $[a,b]$ 上可积， $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a\le x\le b)$，

若 f 在点 $x_0\in[a,b]$ 连续，则 $F(x)$ 在点 x_0 可导，并且 $F'(x_0)=f(x_0)$。

【06】设 f 是 $[a,b]$ 上的连续增函数，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, & a<x\le b\\ f(a), & x=a\end{cases}$$

试证明 F 也是 $[a,b]$ 上的增函数。

【07】（1）求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围的椭圆面积；

（2）求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围的椭球体积。

【08】 讨论反常积分$\Phi(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$的收敛性。

【09】用 Cauchy 准则证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散.

【10】讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots$的收敛性。

参 考 答 案

【01】求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x$

【解】当 $x>1$ 时，令 $x=\sec t(0<t<\frac{\pi}{2})$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int \frac{1}{\sec t\tan t}\sec t\tan t dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$$

当 $x<-1$ 时，令 $x=-t(t>1)$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x=\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}\,t=\arccos\frac{1}{-x}+C$$

综上， $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x=\arccos\frac{1}{|x|}+C$

【02】求不定积分 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}\,x$

【解】 $\int \sec^3 xdx=\int \sec xd\tan x=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 xdx$

$$=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)dx=\sec x\tan x-\int \sec^3 xdx+\int \sec xdx$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec^3 xdx+\ln|\sec x+\tan x|$$

所以 $\int \sec^3 xdx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

【03】求积分 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

【解】令 $x=\sin t(|t|\le\frac{\pi}{2})$，则

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}\,t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

【04】用可积准则证明：若 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

【证】 由于 f 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，因此在 $\left[a,b\right]$ 上一致连续．即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $\left[a,b\right]$ 中任意两点 x',x''，只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$，便有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

取 $[a,b]$ 的分割 T 满足 $\|T\|<\delta$，f 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续，从而必取得最大值 M_i 与最小值 m_i，设 $f(\xi_i')=M_i, f(\xi_i'')=m_i \quad (\xi_i',\xi_i''\in[x_{i-1},x_i])$。因为 $\left|\xi_i'-\xi_i''\right|\le x_i-x_{i-1}<\delta$，所以

$$\omega_i=M_i-m_i=f(\xi_i')-f(\xi_i'')<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$$

证得 f 在 $\left[a,b\right]$ 上可积.

【05】证明微积分基本定理：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a\le x\le b)$，若 f 在点 $x_0\in[a,b]$ 连续，则 $F(x)$ 在点 x_0 可导，并且 $F'(x_0)=f(x_0)$。

【证】由 f 在点 $x_0\in[a,b]$ 连续，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\left|\Delta x\right|<\delta$ 时，有

$$\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon,\quad t\in[x_0,x_0+\Delta x]\ or\ [x_0+\Delta x,x_0]$$

于是

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)-\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(x_0)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \qquad (1)$$

当 $\Delta x>0$ 时,

$$(1)\text{式}\le\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left|[f(t)-f(x_0)]\right|dt\le\frac{1}{\Delta x}\cdot\varepsilon\cdot\Delta x=\varepsilon$$

当 $\Delta x<0$ 时,

$$\text{（1）式} \le \frac{1}{|\Delta x|}\int_{x_0+\Delta x}^{x_0}\left|[f(t)-f(x_0)]\right|dt \le \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\varepsilon\cdot(-\Delta x)=\varepsilon$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)$$

由导数的定义知，$F(x)$ 在点 x_0 可导，并且 $F'(x_0)=f(x_0)$。

【06】设 f 是 $[a,b]$ 上的连续增函数，

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt, & a<x\le b\\ f(a), & x=a\end{cases}$$

试证明 F 也是 $[a,b]$ 上的增函数。

【证】当 $x\in(a,b]$ 时，

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

[方法 1]用积分中值定理，$\exists\xi\in[a,x]$

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\ge 0$$

[方法 2]

$$F'(x)=\frac{\int_a^x f(x)dt-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x [f(x)-f(t)]dt}{(x-a)^2}\ge 0$$

知 F 在 $(a,b]$ 上增。

又

$$\lim_{x\to a^-}F(x)\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{1}=f(a)$$

知 $F(x)$ 在点 $x=a$ 连续，从而 F 在 $[a,b]$ 上增

【07】（1）求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围的椭圆面积；

（2）求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围的椭球体积。

【解】（1）化椭圆为参数方程

$$x=a\cos t\ ,\ y=b\sin t\ ,\ t\in[0,2\pi].$$

椭圆面积为

$$A=\left|\int_0^{2\pi} b\sin t\,(a\cos t\,)'dt\right|=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi ab$$

(2) 以 $z=z_0$ 截椭球得椭圆（在 xOy 平面的投影）

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z_0^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z_0^2}{c^2})}=1$$

由（1）此椭圆面积为：$A(z_0)=\pi ab(1-\dfrac{z_0^2}{c^2})$，椭球体积：

$$V=\int_{-c}^{c}A(z)dz=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$$

【08】 讨论反常积分 $\Phi(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$ 的收敛性。

【解】记

$$\Phi(s)=\int_0^1\ \ +\int_1^{+\infty}\ \ =I(s)+J(s)$$

（1）先讨论 $I(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x\mathrm{d}x$

当 $s>1$ 时，是正常积分。这是因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{s-1}e^{-x}\ln x=0$ 。

当 $s\le1$ 时，是瑕积分，$x=0$ 是瑕点。

当 $0<s\le1$ 时，由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{1-\frac{s}{2}}x^{s-1}e^{-x}\left|\ln x\right|=\lim_{x\to0^+}x^{\frac{s}{2}}e^{-x}\left|\ln x\right|=0$$