Solución de Problemas de Cálculo

Resuelto por Gemini

16 de junio de 2025

Resolución de los ejercicios

a) Ecuación de la recta tangente

Problema: Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$ en el punto $(3, 0)$.

Solución

Para encontrar la ecuación de la recta tangente, se siguen los siguientes pasos:

1. Calcular la derivada de la función. Se utiliza la regla de la cadena para derivar la función y con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(\ln(x^2 - 3x + 1)\big)$$

La derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

2. Calcular la pendiente (m) en el punto de tangencia. Se evalúa la derivada en la coordenada x del punto dado, es decir, $x = 3$:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \frac{2(3) - 3}{(3)^2 - 3(3) + 1} = \frac{6 - 3}{9 - 9 + 1} = \frac{3}{1} = 3$$

3. Determinar la ecuación de la recta. Se utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, con el punto $(x_1, y_1) = (3, 0)$ y la pendiente $m = 3$:

$$y - 0 = 3(x - 3)$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación final:

$$\mathbf{y = 3x - 9}$$

Gráfica de las funciones

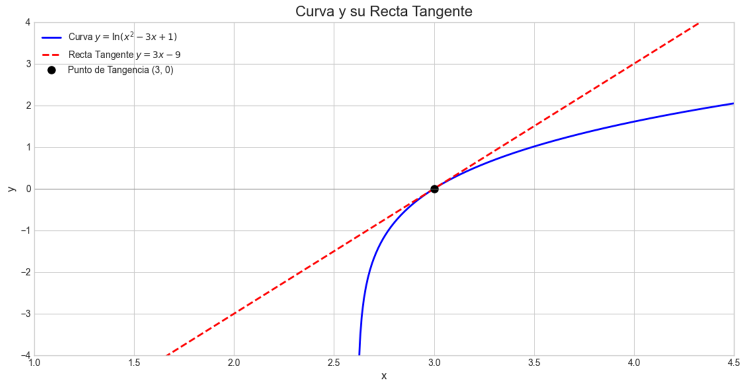

Figura 1: Derivada, Recta y Punto de tangencia

b) Derivación logarítmica

Problema: Utilice la derivación logarítmica para hallar y' si $x^y = y^x$.

Solución

Para hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$, se aplica el método de derivación logarítmica:

1. Aplicar logaritmo natural. Se toma el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación original:

$$\ln(x^y) = \ln(y^x)$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos $\ln(a^b) = b\ln(a)$, la ecuación se convierte en:

$$y\ln(x) = x\ln(y)$$

2. Diferenciar implícitamente con respecto a x. Se deriva cada lado de la ecuación, aplicando la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}(y\ln(x)) = \frac{d}{dx}(x\ln(y))$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \ln(x) + y \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \ln(y) + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

3. Despejar $\frac{dy}{dx}$. Se agrupan todos los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx}\ln(x) - \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

Se factoriza $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}\left(\ln(x) - \frac{x}{y}\right) = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

Finalmente, se resuelve para $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{\ln(x) - \frac{x}{y}}$$

4. Simplificar la expresión. Para presentar el resultado de una forma más elegante, se simplifica la fracción compleja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x\ln(y)-y}{x}}{\frac{y\ln(x)-x}{y}} = \frac{y(x\ln(y)-y)}{x(y\ln(x)-x)}$$

La derivada es:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{y(x\ln(y)-y)}{x(y\ln(x)-x)}}$$

Análisis y Solución Matemática

La Ley de Boyle establece la relación entre la presión (P) y el volumen (V) de una muestra de gas a temperatura constante mediante la ecuación:

$$PV = C$$

donde C es una constante.

Datos del Problema

Se nos proporcionan los siguientes datos para un instante específico:

- Volumen actual (V): 600 cm^3
- Presión actual (P): 150 kPa
- Razón de cambio de la presión $(\frac{dP}{dt})$: +20 kPa/min (El signo es positivo porque la presión se incrementa).

Objetivo

Se busca determinar la razón con la que el volumen del gas disminuye en ese mismo instante, es decir, encontrar el valor de $\frac{dV}{dt}$.

Procedimiento

1. Calcular la constante C. Utilizamos los valores del instante dado para determinar el valor de la constante C para este sistema.

$$C = P \cdot V = (150\text{ kPa}) \cdot (600\text{ cm}^3) = 90000\text{ kPa} \cdot \text{cm}^3$$

2. Diferenciar la Ley de Boyle con respecto al tiempo (t). Para encontrar la relación entre las razones de cambio, derivamos la ecuación $PV = C$ de forma implícita. Se aplica la regla del producto en el lado izquierdo y la regla de la constante en el derecho.

$$\frac{d}{dt}(PV) = \frac{d}{dt}(C)$$

$$\frac{dP}{dt} \cdot V + P \cdot \frac{dV}{dt} = 0$$

3. Sustituir los valores conocidos y resolver para $\frac{dV}{dt}$. Sustituimos los datos del problema en la ecuación diferenciada que acabamos de obtener.

$$(20 \text{ kPa/min}) \cdot (600 \text{ cm}^3) + (150 \text{ kPa}) \cdot \frac{dV}{dt} = 0$$

Ahora, procedemos a despejar $\frac{dV}{dt}$:

$$12000 \frac{\text{kPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{min}} + 150 \text{ kPa} \cdot \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} 150 \text{ kPa} \cdot \frac{dV}{dt} &= -12000 \frac{\text{kPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{min}} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{-12000}{150} \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} \\ \frac{dV}{dt} &= -80 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} \end{aligned}$$

Conclusión

El signo negativo de $\frac{dV}{dt}$ confirma que el volumen está disminuyendo. Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es:

El volumen del gas disminuye a una razón de 80 cm³/min.

Análisis y Solución Matemática

A continuación, se detalla el procedimiento para resolver el problema de razón de cambio.

1. Datos y Relaciones Fundamentales

Primero, establecemos los datos proporcionados y las ecuaciones que rigen el sistema.

- **Radio del recipiente (r):** El diámetro es de 60 cm, por lo que el radio es una constante:
$$r = \frac{60 \text{ cm}}{2} = 30 \text{ cm}$$
- **Razón de cambio del volumen ($\frac{dV}{dt}$):** El flujo de entrada es de 2 L/min. Realizamos la conversión a cm^3:
$$\frac{dV}{dt} = 2 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ L}} = 2000 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$$

- **Fórmula del Volumen (V):** El volumen de agua a una altura h en el recipiente hemisférico de radio r es:
$$V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$$
Sustituyendo el radio constante $r = 30$:
$$V = \pi\left(30h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$$

2. Procedimiento de Solución

Paso 1: Encontrar la altura (h) cuando el recipiente está medio lleno. Primero, se calcula el volumen total del hemisferio (cuando $h = r = 30$):

$$V_{total} = \pi\left(30(30)^2 - \frac{1}{3}(30)^3\right) = \pi(27000 - 9000) = 18000\pi \text{ cm}^3$$

El volumen cuando está "medio lleno.[es] la mitad de este total:

$$V_{medio} = \frac{1}{2}V_{total} = 9000\pi \text{ cm}^3$$

Ahora, se encuentra la altura h que corresponde a este volumen:

$$9000\pi = \pi\left(30h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$$

Simplificando, obtenemos la siguiente ecuación cúbica:

$$h^3 - 90h^2 + 27000 = 0$$

La solución de esta ecuación (restringida al dominio físico $0 < h < 30$) se encuentra por métodos numéricos y es:
$$h \approx 19{,}58 \text{ cm}$$

Paso 2: Relacionar las razones de cambio. Se diferencia la ecuación del volumen con respecto al tiempo (t) para relacionar $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dh}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left[\pi\left(30h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)\right]$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(60h\frac{dh}{dt} - h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi(60h - h^2)\frac{dh}{dt}$$

Paso 3: Despejar y calcular $\frac{dh}{dt}$. Se despeja $\frac{dh}{dt}$ y se sustituyen los valores conocidos ($\frac{dV}{dt} = 2000$ y $h \approx 19{,}58$).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi(60h - h^2)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2000}{\pi(60(19{,}58) - (19{,}58)^2)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2000}{\pi(1174{,}8 - 383{,}38)} = \frac{2000}{\pi(791{,}42)}$$

$$\frac{dh}{dt} \approx 0{,}8044 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

3. Conclusión

El análisis de las razones de cambio nos lleva al resultado final.

La altura del agua aumenta a una razón de 0.8044 cm/min cuando el recipiente está medio lleno.

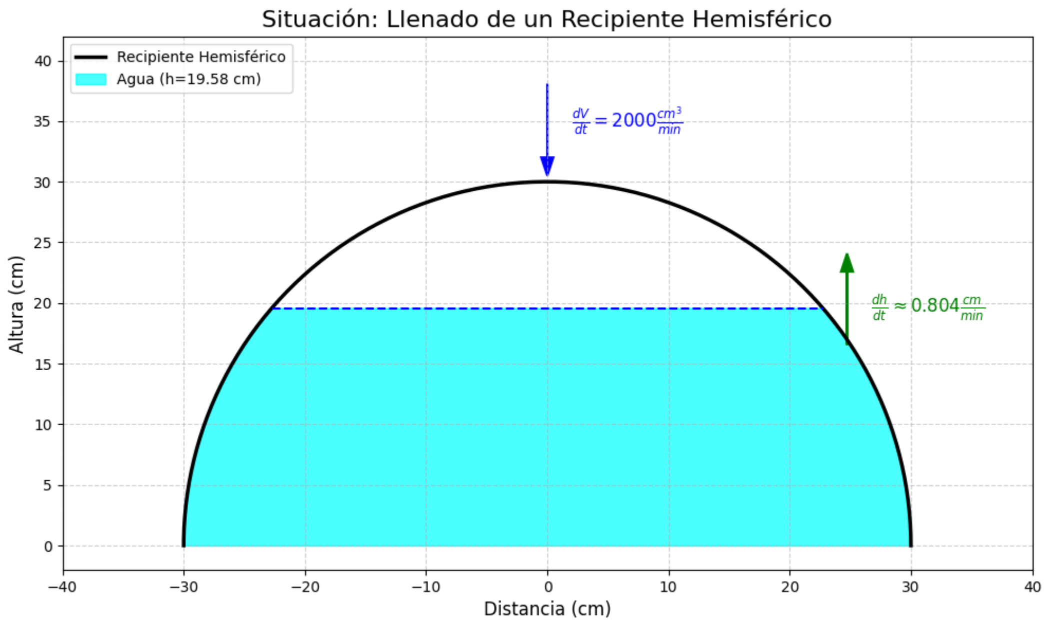

Figura 2: Recipiente hemisférico

Análisis de la Función $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$

Analizaremos la función $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$ en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$.

a) Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento

Para determinar dónde la función crece o decrece, necesitamos encontrar la primera derivada, $f'(\theta)$.

Cálculo de la primera derivada: Usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(2\cos\theta + (\cos\theta)^2) \\ &= -2\sin\theta + 2(\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Factorizamos $-2\sin\theta$ para simplificar el análisis:

$$f'(\theta) = -2\sin\theta(1 + \cos\theta)$$

Búsqueda de puntos críticos: Los puntos críticos ocurren cuando $f'(\theta) = 0$ o no está definida. La función está definida en todo el intervalo.

$$-2\sin\theta(1 + \cos\theta) = 0$$

Esto implica que:

- $\sin\theta = 0 \implies \theta = 0$ en nuestro intervalo $[0, \pi/2]$.
- $1 + \cos\theta = 0 \implies \cos\theta = -1$, lo cual no tiene solución en $[0, \pi/2]$.

El único punto crítico se encuentra en el extremo del intervalo, en $\theta = 0$.

Análisis de signos de $f'(\theta)$: Para analizar el comportamiento de la función, evaluamos el signo de $f'(\theta)$ en el interior del intervalo, por ejemplo en $(0, \pi/2)$.

- En $(0, \pi/2)$, el término $\sin\theta$ es siempre positivo.
- En $(0, \pi/2)$, el término $\cos\theta$ es siempre positivo, por lo que $(1 + \cos\theta)$ también es positivo.

Por lo tanto, el signo de $f'(\theta) = -2(\text{positivo})(\text{positivo})$ es siempre negativo en $(0, \pi/2)$.

Conclusión: Como $f'(\theta) < 0$ para todo $\theta \in (0, \pi/2)$, la función es estrictamente decreciente en todo el intervalo.

- **Intervalo donde decrece:** $[0, \pi/2]$
- **Intervalo donde crece:** Ninguno.

b) Valores Máximos y Mínimos Locales

Dado que la función es continua y monótonamente decreciente en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$, los valores extremos absolutos (y únicos) se encontrarán en los extremos del intervalo.

- El **valor máximo** ocurre en $\theta = 0$:

$$f(0) = 2\cos(0) + \cos^2(0) = 2(1) + (1)^2 = 3$$

- El **valor mínimo** ocurre en $\theta = \pi/2$:

$$f(\pi/2) = 2\cos(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = 2(0) + (0)^2 = 0$$

No existen máximos o mínimos locales en el interior del intervalo.

c) Intervalos de Concavidad y Puntos de Inflexión

Para el análisis de concavidad, calculamos la segunda derivada, $f''(\theta)$.

Cálculo de la segunda derivada: Partimos de $f'(\theta) = -2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = -2\sin\theta - \sin(2\theta)$.

$$\begin{aligned} f''(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(-2\sin\theta - \sin(2\theta)) \\ &= -2\cos\theta - \cos(2\theta)\cdot 2 \\ &= -2\cos\theta - 2\cos(2\theta) \end{aligned}$$

Usamos la identidad del ángulo doble $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$:

$$f''(\theta) = -2\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) = -4\cos^2\theta - 2\cos\theta + 2$$

Búsqueda de posibles puntos de inflexión: Igualamos $f''(\theta)$ a cero:

$$-4\cos^2\theta - 2\cos\theta + 2 = 0$$

Dividimos por -2:

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

Sea $u = \cos\theta$. La ecuación se convierte en $2u^2 + u - 1 = 0$, que se factoriza como $(2u - 1)(u + 1) = 0$. Las soluciones son $u = 1/2$ y $u = -1$.

- $\cos\theta = 1/2 \implies \theta = \pi/3$ en nuestro intervalo.
- $\cos\theta = -1$, que no tiene solución en nuestro intervalo.

El único posible punto de inflexión es $\theta = \pi/3$.

Análisis de signos de $f''(\theta)$: Analizamos la concavidad en los intervalos $[0, \pi/3)$ y $(\pi/3, \pi/2]$.

- Para $\theta \in [0, \pi/3)$, $\cos\theta > 1/2$. Tomemos $\theta = \pi/4$: $f''(\pi/4) = -4\cos^2(\pi/4) - 2\cos(\pi/4) + 2 = -4(1/2) - 2(\sqrt{2}/2) + 2 = -\sqrt{2} < 0$. La función es **cóncava hacia abajo**.
- Para $\theta \in (\pi/3, \pi/2]$, $\cos\theta < 1/2$. Tomemos $\theta = \pi/2$: $f''(\pi/2) = -4(0)^2 - 2(0) + 2 = 2 > 0$. La función es **cóncava hacia arriba**.

Conclusión:

- **Intervalo cóncavo hacia abajo:** $[0, \pi/3]$
- **Intervalo cóncavo hacia arriba:** $[\pi/3, \pi/2]$
- Como la concavidad cambia en $\theta = \pi/3$, hay un **punto de inflexión**. Calculamos su coordenada y:

$$f(\pi/3) = 2\cos(\pi/3) + \cos^2(\pi/3) = 2(1/2) + (1/2)^2 = 1 + 1/4 = 5/4$$

El punto de inflexión es $(\pi/3, 5/4)$.

d) Gráfica de la Función

Para visualizar la función $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos$

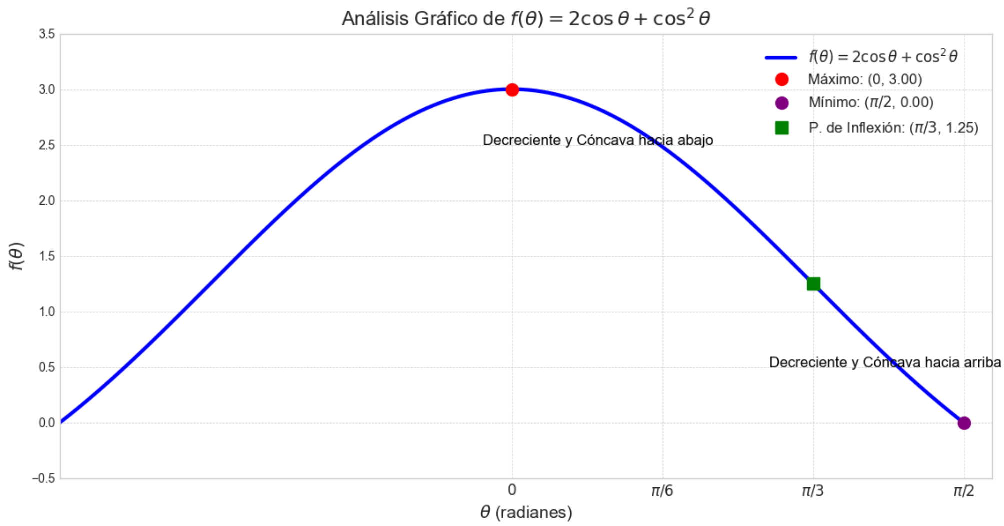

Figura 3: Análisis Gráfica

Caso 1: Contenedor sin Tapa

Se busca minimizar el costo de los materiales para un contenedor rectangular con un volumen fijo de 10 m^3. Se analizarán dos escenarios: uno sin tapa y otro con tapa, para luego comparar los resultados.

Planteamiento de Ecuaciones

Sean w el ancho, l el largo y h la altura del contenedor.

- **Relación de la base:** $l = 2w$.
- **Restricción de Volumen (V):** $V = lwh = 10$.

Sustituyendo la relación de la base en el volumen, obtenemos:

$$(2w)(w)h = 10 \implies 2w^2h = 10$$

De aquí, podemos expresar la altura h en función del ancho w:

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Función de Costo

El costo total (C) es la suma del costo de la base y el costo de los cuatro costados.

- **Área de la base:** $A_{\text{base}} = lw = (2w)w = 2w^2$.
- **Costo de la base:** $C_{\text{base}} = (10\$/\text{m}^2) \cdot (2w^2\ \text{m}^2) = 20w^2\$$.
- **Área de los costados:** $A_{\text{costados}} = 2(wh) + 2(lh) = 2wh + 2(2w)h = 6wh$.
- **Costo de los costados:** $C_{\text{costados}} = (6\$/\text{m}^2) \cdot (6wh\ \text{m}^2) = 36wh\$$.

La función de costo total es $C(w, h) = 20w^2 + 36wh$. Sustituimos $h = 5/w^2$ para obtener una función de una sola variable:

$$C(w) = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Optimización por Cálculo

Para encontrar el costo mínimo, derivamos $C(w)$ e igualamos a cero.

$$C'(w) = \frac{d}{dw}\left(20w^2 + 180w^{-1}\right) = 40w - 180w^{-2} = 40w - \frac{180}{w^2}$$

Igualando a cero:

$$40w - \frac{180}{w^2} = 0 \implies 40w^3 = 180 \implies w^3 = 4{,}5$$

$$w = \sqrt[3]{4{,}5} \approx 1{,}651 \text{ m}$$

La segunda derivada, $C''(w) = 40 + 360/w^3$, es siempre positiva para $w > 0$, lo que confirma que este punto es un mínimo.

Resultados del Caso 1

Las dimensiones óptimas son:

- Ancho: $w \approx 1{,}651$ m.
- Largo: $l = 2w \approx 3{,}302$ m.
- Altura: $h = 5/w^2 \approx 1{,}834$ m.

El costo mínimo es: $C(1{,}651) = 20(1{,}651)^2 + \frac{180}{1{,}651} \approx$ **$163.54**.

Caso 2: Contenedor con Tapa

Función de Costo

Se añade el costo de una tapa fabricada con el material de los lados (\$6/m**²**).

- **Área de la tapa:** $A_{\text{tapa}} = lw = 2w^2$.
- **Costo de la tapa:** $C_{\text{tapa}} = (6\$/\text{m}^2) \cdot (2w^2 \text{ m}^2) = 12w^2\$$.

La nueva función de costo total $C_t(w)$ es:

$$C_t(w) = (\text{Costo sin tapa}) + (\text{Costo de la tapa}) = \left(20w^2 + \frac{180}{w}\right) + 12w^2$$

$$C_t(w) = 32w^2 + \frac{180}{w}$$

Optimización por Cálculo

Derivamos la nueva función $C_t(w)$ e igualamos a cero:

$$C_t'(w) = 64w - \frac{180}{w^2}$$

$$64w - \frac{180}{w^2} = 0 \implies 64w^3 = 180 \implies w^3 = \frac{180}{64} = 2{,}8125$$

$$w = \sqrt[3]{2{,}8125} \approx 1{,}412 \text{ m}$$

La segunda derivada $C_t''(w) = 64 + 360/w^3$ también es siempre positiva.

Resultados del Caso 2

Las nuevas dimensiones óptimas son:

- Ancho: $w \approx 1{,}412$ m.
- Largo: $l = 2w \approx 2{,}824$ m.
- Altura: $h = 5/w^2 \approx 2{,}505$ m.

El costo mínimo es: $C_t(1{,}412) = 32(1{,}412)^2 + \frac{180}{1{,}412} \approx$ **\$191.30**.

Justificación y Comparación Final

Respuesta a la Pregunta

No, el costo de los materiales que hacen más barato el contenedor **no es el mismo** en ambos escenarios. Los cálculos demuestran que el costo mínimo y las dimensiones óptimas cambian al añadir la tapa.

Tabla Comparativa

Característica	**Contenedor sin Tapa**	**Contenedor con Tapa**
Ancho (w)	$\approx 1{,}651$ m	$\approx 1{,}412$ m
Largo (l)	$\approx 3{,}302$ m	$\approx 2{,}824$ m
Altura (h)	$\approx 1{,}834$ m	$\approx 2{,}505$ m
Costo Mínimo	**$163.54**	**$191.30**

Justificación

Las dimensiones cambian porque la función de costo se modifica. En el segundo caso, el costo total de las superficies horizontales (base a $10/m² y tapa a $6/m²) tiene un mayor peso relativo en el costo total. Para minimizarlo, el diseño óptimo reduce el área de estas superficies (disminuyendo w y l) y compensa el volumen perdido aumentando la altura h.

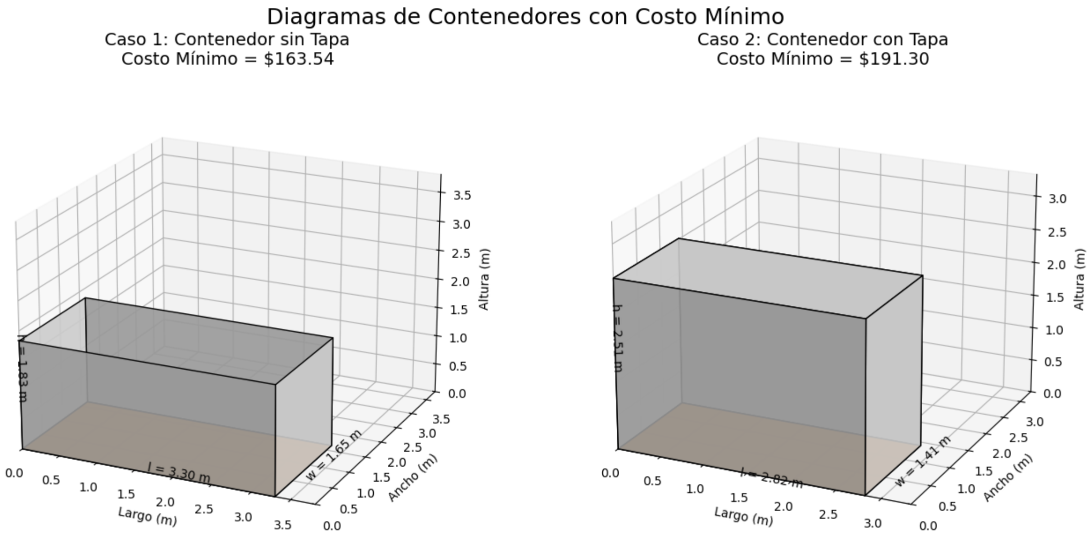

Figura 4: Diagramas de contenedores

Optimización: Volumen Máximo de un Cilindro en una Esfera

Se busca encontrar las dimensiones del cilindro de mayor volumen posible que puede ser inscrito en una esfera de radio constante r.

Sean x el radio del cilindro y h su altura. El volumen del cilindro, que deseamos maximizar, es:

$$V = \pi x^2 h$$

Esta función depende de dos variables, x y h. Necesitamos una ecuación de restricción para relacionarlas.

[Diagrama de un corte transversal mostrando un rectángulo (cilindro) inscrito en un círculo (esfera)]

Al observar un corte transversal, se forma un triángulo rectángulo con el centro de la esfera, un punto en el borde de la base del cilindro y el centro de la base del cilindro. Los lados de este triángulo son:

- Hipotenusa: El radio de la esfera, r.
- Un cateto: El radio del cilindro, x.
- Otro cateto: La mitad de la altura del cilindro, $h/2$.

2. Ecuación de Restricción

Aplicando el Teorema de Pitágoras a este triángulo, obtenemos nuestra ecuación de restricción:

$$x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 \implies x^2 + \frac{h^2}{4} = r^2$$

De esta ecuación, es conveniente despejar x^2:

$$x^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$

3. Optimización de la Función de Volumen

Sustituimos la expresión para x^2 en la fórmula del volumen para obtener una función de una sola variable, h:

$$V(h) = \pi \left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) h = \pi \left(r^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

El dominio físico para la altura es $0 < h < 2r$. Para encontrar el volumen máximo, derivamos $V(h)$ con respecto a h e igualamos a cero.

$$V'(h) = \frac{d}{dh}\left[\pi \left(r^2 h - \frac{h^3}{4}\right)\right] = \pi \left(r^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$$

Igualando a cero para encontrar los puntos críticos:

$$\pi \left(r^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \implies r^2 = \frac{3h^2}{4}$$

$$4r^2 = 3h^2 \implies h^2 = \frac{4r^2}{3} \implies h = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$$

Para verificar que este valor corresponde a un máximo, usamos el criterio de la segunda derivada:

$$V''(h) = \frac{d}{dh}\left[\pi \left(r^2 - \frac{3h^2}{4}\right)\right] = \pi \left(-\frac{6h}{4}\right) = -\frac{3\pi h}{2}$$

Como h es una altura, $h > 0$, por lo que $V''(h)$ es siempre negativa. Esto confirma que hemos encontrado un máximo.

4. Conclusión y Resultados

Hemos encontrado la altura óptima del cilindro. Ahora encontramos el radio óptimo x usando la ecuación de restricción:

$$x^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} = r^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4r^2}{3}\right) = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2r^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}r}{3}$$

Finalmente, el volumen máximo es:

$$V_{\text{max}} = \pi x^2 h = \pi\left(\frac{2r^2}{3}\right)\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi r^3}{9}$$

Resumen de las dimensiones del cilindro de volumen máximo:

- **Altura:** $h = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$
- **Radio:** $x = \frac{\sqrt{6}r}{3}$
- **Volumen Máximo:** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi r^3}{9}$

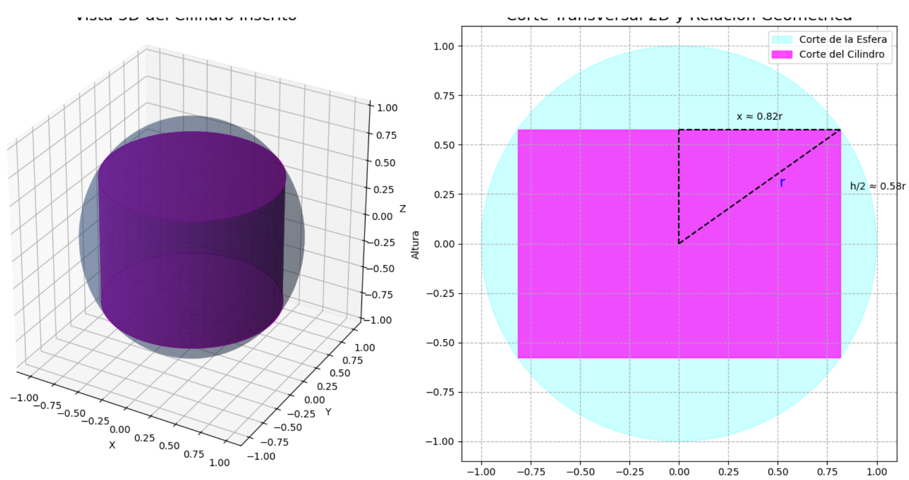

Figura 5: Cilindro y esfera