hOLA BB

Imagenes/Universidad.png

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
MONTERÍA-CÓRDOBA
Trabajo Cálculo II
Programa: Ingeniería Mecánica
Docente: Luis Javier Rubio Hernández

Kenia Contreras Díaz

7 de junio de 2023

Resolver cada uno de los siguientes ejercicios

1. Determinar si cada una de las suigientes integrales es convergente o divergente, en caso de ser posible determine el valor de la integral.

- $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$
- $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\, dx$
- $\int_{-3}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} dx$

2. Determine el área de la región limitada entre las gráficas de $y = 2 - x$ y $y = 4 - x^2$ y las retas $x = -2$ y $x = 3$.

3. Determine el volumen del sólido generado.

- Al hacer girar la region en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = 2$, abajo por la curva $y = 2\sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$
- al hacer girar la region en el primer cuadrante acotada por arriba por la curva $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$

4.Utilice el método de los cascarones cilíndricos para determinar el volumen de cada uno de los sólidos que se obtienen.

- al girar alrededor del eje y las regiones acotadas por las curvas $y = 2 - x^2, y = x^2$ y $x = 0$
- al girar alrededor del eje x las regiones acotadas por las curvas $y = 2 - x, y = \sqrt{x}$ y $y = 0$

5. Calcule el volumen mediante secciones transversales de cada uno de los sólidos S descritos.

- Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r
- Una piramide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h

Solución

Punto 1

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$

Sabemos que la función de $\arctan x$ cuando se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ tiende al $-\infty$ y cuando se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ tiende al $+\infty$, es decir:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$$

En el caso de la integral tiene sus límites de integración entre 0 y $+\infty$, por lo tanto decimos que:

$$0 \leq \frac{tan^{-1}}{2+e^x} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{2+e^x}$$

Tenemos entonces que

$$\frac{\pi}{2} \lim_{t \to \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+e^x} dx$$

Procedemos a resolver la integral de forma indefinida

$$\int \frac{1}{2+e^x} dx$$

$$\begin{aligned} u &= 2+e^x \\ du &= e^x dx \\ u-2 &= e^x \\ (u-2)dx &= du \\ dx &= \frac{du}{u-2} \end{aligned}$$

Realizamos la siguiente fracción parcial

$$\int \frac{1}{u(u-2)} du$$

$$\frac{1}{u(u-2)} = \frac{A}{u} + \frac{b}{u-2}$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 = A(u-2) + Bu \\ S1 = Au - 2A + Bu \\ 1 = (A+B)u - 2A \\ A + B = 0 \\ -2A = 1 \end{array}\right\}$$

Tenemos los valores para A y B y son $A = -\frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-2}du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln\left(2+e^{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{x}\right)\right]_{0}^{t}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\ln\left(2+e^{t}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(t\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln\left(2+e^{0}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{0}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2+e^{t}}{e^{t}}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(3\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln(3)$$

$\boxed{\text{La } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x}dx \text{ es convergente y converge en } \frac{\pi}{4}\ln(3)}$

2. $\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+5x+6} dx + \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2)\\ x+3=0\\ x=-3\\ x+2=0\\ x=-2\end{aligned}$$

$=\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \lim_{t\to 2} \int_{-3}^{t} \frac{1}{x^2+5x+6} dx + \lim_{t\to\infty} \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

$$\lim_{t\to -2^-} \int_{-3}^{t} \frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

Resolvemos la siguiente fracción parcial

$$\frac{1}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\left.\begin{aligned}1 &= A(x+2) + B(x+3)\\ 1 &= Ax + 2A + Bx + 3B\\ 1 &= (A+B)x + 2A + 3B\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B &= 0\\ 3A+2B &= 1\end{aligned}\right\}$$

Tengo entonces los valores para A y B, siendo $A = 1$ y $B = -1$

$$\lim_{t\to -2^-} \int_{-3}^{t} \frac{1}{x+3} - \int_{-3}^{t} \frac{1}{x+2}$$

$$\left[\lim_{t\to 2^-} \ln{(x+3)}\right]_{-3}^{t} - \left[\lim_{t\to 2^-} \ln{(x+2)}\right]_{-3}^{t}$$

- Note qué al reeplazar el segundo límite de integración queda $\ln(-3+3)$ siendo esto 0 y $\ln(0)$ no está definido, de modo que no se puede completar la operación, y como la primera integral diverge, la segunda también lo hará es decir;

$\boxed{\text{La } \int_{-3}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx \text{ es divergente.}}$

3. $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$

Sabemos que la función de $ln(x)$ cuando se aproxima a ∞ tiende al ∞, es decir:

$$\ln x < \infty$$

Entonces podemos decir que:

$$\ln(\ln(x)) \leq \ln(x)$$

Por lo que si $\int_{e^e}^{\infty} \ln(x)\,dx$ converge o diverge entonces $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$ convergerá o divergerá

Entonces:

$$\int_{e^e}^{\infty} \ln(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{e^e}^{t} \ln(x)dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} [x\ln(x) - x]_{e^e}^{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} [(t\ln(t) - t) - (e^e \ln(e^e) - e^e)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} [(t\ln(t) - t) - (e^e(e-1))]$$

$$= \lim_{t\to\infty} (t\ln(t)) - \lim_{t\to\infty} (-t) - (e^e \ln(e^e) - e^e)$$

$$= \infty - (-\infty) - (e^e \ln(e^e) - e^e)$$

$$= es\ divergente$$

Como $\int_{e^e}^{\infty} \ln(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$ también lo es.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}dx$

Cuando $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ se aproxima a 0 cuando tienen a $-\infty$ al igual que se aproxima a 0 cuando tienen a ∞

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 0$$

Se sabe que:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4}}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{x^2} + \lim_{t \to -\infty} \int_{0}^{+t} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{t}^{0} + \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{0}^{t}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} \right) - \left(\lim_{t \to -\infty} -\frac{1}{t} \right) + \left(\lim_{t \to -\infty} -\frac{1}{t} \right) - \left(\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x} \right)$$

$$= (\infty) - (0) + (0) - (\infty)$$

$$= es\ divergente$$

si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4}}$ es divergente, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}dx$ es divergente

Punto 2
Determine el área de la región limitada entre las gráficas de $y = 2 - x$ y $y = 4 - x^2$ y las retas $x = -2$ y $x = 3$.

Empezaremos igualando las funciones para ver donde se cortan

$$
\begin{aligned}
-x^2 + 4 &= -x + 2 \\
-1\left(-x^2 + 4\right) &= (-x + 2) \\
x^2 - 4 &= x - 2 \\
x^2 - x - 4 + 2 \\
x^2 - x - 2 \\
(x - 2)(x + 1) \\
x &= 2 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Ya sabemos en qué puntos se cortan las funciones, por lo tanto procedemos a hacer una tabla de valores que inicia desde $x = -2$ hasta $x = 3$

x	$2 - x$
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1

x	$-x^2 + 4$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0
3	-5

Quedando de la siguiente manera:

Procedemos a sacar el área de la zona limitada por $x = -2$ y $x = -1$, teniendo en cuenta que $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$.

$$\int_{-2}^{-1} -x + 2 - \left(-x^2 + 4\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} -x + 2 + x^2 - 4dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{-2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + \frac{1}{3}(-1)^3\right) - \left(-\frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + \frac{1}{3}(-2)^3\right)$$

$$A_1 = \frac{11}{6}$$

Seguimos con el área número 2, que sería la zona en medio del intervalo $x = -1$ hasta $x = 2$, pero en este caso mi función $f(x)$ y $g(x)$ cambian, dado que ahora $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = -x + 2$.

$$\int_{-1}^{2} -x^2 + 4 - (-x + 2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 4 + x - 2dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + 4(2) + \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + 4(-1) + \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1)\right)$$

$$A_2 = \frac{9}{2}$$

Para la tercera área que es la zona comprendida de $x = 2$ hasta $x = 3$ nuevamente cambian $f(x)$ y $g(x)$ siendo $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = 4 - x^2$.

$$= \int_{2}^{3} -x + 2 - \left(-x^2 + 4\right) dx$$

$$= \int_{2}^{3} -x + 2 + x^2 - 4dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^3$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(3)^2 + 2(3) + \frac{1}{3}(3)^3 - 4(3) \right) - \left(-\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) + \frac{1}{3}(2)^3 - 4(2) \right)$$

$$A_3 = \frac{11}{6}$$

Así que decimos que $A_T = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_T = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + 116$$

$$A_T = \frac{49}{6}$$

3. Determine el volumen del sólido generado.

a. Al hacer girar la region en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = 2$, abajo por la curva $y = 2\sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(2 - 2\sin x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - 2\sin x\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 - 2\left(2\right)\left(2\sin x\right) + 4\sin^2 x dx$$

$$= \pi \left(4x + 8\cos x + 2x - \sin\left(2x\right)\right)$$

$$= \left[\pi \left(6x + 8\cos x - \sin\left(2x\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \left(6\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) - \left(6\left(0\right) + 8\cos\left(0\right) - \sin\left(2\left(0\right)\right)\right)$$

$$= \pi \left(3\pi - 8\right)$$

$$= 3\pi^2 - 8\pi$$

b. Al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por arriba por la curva $y = x^2$, abajo por el eje x, a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$.

$$= \int_0^1 2\pi \left(1 + x\right) x^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 + x^3 dx$$

$$= \left[2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\left(\frac{1}{3}\left(1\right)^3 + \frac{1}{4}\left(1\right)^4\right) - \left(\frac{1}{3}\left(0\right)^3 + \frac{1}{4}\left(0\right)^4\right)\right)$$

$$= \frac{7\pi}{6}$$

4. Utilice el método de los cascarones cilíndricos para determinar el volumen de cada uno de los sólidos que se obtienen.

a. Al girar alrededor del eje y las regiones acotadas por las curvas $y = 2 - x^2$, $y = x^2$ y $x = 0$

B4.jpeg

Figura 1: Sólido a revolucionar

Sabiendo que $f(x) = 2 - x^2; g(x) = x^2$

$$A(x) = f(x) - g(x)$$

$$A(x) = 2 - x^2 - x^2$$

$$A(x) = 2 - 2x^2$$

$$A = \int_0^1 2\pi x(2 - 2x^2)dx$$

$$A = 2\pi \int_0^1 (2x - 2x^3)dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right)|_0^1$$

$$= \left(-\pi x^4 + 2\pi x^2\right)|_0^1$$

$$= \left(-\pi\,(1)^4 + 2\pi\,(1)^2\right) - \left(-\pi\,(0)^4 + 2\pi\,(0)^2\right)$$

$$A = \pi$$

b. Al girar alrededor del eje x las regiones acotadas por las curvas $y = 2 - x, y = \sqrt{x}$ y $y = 0$

WhatsApp Image 2023-06-03 at 9.34.00 PM.jpeg

Figura 2: Sólido a revolucionar

Sabiendo que $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$f(y) = 2 - y$$
$$g(y) = y^2$$

Restamos $f(y) - g(y)$

$$A(y) = f(y) - g(y)$$

$$= A(y) = 2 - y - y^2$$

$$A = \int_0^1 2\pi y \left(2 - y - y^2\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(2y - y^2 - y^3\right) dy$$

$$= \left[2\pi \left(y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{5\pi}{6}$$

5. Calcule el volumen mediante secciones transversales de cada uno de los sólidos S descritos.

a. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.

Tenemos que hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (R, o) y de (r, h) así que para ello hallaremos la pendiente.

$$m = \frac{0-h}{R-r} = -\frac{h}{R-r}$$

Tenemos que la ecuación de la recta es:

$$y - o = m\,(x - R)$$

$$y = -\frac{h}{R-r}\,(x - R)$$

$$y = \frac{h}{R-r}\,(R - x)$$

$$x = R - \frac{(R-r)}{h}y$$

Reemplazamos en la siguiente fórmula:

$$\int_0^h \pi\,(f(x))^2\,dx$$

$$= \int_0^h \pi\left[R - \frac{(R-r}{h}y\right]^2$$

$$= \pi\int_0^h \left[r^2 - \frac{2R(R-r)}{h}y + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^2\right]dy$$

$$= \pi\left[r^2y - \frac{r(R-r)}{h}y^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^3\right]_0^h$$

$$= \pi\left[hR^2 - R(R-r)h + \frac{/R-r)^2}{3}h\right]$$

$$= \pi h\left(R^2 - R(R-r) + \frac{1}{3}(R-r)^2\right)$$

$$= \pi h\left(R^2 - R^2 + Rr + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{3}Rr + \frac{1}{3}r^2\right)$$

$$= \pi h\left(\frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}r^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + Rr + r^2\right)$$

b.Una piramide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h

Hallaremos la ecuación que pasa por los puntos $(\frac{a}{2}.h)$ y $(\frac{b}{2},0)$.

$$m = \frac{h-0}{\frac{a-b}{2}} = \frac{2h}{a-b}$$

$$y - 0 = \frac{2h}{a-b}\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

$$x = y\frac{a-b}{2h} + \frac{b}{2}$$

$$= \int_0^h \left[2\left(\frac{y(a-b)}{2h} + \frac{b}{a}\right)\right] dy$$

$$= \int_0^h \left(\frac{y(a-b)}{h} + b\right)^2 dy =$$

$$= \int_0^h \frac{y^2(a-b)^2}{h^2} + \frac{2b(a-b)y}{h} + b^2 \; dy$$

$$= \left[\frac{(a-b)^2y^3}{3h^2} + \frac{b(a-b)y^2}{h} + b^2y\right]_0^h$$

$$\frac{1}{3}(a-b)^2h + b(a-b)h + b^2h$$

$$\frac{1}{3}(a-b)^2h + h(ab - b^2 + b^2)$$

$$\frac{1}{3}(a-b)^2h + \frac{3}{3}h(ab)$$

$$\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

Ahora, al saber las áreas, tanto superior como inferior $A_1 = a^2$ $A_2 = b^2$ decimos que

$$\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{A_1A_2}$$

Así que tenemos que el volumen es:

$$V = \frac{1}{3}h(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2})$$