

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

中国矿业大学 2020~2021 学年第 一 学期

《概率论与数理统计 A》试卷（A）卷

考试时间：100 分钟 考试方式：闭 卷

学院_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

可能用到的数据： $\Phi(1.64) = 0.9495$, $\Phi(1.65) = 0.9505$, $\Phi(1.5833) = 0.9433$, $\Phi(1.25) = 0.1056$

一、简答题（每小题 5 分，共 40 分）

1、 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$, 求 $P(B|A \cup \bar{B})$.

2、在区间 $(0,1)$ 上任取一点记为 X , 求 $P(X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} \geq 0)$.

3、设 X_1, X_2, X_3 相互独立且 $E(X) = \text{Var}(X) = 3$, 令 $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$, 求 $E(Y^2)$.

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

4、设 X 与 Y 的联合分布律为

$\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}$	1	2	3
1	$3/18$	$2/18$	$1/18$
2	$6/18$	a	b

且 X 与 Y 相互独立，求 a, b 。

5、设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布，其方差 $\sigma^2 > 0$ ，令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，求 $Cov(X_1, Y)$ 。

6、设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布， X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的简单随机样本， \bar{X} 为样本均值，求 λ^2 的无偏估计量。

7、已知 $X \sim N(-1, 2)$ ，且 $aX + b \sim N(0, 1)$ ($a > 0$)，求常数 a, b 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

8、设 X_1, X_2, X_3, X_4 是取自总体 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 的样本，判断 $Y = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 服从什么分布，并给出解释。

二、(10 分) 口袋中有一个球，不知它的颜色是黑还是白，现在先往口袋中放入一个白球，然后从口袋中任取一个球，发现取出的是白球，试求口袋中原来那个球是白球的概率为多少？

三、(10 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $p(x, y) = \begin{cases} k, & 0 < x^2 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求常数 k ；(2) 求概率 $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

四、(10分) 试证对任意常数 c ($c \neq EX$)，有 $Var(X) < E(X - c)^2$ ，其中

$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

五、(12分) 设总体 X 的概率密度为 $p(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$ $\theta > 0$ ，求 θ 的最大似然估计量，并判断是否为达到方差下界的无偏估计，即有效估计。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

六、(10 分) 设总体服从 $X \sim N(\mu, 300^2)$ ，对 μ 作如下假设检验：

$$H_0: \mu = \mu_0 = 900, H_1: \mu > \mu_0$$

取 $n = 25$ 的样本，若已知 H_0 的接受域为 $\bar{X} \in (-\infty, 995]$

(1) 求犯第一类（弃真）错误的概率；

(2) 若 H_0 不正确，而 $\mu = \mu_1 = 1070$ ，犯第二类（取伪）错误的概率是多少？

七、(8 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，其密度函数为 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & 0 < x < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中 $\beta > 0$,

令 $Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ，试证 $Y_n \xrightarrow{P} 0$.