

# **MECÁNICA DE LA FRACTURA II**

Conceptos Fundamentales y Aplicaciones

Presentado por:

Gustavo Alejandro Vergara Pareja

Issa Katherine Peralta Gonzales

Presentado a:

Marco Andres Violet Lozano

Universidad de Córdoba

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Mecánica

Montería, Córdoba

September 22, 2025

# **Tabla de Contenido**

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Inestabilidad de la grieta y la curva R</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Tensión Plana</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Deformación Plana</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Factor de Intensidad en una Placa Finita</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Plasticidad en el Frente de Grieta</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Criterios para Determinar la Forma de la Zona Plástica</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>Tablas de Factores de Intensidad</b>	<b>12</b>

## 1 Introducción

La mecánica de la fractura es una rama fundamental de la mecánica de sólidos que estudia la propagación de grietas en materiales bajo diferentes condiciones de carga. Este documento presenta los conceptos que constituyen una extensión de los principios básicos hacia aplicaciones más complejas y especializadas.

El estudio de la mecánica de la fractura ha evolucionado significativamente desde los trabajos pioneros de Griffith (1921) y ha encontrado aplicaciones cruciales en la ingeniería estructural, aeroespacial, civil y de materiales. La comprensión de los mecanismos de fractura es esencial para el diseño seguro y eficiente de componentes estructurales, especialmente cuando estos operan bajo condiciones de carga extremas o en ambientes agresivos.

Los conceptos avanzados que se abordan en este documento incluyen la mecánica de la fractura elastoplástica, los criterios de fractura multiaxial, la fatiga y crecimiento de grietas, así como las técnicas experimentales y numéricas modernas para el análisis de la integridad estructural.

## 2 Inestabilidad de la grieta y la curva R

La inestabilidad de una grieta se produce cuando el avance de la fisura se vuelve incontrolable bajo una carga dada, asociado a la resistencia intrínseca del material a la propagación de la grieta. La *curva R* representa la tenacidad creciente del material con el avance estable de la grieta, mostrando un equilibrio entre la energía liberada y la energía necesaria para iniciar/propagar el defecto Beese **and others**, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Broek, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Cameron **and others**, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Jaramillo Suárez **and others**, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Ponson, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday.

En otras palabras, la inestabilidad de la grieta ocurre cuando la energía elástica disponible se iguala a la energía requerida para la aparición de una grieta (Energía de superficie). Y la curva R no es más que la representación gráfica de la resistencia del material a la propagación de una grieta en función del avance de la misma.

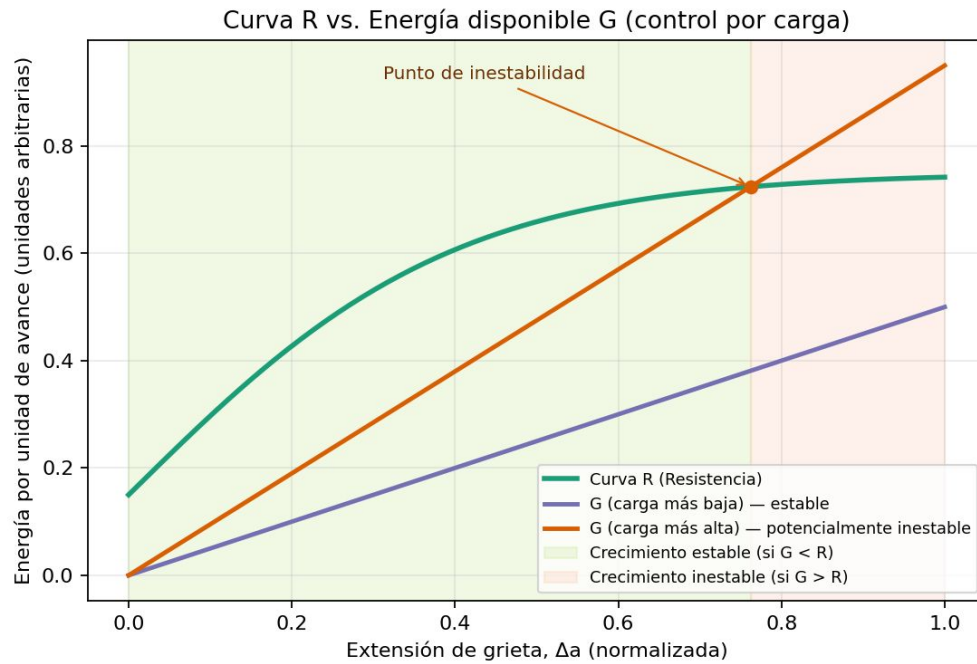


Figure 1: Esquema de elemento delgado en tensión plana.

### 3 Tensión Plana

La condición de tensión plana se aplica a elementos delgados en los que las cargas actúan en el plano y las deformaciones fuera del plano son despreciables. En esta condición, las tensiones fuera del plano ( $\sigma_z$ ) son cercanas a cero, y la deformación en esa dirección ( $\varepsilon_z$ ) puede ser significativa debido a la relación de Poisson que dice que la cara que este ortogonal a la dirección de la carga se contrae.

Broek, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Cameron **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Jaramillo Suárez **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Ponson, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#)

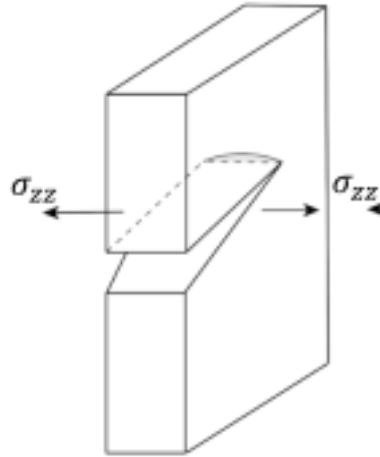


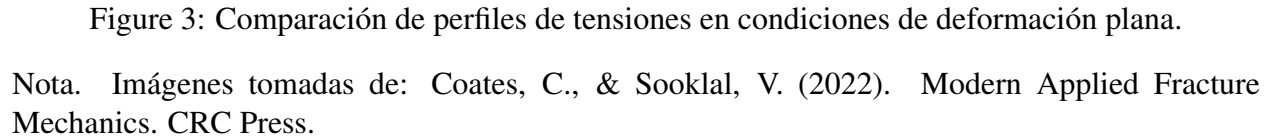
Figure 2: Esquema de elemento delgado en tensión plana.

Nota. Imágenes tomadas de: Coates, C., & Sooklal, V. (2022). *Modern Applied Fracture Mechanics*. CRC Press.

## 4 Deformación Plana

En cuerpos con gran espesor respecto a otras dimensiones, se desarrolla una condición de deformación plana: las deformaciones fuera del plano se anulan ( $\varepsilon_z \approx 0$ ), y el efecto triaxial en la punta de la grieta limita la plasticidad, siendo fundamental para la validez del parámetro  $K_I$  Broek, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Cameron **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Jaramillo Suárez **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Ponson, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#). Los cuerpos sometidos a deformación plana serán el objeto de estudio en la MFEL principalmente.

Con la aplicación de la carga, la grieta queda restringida sin poder deformarse en una de las direcciones, dando como resultado un estado de esfuerzos triaxial en la punta de la grieta, lo que limita la plasticidad y permite el uso del factor de intensidad de esfuerzos  $K_I$  para caracterizar el campo de tensiones cerca de la punta de la grieta, ya que para restringir esa deformación amerita que se induzca una tensión en la dirección  $z$ , que es la que se encuentra restringida.



El factor de intensidad de esfuerzos  $K$  caracteriza el campo de tensiones cerca de la punta de la grieta. Es función de la geometría, tamaño de la grieta y la carga aplicada. Para una placa finita,  $K = Y\sigma\sqrt{\pi a}$ , donde  $Y$  es el factor geométrico,  $\sigma$  la tensión aplicada y  $a$  la longitud de la grieta. Las tablas y gráficos de  $Y$  para diversas configuraciones están recopiladas en los manuales de Tada, París y Anderson Broek, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Cameron **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Dowling, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Jaramillo Suárez **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#).

La concentración de esfuerzos hace que la zona cercana a la punta de la grieta entre en plasticidad (zona plástica). Su tamaño se estima mediante las soluciones de Irwin y Dugdale. En deformación plana, la plasticidad es más restringida que en tensión plana. La estimación para el tamaño de zona plástica es:

## 1. Criterio de von Mises

La tensión equivalente según von Mises está dada por:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{1/2}$$

La condición de fluencia ocurre cuando:

$$\sigma_e = \sigma_{ys}$$

## 2. Campo de tensiones cerca de la punta de la grieta (Modo I)

El estado de tensiones en la punta de una grieta en un cuerpo elástico lineal fue formulado por George R. Irwin en 1957. La expresión analítica es:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + H.O.T.$$

donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación del elemento de tensión respecto al eje de la grieta,  $r$  es la distancia radial desde la punta de la grieta,  $f_{ij}(\theta)$  es una función adimensional de  $\theta$ , y  $H.O.T.$  representa términos de orden superior.

En particular:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

### 3. Sustitución en von Mises

Al aplicar la ecuación de von Mises a estas tensiones, se obtiene:

$$\sigma_e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot g(\theta)$$

donde  $g(\theta)$  es una función que depende del ángulo  $\theta$ .

### 4. Igualar a $\sigma_{ys}$ y despejar $r$

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot g(\theta) = \sigma_{ys}$$

$$\sqrt{r} = \frac{K_I}{\sigma_{ys} \sqrt{2\pi}} \cdot g(\theta)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 [g(\theta)]^2$$

### 5. Expresiones finales

Para **esfuerzo plano (plane stress)**:

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \left[ 1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (1)$$

Para **deformación plana (plane strain)**:

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \left[ (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (2)$$

### 6. Aproximación clásica para $\theta = 0$

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (\text{esfuerzo plano}) \quad (3)$$

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (\text{deformación plana}) \quad (4)$$



donde  $K_I$  es el factor de intensidad y  $\sigma_Y$  el límite elástico del material. Broek, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Cameron **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Dowling, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Jaramillo Suárez **and others**, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#); Ponson, [labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday](#)

Así entonces, la zona plástica de la grieta actúa como un “amortiguador” que reduce la concentración extrema de esfuerzos y no la singularidad con respecto al esfuerzo que se estima, i.e. cuanto mayor sea la zona plástica, menos dominante será el término  $\left(\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\right)$  y la MFEL deja de ser válida.

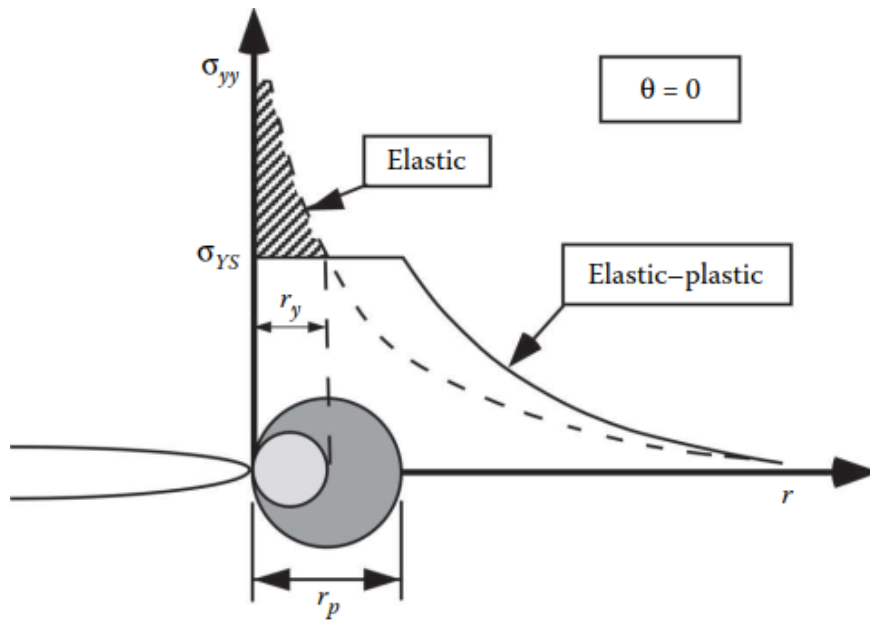


Figure 4: Esquema de la zona plástica en la punta de la grieta.

Nota. Tomada de: Anderson, T. L. (2017). *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications* (4ta ed.). CRC Press-Taylor.

Solo serán válidas dichas soluciones cuando:

$$a, (b - a), h \geq \frac{4}{\pi} \left( \frac{K}{\sigma_Y S} \right)^2 \quad (\text{LEFM aplicable})$$

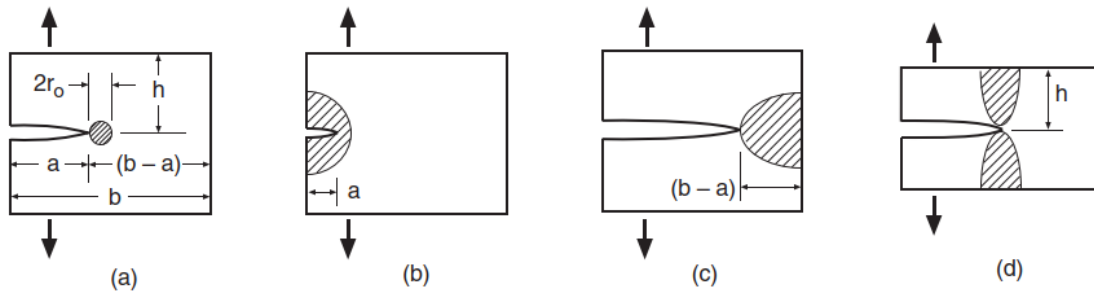


Figure 5: Zona plástica pequeña comparada con las dimensiones planas (a), y situaciones en las que la MFEL no es válida debido a que las zonas plásticas son demasiado grandes en comparación con (b) la longitud de la grieta, (c) el ligamento sin fisurar, y (d) la altura del elemento.

Nota. Tomada de: Dowling, N. E. (2022). *Mechanical Behavior of Materials* (4ta ed.). Pearson.

## 7 Criterios para Determinar la Forma de la Zona Plástica

Existen varios modelos para estimar la forma de la zona plástica en la punta de una grieta. Por criterios entendemos, las diferentes formas en las que podemos calcular y graficar la zona plástica. Por otro lado, podemos pensar en los distintos modelos y correcciones como los propuestos por Irwin, Dugdale y el enfoque basado en el J-integral. Cada uno ofrece una perspectiva diferente sobre cómo se distribuye la plasticidad alrededor de la punta de la grieta. Broek, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Cameron **and others**, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Dowling, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Jaramillo Suárez **and others**, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday; Ponson, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday.

Si pensamos en los criterios para graficar la zona plástica, podemos considerar:

- **Criterio de Von Mises:** Utiliza la tensión equivalente para definir la zona plástica, considerando la combinación de tensiones principales. De este derivamos las ecuaciones 1 y 2.
- **Criterio de Tresca:** Se basa en la diferencia máxima entre las tensiones principales para

determinar la zona plástica. Si se utiliza el criterio de Tresca, la forma de la zona plástica resulta ligeramente diferente. A partir de los círculos de Mohr, se encuentra que la máxima tensión cortante en tensión plana es  $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_1$ , y en deformación plana  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , siendo la mayor la relevante.

La zona plástica según Tresca se determina como:

**Tensión plana:**

$$r_p = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2$$

**Deformación plana:** El mayor valor entre:

$$r_p = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2$$

y

$$r_p = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Las zonas plásticas según Tresca suelen ser ligeramente mayores y de forma algo diferente a las obtenidas por el criterio de Von Mises.

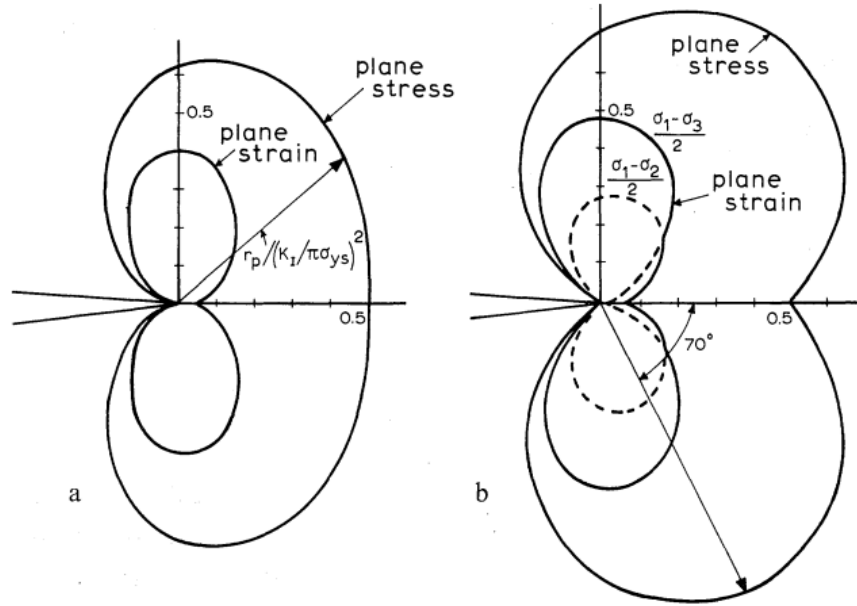


Figure 6: Formas de la zona plástica según los criterios de Von Mises (a) y Tresca (b).

Ahora bien, si hablamos de los modelos para estimar la zona plástica, tenemos:

- **Modelo de Irwin:** Considera la zona plástica como una región semicircular delante de la punta de la grieta, con un radio proporcional a  $\left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^2$ .
- **Modelo de Dugdale:** Dugdale propone que la zona plástica delante de la grieta puede modelarse como una banda donde la tensión es constante e igual al límite elástico  $\sigma_{ys}$ . El tamaño de esta zona se determina igualando la apertura plástica al desplazamiento elástico en la punta de la grieta, obteniendo:

$$\rho = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8 \sigma_{ys}^2} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

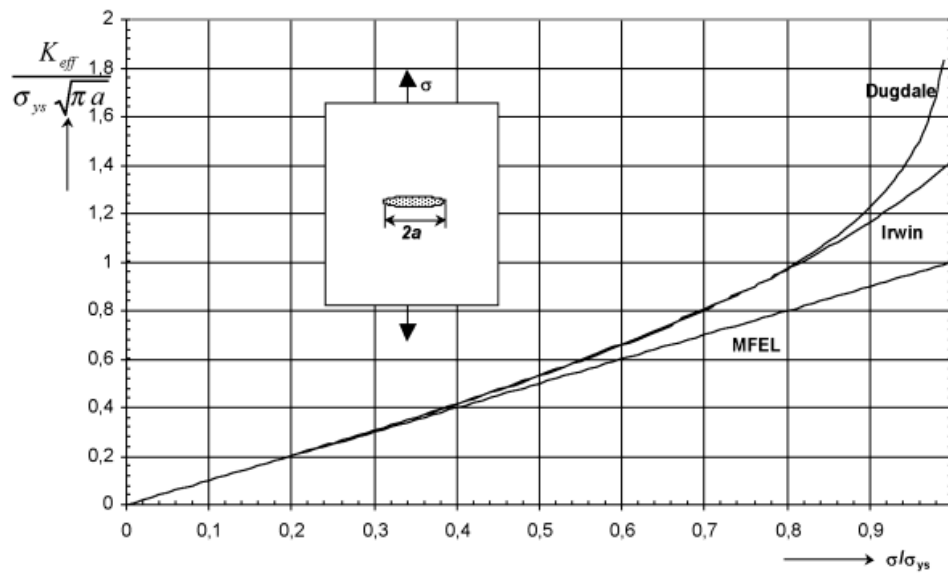


Figure 7: Comparación de las correcciones de la zona plástica según Irwin y Dugdale.

Nota. Imágenes tomadas de: Arana, J. L., & González, J. J. (2011). *Mecánica de Fractura*.

Esta ecuación es muy similar a la obtenida anteriormente Ecuación (3) por Irwin usando el criterio de von Mises para esfuerzo plano.

Por ejemplo, Broek discute detalladamente los modelos de Irwin y Dugdale, mostrando cómo ambos permiten estimar el tamaño y la forma de la zona plástica en la punta de la grieta, y resalta las diferencias en los factores numéricos y supuestos físicos involucrados Broek, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday.

- **Enfoque del J-integral:** Utiliza el concepto de energía para definir la zona plástica, considerando la integral J alrededor de la punta de la grieta.

## 8 Tablas de Factores de Intensidad

A continuación se presentan algunas tablas y esquemas del factor geométrico  $Y$  para distintas geometrías.

### Selected Stress Intensity Factor (SIF) Simple Cases

Case	Diagram	SIF Expression
Through crack in infinite plate subjected to tensile loading		$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$
Through crack (normal to crack is oriented at an angle $\beta$ to stress axis)		$K_I = \sigma \cos^2 \beta \sqrt{\pi a}$ $K_{II} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a}$
Edge crack in a semi-infinite plate subjected to tensile loading		$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$
Penny shaped crack in an infinite medium		$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}$

Figure 8: Tablas y esquemas del factor geométrico  $Y$  para distintas geometrías.

Nota. Imágenes tomadas de: Coates, C., & Sooklal, V. (2022). Modern Applied Fracture Mechanics. CRC Press.

## KI Solutions for Common Test Specimens

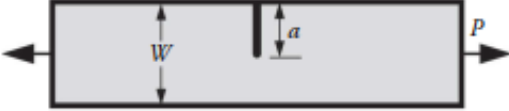
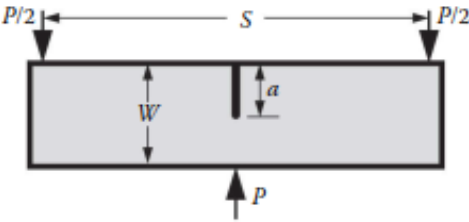
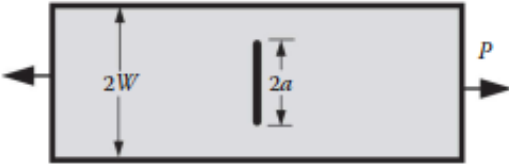
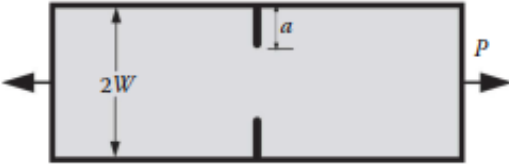
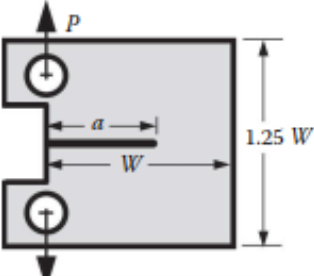
Geometry	$f\left(\frac{a}{W}\right)^a$
<p>Single-edge notched tension (SENT)</p> 	$\frac{\sqrt{2 \tan(\pi a/2W)}}{\cos(\pi a/2W)} \left[ 0.752 + 2.02 \left( \frac{a}{W} \right) + 0.37 \left( 1 - \sin \frac{\pi a}{2W} \right)^3 \right]$
<p>Single-edge notched bend (SE(B))</p> 	$\frac{3(S/W)\sqrt{a/W}}{2(1+2(a/W))(1-(a/W))^{3/2}} \left[ 1.99 - \frac{a}{W} \left( 1 - \frac{a}{W} \right) \left\{ 2.15 - 3.93 \left( \frac{a}{W} \right) + 2.7 \left( \frac{a}{W} \right)^2 \right\} \right]$
<p>Center-cracked tension (CCT)</p> 	$\sqrt{\frac{\pi a}{4W} \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left[ 1 - 0.025 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 0.06 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right]$
<p>Double-edge notched tension (DENT)</p> 	$\frac{\sqrt{\pi a/2W}}{\sqrt{1-(a/W)}} \left[ 1.122 - 0.561 \left( \frac{a}{W} \right) - 0.205 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 0.471 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 0.190 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right]$
<p>Compact specimen</p> 	$\frac{2+(a/W)}{(1-(a/W))^{3/2}} \left[ 0.886 + 4.64 \left( \frac{a}{W} \right) - 13.32 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 14.72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 5.60 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right]$

Figure 9: Tablas y esquemas del factor geométrico  $Y$  para distintas geometrías (Solo modo K1).

Nota. Tomada de: Anderson, T. L. (2017). *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications* (4ta ed.). CRC Press-Taylor.

Anderson, labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday

## Referencias

- Anderson, T. L. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture mechanics: Fundamentals and applications* (3 **edition**). CRC Press.
- Anderson, T. L. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture mechanics: Fundamentals and applications* (4 **edition**). CRC Press-Taylor & Francis Group.
- ASTM International. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Standard test method for linear-elastic plane-strain fracture toughness  $K_{IC}$  of metallic materials*.
- ASTM International. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates*.
- ASTM International. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Standard test method for measurement of fracture toughness*.
- Barsom, J. M., & Rolfe, S. T. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture and fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics* (3 **edition**).
- Beese, A., **and others**. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture, fatigue, failure and damage evolution* (**volume 3**). Springer.
- Belytschko, T., & Black, T. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), 601–620.
- Broek, D. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Elementary engineering fracture mechanics* (4 **edition**). Martinus Nijhoff Publishers.
- Cameron, R., Coates, D., & Sooklal, V. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Modern applied fracture mechanics*. CRC Press.
- Dowling, N. E. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Mechanical behavior of materials* (4 **edition**). Pearson.
- Gdoutos, E. E. (labeyearlabeyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture mechanics: An introduction* (2 **edition**). Springer.



Griffith, A. A. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221(582-593), 163–198.

Hutchinson, J. W. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1), 13–31.

Irwin, G. R. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361–364.

Janssen, M., Zuidema, J., & Wanhill, R. J. H. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture mechanics* (2 **edition**). Spon Press.

Jaramillo Suárez, H. E., Alba de Sánchez, N. C., Canizales, J. P., & Toro, Á. J. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Introducción a la mecánica de la fractura y análisis de fallas*. Universidad Autónoma de Occidente.

Kanninen, M. F., & Popelar, C. H. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Advanced fracture mechanics*. Oxford University Press.

Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), 131–150.

Paris, P., & Erdogan, F. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85(4), 528–533.

Ponson, L. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Mechanics and physics of fracture*. Cambridge University Press.

Rice, J. R. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2), 379–386.

Schijve, J. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *International Journal of Fatigue*, 23(8), 679–702.

Suresh, S. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fatigue of materials* (2 **edition**). Cambridge University Press.

Sutton, M. A., Wolters, W. J., Peters, W. H., Ranson, W. F., & McNeill, S. R. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis. *Image and Vision Computing*, 4(3), 143–150.

Zehnder, A. T. (labelyearlabelyeardivisionlabelmonthlabelday). *Fracture mechanics*. Springer.