中国矿业大学

《数学分析（2）》2008-2009 学年第二学期试卷 A 及答案

考试时间：**120** 分钟　考试方式：闭卷

院系__________班级____________姓名______________学号__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得　分									
阅卷人									

一　填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \Big/ \int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t =$ _______________.

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x =$ ____________.

3. 星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$ 的周长为______________.

4. 心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0, 0 \le \theta \le 2\pi)$ 所围图形的面积为___________.

5. $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} =$ _______；$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} =$ _______.（若收敛，则填入积分值；否则，填入“∞”.）

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2+n^2}}$ ____________.（填入“绝对收敛”、“条件收敛”、“发散”三者之一）.

7. 设 $f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ _____________；

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ __________；$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ __________.（若极限存在，则填

入极限值；否则，填入“不存在”.）

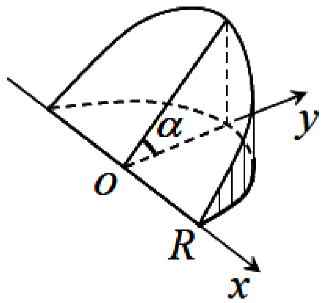
二（10 分）设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t},$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数.

三（10 分）证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geq a>0\ (x\in[a,b])$，则 $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

四（10 分）设一平面通过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 且与底面的夹角为 α，求截得楔形体的体积.



五（10 分）设数列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

六（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数(指出收敛域).

七（10 分）求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并确定它收敛于该函数的区间.

八（10 分）把函数 $f(x)=\left|\sin x\right|,\quad -\pi\le x<\pi$ 展开为傅里叶级数.

(提示：$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$，$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)$ $+\sin(\alpha-\beta)]$)

中国矿业大学 08~09 学年第二学期

《数学分析(2)》试卷（A）卷参考答案

一 填空题（每空 3 分, 共 30 分）

1. 0； **2.** $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$； **3.** $6a$； **4.** $\dfrac{3}{2}\pi a^2$；

5. $\dfrac{1}{\ln 2}$；∞； **6.** 条件收敛； **7.** 不存在；-1；1.

二（10 分）设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t},$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数.

证：$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0,x>0$$

所以 $\varphi(x)$ $(0,+\infty)$ 上的严格增.

三（10 分） **证明：若** f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\ge a>0\ (x\in[a,b])$，则 $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

证： 由 $f(x)\in R[a,b]$，从而有界，即存在正数 M，使得 $a\le f(x)\le M, x\in[a,b]$. 又任给 $\varepsilon>0$，则存在分割 T，使得

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < a\varepsilon .$$

对于$[a,b]$上T所属的每一个Δ_i，利用 Lagrange 中值定理有

$$\omega_i^{\ln f} = \sup_{x',x''\in\Delta_i} \left|\ln f(x') - \ln f(x'')\right|$$

$$= \sup_{x',x''\in\Delta_i} \frac{1}{\xi_i}\left|f(x') - f(x'')\right| \le \frac{1}{a}\omega_i^f$$ （其中ξ_i在$f(x')$与$f(x'')$之间）.

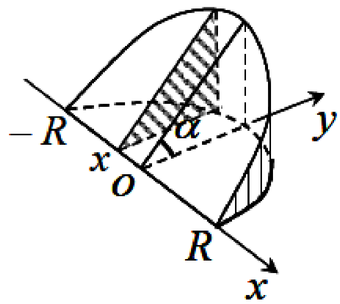
所以有

$$\sum_T \omega_i^{\ln f}\Delta x_i \le \frac{1}{a}\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \frac{1}{a}\cdot a\varepsilon = \varepsilon ,$$

也就是$\ln f \in R[a,b]$.

四（10 分）设一平面通过半径为R的圆柱体的底圆中心, 且与底面的夹角为α，

求截得楔形体的体积.



解: 建立坐标系如右图, 则底圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

过点$x\in[-R,R]$作垂直于x轴的截面, 得

$$A(x) = \frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha, x\in[-R,R].$$

则楔形体的体积为

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha .$$

五（10 分）设数列$\{na_n\}$收敛，级数$\sum n(a_n - a_{n-1})$也收敛，证明级数$\sum a_n$收敛.

证：由条件, 不妨设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} na_n$，$A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$.

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_0) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})$$

$$= na_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ ,$$

即有

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_n - \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1}).$$

上式两边, 令 $n \to \infty$,得

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} na_n - \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k-1}) = a - A.$$

这就证得级数 $\sum a_n$ 收敛.

六（10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数(指出收敛域).

解： $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$.

当 $x = \pm 1$，级数发散，所以收敛域为 $(-1,1)$。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)'' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)''$$

$$= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1).$$

七（10 分） 求函数 $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$ 在 $x = 0$ 处的幂级数展开式, 并确定它收敛于该函数的区间.

证： $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = -\frac{x}{(2x+1)(x-1)}$

$$= -\frac{1}{3}[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-1}]$$

$$=-\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}[1-(-1)^n 2^n]x^n\text{，}\quad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\text{。}$$

八（10 分）把函数 $f(x)=\left|\sin x\right|,\quad -\pi\le x<\pi$ 展开为傅里叶级数.

解：$\left|\sin x\right|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$。

其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(1-x)+\cos(1+n)x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2-1}[\cos(n-1)\pi-1]\quad(n\neq 1)$$

$$=\begin{cases}0, & n=3,5,\cdots\\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}, & n=2,4,\cdots\end{cases}$$

因此

$$\left|\sin x\right|=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{4m^2-1}\cos 2mx,\ -\infty<x<+\infty.$$