

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

## 中国矿业大学 2019-2020 学年第 2 学期

### 《数学分析 2》试卷（B）卷

考试时间：120 分钟

考试方式：闭 卷

学院\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	总分
得分				
阅卷人				

#### 一、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共计 20 分）

1、已知  $\int xf(x)dx = \cos x + C$ ，则  $f(x) =$  ( )。

- (A)  $\frac{\sin x}{x}$ ； (B)  $x \sin x$ ； (C)  $-\frac{\sin x}{x}$ ； (D)  $x \cos x$ 。

2、曲线  $y = \sin x (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  与  $x$  轴围成的图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积为 ( )。

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ ； (B)  $\pi$ ； (C)  $\frac{\pi^2}{2}$ ； (D)  $\pi^2$ 。

3、下列选项正确的是 ( )。

(A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，且  $u_n \geq v_n (n=1,2,\dots)$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也收敛；

(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛；

(C) 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散，则  $u_n \geq \frac{1}{n}$ ；

(D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^3$  收敛。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

4、数列极限  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[n]{x^3}}{1+x^2} dx = ( \quad )$  .

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$  ;      (B)  $\frac{\pi}{12}$  ;      (C)  $\frac{\pi}{3}$  ;      (D)  $\frac{\pi}{2}$  .

5、设常数  $k > 0$  , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^3}$  (    ).

- (A) 发散;                      (B) 绝对收敛;  
(C) 条件收敛;              (D) 收敛或者发散与  $k$  的取值有关.

## 二、计算题（共 9 小题，每题 6 分，共计 54 分）

1、求不定积分  $\int e^{\sqrt{x}} dx$  .

2、求平面曲线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $a > 0$ ),  $0 \leq t \leq 2\pi$  绕  $X$  轴旋转所围成立体的体积.

3、求定积分  $\int_{-1}^1 \frac{2+\tan x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  .

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

4、已知  $f$  是  $[-a, a]$  上的连续函数， $F(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, x \in [-a, a]$ ，求  $F''(x)$ 。

5、利用变换  $y = \pi - x$  计算定积分  $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

6、求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$  的收敛域。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

7、求反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx$ ，其中  $a, b > 0$ 。

8、求函数  $\ln(1-x)$  的幂级数展开式并指出收敛域。

9、(1)证明反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  收敛；

(2)利用变换  $t = \frac{1}{x}$  证明反常积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  收敛且  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

### 三、讨论证明题（共 3 小题，共计 26 分）

1、（8 分）设  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ,

（1）用 Cauchy 收敛准则证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ;

（2）证明级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right)$  收敛;

（3）利用（2）的结论证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \ln n)$  存在.

2、（8 分）设在  $(0, \pi)$  上,  $f(x) = \pi - x$ .

(1) 将  $f(x)$  展开为正弦级数;

(2) 该正弦级数在  $(0, \pi)$  上是否一致收敛?

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

---

3、（10 分）设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ ，

- （1）证明此级数在  $(0, +\infty)$  收敛，
- （2）证明此级数在  $(0, +\infty)$  不一致收敛但内闭一致收敛，
- （3）求此级数的和函数（须说明依据）。