练习 1：设离散无记忆信源字符空间为 $\mathbb{X}=\{0,1,2,3\}$，其概率分布为 $p(0)=1/3, p(1)=1/6, p(2)=3/10, p(3)=1/5$。

（1）求信源的熵 $H(X)$。

（2）若信源发出的消息序列为

$$x^{(n)}=20212013021300120321011032101002103201122 3210,$$

求这个消息所包含的信息量。

（3）求第（2）问消息中平均每个符号携带的信息量是多少？

练习 2：某地区人群统计表明，男性占 55%, 男性中色盲患者概率为 0.07，女性中色盲患者概率为 0.005。试问任意一个人患有色盲的概率有多大？包含有多大信息量？

练习 3：某地区女孩中身高 1.6 米以上的约占半数，并且女孩中有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 1.6 米以上；假如我们得知" 身高 1.6 米以上的某女孩又是大学生" 这样一条消息，问获得多少信息量？

练习 4：设离散无记忆信源 X, Y 字符空间上概率分布分别为

$$X \sim p_X(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$Y \sim p_Y(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \\ \\ q_1 & \cdots & q_n & q_{n+1} & \cdots & q_{2n} \end{pmatrix}$$

并且满足：$q_i = (1-\varepsilon)p_i, (i = 1, 2, ..., n), q_i = \varepsilon p_{i-n}(i = n+1, n+2, ..., 2n)$ 试写出两信源熵的关系式。

练习 5：设随机变量 X,Y 的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1
0	1/8	3/8
1	5/16	3/16

并且 $Z=XY$，试求

（1）边缘分布 $p_X(x),p_Y(y),p_Z(z)$；

（2）联合分布 $p_{X,Y,Z}(x,y,z),p_{X,Z}(x,z),p_{Y,Z}(y,z)$。

（3）条件分布矩阵 $Q_{X|Y},Q_{Y|X},Q_{X|Z},Q_{Y|Z},Q_{X,Y|Z}$。

（4）联合熵 $H(X),H(Y),H(Z),H(X,Y),H(X,Z),H(Y,Z),H(X,Y,Z)$。

（5）条件熵 $H(X|Y),H(Y|X),H(X|Z),H(Z|X),H(Y|Z),H(Z|Y)$。

（6）互信息 $I(X;Y),I(X;Z),I(Y;Z),I(X;Y|Z),I(Y;Z|X),I(X;Z|Y)$。

（7）相对熵 $D(p_X||p_Y),D(p_Y||p_X),D(p_X||p_Z),D(p_Z||p_X),D(p_Y||p_Z),D(p_Z||p_Y)$。

练习 7：设有一批电阻，按阻值分 70% 是 2K Ω，30% 是 5 K Ω；按功耗分 64% 是 1/8W，其余是 1/4W。现已知 2 K Ω阻值的电阻中 80% 是 1/8W。问通过测量阻值可以平均得到的关于功耗的平均信息量是多少？

练习 10：设向量 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 是一个概率分布，满足 $p_1 > p_2 \geq \cdots \geq p_n$，假如 $\varepsilon > 0$ 使得 $p_1 - \varepsilon > p_2 + \varepsilon$ 证明 $H(p_1, p_2, \cdots, p_n) < H(p_1 - \varepsilon, p_2 + \varepsilon, p_3, \cdots, p_n)$。

练习 11：设 X,Y 是离散型随机变量，并且 X 的所有概率 $p(x)>0$。如果 $H(Y|X)=0$，则 Y 是 X 的函数。提示：对每个 x, 仅有一个 y 使得 $p(x,y)>0$，从而 Y 必是 X 的函数

练习 12：设离散随机变量 X,Y 相互独立，并且 $Z=X+Y$，试证明：（1）$H(X)\le H(Z)$。（2）$H(Y)\le H(Z)$。（3）$H(Z)\le H(X,Y)$。（4）$I(X;Z)=H(Z)-H(Y)$。

练习 13：设随机变量 (X,Y) 有如下分布，求微分熵 $H(X),H(Y),H(X,Y)$，以及条件微分熵 $H(X|Y),H(Y|X)$，以及互信息 $I(X;Y)$。

（1）定义在三角形区域 $A(0,0),B(0,2),C(1,0)$ 上的等可能分布。

（2）定义在第一象限上的二维指数分布，概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-3x-2y} & x>0,y>0 \\ 0 & else \end{cases}.$$

（3）二维正态分布，均值为 (μ_1,μ_2)，协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

（4）联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}.$$

练习 14：设 X、Y 是相互独立的随机变量且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，令 $U = X + Y, V = X - Y$，试求互信息 $I(U;V)$。