中国矿业大学 2021- 2022 学年第 一 学期课程考试试卷

考试科目： 数学分析（1）　　　　试卷类型： B

课程代码： M10151　考试时长： 120 分钟　考试方式： 闭

开课学院： 数学学院　　　　适用年级： 2021

学院________班级________姓名________学号________

题号	一	二	三	四	五	总分	
得分							
阅卷人							

考生承诺：

1．没有携带或已将手机、智能手表等带有接收、发送、储存等功能设备关机与其它非允许携带物品、资料等放置监考老师指定位置；

2．按要求清理干净整个座位（包括考生邻座）桌面和抽屉里的所有物品（无论是否属于考生本人）；

3：已知晓并理解《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》等与考试相关规定，承诺在考试中自觉遵守该规定，服从监考教师的安排，自觉遵守考试纪律，诚信考试，不违规、不作弊。如有违反，自愿按《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》有关条款接受处理；

考生签名________

一、叙述题（每题 4 分，共 12 分）

1、叙述 $\beta\in R$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的下确界的定义.

答：$\exists\beta\in R$,满足:(1)$\forall x\in I, f(x)\ge\beta$; (2)$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in I$,使得$f(x_0)<\beta+\varepsilon$.

则称β是$f(x)$在区间I上的下确界.

2、叙述极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的归结原则.

答：$\forall\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在（且相等）.

3、叙述 ξ 是数集 S 聚点的定义和聚点定理.

答：设 S 为数集，ξ 为一定点，若 ξ 的任何邻域都含有 S 中无穷多个点，则称 ξ 是数集 S 的一个聚点. 或者在 ξ 的任何空心邻域内至少含有 S 中的一个点，或者存在

各项互异的收敛数列$\{x_n\}$，$x_n \to \xi (n\to\infty)$.

聚点定理：实轴上的任一有界无限点集至少有一个聚点.

二、填空题（每题 4 分，共 12 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right) =$ ______0________.

2、设函数$f(x)=x\sin(x^2)$，则$df(x)=$ $\underline{(\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2))dx}$

3、曲线$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2$的拐点的个数是______2________.

三、**判断下列命题是否正确，若正确给出证明，若错误举出反例。（每题 8 分，共 16 分）**

1、若函数$f(x), g(x)$都在区间I上一致连续，则$f(x)\cdot g(x)$在I上也一致连续.

答：命题错误。

反例：取$f(x)=x$，$g(x)=x$都在区间$[1,+\infty)$上一致连续，但是$f(x)\cdot g(x)=x^2$在区间$[1,+\infty)$上不一致连续.

2、若$f(x)$在0的某邻域$U(0)$内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1$，则$f(x)$在$0$处取得极小值.

答：命题正确。

由$f(x)$在0处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1$得，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}\cdot x^4=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4}=1>0$，由极限的局部保号性得，$\exists\delta>0$, 对任意$x\in U^0(0;\delta)$，都有

$$\frac{f(x)}{x^4}>0,$$

故当$x\in U(0;\delta)$时，$f(x)\ge 0=f(0)$，从而$f(x)$在0处取得极小值.

四、求解下列各题（每题8分，共40分）

1. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

2. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x[(1+\dfrac{1}{x})^x-e]$.

解：原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}[\frac{1}{t(1+t)}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]}{1}$

$==\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}=e\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\ln(1+t)}{2t+3t^2}=e\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t}{2t+3t^2}=-\dfrac{e}{2}$.

3. 求曲线$\begin{cases}x(t)=e^t\sin 2t\\ y(t)=e^t\cos t\end{cases}$在点$t=0$处的切线方程.

解：当$t=0$时，$x=0,y=1$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}.$$

故曲线在点$t=0$处的切线方程：$y=\dfrac{x}{2}+1$.

4. 求函数$f(x)=x+\sin x$的凸性区间.

解：$f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x=\begin{cases}\ge 0, & x\in[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi],\\ \le 0, & x\in[2k\pi,2k\pi+2\pi],\end{cases}k\in Z$,

故$f(x)$的凸区间是$[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$，凹区间是$[2k\pi,2k\pi+\pi]$.

5. 求函数 $f(x)=e^{x^2}-e\cdot x^2$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值与最小值.

解：在 $(0,2)$ 内，$f'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2ex=0$，得 $x=1$.

又 $f(0)=1, f(1)=e$，$f(2)=e^4-4e$，故最大值 $f(2)=e^4-4e$，最小值 $f(0)=1$.

五、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1.（1）若 $\{a_n\}$ 满足：$\exists M>0$，对一切 n 有 $A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\le M$. 证明：数列 $\{A_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 都收敛；（2）若 $\{b_n\}$ 满足：$|b_n-b_{n-1}|\le r|b_{n-1}-b_{n-2}|, n\ge 3$，其中 $0<r<1$，证明：数列 $\{b_n\}$ 收敛.

证明：（1）$\left\{A_n\right\}$ 为单调增且有上界的数列，故 $\{A_n\}$ 收敛.

由柯西准则

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall m>n>N \text{，有} \left|A_m-A_n\right|<\varepsilon$$

又

$$\left|a_m-a_n\right|\le\left|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}+\cdots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n\right|$$

$$\le\left|a_m-a_{m-1}\right|+\left|a_{m-1}-a_{m-2}\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=\left|A_m-A_n\right|<\varepsilon$$

再由柯西准则，$\{a_n\}$ 收敛.

（2）由递推公式 $|b_n-b_{n-1}|\le r|b_{n-1}-b_{n-2}|, n\ge 3$ 可得，

$$B_n=|b_2-b_1|+|b_3-b_2|+\cdots+|b_n-b_{n-1}|\le(1+r+\cdots+r^{n-2})|b_2-b_1|\le\frac{1}{1-r}|b_2-b_1|$$

故 $\{B_n\}$ 有界，由（1）的结论得，$\{b_n\}$ 收敛.

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a)f(b)<0$，又存在常数 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\leq M$.

证明：$|f(a)|+|f(b)|\leq M(b-a)$.

证明：由零点定理得，存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$.

由拉格朗日中值定理得，

$|f(a)|+|f(b)|=|f(a)-f(x_0)|+|f(b)-f(x_0)|=|f'(\xi_1)||a-x_0|+|f'(\xi_2)||b-x_0|$，

其中 $\xi_1\in(a,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,b)$. 故由已知可得，

$$|f(a)|+|f(b)|\leq M|a-x_0|+M|b-x_0|=M(b-a).$$