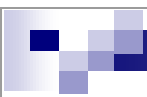


# 第2章 图像处理— 2.3常用处理

信控学院 蔡利梅

- 
- 所谓图像处理，就是对二维像素矩阵的各种变换，根据变换后的效果，分为：
    - 图像增强
    - 图像平滑
    - 图像锐化
    - 图像复原

## 2.3.1 图像增强 (Image Enhancement)

### ■ 图像增强的含义

利用各种数学方法和变换手段，**增强**图像中感兴趣区域或有用的图像特征的**清晰度**，**提高**图像的**可懂度**，或改善视觉效果。



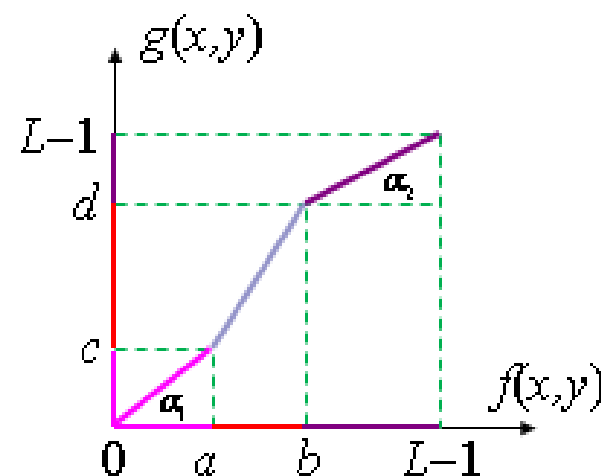
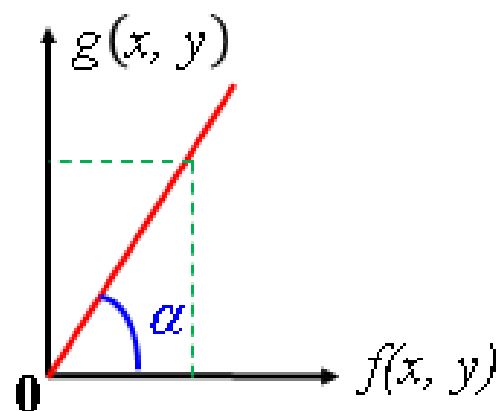
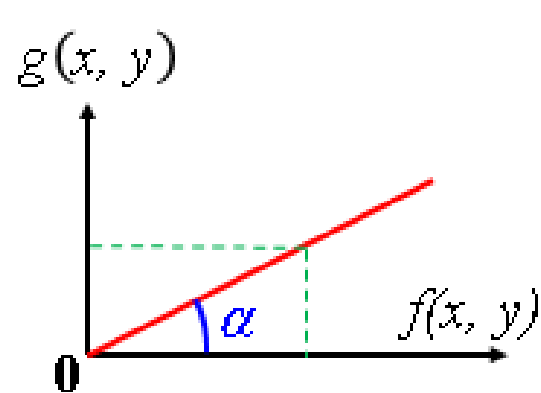
## ■ 常规增强方法

### □ 灰度级变换

借助于函数变换将输入的像素灰度值映射成一个新的输出值，通过改变像素的亮度值来增强图像

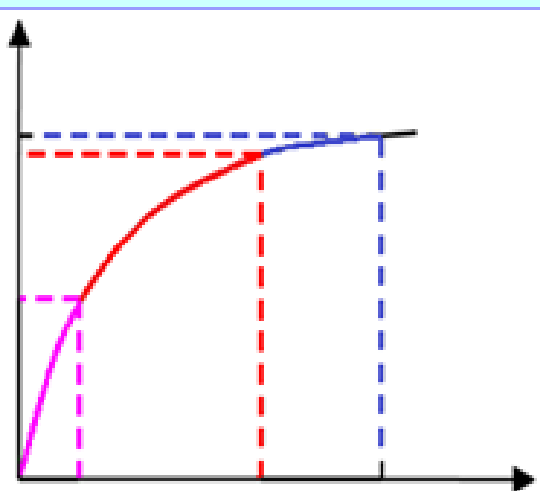
$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

### 线性灰度级变换

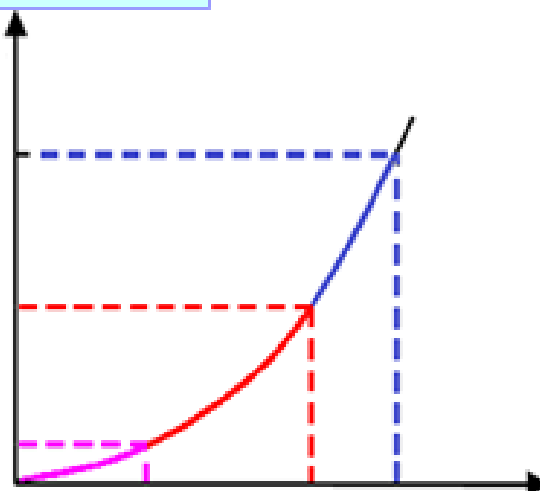


## 非线性灰度级变换

$$g(x, y) = c \cdot \log[f(x, y) + 1]$$



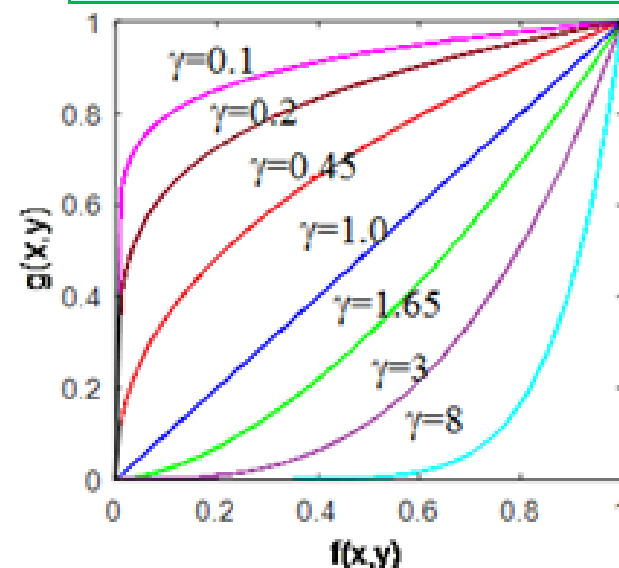
对数变换



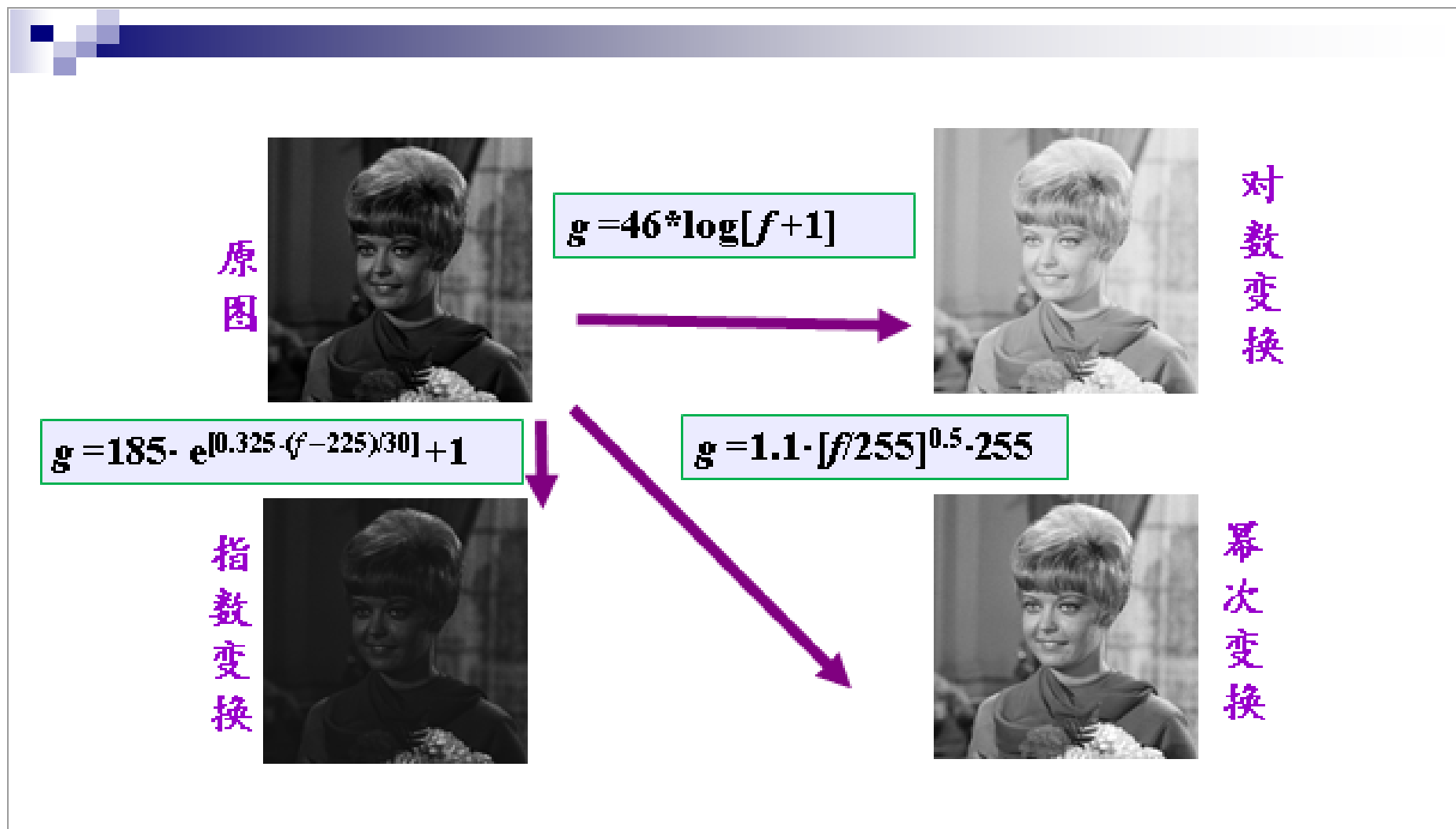
指数变换

$$g(x, y) = b^{c[f(x, y) - a]} - 1$$

$$g(x, y) = c \cdot [f(x, y)]^\gamma$$



幂变换

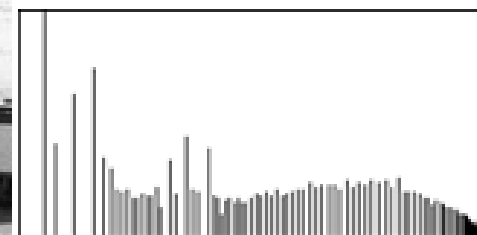
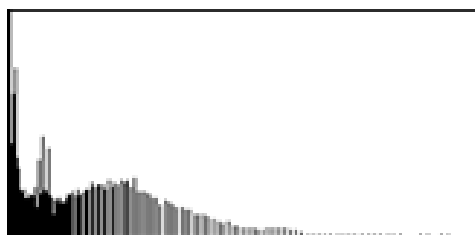


□ 直方图均衡化

$$s = T(r) = \int_0^r P_r(\omega) d\omega$$

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j)$$

利用r的**累积分布函数**作为变换函数可产生一幅灰度级分布具有**均匀概率密度**的图像



## ■ 其他增强方法

### □ 基于照度反射模型的图像增强

#### 照度-反射模型:

$$f(x,y) = i(x,y) \times r(x,y)$$

$$0 < i(x,y) < \infty$$

$$0 < r(x,y) < 1$$

(0全吸收, 1全反射)

$i(x,y)$ 描述景物照明的缓慢变换, 近似为**低频分量**。 $r(x,y)$ 描述景物内容的快速变化, 近似为**高频分量**。

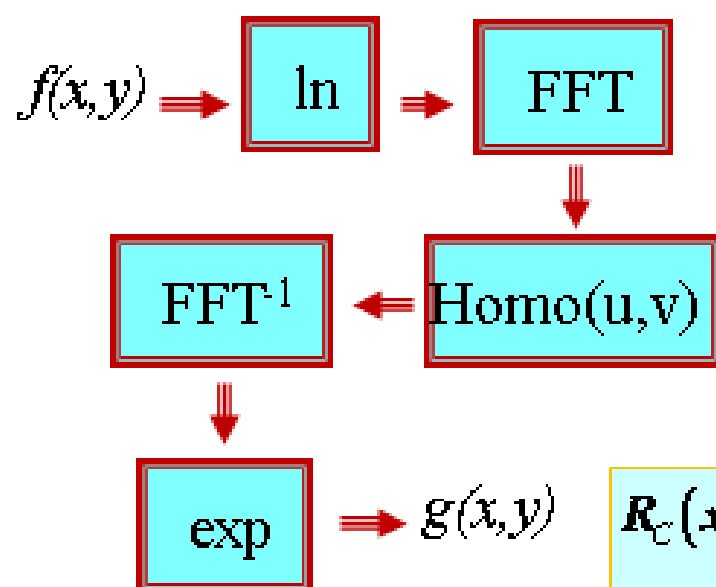
同态滤波: **扩展反射分量**  $r(x,y)$ , **压缩光照分量**  $i(x,y)$ 。

Retinex增强: 从原图中**估计光照分量**  $i(x,y)$ , 计算  $r(x,y) = f(x,y) / i(x,y)$ , 从而获得物体的本来面貌。



## □ 基于照度反射模型的图像增强

### 同态滤波



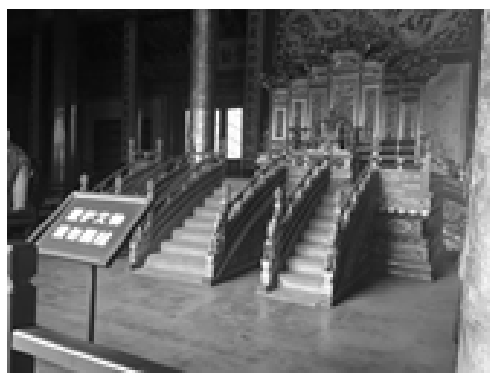
### Retinex增强

$$I_c(x, y) = F(x, y) * f_c(x, y)$$

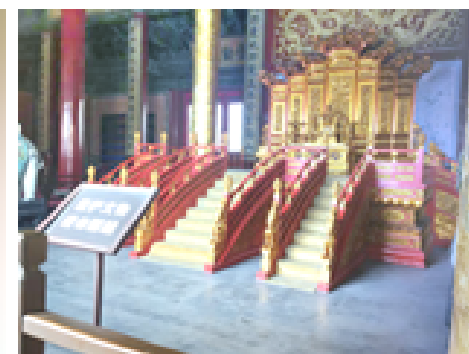
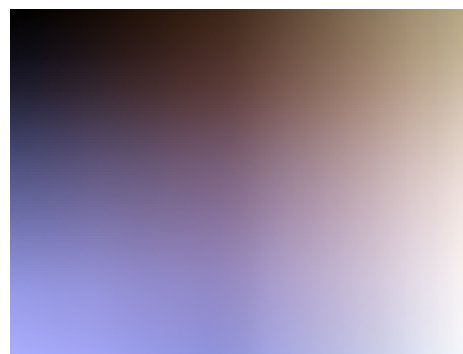
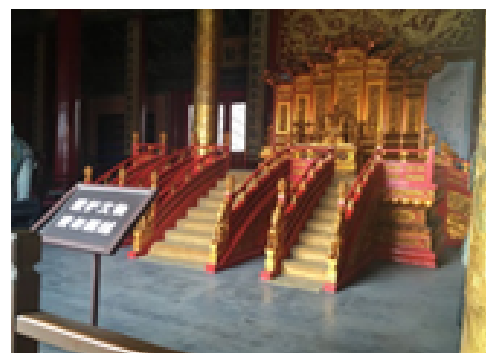
$C \in \{R, G, B\}$ ,  $f_c(x, y)$  为图像  $f(x, y)$  的第  $C$  颜色通道的亮度分量

$$F(x, y) = K \cdot e^{-\{(x^2 + y^2) / \sigma^2\}}$$

$$\begin{aligned} R_c(x, y) &= \ln[f'_c(x, y)] = \ln[f_c(x, y)] - \ln[I_c(x, y)] \\ &= \ln[f_c(x, y)] - \ln[F(x, y) * f_c(x, y)] \end{aligned}$$



同态滤波



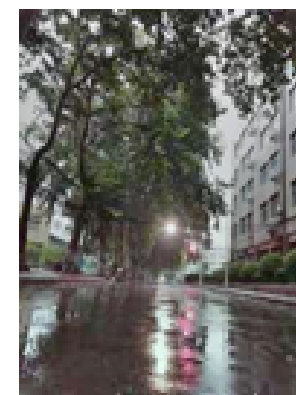
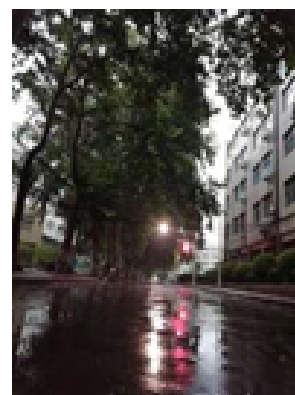
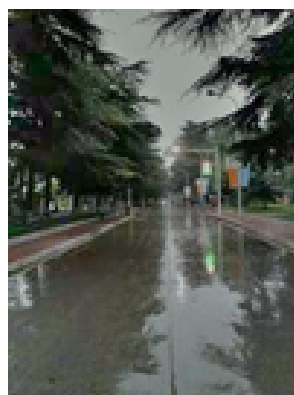
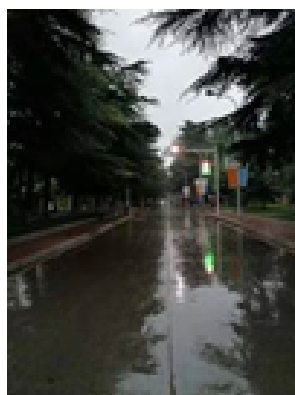
单尺度Retinex增强

**多尺度Retinex增强MSR：**多个不同单尺度Retinex的加权平均。

$$R_{n_c}(x, y) = \left\{ \ln[f_c(x, y)] - \ln[F_n(x, y) * f_c(x, y)] \right\}$$

第 $C$ 通道第 $n$ 个尺度Retinex增强输出,  $n=1, 2, \dots, N$

MSR输出: 
$$R_c(x, y) = \sum_{n=1}^N w_n R_{n_c}(x, y)$$



**MSRCR**: 在MSR的基础上, 加入了色彩恢复因子

$$R_{M_c}(x, y) = \left[ \sum_{n=1}^N w_n R_{n_c}(x, y) \right] \cdot \gamma_C(x, y)$$

$$\gamma_C(x, y) = \eta \cdot \ln \left[ \beta \cdot \frac{f_C(x, y)}{\sum_{C \in \{R, G, B\}} f_C(x, y)} \right]$$



## □ 基于模糊的图像增强

### ◆ 将图像从空间灰度域变换到模糊域

$$\mu_{mn} = T(x_{mn}) = \left[ 1 + \frac{x_{\max} - x_{mn}}{F_d} \right]^{-F_e}$$

✓  $F_e$ 为指数模糊因子。一般情况下， $F_e$ 取为2。

✓  $F_d$ 为分数模糊因子，定义为

$$F_d = \frac{x_{\max} - x_c}{2^{1/F_e} - 1}$$

✓ 其中， $x_c$ 为渡越点，其取值需要满足：

$$\mu_c = T(x_c) = 0.5 \quad \text{且} \quad x_c \in X$$

## □ 基于模糊的图像增强

### ◆ 在模糊域，对模糊特征进行一定的增强

$$\begin{cases} \mu'_{mn} = I_r(\mu_{mn}) = \begin{cases} 2\mu_{mn}^2, & 0 \leq \mu_{mn} < 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu_{mn})^2, & 0.5 \leq \mu_{mn} < 1 \end{cases} \\ I_r(\mu_{mn}) = I_1(I_{r-1}(\mu_{mn})) \end{cases}$$

✓  $\mu'_{mn}$  为增强后的模糊域像素灰度值；

✓  $r$  为正整数，表示迭代次数；

### ◆ 逆变换，得到新的模糊增强后的输出图像

$$z_{mn} = I^{-1}(\mu'_{mn}) = x_{\max} - F_d \left[ (\mu'_{mn})^{\frac{1}{F_d}} - 1 \right]$$



- 基于对数图像处理模型的图像增强

- 基于小波变换的图像增强

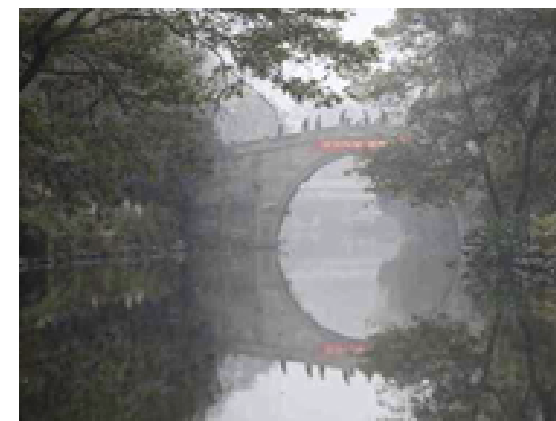
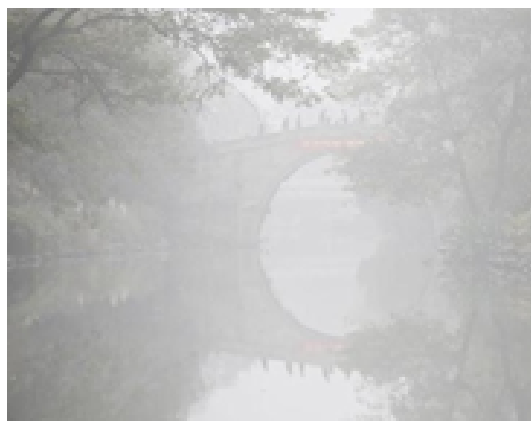
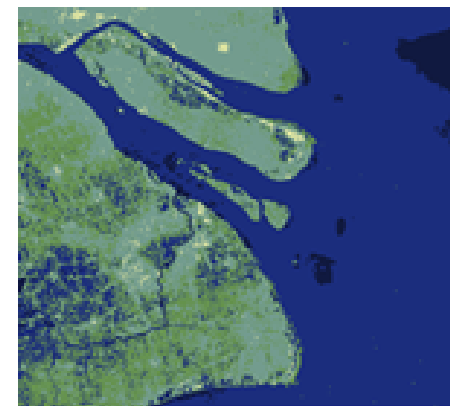
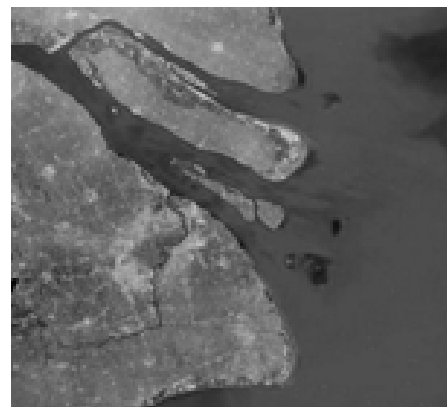
.....

- 特殊增强

- 伪彩色增强

- 去雾增强

- 低照度图像增强



## 2.3.2 图像平滑 (Image Smoothing)

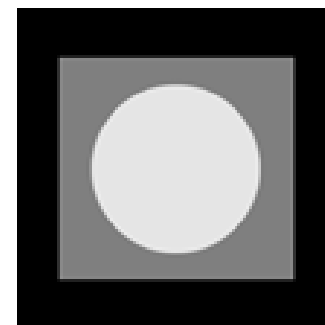
### ■ 图像平滑的含义

抑制或消除图像中存在的噪声，改善图像质量

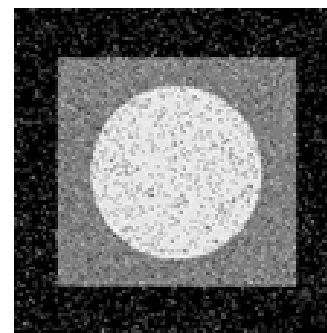
#### □ 图像噪声

**椒盐噪声：**噪声幅值基本相同，出现位置随机。

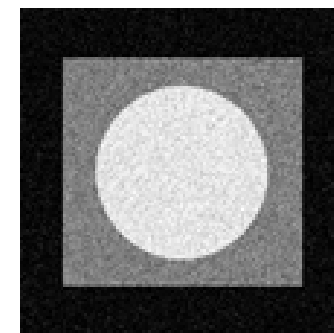
**高斯噪声：**每一点都有噪声，幅值分布近似符合正态特性。



原始图像



椒盐噪声



高斯噪声



## ■ 常规平滑方法

### □ 均值滤波

以被处理像素点为中心，周围选择一个邻域，邻域内像素点的灰度值**求平均**；用均值代替被处理点的灰度值。

$$H_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



椒盐噪声



3×3滤波，噪声减小，有模糊



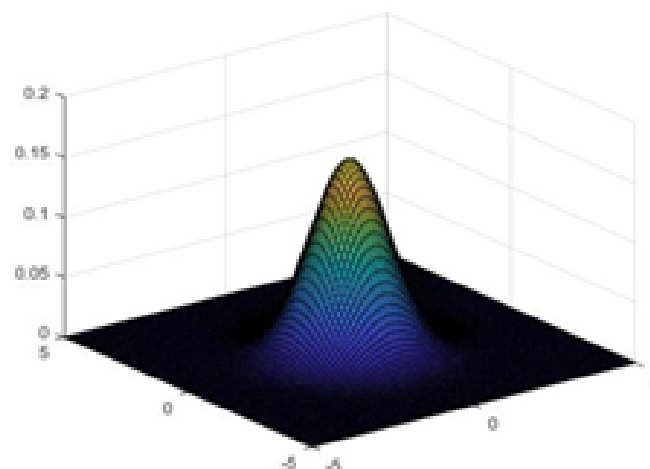
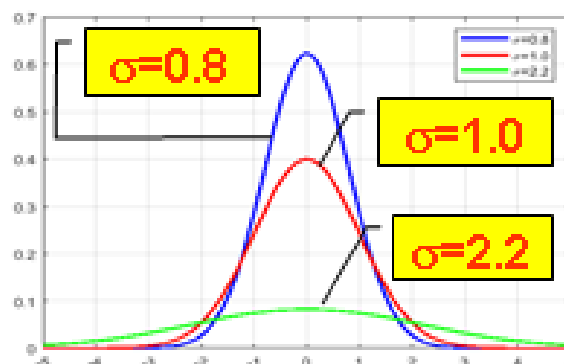
5×5滤波，噪声减小较多，模糊严重

## □ 高斯滤波

- ◆ 以被处理像素点为中心，周围选择一个邻域，邻域内像素点的灰度值**加权求平均**；用均值代替被处理点的灰度值。
- ◆ 权值根据距离中心像素的距离确定，符合二维高斯分布，对应高斯模板。
- ◆ 高斯滤波实质上是图像与高斯滤波器的卷积运算。

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



## ◆ 高斯模板

$\sigma = 0.8$

$$H_1 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \frac{1}{2070} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 22 & 10 & 1 \\ 10 & 108 & 237 & 108 & 10 \\ 22 & 237 & 518 & 237 & 22 \\ 10 & 108 & 237 & 108 & 10 \\ 1 & 10 & 22 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sigma = 1$

$$H_3 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \frac{1}{330} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 20 & 33 & 20 & 4 \\ 7 & 33 & 54 & 33 & 7 \\ 4 & 20 & 33 & 20 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

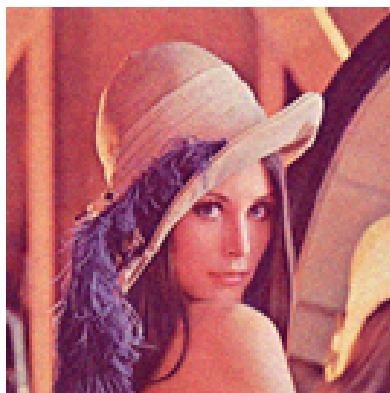
$\sigma = 2.2$

$$H_5 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

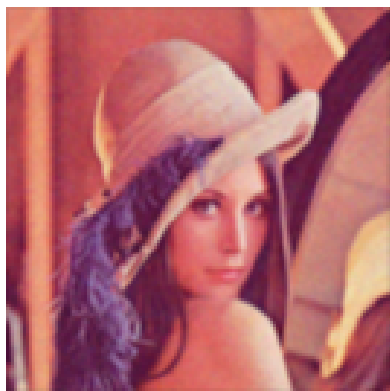
$$H_6 = \frac{1}{51} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

## □ 高斯滤波

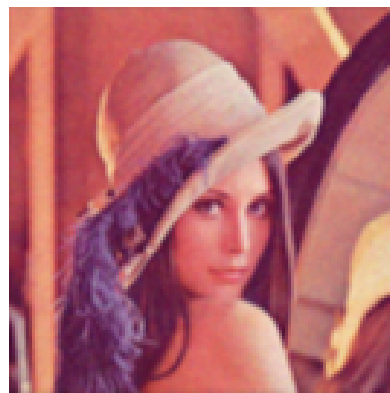
高  
斯  
噪  
声



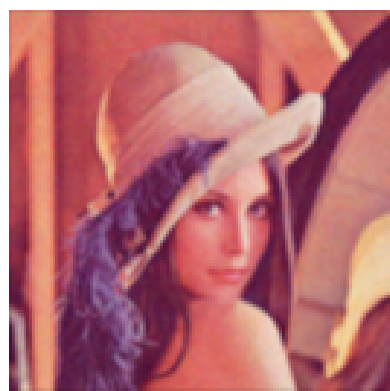
$\sigma = 1.0$   
的高斯滤  
波



$\sigma = 0.8$ 的  
高斯滤波



$\sigma = 2.2$   
的高斯滤  
波



## □ 中值滤波

以被处理像素点为中心，周围选择一个邻域，邻域内像素点的**排序找中值**；用中值代替被处理点的灰度值。

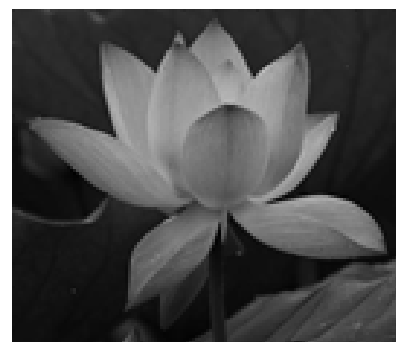
椒盐噪声



均值滤波



中值滤波



## □ 双边滤波

邻域内像素点的加权平均，权值同时考虑图像的**空间位置邻近性**和**像素灰度的相似性**

$$H_p = G_{\sigma_s}(\|p - q\|) \cdot G_{\sigma_r}(|I_p - I_q|) \\ = e^{-\frac{(\|p - q\|)^2}{2\sigma_s^2}} \cdot e^{-\frac{(|I_p - I_q|)^2}{2\sigma_r^2}}$$

### ◆ 空间邻近度高斯函数

$$G_{\sigma_s}(\|p - q\|) = e^{-\frac{(\|p - q\|)^2}{2\sigma_s^2}}$$

$\|p - q\|$  表示点  $p$  和  $q$  的欧氏距离；  
 $\sigma_s$  为空间邻域标准差；

### ◆ 灰度邻近度高斯函数

$$G_{\sigma_r}(|I_p - I_q|) = e^{-\frac{(|I_p - I_q|)^2}{2\sigma_r^2}}$$

$|I_p - I_q|$  表示点  $p$  和  $q$  的灰度值差；  
 $\sigma_r$  为像素灰度标准差；

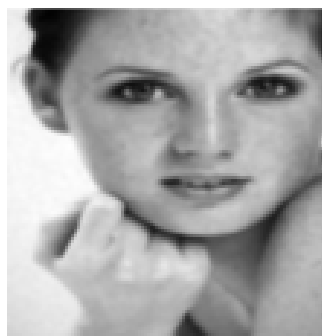
## □ 双边滤波



噪声图像

$\sigma_s = 2$

$\sigma_r = 0.1$



$\sigma_r = 0.25$



$\sigma_r = 50$



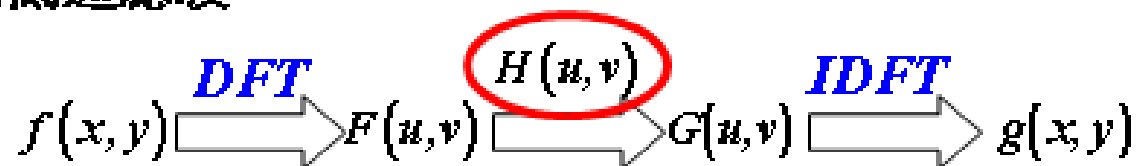
$\sigma_s = 18$



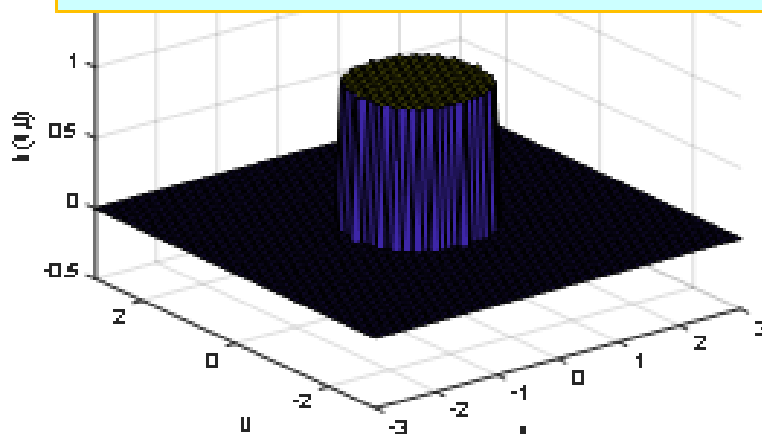
## ■ 其他平滑方法

### □ 频域低通滤波

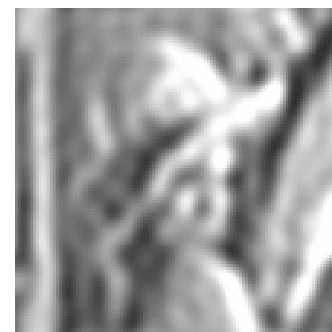
关键技术：低通滤波器的设计



$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$



lena 图像

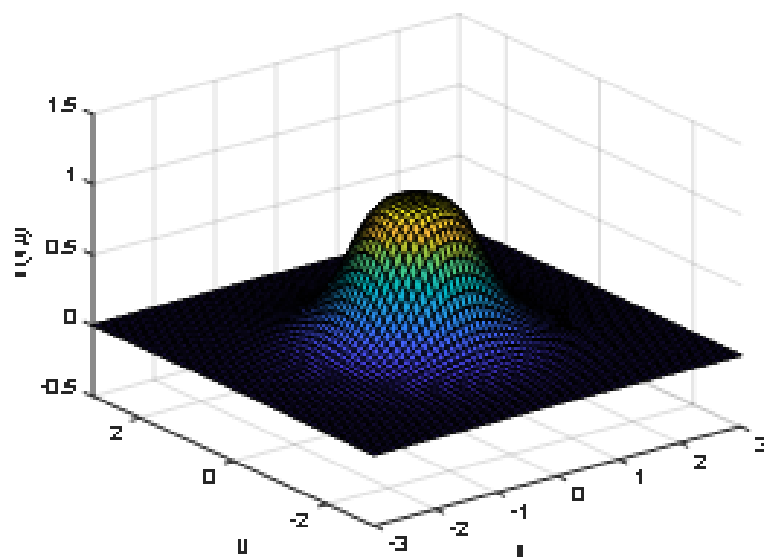


$D_0=11$ , 能量95%



## □ 频域低通滤波

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$



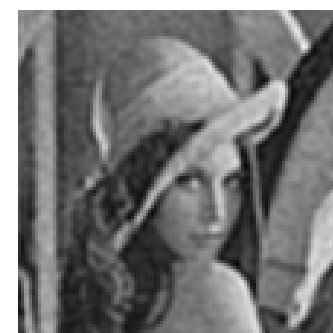
高斯噪声图像



$n=1, D_0=30$



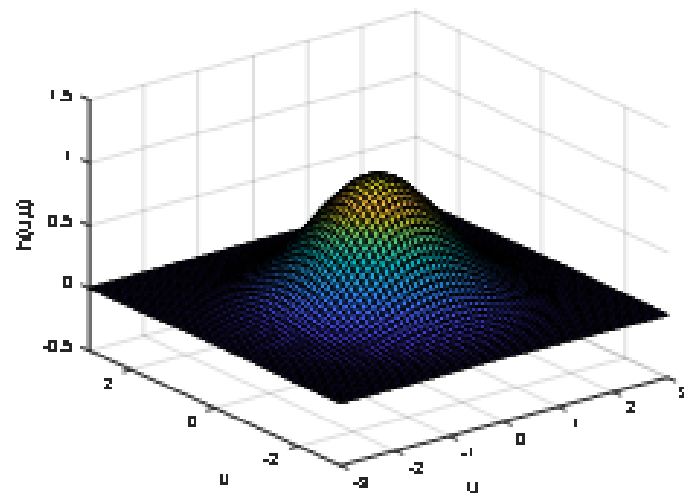
$n=2, D_0=30$



$n=4, D_0=30$

## □ 频域低通滤波

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$



高斯噪声图像



$D_0=20$



$D_0=40$



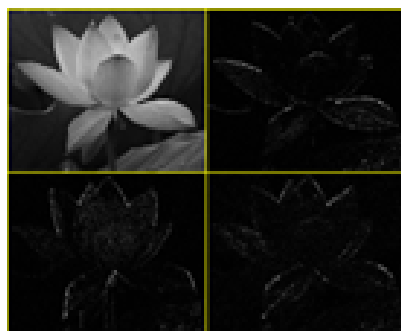
$D_0=65$

## □ 频域低通滤波

小波变换后低通滤波，去除不同级别的高频



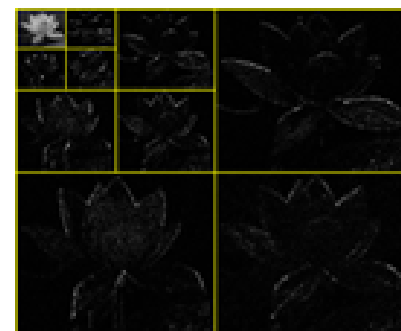
原图



一级小波分解



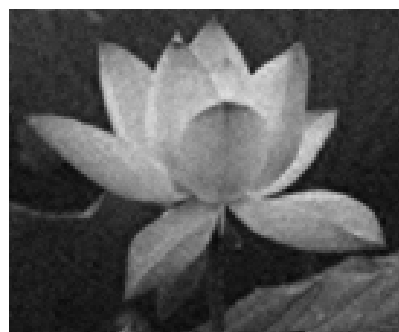
二级小波分解



三级小波分解



去除高频重构



高频衰减一半重构



去除一级高频重构

## □ 基于模糊技术的平滑滤波

- ◆ 模糊技术与空域平滑滤波的结合，进行模糊加权：模糊权值可以由邻点相对于中心点的灰度变化和邻域内灰度变化关系确定。

## □ 基于偏微分方程的平滑滤波

- ◆ 按照某一规定的偏微分方程将图像发生变化，方程的解就是处理后的图像。
- ◆ 各向同性热扩散模型：以经典的热传导方程对图像进行扩散变形，可证明，某一个时间 $t$ 时，扩散结果等价于图像和一个高斯函数的卷积， $t$ 对应高斯函数的方差，不同 $t$ ，不同尺度，得到不同尺度下的平滑图像。
- ◆ 各向异性P-M非线性扩散模型：计算图像边缘的梯度值，边缘处，小的扩散系数，保持边缘；非边缘，大的扩散系数，消除噪声。

## 2.3.3 图像锐化 (Image Sharpening)

### ■ 图像锐化的含义

加强图像中景物的边缘和轮廓，突出图像中的细节或者增强被模糊了的细节。

如何**检测**、**增强**边缘信息？

边缘分析

边缘示意图



变化曲线图



一阶导数



二阶导数



## 边缘分析结论

突变型细节：检测一阶微分极值点，二阶微分过0点  
细线型细节：检测一阶微分过0点，二阶微分极值点  
渐变型细节：难检测，二阶微分信息略多于一阶微分

### ■ 常规锐化方法

#### □ 一阶微分

- ◆ 图像 $f(x,y)$ 在 $(x,y)$ 处的梯度

$$G[f(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^T$$

- ◆ 用梯度的幅度来代替

$$G[f(x,y)] = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

或

$$G[f(x,y)] = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

## □ 一阶微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+1, y) - f(x, y)}{x+1 - x} = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(x, y+1) - f(x, y)}{y+1 - y} = f(x, y+1) - f(x, y)$$

$$g(x, y) = |f(x+1, y) - f(x, y)| + |f(x, y+1) - f(x, y)|$$

$g(x, y)$   
称为梯度图像

**图像锐化：**原图像和梯度图像  
相加，突出边缘和轮廓

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

**边缘检测：**检测出边缘所在的位置，找出微分中的过零  
点或极值点

## □ 一阶微分

**Roberts算子**

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Sobel算子**

$$H_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Prewitt算子**

$$H_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Kirsch算子**

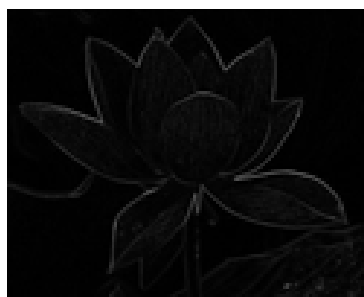
$$H_x = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$H_y = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

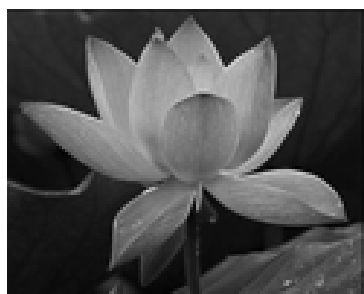




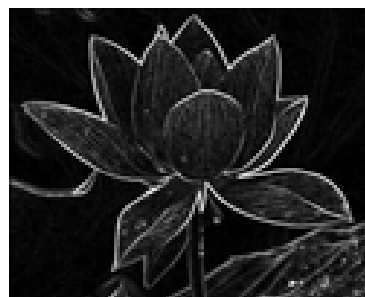
原图



Robert's  
梯度图像



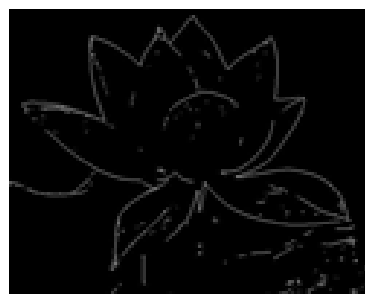
锐化图像



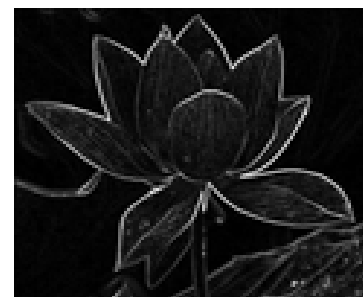
Sobel  
梯度图像



Sobel  
锐化图像



Sobel  
边缘检测



Prewitt  
梯度图像



Prewitt  
锐化图像



Prewitt  
八个模板梯度

## □ 二阶微分

**拉普拉斯算子:**  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \Delta_x f(x+1, y) - \Delta_x f(x, y) \\ &= [f(x+1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x-1, y)] \\ &= f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \Delta_y f(x, y+1) - \Delta_y f(x, y) \\ &= [f(x, y+1) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x, y-1)] \\ &= f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= f(x+1, y) + f(x-1, y) \\ &\quad + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)\end{aligned}$$

用模板表示:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

锐化模板:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## □ LoG算子

用高斯函数先对图像作平滑，然后用拉普拉斯算子检测边缘

$$\nabla^2[f(x,y)*g(x,y)]$$

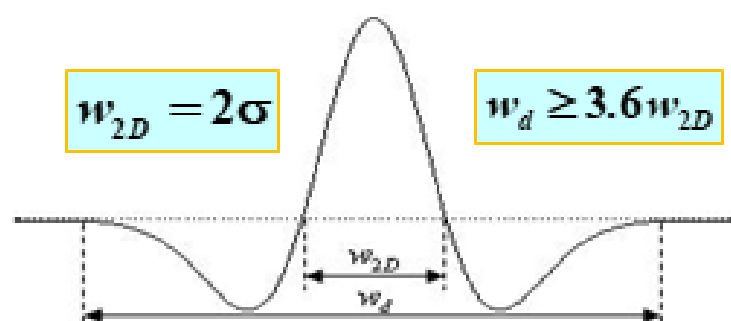
可以证明： $\nabla^2[f(x,y)*g(x,y)] = f(x,y)*\nabla^2g(x,y)$

$\nabla^2g(x,y)$  为LoG滤波器，也称为Marr-Hildreth算子

$$\nabla^2g(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left( \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma$ 称为尺度因子，大的值可用来检测模糊的边缘，小的值可用来检测聚焦良好的图像细节。

## □ LoG算子

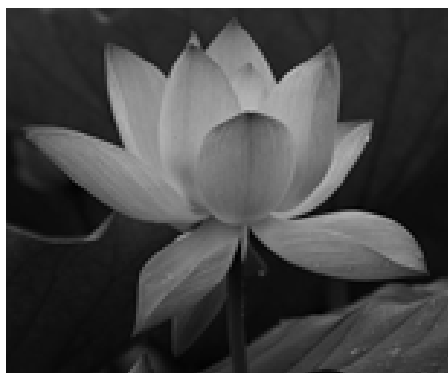


$\nabla^2 g$ 的横截面

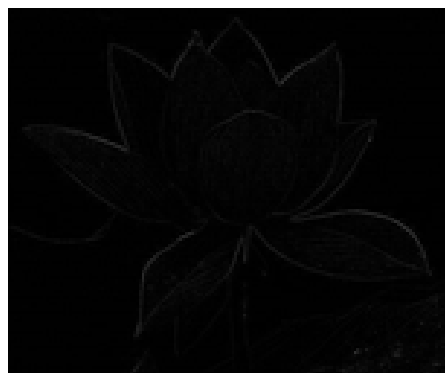
0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

0	0	0	-1	-1	-2	-1	-1	0	0	0
0	0	-2	-4	-8	-9	-8	-4	-2	0	0
0	-2	-7	-15	-22	-23	-22	15	-7	-2	0
-1	-4	-15	-24	-14	-1	-14	-24	-15	-4	-1
-1	-8	-22	-14	52	103	52	-14	-22	-8	-1
-2	-9	-23	-1	103	178	103	-1	-23	-9	-2
-1	-8	-22	-14	52	103	52	-14	-22	-8	-1
-1	-4	-15	-24	-14	-1	-14	-24	-15	-4	-1
0	-2	-7	-15	-22	-23	-22	15	-7	-2	0
0	0	-2	-4	-8	-9	-8	-4	-2	0	0
0	0	0	-1	-1	-2	-1	-1	0	0	0

11×11的LOG近似模板,  $\sigma^2=2$



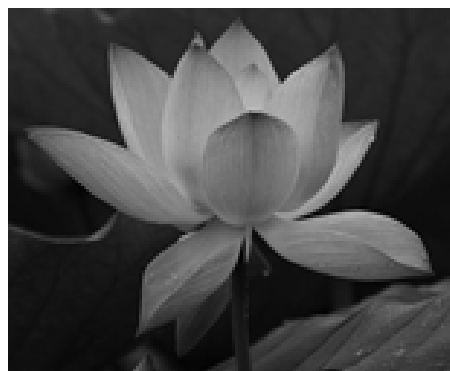
原图



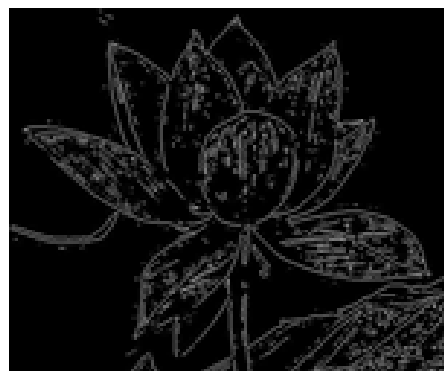
拉普拉斯滤波图像



拉普拉斯锐化图像



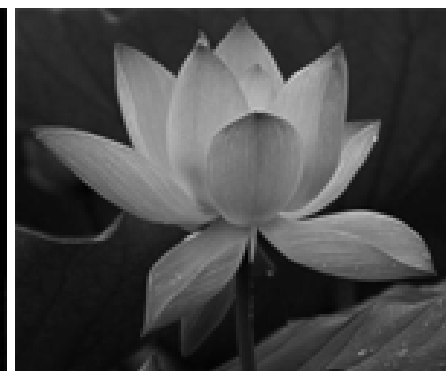
原图



LoG边缘检测



LoG滤波图像

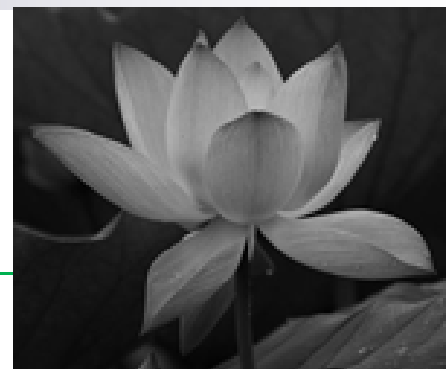


LoG锐化图像

## □ Canny算子

### 多级边缘检测

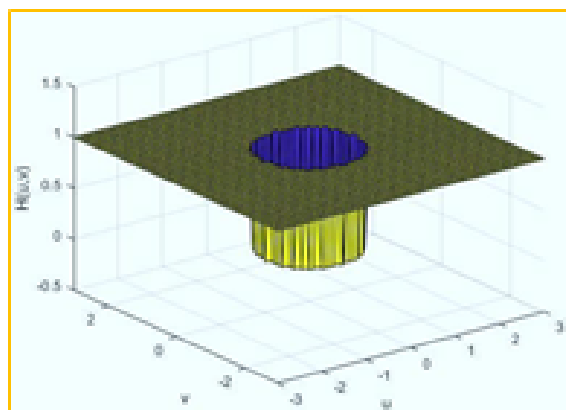
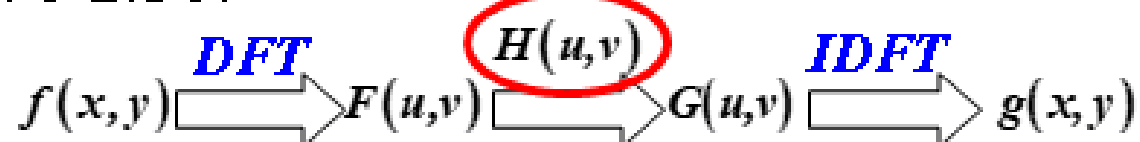
- ◆ 使用高斯平滑滤波器卷积降噪
- ◆ 计算平滑图像的梯度幅值和方向，可采用不同的梯度算子
- ◆ 对梯度幅值应用非极大抑制，即找出图像梯度中的局部极大值点，其他非局部极大值点置零
- ◆ 使用双阈值检测和连接边缘
  - ✓ 高阈值用来找到每一条线段
  - ✓ 低阈值用来确定线段上的点



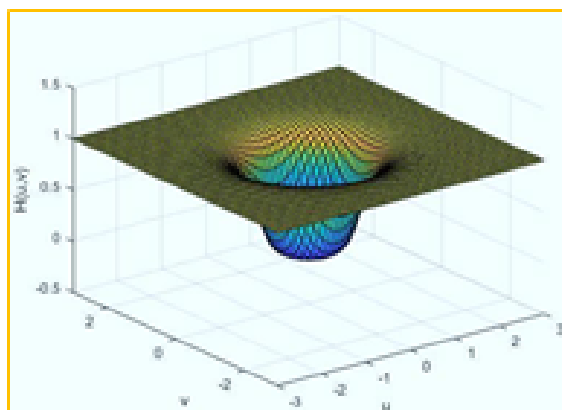
## ■ 其他锐化方法

### □ 频域高通滤波

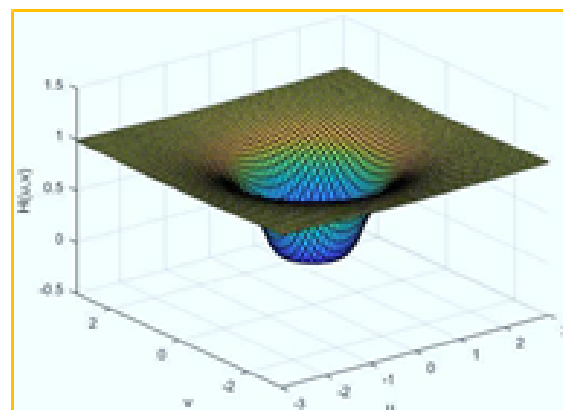
关键技术：高通滤波器的设计



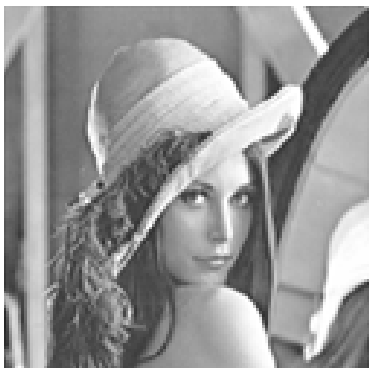
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$



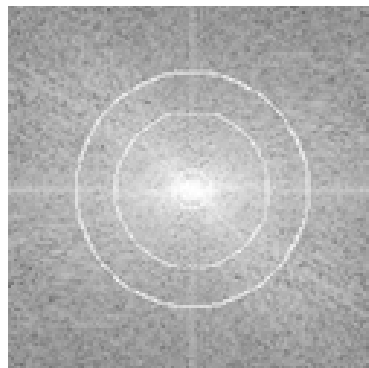
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$



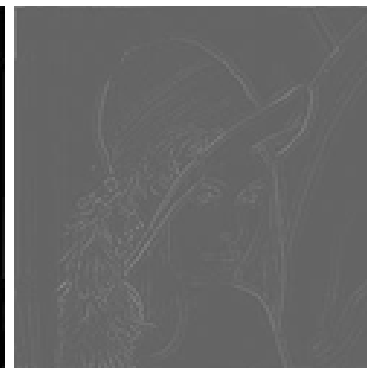
$$H(u,v) = \exp \left\{ - \left[ \frac{D_0}{D(u,v)} \right]^n \right\}$$



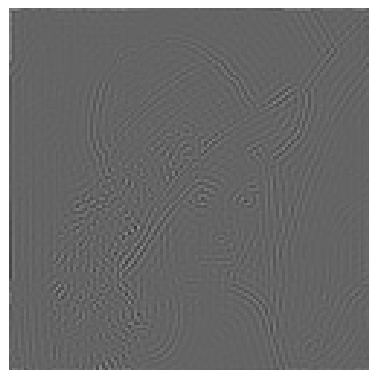
原图



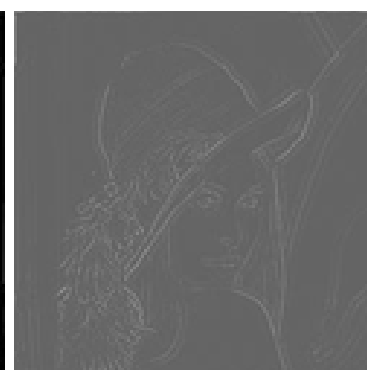
傅里叶频谱图



指数高通滤波



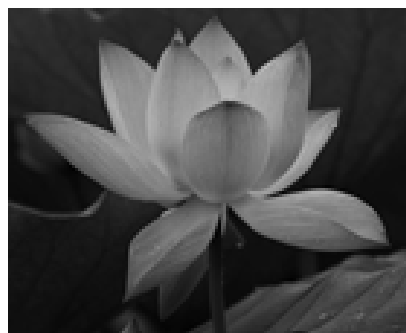
理想高通 $D_0=45$



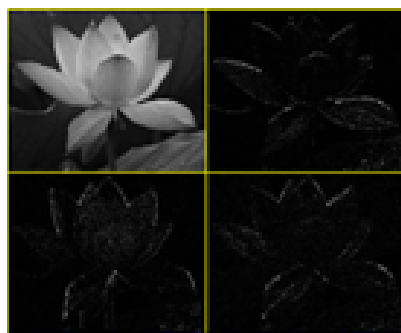
巴特沃斯高通滤波



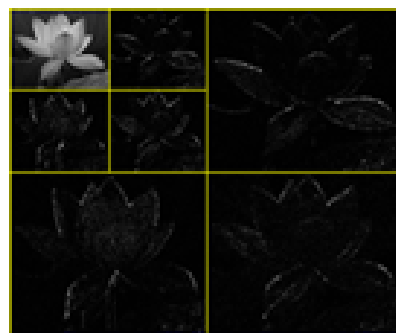
□ 频域高通滤波 小波变换后的高通滤波，去除不同级别的低频



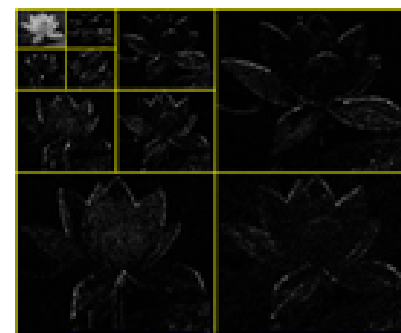
原图



一级小波分解



二级小波分解



三级小波分解

三级分解保留所有高频重构



三级分解保留一级高频重构



## □ 基于小波变换模极大值的边缘检测方法

先平滑图像，再检测边缘

$$\nabla[f(x,y)*g(x,y)]=\nabla f(x,y)*g(x,y)=f(x,y)*\nabla g(x,y)$$

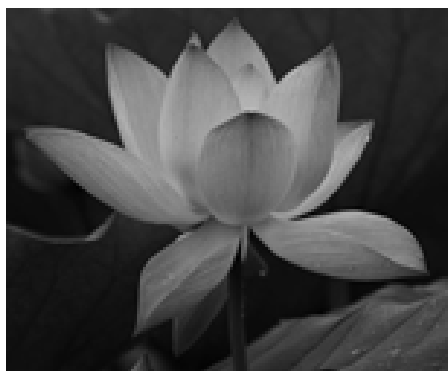
平滑函数满足一定要求时，其一阶偏导数为小波函数，对图像进行小波变换，再检测局部极值，确定边缘

高斯函数

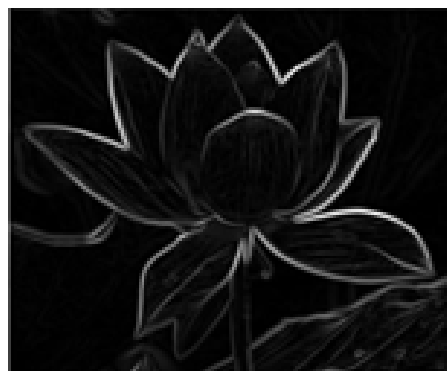
两个小波函数，  
两次小波变换

- ◆ 选取平滑函数，求一阶偏导确定小波函数
- ◆ 进行小波变换
- ◆ 计算图像的小波变换矢量模值和相角
- ◆ 寻找梯度方向上取极大值的点
- ◆ 去除噪声点，确定边缘图像

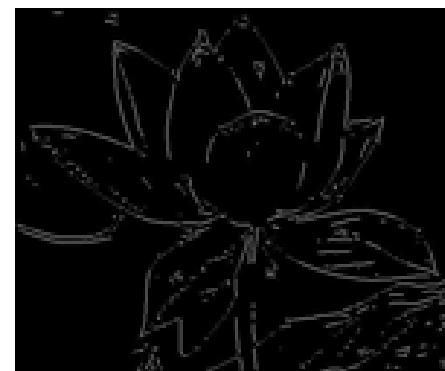
## □ 基于小波变换模极大值的边缘检测方法



原图



小波变换  
模图像



模极大提取的  
边缘图像

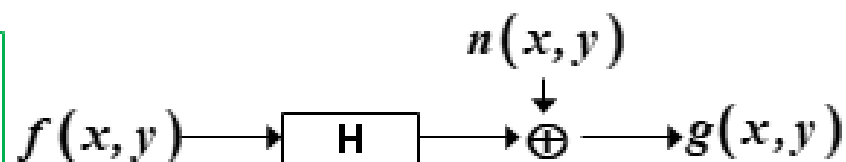
### 2.3.4 图像复原 (Image Restoration)

在图像生成、记录、传输过程中，由于成像系统、设备或外在的干扰，会导致图像质量下降，称为**图像退化**，如大气扰动效应、光学系统的像差、物体运动造成的模糊、几何失真等。

对退化图像进行处理，使之恢复原貌的技术称之为**图像复原** (Image Restoration)，**关键**在于确定退化的相关知识，将退化过程模型化，采用相反的过程尽可能恢复原图，或者说使复原后的图像尽可能接近原图。

## ■ 退化模型

将退化过程抽象为一个退化系统H以及加性噪声的影响



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

用线性、空间不变系统模型模拟

$$\begin{aligned} H[f(x, y)] &= f(x, y) * h(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

退化模型

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y)$$

$h(x, y)$ 称为点扩散函数 (PSF)

其傅里叶变换 $H(u, v)$ 也称为光学传递函数 (OTF)

## ■ 图像复原

图像复原是指在给定退化图像 $g(x,y)$ ，了解退化的点扩散函数 $h(x,y)$ 和噪声项 $n(x,y)$ 的情况下，估计出原始图像 $f(x,y)$

### 复原步骤:

- 确定图像的退化函数
- 采用合适的图像复原方法复原图像

可采用**盲复原方法**：  
直接从退化图像估计原图像

采用与退化相反的过程，使复原后的图像尽可能接近原图，一般要确定一个合适的准则函数，最优情况对应最好的复原图。这一步的**关键技术在于确定准则函数和求最优**。

## ■ 无约束最小二乘方复原

噪声项:  $n = g - Hf$

最佳准则:  $J(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2 = (g - H\hat{f})^T (g - H\hat{f})$

$J(\hat{f})$  的最小值对应最优  $H\hat{f}$  在最小二乘方意义上近似于  $g$

选择  $\hat{f}$  不受其他条件约束, 称为无约束复原

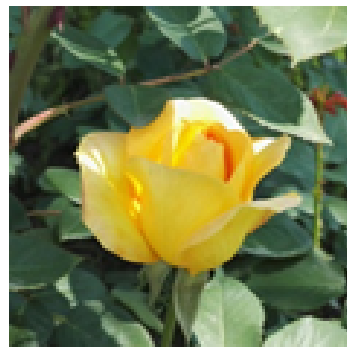
最佳准则求最优:  $\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = -2H^T (g - H\hat{f}) = 0$

$$\hat{f} = H^{-1} (H^T)^{-1} H^T g = H^{-1} g$$

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

## 逆滤波

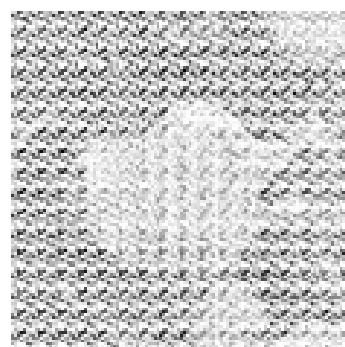
### 均值模糊图像



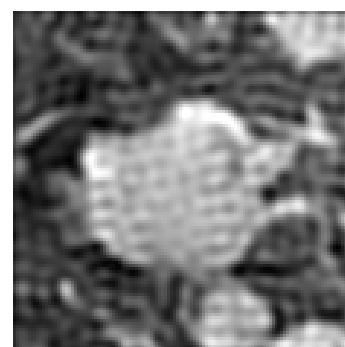
逆滤波



模糊加噪声



直接逆滤波



低通特性逆滤波



## ■ 约束复原

附加某种约束条件，称为约束复原。用拉格朗日乘数法来求解

$$\text{约束条件: } \|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2$$

准则函数:  $\|Q\hat{f}\|^2$  最小为最优  $Q$ 为对原图像进行的某一线性运算

$$\text{拉格朗日函数: } J(\hat{f}) = \|Q\hat{f}\|^2 + \lambda(\|g - H\hat{f}\|^2 - \|n\|^2)$$

$$\text{求极小值: } \frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 2Q^T Q \hat{f} - 2\lambda H^T (g - H\hat{f}) = 0$$

$$\hat{f} = \left( H^T H + \frac{1}{\lambda} Q^T Q \right)^{-1} H^T g$$

## 维纳滤波

使原图和复原图像之间**均方误差最小**的复原方法。

均方误差:

$$e^2 = E[(f - \hat{f})^2]$$

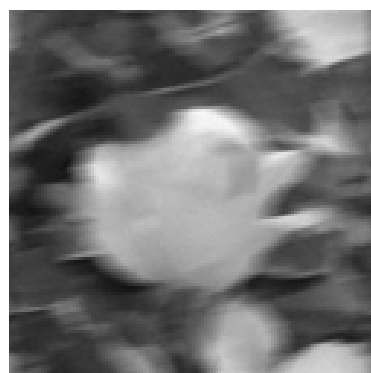
传递函数:

$$H_w(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v)/S_f(u, v)}$$

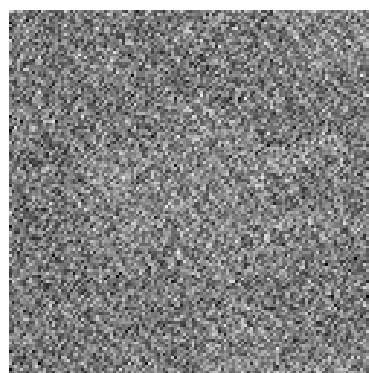
功率谱:

$$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$$

$$S_n(u, v) = |N(u, v)|^2$$



运动模糊加  
高斯噪声图像



维纳滤波复原  
(NSR=0)



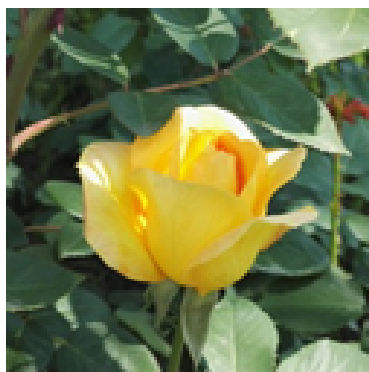
维纳滤波复原  
(估计NSR)

## 等功率谱滤波 使原始图像和复原图像功率谱相等的复原方法

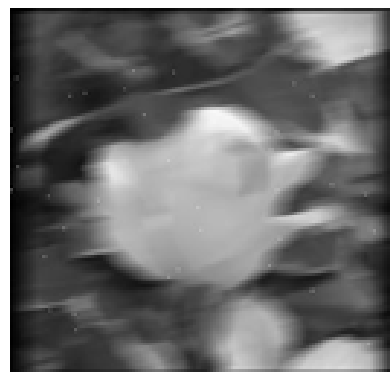
设图像和噪声均属于均匀随机场，噪声均值为零，与图像不相关

等功率谱  $S_f(u,v) = S_r(u,v)$

传递函数:  $M(u,v) = \left[ \frac{1}{|H(u,v)|^2 + S_n(u,v)/S_f(u,v)} \right]^{1/2}$



原图



运动模糊加椒盐噪声



等功率谱滤波

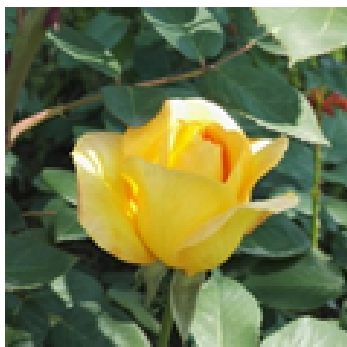
## 约束最小二乘方滤波

采用最小化原图二阶微分的方法

Q为拉普拉斯算子： $l(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  最优化准则： $\min(f(x,y)*l(x,y))$

$$\hat{f} = \left( H^T H + \frac{1}{\lambda} L^T L \right)^{-1} H^T g$$

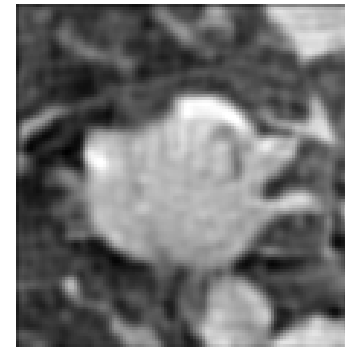
$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H_e^*(u,v)}{|H_e(u,v)|^2 + \frac{1}{\lambda} |L_e(u,v)|^2} \right] G_e(u,v)$$



原图



均值模糊加高斯噪声



约束最小二乘方滤波

## ■ 盲去卷积复原

不以PSF知识为基础的图像复原方法

### 最大似然估计的盲图像复原算法

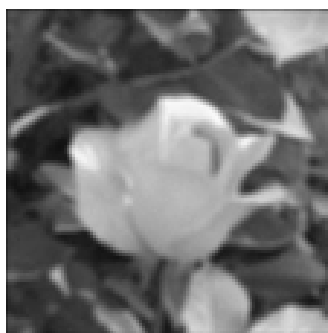
根据退化图像、原图以及PSF的先验知识，采用概率理论建立似然函数，再**对似然函数求最大值**，实现原图和PSF的估计重建。

设退化图像 $g(x,y)$ 的概率为 $P(g)$ ，原图 $f(x,y)$ 的概率为 $P(f)$ ，由 $f(x,y)*h(x,y)$ 估计 $g(x,y)$ 的概率为 $P(g|h*f)$ ，由 $g(x,y)$ 估计 $f(x,y)*h(x,y)$ 的概率为 $P(h*f|g)$ ，由贝叶斯定理可知：

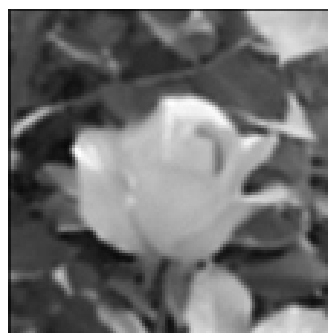
$$P(h*f|g) = \frac{P(g|h*f)P(f)P(h)}{P(g)}$$

最大时，认为原始图像和PSF最大概率逼近真实结果，即最大程度实现了原始图像和PSF的估计重建。

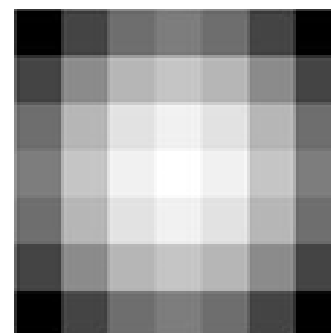
## 最大似然估计的盲图像复原算法



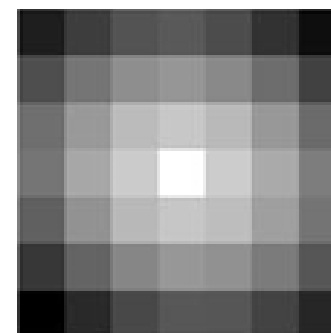
高斯模糊  
加噪声



盲复原图像



真正的PSF



重建的PSF