# 数值分析 · 课程作业 · 第四章

姓名：潘林越　班级：数学与应用数学 2020-2 班　学号：15194694

**1.** 构造函数的差商表.

| $x_i$ | $y_i = f(x_i)$ | 一阶差商 | 二阶差商 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\underline{1}$ | | |
| 1 | 2 | $\underline{1}$ | |
| 2 | 4 | 1.5 | $\underline{0.5}$ |

所以二次插值多项式为 $P_2(x) = 1 + 1 \times (x-0) + 0.5(x-0)(x-1) = 0.5x^2 + 0.5x + 1$.

**3.** 用 0.5,0.6,0.7,0.4 四点构造函数的差商表.

| $x_i$ | $\sin x_i$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 |
|---|---|---|---|---|
| 0.5 | $\underline{0.47943}$ | | | |
| 0.6 | 0.56464 | $\underline{0.8521}$ | | |
| 0.7 | 0.64422 | 0.82395 | $\underline{-0.2815}$ | |
| 0.4 | 0.38942 | 0.9001 | -0.2400 | $\underline{-0.1383}$ |

用 0.5,0.6 两点进行插值，得到线性插值多项式为 $P_1(x) = 0.47943 + 0.8521(x - 0.5) = 0.05338 + 0.8521x$. 所以 $\sin 0.57891 \approx P_1(0.57891) = 0.54667$. 截断误差约为 $|R_1(x)| \approx |f[0.5, 0.6, 0.7](x-0.5)(x-0.6)| \approx 4.68 \times 10^{-4}$.

用 0.5,0.6,0.7 三点进行插值，得到二次插值多项式为 $P_2(x) = 0.47943 + 0.8521(x - 0.5) - 0.2815(x-0.5)(x-0.6) = -0.2815x^2 + 1.16175x - 0.03107$. 所以 $\sin 0.57891 \approx P_2(0.57891) = 0.54714$. 截断误差约为 $|R_2(x)| \approx |f[0.5, 0.6, 0.7, 0.4](x-0.5)(x-0.6)(x-0.7)| \approx 2.79 \times 10^{-5}$.

**4.** 根据拉格朗日余项定理，有 $R_3(x) = f(x) - P_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\prod_{i=0}^{3}(x-x_i), \xi \in [-1, 2]$，并有 $f^{(4)}(x) = 4!$，则 $x^4 - P_3(x) = (x+1)x(x-1)(x-2)$，即 $P_3(x) = x^4 - (x+1)x(x-1)(x-2) = 2x^3 + x^2 - 2x$.

**6.** 有 $R_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$,则 $|R_1(x)| \le \dfrac{1}{2}\max\limits_{x_0 \le x \le x_1}|(x-x_0)(x-x_1)|\max\limits_{x_0 \le x \le x_1}|f''(x)| = \dfrac{1}{8}(x_1-x_0)^2\max\limits_{x_0 \le x \le x_1}|f''(x)|, \quad x \in [x_0, x_1]$，证毕.

**15.** 采用基函数的思想，首先求出分别满足下列插值条件的五个基本的四次埃尔米特插值多项式 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$

| $g(x)$ | $g(0)$ | $g(1)$ | $g(2)$ | $g'(0)$ | $g'(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_0(x)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_1(x)$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_2(x)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\beta_0(x)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\beta_1(x)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

设 $g(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. 则 $(g(0), g(1), g(2), g'(0), g'(1))^{\mathrm{T}} = (a_4, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, 16a_0 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4, a_3, 4a_0 + 3a_1 + 2a_2 + a_3)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A\alpha}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.\text{有}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1.25 & 1 & 0.25 & -0.5 & -1 \\ 4.5 & -4 & -0.5 & 2 & 3 \\ -4.25 & 4 & 0.25 & -2.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$\alpha_0(x) = (x^4, x^3, x^2, x, 1)\boldsymbol{A}^{-1}(1, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} = -1.25x^4 + 4.5x^3 + -4.25x^2 + 1.$$

同理

$$\alpha_1(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2, \quad \alpha_2(x) = 0.25x^4 - 0.5x^3 + 0.25x^2,$$

$$\beta_0(x) = -0.5x^4 + 2x^3 - 2.5x^2 + x, \quad \beta_1(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2.$$

被插值函数 $f(x)$ 具有以下插值条件

| $f(x)$ | $f(0)$ | $f(1)$ | $f(2)$ | $f'(0)$ | $f'(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | -2 | 3 | 0 | 1 |

所构造的四次埃尔米特插值多项式即为

$$P(x) = -2\alpha_1(x) + 3\alpha_2(x) + \beta_1(x) = -9.25x^2 + 9.5x^3 - 2.25x^4.$$

**17.** 等距节点函数表如下.

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^x$ | 0.018316 | 0.049787 | 0.13534 | 0.36788 | 1 | 2.7183 | 7.3891 | 20.086 | 54.598 |

在每个子区间上分别作线性插值，得

$$P_1(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},x\in[x_i,x_{i+1}],i=0,1,\cdots,n-1.$$

计算结果列于下表.

| $x\in$ | [-4,-3] | [-3,-2] | [-2,-1] | [-1,0] |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0.031471x+0.1442$ | $0.085553x+0.30645$ | $0.23254x+0.60042$ | $0.63212x+1$ |
| $x\in$ | [0,1] | [1,2] | [2,3] | [3,4] |
| $f(x)$ | $1.7183x+1$ | $4.6708x-1.9525$ | $12.697x-18.005$ | $34.512x-83.450$ |

要使截断误差不超过 $10^{-6}$，因 $|f(x)-P_1(x)|\leq\dfrac{h^2}{8}\max|f''(x)|$，则需 $\dfrac{h^2}{8}\mathrm{e}^4\leq10^{-6}$，所以

$$h\leq3.82\times10^{-4}.$$