$$\sum_{T'} \omega_i^f \Delta x_i \le a^2 \varepsilon$$ 。

对于$[a,b]$上T所属的每一个Δ_i，有

$$\omega_i^{\frac{1}{f}} = \sup_{x',x''\in\Delta_i} \left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right| = \sup_{x',x''\in\Delta_i} \left| \frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')} \right|$$

$$\le \frac{1}{a^2} \sup_{x',x''\in\Delta_i} \left| f(x') - f(x'') \right|$$

$$\le \frac{1}{a^2} \omega_i^f$$

所以有

$$\sum_T \omega_i^{\frac{1}{f}} \Delta x_i \le \frac{1}{m^2} \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon .$$

也就是$\frac{1}{f}$在$[a,b]$上可积。

中国矿业大学

《数学分析（2）》2009-2010 学年第 2 学期试卷 A 及答案

院系____________班级_______________姓名________________学号____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得　分										
阅卷人										

一　单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（　　）

A 连续　　　　B 有间断点　　　　C 有界　　　　D 有原函数

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \Big/ \int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t =$（　　）

A　1　　　　B　0　　　　C　-1　　　　D 发散

3. 下列反常积分中，收敛的是（　　）

A $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　　　B $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　　　　C $\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$　　　　D $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

4. 下列级数条件收敛的是（　　）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2}{n}$　　　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{3n+5}$

C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{10^n}$　　　　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$

5. 下列命题正确的是（　　）

A　若重极限存在，则累次极限也存在并相等；

B　若累次极限存在，则重极限也存在但不一定相等；

C　若重极限不存在，则累次极限也不存在；

D　重极限存在，累次极限也可能不存在

二、填空题（每空 3 分,共 15 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}]=$ ________.

2. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=$ ________.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x+1)^2$ 的收敛域为________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<\pi \\ 0, \quad x=0 \\ -x^2, -\pi<x<0 \end{cases}$, 则其傅里叶级数当 $x=0$ 时收敛于________.

5. 设 $f(x,y)=x^2\cos(1-y)+(y-1)\sin\sqrt{\frac{x-1}{y}}$ ，则 $f_y(1,1)=$ ________.

三（10 分）设 $p,q>0$，**且** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，**又设** $a,b>0$，**试用函数的凸性证明：**

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

四（10 分）将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 展开为幂级数.

五（10 分）把函数 $f(x)=x\,(0\le x\le 2\pi)$ 展开傅里叶级数.

六（10 分）设 f 为 $[a\,,b]$ 上的非负连续函数，证明：如果 $\int_a^b f(x)dx=0$，则

$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

七（10 分）**求级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$ **的收敛域及其和函数.**

八（10 分）过点 $(4,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ 的切线.

(1) 求切线的方程；

(2) 求由这条切线与该曲线及 x **轴绕** x **轴旋转一周所得的旋转体的体积.**

九（10 分）**设函数** $f(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上可积，且** $f(x)\geq a>0$**，证明：** $\frac{1}{f(x)}$ **在区间** $[a,b]$ **上也可积.**

中国矿业大学 09~10 学年第二学期

《数学分析(2)》试卷（A）卷参考答案

一 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（ **C** ）

A 连续　　B 有间断点　　C 有界　　D 有原函数

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \Big/ \int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t=$（ **B** ）

A 1　　B 0　　C -1　　D 发散

3. 下列反常积分中，收敛的是（ **A** ）

A $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$　　B $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$　　C $\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$　　D $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4. 下列级数条件收敛的是（ A ）

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2}{n}$　　B $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{3n+5}$

C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{10^n}$　　D $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$

5. 下列命题正确的是（ D ）

A 若重极限存在，则累次极限也存在并相等；

B 若累次极限存在，则重极限也存在但不一定相等；

C 若重极限不存在，则累次极限也不存在；

D 重极限存在，累次极限也可能不存在

二、填空题（每空 3 分,共 15 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}]=$ $\frac{\pi}{4}$.

2. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=$ 2.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x+1)^2$ 的收敛域为 $[-2,0]$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<\pi \\ 0, \quad x=0 \\ -x^2, -\pi<x<0 \end{cases}$，则其傅里叶级数当 $x=0$ 时收敛于 $-2\pi^2$.

5. 设 $f(x,y)=x^2\cos(1-y)+(y-1)\sin\sqrt{\frac{x-1}{y}}$，则 $f_y(1,1)=$ 0.

三（10 分）设 $p,q>0$，**且** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，**又设** $a,b>0$，**试用函数的凸性证明：**

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

证 令 $f(x)=-\ln x$，则 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0 \quad (x>0)$，所以 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数。

那么对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$， $p,q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

$$f(\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2)\le\frac{1}{p}f(x_1)+\frac{1}{q}f(x_2),$$

即有

$$-\ln\left(\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2\right)\le-\frac{1}{p}\ln x_1-\frac{1}{q}\ln x_2.$$

也就是

$$\frac{1}{p}\ln x_1+\frac{1}{q}\ln x_2\le\ln\left(\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2\right)$$

若 $a,b>0$，取 $x_1=a^p,x_2=b^q$，得

$$\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q\le\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right),$$

两边取指数就是

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

四（10 分）将函数 $f(x) = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 展开为幂级数.

解　$f'(x) = \left(\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{2}{1+x^2} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $|x|<1$,

因此

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad |x|<1$$

五（10 分）把函数 $f(x) = x\ (0 \le x \le 2\pi)$ 展开傅里叶级数.

解 $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx$$

$$= -\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

所以

$$f(x) = x = \pi - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx, \quad 0 < x < 2\pi$$

六（10 分）设 f 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明：如果 $\int_a^b f(x)dx=0$，则

$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

证 反证法 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不是恒为为零，即存在 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0)>0$. 不妨设 $a<x_0<b$，由连续函数的性质，存在 $U(x_0,\delta)\subset(a,b)$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有

$$f(x_0)>\frac{1}{2}f(x_0)>0$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)dx$$
$$\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx>\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{1}{2}f(x_0)dx=f(x_0)\delta>0$$

与条件矛盾，假设不成立。故 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

七（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$ 的收敛域及其和函数.

解 易求的级数的收敛域为 $[-1,1]$。令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$，$S(0)=0$。于是

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}, x\in[-1,1],$$

令 $f(x)=\begin{cases} S'(x)/x & ,x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，那么

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},$$

从而

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=\arctan x,$$

即得

$S'(x)=x\arctan x$，于是

$$S(x)=\int_0^x x\arctan x dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x\text{，}\quad x\in[-1,1]\text{。}$$

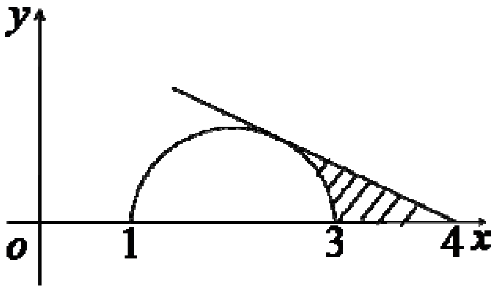
八（10 分）过点$(4,0)$作曲线$y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$的切线.

(1) 求切线的方程；

(2) 求由这条切线与该曲线及x轴绕x轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解 (1)令 $f(x)=\sqrt{(x-1)(3-x)}$,则

$$f'(x)=\frac{2-x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}.$$



过点$(4,0)$作曲线$y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$的切线,切线与x轴交点的横坐标是

$$x-\frac{y}{y'}=\frac{2x-3}{-2+x}=4\text{，}$$

得$x=\frac{5}{2}$，即切点横坐标为$x=\frac{5}{2}$。于是切线斜率为$f'(\frac{5}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，切线方程是

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\text{。}$$

(2) 所求旋转体的体积为

$$\pi\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\right)^2dx-\pi\int_{\frac{5}{2}}^{3}\left(\sqrt{(x-1)(3-x)}\right)^2dx=\frac{\pi}{6}\text{。}$$

九（10 分）设函数$f(x)$**在区间**$[a,b]$**上可积，且**$f(x)\ge a>0$**，证明：**$\frac{1}{f(x)}$ **在区间**$[a,b]$**上也可积.**

证 因为$|f(x)|\ge a>0$，故$0<\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{1}{a}$。由$f$在$[a,b]$上可积，任给$\varepsilon>0$，必分别存在分割$T$，使得