数理统计练习

1、设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是独立同分布的随机变量，且 $X_1\sim N\left(0,1\right)$.

（1）试确定常数 c，使得 $Y=c\left(X_1^2+X_2^2\right)$ 服从 χ^2 分布，并指出它的自由度；

（2）试确定常数 d，使得 $Z=d\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，并指出它的自由度.

2、设 $(X,Y)\sim N(1,2;4,9;0.5)$，求 $(2X+Y,X-2Y)$ 的协方差矩阵.

3、假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，$x_1,x_2,\cdots,x_{16}$ 是来自 X 的 16 个观察值，要在 $\alpha=0.05$ 的水平下检验假设 $H_0:\mu=\mu_0=0,H_1:\mu\neq 0$，取拒绝域为 $R=\left\{\left|\overline{X}\right|\geq c\right\}$.

（1）求常数 c 的值；　　（2）若已知 $\bar{x}=1$，是否可以据此推断 $\mu=0$（$\alpha=0.05$）；

（3）如果以 $R=\left\{\left|\overline{X}\right|\geq 0.9\right\}$ 作为假设检验 $H_0:\mu=0$ 的拒绝域，试求显著水平 α 的值.

4、设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x<1\\ \theta, & 1\leq x<2\\ 2\theta, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$，其中 $0<\theta<1$ 未知，总体 X 的一组观察值为 1,1,3,2,1,2,3,3，试求 θ 的矩计值与最大似然估计值.

5、设总体 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，最小顺序统计量 $X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，试（1）求随机变量 $X_{(1)}$ 的概率密度；

（2）设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自总体 $X_{(1)}$ 的一个样本，求样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$ 的期望.

6、在彩色显影中,根据以往经验,形成染料光学密度 y 与析出银的光学密度 x 之间呈倒指数曲线关系：$y=ae^{b/x}\ (a>0)$，已测得 11 对数据 (x_i,y_i) 见下表.

x	0.05	0.06	0.07	0.10	0.14	0.20	0.25	0.31	0.38	0.43	0.47
y	0.10	0.14	0.23	0.37	0.59	0.79	1.00	1.12	1.19	1.25	1.29

算得 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=87.408$，$\sum_{i=1}^{n}\ln y_i=-6.732$，$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}\ln y_i=-112.84$

$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}=1101.16$，$\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i)^2=12.82$.

（1）求出经验回归曲线方程；（2）求 σ^2 的点估计值；（3）对回归曲线的显著性进行检验 $(\alpha=0.05)$；（4）求当光学密度 $x_0=0.3$ 时，染料光学密度 Y_0 的点估计.